

Universidade Federal do Maranhão  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática

**CLEONILSON DOS REIS FERREIRA**

**CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE: uma proposta para  
o processo ensino-aprendizagem do 7<sup>o</sup> ano do ensino  
fundamental**

**SÃO LUÍS-MA**

**2013**

Universidade Federal do Maranhão  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática

**CLEONILSON DOS REIS FERREIRA**

**CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE: uma proposta para  
o processo ensino-aprendizagem do 7º ano do ensino  
fundamental**

Dissertação apresentada como requisito parcial  
à obtenção do grau de Mestre pelo PROFMAT,  
Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Prof. Dr. José Cloves Verde Saraiva

**SÃO LUÍS-MA**

**2013**

Universidade Federal do Maranhão  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática

CLEONILSON DOS REIS FERREIRA

CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE: uma proposta para o  
processo ensino-aprendizagem do 7º ano do ensino fundamental

Área de Atuação: Educação

Aprovada em: ...../...../.....

---

Prof. Dr. José Cloves Verde Saraiva  
Universidade Federal do Maranhão

---

Prof. Dr. Meu Co-orientador  
Universidade Federal do Maranhão

---

Prof. Dr. Convidado  
Universidade

*A Clerystane,  
Andre Felipe e Marcos Paulo.*

## AGRADECIMENTO

À Deus, pois me deu todas as condições de realizar um grande sonho, que pensava ser impossível.

À minha esposa Clerystane, pelo incentivo, dedicação, compreensão e amor.

Aos meus filhos André Felipe e Marcos Paulo, por compreender a minha ausência em alguns momentos de suas vidas.

Ao meu pai Sodr e e a minha m e Cleonice por tudo que me ensinaram.

Ao meu irm o Higno e a minha irm  Iraci pelo apoio e incentivo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jos  Cloves Verde Saraiva, pela aten o e paci ncia.

  Universidade Federal do Maranh o.

  Coordena o do Curso de P s-Gradua o em Matem tica, representado pelo Prof. Dr. Jo o de Deus Mendes da Silva.

Ao Prof. Dr. Adriano Rodrigues Ruiz pela gentileza, presteza e ajuda na constru o deste trabalho.

Aos meus professores e colegas de mestrado que estiveram comigo durante este curso.

  dire o e aos colegas da minha escola, Centro de Ensino Gra a Aranha, assim como os meus alunos que participaram na constru o deste trabalho.

  todos os meus irm os em Cristo que torcem pelo meu sucesso.

  CAPES, por ter me concedido a bolsa de estudo, fundamental para as viagens semanais.

Finalmente, a todos, que de alguma forma contribu ram para a realiza o deste trabalho.

*“E sabemos que todas as coisas contribuem juntamente para o bem daqueles que amam a Deus e que são chamados por seu decreto”.*

*(Rm. 8: 28).*

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo propor uma sequência didática, onde é abordado o conceito de proporcionalidade tratados nos conteúdos do 7º ano do ensino fundamental, por meio da determinação da constante de proporcionalidade e da relação entre as grandezas (variáveis) proporcionais. A sequência de ensino orienta-se em uma pesquisa de Ruiz (1986), sobre o conceito de proporcionalidade, um trabalho de Perotti (1999) sobre o estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais e as definições de proporcionalidade de Ávila (1986) e de Lima (2006). Uma das ferramentas auxiliares de ensino utilizadas na aplicação da sequência foi o software Geogebra, além do uso de outros materiais como: cartão, palitos, bastões, papel e lápis. A sequência foi aplicada com alunos do terceiro ano do ensino médio de uma escola pública da cidade de Imperatriz, interior do estado do Maranhão. Os resultados obtidos levam a concluir que houve uma evolução significativa por parte dos alunos, na apreensão do conceito de proporcionalidade, propiciados pela compreensão e o relacionamento entre a constante de proporcionalidade e as variáveis dos problemas; e pelas devidas articulações entre os diferentes conteúdos relacionados com o conceito de proporcionalidade.

**PALAVRAS CHAVE:** ensino de matemática, construção de conceito, proporcionalidade, Geogebra.

## ABSTRACT

The objective of this paper is to propose a didactic sequence, in which is discussed the concept of proportionality inserted in the 7th grade subjects, through the determination of the constant of proportionality and the relation between the proportional largeness (variable). The sequence of its teaching is oriented by a research from Ruiz(1986), about the concept of proportionality, a work from Perroti (1999) about the study of the line as from the largeness directly proportional and the definitions of the proportionality of Avila(1986) and Lima (1988). One of the teaching instruments used on the application of the sequence was the Geogebra software as well as the use of materials such as: cards, sticks, paper and pencils. The sequence was applied to some high school students from a public school in Imperatriz city in the state of Maranhao. The achieved results conclude that there was a significative evolution in the students, in the apprehension of the proportionality concept, brought by the comprehension and the relationship between the proportionality and the variable of the problems; and by the articulations between the different subjects related to the concept of proportionality.

KEYWORDS: Math Teaching, Construction of Concept, Proportionality, Geogebra.



## Lista de Figuras

Figura 1	Imagem dos palitos .....	54
Figura 2	Gráfico da Tarefa 1 .....	55
Figura 3	Imagem dos retângulos .....	55
Figura 4	Imagem das hastes .....	57

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Justificativa, problemática e objetivo.....</b>	<b>15</b>
2.1	Justificativa.....	15
2.2	Problemática .....	16
2.3	Objetivo da Pesquisa.....	18
2.4	Objetivos Especificos.....	18
<b>3</b>	<b>Estudos realizados em trabalhos e documentos oficiais.....</b>	<b>20</b>
3.1	Trabalhos de referências para a sequência de atividades .....	20
3.1.1	Conceituais .....	20
3.1.1.1	Proporcionalidade segundo Geraldo Ávila .....	20
3.1.1.2	Proporcionalidade segundo Elon Lima .....	23
3.1.2	Metodológicos .....	25
3.2	Proporcionalidade em outros trabalhos .....	26
3.3	Parâmetros Curriculares Nacionais .....	29
<b>4</b>	<b>Sugestão de uma sequência de atividades com aplicação em sala .....</b>	<b>34</b>
4.1	Proposta de sequência.....	34
4.1.1	Objetivos .....	34
4.1.2	Público alvo .....	35
4.1.3	Pré-requisitos .....	35
4.1.4	Materiais e tecnologias .....	35

4.1.5	Recomendações metodológicas .....	35
4.1.6	Dificuldades previstas .....	36
4.1.7	Descrição geral .....	36
4.1.8	Possíveis continuações ou desdobramentos .....	38
4.1.9	Descrição .....	39
4.1.10	Avaliação prévia .....	39
4.1.11	Metodologia de aplicação .....	40
4.1.12	Análise dos resultados .....	40
4.1.13	Avaliação geral e conclusões .....	41
<b>5</b>	<b>Conclusões .....</b>	<b>43</b>
	<b>Tabelas .....</b>	<b>45</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>50</b>
	<b>Apêndice 1 .....</b>	<b>53</b>
	<b>Apêndice 2 .....</b>	<b>54</b>
	<b>Apêndice 3 .....</b>	<b>65</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Desde o início da vida acadêmica e depois como docente do ensino básico, primeiro no ensino médio e logo em seguida no ensino fundamental, ouve-se que a causa do baixo nível de conteúdos, competências e habilidades por parte dos alunos que estão em certo nível escolar (superior, médio e fundamental maior) tem como causa a deficiência no processo ensino-aprendizagem do nível escolar imediatamente anterior.

A experiência em sala de aula do professor de matemática, mostra que as dificuldades e distorções, por parte dos alunos, no ensino-aprendizagem da matemática, se inicia nos primeiros anos escolares; e ao longo dos anos, se não for corrigido tende a se agravar.

Com frequência, no 7º ano é seguida a sequência do livro didático, mas nunca se questiona o porquê de assuntos que tem o mesmo conceito, serem tratados separadamente e sem nenhuma ligação, relação ou associação. Por exemplo: a divisão de números naturais, as frações, os números decimais, as razões, as porcentagens e as escalas são assuntos que tem como conceito fundamental a proporcionalidade.

Além dessa sistematização e compartimentação excessiva dos conteúdos do 7º ano no processo ensino-aprendizagem. Observa-se nos livros didáticos, dentro dos conteúdos de proporções, grandezas direta e inversamente proporcionais, a utilização da regra de três simples e composta. Esta é a mais difundida ferramenta (algoritmo), para resolução de problemas envolvendo proporcionalidade. A abordagem dada pela maioria dos livros didáticos enfatiza basicamente a memorização e aplicação direta da regra. A regra de três simples, a maioria dos alunos conseguem memorizar e aplicar corretamente. Mas até para estes, constata-se que eles não sabem porque fazem isso, isto é, a regra não tem nenhum significado. Já na regra de três composta, a minoria consegue memorizar e aplicar corretamente. O autor do presente estudo, anteriormente, nunca conseguia resolver um problema de enunciado “inédito” de proporcionalidade que tivesse mais de duas grandezas, utilizando a regra de três composta.

Quando o pesquisador do presente trabalho iniciou o curso do Profmat, já no primeiro semestre, teve a oportunidade de esclarecer e aprofundar os seus conhecimentos relacionados às dificuldades e questionamentos acima. Estes aprofundamentos se deram em dois momentos. O primeiro momento foi na disciplina MA11(Números, conjuntos e funções elementares), ao estudar a lei da proporcionalidade, a constante de proporcionalidade, a função afim, e sua caracterização dentro do livro, “**A matemática do ensino médio vol 1**”, do professor Elon Lages Lima. O segundo momento se deu quando teve acesso ao livro, “**Geraldo Ávila visita São Luis**”, do professor José Cloves Verde Saraiva. Este livro contém uma pequena parte, da vasta publicação dos artigos de matemática, produzidos pelo professor Geraldo Ávila. Dentre todos os artigos, que são muito bons, chamou a atenção e o interesse os “Razões, proporções e regra de três” e “Ainda sobre a regra de três”.

Agora, compreendendo a lei de proporcionalidade, determinando e utilizando a constante de proporcionalidade, construindo a relação de proporcionalidade decorrente de grandezas (variáveis) proporcionais compreendemos, absorvemos e aprendemos o conceito de proporcionalidade. Assim sendo, tornou-se para o autor desnecessário a memorização e utilização da regra de três simples e composta para resolver problemas que envolvam relações de grandezas(variáveis) proporcionais.

Devido ser um conceito importante pelo motivo de ser básico, abrangente e progressivo dentro da matemática e fora dela. E por está tendo, ainda, uma abordagem ensino-aprendizagem de forma mecânica, desprovida de sentido e continuidade; e por querer sugeri outra abordagem, que considero muito mais significativa e construtiva, resolvi escolher a construção de uma sequencia didática dentro do estudo desse tema como trabalho de conclusão de curso.

A idéia inicial era propor uma sequência didática para o ensino dos conteúdos da educação básica que tem o conceito de proporcionalidade. Seriam tratados os conteúdos desde razão até função afim. Caracterizando, utilizando e aplicando a lei de proporcionalidade e a constante de proporcionalidade. Vimos que seria um estudo muito grande e complexo para se propor uma sequencia didática para aplicação direta em sala, que servisse desde o ensino fundamental, nos 7° anos, até o ensino médio, nos 3° anos. Assim teríamos que escolher em qual fase iríamos fazer o estudo e sugeri a sequência. Primando pela importância que temos que dá aos conteúdos iniciais envolvendo o conceito de proporcionalidade decidimos fazer o estudo e propor uma sequência didática aplicável ao 7° ano do ensino fundamental.

Pelo acima tratado, portanto, com a expectativa de obter novas respostas às questões referentes ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática, lançamo-nos nesse desafio de pesquisar sobre a temática do conceito de proporcionalidade visto no 7º ano do ensino fundamental.

A dissertação está organizada em cinco capítulos abaixo destacados.

O primeiro capítulo, Introdução, é este que estamos finalizando.

No segundo capítulo, Justificativa, Problemática e Objetivo, apresentamos a construção do objeto de pesquisa relativo ao conceito de proporcionalidade e os objetivos que pretendemos atingir com esse estudo.

No terceiro capítulo, Estudos realizados em trabalhos e documentos oficiais, é apresentado os diversos estudos, trabalhos acadêmicos e documentos oficiais federais relacionados com o tema.

No quarto capítulo, Sugestão de uma sequência de atividades com aplicação em sala, fazemos a apresentação e a aplicação da sequência.

No quinto capítulo, finalizando, apresentamos as conclusões da nossa pesquisa.

## 2 Justificativa, problemática e objetivo

### 2.1 Justificativa

O conceito de proporcionalidade é um dos mais antigos conceitos matemáticos. A história da matemática nos mostra vestígios de estudos e aplicação da proporcionalidade nas primeiras civilizações da Antiguidade. Costa Junior(2010) faz um estudo sobre o conceito de proporcionalidade dentro da história da matemática descrevendo os aspectos que as civilizações egípcia, babilônica, grega e hindu tinham sobre o tema.

Este conceito está dentro da operação de multiplicação associado a uma relação matemática entre grandezas(números, variáveis). Constatado essa essência vemos que a proporcionalidade além de seu um conceito antigo é também um conceito com princípios básicos.

Temos também um aspecto importante da proporcionalidade que é o seu crescimento e aprofundamento; e por consequente, a expansão e a aplicação em áreas e conteúdos não somente da matemática como também em outros conhecimentos. Este conceito está presente dentro Geografia, Física, Engenharia, Contabilidade, Química, entre outros, e está ainda presente como um princípio dentro do próprio Direito. Dentro da matemática vemos este conceito presente desde a Geometria, no Teorema de Tales, até a Álgebra, na Função Afim.

A maior parte das situações-problemas do dia-a-dia são os que envolvem somente a operação de dois números por meio da adição, subtração, multiplicação e divisão. O cidadão depois que domina as quatro operações vai ter que lidar com problemas envolvendo proporcionalidade. Assim pode-se afirmar que o cidadão com domínio das quatro operações matemática vai lidar com situações-problemas do seu dia-a-dia onde a maioria destes envolve o conceito de proporcionalidade. Problemas, desde determinar o valor a pagar por certa quantidade de pães, tendo o preço unitário; até determina a altura de um prédio de 10 andares, tendo a altura de um dos andares.

Tendo isso em vista, percebe-se que o conceito de proporcionalidade é um conceito antigo, básico, abrangente, contínuo e aplicável no dia-a-dia do cidadão comum.

## 2.2 Problemática

Apesar da abrangência e relevância, verifica-se que muitos alunos apresentam dificuldades sobre o conceito de proporcionalidade conforme a última avaliação do SAEB(2011). O fato dos alunos confundirem atributos de conceitos com os exemplos faz com que eles não alcancem uma generalização do mesmo. Além disso, muitos deles não associam o conceito de proporcionalidade aos diversos conteúdos que englobam a proporcionalidade, confundem o conceito com uma única representação e ainda utilizam a regra de três de forma mecânica sem compreender o que realmente estão fazendo ou significando. Martins (2007) estudou as práticas vigentes nas aulas sobre proporção em duas turmas do 7º ano e constatou uma prática docente centrada no método da cópia e repetição, sendo constante o hábito de o professor propor listas de exercícios que propiciavam aos alunos somente a memorização de técnicas de resolução.

Existem vários estudos relacionados ao tema que mostram no universo dos alunos um baixo rendimento em teste com problemas de proporcionalidade. Floriani(2004) aplicou, a um grupo de 82 alunos do ensino fundamental e médio, um teste com nove problemas multiplicativos do tipo isomorfismo de medidas adaptado de Vergnaud. Os resultados demonstraram, em vários problemas, que os alunos muitas vezes não conseguem reconhecer a proporcionalidade como uma relação multiplicativa; houve tentativas no sentido de utilizar relações aditivas para resolver estes problemas, o que se constitui em um indício da não compreensão do conceito de proporcionalidade. Também a utilização incorreta do algoritmo na regra de três nos problemas de proporção inversa mostra que alguns alunos a utilizam sem terem muita clareza das relações que nele estão representadas.

Outras pesquisas, Gonçalves(2010), confirmam as dificuldades apontadas do ensino-aprendizagem deste conceito, tanto no ensino fundamental como no ensino médio. Existem ainda estudos, Ruiz(1985) e Perotti(1999), que sugerem sequências-didática para o ensino-aprendizagem deste conceito. Outros estudos, Costa( 2005); e Soares e Nehring(2012) fazem análise do conceito de proporcionalidade dentro dos livros didáticos.

Destacamos os estudos elaborados por Ávila(1985, 1986a, 1986b) e Lima(1986, 1988, 2006), que constroem e definem, de uma forma mais clara e ampla o conceito de proporcionalidade, mostram inicialmente que se trata de uma relação matemática entre



duas grandezas (variáveis) e depois adequam como uma função. Eles caracterizam esse tipo de função (função linear) e destacam a importância da constante de proporcionalidade.

O professor Ávila faz uma crítica dura tanto aos livros como aos professores que ainda utilizam as regras de três simples e composta, desprovida de sentido para o aluno, para a resolução de problemas que envolvem o conceito de proporcionalidade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1998) também cita a importância do conceito de proporcionalidade quando traz como um dos objetivos a serem atingidos no ensino da Matemática, no terceiro ciclo, desenvolver

“Do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade”. (PCN-EF), 1998

Com base nos trabalhos acima citados, verifica-se a importância do tema para o ensino da matemática e ao mesmo tempo constata-se as dificuldades e a inadequação do atual processo ensino-aprendizagem. Os PCN's preconizam para o 7º ano um estudo do conceito de proporcionalidade que promova o desenvolvimento do aluno, com estímulos à autonomia de estratégias de resolução de problemas sem a utilização de procedimentos desprovido de sentido, como a regra de três.

Trata-se de uma proposta viável, haja vista o relato de autores (SCHLIEMANN e CARRAHER, 2006; SPINILLO, 1997) que pesquisaram sobre o raciocínio proporcional. Em seus trabalhos eles verificaram que este modo de pensar foi utilizado, de forma intuitiva, por adultos e crianças na resolução de problemas que envolviam o pensamento proporcional, mesmo não tendo recebido previamente instrução formal sobre proporcionalidade.

Entendemos, a partir das considerações expostas, que em alguns casos as dificuldades dos alunos na utilização do conceito de proporcionalidade dentro da Matemática e em outras áreas do conhecimento têm como causa a metodologia de ensino. Acreditamos que os livros didáticos, que dão grande ênfase a memorização e utilização de algoritmo, e a falta ou o pouco conhecimento de boa parte dos professores em relação à estrutura do conceito de proporcionalidade tem limitado o desenvolvimento dos conteúdos relacionados e decorrentes deste conceito nos alunos.

Assim, neste estudo, levantamos a hipótese de *o problema não se resume em ensinar o conceito de proporcionalidade, mas, sobretudo em como ensinar este conceito*. Pensando nessa direção foi feito este estudo visando sugerir uma nova metodologia de ensino dos conteúdos do 7º ano do ensino fundamental relacionados com o conceito de proporcionalidade. Onde a essência fosse a construção desse conceito a partir de observações e resoluções de situações e atividades diversas e diferentes.

Dentro desta problemática, pretender-se-á dar a nossa contribuição no sentido de implementar uma proposta para o ensino-aprendizagem do conceito de proporcionalidade baseado nos trabalhos de Ávila(1985, 1986a, 1986b), Lima(1986, 1988, 2006), Ruiz(1985) e Perotti(1999). Logo de início, tomamos por hipótese que é necessário trabalhar os conceitos de relação, de variação, da lei de proporcionalidade, de constante de proporcionalidade e das várias formas onde este conceito se apresenta, para a melhor compreensão de proporcionalidade. Assim, pretendemos responder às seguintes questões:

- Nossa sequência didática possibilitará a participação dos alunos na elaboração do conceito de proporcionalidade?
- Após a aplicação de nossa sequência didática, os alunos terão dado um salto qualitativo nas suas concepções do conceito de proporcionalidade.
- Quais serão os efeitos positivos e negativos da aplicação da sequência didática que construímos? E, onde ela deve ser modificada para atender as deficiências e os entraves identificados?

## 2.3 Objetivo da Pesquisa

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem dos conteúdos, do 7º ano do ensino fundamental, que estão relacionados com o conceito de proporcionalidade. Partindo do concreto para o abstrato, isto é, do geométrico para o métrico e do métrico para o numérico. Tendo como bases principais os trabalhos de Ávila, Ruiz, Lima e Perotti.

## 2.4 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos enumeramos os seguintes:

- Verificar que o atual processo ensino-aprendizagem do conceito de proporcionalidade está tendo uma abordagem com ênfase em algoritmos, técnicas e métodos em detrimento de ideias e conceitos;
- Reconhecer que a lei de proporcionalidade abrange vários conteúdos de matemática com aplicação direta em diversas áreas do conhecimento;
- Propor e aplicar uma sequência didática com objetos de aprendizagem em conteúdos do 7º ano do ensino fundamental centrada no conceito de proporcionalidade.

### 3 Estudos realizados em trabalhos e documentos oficiais

Neste capítulo trataremos de alguns trabalhos já realizados que trataram sobre o conceito de proporcionalidade. Trabalhos estes que abordaram tanto a área conceitual como a área metodologia do ensino-aprendizagem do tema. Além destas pesquisas vamos analisar o que os Parâmetros Curriculares Nacionais - 1998.

#### 3.1 Trabalhos de referências para a sequência de atividades

##### 3.1.1 Conceituais

###### 3.1.1.1 Proporcionalidade segundo Geraldo Ávila

Em seu artigo, Ávila (1986) faz preliminarmente uma análise histórica das proporções, mostrando que as teorias das proporções de Eudoxo permitiram vencer a barreira dos incomensuráveis sem a necessidade dos números irracionais. Daí, sua importância, para os fundamentos da Matemática, havia de durar até o século XIX, quando seria substituída pelas teorias dos números reais criadas por Dedekind(1831-1916) e outros matemáticos. Ávila (1986) afirma que não precisamos mais usar a superada teoria geométrica das proporções e tudo que decorre dela, principalmente na maneira de apresentar fatos, como os problemas de regra de três. Ele destaca que estes podem ser ensinados no contexto algébrico, de resolução de equações, com a dupla vantagem da simplificação e unificação do ensino da Matemática. Abaixo temos a definição de proporcionalidade direta e inversa segundo Ávila.

**Definição 1.** *Diz-se que duas variáveis(ou grandezas)  $x$  e  $y$  são proporcionais - mais especificamente, diretamente proporcionais - se estiverem relacionadas:  $y = kx$  ou  $\frac{y}{x} = k$ , onde  $k$  é uma constante positiva chamada constante de proporcionalidade.*

**Definição 2.** *Diz-se que as variáveis  $x$  e  $y$  são inversamente proporcionais se*

$y = \frac{k}{x}$  ou  $x.y = k$ , onde  $k$  é uma constante positiva(constante de proporcionalidade).

Ávila mostra duas situações-problemas, uma direta e a outra inversamente proporcional, destacando as variáveis e a constante de proporcionalidade. Ele apresenta também casos onde pode ter mais de duas variáveis envolvidas, citando como exemplo a lei de Boyle e Mariotte, onde temos a pressão  $P$  do gás, seu volume  $V$  e temperatura  $T$ (medida em grau Kelvin =  $273 +$  graus centígrados) e uma constante  $k$  satisfazendo a seguinte relação;

$$P.V = k.T$$

Ávila ainda faz três análise mantendo uma das variáveis fixas( $P$ ,  $V$  e  $T$ ) e observa o que acontece com a terceira variável quando ele varia a segunda variável. Por exemplo: mantendo a pressão constante e deixando que variem o volume, observamos que a temperatura é diretamente proporcional ao volume. Assim ele verificar todas as relações de proporcionalidade entre as variáveis. Disto decorrem as relações abaixo:

$$P.V = k.T \iff P = k.\frac{T}{V} \iff V = k.\frac{T}{P} \iff T = P.\frac{V}{k}$$

Em cima dos exemplos acima e das considerações feita Ávila(1985) sugere uma definição mais geral que as anteriores e que abrange estas duas.

**Definição 3.** *Se várias variáveis, digamos,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $w$ ,  $r$ ,  $s$  estão relacionadas por uma equação do tipo*

$$z = k.\frac{x.y.w}{r.s}$$

onde  $k$  é uma constante, então dizemos que  $z$  é diretamente proporcional a  $x$ , a  $y$ , e a  $w$ ; e inversamente proporcional a  $r$  e a  $s$ . Ele resolve o exemplo abaixo usando as definições acima.

Uma pessoa, datilografando 60 toques por minuto e trabalhando 6 horas por dia, realiza certo trabalho em 10 dias. Quantos dias levará outra pessoa para fazer o mesmo trabalho se ela datilografa 50 toques por minuto e trabalha 4 horas por dia? Temos aqui duas pessoas,  $A$  e  $B$  e três variáveis: toque por minuto,  $T$ , horas de trabalho por dia,  $H$ , e dias de trabalho,  $D$ . Esquematicamente,

Pessoa	T	H	D
A	60	6	10
B	50	4	x

Seja  $k$  o número de toques necessário para realizar o trabalho. Uma pessoa que faz  $T$  toques por minuto fará  $60T$  toques por hora e, trabalhando  $H$  horas por dia, durante  $D$  dias, fará  $60.T.H.D$  toques ao todo. Portanto,

$$60.T.D.H = k \quad (3.1)$$

De acordo com a definição 3, esta equação informa que qualquer uma das grandezas  $H, T$  e  $D$  é inversamente proporcional às outras duas. Substituindo em (2.1) as duas sequencias de valores dados no problema, obtemos:

$$60.60.6.10 = k \quad \text{e} \quad 60.50.4.x = k$$

Daí, segue que:

$$60.50.4.x = 60.60.6.10$$

Resolvendo esta equação, chegamos ao resultado:  $x = 18$  dias.

Ávila(1986) depois que faz a abordagem histórica das proporções e proporcionalidade; e enunciar as definições acima, ele passa a analisar a pratica corrente de ensinar esse tema. Inicia analisando a regra de três mostrando que esta regra não tem justificativa lógica e nem sempre produz resultados corretos da maneira com vem sendo ensinado. Cita alguns exemplos concreto da inadequação da regra. Além dessa critica a mecanização do algoritmo da regra de três, ela chama a atenção para a forma como a propriedade fundamental das proporções está sendo ensinado. Os livros e professores deixar no aluno a impressão de ser uma propriedade exclusiva de “razões e proporções”, quando na verdade é uma propriedade das igualdades, que deve ser tratada e relacionada também no estudo das equações. Tendo inicio no estudo das frações ordinárias.

Ávila(1986) mostra vários exemplos de situações-problemas com as suas resoluções utilizando as suas definições. Mostra também que a terceira lei de Kepler tem uma constante de proporcionalidade e que  $T^2$  é proporcional a  $R^3$ , isto é,

$$T^2 = k.R^3 \iff \frac{T^2}{R^3} = k$$

Ele conclui que a regra de três foi muito usada no comércio por vários séculos, porém como simples regra, formulada verbalmente e aplicada de maneira mecânica sem qualquer explicação racional. Cita que nos Estados Unidos a regra de três não é mais conteúdo dos livros americanos modernos. Ele finaliza sugerindo que o nome “regra de três” seja abolido entre nós.

### 3.1.1.2 Proporcionalidade segundo Elon Lima

Lima (2006) apresenta uma definição dada por Antônio Trajano em seu livro “Aritmética Progressiva” cuja 2ª edição data de 1884. Em relação a definição de Trajano, Lima (2006, p.126) observa que ele se refere a um número real (positivo) qualquer e que, na prática, é difícil verificar que “a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número”, a não ser quando esse número é inteiro. Lima (2006) considera que Trajano apresenta uma definição simples, clara e elementar. No entanto, ele observa que mesmo após um século da definição dada por Trajano, autores contemporâneos ainda fazem certas confusões sobre grandezas direta e inversamente proporcionais. Na tentativa de esclarecer o conceito e a importância da proporcionalidade, Lima (2006, p.127) apresenta sua visão sobre esse tema. Esse autor propõe inicialmente a seguinte definição:

**Definição 4.** *Suponhamos que a grandeza  $y$  seja função da grandeza  $x$ , isto é,  $y = f(x)$ . Diremos que  $y$  é diretamente proporcional a  $x$  quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

1.  $y$  é uma função crescente de  $x$ ;
2. se multiplicarmos  $x$  por um número natural  $n$ , o valor correspondente de  $y$  também fica multiplicado por  $n$ . Em termos matemáticos:  $f(n.x) = n.f(x)$  para todo valor de  $x$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 5.** *Analogamente, diz-se que  $y$  é inversamente proporcional a  $x$  quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

1.  $y = f(x)$  é uma função decrescente de  $x$  e;
2. ao se multiplicar  $x$  por um número natural  $n$ , o valor correspondente de  $y$  fica dividido por  $n$ , isto é,  $f(n.x) = \frac{f(x)}{n}$  para todo valor de  $x$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Contudo, ao testar as condições propostas em situações-problema, Lima (2006) observou que uma grandeza  $y$  pode ser uma função crescente (ou decrescente) de uma grandeza  $x$  sem que haja uma relação proporcional (direta ou inversamente) entre as mesmas. Assim, Lima (2006, p.129-130) estabelece dois teoremas, os quais considera como resultados fundamentais no que concerne às grandezas proporcionais:

**Teorema 2.1.** *As seguintes afirmações a respeito de  $y = f(x)$  são equivalentes:*

1.  $y$  é diretamente proporcional a  $x$ ;
2. para todo número real  $c > 0$ , tem-se  $f(c.x) = c.f(x)$
3. existe um número  $k$ , chamado a “constante de proporcionalidade” entre  $x$  e  $y$ , tal que  $f(x) = k.x$  para todo  $x$ .

**Teorema 2.2.** *As seguintes afirmações a respeito de  $y = f(x)$  são equivalentes:*

1.  $y$  é inversamente proporcional a  $x$ ;
2. para todo número real  $c$ , tem-se  $f(c.x) = \frac{x}{c}$ ; e
3. existe um número  $k$ , chamado a ”constante de proporcionalidade” entre  $x$  e  $y$ , tal que  $f(x) = \frac{k}{x}$  para todo  $x$ .

Lima (2006) considera que sua definição de proporcionalidade é equivalente à definição apresentada por Trajano. Entretanto, ao olhar sob a perspectiva da aplicabilidade, o mesmo acredita que a definição apresentada por ele permite de maneira mais simples constatar em um problema se uma grandeza  $y$  é proporcional (direta ou inversamente) a uma grandeza  $x$ .

A partir das fórmulas  $y = k.x$  e  $y = \frac{k}{x}$ , Lima (2006, p.131) propõe uma nova maneira de definir proporcionalidade entre duas grandezas:

**Definição 6.** *Sejam  $x', x'', x''', \text{ etc.}$ , valores assumidos por  $x$  e  $y', y'', y''', \text{ etc.}$ , os valores correspondentes de  $y$ . Então, a fim de que  $y$  seja diretamente proporcional a  $x$  é necessário e suficiente que*

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = \frac{y'''}{x'''} = \dots$$

sendo o valor comum desses quociente igual à constante de proporcionalidade  $k$ . Com efeito, afirmar que  $y' = k.x'$  ;  $y'' = k.x''$ ;  $y''' = k.x'''$  ; ... equivale a dizer

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = \frac{y'''}{x'''} = k$$

**Definição 7.** *Analogamente, a fim de  $y$  seja inversamente proporcional a  $x$  é necessário e suficiente que  $x'.y' = x''.y'' = x'''.y''' = \dots = k$*

Concordamos com Lima (2006) quando sugere que ao se propor resolver uma situação-problema, é necessário primeiramente verifica se existe uma relação proporcional



(direta ou inversamente) entre as grandezas envolvidas, pois caso não exista a relação de proporcionalidade o modelo apresentado nas definições não servirá. Em sua opinião, a qual apoiamos, ao se resolver uma questão que envolve proporcionalidade, a equação  $y = k.x$  ou  $y = \frac{k}{x}$  deve ser a etapa final da resolução.

### 3.1.2 Metodológicos

Em seu trabalho, Ruiz(1985) testa uma metodologia para o ensino de proporções, com ênfase na formação do conceito de proporcionalidade, levando em consideração o fato de que o raciocínio proporcional envolve uma estrutura de pensamento bastante complexa. Com essa preocupação, desenvolve as atividades de ensino, explorando situações manipulativas e utilizando conceitos que apresentam parentescos próximo com proporções.

A metodologia a que nos referimos anteriormente, utilizou um plano experimental com a estrutura que Campbell e Stanley (1979) chamam de Delineamento com Grupo de Controle Não-Equivalente. Esse modelo experimental envolve um grupo de controle e um grupo experimental.

O objetivo do trabalho ao desenvolver o presente experimento, foi explorar atividades que favorecessem o desenvolvimento do raciocínio proporcional e, a partir daí, os alunos pudessem estabelecer algoritmos e leis gerais.

Ruiz(1985) mostra que os resultados alcançados pelos alunos do grupo experimental, tanto no pós-teste como no teste de retenção afirmaram que o material instrucional e os procedimentos que adotados revelaram-se eficientes, constituindo-se numa opção muito válida para o ensino de proporções, buscando uma aprendizagem significativa.

Perotti(1990) em seu trabalho, “O estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais: Uma proposta alternativa de ensino”, apresenta uma seqüência didática que possibilita aos alunos a aprendizagem da equação da reta com ênfase no conceito de coeficiente angular, calculado pela taxa de variação.

Para atingir o objetivo proposto, Perotti(1999) considera três aspectos. Em primeiro lugar, a seqüência deve ser iniciada por questões contextualizadas, isto é, a partir de situações-problema. Em segundo lugar, a seqüência deve partir do conceito de grandezas diretamente proporcionais, por ser esta uma idéia simples e provavelmente do domínio dos alunos. Em terceiro lugar, o coeficiente angular deve ser trabalhado por meio da taxa de variação  $\Delta y$ , o que facilita a sua  $\Delta x$  determinação. A aplicação do

experimento se deu no Núcleo de Educação e Cultura de Mogi das Cruzes contando com a participação de 14 alunos, sendo 8 do 1º Colegial e 6 do 2º Colegial. O pesquisador Perotti(1999) relata que os alunos participaram com entusiasmo de todas as atividades e ao final responderam o questionário de avaliação com alto índice de acertos.

Considerou-se então que os resultados obtidos foram satisfatórios e indicam que no estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais com ênfase na taxa de variação para determinar o coeficiente angular, como uma proposta alternativa de ensino para este conteúdo.

O autor, Perotti(1999), constatou seguramente que houve uma preferência efetiva pelo método de ensino que foi utilizado, em detrimento do modelo tradicional de aulas expositivas. Os alunos participavam ativamente das atividades, à medida que o trabalho caminhava, mais engajado se tornava o grupo.

## 3.2 Proporcionalidade em outros trabalhos

Nas últimas três décadas, conforme Miranda (2009), vários trabalhos em Educação Matemática, Ensino de Matemática, Educação em Ciências e Psicologia Cognitiva tratam de proporções ou proporcionalidade.

Fizemos estudo de vários outros trabalhos como Costa (2005), “Soares e Nering” (2012), Pontes, (1996), Schliemann e Carraher (1997), Spinillo (1997, 2002), Oliveira (2000), Bernal (2004), Miranda(2009), Costa Junior(2010), Gonçalves(2010) e Silva e Guerra(2011).

Costa (2005) apresenta a análise e a comparação dos conteúdos razões e proporções entre três livros didáticos e de cada um deles com a proposta curricular correspondente à década de sua publicação, no intuito de verificar se os conteúdos razões e proporções nos três livros didáticos estão em sintonia com os documentos oficiais relativos às reformas do ensino. Os três livros didáticos de matemática analisados pelo autor são referentes ao Ensino Básico, especificamente, livros do 7º ano do Ensino Fundamental.

Em suas conclusões Costa (2005) afirma que os três livros didáticos analisados dão subsídios parciais aos professores, pois não estão plenamente elaborados de acordo com os documentos oficiais dos órgãos governamentais. A partir do exposto por Costa (2005), podemos dizer que os referidos documentos se apresentam como ponto de apoio ao trabalho docente. Contudo, estes documentos (tanto os livros quanto as propostas curri-

culares) deixam clara a responsabilidade do professor no êxito do ensino da Matemática.

Pontes (1996) apresenta um estudo sobre Medidas e Proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho. A autora apresenta uma análise da relação existente entre a matemática escolar e a que permeia as atividades cotidianas dos trabalhadores de diferentes profissões que não dependem de escolarização formal.

Para tal finalidade, Pontes (1996) no primeiro momento elabora e analisa uma sequência didática aplicada em classes de 7º e 8º anos. E num segundo momento, foram observados uma costureira, um comerciante, uma cozinheira, um marceneiro, um mestre de obras e um oleiro em suas jornadas de trabalho, procurando perceber que itens eram abordados e como eram usados os conceitos de Medida e Proporcionalidade por estes profissionais.

O estudo realizado por Pontes (1996) compara os dois tipos de abordagens (a matemática escolar e a matemática que permeia as atividades cotidianas dos trabalhadores) e constata que os itens e as estratégias mais utilizadas pelos trabalhadores não são levadas em consideração nas aulas de matemática. Para finalizar, Pontes (1996) descreve algumas sugestões para aqueles que fazem o ensino de matemática na perspectiva de abordagens cotidianas. As sugestões vinculam-se as metodologias que valorizam a resolução de problemas e se inserem na Etnomatemática, na Modelagem Matemática, entre outras, possibilitam o envolvimento do aluno como sujeito ativo no processo de ensino e aprendizagem.

Bernal (2004) apresenta um estudo sobre como identificar a proporção no que diz respeito ao saber a ensinar e, ao saber ensinado em turmas de 7º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, a autora busca evidenciar questões relativas ao surgimento do conceito de proporção e o seu tratamento como objeto matemático. Esta autora busca tais evidências por meio de um breve estudo histórico e de um estudo sobre as publicações produzidas por instituições de formação de professores e complementando esta pesquisa, a autora realiza também um estudo em livros didáticos de matemática do 7º ano do Ensino Fundamental, além de um experimento com uma classe do mesmo ano.

Após estes estudos a autora identificou duas abordagens das questões relativas à proporção: na primeira, proporção é tratada como objeto matemático, enquanto que na segunda, há o estudo da noção de proporcionalidade e de grandezas proporcionais, onde o objeto matemático proporção é explorada de maneira formal; na segunda abordagem, que nos interessa, identificada pela referida autora, tem origem mais recente e é encontrada nas publicações de Ávila (1986) e Lima (1986, 1988, 1991, 1999). Nestas publicações as

questões relativas à proporção são tratadas no estudo de proporcionalidade e de grandezas ou variações proporcionais. Estas questões se inserem no contexto dos números reais, das igualdades e das equações. Este tipo de abordagem segundo Bernal (2004) permite identificar o objeto matemático proporção como um saber a ensinar.

Para identificar o objeto matemático proporção como um saber ensinado, Bernal (2004) utilizou como subsídio o estudo de livros didáticos e a observação em classe. Estes estudos revelaram semelhança com o primeiro tipo de abordagem descrita anteriormente, já que alguns livros didáticos analisados oferecem tratamento formal ao objeto matemático proporção, com a definição: proporção é a igualdade entre duas razões. Neste mesmo sentido, a observação em sala mostrou tratamento semelhante ao objeto matemáticos proporção, dado pelo professor da turma. Uma das contribuições do estudo realizado por Bernal (2004) é que o estudo do objeto proporção permite a identificação de abordagens distintas sobre as questões relativas a este saber.

Silva e Guerra(2011) analisam a regra de três como prática social de modelagem matemática. Dentro da história da matemática e da educação matemática buscou compreender o abandono explícito da regra de três. Constatam esse abandono nos livros didáticos recomendados pelo guia do Plano Nacional do Livro Didático. Silva e Guerra(2011) também propõem encaminhamentos para o ensino da regra de três de acordo com o desejado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais PCN's. Ensino este, que priorize as conexões e os significados que podem ser atribuídos aos conteúdos matemáticos e a integração com outras áreas científicas.

Ele destacar que o fazer da regra de três ao largo do tempo é marcado inicialmente por um fazer independente do conceito de proporcionalidade que caminhou para um fazer justificado matemático ancorado no conceito de proporcionalidade. Tal fazer justificado parece se constituir a grande preocupação ao longo dos últimos dois séculos no ensino. No entanto, parece claro que as situações-problema ainda enfrentadas nas escolas por regra de três assumem a relação de proporcionalidade sem discussão. O que determina sua aplicação é a situação que se identifica como de regra de três, determinado pelo fazer cultural e histórico do homem frente a esses tipos de situações. Trata-se de um problema “tipo de regra de três” e então se aplica o algoritmo.

### 3.3 Parâmetros Curriculares Nacionais

Na presente pesquisa bibliográfica, houve necessidade de abordar os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), que fornecem as diretrizes para o ensino da Matemática e disserta sobre o conceito de proporcionalidade.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) propõem uma das síntese dos princípios norteadores que:

“A atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade; A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais áreas, entre ela e os Temas Transversais, entre ela e o cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos”. (PCN-EF),1998

Desse modo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) norteiam a aprendizagem em matemática à compreensão dos conceitos e os relacionamentos deste entre os conteúdos; e não a memorização de forma pronta e acabada.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) para o ensino da Matemática propõem como um dos objetivos para do Ensino Fundamental no ensino da Matemática,

⇒ utilizar as diferentes linguagens - verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal - como meio para produzir, expressar e comunicar suas idéias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;

⇒ saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;

⇒ questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.(PCN-EF),1998

Desse modo, constata-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), como um dos objetivos do ensino fundamental, a utilização da linguagem matemática e a resolução de problemas utilizando o pensamento lógico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) propõem para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, o estudo da proporcionalidade. Esse documento apresenta como um dos objetivos a serem atingidos no ensino da Matemática, no terceiro ciclo, desenvolver.

Do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade.(PCN-EF),1998

Constatamos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) que o raciocínio proporcional está somente relacionado, explicitamente, a variação de grandezas proporcionais.

Dentro do estudo dos conteúdos, relacionados com proporcionalidade, apresentados no bloco Números e Operações, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) descrevem que é fundamental a proposição de situações-problema que possibilitem o desenvolvimento do sentido numérico e os significados das operações.

Assim, é desejável explorar no terceiro ciclo problemas que levem os alunos a fazer predições por meio de questões que envolvam aspectos qualitativos e quantitativos O número encontrado deveria ser maior ou menor? Quanto maior? Essa resposta faz sentido?). Para resolver esses problemas os alunos poderão construir procedimentos não-convencionais, deixando para o quarto ciclo o estudo dos procedimentos convencionais.(PCN-EF),1998

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), deixa claro a importância da resolução de problemas utilizando a idéia de proporcionalidade, a compreensão de variável e as representações algébricas para generalizações, apresenta no bloco Conceitos e Procedimentos a

⇒ Resolução de situações-problema que envolvem a idéia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não-convencionais.

⇒ Resolução de problemas de contagem, incluindo os que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de esquemas e tabelas.

⇒ Utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas seqüências numéricas.

⇒ Compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas.(PCN-EF),1998

Dentro do bloco Espaço e Forma dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), verificamos a interpretação, redução e ampliação de figuras planas(plantas, croquis, mapas, e outras) dentro do conceito de proporcionalidade,

Interpretação, a partir de situações-problema leitura de plantas, croquis, mapas), da posição de pontos e de seus deslocamentos no plano, pelo estudo das representações em um sistema de coordenadas cartesianas. [...]

Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área).(PCN-EF),1998

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), dentro do conceito de proporcionalidade, apresenta no bloco Tratamento da Informação a “Construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão.(PCN-EF),1998”.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), buscando o desenvolvimento da investigação e da valorização da linguagem matemática, apresenta no bloco Atitudes o

Desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados. [...]

Valorização e uso da linguagem matemática para expressar-se com clareza, precisão e concisão.(PCN-EF),1998

Desse modo, percebemos as raízes da proporcionalidade dentro dos objetivos de matemática para o terceiro ciclo. Contudo ele só relaciona, explicitamente, as variações entre grandezas. Não vemos explicitamente os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) relacionarem a proporcionalidade a outros conteúdos como a geometria e a álgebra. Contudo verificamos que os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), deixa bem implícito a relação da proporcionalidade dentro de outros conteúdos, como também sugere a interação destes.

Verificamos em todos estes trabalhos uma análise da importância que o tema tem e como ele está se processando seu ensino-aprendizagem. Nos trabalhos observamos que eles constataram cada um no seu objeto de pesquisa, que o processo está desatualizado, mecanizado e desprovido de significado. A maioria sugerem estudos e mudanças



no processo; e alguns propõem e testam sequências didáticas visando um novo processo ensino-aprendizagem do tema.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) nos direcionam para o ensino deste conceito pautado na compreensão e apreensão de significado; identificando suas relações com outros objetos e acontecimentos. Não dando tratamento aos conteúdos de forma compartimentadas, estanques e numa rígida sucessão linear, mas sim dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas.

## 4 Sugestão de uma sequência de atividades com aplicação em sala

### 4.1 Proposta de sequência

Nessa parte do trabalho, apresentaremos uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de proporcionalidade tem suma importância dentro dos conteúdos do 7° ano do ensino fundamental. Observa-se que ao longo dos anos esse conceito vem sendo tratado pelos livros e professores de formas compartmentadas e desconexas com a massificação de algoritmos. Neste trabalho, depois de ter sido verificados vários trabalhos relacionados com o tema, chegou-se a uma proposta centrada no conceito de proporcionalidade, com bases fundadas na necessidade de transitar do concreto para o abstrato; e percorrendo e relacionando os conteúdos trabalhados para seu melhor aproveitamento.

#### 4.1.1 Objetivos

Na estruturação da sequência das atividades, as mesmas, foram organizadas visando alcançar sete objetivos a serem dominadas pelos alunos. Estes objetivos são os seguintes:

- Identificar a proporcionalidade como uma relação de razão constante;
- Identificar as situações que são regidas pela lei da proporcionalidade e as que não são;
- Determinar a constante de proporcionalidade que relaciona as razões envolvidas;
- Construir as equações de problemas de proporcionalidade e determinar a sua solução;
- Construir a relação de proporcionalidade (função linear) que regi as situações de proporcionalidade utilizando a constante de proporcionalidade;

- Identificar, desenvolver, associar e aplicar as diversas formas(conteúdos) que o conceito de proporcionalidade se apresenta. Na forma de escala, porcentagem, teorema de Tales, semelhança de triângulos, probabilidade e outros; e
- Construir as regras de três simples e compostas a partir do conceito de proporcionalidade.

#### 4.1.2 Público alvo

Alunos do sétimo ano do ensino fundamental constituem o público alvo da presente pesquisa tendo em vista que os Parâmetros Curriculares Nacionais dizem que o “raciocínio que envolva a proporcionalidade” deve iniciar no terceiro ciclo do ensino fundamental.

#### 4.1.3 Pré-requisitos

Domínio das quatro operações(adição, subtração, multiplicação e divisão) dentro dos números racionais.

#### 4.1.4 Materiais e tecnologias

Data-show; software Geogebra; palitos de diversos tamanhos, com uma parte pintada; retângulos de diversos tamanhos feitos de cartolinas; plantas de casas; hastes de madeira de diversos tamanhos; régua, fita métrica e outros

#### 4.1.5 Recomendações metodológicas

Durante a execução da pesquisa, todas as atividades, com exceção da avaliação prévia e da avaliação pós, serão realizadas em grupos de três alunos buscando maior interação e participação. Cada grupo deverá ter o conjunto de material referente a cada atividade. Da 1ª a 5ª atividade, teremos atividades manipulando e observando objetos diversos: palitos, haste, retângulos, etc. Na parte final de cada atividade será feito o uso do data-show com o software Geogebra com a finalidade de generalizar e exemplificar com outras situações geométrica, métrica e numérica.

Quanto aos aspectos a serem observados no 7º ano do ensino fundamental, estes são:

- Carga horária: anual de 200h/a, bimestral 50h/a e semanal 5h/a
- Conteúdos relacionados com o conceito de proporcionalidade: frações, números racionais, razão, proporções, grandezas direta e inversamente proporcionais, porcentagem, escala, equações e outros.
- Os conteúdos relacionados no item anterior correspondem mais ou menos a 25% do total dos conteúdos do 7º ano.
- Sendo 25% dos conteúdos teríamos para estes 25% da carga horária anual, que dá 50h/a.
- Os conteúdos acima costumam serem trabalhados no 2º período do ano letivo.

A sequência didática sugerida necessita de apenas 12 h/a, pois são 6 encontros com 2h/a. Assim verificamos que a sequência didática tem condições(hora/aula) de ser implementada na sua totalidade ou também de forma pontual dentro dos conteúdos desenvolvidos ao longo do ano.

#### 4.1.6 Dificuldades previstas

A resistência “natural” por parte da turma, é uma das dificuldades previstas, tendo em vista necessidade de realizar uma mudança na metodologia. O professor deve buscar envolver a turma pelo princípio da novidade para superar essa dificuldade.

Outra dificuldade são os possíveis alunos sem os pré-requisitos. Antes de iniciar a sequência sugeriu que seja feito uma verificação diagnóstica da turma. Assim o professor irá identificar os alunos sem os pré-requisitos e qual será esse percentual em relação à turma. Com esse diagnóstico o professor programará atividades extras para sanar as deficiências e ao mesmo tempo dará maior atenção a esse grupo no decorrer da sequência.

#### 4.1.7 Descrição geral

Com o objetivo de introduzir o conceito de proporcionalidade, elaborou-se, e aplicou-se uma sequência de ensino-aprendizagem, em seguida foram analisados os dados obtidos. A nossa intenção é propiciar aos alunos uma melhor compreensão e apreensão do conceito de proporcionalidade, identificando os conteúdos e situações-problemas deste conceito e adequar as novas situações.

Não temos a pretensão de propor nenhum tipo de estratégia ou caminho rígido que leve o aluno à construção do conceito de proporcionalidade, mas propor uma, de muitas outras, sequência didática pautada em atividades do concreto para o abstrato, isto é, do geométrico para o métrico e do métrico para o numérico. Esta sequência é composta de 6 atividades, das quais, todas terão também uma abordagem por meio do software Geogebra.

As atividades 1, 2, 3 e 4 foram inspiradas e adaptadas a partir de um trabalho de Ruiz (1985) sobre o conceito de proporcionalidade.

Na atividade 1, os alunos deveriam explorar o conceito de equivalência de frações, utilizando a noção de: quantas vezes a parte cabe no todo, por meio de observação e constatação de uma padrão nos palitos pintados. Fazendo uma classificação e separação dentre os palitos. E expressa a proporção obtida das duas grandezas por meio de uma fração.

Na atividade 2 o objetivo era verificar nos retângulos dados que a razão entre o comprimento e a respectiva largura é constante. Além de determina a razão entre as medidas dos retângulos e posteriormente constata a semelhança entre os retângulos de mesma razão. A atividade prévia a construção de outros retângulos com a mesma razão.

A atividade 3 teve o objetivo de construir a representação reduzida e ampliada de uma determinada superfície, usando escala; explorando, para isto, a constatação da atividade anterior: a razão entre medidas correspondentes de figuras semelhantes é constante.

A atividade 4 teve o objetivo de deixar bem clara a noção de razão constante entre o comprimento de um bastão e a respectiva sombra, em um dado instante; e verificar que o conjunto de pares ordenados onde o primeiro elemento do par é o comprimento de um bastão e o segundo elemento é a respectiva sombra, constitui uma variação diretamente proporcional. Explorando ainda três aspectos muito importantes para a compreensão do conceito de proporcionalidade: a identificação de proporcionalidade como uma relação de razão constante; a determinação da constante de proporcionalidade; e a constatação da inclusão do conceito de proporcionalidade dentro da geometria(teorema de Tales, semelhança de triângulos).

Para a elaboração da atividade 5, baseamo-nos num trabalho Perotti(1999) sobre o estudo da reta a partir da grandezas diretamente proporcionais. Esta atividade está dividida em duas partes. A primeira, composta pelas dez primeiras questões busca mos-

trar características qualitativas das grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais, bem como contrapor com grandezas que não variam de forma proporcional. Na segunda parte, o pesquisador busca fazer um estudo quantitativo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Para isto, propõe aos estudantes oito questões, na qual eles precisam preencher tabelas, representar algebricamente e graficamente a variação de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais a partir de valores dados.

Na atividade 6 foi apresentada a definição de Ávila(1986) e Lima(2006), para a turma, por meio de situações-problemas e resoluções de problemas. A tarefa foi a discussão e resolução de 6 situações-problemas que envolvem proporcionalidade com múltiplas variáveis(regra de três composta), utilizando o conceito de proporcionalidade, determinando a constante de proporcionalidade e construindo a relação de proporcionalidade. Foi citado também para efeito de conhecimento algumas leis da Física que descrevem relações de proporcionalidade direta ou inversa entre grandezas (variáveis) como: a Lei da gravitação universal, a Lei dos gases perfeitos, a Lei da resistência elétrica e a Lei da dilatação térmica.

#### 4.1.8 Possíveis continuções ou desdobramentos

Esta sequência, toda ou em parte, pode ser aplicada em qualquer ano escolar da educação básica a partir do 7º ano do ensino fundamental. Pelo motivo que ela trabalha a construção de conceito, proporcionalidade, e não conteúdos. E como já mencionado varias vezes neste trabalho, o conceito de proporcionalidade está presente em vários e diversos conteúdos e áreas da matemática da educação básica.

Outro ponto importantíssimo que essa sequência constrói é ligação e a continuidade entre os assuntos de grandezas proporcionais, ensino fundamental, e os assuntos de função afim(linear). Essa construção se dá quando é determinado e enfatizado a importância da constante de proporcionalidade. E por meio dela é construída a relação de proporcionalidade por meio de uma fórmula. E lá no ensino médio o aluno ampliará esta relação para um novo conteúdo e conceito(função).

Por falta de oportunidade não foi possível aplicar a sequência para alunos do 8º ano do ensino fundamental, para os quais a proposta foi desenvolvida. Estava no planejamento aplicar a sequência didática a alunos do 8º ano, no início do ano letivo(2013), para que se pudesse verificar na avaliação prévia os conceitos e conteúdos do ano anterior(7º ano). Após essa avaliação prévia seria desenvolvida a sequência didática e em seguida ao término da mesma faríamos a avaliação pós. Ao fim, analizariamos o conjunto todo:

avaliação prévia, desenvolvimento da sequência e avaliação pós; concluindo o trabalho.

Mas, como já foi dito, essa sequência pode ser trabalhada também em outros anos escolares da educação básica posteriores ao 7º ano. Assim tivemos a oportunidade de aplicar a sequência a um grupo de alunos do 3º ano do ensino médio.

#### 4.1.9 Descrição

O campo de estudo decorreu em uma Escola Estadual, Centro de Ensino Graça Aranha, situada na cidade de Imperatriz - MA. Para o ano de 2013, a escola possui cerca de 1086 alunos, distribuídos da seguinte maneira:

- Período matutino: 5 salas de 1º ano, 4 salas de 2º ano e 4 salas de 3º ano;
- Período vespertino: 5 salas de 1º ano, 4 salas de 2º ano e 3 salas de 3º ano;

Cabe ressaltar que, devido a esta característica de oferecer somente este nível de ensino, a escola recebe todos os anos “novos” alunos oriundos principalmente de escolas municipais, acarretando inicialmente muitas dificuldades de adaptação.

A escolha da escola foi intencional, uma vez que o pesquisador é professor neste estabelecimento e leciona Matemática para os alunos dos 3º anos, turno vespertino, do ensino médio, participantes dessa pesquisa.

Os outros aspectos da aplicação foram conforme descrito na subseção 3.1.7..

#### 4.1.10 Avaliação prévia

A avaliação prévia consiste em 10 questões contextualizadas envolvendo grandezas proporcionais e não proporcionais. As questões estão distribuídas da seguinte forma: 2 questões que não envolvem grandezas proporcionais, 2 questões que envolvem somente duas grandezas diretamente proporcionais, 2 questões envolvem somente duas grandezas inversamente proporcionais, 4 grandezas proporcionais.

O objetivo é verificar a situação geral do aprendizado de proporcionalidade, mas também ter a situação específica de aprendizado do diversos nível de conteúdos abordado pela proporcionalidade.

#### 4.1.11 Metodologia de aplicação

- Contexto: a aplicação da sequência se deu no Centro de Ensino Graça Aranha, uma escola pública estadual, urbana, da cidade de Imperatriz, estado do Maranhão, Brasil.
- Participantes: um grupo de 37 alunos voluntários das turmas do 3º ano do ensino médio do turno vespertino. Os alunos estão com a idade entre 16 e 19 anos.
- Condução: houve 8 encontros, no mês de fevereiro de 2013, onde o primeiro e o último foram respectivamente, a avaliação prévia e a avaliação pós, os outros seis foram onde desenvolvemos as atividades da sequência. Cada encontro teve uma duração de 2h/a, isto é, 100 minutos). Podem ser divididos os encontros em três momentos. O primeiro demorou de poucos minutos onde foi passado o material que seria trabalhado e qual a atividade ou tarefa que seria desenvolvida, neste momento os alunos estavam atentos ao professor e tirava as dúvidas iniciais. O segundo momento foi a atividade sendo executada pelos alunos, neste momento o professor estava observando o desenvolvimento e se fosse necessário fazendo uma observação ou orientação pontualmente a qualquer grupo. No final de cada tarefa, era enfatizado os objetivos e conceitos das referidas tarefas.
- Instrumentos de coleta de dados: não houve outros instrumentos de coleta de dados.
- Métodos de coleta de dados: a coleta de dados foi anotada manualmente.

#### 4.1.12 Análise dos resultados

Depois de desenvolvidas, para o grupo de alunos, as atividades destinadas à introdução do conceito de proporcionalidade, foi aplicada uma avaliação pós ao grupo com o objetivo de verificamos, comparamos e analisamos a aprendizagem ocorrida.

A avaliação prévia e pós eram compostas por questões muito semelhantes, tanto no enunciado quanto na maneira de resolução.

Nas tabelas 1 e 2 temos os resultados, respectivamente, da avaliação prévia e pós, quanto às respostas corretas de cada participante da pesquisa.

- Métodos de análises:



Analisamos os dados da avaliação prévia e da avaliação pós fazendo uma análise da estatística descritiva de cada uma das avaliações e posteriormente uma análise de variância(ANOVA) de um fator conforme tabelas a seguir:

- Resultados:

Estatisticamente atenderam nossas expectativas, como vimos nas seções anteriores. Contudo iremos destacar dois pontos:

- Um percentual bastante significativo (75,7%) dos alunos componentes do grupo, ao resolverem a avaliação pós, alcançaram um número de 70% ou mais.
- Um percentual baixíssimo(2,7%), isto é, apenas um aluno, teve um número de acertos inferior a 50%.

Este trabalho, como descrito anteriormente, teve como principal referência o trabalho de Ruiz(1985). Analisando o resultado deste e observando os resultados daquele verificamos que mesmo separado no tempo por quase 3 décadas os dois experimentos mostram o baixo nível de conhecimento(conteúdo, conceitos e habilidades) de proporcionalidade constatado nas avaliações prévias. Porém mostra o aumento altamente significativo no nível de conhecimento de proporcionalidade, como constatado nas avaliações pós sequência.

#### 4.1.13 Avaliação geral e conclusões

- Comparação dos resultados da avaliação prévia e da avaliação pós:

Quanto a nossa hipótese inicial;

- $H_1$ : Os alunos componentes do grupo terão dado um salto qualitativo e significativo nas suas concepções do conceito de proporcionalidade.

Por meio dos resultados da análise estatística(ANOVA) acima verificamos que houve um ganho altamente significativo(ao nível de 0,05) por parte dos alunos do grupo de estudo.

- Críticas e sugestões:

A sequência didática foi desenvolvida para ser aplicada na forma de experimento para uma turma do 8° do ensino fundamental, que teria visto no ano anterior os conteúdos relacionados ao tema deste trabalho. Infelizmente não foi possível realizar

o experimento conforme o planejamento.

Queremos deixar como sugestão para futuros trabalhos, que sejam desenvolvidas outras sequências didáticas adequadas aos anos subsequentes do ensino fundamental e médio. Estas construindo e trabalhando o conceito de proporcionalidade dentro dos conteúdos dos respectivos anos a que se propõe. Buscando dar continuidade nos anos subsequentes com a construção, ampliação e aplicação deste importante e vasto conceito matemático.

## 5 Conclusões

Ao longo do Profmat, tivemos a visão e o entendimento relacionado ao ensino de Matemática ampliado significativamente. Hoje vemos dois caminhos bem distintos quanto a forma de fazer o processo ensino-aprendizagem da Matemática.

- O primeiro centrado tão somente nos conteúdos, onde a maioria dos professores, dos livros didáticos e dos outros elementos do sistema educacional fazem parte. Enfatizando a utilização e a aplicação de fórmulas, de algoritmos e de regras.
- O segundo centrado nos conceitos matemáticos; construção dos mesmos; e a associação e interrelacionamento dos diversos conteúdos relacionados ao mesmo conceito. Este sendo composto pela minoria dos elementos do sistema educacional do nosso país.

Antes do curso estávamos inserido no primeiro grupo pois assim foi nos apresentado quando aluno e depois quando professor. Porém com a nova visão que o curso nos deu, nos parece indiscutível que o ensino pautado na construção do conceito é a única forma para chegarmos a resultados consistentes e contínuos no ensino de Matemática.

Com esse objetivo é que buscamos implementar por meio de uma sequência didática os estudos, do Avila e do Lima, que nós tivemos acesso. Visando explorar atividades que favorecessem o desenvolvimento do conceito de proporcionalidade. Atividades estas que iriam trazer uma abordagem do concreto para o abstrato, isto é, do geométrico para o métrico e do métrico para o numérico.

No decorrer da pesquisa bibliográfica encontramos vários trabalhos que tinham como área de estudo o conceito de proporcionalidade. Dentro do objeto de estudo encontramos dois trabalhos que muito nos interessou. Estes são o trabalho de Ruiz(1985) e de Perotti(1999) que tratam sobre sequências didáticas.

Devido os resultados alcançados pelos dois trabalhos; e pelo motivo do trabalho de Ruiz(1985) tratar especificamente sobre o conceito de proporcionalidade testando uma

sequência didática para o ensino-aprendizagem do mesmo e por ter quase três décadas. Resolvemos implementar uma sequência feita a partir das duas tendo como base as definições de proporcionalidade de Avila(1986) e de Lima(1988).

O presente trabalho mostrou novamente, pois Ruiz(1985) já tinha observado, dois aspectos do “antigo-atual” processo ensino-aprendizagem do conceito de proporcionalidade. O primeiro é a constatação do baixo nível de conhecimento do conceito de proporcionalidade por parte dos alunos tanto do ensino fundamental quanto médio. O segundo é a constatação que o uso de uma sequência didática com objetos de aprendizagem, em situações de sala de aula, pode contribuir para desenvolver e melhorar a qualidade da aprendizagem do conteúdos relacionados com o conceito de proporcionalidade.

Apesar dos resultados positivos, os dados do presente trabalho compreenderam uma amostra pequena de alunos. São necessárias pesquisas que envolvam um número maior de estudantes do 7º ano, em situações de aprendizagem e com o próprio professor da disciplina em sala de aula.

Finalmente, afirmamos que desenvolver este trabalho trouxe satisfação para nós como educadores. Os estudos que desenvolvemos em todo o processo de elaboração da pesquisa, nos levou a concluir que podemos ser também pesquisadores, e contribuir não só para o nosso crescimento em sala de aula, mas também fornecer alguns subsídios que possa contribuir para a melhoria do ensino de certos tópicos da Matemática.

## Tabelas

Tabela 1: Resultado da avaliação prévia

S	Número da questão										T	T(%)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	.	.		.	.				.	.	6	60
2	.										1	10
3	.	.									2	20
4	.										1	10
5	.			.							2	20
6	.	.		.							3	30
7	.	.									2	20
8											0	0
9											0	0
10	.	.			.						3	30
11	.	.									2	20
12	.										1	10
13	.	.									2	20
14	.	.									2	20
15	.										1	10
16	.						.				2	20
17	.										1	10
18	.	.				.					3	30
19	.										1	10
20	.								.		2	20
21	.										1	10
22	.	.									2	20
23	.	.			.						3	30
24	.										1	10
25	.										1	10
26	.	.									2	20
27	.	.									2	20
28	.										1	10
29	.	.									2	20
30	.	.		.	.						4	40
31	.	.									2	20
32	.	.			.						3	30
33	.	.									2	20
34	.										1	10
35	.										1	10
36	.	.									2	20
37	.										1	10
T	35	19	0	4	5	1	1	0	2	1		
T(%)	94,6	51,4	0,0	10,8	13,5	2,7	2,7	0,0	5,4	2,0		

S = número do aluno na amostra

. = questão resolvida corretamente

Tabela 2: Resultado da avaliação pós

S	Número da questão										T	T(%)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	.	.		.	.	.	.	.	.	.	10	100
2	.	.	.	.	.			.			6	60
3	.	.	.	.	.	.	.	.			8	80
4	.	.	.	.	.		.	.			7	70
5	.	.	.	.	.	.	.	.		.	9	90
6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10	100
7	.	.	.	.	.	.	.	.	.		9	90
8	.	.	.		.						4	40
9	.	.	.	.	.			.			6	60
10	.	.			.	.	.	.	.		9	90
11	.	.	.	.	.		.	.	.		8	80
12	.	.	.	.	.		.	.			7	70
13	.	.	.	.	.	.	.	.			8	80
14	.	.	.	.	.	.		.			7	70
15	.	.	.	.	.			.	.		7	70
16	.	.	.	.	.		.	.		.	8	80
17	.	.	.	.	.			.	.		7	70
18	.	.	.	.	.	.	.	.		.	9	90
19	.	.	.	.	.			.			6	60
20	.	.	.	.	.			.			6	60
21	.	.	.	.	.			.	.		7	70
22	.	.	.	.	.		.	.	.		8	80
23	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10	100
24	.	.	.	.	.						5	50
25	.	.	.	.	.		.	.			7	70
26	.	.	.	.	.			.			6	60
27	.	.	.	.	.	.		.	.		8	80
28	.	.	.	.	.	.		.			7	70
29	.	.	.	.	.			.	.		7	70
30	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10	100
31	.	.	.	.	.			.	.	.	8	80
32	.	.	.	.	.		.	.	.	.	9	90
33	.	.	.	.	.		.	.	.		8	80
34	.	.	.	.	.						5	50
35	.	.	.	.	.	.	.	.			8	80
36	.	.	.	.		.	.				7	70
37	.	.	.	.	.	.	.	.			7	70
T	37	37	37	36	37	15	20	33	17	9		
T(%)	100	100	100	97,3	100	40,5	54,1	89,2	45,9	24,3		

S = número do aluno na amostra

. = questão resolvida corretamente

Tabela 3: Estatística Descritiva da Avaliação Prévia

Média	1,837837838
Erro padrão	0,183858844
Mediana	2
Moda	2
Desvio padrão	1,118369684
Variância da amostra	1,250750751
Curtose	4,292013194
Assimetria	1,470830515
Intervalo	6
Mínimo	0
Máximo	6
Soma	68
Contagem	37
Nível de confiança	0,372883015

Tabela 4: Estatística Descritiva da Avaliação Pós

Média	7,513513514
Erro padrão	0,240812007
Mediana	7
Moda	7
Desvio padrão	1,464802255
Variância da amostra	2,145645646
Curtose	-0,151638455
Assimetria	-0,14020895
Intervalo	6
Mínimo	4
Máximo	10
Soma	278
Contagem	37
Nível de confiança	0,488389384



Tabela 5: ANOVA fator único das avaliações prévia e pós

<b>Resumo</b>						
Grupo	Contagem	Soma	Média	Variância		
<b>Prévia</b>	37	68	1,837838	1,250751		
<b>Pós</b>	37	278	7,513514	2,145646		
<b>ANOVA</b>						
Fonte da variação	SQ	gl	MQ	F	valor-P	F crítico
<b>Entre grupos</b>	595,9459459	1	595,9459	350,9284	$2,14 \cdot 10^{-29}$	3,973896881
<b>Dentro dos grupos</b>	122,2702703	72	1,698198			
<b>Total</b>	718,2162162	73				

## REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. . *Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de matemática*. Revista do Professor de Matemática, n° 7, p.5-10, São Paulo, 1985.

ÁVILA, G. . *Razões, proporções e regra de três*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, 1986.

ÁVILA, G. . *Ainda sobre a regra de três*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, 1986.

BARRETO, I. M. A. . *Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional: a diversidade de procedimentos de resolução*. 123f. Dissertação(Mestrado em Educação Matemática)- Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T. R.. *A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra*. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). *As idéias da álgebra*. Tradução de Hygino H. Domingues São Paulo: Atual, 1995.

BOTTA, L. S. . *Números racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino aprendizagem* 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1997.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: ensino de quinta a oitava séries*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 1998.

COSTA, C. R. . *Panorama de um estudo sobre razões e proporções em três livros didáticos*. 146 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

COSTA JUNIOR, J. R.. *Atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade:*

*contribuições da história da matemática.* 237 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

GATASS FILHO, J. . *Ensino e aprendizagem do conceito de proporcionalidade em educação matemática.* 107f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1994.

GONÇALVES, M. J. S. V. . *Racínio proporcional: estratégias mobilizadas por alunos a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade.* 196f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

LIMA, E. L., et al. *Temas e Problemas Elementares.* Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MARTINS, A. de M. . *Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no Ensino Fundamental.* 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

OLIVEIRA, E. A. *A Educação Matemática e Ensino Médio: um panorama das pesquisas produzidas na PUC/SP.* 160f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

PEROTTI, A. R. . *O Estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais: Uma proposta alternativa de ensino,*134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.

PONTES, M. G. O. .*Medidas e proporcionalidade no cotidiano escolar e extra-escolar.*220f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

RUIZ, A. R. *Ensino do Conceito de proporcionalidade.*, 171f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1985.

## Apêndice 1

### AVALIAÇÃO PRÉVIA

1. O carro de Raul consome, em média, 8 litros de combustível a cada 100 km rodados. Para percorrer 300 km, quantos litros de combustível seu carro gastará?
2. O preço de 4,5 m de tecido é R\$ 36,00. Quantos metros podemos comprar com R\$ 60,00?
3. Se um jogador de futebol fez 2 gols em 3 jogos, quantos gols ele fará em 6 jogos?
4. Seis pedreiros, com a mesma capacidade de trabalho, levam 27 dias para concluir uma certa obra. Com apenas 3 desses pedreiros, em quanto tempo a obra será concluída?
5. Se 5 torneiras enchem um tanque em 45 minutos, 8 torneiras iguais a essas encheriam esse tanque em quantos minutos?
6. Em 3 horas, 2 torneiras despejam 2100 litros de água. Então, em quantas horas 5 dessas torneiras despejam 7000 litros de água?
7. Em 5 dias, funcionando 15 horas por dia, uma máquina produz 2000 peças. Quantas peças ela produz em 8 dias, funcionando 12 horas por dia?
8. Se Aline aos 5 anos de idade tem 1,00 metro de altura. Com 10 anos qual vai ser a sua altura?
9. Se 40 operários, em 6 dias, trabalhando 4 horas por dia, conseguem terminar um serviço. Quantos operários farão o mesmo serviço em 12 dias, se eles trabalharem 8 horas por dia?
10. Sabendo que 3 operários, trabalhando 8 horas por dia, constroem um muro de 36 metros em 5 dias. Quantos dias são necessários para que uma equipe de 5 operários, trabalhando 6 horas por dia, construa um muro de 15 metros?

## Apêndice 2

### FICHAS DAS 6 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS EM SALA

#### ATIVIDADE N°1

- Objetivo: explicar o conceito de equivalência de frações, utilizando a noção de: quantas vezes a parte cabe no todo.
- Material: jogos com 25 palitos de vários tamanhos, sendo uma parte do palito pintada e a outra não.

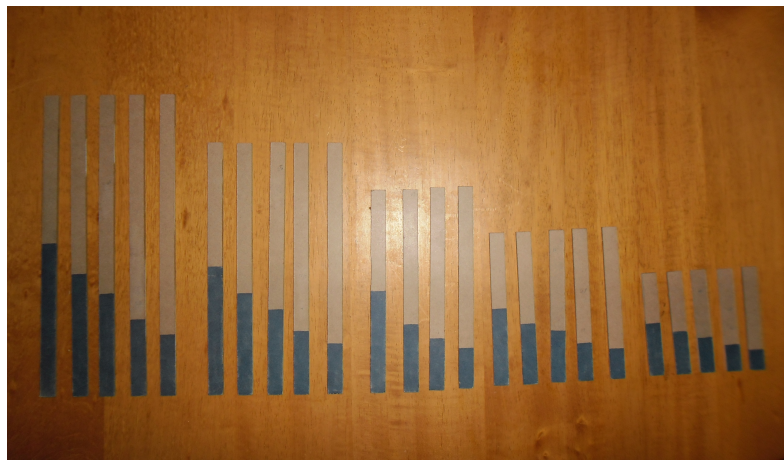


Figura 1: Imagem dos palitos

- Tarefa:
  1. solicitar aos alunos que dividam os palitos em “famílias” (é fundamental insistir até que formem “famílias” observando a relação entre os atributos: comprimento do palito e comprimento da parte pintada).
  2. solicitar que justifique o critério adotado para fazer os agrupamentos.

#### ATIVIDADE N°2

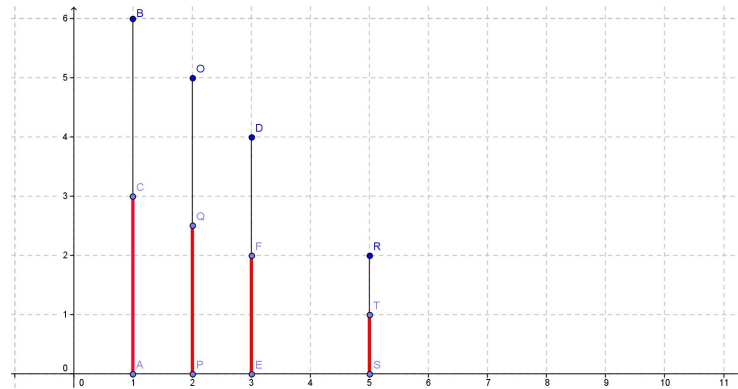


Figura 2: Gráfico da Tarefa 1

Medida do comprimento						
Medida da largura						
Quociente entre comprimento e largura						

- Objetivo: verificar que num conjunto de figuras semelhantes, como no caso de retângulos, a razão entre o comprimento e a respectiva largura é constante.
- Material: conjuntos de 8 quadrados, com medidas diferentes feitos em cartolina; conjunto formado por 6 retângulos semelhantes, feitos em cartolina, tendo as seguintes dimensões: 3 x 1cm; 4,5 x 1,5cm; 6 x 2cm; 7,5 x 2,5cm; 9 x 3cm e 10,5 x 3,5cm

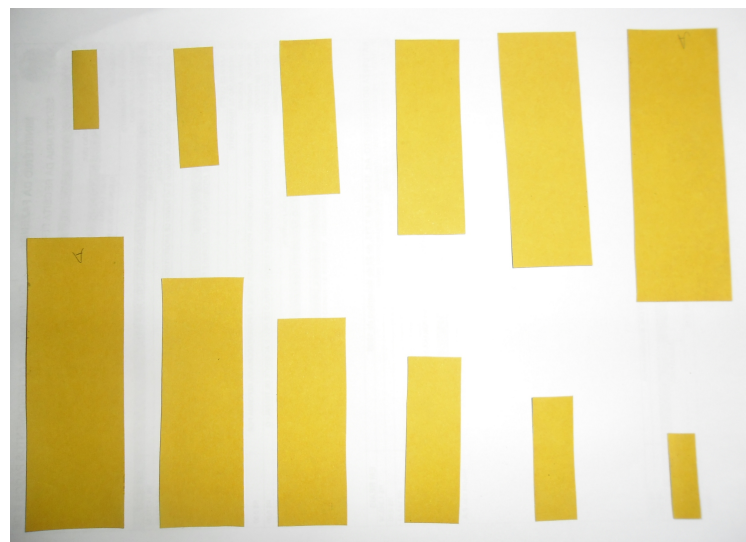


Figura 3: Imagem dos retângulos

- Tarefa:
  1. Solicitar que os alunos façam medições das figuras, anotando no quadro as medidas dos retângulos.
  2. Solicitar que justifique o critério adotado para fazer os agrupamentos.

Comprimento do bastão						
Comprimento de sombra correspondente						
Quociente entre bastão e sua sombra						

da atividade anterior: a razão entre medidas correspondentes de figuras semelhantes é constante.

- Material: lápis, papel, régua, uma planta com indicação das medidas.
- Tarefa:
  1. Conversar com os alunos sobre o que é um mapa, como é feito, ou uma planta, ou qualquer modelo reduzido.
  2. Realizar uma ampliação e uma redução de uma planta de casa dada.
  3. Solicitar aos alunos que descubram em que escalas foram construídas algumas plantas de casas.

#### ATIVIDADE N° 4

- Objetivo:
  1. Através do fenômeno: objeto vertical-sombra, deixar bem clara a noção de razão constante entre o comprimento de um bastão e a respectiva sombra, em um dado instante.
  2. Verificar que o conjunto de pares ordenados, onde o primeiro elemento do par é o comprimento do bastão e o segundo elemento é a respectiva sombra, constitui uma função linear.
- Material: bastões com os seguintes tamanhos: 2m; 1,80m; 1,50m; 1,20m; 1m; 0,50m.
- Tarefa:
  1. Cada grupo deve medir a sombra de cada bastão colocado verticalmente no chão, anotando no seguinte quadro os dados pedidos:
  2. Solicitar aos alunos que observem bem o quadro e relatem as descobertas que fizeram.





Figura 4: Imagem das hastes

3. Os quocientes entre o comprimento de cada bastão e a sombra correspondente são iguais?
4. Pede-se aos alunos que coloquem os dados do quadro acima num sistema de coordenadas cartesianas, de modo que os comprimentos dos bastões sejam representados no eixo dos  $x$  e as sombras no eixo dos  $y$ . Unam os pontos.
5. É verdade que unindo os pontos obtém-se uma reta que passa pela origem?
6. Há alguma relação entre esta atividade e as que fizemos anteriormente?

### ATIVIDADE N° 5

- Objetivo:
  1. Identificar e diferenciar as grandezas proporcionais das não proporcionais.
  2. Identificar e diferenciar as grandezas diretamente das inversamente proporcionais.
  3. Determinar a constante de proporcionalidade de uma relação de proporcionalidade entre duas grandezas (variáveis) quaisquer.
- Material: questionários

- Tarefa: observar as situações-problemas enumeradas no questionário; e identificar as grandezas não proporcionais, proporcionais diretamente e proporcionais inversamente.

### Questionário

#### 1ª parte

1. Um automóvel consome 1 litro de gasolina por 8 quilômetros rodados. Quantos litros consomem quando roda 160 quilômetros? Consumo de gasolina e quilômetros rodados são grandezas:  
 ) Diretamente proporcionais  
 ) Inversamente proporcionais  
 ) Não proporcionais
2. Para fazer uma dúzia de quindins uma doceira gasta 8 ovos. Quantos ovos deve gastar para fazer 10 dúzias? Dúzias de quindins e número de ovos são grandezas:  
 ) Diretamente proporcionais  
 ) Inversamente proporcionais  
 ) Não proporcionais
3. Um pintor leva 40 dias para pintar um prédio. Em quantos dias o prédio poderá ser pintado por 5 pintores que tenham a mesma capacidade de trabalho que o primeiro? Número de pintores e dias de trabalho são grandezas:  
 ) Diretamente proporcionais  
 ) Inversamente proporcionais  
 ) Não proporcionais
4. Uma criança aos 2 anos tem 80 cm de altura. Quanto mede esta mesma criança aos 8 anos? Altura e idade são grandezas:  
 ) Diretamente proporcionais  
 ) Inversamente proporcionais  
 ) Não proporcionais

5. Para produzir 120 peças, uma máquina funciona continuamente, durante 60 minutos. Quanto tempo dever funcionar para produzir 600 peças? Número de peças e tempo de funcionamento são grandezas:
- (        ) Diretamente proporcionais
  - (        ) Inversamente proporcionais
  - (        ) Não proporcionais
6. O prêmio da Mega Sena está acumulado em três milhões de reais. Quanto vai receber cada acertador se o número de acertadores é 6? E se forem 10 acertadores? Quantia que recebe cada acertador e número de acertadores são grandezas:
- (        ) Diretamente proporcionais
  - (        ) Inversamente proporcionais
  - (        ) Não proporcionais
7. Um navio faz uma viagem de Santos a Nova Yorque em 8 dias. Em quantos dias 10 navios farão a mesma viagem? Número de navios e dias de viagem são grandezas:
- (        ) Diretamente proporcionais
  - (        ) Inversamente proporcionais
  - (        ) Não proporcionais
8. Um navio dispõe de suprimentos para alimentar 40 pessoas durante 10 dias. Com os mesmos suprimentos quantas pessoas poderão fazer uma viagem de 16 dias? Número de pessoas e número de dias (neste caso) são grandezas:
- (        ) Diretamente proporcionais
  - (        ) Inversamente proporcionais
  - (        ) Não proporcionais
9. O lado de um quadrado mede 4m. Sua área é  $16m^2$ . Quanto mede a área de um quadrado cujo lado é 8m? Lado e área de um quadrado são grandezas:
- (        ) Diretamente proporcionais
  - (        ) Inversamente proporcionais
  - (        ) Não proporcionais

10. A aresta de um cubo mede 2cm. Seu volume é  $3cm^3$ . Qual o volume de um cubo que tem aresta medindo 4cm. Aresta e volume de um cubo são grandezas:

- (        ) Diretamente proporcionais  
 (        ) Inversamente proporcionais  
 (        ) Não proporcionais

## 2ª Parte

Nas questões de 1 a 8 você encontrará novamente as grandezas direta e inversamente proporcionais das questões anteriores. Em todas elas aparece uma tabela como a do exemplo abaixo.

20 galinhas consomem diariamente 2kg de ração.

x	nº de galinhas	20	40	60	80	100	120
y	Kg de ração	2	4	6	8	10	12

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

Nos quadros da parte de baixo da tabela aparecem as taxas de variação. Para dois valores de x da primeira variável e os respectivos valores da segunda, a taxa de variação K é calculada do seguinte modo:

$$k = \frac{\Delta.y}{\Delta.x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

No exemplo acima tem-se:

$$k = \frac{4 - 2}{40 - 20} = \frac{6 - 4}{60 - 40} = \frac{8 - 6}{80 - 60} = \frac{10 - 8}{100 - 80} = \frac{12 - 10}{120 - 100} = \frac{1}{10}$$

Nem sempre as taxas de variação são iguais, como ocorreu neste exemplo.

- Um automóvel consome 1 litro de gasolina por 8 quilômetros rodados.
  - Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser

calculadas para os valores sequenciais;

x	Litros	1		3	4		6
y	Km	8	16			40	

b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando litros de gasolina igual a  $x$  e km rodados igual a  $y$ ;

2. Para fazer uma dúzia de quindins uma doceira gasta 10 ovos.

a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores sequenciais;

x	Dúzia de doces	1		3		5	6
y	Número de ovos	1	20		40		

b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando dúzias de doces igual a  $x$  e número de ovos igual a  $y$ ;

3. Um pintor leva 40 dias para pintar uma casa.

a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores sequenciais;

x	Nº de pintores	1	2		8	10	
y	Dias	40		10			2

b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando número de pintores igual a  $x$  e dias para pintar igual a  $y$ ;

4. Para produzir 120 peças, uma máquina funciona continuamente durante 60 minutos.  
 a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores seqüenciais;

x	N° de peças	40		120		240	
y	Tempo(min)		40	60	100		150

- b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando número de peças igual a  $x$  e tempo para produzi-las igual a  $y$ ;

5. Para produzir 120 peças, uma máquina funciona continuamente durante 60 minutos.  
 a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores seqüenciais;

x	N° de acertadores	1	2		4		6
y	Valor do prêmio(em milhares)	3000		1000		500	

- b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando número de acertadores igual a  $x$  e valor do prêmio igual a  $y$

6. Um navio dispõe de suprimentos para alimentar 40 pessoas durante 10 dias.  
 a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores seqüenciais;

x	N° de pessoas	10		40		80	100
y	Dias de viagem		20	10	8		

- b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando número de pessoas igual a  $x$  e dias de viagem igual a  $y$ ;

7. O lado de um quadrado mede 4m. Sua área é  $16m^2$ .

a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores sequenciais;

x	Lado		4		6		8
y	Área	4	16	25		49	

b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando o lado do quadrado igual a  $x$  e a sua área igual a  $y$ ;

8. A aresta de um cubo mede 2cm. Seu volume é igual a  $8\text{cm}^3$ .

a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores sequenciais;

x	Aresta		2		3		4
y	Volume	1		15,6		49	

Dê exemplo de duas grandezas diretamente proporcionais.

Dê exemplo de duas grandezas inversamente proporcionais.

## ATIVIDADE N° 6

- Objetivo:

1. dada duas grandezas proporcionais, construi a relação matemática a partir do conceito e da constante de proporcionalidade.
2. observar exemplos de relações proporcionais no dia-a-dia, na natureza e nas ciências.

- Material: quadro, pincel, data-show e software Geogebra

- Tarefa: discursão e resolução de 6 situações-problemas com mais de duas grandezas proporcionais

- determinar as constantes de proporcionalidade das relações;
- escrever a relação que envolvem as situações-problemas em linguagem matemática.



## Apêndice 3

### AVALIAÇÃO PÓS

1. Uma impressora imprime 50 folhas em 3 minutos. Quantos minutos ela gastará para imprimir 500 folhas?
2. Tatiana comprou 8 metros de tecido por R\$ 480,00. Quanto vai pagar por 10 metros do mesmo tecido?
3. Se Marta ler 8 páginas por hora, ela lerá um livro em 12 horas. Se ela ler 16 páginas por hora, em quantas horas ela vai ler esse livro?
4. Jogando dois dados eu fiz 7 pontos. Quantos pontos eu farei se jogar 4 dados?
5. Com 2 kg de cobre, faço 8 pulseiras. Quantas pulseiras farei com 7 kg de cobre?
6. Em 5 horas, 3 torneiras despejam 2100 litros de água. Então, quantas torneiras são necessárias para despejar 6000 litros de água em 3 horas?
7. Em 3 dias, funcionando 12 horas por dia, uma máquina produz 8000 peças. Quantas dias serão necessários para que ela produza 10.000 peças funcionando 8 horas por dia?
8. Nos 5 primeiros dias de fevereiro choveu em 3 dias. E nos 10 primeiros dias de fevereiro choveu quantos dias?
9. Se 40 operários, em 6 dias, trabalhando 4 horas por dia, conseguem terminar um serviço. Quantos operários farão o mesmo serviço em 12 dias, se eles trabalharem 8 horas por dia?
10. Sabendo que 10 pedreiros, trabalhando 6 horas por dia, constroem um prédio de 5 andares em 60 dias. Quantos pedreiros são necessários para que no período de 20 dias, trabalhando 9 horas por dia, construa um prédio de 7 andares?