Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

A Transformada de Laplace e Algumas Aplicações †

por

José Ivelton Siqueira Lustosa

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Maio/2017
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com o apoio financeiro da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

L972t Lustosa, José Ivelton Siqueira.
A transformada de Laplace e algumas aplicações /
José Ivelton Siqueira Lustosa.- João Pessoa, 2017.
89 f. : il.-

Orientador: Uberlandio Batista Severo.
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN/PROFMAT

1. Matemática. 2. Transformada de Laplace. 3. Equações
Diferenciais Ordinárias. 4. Aplicações - Matemática. I. Título.

UFPB/BC CDU – 51(043)

A Transformada de Laplace e Algumas Aplicações

por

José Ivelton Siqueira Lustosa

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

____

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB (Orientador)

____

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

____

Prof. Dra. Maria Isabelle Silva - UEPB

Maio/2017

Agradecimentos

Agradeço a Deus, ser maior do Universo, por me dá forças e conceder a vitória em mais essa etapa de aperfeiçoamento.

À minha família, em especial a meu irmão Antônio Siqueira Lustosa por ter ajudado na confecção de algumas figuras.

Ao Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo pelo convite, apoio e orientação em todos os momentos que precisei durante o desenvolvimento do trabalho.

À minha namorada Maria Socorro pela paciência e apoio demonstrado durante todo o curso.

À coordenação e a todos os professores que fazem parte do PROFMAT - UFPB.

Aos meus colegas de turma, em especial a Edson Araújo, pela união em longos momentos de estudos, que foram fundamentais para essa vitória.

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

Dedicatória

A todos os que se alegram com o nosso sucesso.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a Transformada de Laplace e exploramos sua aplicação na resolução de algumas equações diferenciais ordinárias lineares, as quais modelam vários fenômenos nas áreas de Física, Engenharia, Automação Industrial e na própria Matemática. Tais conhecimentos são de suma importância em cursos superiores que abrangem tais áreas. Apresentamos a definição, propriedades e principais resultados envolvendo a Transformada de Laplace e abordamos vários problemas nas áreas citadas anteriormente.

Palavras-chave: Transformada de Laplace. Equações Diferenciais Ordinárias. Aplicações.

Abstract

In this work, we study the Laplace Transform and explore its application in solving some linear ordinary differential equations, which model various phenomena in the areas of Physics, Engineering, Industrial Automation and Mathematics itself. Such knowledge is of great importance in higher education courses covering such areas. We present the definition, properties and main results involving the Laplace Transform and address several problems in the areas mentioned above.

Keywords: Laplace Transform. Linear Differential Equations. Applications.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Para desenvolvermos trabalhos em áreas como Matemática, Engenharia, Indústria, Economia entre outras, frequentemente, somos confrontados com problemas ou fenômenos que, para serem estudados precisam ser descritos, ou modelados através de ferramentas matemáticas.

Segundo Biembengut em [1]:

> "Um modelo é um conjunto de símbolos os quais interagem entre si representando alguma coisa. Esta representação pode se dar por meio de um desenho ou imagem, um projeto, um esquema, um gráfico, uma lei matemática, dentre outras formas". Na matemática, por exemplo, "um modelo é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduzem, de alguma forma, um fenômeno em questão".

Percebemos então, que modelar um problema não é simples. Devemos conhecer bem os fundamentos do problema estudado para chegarmos a uma representação matemática coerente. É importante destacarmos também que, para a obtenção do modelo, é preciso passar pelo processo de modelagem matemática que, segundo Biembengut em [1], está dividido em três etapas:

> "a) **Interação com o assunto**
>
> Nesta etapa, a situação a ser estudada será delineada e para torná-la mais clara deverá ser feita uma pesquisa sobre o assunto escolhido através de livros ou revistas especializadas.
>
> b) **Matematização**
>
> Esta é a fase mais complexa e desafiadora, pois é nesta que se dará a tradução da situação problema para a linguagem matemática. Assim, a intuição e a criatividade são elementos indispensáveis.
>
> c) **Modelo matemático**
>
> O modelo concluído deverá corresponder à situação-problema apresentada".

Portanto, para fazermos essa modelagem, devemos considerar as variáveis que influenciam o problema fazendo o sistema sofrer variações, como também o conjunto de hipóteses levantadas sobre as condições apresentadas inicialmente pelo sistema analisado. A estrutura matemática apresentada nas hipóteses são ferramentas essenciais para a construção do modelo matemático, que será a chave para solução do problema.

Em muitos casos, os modelos matemáticos são equações de diferenças ou equações diferenciais, ou mesmo um sistema de equações de diferenças ou de equações diferenciais. As equações de diferenças são modelos gerados quando trabalhamos com problemas em Matemática Discreta, enquanto que as equações diferenciais são modelos gerados quando trabalhamos com problemas em Matemática Contínua.

É importante destacarmos aqui a diferença entre Matemática Discreta e Contínua. A Matemática Discreta estuda problemas desenvolvidos em conjuntos que geralmente são finitos e enumeráveis e a Matemática Contínua estuda problemas desenvolvidos em subconjuntos dos números reais.

Para Scheinerman em [2], essa diferença é dada como se segue:

> "A Matemática Contínua corresponde a relógios analógicos [...] do ponto de vista de um relógio analógico, entre $12:02pm$ e $12:03pm$ há um número infinito de diferentes tempos possíveis, na medida que o relógio percorre o mostrador [...]. A Matemática Discreta é comparada a um relógio digital, em que há apenas um número finito possível de tempos diferentes entre $12:02pm$ e $12:03pm$. Um relógio digital não reconhece função de segundos [...] a transição de um tempo para o próximo é bem definida e sem ambiguidade".

Para trabalhar com problemas em Matemática Discreta, ou seja, problemas cujo modelo é uma equação de diferenças ou um sistema de equação de diferenças, usa-se a Transformada Z para converter as equações geradas no modelo em equações algébricas, o que torna mais simples sua análise. Já no caso dos problemas em Matemática Contínua, cujo modelo geralmente é uma equação diferencial ou um sistema e equações diferenciais, usa-se, geralmente a Transformada de Laplace para transformar o modelo em uma equação algébrica.

Segundo Venturi em [4], Hsu compara a Transformada Z e a Transformada de Laplace da seguinte forma:

> A Transformada Z é introduzida para representar sinais de tempo discreto (ou sequências) no domínio z, onde z é uma variável complexa. A Transformada de Laplace converte equações diferenciais em equações algébricas (muitas vezes presente na modelagem de fenômenos mecânicos e elétricos). De um modo semelhante, a Transformada Z converte equações de diferenças em equações algébricas, simplificando assim a análise de sistemas discretos no tempo (presente em princípio de controle, progressões e sucessões).

Vale salientar, que este trabalho visa usar a Transformada de Laplace como método para resolução de problemas, cujo modelo matemático gera equações diferenciais.

Vejamos, a seguir, alguns problemas conhecidos, cujo modelo matemático gera uma equação diferencial. Estes problemas são adaptados de [5, 6].

Problema 1:

Corpo em Queda Livre

Suponha que um objeto seja lançado do alto de um prédio de altura h, em queda livre com velocidade inicial v_0.

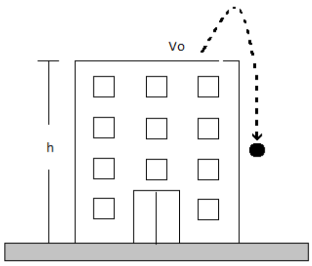

Figura 1: Corpo em Queda Livre

Sabemos que durante a queda o objeto possui aceleração constante g (gravidade). Lembrando que a aceleração é a derivada da velocidade, com relação ao tempo, que por sua vez é a derivada da posição do objeto em relação ao tempo t, então sua trajetória é descrita por uma equação diferencial de segunda ordem dada por

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, \ 0 < t_0 \leq t,$$

onde t_0 é o instante em que o objeto foi lançado, s descreve as posições do objeto durante a queda, e o sinal negativo de g é porque o peso de um corpo é uma força direcionada para baixo, oposta ao sentido positivo da trajetória.

Problema 2:

Circuito em Série

Seja um circuito elétrico simples contendo um indutor L, um capacitor C e um resistor R, como mostra a Figura 2, adaptada de [10]. Temos que, a diferença de potencial U em cada um dos elementos do circuito são dadas por

$$U_{indutor} = \frac{Ldi}{dt}, \ U_{resistor} = Ri \text{ e } U_{capacitor} = \frac{q}{C},$$

onde i é a intensidade da corrente elétrica e q é a carga elétrica.

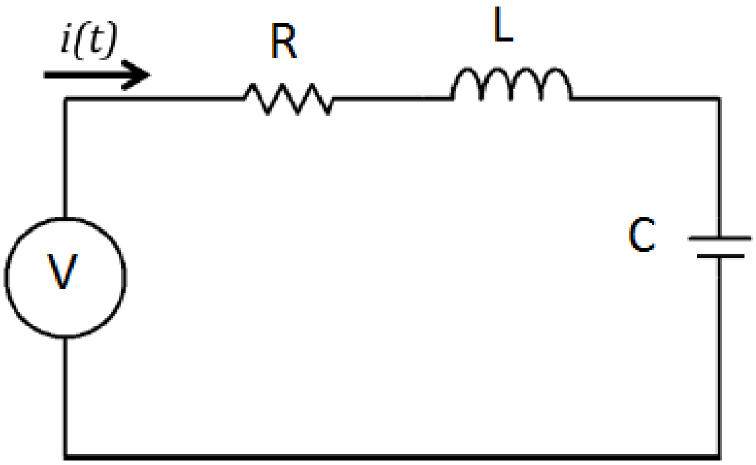

Figura 2: Circuito RLC em Série

A Segunda Lei de Kircchoff afirma que a diferença de potencial $v(t)$ em um circuito fechado é a soma das voltagens no circuito. Portanto,

$$\begin{aligned} v(t) &= U_{indutor} + U_{resistor} + U_{capacitor} \\ &= L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}. \end{aligned}$$

Como $i = \dfrac{dq}{dt}$, então $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{d^2q}{dt^2}$. Portanto, substituindo na última equação, obtemos

$$v(t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C},$$

a qual é uma equação diferencial de segunda ordem.

Problema 3:

Lei do Resfriamento de Newton

Seja $T(t)$ a temperatura de um corpo em um instante t. Se colocarmos o mesmo em um ambiente em que a temperatura é T_A e considerarmos que $\frac{dT}{dt}$ representa a taxa de variação de sua temperatura com respeito ao tempo, então a Lei do Resfriamento de Newton é descrita matematicamente pela equação

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A),$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem. O parâmetro k que aparece na equação é uma constante de proporcionalidade. Como, por hipótese, o corpo está esfriando, então $T > T_A$, o que implica $k < 0$.

Problema 4:

Deflexão De Vigas

Considere uma viga uniforme, de comprimento L, com extremidade esquerda fixa em um suporte e sua extremidade direita solta, como mostra a Figura 3. Sua

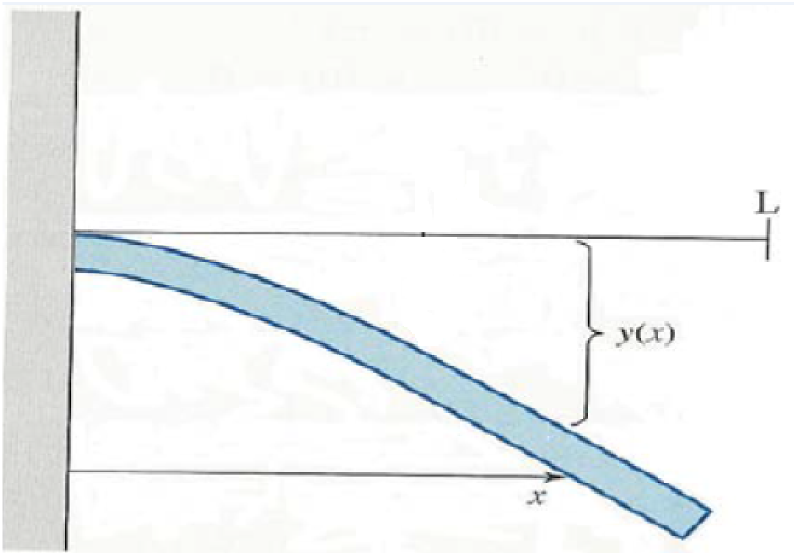

Figura 3: Viga com Deflexão

Deflexão Elástica $D(x)$ para suportar uma carga $W(x)$, por unidade de comprimento, é dada pela equação diferencial de quarta ordem

$$EI\frac{d^4D}{dx^4} = W(x),$$

onde E é o módulo da elasticidade de Young e I é o momento de inércia de uma seção transversal da viga.

Problema 5:

Sistema de Controle

Um sistema de controle é representado por subsistemas ou plantas que são construídos com o objetivo de conseguir uma saída desejada com um desempenho desejado, para uma entrada específica definida.

Na Figura 4, temos um sistema de controle em sua forma mais simples.

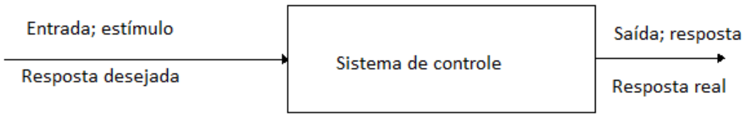

Figura 4: Sistema de Controle Simples

A equação diferencial linear de enésima ordem,

$$a_n\frac{d^n c(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}}+...+a_o c(t)=b_m\frac{d^m r(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}}+...+b_o r(t),$$

descreve muitos sistemas de controle, invariante no tempo,† como representado na Figura 4.

Nesta equação temos $c(t)$ a saída, $r(t)$ a entrada, a_i com $i = 0, 1, 2, ..., n$ e b_i com $i = 0, 1, 2, ..., m$, são parâmetros do sistema.

Nos últimos anos, apesar de estarmos passando por uma crise econômica, o Brasil passou por uns momentos em que houve um desenvolvimento notável nas áreas da Indústria, Construção Civil e Educação. Houve uma expansão das universidades Públicas e Institutos Federais de Ensino, dos sistemas de saúde e diversos outros setores. Com esse crescimento, surgiu a necessidade de mão de obra qualificada para trabalhar nesses setores e as Universidades e Institutos Federais passaram a criar novos cursos nas áreas técnicas e tecnológicas, como também na área de formação de professores, cujo objetivo é a qualificação de pessoas para suprir as necessidades exigidas pelo mercado de trabalho.

A exemplo disso, o Instituto Federal de Ciências e Tecnologia da Paraíba, Campus Cajazeiras, criou os cursos de Automação Industrial, Análises de Sistemas, Matemática e Engenharia Civil, além dos cursos técnicos de Eletromecânica e Edificações. A maioria desses cursos trabalha em suas ementas com problemas advindos da Matemática Contínua. Como dito anteriormente, estes problemas são modelados por equações diferenciais. Neste contexto, o objetivo geral do trabalho é:

- compreender os conceitos da Transformada de Laplace utilizando-os como método para resolução de equações diferenciais que surgem na modelagem de problemas em áreas como a Matemática, Física Engenharia e Indústria.

Os objetivos específicos são:

† Um sistema de controle é invariante no tempo, quando a saída $c(t)$ não depende do instante em que a entrada $r(t)$ é aplicada.

- Definir a Transformada de Laplace, descrevendo suas principais propriedades e resultados;

- Aplicar a Transformada de Laplace como ferramenta para solucionar alguns tipos de equações diferenciais ordinárias que surgem em modelagens de problemas na Engenharia e Indústria;

- Obter soluções de alguns problemas nas áreas da Matemática e da Física, cujos modelos são equações diferenciais.

O trabalho foi desenvolvido com a seguinte estrutura: uma introdução, dois capítulos e dois apêndices.

Na Introdução, apresentamos a diferença entre Matemática Discreta e Contínua, abordamos alguns modelos matemáticos que geram equações diferenciais e destacamos os objetivos gerais e específicos do trabalho.

No primeiro capítulo, fizemos um estudo específico da Transformada de Laplace, abordando definições, propriedades, teoremas e resolução de exemplos.

No segundo capítulo, trabalhamos com aplicações, abordando problemas das áreas de Matemática, Engenharia, Física e Indústria, em que podemos utilizar a Transformada de Laplace para solucioná-los.

No Apêndice A, temos uma tabela das Transformadas de Laplace das principais funções e suas respectivas Transformadas Inversas e no Apêndice B, apresentamos a demonstração do Teorema 1.2.

Capítulo 1

A Transformada de Laplace: Algumas Definições, Propriedades e Principais Resultados

O desenvolvimento desse capítulo tem como base as referências [5, 7, 8].

1.1 Histórico

A Transformada de Laplace† é caracterizada pela aplicação de um operador integral a uma função f que geralmente tem seu domínio variando no tempo.

Apesar do operador ser batizado com esse nome, seu desenvolvimento tem a contribuição de grandes matemáticos e físicos.

O surgimento da transformada integral apareceu, primeiramente, em trabalhos de Leonhard Euler, que considerava, principalmente, a Transformada Inversa para resolver equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. O próprio Laplace em um de seus trabalhos intitulado de Théorie Analytique des Probabilites, publicado em 1812, citou Euler como o primeiro a introduzir o uso dessa transformada. Apenas em 1878 é que o método integral é batizado com o nome "Transformada de Laplace".

Inicialmente, a definição de Transformada de Laplace foi dada no conjunto dos números reais não negativos. Mas no final do século XIX, Poincaré e Pincherle definiram a transformada na forma complexa e ainda mais tarde foi estendida para funções de duas variáveis por Picard.

Segundo Pacheco em [7], no trabalho de Bateman (1910) está presente a primeira aplicação moderna da Transformada de Laplace, onde se transformam equações

† Pierre Simon Marquis de Laplace (1749 – 1827) Apesar ter nascido de uma família francesa de classe baixa, tornou-se um renomado matemático, físico e astrônomo por ter escrito importantes trabalhos nessas áreas. Introduziu a transformada que levou seu nome em um trabalho sobre teoria das probabilidades.

oriundas do trabalho de Rutherford sobre decaimento radiativo, regido pela equação diferencial ordinária

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda_i P,$$

por meio de

$$P(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P(t) dt, \tag{1.1}$$

chegando, assim, a equação desejada. Em (1.1) $P(t)$, é a função que descreve o número de núcleos radioativos presente em uma amostra após um determinado tempo.

Em [7], Pacheco cita o trabalho de Oliver Heaviside, desenvolvido na área de Engenharia Elétrica, cujo título é Eletromagnetic Theory, onde são apresentadas técnicas usando a Transformada de Laplace para auxiliar engenheiros eletricistas na resolução de problemas desenvolvidos em suas pesquisas. Este trabalho completa o método da Transformada de Laplace e está dividido em três volumes, que foram publicados, respectivamente, nos anos 1894, 1899 e 1914. Hoje há uma vasta aplicação da Transformada de Laplace em trabalhos desenvolvidos em várias áreas como a Engenharia, a Economia, a Indústria e na própria Matemática.

1.2 Definição

A maior parte dos problemas que envolve o uso da Transformada de Laplace tem como variação principal o tempo. Assim, é conveniente defini-la com um domínio t tal que $t \in [0, \infty)$.

Definição 1.1 *Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função. A Transformada de Laplace de f, que denotaremos por $L[f(t)]$ ou $L(f)$, é a função*

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \tag{1.2}$$

para todo $s \geq 0$ tal que que a integral convirja.

Assim, quando a integral imprópria (1.2) converge, o resultado é uma função de s. Podemos considerar $s \in \mathbb{R}$ ou $s \in \mathbb{C}$, isso dependerá da situação problema em que o resultado for aplicado.

Aqui, usamos as letras minúsculas para indicar a função a ser transformada e as letras maiúsculas para denotar a função transformada, ou seja, $L[f(t)] = F(s)$.

Como a integral (1.2) é imprópria, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$F(s) = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-st} f(t) dt$$

desde que o limite exista e seja finito.

Exemplo 1.1 *Encontre a Transformada de Laplace para a função f(t) = 1.*

Solução:

$$L(1) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt.$$

Fazendo $u = -st$, temos $du = -sdt$. Assim,

$$L(1) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^u\left(\frac{-du}{s}\right) = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^u\right]\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{s}e^{-sb}+\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

desde que $s > 0$.

De acordo com a definição, observe que

$$\int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t)+\beta g(t)]dt = \alpha\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + \beta\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt.$$

Portanto, quando ambas a integrais convergem

$$L[\alpha f(t)+\beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

Assim, podemos afirmar que L é linear.

1.3 Condições Suficientes para a Existência de $L[f(t)]$

A integral que define a Transformada de Laplace não necessariamente converge. Por exemplo, é fácil verificar que $L(\frac{2}{t})$ e $L(e^{t^2})$ não existem. As seguintes condições garantem a existência da transformada (conforme resultado abaixo):

1ª) f é contínua por partes em $[0,\infty)$, ou seja, em todo intervalo $0 \le a \le t \le b$, há apenas um número finito de descontinuidades e toda descontinuidade é de primeira espécie, isto é, existem os limites laterais.

2ª) f é de ordem exponencial, conforme definição a seguir.

Definição 1.2 *(Ordem exponencial). Dizemos que $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é de ordem exponencial se existem $c, M > 0$ e $T > 0$ tais que $|f(t)| \le Me^{ct}$ para todo $t > T$.*

Se f é crescente, a definição acima simplesmente diz que o gráfico de f no intervalo $[T,\infty)$ está abaixo do gráfico da função exponencial Me^{ct} com $c > 0$. Por exemplo, as funções $f(t) = t$, $f(t) = e^{-t}$ e $f(t) = 2\cos t$ são todas de ordem exponencial para $t > 0$. Para estes casos, temos, respectivamente, $|t| \le e^t$, $|e^{-t}| \le e^t$ e $|2cost| \le 2e^t$.

Teorema 1.1 *(Condições Suficientes para a Existência da Transformada de Laplace de uma dada Função). Seja c uma constante real. Se $f(t)$ é uma função contínua por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial para $t > T$, então, sua Transformada de Laplace existe para $s > c$.*

Demonstração: Temos, por definição, que

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Como $T > 0$, podemos escrever

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Sejam $I_1 = \int_0^T e^{-st} f(t) dt$ e $I_2 = \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt$. Note que I_1 existe, pois pode ser escrita como uma soma de integrais em intervalos em que $e^{-st} f(t)$ seja contínua. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |I_2| \leq \left| \int_T^\infty e^{-st} f(t) \right| dt \leq M \int_T^\infty e^{-st} e^{ct} dt = M \int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt \\ = \lim_{b\to\infty} M \int_T^b e^{-(s-c)t} dt. \end{aligned}$$

Fazendo $u = -(s-c)t$, temos $du = -(s-c)dt$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty} M \int_T^b e^{-(s-c)t} dt &= \lim_{b\to\infty} M \int_T^b e^u \left(\frac{-du}{s-c} \right) \\ &= \frac{-M}{s-c} \lim_{b\to\infty} \left[e^{-(s-c)t} \right] \Big|_T^b \\ &= \frac{-M}{s-c} \lim_{b\to\infty} \left[e^{-(s-c)b} - e^{-(s-c)T} \right] \\ &= \frac{M}{s-c} e^{-(s-c)T}. \end{aligned}$$

Logo, I_2 converge para $s > c$. Portanto, a Transformada de Laplace existe para $s > c$.

■

Exemplo 1.2 *Determine a Transformada de Laplace das funções:*
a) $f(t) = e^{-3t}$
b) $f(t) = sen 2t$

Solução: a) Usando a definição,

$$L(e^{-3t}) = \int_0^\infty e^{-st}e^{-3t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s+3)t}dt.$$

Fazendo $u = -(s+3)t$, temos $du = -(s+3)dt$ e, portanto,

$$\begin{aligned} L(e^{-3t}) &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s+3)t}dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^u\left(\frac{-du}{s+3}\right) \\ &= \frac{-1}{s+3}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-(s+3)t}\right)\Big|_0^b \\ &= \frac{-1}{s+3}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-(s+3)b}-1\right) \\ &= \frac{1}{s+3},\ \ s > -3. \end{aligned}$$

b) Por definição,

$$L(\operatorname{sen}(2t)) = \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}(2t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\operatorname{sen}(2t)dt.$$

Fazendo $u = \operatorname{sen}(2t)$ e $dv = e^{-st}dt$, temos $du = 2\cos(2t)dt$ e $v = \int e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s}$. Portanto,

$$L(\operatorname{sen}(2t)) = 0 + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(2t)dt.$$

Fazendo novamente $u = \cos(2t)$ e $dv = e^{-st}dt$, temos $du = -2\operatorname{sen}(2t)dt$ e $v = \int e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s}$. Daí,

$$\begin{aligned} L[\operatorname{sen}(2t)] &= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}(2t)dt \\ &= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}L[\operatorname{sen}(2t)] \\ &= \frac{2}{s^2+4},\ \ s > 0. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3 *Calcular a Transformada da seguinte função*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & se\ \ 0 \le t < 5 \\ 3, & se\ \ t \ge 5. \end{cases}$$

Solução: Como a função é contínua por partes, sua Transformada de Laplace é dada pela soma de duas integrais, isto é,

$$
\begin{aligned}
L[f(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) \\
&= \int_0^5 e^{-st} f(t)dt + \int_5^\infty e^{-st} f(t)dt \\
&= 0 + 3\int_5^\infty e^{-st} dt \\
&= 3\lim_{b\to\infty} \int_5^b e^{-st} f(t)dt \\
&= 3\lim_{b\to\infty} \left[\frac{-e^{-st}}{s}\right] \Big|_5^b \\
&= 3\lim_{b\to\infty} \left[\frac{-e^{-sb}}{s} + \frac{e^{-5s}}{s}\right] \\
&= 3\frac{e^{-5s}}{s}, \ \ s > 0.
\end{aligned}
$$

A seguir apresentaremos a Transformada de Laplace para algumas funções:

Teorema 1.2 *Transformada de algumas funções básicas*

1. $L[1] = \dfrac{1}{s}, \ \ s > 0$
2. $L[t] = \dfrac{1}{s^2}, \ \ s > 0$
3. $L[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \ \ s > 0$
4. $L[\mathrm{sen}(kt)] = \dfrac{k}{s^2 + k^2}, \ \ s > k$
5. $L[\cos(kt)] = \dfrac{s}{s^2 + k^2}, \ \ s > k$
6. $L[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}, \ \ s > a$
7. $L[cosh(kt)] = \dfrac{s}{s^2 - k^2}, \ \ s > k$
8. $L[senh(kt)] = \dfrac{k}{s^2 - k^2}, \ \ s > k.$

A demonstração de 1. já foi feita. Os outros itens estão demonstrados no Apêndice B.

Exemplo 1.4 *Determinar a Transformada de $f(t) = cos^2 t$.*

Solução: Sabemos que $\cos^2 t = \frac{1}{2}[1+\cos(2t)]$. Então pela a linearidade

$$L[cos^2 t] = L\left[\frac{1+\cos(2t)}{2}\right] = \frac{1}{2}L[1] + \frac{1}{2}L[\cos(2t)].$$

Agora, pelo Teorema 1.2, temos que $L[1] = \dfrac{1}{s}$ e $L[\cos(2t)] = \frac{s}{s^2+4}$. Logo,

$$L[cos^2 t] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{2s^2+4}{s(s^2+4)}\right) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)},$$

$s > 2$.

1.4 A Transformada Inversa

Até o momento, trabalhamos com o seguinte problema: dada uma função $f(t)$, o nosso objetivo era transformar essa função em outra função $F(s)$ por meio do processo de integração conhecido como Transformada de Laplace.

Agora, objetivamos trabalhar com o problema inverso, isto é, dada uma função $F(s)$, procuramos encontrar uma função $f(t)$ tal que sua Transformada de Laplace seja $F(s)$. Assim, definimos $f(t)$ como a Transformada Inversa de Laplace de $F(s)$, que denotaremos por $f(t) = L^{-1}[F(s)]$.

Proposição 1.1 *A Transformada Inversa de Laplace tem a propriedade de linearidade.*

Demonstração: Para provarmos isso, consideremos a e b constantes e $F(s)$ e $G(s)$ funções transformadas de f e g. Então, respectivamente.

$$\begin{aligned} L^{-1}[aF(s) + bG(s)] &= L^{-1}(aL[f(t)] + bL[g(t)]) \\ &= L^{-1}(L[af(t) + bg(t)]) \\ &= af(t) + bg(t) \\ &= aL^{-1}[F(s)] + bL^{-1}[G(s)]. \end{aligned}$$

∎

Pode-se mostrar também que se f e g são funções contínuas por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, então se $L[f(t)] = L[g(t)]$, f e g são essencialmente iguais, ou seja, elas podem ser diferentes somente nos pontos de descontinuidades de f e g. Isso garante que a Transformada Inversa de Laplace de uma função $F(s)$ não é necessariamente única.

A seguir apresentamos a Transformada Inversa de Laplace para algumas funções.

Teorema 1.3 *Vale o seguinte:*

1. $(1) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$
2. $t^n = L^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right] \quad n = 1, 2, 3, ...$
3. $e^{at} = L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]$
4. $\operatorname{sen}(kt) = L^{-1}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right]$
5. $\cos(kt) = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+k^2}\right]$
6. $senh(kt) = L^{-1}\left[\frac{k}{s^2-k^2}\right]$
7. $\cosh(kt) = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-k^2}\right]$.

A demonstração deste teorema será omitida, pois demanda o uso de variáveis complexas. O leitor interessado pode buscar em [11].

Vejamos algumas aplicações deste resultado.

Exemplo 1.5 *Determinar as Transformadas Inversas pedidas abaixo:*

a)$L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]$

b) $L^{-1}\left[\frac{5}{s^2+49}\right]$.

Solução: a) Usando o item 2. do Teorema 1.3, com $n = 2$, e se multiplicarmos e dividirmos (a) por 2!, obtemos

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{1}{2!}L^{-1}\left[\frac{2!}{s^3}\right] = \frac{1}{2!}t^2 = \frac{t^2}{2}.$$

b) Primeiro, podemos escrever

$$L^{-1}\left[\frac{5}{s^2+49}\right] = 5L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+49}\right].$$

Agora, observe que se $k^2 = 49$ e multiplicarmos e dividirmos (b) por 7, e aplicarmos o item 4. do Teorema 1.3, obtemos

$$L^{-1}\left[\frac{5}{s^2+49}\right] = 5\frac{1}{7}L^{-1}\left[\frac{7}{s^2+49}\right] = \frac{5}{7}\operatorname{sen}(7t).$$

Existem casos que para obtermos a Transformada Inversa, precisamos recorrer a técnica das frações parciais. Abordaremos alguns casos nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.6 *Se a Transformada de Laplace de uma função f(t) é*

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2 - 3s + 2}$$

determine $f(t) = L^{-1}[F(s)]$.

Solução: Usando frações parciais, podemos escrever

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2 - 3s + 2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} = \frac{A(s-2) + B(s-1)}{(s-1)(s-2)}.$$

Da igualdade

$$\frac{s+3}{(s-1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s-1)}{(s-1)(s-2)},$$

temos

$$s + 3 = A(s-2) + B(s-1),$$

de onde obtemos $A = -4$ e $B = 5$. Portanto,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{-4}{s-1} + \frac{5}{s-2} \\ \Rightarrow L^{-1}[F(s)] &= -4L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + 5L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] \\ &= -4e^t + 5e^{2t}, \end{aligned}$$

onde usamos o item 3. do Teorema 1.3.

Exemplo 1.7 *Encontre a Transformada Inversa f(t) para*

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+4)}.$$

Solução: Usando frações parciais, temos que

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+4} = \frac{As(s+4) + B(s+4) + Cs^2}{s^2(s+4)}.$$

Da igualdade

$$\frac{1}{s^2(s+4)} = \frac{As(s+4) + B(s+4) + Cs^2}{s^2(s+4)},$$

segue que

$$1 = As(s+4) + B(s+4) + Cs^2,$$

de onde obtemos $A = -\frac{1}{16}$, $B = \frac{1}{4}$ e $C = \frac{1}{16}$. Assim,

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+4)} = \frac{-\frac{1}{16}}{s} + \frac{\frac{1}{4}}{s^2} + \frac{\frac{1}{16}}{s+4}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} f(t) = L^{-1}[F(s)] &= -\frac{1}{16}L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \frac{1}{16}L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{16}e^{-4t}. \end{aligned}$$

1.5 Teoremas Sobre Deslocamento e Derivada da Transformada de Laplace

Encontrar a Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ usando apenas a Definição 1.1 nem sempre é conveniente, pois na maioria dos casos, os cálculos são bastantes trabalhosos. Para facilitar o processo, apresentamos a seguir alguns teoremas que possibilitarão construir uma lista bem mais completa de transformadas sem necessitar usar diretamente a definição.

Mesmo sendo possível a construção de tabelas extensivas de Transformadas de Laplace é importante sabermos as Transformadas de Laplace de algumas funções básicas, tais como $f(t) = t$, $f(t) = t^n$, $f(t) = e^{at}$, $f(t) = \operatorname{sen}(kt)$ e $f(t) = \cos(kt)$.

Teorema 1.4 *(Primeiro Teorema do Deslocamento). Seja a uma constante real. Se a Transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é $F(s)$ para $s > c$, então a Transformada de Laplace da função $g(t) = e^{at}f(t)$ é $G(s) = F(s-a)$ para $s-a > c$.*

Demonstração: Usando a definição, obtemos

$$L[g(t)] = \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a)$$

para $s - a > c$. ■

1.5.1 Algumas Aplicações do Teorema 1.4

Exemplo 1.8 *Sejam a e b constantes. Considere a função $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = e^{bt}\cos(at)$. Determine sua Transformada de Laplace.*

Solução: Como para $f(t) = cos(at)$, temos por definição que $F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$ para $s > a$. Então, pelo Teorema 1.4, para $g(t) = e^{bt}cos(at)$,

$$G(s) = F(s-b) = \frac{s-b}{(s-b)^2+a^2},\ s > a.$$

Exemplo 1.9 *Seja a uma constante. Considere a função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \cosh(at)$. Determine sua Transformada de Laplace.*

Solução: Para $f(t) = 1$, temos $F(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$. Logo, para

$$g(t) = \cosh(at) = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2} = \frac{e^{at}}{2} + \frac{e^{-at}}{2}$$

temos

$$G(s) = F(s-a) = \frac{1}{2(s-a)} + \frac{1}{2(s+a)} = \frac{s}{s^2-a^2}\ para\ s > |a|.$$

Analogamente, para $f(t) = senh(at) = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$ temos

$$F(s) = \frac{1}{2(s-a)} - \frac{1}{2(s+a)} = \frac{a}{s^2-a^2}\ para\ s > |a|.$$

1.5.2 Forma Inversa do Primeiro Teorema do Deslocamento

Podemos representar a forma inversa do Teorema 1.4 por $f(t) = L^{-1}[F(s)]$. Para o caso em que

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4s+5}$$

temos

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4s+5}\right].$$

Desde que

$$\frac{s}{s^2+4s+5} = \frac{s}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2-2}{(s+2)^2+1}$$
$$= \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1},$$

obtemos

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4s+5}\right] = L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{2}{(s+2)^2+1}\right]$$
$$= e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - 2e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$
$$= e^{-2t}cost - 2e^{-2t}sent.$$

1.5.3 Função Degrau Unitário ou Função de Heaviside

Em muitos problemas de áreas como Física e Engenharia, é comum encontrarmos funções que podem representar dualidade, como a presença ou a ausência de fenômenos de natureza elétrica ou mecânica por exemplo. Para casos como estes, é conveniente definir uma função especial chamada de função Degrau Unitário ou função de Heaviside.

Definição 1.3 *A função $H(t-a)$ definida por*

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & se \quad 0 \leq t < a \\ 1, & se \quad t \geq a \end{cases}$$

é chamada função Degrau Unitário ou função de Heaviside.

Representação gráfica:

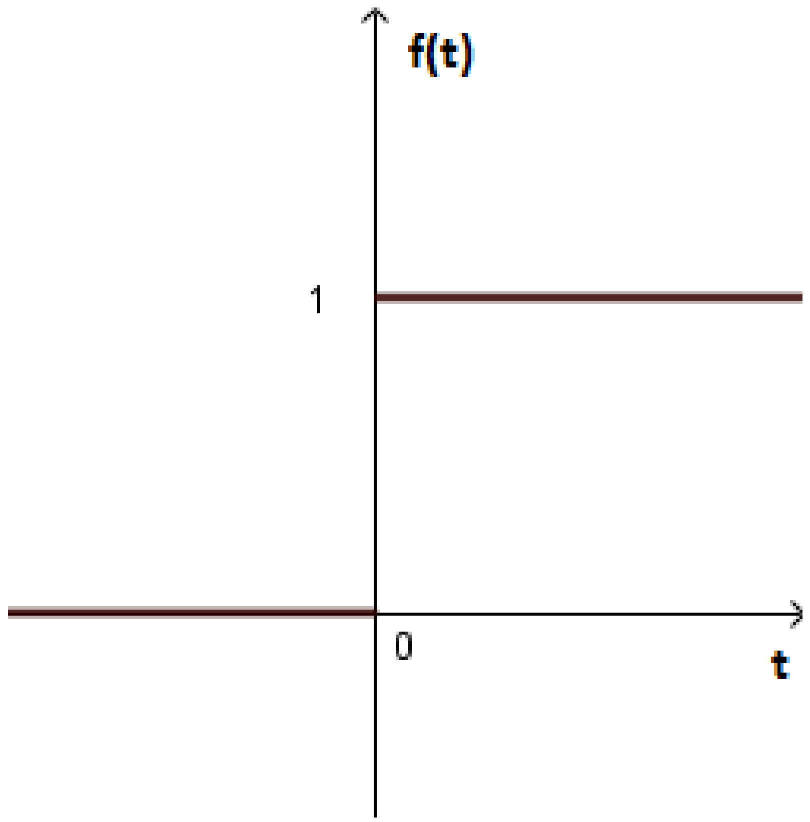

Figura 1.1: Função Degrau Unitário

A função Degrau Unitário pode ser usada para escrever funções $f(t)$ definidas por partes em uma forma compacta.

Considere a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} b(t), & \text{se} \quad 0 \leq t < a \\ c(t), & \text{se} \quad t \geq a. \end{cases}$$

Então, podemos escrever

$$f(t) = b(t) - b(t)H(t-a) + c(t)H(t-a),$$

pois pela Definição 1.3

$$f(t) = \begin{cases} b(t) - b(t).0 + c(t).0, & \text{se} \quad 0 \leq t < a \\ b(t) - b(t).1 + c(t).1, & \text{se} \quad t \geq a. \end{cases}$$

Se $f(t)$ for definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \leq t < a \\ b(t), & \text{se} \quad a \leq t < b \\ 0, & \text{se} \quad t \geq b \end{cases}$$

podemos escrevê-la na forma

$$f(t) = b(t)[H(t-a) - H(t-b)].$$

Exemplo 1.10 *Determinar a Transformada de Laplace para a função Degrau Unitário*

$$f(t) = H(t-a).$$

Solução: Pela definição, temos

$$\begin{aligned} F(s) = \int_0^\infty e^{-st} H(t-a)dt &= \int_0^a e^{-st} H(t-a)dt + \int_a^\infty e^{-st} H(t-a)dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_a^b e^{-st} dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right] \Big|_a^b \\ &= -\left(\frac{-e^{-sa}}{s} \right) = \frac{e^{-sa}}{s}, \ s > 0. \end{aligned}$$

Exemplo 1.11 *A voltagem de um circuito elétrico é modelada pela função*

$$V(t) = \begin{cases} 10t, & se \quad 0 \leq t < 2 \\ 0, & se \quad t \geq 2. \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de $V(t)$.
b) Use a função Degrau Unitário para escrever uma expressão compacta de $V(t)$.

Solução:
a) Gráfico da Figura 1.2

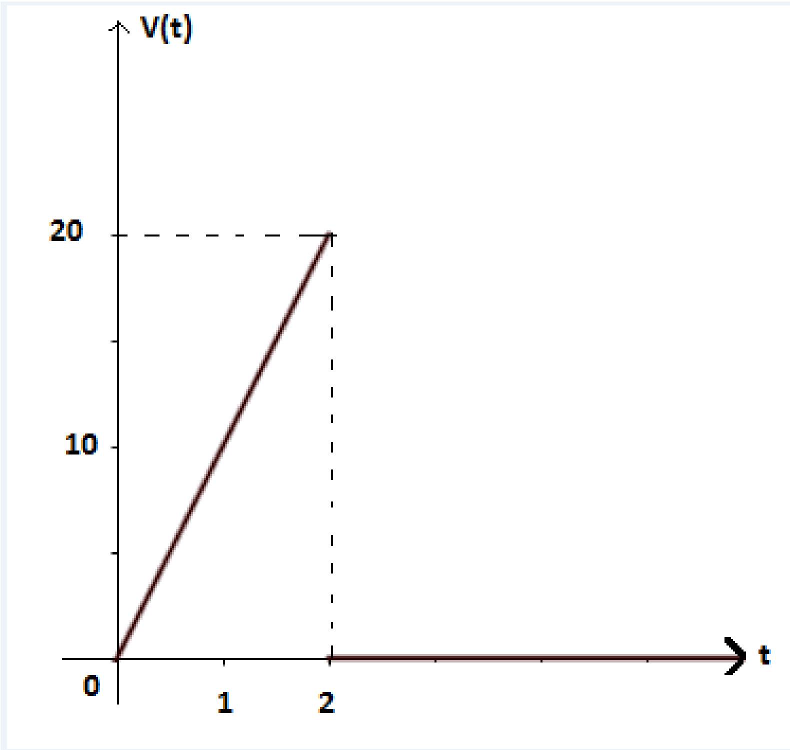

Figura 1.2: Gráfico da Voltagem

b) $V(t) = 10t - 10tH(t-2)$

Teorema 1.5 *(Segundo Teorema do Deslocamento). Seja a uma constante positiva. Se a Transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é $F(s)$, então a Transformada de Laplace da função*

$$g(t) = f(t-a)H(t-a)$$

é $G(s) = e^{-sa}F(s)$.

Demonstração: Pela Definição 1.1, temos

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)H(t-a)dt \\
&= \int_0^a e^{-st} f(t-a)H(t-a)dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)H(t-a)dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)H(t-a)dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt
\end{aligned}
$$

pois em $[a, \infty)$ temos $H(t-a) = 1$. Portanto, fazendo $v = t - a$ temos $dv = dt$. Assim,

$$
\begin{aligned}
G(s) = \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v)dv &= \int_0^\infty e^{-sv}.e^{-sa} f(v)dv \\
&= e^{-as} \int_0^\infty e^{-sv} f(v)dv \\
&= e^{-as} F(s).
\end{aligned}
$$

■

Vejamos um exemplo de como usar este resultado.

Exemplo 1.12 *Calcular a Transformada de Laplace para a função $f(t)$ definida por*

$$
f(t) = \begin{cases} 0, & se \quad 0 \leq t < 3 \\ (t-3)^2, & se \quad t \geq 3. \end{cases}
$$

Solução: Podemos escrever a função na forma compacta como sendo

$$
f(t) = (t-3)^2 H(t-3).
$$

Como $a = 3$, pelo Teorema 1.5, temos que $F(s) = e^{-3s} L[f(t)]$, onde $f(t) = t^2$. Portanto,

$$
F(s) = e^{-3s} L[t^2] = e^{-3s} \frac{2!}{s^3} = \frac{2e^{-3s}}{s^3}.
$$

1.5.4 Forma Inversa do Segundo Teorema da Translação

Vimos no Teorema 1.5 que $L[f(t-a)H(t-a)] = e^{-as}F(s)$, onde $F(s)$ é a Transformada de $f(t)$. Assim, a Transformada Inversa é dada por

$$
L^{-1}[e^{-as}F(s)] = f(t-a)H(t-a).
$$

Exemplo 1.13 *Calcular* $L^{-1}\left[\frac{e^{\frac{-\pi s}{3}}}{s^2+4}\right]$.

Solução: Temos que $a = \frac{\pi}{3}$ e

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t).$$

Portanto,

$$L^{-1}\left[\frac{e^{\frac{-\pi s}{3}}}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\left(t-\frac{\pi}{3}\right)H\left(t-\frac{\pi}{3}\right).$$

Teorema 1.6 *Se* $n \in \mathbb{N}$ *então*

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s).$$

Demonstração: Para $n = 1$, provemos que $L[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$. De fato,

$$\begin{aligned} F(s) = L[f(t)] \Rightarrow \frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st}f(t)]dt \\ &= -\int_0^\infty te^{-st}f(t)dt \\ &= -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt \\ &= -L[tf(t)]. \end{aligned}$$

Suponha que a igualdade seja verdadeira para $n = k \geq 1$. Então, devemos provar que ela é verdadeira para $n = k+1$. Por hipótese,

$$L[t^k f(t)] = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}F(s).$$

Assim,

$$\begin{aligned} L[t^{k+1}f(t)] = L[t.t^k f(t)] &= -\frac{d}{ds}L[t^k f(t)] \\ &= (-1)\frac{d}{ds}(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}F(s) \\ &= (-1)^{k+1}\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}F(s), \end{aligned}$$

pelo princípio de indução, o resultado segue.

■

Exemplo 1.14 *Encontre a Transformada de Laplace da função* $f(t) = te^{2t}\,\mathrm{sen}(6t)$.

Solução: Pelo Teorema 1.6, temos que

$$\begin{aligned} L[te^{2t}\,\mathrm{sen}(6t)] = -\frac{d}{ds}L[e^{2t}\,\mathrm{sen}(6t)] &= -\frac{d}{ds}\left[\frac{6}{(s-2)^2+36}\right] \\ &= -\left[\frac{-6.2(s-2)}{[(s-2)^2+36]^2}\right] \\ &= \frac{12s-24}{[(s-2)^2+36]^2}. \end{aligned}$$

1.6 Transformada de Laplace de Derivadas, Integrais e Funções Periódicas

Nesta seção, vamos usar a Transformada de Laplace para resolver alguns tipos de equações diferenciais. Para isso, vamos precisar do seguinte resultado:

Teorema 1.7 *(Transformada de uma Derivada). Se* $f(t), f'(t), ..., f^{(n-1)}(t)$ *forem contínuas em* $[0,\infty)$*, de ordem exponencial, e se* $f^{(n)}(t)$ *for contínua por partes em* $[0,\infty)$*, então*

$$L[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$$

com $F(s) = L[f(t)]$.

Demonstração: Provemos por indução sobre n. Para $n = 1$,

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt.$$

Fazendo $u = e^{-st}$ e $dv = f'(t)dt$, temos $du = -se^{-st}dt$ e $v = f(t)$. Assim,

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= \lim_{b\to\infty}\left[e^{-st}f(t)\right]\Big|_0^b + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= -f(0) + sL[f(t)] \\ &= sF(s) - f(0). \end{aligned}$$

Suponha que a expressão seja verdadeira para $n = k \geq 1$, ou seja que

$$L[f^{(k)}(t)] = s^kF(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - s^{k-3}f''(0) - ... - f^{(k-1)}(0).$$

Para $n = k + 1$, temos

$$\begin{aligned}
L[f^{(k+1)}(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f^{(k+1)}(t)dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[e^{-st} f^{(k)}(t)\right]\Big|_0^b + s\int_0^\infty e^{-st} f^{(k)}(t)dt \\
&= -f^{(k)}(0) + sL[f^{(k)}(t)] \\
&= s[s^k F(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - s^{k-3}f''(0) - ... - f^{(k-1)}(0)] - f^{(k)}(0) \\
&= s^{k+1}F(s) - s^k f(0) - s^{k-1}f'(0) - s^{k-2}f''(0) - ... - sf^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0),
\end{aligned}$$

pelo princípio de indução, o resultado segue.

■

Vejamos um exemplo de como aplicar este resultado.

Exemplo 1.15 *Determinar a Transformada de Laplace da função*

$$f(t) = ktcos(kt) + sen(kt)$$

onde k é uma constante.

Solução: Observe que $f(t) = \frac{d}{dt}(tsen(kt))$. Portanto,

$$\begin{aligned}
L[f(t)] = L\left[\frac{d}{dt}(tsen(kt))\right] &= sL\left[tsen(kt)\right] - f(0) \\
&= s\left(-\frac{d}{ds}L[sen(kt)]\right) \\
&= -s\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right) \\
&= -s\left[\frac{-k2s}{(s^2+k^2)^2}\right] \\
&= \frac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}.
\end{aligned}$$

Definição 1.4 *(Convolução) Sejam f e g funções contínuas por partes em $[0, \infty)$. Então,*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\rho)g(t-\rho)d\rho$$

é chamada convolução de f e g.

Lema 1.1 *A convolução de duas funções f e g é comutativa, ou seja, $f * g = g * f$.*

Demonstração: Pela Definição 1.4,

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\rho)g(t-\rho)d\rho.$$

Fazendo $u = t - \rho$, então $du = -d\rho$. Portanto

$$\begin{aligned}(f * g)(t) = \int_t^0 f(t-u)g(u)(-du) &= -\int_t^0 g(u)f(t-u)du \\ &= \int_0^t g(u)f(t-u)du \\ &= (g * f)(t), \ \forall t \geq 0,\end{aligned}$$

donde $f * g = g * f$.

■

Teorema 1.8 *(Teorema da Convolução) Sejam f e g funções contínuas por partes em $[0,\infty)$ e de ordem exponencial. Então,*

$$L[f * g] = L[f(t)].L[g(t)] = F(s)G(s).$$

Demonstração: Temos que

$$L[f * g] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) * g(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(z)g(t-z)dzdt\right].$$

Essa integração ocorre no plano tz como mostra a Figura 1.3. Logo pelo Teorema de Fubini,

$$L[f * g] = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(z)g(t-z)dzdt = \int_0^\infty f(z) \int_z^\infty e^{-st} g(t-z)dtdz.$$

Se $u = t - z$, então $du = dt$. Portanto,

$$L[f * g] = \int_0^\infty f(z) \int_0^\infty e^{-s(u+z)} g(u)dudz = \int_0^\infty f(z) \int_0^\infty e^{-su}e^{-sz} g(u)dudz.$$

$$L[f * g] = \int_0^\infty e^{-sz} f(z)dz \int_0^\infty e^{-su} g(u)du.$$

$$L[f * g] = L[f(z)] \cdot L[g(u)] = F(s) \cdot G(s).$$

■

OBSERVAÇÃO: A forma inversa do Teorema da Convolução também é válida, ou seja,

$$L^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = (f * g)(t).$$

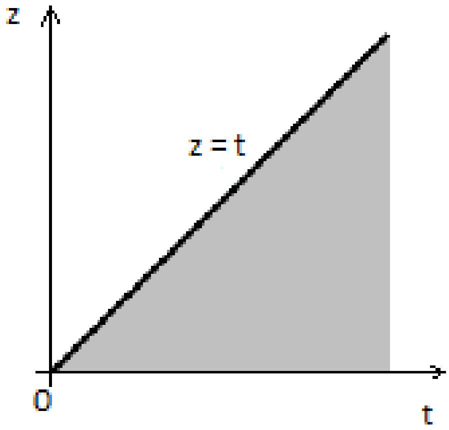

Figura 1.3: Plano - tz

Exemplo 1.16 *Encontre a Transformada de Laplace da função*

$$f(t) = \int_0^t e^{-\rho} cos(\rho) d\rho.$$

Solução: Pela definição de convolução, observe que $f(t) = (g * h)(t)$, onde $g(t) = e^{-t}cos(t)$ e $h(t) = 1$. Logo, pelo Teorema da Convolução segue que

$$\begin{aligned} L[f] = L[g * h] &= L[g] \cdot L[h] \\ &= L[e^{-t}cos(t)] \cdot L[1] \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{s+1}{s[(s+1)^2+1]}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.17 *Seja* $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$, *a Transformada de Laplace de uma função* $f(t)$. *Determine* $f(t)$.

Solução: Temos que

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right] = L^{-1}[H(s) \cdot G(s)] = (h * g)(t),$$

em que $H(s) = \frac{1}{s^2}$ e $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Daí,

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t \ e \ g(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = sen(t).$$

Assim,

$$f(t) = (h * g)(t) = \int_0^t (t-\rho) sen(\rho) d\rho.$$

Fazendo $u = t - \rho$ e $dv = sen(\rho)d\rho$, obtemos $du = -d\rho$ e $v = \int \text{sen}(\rho)d\rho = -\cos(\rho)$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(t) = (h * g)(t) &= \int_0^t (t-\rho) sen(\rho) d\rho \\ &= (t-\rho)\cdot(-cos(\rho))\Big|_0^t - \int_0^t cos(\rho)d\rho \\ &= t - sen(t). \end{aligned}$$

1.6.1 Transformada de uma Função Periódica

Considere uma função f periódica com período T, $T > 0$, isto é, $f(t+T) = f(t)$, para todo $t \geq 0$. Assim, podemos obter sua Transformada de Laplace por uma integração no intervalo $[0, T]$.

Teorema 1.9 *(Transformada de uma Função Periódica). Seja $f(t)$ contínua por partes $[0, \infty)$ e de ordem exponencial. Se f for periódica de período T, então*

$$L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Demonstração: Vamos usar a Definição 1.1 e escrever a Transformada de Laplace como duas integrais, isto é,

$$L[f(t)] = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

Sejam $I_1 = \int_0^T e^{-st} f(t)dt$ e $I_2 = \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt$. Se fizermos $t = u + T$, obtemos $dt = du$. Agora, substituindo na integral I_2, obtemos

$$\begin{aligned} \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt &= \int_0^\infty e^{-s(u+T)} f(u+T)du \\ &= \int_0^\infty e^{-su} e^{-sT} f(u+t)du \\ &= e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u+T)du \\ &= e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u)du \\ &= e^{-sT} L[f(t)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
L[f(t)] = I_1 + I_2 = \int_0^T e^{-st}dt + e^{-sT}L[f(t)] \\
\Rightarrow L[f(t)] \cdot [1 - e^{-sT}] = \int_0^T e^{-st}dt \\
\Rightarrow L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 1.18 *Obter a Transformada de Laplace para a Função de Onda Dente de Serra representada no Gráfico* 1.4*,*

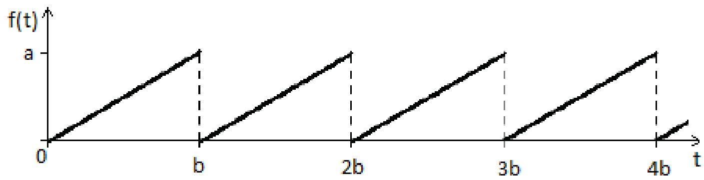

Figura 1.4: Função Dente de Serra

Solução: Observe que $f(t) = \frac{at}{b}$, $0 \leq t < b$ e $f(b+t) = f(t)$ para todo $t > 0$. Como a função é periódica de período $T = b$, podemos usar o Teorema 1.9 para concluirmos que

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sb}} \int_0^b e^{-st} \frac{at}{b} dt = \left[\frac{a}{b(1 - e^{-sb})} \right] \int_0^b e^{-st} t dt.$$

Fazendo $u = t$ e $dv = e^{-st}dt$, obtemos $du = dt$ e $v = \int e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s}$. Assim,

$$\begin{aligned}
F(s) &= \left[\frac{a}{b(1-e^{-sb})}\right] \cdot \left[t \cdot \left(\frac{-e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^b - \int_0^b \left(\frac{-e^{-st}}{s}\right) dt\right] \\
&= \left[\frac{a}{b(1-e^{-sb})}\right] \cdot \left[\frac{-be^{-sb}}{s} + \left(\frac{-e^{-st}}{s^2}\right)\Big|_0^b\right] \\
&= \left[\frac{a}{b(1-e^{-sb})}\right] \cdot \left[\frac{-be^{-sb}}{s} + \frac{-e^{-sb}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right] \\
&= \left[\frac{a}{b(1-e^{-sb})}\right] \cdot \left[\frac{-be^{-sb}}{s} + \frac{1-e^{-sb}}{s^2}\right] \\
&= \frac{-ae^{-sb}}{s(1-e^{-sb})} + \frac{a}{bs^2} \\
&= \frac{-a}{s(e^{sb}-1)} + \frac{a}{bs^2} \\
&= \frac{a}{s}\left[\frac{1}{bs} - \frac{1}{e^{sb}-1}\right].
\end{aligned}$$

1.7 Função Delta de Dirac

Os sistemas mecânicos frequentemente estão sujeitos a fenômenos impulsivos, ou seja, forças externas que tem módulo muito elevado e atuam sobre o sistema por um período de tempo muito curto. Como exemplo, podemos citar uma bola de futebol quando é chutada, uma bola de sinuca ao ser atingida pelo taco, etc.

A função

$$\delta_p(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \leq t < a-p \\ \frac{1}{2p}, & \text{se} \quad a-p \leq t < a+p \\ 0, & \text{se} \quad t \geq a+p \end{cases}$$

com $p > 0$ e $a > 0$, pode servir como um modelo matemático de tais forças. Para p muito pequeno, $\delta_p(t-a)$ é essencialmente uma função constante com módulo muito grande, que atua por um pequeno intervalo de tempo.

Essa função é chamada de Impulso Unitário, devido ter a propriedade

$$\int_0^\infty \delta_p(t-a)dt = 1.$$

Na prática, definimos a função Impulso Unitário, da seguinte maneira:

$$\delta(t-a) = \lim_{p\to 0} \delta_p(t-a).$$

A expressão anterior, que não define de fato uma função, fica caracterizada pelas seguintes propriedades:

1ª) $\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & \text{se} \quad t = a \\ 0, & \text{se} \quad t \neq a; \end{cases}$

2ª) $\int_0^\infty \delta(t-a)dt = 1.$

Chamamos de função Delta de Dirac, a expressão $\delta(t-a)$.

Podemos obter a Transformada de Laplace da função Delta de Dirac, supondo de maneira formal que

$$L[(\delta(t-a)] = \lim_{p\to 0} L[\delta_p(t-a)].$$

Teorema 1.10 *(Transformada da Função Delta de Dirac). Se $a > 0$, então a Transformada de Laplace para a função Delta de Dirac é dada por*

$$L[\delta(t-a)] = e^{-sa}.$$

Demonstração: Podemos escrever a função Impulso Unitário $\delta_p(t-a)$ em termos da função Degrau Unitário em sua forma compacta. Assim,

$$\delta_p(t-a) = \frac{1}{2p}[H(t-(a-p)) - H(t-(a+p))].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L[\delta_p(t-a)] &= \frac{1}{2p}L[H(t-(a-p)) - H(t-(a+p))] \\ &= \frac{1}{2p}\left[\frac{e^{-s(a-p)}}{s} - \frac{e^{-s(a+p))}}{s}\right] \\ &= \frac{1}{2p}e^{-sa}\left[\frac{e^{sp}-e^{-sp}}{s}\right] \\ &= e^{-sa}\left[\frac{e^{sp}-e^{-sp}}{2sp}\right]. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} L[\delta(t-a)] &= \lim_{p\to 0} L[\delta_p(t-a)] \\ &= \lim_{p\to 0} e^{-sa}\left[\frac{e^{sp}-e^{-sp}}{2sp}\right] \\ &= e^{-sa}\lim_{p\to 0}\left[\frac{e^{sp}-e^{-sp}}{2sp}\right]. \end{aligned}$$

Como este último limite é indeterminado, então podemos utilizar a regra de L'Hôspital. Portanto,

$$L[\delta(t-a)] = e^{-sa} \lim_{p\to 0} \left[\frac{e^{sp} - e^{-sp}}{2sp}\right] = e^{-sa} \lim_{p\to 0} \left[\frac{se^{sp} + se^{-sp}}{2s}\right] = e^{-sa},$$

o que conclui a prova.

■

OBSERVAÇÃO: Note que se $a = 0$, então

$$L[\delta(t-a)] = L[\delta(t)] = e^{-s\cdot 0} = 1.$$

Vejamos um exemplo de como aplicar a Transformada de Laplace para resolver uma equação diferencial ordinária.

Exemplo 1.19 *Resolva a equação diferencial*

$$y'(t) - 3y(t) = \delta(t-2),$$

sujeito a condição inicial $y(0) = 0$.

Solução: Aplicando a Transformada de Laplace na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} L[y'(t)] - 3L[y(t)] &= L[\delta(t-2)] \\ \Leftrightarrow sY(s) - y(0) - 3Y(s) &= e^{-2s} \\ \Leftrightarrow (s-3)Y(s) &= e^{-2s} \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{e^{-2s}}{s-3}. \end{aligned}$$

Agora, aplicando a Transformada Inversa, concluímos que

$$\begin{aligned} L^{-1}[Y(s)] &= L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s-3}\right] \\ \Rightarrow y(t) &= e^{3(t-2)}H(t-2). \end{aligned}$$

Capítulo 2

Algumas Aplicações da Transformada de Laplace

Neste capítulo, trabalharemos com o método da Transformada de Laplace para resolução de problemas em áreas como a Matemática, a Física, a Engenharia e a Automação Industrial, finalizando com uma proposta para os cursos técnicos de Eletromecânica e Edificações do estudo introdutório de equações diferenciais ordinárias, usando a Transformada de Laplace como ferramenta.

2.1 Aplicação na Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

O desenvolvimento dessa seção foi baseado nas referências [5, 7].

Na Matemática, o método da Transformada de Laplace é uma importante ferramenta para a resolução de equações diferenciais lineares, particularmente, aquelas que apresentam coeficientes constantes.

A equação

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = g(t), \tag{2.1}$$

em que $a_i (i = 1, 2, 3, ..., n)$ são números reais quaisquer e $a_n \neq 0$, é chamada de equação diferencial linear de ordem n.

Quando $g(t) = 0$, ou seja, $g(t)$ é a função identicamente nula, dizemos que a equação (2.1) é homogênea; caso $g(t) \neq 0$, ela é chamada de equação diferencial linear não homogênea.

2.1.1 Soluções de Equações Diferencias Lineares de Primeira Ordem Homogêneas

Vamos utilizar o método da Transformada de Laplace para resolver a equação diferencial linear homogênea de primeira ordem

$$2y'(t) + y(t) = 0.$$

Aplicando o método da Transformada, temos

$$\begin{aligned} L[2y'(t)] + L[y(t)] &= 0 \\ \Leftrightarrow 2[sY(s) - y(0)] + Y(s) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2s+1)Y(s) &= 2y(0) \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{y(0)}{s+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Aplicando a Transformada Inversa, obtemos

$$\begin{aligned} L^{-1}[Y(s)] &= y(0)L^{-1}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right) \\ y(t) &= y(0) \cdot e^{-\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Fazendo $y(0) = c$, então $y(t) = c \cdot e^{-\frac{t}{2}}$, que é a solução da equação dada.

Considere, agora, a equação diferencial linear de primeira ordem homogênea dada por

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0,$$

com $a_1 \neq 0$, $y(0) = c$ e a_1 e a_0 constantes. Usando o método da Transformada de Laplace e prosseguindo como no exemplo anterior, obtemos

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s+\frac{a_0}{a_1}}.$$

Agora, aplicando a Transformada Inversa

$$\begin{aligned} L^{-1}[Y(s)] &= c \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{a_0}{a_1}}\right] \\ y(t) &= ce^{-\frac{a_0}{a_1}t}. \end{aligned}$$

Chamando $m = -\frac{a_0}{a_1}$, então $y(t) = ce^{mt}$. Observe que m é solução da equação

$$a_1 m + a_0 = 0.$$

Essa equação é chamada de equação característica associada a equação diferencial linear de primeira ordem

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

Portanto, podemos concluir, usando o método da Transformada de Laplace, que toda equação diferencial linear de primeira ordem homogênea tem solução da forma

$$y(t) = ce^{mt}$$

onde m é a solução da equação característica associada à equação diferencial dada.

Exemplo 2.1 *Dê a solução geral das equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem abaixo:*
a) $y'(t) + 2y(t) = 0$
b) $4y'(t) - 5y(t) = 0$
Solução: a) A equação característica, neste caso, é $m + 2 = 0$. *Resolvendo, obtemos* $m = -2$. *Portanto, a solução geral será*

$$y(t) = ke^{-2t},$$

em que k *é uma constante real.*
b) A equação característica, neste caso, é $4m - 5 = 0$. *Resolvendo, obtemos* $m = \frac{5}{4}$. *Portanto, a solução geral será*

$$y(t) = ke^{\frac{5t}{4}},$$

em que k *é uma constante real.*

2.1.2 Soluções de Equações Diferencias Lineares de Primeira Ordem não Homogêneas

A equação diferencial linear de primeira ordem não homogênea

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t),$$

pode ser resolvida seguindo o seguinte roteiro:

- **Passo 1**: Encontramos a solução da equação homogênea.
- **Passo 2**: Encontramos a Transformada de Laplace da função $g(t)$ e dividimos pela equação característica.
- **Passo 3**: Encontramos a Transformada Inversa do resultado do passo anterior e denotamos de solução particular y_p.

- **Passo 4**: A solução geral será $y(t) = y_c + y_p$, onde y_c é a solução da equação diferencial linear homogênea.

Exemplo 2.2 *Utilize os passos anteriores para encontrar a solução geral da equação*

$$\frac{1}{2}y'(t) + 4y(t) = e^{2t}.$$

Solução: Seguindo o roteiro dado, temos:
1º) Passo: Como a equação característica é $\frac{1}{2}m + 4 = 0$, então $m = -8$. Logo, $y_c(t) = ke^{-8t}$.
2º) Passo: $g(t) = e^{2t}$. Calculando sua Transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned} L[g(t)] &= L[e^{2t}] \\ G(s) &= \frac{1}{s-2}. \end{aligned}$$

Dividindo $G(s)$ pela equação característica que é $\frac{1}{2}s + 4 = 0$, obtemos

$$G_p(s) = \frac{2}{(s-2)(s+8)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+8}. \tag{2.2}$$

De,

$$\begin{aligned} \frac{2}{(s-2)(s+8)} &= \frac{A(s+8) + B(s-2)}{(s-2)(s+8)}. \\ 2 &= A(s+8) + B(s-2), \end{aligned}$$

obtemos $A = \frac{1}{5}$ e $B = -\frac{1}{5}$. Substituindo em 2.2, obtemos

$$G_p(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s+8}.$$

3º) Passo: Aplicando a Transformada Inversa no resultado anterior, temos

$$\begin{aligned} L[G_p(s)] &= \frac{1}{5} \cdot L\left[\frac{1}{s-2}\right] - \frac{1}{5} \cdot L\left[\frac{1}{s+8}\right] \\ g_p(t) &= \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-8t} \end{aligned}$$

que é a solução particular.
4º) Passo: Portanto a solução geral será

$$\begin{aligned} y(t) &= y_c(t) + g_p(t) \\ y(t) &= ke^{-8t} + \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-8t}, \end{aligned}$$

em que k é uma constante real.

2.1.3 Soluções de Equações Diferencias Lineares de Segunda Ordem Homogêneas

Nesta subseção, considere a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0, \tag{2.3}$$

com $a_2 \neq 0$, $y(0) = c_1$ e $y'(0) = c_2$. Aplicando o método da Transformada de Laplace em (2.3), temos

$$\begin{aligned} a_2L[y''(t)] + a_1L[y'(t)] + a_0L[y(t)] &= 0 \\ \Leftrightarrow a_2[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + a_1[sY(s) - y(0)] + a_0Y(S) &= 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (a_2s^2 + a_1s + a_0) \cdot Y(s) &= (a_2s + a_1)c_1 + a_2 \cdot c_2 \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{(a_2s + a_1)c_1 + a_2 \cdot c_2}{a_2s^2 + a_1s + a_0}. \end{aligned}$$

Como $a_2 \neq 0$, podemos dividir o numerador e o denominador por a_2, obtendo

$$Y(s) = \frac{sc_1 + \frac{a_1}{a_2} \cdot c_1 + c_2}{s^2 + \frac{a_1}{a_2} \cdot s + \frac{a_0}{a_2}}.$$

Podemos escrever o denominador como diferença de dois quadrados, como se segue

$$\begin{aligned} s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2} &= s^2 + 2s\left(\frac{a_1}{2a_2}\right) + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \frac{a_0}{a_2} \\ &= s^2 + 2s\left(\frac{a_1}{2a_2}\right) + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}\right] \\ &= s^2 - 2s\left(-\frac{a_1}{2a_2}\right) + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}\right]^2 \\ &= \left[s - \left(-\frac{a_1}{a_2}\right)\right]^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}\right]^2 \end{aligned}$$

Pela diferença de dois quadrados, segue que

$$\begin{aligned} &s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2} = \\ &= \left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}\right]\left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2}\right) - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}\right] \\ &= \left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}\right)\right]\left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Fazendo $\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}$ e $\theta = \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$, obtemos

$$s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2} = [s - (\alpha - \theta)]\,[s - (\alpha + \theta)]\,.$$

Portanto,

$$Y(s) = \frac{sc_1 + \frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2}{[s - (\alpha - \theta)]\,[s - (\alpha + \theta)]}.$$

Em relação a $\theta = \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$, é necessário considerarmos três casos:

Caso 1: $\dfrac{a_1^2}{4a_2^2} > \dfrac{a_0}{a_2}$.

Neste caso, a equação polinomial $s^2 + \frac{a_1}{a_2} \cdot s + \frac{a_0}{a_2} = 0$ tem duas raízes reais e distintas $m_1 = \alpha - \theta$ e $m_2 = \alpha + \theta$. Logo,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{sc_1 + \frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2}{(s - m_1)(s - m_2)} \\ &= c_1\frac{s}{(s - m_1)(s - m_2)} + \left(\frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2\right)\frac{1}{(s - m_1)(s - m_2)} \end{aligned}$$

Aplicando a Transformada Inversa

$$L^{-1}[Y(s)] = c_1 L^{-1}\left[\frac{s}{(s - m_1)(s - m_2)}\right] + \left(\frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2\right)L^{-1}\left[\frac{1}{(s - m_1)(s - m_2)}\right].$$

Usando frações parciais, podemos escrever

$$\frac{s}{(s - m_1)(s - m_2)} = \frac{A}{(s - m_1)} + \frac{B}{(s - m_2)} = \frac{A(s - m_2) + B(s - m_1)}{(s - m_1)(s - m_2)}.$$

Daí, obtemos $A = -\frac{m_1}{m_2 - m_1}$ e $B = \frac{m_2}{m_2 - m_1}$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s - m_1)(s - m_2)} &= \frac{-m_1}{(m_2 - m_1)(s - m_1)} + \frac{m_2}{(m_2 - m_1)(s - m_2)} \\ &= \frac{m_2}{(m_2 - m_1)(s - m_2)} - \frac{m_1}{(m_2 - m_1)(s - m_1)} \\ &= \frac{1}{m_2 - m_1}\left[\frac{m_2}{s - m_2} - \frac{m_1}{s - m_1}\right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{s}{(s - m_1)(s - m_2)}\right] &= \frac{1}{m_2 - m_1}\left[L^{-1}\left[\frac{m_2}{s - m_2}\right] - L^{-1}\left[\frac{m_1}{s - m_1}\right]\right] \\ &= \frac{1}{m_2 - m_1}\left[m_2 e^{m_2 t} - m_1 e^{m_1 t}\right] \\ &= \frac{m_2 e^{m_2 t} - m_1 e^{m_1 t}}{m_2 - m_1}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, segue que

$$\frac{1}{(s-m_1)(s-m_2)} = \frac{A}{(s-m_1)} + \frac{B}{(s-m_2)} = \frac{A(s-m_2)+B(s-m_1)}{(s-m_1)(s-m_2)}.$$

Daí, obtemos $A = \frac{-1}{m_2-m_1}$ e $B = \frac{1}{m_2-m_1}$. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s-m_1)(s-m_2)} &= \frac{1}{(m_2-m_1)(s-m_2)} - \frac{1}{(m_2-m_1)(s-m_1)}\\ &= \frac{1}{m_2-m_1}\left[\frac{1}{s-m_2} - \frac{1}{s-m_1}\right].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}L^{-1}\left[\frac{1}{(s-m_1)(s-m_2)}\right] &= \frac{1}{m_2-m_1}\left[L^{-1}\left[\frac{1}{s-m_2}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s-m_1}\right]\right]\\ &= \frac{1}{m_2-m_1}\left[e^{m_2 t} - e^{m_1 t}\right] = \frac{e^{m_2 t}-e^{m_1 t}}{m_2-m_1}.\end{aligned}$$

Substituindo os resultados obtidos na igualdade

$$L^{-1}[Y(s)] = c_1 L^{-1}\left[\frac{s}{(s-m_1)(s-m_2)}\right] + \left(\frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2\right) L^{-1}\left[\frac{1}{(s-m_1)(s-m_2)}\right],$$

obtemos

$$\begin{aligned}y(t) &= c_1\left[\frac{m_2 e^{m_2 t} - m_1 e^{m_1 t}}{m_2-m_1}\right] + \left(\frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2\right)\left[\frac{e^{m_2 t}-e^{m_1 t}}{m_2-m_1}\right]\\ &= \frac{c_1 m_2}{m_2-m_1}e^{m_2 t} + \left(\frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2\right)\frac{1}{m_2-m_1}e^{m_2 t} - \frac{c_1 m_1}{m_2-m_1}e^{m_1 t}\\ &\quad - \left(\frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2\right)\frac{1}{m_2-m_1}e^{m_1 t}\\ &= \left[\frac{c_1 m_2}{m_2-m_1} + \frac{1}{m_2-m_1}\left(\frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2\right)\right]e^{m_2 t}\\ &\quad + \left[\frac{-c_1 m_1}{m_2-m_1} - \frac{1}{m_2-m_1}\left(\frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2\right)\right]e^{m_1 t}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$y(t) = k_1 e^{m_1 t} + k_2 e^{m_2 t},$$

onde $k_1 = \left[\frac{-c_1 m_1}{m_2-m_1} - \frac{1}{m_2-m_1}\left(\frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2\right)\right]$ e $k_2 = \left[\frac{c_1 m_2}{m_2-m_1} + \frac{1}{m_2-m_1}\left(\frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2\right)\right]$ são constantes reais e m_1 e m_2 são raízes da equação

$$a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0,$$

chamada de equação característica da equação diferencial linear homogênea

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0.$$

Caso 2: $\dfrac{a_1^2}{4a_2^2} = \dfrac{a_0}{a_2}$.
Para este caso, a equação polinomial $s^2 + \frac{a_1}{a_2} \cdot s + \frac{a_0}{a_2} = 0$ tem duas raízes reais e iguais $m_1 = m_2 = \alpha$. Logo,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{sc_1 + \frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2}{(s-m_1)(s-m_1)} = \frac{sc_1 + \frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2}{(s-m_1)^2} \\ &= \frac{sc_1 - m_1c_1 + m_1c_1 + \frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2}{(s-m_1)^2} \\ &= \frac{c_1(s-m_1)}{(s-m_1)^2} + \frac{+m_1c_1 + \frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2}{(s-m_1)^2} \\ &= c_1\frac{1}{(s-m_1)} + \left[c_2 + c_1\left(m_1 + \frac{a_1}{a_2}\right)\right]\frac{1}{(s-m_1)^2}. \end{aligned}$$

Aplicando a Transformada Inversa, obtemos

$$\begin{aligned} L^{-1}[Y(s)] &= c_1L^{-1}\left[\frac{1}{(s-m_1)}\right] + \left[c_2 + c_1\left(m_1 + \frac{a_1}{a_2}\right)\right]L^{-1}\left[\frac{1}{(s-m_1)^2}\right] \\ \Leftrightarrow y(t) &= c_1e^{m_1t} + \left[c_2 + c_1\left(m_1 + \frac{a_1}{a_2}\right)\right]te^{m_1t} \\ &= k_1e^{m_1t} + k_2te^{m_1t}, \end{aligned}$$

onde $k_1 = c_1$ e $k_2 = \left[c_2 + c_1\left(m_1 + \frac{a_1}{a_2}\right)\right]$ são constantes reais e m_1 é a raiz dupla da equação característica

$$a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0.$$

Caso 3: $\dfrac{a_1^2}{4a_2^2} < \dfrac{a_0}{a_2}$.
Nesse caso, $m_1 = \alpha - \theta i$ e $m_2 = \alpha + \theta i$ são raízes complexas conjugadas da equação polinomial

$$s^2 + \frac{a_1}{a_2} \cdot s + \frac{a_0}{a_2} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{sc_1 + \frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2}{[s-(\alpha-\theta i)][s-(\alpha+\theta i)]}\\
&= \frac{sc_1 + \frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2}{(s-\alpha))^2+\theta^2}\\
&= \frac{sc_1 + \alpha c_1 - \alpha c_1 + \frac{a_1}{a_2}c_1 + c_2}{(s-\alpha))^2+\theta^2}\\
&= c_1\frac{(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\theta^2} + \left[c_2 + c_1\left(\frac{a_1}{a_2}+\alpha\right)\right]\frac{1}{(s-\alpha)^2+\theta^2}\\
&= \left[c_2 + c_1\left(\frac{a_1}{a_2}+\alpha\right)\right]\frac{1}{(s-\alpha)^2+\theta^2} + c_1\frac{(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\theta^2}.
\end{aligned}$$

Aplicando a Transformada Inversa na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
L^{-1}[Y(s)] &= \left[c_2 + c_1\left(\frac{a_1}{a_2}+\alpha\right)\right]L^{-1}\left[\frac{1}{(s-\alpha)^2+\theta^2}\right] + c_1L^{-1}\left[\frac{(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\theta^2}\right]\\
\Leftrightarrow y(t) &= \left[c_2 + c_1\left(\frac{a_1}{a_2}+\alpha\right)\right]\frac{1}{\theta}L^{-1}\left[\frac{\theta}{(s-\alpha)^2+\theta^2}\right] + c_1L^{-1}\left[\frac{(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\theta^2}\right]\\
&= \left[c_2 + c_1\left(\frac{a_1}{a_2}+\alpha\right)\right]\frac{1}{\theta}e^{\alpha t}sen(\theta t) + c_1e^{\alpha t}cos(\theta t)\\
&= k_1e^{\alpha t}\ sen(\theta t) + k_2e^{\alpha t}cos(\theta t)\\
&= e^{\alpha t}[k_1sen(\theta t) + k_2cos(\theta t)],
\end{aligned}$$

onde $k_2 = c_1$ e $k_1 = \frac{1}{\theta}\left[c_2 + c_1\left(\frac{a_1}{a_2}+\alpha\right)\right]$ são constantes reais. Portanto, concluímos que a equação diferencial linear de segunda ordem homogênea

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y = 0,$$

tem solução geral:

- $y(t) = k_1e^{m_1t} + k_2e^{m_2t}$, se sua equação característica associada tem duas raízes reais e distintas.
- $y(t) = k_1e^{m_1t} + k_2te^{m_1t}$, se sua equação característica associada tem duas raízes reais e iguais.
- $y(t) = e^{\alpha t}[k_1sen(\theta t) + k_2cos(\theta t)]$, se sua equação característica associada tem duas raízes complexas conjugadas $m_1 = \alpha - \theta i$ e $m_2 = \alpha + \theta i$.

Vejamos um exemplo do que foi visto.

Exemplo 2.3 *Resolver as equações diferenciais abaixo:*

a) $y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0$;

b) $y''(t) + 8y'(t) + 16y(t) = 0$;

c) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$.

Solução: a) A equação característica, neste caso, é $m^2 - m - 6 = 0$. Resolvendo, obtemos $m_1 = 3$ e $m_2 = -2$. Portanto, a solução geral será

$$y(t) = k_1e^{3t} + k_2e^{-2t},$$

em que k_1 e k_2 são constantes reais.
b) Neste item, a equação característica fica $m^2 + 8m + 16 = 0$. Resolvendo, obtemos $m_1 = m_2 = -4$. Portanto, a solução geral será

$$y(t) = k_1e^{-4t} + k_2te^{-4t},$$

com k_1 e k_2 sendo constantes reais.
c) Neste item, a equação característica fica $m^2 - 4m + 5 = 0$. Resolvendo, obtemos $m_1 = 2 + i$ e $m_2 = 2 - i$. Portanto, a solução geral será

$$y(t) = e^{2t}[k_1sent + k_2cost],$$

com k_1 e k_2 sendo constantes reais.

2.1.4 Soluções de Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem não Homogêneas

Para a equação diferencial linear não homogênea de segunda ordem

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = g(t),$$

podemos obter a solução geral seguindo os passos:

- **Passo 1**: Encontramos a solução da equação homogênea, usando usando o que foi mostrado anteriormente.

- **Passo 2**: Encontramos a Transformada de Laplace da função $g(t)$ e dividimos pela equação característica.

- **Passo 3**: Encontramos a Transformada Inversa do resultado do passo anterior, obtendo assim uma solução particular y_p.

- **Passo 4**: A solução geral será $y(t) = y_c + y_p$, onde y_c é a solução da equação diferencial linear homogênea.

Exemplo 2.4 *Usando o roteiro acima, dê a solução geral para as equações diferenciais lineares não homogêneas abaixo.*
a) $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = t^2e^{3t}$
b) $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = t^2 + 1$

Solução: a) 1º) Passo: A equação característica é $m^2 - 6m + 9 = 0$, que tem como raízes $m_1 = m_2 = 3$. Portanto,

$$y_c(t) = k_1e^{3t} + k_2te^{3t}$$

com k_1 e k_2 constantes reais.
2º) Passo: Calculando a Transformada de Laplace de $g(t) = t^2e^{3t}$, obtemos

$$\begin{aligned} L[g(t)] &= L[t^2e^{3t}] \\ G(s) &= \frac{2!}{(s-3)^3}. \end{aligned}$$

Dividindo $G(s)$ pela equação característica

$$s^2 - 6s + 9 = (s-3)^2,$$

obtemos $G_p(s) = \dfrac{2}{(s-3)^5}$.
3º) Passo: Calculando a Transformada Inversa de $G_p(s)$, temos

$$\begin{aligned} L^{-1}[G_p(s)] &= L^{-1}\left[\frac{2}{(s-3)^5}\right] \\ g_p(t) &= 2 \cdot \frac{1}{4!} \cdot L^{-1}\left[\frac{4!}{(s-3)^5}\right] \\ &= \frac{1}{12}t^4e^{3t}. \end{aligned}$$

4º) Passo: Finalmente, temos a solução geral

$$\begin{aligned} y(t) &= y_c(t) + g_p(t) \\ &= k_1e^{3t} + k_2te^{3t} + \frac{1}{12}t^4e^{3t}, \end{aligned}$$

em que k_1 e k_2 são constantes reais.
b) 1º) Passo: A equação característica é $m^2 - 5m + 6 = 0$, que tem como raízes $m_1 = 2$ e $m_2 = 3$. Portanto,

$$y_c(t) = k_1e^{2t} + k_2te^{3t}$$

com k_1 e k_2 constantes reais.
2º) Passo: Calculando a Transformada de Laplace de $g(t) = t^2 + 1$, obtemos,

$$\begin{aligned} L[g(t)] &= L[t^2 + 1] \\ &= L[t^2] + L[1] \\ G(s) &= \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s} \\ &= \frac{2 + s^2}{s^3}. \end{aligned}$$

Dividindo $G(s)$ pela equação característica

$$s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s-3),$$

obtemos

$$\begin{aligned} G_p(s) &= \frac{2 + s^2}{s^3(s-2)(s-3)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-2} + \frac{E}{s-3} \\ &= \frac{As^2(s-2)(s-3) + Bs(s-2)(s-3) + C(s-2)(s-3) + Ds^3(s-3) + Es^3(s-2)}{s^3(s-2)(s-3)}. \end{aligned}$$

Daí, obtemos $A = \frac{37}{108}$, $B = \frac{5}{18}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{3}{4}$, e $E = \frac{11}{27}$.
Logo,

$$G_p(s) = \frac{37}{108} \cdot \frac{1}{s} + \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{11}{27} \cdot \frac{1}{s-2}.$$

3º) Passo: Calculando a Transformada Inversa de $G_p(s)$, temos

$$\begin{aligned} L^{-1}[G_p(s)] &= \frac{37}{108} L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{5}{18} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \frac{1}{3} L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] - \frac{3}{4} L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] + \frac{11}{27} L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] \\ g_p(t) &= \frac{37}{108} + \frac{5}{18} \cdot t + \frac{t^2}{6} - \frac{3}{4} \cdot e^{3t} + \frac{11}{27} \cdot e^{2t}. \end{aligned}$$

4º) Passo: Finalmente, temos a solução geral

$$\begin{aligned} y(t) &= y_c(t) + g_p(t) \\ &= k_1 e^{2t} + k_2 e^{3t} + \frac{37}{108} + \frac{5}{18} \cdot t + \frac{t^2}{6} - \frac{3}{4} \cdot e^{3t} + \frac{11}{27} \cdot e^{2t}, \end{aligned}$$

em que k_1 e k_2 são constantes reais.

Para obtermos uma solução com parâmetros $y(0)$ e $y'(0)$ definidos, podemos aplicar diretamente o método da Transformada de Laplace. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.5 *Obter uma solução para*

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = t^3e^{2t},$$

com as condições iniciais $y(0) = 0$ *e* $y'(0) = 0$.

Solução: Aplicando a Transformada de Laplace, obtemos

$$\begin{aligned} L[y''(t)] - 4L[y'(t)] + 4[y(t)] &= L[t^3e^{2t}] \\ \Leftrightarrow [S^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 4[sY(s) - y(0)] + 4Y(s) &= \frac{3!}{(s-2)^4}. \end{aligned}$$

Substituindo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} [s^2 - 4s + 4]Y(s) &= \frac{6}{(s-4)^4} \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{6}{(s-2)^4(s^2-4s+4)} \\ &= \frac{6}{(s-2)^6}. \end{aligned}$$

Aplicando a Transformada Inversa na última equação, concluímos que

$$\begin{aligned} L^{-1}[Y(s)] &= L^{-1}\left[\frac{6}{(s-2)^6}\right] \\ y(t) &= \frac{6}{5!}L^{-1}\left[\frac{5!}{(s-2)^6}\right] \\ &= \frac{1}{20} \cdot t^5e^{2t}, \end{aligned}$$

que é uma solução particular para a referida equação.

2.1.5 Soluções de Equações Diferenciais Lineares de Ordem Superior

O método da Transformada de Laplace também é útil para resolver equações diferenciais lineares de ordem n, com $n > 2$. Para enfatizarmos isso, vamos resolver a equação de terceira ordem

$$2y'''(t) + 3y''(t) - 3y'(t) - 2y(t) = e^{-t},$$

com as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 1$. Aplicando a Transformada de Laplace, temos

$$2L[y'''(t)] + 3L[y''(t)] - 3L[y'(t)] - 2L[y(t)] = L[e^{-t}]$$

$$\begin{aligned}2[s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)] + 3[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)]\\ - 3[sY(s) - y(0)] - 2Y(s)\\ = \frac{1}{s+1}.\end{aligned}$$

Substituindo $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}[2s^3 + 3s^2 - 3s - 2]Y(s) - 2 &= \frac{1}{s+1}\\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+1} + 2}{2s^3 + 3s^2 - 3s - 2}\\ &= \frac{2s+3}{(2s^3 + 3s^2 - 3s - 2)(s+1)}.\end{aligned}$$

Observe que 1 é solução de $2s^3 + 3s^2 - 3s - 2 = 0$. Portanto,

$$2s^3 + 3s^2 - 3s - 2 = (s-1)(2s^2 + 5s + 2) = (s-1)(s + \frac{1}{2})(s+2).$$

Daí,

$$Y(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s-1)(s+\frac{1}{2})(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+\frac{1}{2}} + \frac{D}{s+2}.$$

Da igualdade

$$\frac{2s+3}{(s+1)(s-1)(s+\frac{1}{2})(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+\frac{1}{2}} + \frac{D}{s+2},$$

obtemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{5}{18}$, $C = -\frac{9}{16}$ e $D = \frac{1}{9}$. Assim,

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{2s+3}{(s+1)(s-1)(s+\frac{1}{2})(s+2)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{2}} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s+2}.\end{aligned}$$

Aplicando a Transformada Inversa na última equação, obtemos

$$\begin{aligned}L^{-1}[Y(s)] &= \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{5}{18}L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{9}{16}L^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right] + \frac{1}{9}L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]\\ \Leftrightarrow y(t) &= \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{5}{18}e^{t} - \frac{16}{9}e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{9}e^{-2t}.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{5}{18}e^{t} - \frac{16}{9}e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{9}e^{-2t}$$

é uma solução particular para a referida equação diferencial. Para a solução geral, basta seguir o roteiro mostrado para soluções de equações lineares não homogêneas de primeira e segunda ordem.

Percebe-se que a Transformada de Laplace é uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas de valor inicial, cuja modelagem é uma equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes.

2.2 Aplicação na Resolução de Problemas em Engenharia

O desenvolvimento dessa seção teve como base as referências [5, 9].

O método da Transformada de Laplace é utilizado na resolução de problemas em diversas áreas da Engenharia como, por exemplo, em resistência de materiais, deflexão de vigas, circuitos elétricos e mecânica dos fluídos.

Daremos ênfase aqui ao uso do método na resolução de problemas envolvendo deflexão de vigas, conteúdo que faz parte das ementas do curso de Engenharia Civil. Nosso objetivo é tornar o trabalho uma fonte de pesquisa que auxilie no estudo do tema.

Para isso, vamos considerar uma viga uniforme de comprimento L e $y(x)$ o deslocamento transversal medido para baixo para suportar uma carga $W(x)$, quando a mesma é distribuída em pontos específicos, intervalos ou uniformimente em toda viga.

O modelo matemático que descreve a situação para qualquer um dos casos citados acima é a equação diferencial linear de quarta ordem

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = W(x),$$

onde x é o intervalo da viga em que a carga está concentrada, E é o módulo da Elasticidade de Young e I é o momento de inércia de uma secção transversal da mesma. Desde que a viga tenha propriedades elásticas uniformes e uma secção transversal uniforme em todo seu comprimento, E e I são considerados constantes. Em ambos os casos, o método da Transformada de Laplace é importante no cálculo da deflexão.

No caso em que a carga é distribuída uniformimente ao longo de todo o comprimento da viga, $W(x)$ é constante. Se a carga $W(x)$ é distribuída em intervalos definidos da viga, a função de distribuição de carga é determinada pela função Degrau Unitário ou função de Heaviside e se a carga é distribuída em pontos específicos da viga, a função de distribuição de carga é determinada pela função Delta de Dirac ou Impulso Unitário.

Existem várias situações a serem analisadas para o cálculo da deflexão $y(x)$. Analisaremos, aqui, alguns casos.

1º Caso: Considere uma viga de comprimento L engastada, ou seja, fixa em ambos os extremos como mostra a Figura 2.1. Vamos determinar a deflexão da viga.

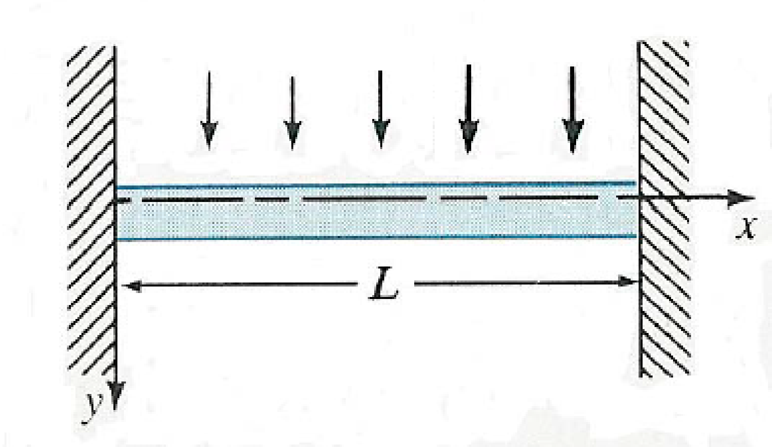

Figura 2.1: Viga Engastada nos Extremos

Quando $W(x) = k$ for constante e estiver distribuída uniformimente ao longo de todo o comprimento, consideramos as condições
$y(0) = 0$, $y(L) = 0$, $y'(0) = 0$ e $y'(L) = 0$.
O significado de cada uma das condições iniciais dadas são:

- $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$ (A deflexão da viga nas extremidades é nula);
- $y'(0) = 0$ e $y'(L) = 0$ (A inclinação da viga nas extremidades é nula).

Para o cálculo da deflexão, aplicamos a Transformada de Laplace na equação

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = W(x).$$

Assim

$$L\left[EI\frac{d^4y}{dx^4}\right] = L[W(x)],$$

donde obtemos

$$EI[s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) = kL[1]$$
$$\Leftrightarrow EI[s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)] = k\frac{1}{s}.$$

Substituindo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
EI[s^4Y(s) - sy''(0) - y'''(0)] &= k\frac{1}{s} \\
s^4Y(s) - sy''(0) - y'''(0) &= \frac{k}{EI}\frac{1}{s} \\
Y(s) &= \frac{k}{EI}\frac{1}{s^5} + \frac{y''(0)}{s^3} + \frac{y'''(0)}{s^4}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $y''(0) = k_1$ e $y'''(0) = k_2$ na última equação, obtemos

$$Y(s) = \frac{k}{EI} \cdot \frac{1}{s^5} + \frac{k_1}{s^3} + \frac{k_2}{s^4}.$$

Aplicando a Transformada Inversa, temos

$$
\begin{aligned}
L^{-1}[Y(s)] &= \frac{k}{EI} \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right] + k_1 \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] + k_2 \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] \\
\Rightarrow y(x) &= \frac{k}{EI} \cdot \frac{1}{4!}L^{-1}\left[\frac{4!}{s^5}\right] + \frac{k_1}{2} \cdot L^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] + \frac{k_2}{3!} \cdot L^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] \\
&= \frac{k}{24EI} \cdot x^4 + \frac{k_1}{2} \cdot x^2 + \frac{k_2}{6} \cdot x^3.
\end{aligned}
$$

Como $y(L) = 0$ e $y'(L) = 0$, podemos obter k_1 e k_2, usando a equação

$$y(x) = \frac{k}{24EI} \cdot x^4 + \frac{k_1}{2} \cdot x^2 + \frac{k_2}{6} \cdot x^3. \tag{2.4}$$

Assim, para $y(L) = 0$, obtemos

$$\frac{k}{24EI} \cdot L^4 + \frac{k_1}{2} \cdot L^2 + \frac{k_2}{6} \cdot L^3 = 0. \tag{2.5}$$

Derivando (2.4), temos

$$y'(x) = \frac{k}{6EI} \cdot x^3 + k_1 \cdot x + \frac{k_2}{2} \cdot x^2. \tag{2.6}$$

Portanto, para $y'(L) = 0$, obtemos

$$\frac{k}{6EI} \cdot L^3 + k_1 \cdot L + \frac{k_2}{2} \cdot L^2 = 0. \tag{2.7}$$

Considere, agora, o sistema formado por (2.5) e (2.7), a saber,

$$
\begin{cases}
L^2\left(\dfrac{k_1}{2} + \dfrac{k_2}{6} \cdot L + \dfrac{K}{24EI} \cdot L^2\right) = 0 \\[2ex]
L\left(k_1 + \dfrac{k_2}{2} \cdot L + \dfrac{K}{6EI} \cdot L^2\right) = 0
\end{cases}
$$

Resolvendo o sistema, obtemos $k_1 = \dfrac{k}{12EI} \cdot L^2$ e $k_2 = -\dfrac{k}{2EI} \cdot L$. Portanto,

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{k}{24EI} \cdot x^4 + \frac{kL^2}{24EI} \cdot x^2 - \frac{kL}{12EI} \cdot x^3 \\ &= \frac{k}{12EI} \left(\frac{x^4}{2} + \frac{L^2}{2} \cdot x^2 - Lx^3 \right). \end{aligned}$$

2º Caso: Considere, agora, uma viga uniforme de comprimento L, fixada nas extremidades como mostra a Figura 2.2, suportando uma carga por unidade de comprimento dada por

$$W(x) = \begin{cases} k, & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ \\ 0, & \text{se} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L, \end{cases}$$

onde k é uma constante. Vamos determinar a função que descreve a deflexão $y(x)$

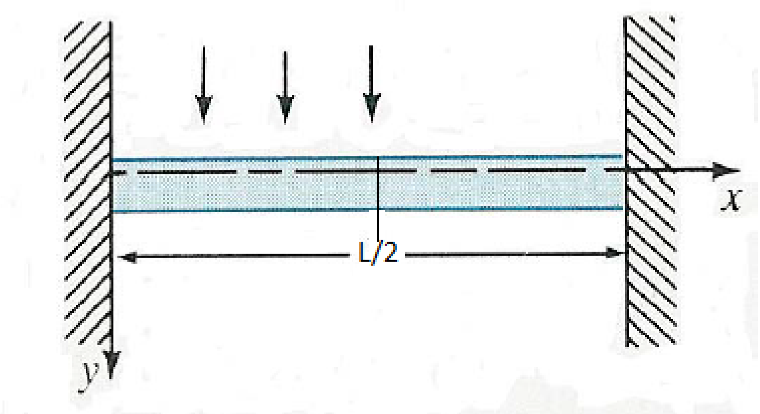

Figura 2.2: Viga Engastada nos Extremos

com as mesmas condições do caso anterior.

A carga está distribuída na primeira metade da viga, ou seja, em um intervalo da mesma. Para aplicar o método da Transformada de Laplace, precisamos escrever a carga $W(x)$ na forma de função compacta de Heaviside, isto é,

$$W(x) = k - k \cdot H\left(x - \frac{L}{2}\right).$$

Assim,

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = k - k \cdot H\left(x - \frac{L}{2}\right).$$

Aplicando a Transformada de Laplace, obtemos

$$EI[s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)] = k\frac{1}{s} - ke^{-\frac{Ls}{2}}\frac{1}{s}.$$

Substituindo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} EI[s^4Y(s) - sy''(0) - y'''(0)] &= k\ \frac{1}{s} - ke^{-\frac{Ls}{2}}\frac{1}{s} \\ s^4Y(s) &= \frac{k}{EI}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{\frac{-Ls}{2}}}{s}\right] + sy''(0) + y'''(0) \\ Y(s) &= \frac{k}{EI}\left[\frac{1}{s^5} - \frac{e^{-\frac{Ls}{2}}}{s^5}\right] + \frac{y''(0)}{s^3} + \frac{y'''(0)}{s^4}. \end{aligned}$$

Fazendo $y''(0) = k_1$ e $y'''(0) = k_2$ na última equação, segue que

$$Y(s) = \frac{k}{EI}\left[\frac{1}{s^5} - \frac{e^{-\frac{Ls}{2}}}{s^5}\right] + \frac{k_1}{s^3} + \frac{k_2}{s^4}.$$

Aplicando a Transformada Inversa, concluímos

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{k}{EI}\left[L^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right] - L^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{Ls}{2}}}{s^5}\right]\right] + L^{-1}\left[\frac{k_1}{s^3}\right] + L^{-1}\left[\frac{k_2}{s^4}\right]. \\ &= \frac{k}{EI}\left[\frac{x^4}{24} - \frac{1}{24}\left(x - \frac{L}{2}\right)^4 H\left(x - \frac{L}{2}\right)\right] + \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_2}{6}x^3, \end{aligned}$$

ou seja,

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{kx^4}{24EI} + \dfrac{k_1}{2}x^2 + \dfrac{k_2}{6}x^3, & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ \dfrac{kx^4}{24EI} - \dfrac{k}{24EI}\cdot(x - \dfrac{L}{2})^4 + \dfrac{k_1}{2}x^2 + \dfrac{k_2}{6}x^3, & \text{se} \quad \dfrac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases} \tag{2.8}$$

Substituindo $y(L) = 0$ e $y'(L) = 0$ em (2.8), equação (2), obtemos $k_1 = \dfrac{11kL^2}{192EI}$ e $k_2 = -\dfrac{13kL}{32EI}$. Portanto,

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{kx^4}{24EI} + \dfrac{11kL^2}{384EI}x^2 - \frac{13kL}{192EI}x^3, & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ \dfrac{kx^4}{24EI} - \dfrac{k}{24EI}\cdot(x - \dfrac{L}{2})^4 + \dfrac{11kL^2}{384EI}x^2 - \dfrac{13kL}{192EI}x^3, & \text{se} \quad \dfrac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

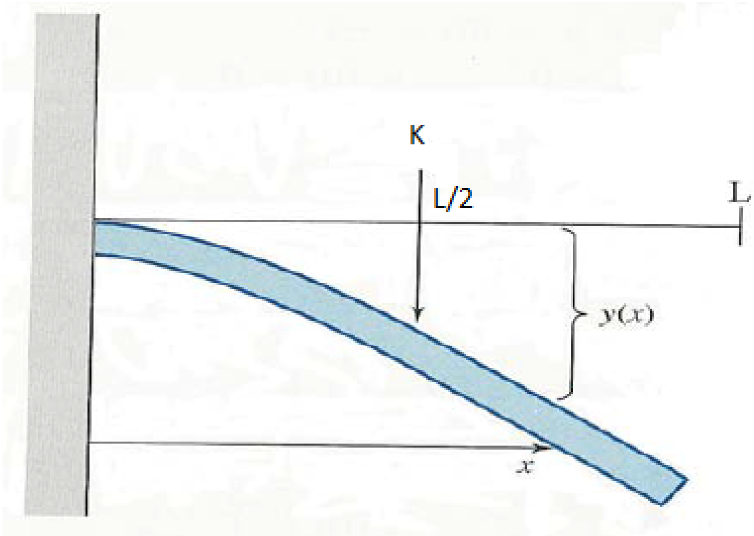

Figura 2.3: Viga Engastada á Esquerda e Livre á Direita

3º Caso: Consideremos, agora, uma viga uniforme de comprimento L, fixada na extremidade esquerda e livre na extremidade direita como mostra a Figura 2.3.

Vamos obter a deflexão $y(x)$ para uma carga k, concentrada em $x = \frac{L}{2}$ com a seguintes condições iniciais:

- $y(0) = 0$ (Deflexão na extremidade presa é nula);
- $y'(0) = 0$ (Inclinação na extremidade presa é nula);
- $y''(L) = 0$ (O momento fletor na extremidade livre é nula);
- $y'''(L) = 0$ (O cisalhamento na extremidade livre é nula).

Como sabemos, a equação diferencial que descreve a situação é

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = W(x),$$

onde a carga $W(x)$ é dada pela função Delta de Dirac ou Impulso Unitário, pois temos uma carga concentrada em apenas um ponto da viga. Assim,

$$W(x) = k \cdot \delta\left(x - \frac{L}{2}\right).$$

Aplicando a Transformada de Laplace, temos

$$EI \cdot L\left[\frac{d^4y}{dx^4}\right] = kL\left[\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)\right],$$

donde

$$EI[s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)] = ke^{-\frac{sL}{2}}.$$

Substituindo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ na última equação, obtemos

$$[s^4Y(s) - sy''(0) - y'''(0)] = \frac{k}{EI}e^{-\frac{sL}{2}},$$

e daí

$$\begin{aligned} s^4Y(s) &= \frac{k}{EI}e^{-\frac{sL}{2}} + sy''(0) + y'''(0) \\ Y(s) &= \frac{k}{EI}e^{-\frac{sL}{2}} \cdot \frac{1}{s^4} + \frac{y''(0)}{s^3} + \frac{y'''(0)}{s^4}. \end{aligned}$$

Fazendo $y''(0) = k_1$ e $y'''(0) = k_2$, segue que

$$Y(s) = \frac{k}{EI}e^{-\frac{sL}{2}} \cdot \frac{1}{s^4} + \frac{k_1}{s^3} + \frac{k_2}{s^4}.$$

Aplicando a Transformada Inversa, obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{k}{EI} \cdot L^{-1}\left[e^{-\frac{sL}{2}} \cdot \frac{1}{s^4}\right] + L^{-1}\left[\frac{k_1}{s^3}\right] + L^{-1}\left[\frac{k_2}{s^4}\right] \\ &= \frac{k}{6EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_2}{6}x^3. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{k_1}{2}x^2 + \dfrac{k_2}{6}x^3, & \text{se} \quad 0 \leq x < \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{k}{6EI}\left(x - \dfrac{L}{2}\right)^3 + \dfrac{k_1}{2}x^2 + \dfrac{k_2}{6}x^3, & \text{se} \quad x \geq \dfrac{L}{2}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Usando as condições $y''(L) = 0$ e $y'''(L) = 0$ em (2.9), equação (2), obtemos $k_1 = \dfrac{kL}{2EI}$ e $k_2 = -\dfrac{k}{EI}$. Portanto,

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{kL}{4EI}x^2 - \dfrac{k}{6EI}x^3, & \text{se} \quad 0 \leq x < \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{k}{6EI}\left(x - \dfrac{L}{2}\right)^3 + \dfrac{kL}{4EI}x^2 - \dfrac{k}{6EI}x^3, & \text{se} \quad x \geq \dfrac{L}{2}, \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{EI}\left(\dfrac{Lx^2}{4} - \dfrac{x^3}{6}\right), & \text{se} \quad 0 \leq x < \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{kL^2}{48EI}(6x - L), & \text{se} \quad x \geq \dfrac{L}{2}. \end{cases}$$

2.3 Aplicação na Resolução de Problemas em Automação Industrial

O desenvolvimento dessa seção teve como referência [6].

Na área de Automação, a Transformada de Laplace é utilizada frequentemente em sistemas de controle para obtenção de sua Função de Transferência.

Como vimos na Introdução do trabalho, um sistema de controle é representado por subsistemas ou plantas, que são constituídos com o objetivo de conseguir uma saída desejada com desempenho desejado, para uma entrada específica desejada. Os sistemas de controle são importantes, pois com sua utilização podemos controlar os movimentos de grandes equipamentos com uma precisão satisfatória, que de outra maneira seria impossível. Para exemplificarmos isso, podemos citar o movimento de um elevador, onde podemos controlá-lo de forma a fazê-lo parar no andar desejado, os controles remotos, o controle de satélites de grandes antenas usados para capturar sinais de baixa intensidade, dentre outros.

Os sistemas de controles são constituídos essencialmente por serem capazes de auxiliar nos seguintes casos:

1. Amplificação da Potência - Como exemplo dessa situação, podemos citar uma antena de radar, que pode ser posicionada pela rotação com baixa potência na alavanca de entrada, mas intensificar a potência para sua rotação de saída. Neste caso, o sistema de controle produz amplificação ou ganho necessário de potência.

2. Controle Remoto - Aqui, um exemplo simples seria os robôs projetados para compensar a falta de habilidade humana.

3. Conveniência na Forma de Entrada - Para este caso, temos, como exemplo, o sistema de controle de temperatura em que uma indicação conveniente na entrada (termostato) permite uma saída térmica desejada.

4. Compensação por Pertubação - O sistema de controle deve ser capaz de fornecer uma saída correta mesmo que o sistema sofra pertubações, sejam de origem mecânica, térmica ou elétrica.

2.3.1 Modelagem de Sistemas de Controle

Os sistemas de controle podem ser representados por diagrama de blocos e podem ser classificados em sistemas simples ou compostos. As Figuras 2.4 e 2.5 representam, respectivamente, estes dois tipos de sistemas.

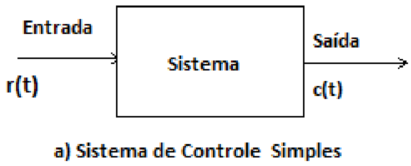

Figura 2.4: Sistema de Controle Simples

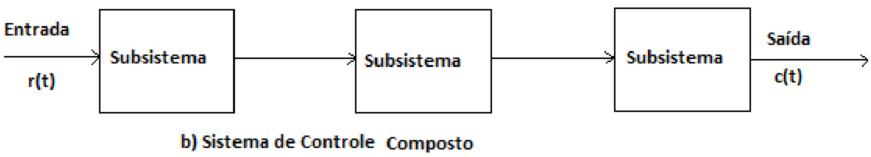

Figura 2.5: Sistema de Controle Composto

É difícil modelar um sistema de controle representado por uma equação diferencial por meio de um diagrama de blocos. Assim, para diminuir essa dificuldade, usa-se a Transformada de Laplace para representar a entrada, a saída e o sistema como entidades separadas. Isso facilita pois as inter-relações de subsistemas serão simplesmente algébricas.

Podemos agora deduzir a função que relaciona a saída de um sistema com sua entrada. Essa função viabilizará a separação da entrada do sistema e da saída em três partes separadas e distintas, diferente do que ocorre com a equação diferencial, como também permitirá combinar algebricamente as representações dos modelos matemáticos dos subsistemas de forma que se obtenha uma representação global do mesmo. A função obtida é chamada Função de Transferência.

Para isso, consideremos a equação diferencial linear de ordem n, que representa o sistema de controle invariante no tempo, a saber,

$$a_n\frac{d^n c(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}}+...+a_o c(t) = b_m\frac{d^m r(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}}+...+b_o r(t) \quad (2.10)$$

em que $c(t)$ é a saída, $r(t)$ é a entrada e os coeficientes a_i e b_i são parâmetros do sistema. Aplicando a Transformada de Laplace na equação (2.10) e considerando as condições iniciais em $c(t)$ e $r(t)$ nulas, obtemos

$$\begin{aligned} a_n s^n C(s) + a_{n-1}s^{n-1}C(s) + ... + a_0 C(s) &= b_m s^m R(s) + b_{m-1}s^{m-1}R(s) + ... + b_0 R(s) \\ C(s)[a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0] &= R(s)[b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_0] \\ \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0}, \end{aligned}$$

em que $C(s)$ é a Transformada de Saída e $R(s)$ é a Transformada de Entrada.
A relação

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

é chamada de Função de Transferência do sistema e é obtida com as condições iniciais em $c(t)$ e $r(t)$ iguais a zero.

Em um diagrama de blocos, a Função de Transferência é representada como mostra a Figura 2.6.

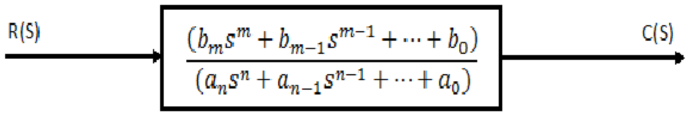

Figura 2.6: Representação da Função de Transferência em um Digrama de Blocos

A saída $C(s)$, ou resposta do sistema, pode ser obtida por

$$C(s) = R(s)G(s).$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.6 *Vamos encontrar a Função de Transferência e a resposta $c(t)$ para a equação diferencial*

$$\frac{d^2c}{dt^2} - \frac{2dc}{dt} - 3c = \frac{2dr}{dt} + 3r$$

considerando a entrada $r(t) = H(t-0) = H(t)$.

Solução: Como a Função de Transferência é dada por

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)},$$

e de acordo com a equação diferencial $C(s) = 2s + 3$ e $R(s) = 2s^2 - 2s - 3$, então

$$G(s) = \frac{2s+3}{s^2 - 2s - 3}.$$

Por outro lado, a resposta

$$C(s) = G(s)R(s).$$

Como $r(t) = H(t)$, então $R(s) = \frac{1}{s}$. Portanto,

$$\begin{aligned} C(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{2s+3}{s^2-2s-3} &= \frac{1}{s} \cdot \frac{2s+3}{(s-3)(s+1)} \\ &= \frac{2s+3}{s(s-3)(s+1)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+1}. \end{aligned}$$

Da igualdade

$$\frac{2s+3}{s(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+1},$$

obtemos $A = 1$, $B = \frac{3}{4}$ e $C = \frac{1}{4}$. Então,

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1}.$$

Aplicando a Transformada Inversa, concluímos que

$$\begin{aligned} L^{-1}[C(s)] &= L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{3}{4} \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] + \frac{1}{4} \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\ \Leftrightarrow c(t) &= 1 + \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t}. \end{aligned}$$

Como mostrado anteriormente, obtemos um modelo matemático chamado Função de Transferência para sistemas de controle descritos por equações diferenciais lineares. Assim, podemos encontrar a Função de Transferência para sistemas físicos, tais como elétricos, mecânicos e eletromagnéticos e outros sistemas do mundo físico como hidráulicos, térmicos, biológicos e até mesmo econômicos, desde que eles possam ser modelados por equações diferenciais lineares ou não lineares, que admitam ser linearizadas. Conhecida a Função de Transferência, pode-se obter uma resposta para um entrada específica, como ilustrado no Exemplo 2.3. A construção da Função de Transferência dos sistemas citados acima não serão apresentadas, pois o objetivo aqui, é mostrar a aplicabilidade da Transformada de Laplace como ferramenta utilizada para obtê-las.

Apresentaremos, a seguir, a construção da Função de Transferência para uma situação problema.

2.3.2 Construção da Função de Transferência para um Circuito RLC

Vamos obter a Função de Transferência que relaciona a tensão no capacitor $V_c(s)$ com a tensão de entrada no circuito $V(s)$ para o circuito RLC representado na Figura 2.7 abaixo,

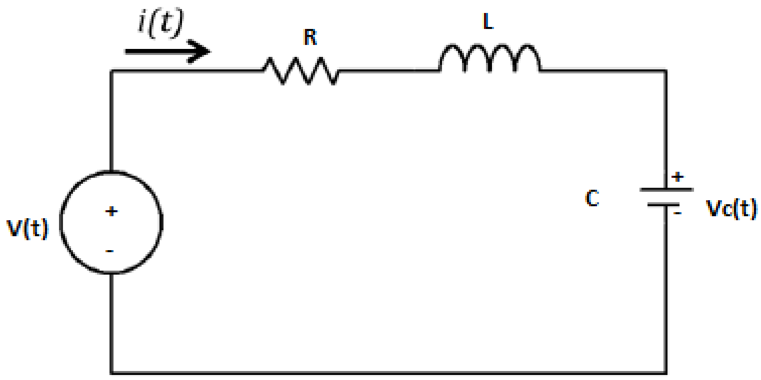

Figura 2.7: Circuito RLC

Para o obtenção da Função de Transferência em qualquer problema, devemos especificar quais serão as variáveis de entrada e as de saída. No caso analisado, já vem especificado que a variável de entrada é a tensão de alimentação do circuito e a variável de saída é tensão no capacitor.

Sabemos que a diferença de potencial em cada elemento do circuito é dada como segue:

$$V(t)_{indutor} = \frac{Ldi(t)}{dt},\ V(t)_{resistor} = Ri(t) \text{ e } V(t)_{capacitor} = \frac{q(t)}{C},$$

onde i é a intensidade da corrente elétrica e q é a carga elétrica do circuito.

Pela Segunda Lei de Kircchoff, a diferença de potencial V em um circuito fechado é a soma das voltagens em cada elemento do circuito. Portanto,

$$V(t) = V(t)_{indutor} + V(t)_{resistor} + V(t)_{capacitor}$$

$$\Leftrightarrow V(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C}. \tag{2.11}$$

Como, por definição, $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$, então $\dfrac{di(t)}{dt} = \dfrac{d^2q(t)}{dt^2}$. Substituindo na equação (2.11), obtemos

$$V(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}. \tag{2.12}$$

Como queremos a Função de Transferência que relaciona a entrada $V(s)$ com a saída $V_C(s)$ e $q(t) = C \cdot V_C(t)$, substituindo na equação (2.12), obtemos

$$V(t) = LC\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + RC\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t). \tag{2.13}$$

Aplicando a Transformada de Laplace em (2.13), obtemos

$$L[V(t)] = LC \cdot L\left[\frac{d^2V_C(t)}{dt^2}\right] + RC \cdot L\left[\frac{dV_C(t)}{dt}\right] + L[V_C(t)].$$

Considerando as condições iniciais nulas

$$\begin{aligned} V(s) &= LC \cdot s^2V_C(s) + RC \cdot sV_C(s) + [V_C(s)] \\ \Leftrightarrow V(s) &= (s^2LC + sRC + 1)V_C(s) \\ \Leftrightarrow \frac{V_C(s)}{V(s)} &= \frac{1}{s^2LC + sRC + 1} \\ \Leftrightarrow \frac{V_C(s)}{V(s)} &= \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

é a Função de Transferência que relaciona e entrada $V(s)$ do circuito com a saída $V_C(s)$ no capacitor.
A representação da situação em um diagrama de blocos é ilustrada pela Figura 2.8.

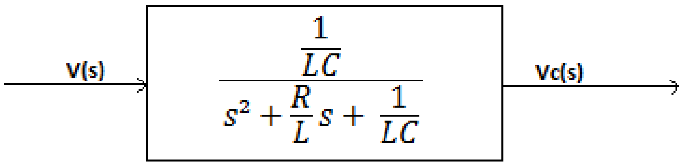

Figura 2.8: Diagrama de Blocos de um Circuito RLC em Série

2.3.3 Resposta de um Sistema a Partir de sua Função de Transferência

Vimos que a Transformada de Laplace é um método eficaz para obter a Função de Transferência de um sistema de controle modelado por uma equação diferencial ordinária. Agora, mostraremos que a Transformada Inversa é importante para obter a resposta do sistema quando conhecemos sua Função de Transferência e uma entrada específica.

Mostraremos, aqui, as respostas para os sistemas de controle de primeira e segunda ordem em que a entrada específica é a Função Degrau Unitário.

Sistemas de Primeira Ordem

Para os sistemas de primeira ordem, a Função de Transferência pode ser dada por $G(s) = \dfrac{a}{s+a}$ com entrada $r(t) = H(t)$. Neste caso, $R(s) = \dfrac{1}{s}$ e a resposta é

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s+a)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}. \tag{2.14}$$

Aplicando a Transformada Inversa em (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} L^{-1}[C(s)] &= L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right]. \\ \Leftrightarrow c(t) &= 1 - e^{-at}. \end{aligned}$$

Observe que $c(t) = c_f(t) + c_n(t)$ onde $c_f(t) = 1$ é a **resposta forçada**, produzida pela entrada $r(t) = u(t)$ e $c_n(t) = -e^{-at}$ é **resposta natural**.
Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.7 *Um sistema possui Função de Transferência* $G(s) = \frac{30}{s+30}$. *Obtenha a Função Resposta para o sistema com entrada* $r(t) = H(t)$.

Solução: Temos a resposta forçada $c_f(t) = 1$ e a resposta natural $c_n(t) = -e^{-30t}$. Portanto, a Função Resposta é dada por

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-30t}.$$

Sistemas de Segunda Ordem

Para sistemas de segunda ordem, a Função de Transferência pode ser dada por

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b},$$

com entrada $r(t) = H(t)$. Neste caso, $R(s) = \dfrac{1}{s}$ e a resposta é

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{b}{s(s^2 + as + b)}. \tag{2.15}$$

Aplicando a Transformada Inversa em (2.15), podemos obter os seguintes tipos de respostas para o sistema:

- **Respostas Superamortecidas** - É quando a equação $s^2 + as + b = 0$ tem duas raízes reais m_1 e m_2 distintas. A resposta para este caso será

$$c(t) = k_1 + k_2 e^{m_1 t} + k_3 e^{m_2 t},$$

onde $c_f(t) = k_1$ é a resposta forçada devido á entrada em Degrau Unitário e

$$c_n(t) = k_2 e^{m_1 t} + k_3 e^{m_2 t}$$

é a resposta natural.

- **Respostas Criticamente Superamortecidas** - É quando a equação $s^2 + as + b = 0$ tem duas raízes reais iguais $m_1 = m_2 = m$. A resposta para este caso será

$$c(t) = k_1 + k_2 e^{mt} + k_3 t e^{mt},$$

onde $c_f(t) = k_1$ é a resposta forçada devido á entrada em Degrau Unitário e

$$c_n(t) = k_2 e^{mt} + k_3 t e^{mt}$$

é a resposta natural.

- **Respostas Subamortecidas** - É quando a equação $s^2 + as + b = 0$ tem duas raízes complexas conjugadas da forma $m_1 = \alpha + \beta i$ e $m_2 = \alpha - \beta i$. A resposta para este caso será

$$c(t) = k_1 + e^{\alpha t}[k_2 \cos(\beta t) + k_3 sen(\beta t)],$$

onde $c_f(t) = k_1$ é a resposta forçada devido á entrada em Degrau Unitário e

$$c_n(t) = e^{\alpha t}[k_2 \cos(\beta t) + k_3 sen(\beta t)]$$

é a resposta natural.

- **Respostas não Amortecidas** - É quando a equação $s^2 + as + b = 0$ tem duas raízes complexas conjugadas da forma $m_1 = \beta i$ e $m_2 = -\beta i$. A resposta para este caso será

$$c(t) = k_1 + k_2 \cos(\beta t) + k_3 sen(\beta t),$$

onde $c_f(t) = k_1$ é a resposta forçada devido á entrada em Degrau Unitário e

$$c_n(t) = k_2 \cos(\beta t) + k_3 sen(\beta t)$$

é a resposta natural.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.8 *Um sistema de controle possui Função de Transferência dada por*

$$G(s) = \frac{900}{s^2 + 90s + 900}.$$

Obtenha a forma geral da resposta para o sistema com entrada $r(t) = H(t)$ e classifique o tipo de resposta.

Solução: Como a equação $s^2 + 90s + 900 = 0$ tem duas soluções reais e distintas $m_1 = -45 - 15\sqrt{5}$ e $m_2 = -45 + 15\sqrt{5}$, o sistema possui **resposta superamortecida**. A resposta forçada é $c_f(t) = k_1$ e a resposta natural $c_n(t) = k_2 e^{(-45-15\sqrt{5})t} + k_3 e^{(-45+15\sqrt{5})t}$. Portanto, a resposta geral será

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) = k_1 + k_2 e^{(-45-15\sqrt{5})t} + k_3 e^{(-45+15\sqrt{5})t}.$$

2.4 Obtenção das Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias que Modelam Alguns Fenômenos em Física e Matemática

Usando a Transformada de Laplace, serão apresentadas aqui, as soluções de equações diferenciais ordinárias que modelam alguns fenômenos físicos. As soluções obtidas, são funções que descrevem variações sofridas por estes fenômenos em função do tempo.

2.4.1 Solução da Equação Diferencial Ordinária que Modela o Movimento de um Corpo em Queda Livre

Considere que um corpo seja lançado do alto de um edifício com velocidade v_0 como mostrado na Figura 1 da Introdução. A equação que descreve o fenômeno é uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea dada por:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g$$

onde g é a aceleração da gravidade. Suponha que a altura do edifício seja $h = s_0$. Assim, a descrição do movimento é o problema de valor inicial

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g$$

com as restrições $s(0) = s_0$ e $s'(0) = v_0$.

Considerando que o movimento ocorra entre os intervalos t_0 (momento do lançamento) e t (instante em que o corpo atinge o solo) e aplicando a Transformada de Laplace, obtemos

$$L\left[\frac{d^2s}{dt^2}\right] = -gL[1]$$
$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] = -g \cdot \frac{1}{s}.$$

Substituindo as restrições, temos

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - s \cdot s_0 - v_0 &= -\frac{g}{s} \\ \Leftrightarrow s^2Y(s) &= -\frac{g}{s} + s \cdot s_0 + v_0 \\ \Leftrightarrow Y(s) &= -\frac{g}{s^3} + \frac{s_0}{s} + \frac{v_0}{s^2}. \end{aligned}$$

Aplicando a Transformada Inversa, obtemos

$$\begin{aligned} L^{-1}[Y(s)] &= -gL^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] + L^{-1}\left[\frac{s_0}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{v_0}{s^2}\right] \\ \Leftrightarrow y(t) &= -g \cdot \frac{t^2}{2} + s_0 + v_0t \\ \Leftrightarrow y(t) &= s_0 + v_0t - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned}$$

que é a equação que descreve a posição do corpo em função do tempo, durante a queda.
Observe que integrando duas vezes a equação diferencial dada, encontramos a solução obtida, utilizando a Transformada de Laplace.

2.4.2 Solução da Equação Diferencial Ordinária que Modela o Movimento de um Sistema Massa Mola

Para o cálculo do deslocamento vertical $x(t)$ de uma quantidade de massa presa a uma mola, usamos as duas seguintes leis:

1ª) A Segunda Lei de Newton, que é descrita pela expressão $\vec{F_R} = m\vec{a}$ onde $\vec{F_R}$ é a força resultante que atua sobre o corpo, m é massa e $\vec{a}$ é a aceleração.

2ª) A Lei de Hooke, afirma que a força restauradora em uma mola esticada é proporcional a $b + x$, isto é $\vec{F} = k(b + x)$ em que $k > 0$ é constante e b é o deslocamento quando um corpo de massa m é preso em sua extremidade e o sistema atinge a posição de equilíbrio.

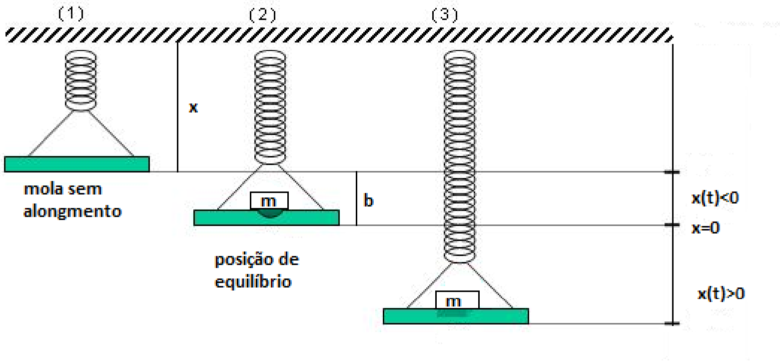

Figura 2.9: Representação do Sistema Massa Mola

A figura 2.9, ilustra a situação.

Considere que não haja forças externas atuando sobre o sistema. Então na posição de equilíbrio

$$\vec{P} = \vec{F}$$
$$m\vec{g} = kb$$
$$m\vec{g} - kb = 0.$$

Quando a massa é deslocada de uma distância $x(t)$ em relação a uma posição de equilíbrio e solta nesta posição, a força resultante que atua sobre ela é de dinâmica e portanto dada pela Segunda Lei de Newton. Assim,

$$\vec{F_R} = m\vec{a} = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Considerando que não haja forças de retardamento agindo sobre o sistema e supondo que a massa vibre sem influência de outras forças externas, podemos escrever

$$\vec{F_R} = -\vec{F} + \vec{P}$$

onde $\vec{F}$ é a força restauradora e $\vec{P}$ é peso do corpo de massa m. Daí,

$$\begin{aligned}\vec{F_R} &= -k(x+b) + m\vec{g}\\ &= -kx - kb + m\vec{g}\end{aligned}$$

donde

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

que é a equação diferencial que descreve o movimento do sistema. Há duas condições óbvias associada a equação:

- $x(0) = \alpha$ (deslocamento inicial).
- $x'(0) = \theta$ (velocidade inicial).

Aplicando a Transformada de Laplace na equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

obtemos

$$mL\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + kL[x] = 0$$
$$m[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + kX(s) = 0.$$

Substituindo as condições, temos

$$(ms^2 + k)X(s) = m(s\alpha + \theta)$$
$$X(s) = \frac{m(s\alpha + \theta)}{ms^2 + k}$$
$$X(s) = \frac{s\alpha + \theta}{s^2 + \frac{k}{m}}.$$

Fazendo $\frac{k}{m} = \omega^2$, temos

$$X(s) = \frac{s\alpha + \theta}{s^2 + \omega^2} = \frac{s\alpha}{s^2 + \omega^2} + \frac{\theta}{s^2 + \omega^2}.$$

Aplicando a Transformada Inversa, segue que

$$L^{-1}[X(s)] = \alpha \cdot L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right] + \frac{\theta}{\omega} \cdot L^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right]$$
$$x(t) = \alpha \cdot \cos(\omega t) + \frac{\theta}{\omega} \cdot \operatorname{sen}(\omega t),$$

onde $x(t)$ descreve a distância da massa em relação a posição de equilíbrio.

2.4.3 Solução da Equação Diferencial Ordinária de um Circuito RLC

Considere um circuito RLC como representado na figura 2.10.
Temos que a queda de voltagem em cada um dos elementos dados no circuito é dada como se segue.

$$V(t)_{indutor} = \frac{Ldi(t)}{dt},\ V(t)_{resistor} = Ri(t) \text{ e } V(t)_{capacitor} = \frac{q(t)}{C},$$

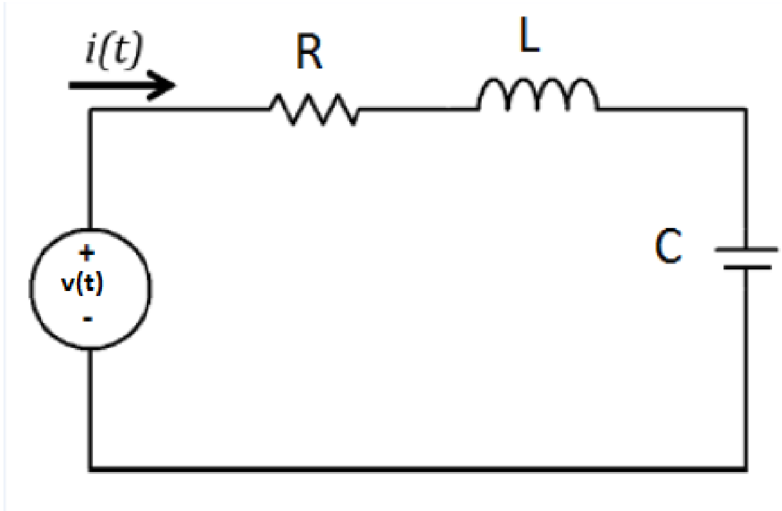

Figura 2.10: Circuito RLC

onde $q(t)$ é a carga elétrica presente no circuito e i é a intensidade da corrente elétrica que percorre o mesmo. Pela Segunda Lei de Kircchoff, a soma das voltagens em cada um dos elementos do circuito é igual a voltagem $V(t)$, isto é

$$V(t) = V(t)_{indutor} + V(t)_{resistor} + V(t)_{capacitor}.$$

$$V(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \tag{2.16}$$

Como $i = \frac{dq(t)}{dt}$, então $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q(t)}{dt^2}$. Substituindo em 2.16, obtemos

$$V(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}, \tag{2.17}$$

que é a equação diferencial linear não homogênea de segunda ordem.

Considerando $v(t) = 0$ (vibrações elétricas no circuito livres), $q(0) = q_0$, $i(0) = i_0$ e aplicando a Transformada de Laplace em 2.17, temos

$$L[s^2Q(s) - sq(0) - q'(0)] + R[sQ(s) - q(0)] + \frac{1}{C} \cdot Q(s) = 0$$
$$[Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}]Q(s) - Lsq(0) - Lq'(0) - Rq(0) = 0.$$

Como $q(0) = q_0$ e $i(0) = i_0$, então $q'(0) = i_0$. Portanto,

$$Q(s) = \frac{Lsq_0 + Li_0 + Rq_0}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} = \frac{(Ls + R)q_0 + Li_0}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}. \tag{2.18}$$

Daí,

$$Q(s) = \frac{(Ls+R)q_0 + Li_0}{(s-m_1)(s-m_2)} \tag{2.19}$$

em que m_1 e m_2 são soluções da equação característica

$$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0.$$

Calculando o discriminante da equação característica, obtemos

$$\Delta = R^2 - \frac{4L}{C}.$$

Assim, temos três casos a analisar:

1º) Se o circuito é superamortecido, então $R^2 - \frac{4L}{C} > 0$ e a equação característica possui duas soluções reais e distintas $m_1 = \frac{-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}$ e $m_2 = \frac{-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}$. Portanto, substituindo m_1 e m_2 em 2.19 e aplicando a Transformada Inversa, obtemos

$$q(t) = k_1 \cdot e^{\left(\frac{-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}\right)t} + k_2 \cdot e^{\left(\frac{-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}\right)t},$$

onde k_1 e k_2 são constantes reais.

2º) Se o circuito é amortecido, então $R^2 - \frac{4L}{C} = 0$ e a equação característica possui duas soluções reais e iguais, ou seja $m_1 = m_2 = -\frac{R}{2L}$. Portanto, substituindo as raízes em 2.19 e aplicando a Transformada Inversa, obtemos

$$q(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} + k_2 \cdot te^{-\frac{R}{2L}t},$$

com k_1 e k_2 constantes reais.

3º) Se o circuito é subamortecido, então $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$. Neste caso, a equação característica possui duas raízes complexas conjugadas $m_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}i$ e $m_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}i$.

Portanto, substituindo as raízes em 2.19 e aplicando a Transformada Inversa, obtemos

$$q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left[k_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}\right)t + k_2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}\right)t\right],$$

em que k_1 e k_2 são constantes reais.

Para o caso em que $v(t) \neq 0$, temos uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea. Para resolver, usamos os métodos apresentados na solução desse tipo de equação, obtendo assim, a expressão da carga $q(t)$.
Neste caso,

$$q(t) = q_c(t) + q_p(t),$$

onde $q_c(t)$ é a solução para a equação homogênea e $q_p(t)$ é uma solução particular.

2.4.4 Solução da Equação Diferencial Ordinária que Modela a Deflexão de uma Viga

Considere uma viga uniforme de comprimento L, suportando uma carga $W(x) = w_0$ como mostra a figura 3 da Introdução.

A deflexão $y(x)$ sofrida pela viga para sustentar a carga é dada pela equação diferencial de quarta ordem

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = W(x), \tag{2.20}$$

onde E é o módulo da elasticidade de Young e I é o momento de inércia.

Aplicando a transformada de Laplace em 2.20, temos

$$\begin{aligned} EI\frac{d^4y}{dx^4} &= w_0 \\ EI \cdot L\left[\frac{d^4y}{dx^4}\right] &= w_0 \cdot L[1] \\ EI[s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)] &= \frac{w_0}{s}. \end{aligned}$$

Considere as condições iniciais:

- $y(0) = k_1$(A deflexão no extremo engastado);
- $y'(0) = k_2$(A inclinação no extremo engastado);
- $y''(0) = k_3$(O momento fletor no extremo engastado);
- $y'''(0) = k_4$(A força de cisalhamento no extremo engastado).

Substituindo na última equação, obtemos

$$\begin{aligned} s^4Y(s) &= \frac{w_0}{EI} \cdot \frac{1}{s} + s^3k_1 + s^2k_2 + sk_3 + k_4 \\ Y(s) &= \frac{w_0}{EI} \cdot \frac{1}{s^5} + \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s^2} + \frac{k_3}{s^3} + \frac{k_4}{s^4}. \end{aligned}$$

Aplicando a Transformada Inversa, temos

$$L^{-1}[Y(s)] = \frac{w_0}{EI} \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right] + L^{-1}\left[\frac{k_1}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{k_2}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{k_3}{s^3}\right] + L^{1}\left[\frac{k_4}{s^4}\right]$$
$$y(x) = \frac{w_0}{24EI}x^4 + k_1 + k_2x + \frac{k_3}{2}x^2 + \frac{k_4}{6}x^3,$$

que é a solução da equação diferencial que modela o problema no caso em que a carga $W(x) = w_0$ é distribuída uniformimente por toda a superfície da viga.

2.4.5 Solução da Equação Diferencial Ordinária que Modela o Problema da Capitalização Contínua

Uma capitalização de juros é denominada contínua quando é feita em intervalos de tempo bem pequenos, isto é, a medida que o tempo t varia dentro de um intervalo considerado para a aplicação, os juros são capitalizados.

Quando juros são capitalizados continuamente, a taxa de crescimento é proporcional ao capital c investido, isto é,

$$\frac{dc(t)}{dt} = ic(t),$$

onde i é a taxa de juros c é o capital investido. Aplicando a Transformada de Laplace em

$$\frac{dc(t)}{dt} - ic(t) = 0,$$

temos

$$L\left[\frac{dc(t)}{dt}\right] - i \cdot L[c(t)] = 0$$
$$sC(s) - c(0) - iC(s) = 0$$
$$(s-i)C(s) = c(0).$$

Considerando $c(0) = c_0$(capital inicial aplicado), temos

$$C(s) = \frac{c_0}{s-i}.$$

Aplicando, agora, a Transformada Inversa, obtemos

$$L_1[C(s)] = c_0L^{-1}\left[\frac{1}{s-i}\right]$$
$$c(t) = c_0e^{it}.$$

Portanto, $c(t) = c_0e^{it}$, nos informa o valor do capital em qualquer instante t de capitalização.

2.4.6 Solução da Equação Diferencial que Modela a Lei do Resfriamento de Newton

A Lei do Resfriamento de Newton afirma que a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional a diferença entre a temperatura do corpo e temperatura ambiente.

Para um corpo de temperatura inicial T que se encontra em um ambiente com temperatura T_m, a taxa de variação de sua temperatura $\frac{dT}{dt}$ é dada pela equação diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k[T - T_m],$$

onde k é uma constante de proporcionalidade.

Como por hipótese, o corpo está esfriando, então $T > T_m$, consequentemente, $k < 0$. Considerando que o equilíbrio térmico ocorra quando o corpo atinja a temperatura T_m, suposta constante, então podemos escrever

$$\frac{dT}{dt} - kT = -KT_m.$$

Aplicando a Transformada de Laplace, obtemos

$$\begin{aligned} L\left[\frac{dT}{dt}\right] - kL[T] &= -KT_m \cdot L[1] \\ sT(s) - T(0) - kT(s) &= -kT_m \frac{1}{s} \\ (s-k)T(s) &= -kT_m \frac{1}{s} + T(0). \end{aligned}$$

Fazendo $T(0) = T_0$, temos

$$T(s) = -\frac{kT_m}{s(s-k)} + \frac{T_0}{s-k}.$$

De

$$-\frac{kT_m}{s(s-k)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-k} = \frac{A(s-k) + Bs}{s(s-k)},$$

obtemos

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \\ -Ak = -kT_m. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $A = T_m$ e $B = -T_m$. Logo,

$$T(s) = \frac{T_m}{s} - \frac{T_m}{s-k} + \frac{T_0}{s-k}.$$

Aplicando a Transformada Inversa, obtemos

$$\begin{aligned}T(t) &= T_m - T_m e^{kt} + T_0 e^{kt}\\ T(t) &= T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}.\end{aligned}$$

Portanto, $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}$ representa a temperatura do corpo em um instante t considerado.

2.5 Considerações Finais

Este trabalho teve como principal objetivo fazer um estudo introdutório sobre a Transformada de Laplace e abordar algumas aplicações. No seu desenvolvimento, falamos um pouco do seu campo de aplicação e também dissertamos, de forma sucinta, sobre a história do seu surgimento e destacamos os principais matemáticos envolvidos no desenvolvimento da teoria.

Apresentamos a definição da Transformada de Laplace e a demonstração de alguns resultados, os quais foram considerados importantes para o desenvolvimento do trabalho. Mostramos também a aplicação da Transformada de Laplace em várias áreas das ciências como também na própria Matemática, onde destacamos o uso desta ferramenta na resolução de equações diferenciais lineares. Em Engenharia, mostramos o uso da técnica no estudo da deflexão de vigas, na Automação Industrial, abordamos a obtenção da função de transferência e a resposta em um sistema de controle. Na Física, solucionamos determinadas equações diferenciais que modelam alguns problemas.

Apêndice A

A.1 Tabela de Transformadas de Laplace das Principais Funções e suas Respectivas Inversas

Tabela A.1: Tabela de Transformadas de Laplace das Principais Funções e suas Respectivas Inversas.

$f(t)$	$L[f(t)] = F(s)$	$L^{-1}[F(s)] = f(t)$
$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(s) + bF_2(s)$	$af_1(t) + bf_2(t)$
$af(at)$	$F\left(\frac{s}{a}\right)$	$af(at)$
1	$\frac{1}{s}$	1
t	$\frac{1}{s^2}$	t
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$	t^n
$\operatorname{sen}(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$sen(kt)$
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$\cos(kt)$
$\operatorname{sen}^2(kt)$	$\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$	$sen^2(kt)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$senh(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$senh(kt)$
$cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$cosh(kt)$
$senh^2(kt)$	$\frac{2k^2}{s(s^2-4k^2)}$	$senh^2(kt)$
$cosh^2(kt)$	$\frac{s^2-2k^2}{s(s^2-2k^2)}$	$cosh^2(kt)$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$t^n e^{at}$
$e^{at}sen(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$	$e^{at}sen(kt)$
$e^{at}cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	$e^{at}cos(kt)$
$tsen(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$	$tsen(kt)$
$tcos(kt)$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$	$tcos(kt)$

$sen(kt) + ktcos(kt)$	$\frac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}$	$sen(kt) + ktcos(kt)$
$sen(kt) - ktcos(kt)$	$\frac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}$	$sen(kt) - ktcos(kt)$
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$
$1 - cos(kt)$	$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}$	$1 - cos(kt)$
$kt - sen(kt)$	$\frac{k^3}{s^2(s^2+k^2)}$	$kt - sen(kt)$
$\frac{asen(bt)-bsen(at)}{ab(a^2-b^2)}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{asen(bt)-bsen(at)}{ab(a^2-b^2)}$
$\frac{cos(bt)-cos(at)}{a^2-b^2}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{cos(bt)-cos(at)}{a^2-b^2}$
$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$
$\frac{2(1-cos(kt))}{t}$	$\ln\left(\frac{s^2+k^2}{s^2}\right)$	$\frac{2(1-cos(kt))}{t}$
$\frac{sen(at)}{t}$	$\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$	$\frac{sen(at)}{t}$
$\frac{sen(at)cos(bt)}{t}$	$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{a+b}{s}\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{a-b}{s}\right)$	$\frac{sen(at)cos(bt)}{t}$
$\delta(t)$	1	$\delta(t)$
$\delta(t-a)$	e^{-sa}	$\delta(t-a)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$e^{at}f(t)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$f(t-a)u(t-a)$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$u(t-a)$
$f^n(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - ... - f^{n-1}(0)$	$f^n(t)$
$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$	$t^nf(t)$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$u(t-a)$
$f^n(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - ... - f^{n-1}(0)$	$f^n(t)$
$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$	$t^nf(t)$

Apêndice B

B.1 Demonstração do Teorema 1.2

Demonstração: 1. Este item foi demonstrado no Capítulo 1.
2. Para este item, temos

$$L(t) = \int_0^\infty e^{-st}t dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}t dt.$$

Fazendo $u = t$ e $dv = e^{-st}dt$, temos $du = dt$ e $v = \int e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}$. Assim,

$$\begin{aligned} L(t) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{te^{-st}}{s}\right)\Big|_0^b + \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt &= 0 + \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]\Big|_0^b \\ &= \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s^2}, \end{aligned}$$

desde que $s > 0$.
3. Provemos por indução sobre n, com $n \in \mathbb{N}$.
Para $n = 0$, temos $f(t) = t^0 = 1$ e por (1), $L(1) = \dfrac{1}{s} = \dfrac{0!}{s^{0+1}}$.
Suponha que para $n \geq 0$, $L[f(t^n)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
Para $n = k + 1$,

$$L[f(t^{n+1})] = \int_0^\infty e^{-st}t^{n+1}dt.$$

Fazendo $u = t^{n+1}$ e $dv = e^{-st}dt$, temos $du = (n+1)t^n dt$ e $v = \int e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}$.
Assim,

$$\begin{aligned} L(t^{n+1}) &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t^{n+1}e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^b + \frac{n+1}{s}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}t^n dt \\ &= 0 + \frac{n+1}{s}\cdot L[f(t^n)] = \frac{n+1}{s}\cdot\frac{n!}{s^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}, \end{aligned}$$

desde que $s > 0$.
4.
$$L(\operatorname{sen}(kt)) = \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}(kt)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\operatorname{sen}(kt)dt.$$
Fazendo $u = \operatorname{sen}(kt)$ e $dv = e^{-st}dt$, temos $du = k\cos(kt)dt$ e $v = \int e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s}$ e, portanto,
$$L(\operatorname{sen}(kt)) = 0 + \frac{k}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(kt)dt.$$
Fazendo novamente $u = \cos(kt)$ e $dv = e^{-st}dt$, temos $du = -k\operatorname{sen}(kt)dt$ e $v = \int e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s}$. Daí,
$$\begin{aligned} L[\operatorname{sen}(kt)] &= \frac{k}{s^2} - \frac{k^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}(kt)dt \\ &= \frac{k}{s^2} - \frac{k}{s^2}L[\operatorname{sen}(kt)] \\ &= \frac{k}{s^2+k^2}, \ \ s > k. \end{aligned}$$

5.
$$L(\cos(kt)) = \int_0^\infty e^{-st}\cos(kt)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cos(kt)dt.$$
Fazendo $u = \cos(kt)$ e $dv = e^{-st}dt$, temos $du = -k\operatorname{sen}(kt)dt$ e $v = \int e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s}$ e, portanto,
$$L(\cos(kt)) = \frac{1}{s} - \frac{k}{s}\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}(kt)dt.$$
Fazendo novamente $u = \operatorname{sen}(kt)$ e $dv = e^{-st}dt$, temos $du = k\cos(kt)dt$ e $v = \int e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s}$. Dai,
$$\begin{aligned} L[\cos(kt)] &= \frac{1}{s} - \frac{k^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\cos(kt)dt \\ &= \frac{1}{s} - \frac{k^2}{s^2}L[\cos(kt)] \\ &= \frac{s}{s^2+k^2}, \ \ s > k. \end{aligned}$$

6.
$$L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(-s+a)t}dt.$$

Fazendo $u = (-s+a)t$, temos $du = (-s+a)dt$ e, portanto,

$$\begin{aligned} L(e^{at}) &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(-s+a)t}dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^u\left(\frac{du}{-s+a}\right) \\ &= \frac{1}{-s+a}\lim_{b\to\infty}\left(e^{(-s+a)t}\right)\Big|_0^b \\ &= \frac{1}{-s+a}\lim_{b\to\infty}\left(e^{(-s+a)b}-1\right) \\ &= \frac{1}{s-a},\ s>a. \end{aligned}$$

7.
$$L(\cosh(kt)) = \int_0^\infty e^{-st}\cosh(kt)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cosh(kt)dt.$$

Fazendo $u = \cosh(kt)$ e $dv = e^{-st}dt$, temos $du = ksenh(kt)dt$ e $v = \int e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s}$ e, portanto,
$$L(\cosh(kt)) = \frac{1}{s} + \frac{k}{s}\int_0^\infty e^{-st}senh(kt)dt.$$

Fazendo novamente $u = senh(kt)$ e $dv = e^{-st}dt$, temos $du = k\cosh(kt)dt$ e $v = \int e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s}$. Dai,

$$\begin{aligned} L[\cosh(kt)] &= \frac{1}{s} + \frac{k^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\cosh(kt)dt \\ &= \frac{1}{s} + \frac{k^2}{s^2}L[\cosh(kt)] \\ &= \frac{s}{s^2-k^2},\ s>k. \end{aligned}$$

8.
$$L(senh(kt)) = \int_0^\infty e^{-st}senh(kt)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}senh(kt)dt.$$

Fazendo $u = senh(kt)$ e $dv = e^{-st}dt$, temos $du = k\cosh(kt)dt$ e $v = \int e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s}$ e, portanto,
$$L(\mathrm{sen}(kt)) = 0 + \frac{k}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cosh(kt)dt.$$

Fazendo novamente $u = \cosh(kt)$ e $dv = e^{-st}dt$, temos $du = ksenh(kt)dt$ e $v = \int e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s}$. Dai,

$$\begin{aligned} L[sneh(kt)] &= \frac{k}{s^2} + \frac{k^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}senh(kt)dt \\ &= \frac{k}{s^2} + \frac{k}{s^2}L[senh(kt)] \\ &= \frac{k}{s^2 - k^2},\ s > k. \end{aligned}$$

■

Referências Bibliográficas

[1] BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino Aprendizagem de Matemática**. Editora FURB,1999. Pag.1 - 50.

[2] SCHEINERMAN, E. R. **Matemática Discreta: Uma Introdução**. 1. ed. São Paulo: Tradução técnica Alfredo Alves de Farias, Thomson Learning Edições, 2006.

[3] HSU, H. P. **Theory and Problems of Signals and Systems**. Tokio: McGraw-Hill, 1995. (Schaum´s Outline Series).

[4] VENTURI, S. **Transformada z**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2016.

[5] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. volume 1. São Paulo: Pearson Macrom Books, 2001.

[6] NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[7] PACHECO, A. L. S. **Transformada de Laplace: Algumas Aplicações**. Monografia submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do grau de Especialista em Matemática. Florianópolis, 2011.

[8] SANTOS, R. J. **Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2007.

[9] GILARDI, L. G. **Aplicación de la Transformada de Laplace en la Deformación de Vigas.** Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, Enero 2012.

[10] ARAÚJO, B. L. **Aplicabilidade dos Números Complexos nos Circuitos Elétricos em Corrente Alternada.** Dissertação (Mestrado - PROFMAT) - UFPB/CCEN, João Pessoa, 2014.

[11] MARSDEN, J. E.; HOFFMAN, M. J. **Basic complex analysis.** Editora W. H. Freeman. 3ª edição. New York. 1999.