Universidade Federal de Sergipe - UFS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Aplicação de Matrizes em Transformações Lineares, Afins e Projetivas no Espaço

por Glauber Evangelista Cruz

Orientador: Prof.º Dr. Evilson da Silva Vieira

São Cristóvão - Sergipe

2017

Universidade Federal de Sergipe - UFS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Glauber Evangelista Cruz

Aplicação de Matrizes em Transformações Lineares, Afins e Projetivas no Espaço

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como requisito final para obtenção de título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT.

Orientador: Prof.º Dr. Evilson da Silva Vieira

São Cristóvão - Sergipe

2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Cruz, Glauber Evangelista
C957a Aplicação de matrizes em transformações lineares, afins e projetivas no espaço / Glauber Evangelista Cruz ; orientador Evilson da Silva Vieira. – São Cristóvão, 2017.
85 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2017.

1. Matemática. 2. Geometria projetiva. 3. Quatérnios. I. Vieira, Evilson da Silva, orient. II. Título.

CDU: 514

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aplicações de matrizes em transformações lineares, afins e projetivas no espaço

por

Glauber Evangelista Cruz

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Evilson Da Silva Vieira - UFS
Orientador

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 19 de Maio de 2017

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Dedicatória

Ao meu pai, João Alberto *(in memoriam)*, a primeira pessoa que me mostrou o quão bonita é a matemática, homem que valorizava a busca pelo conhecimento. À minha mãe, Maria, pelo incentivo à educação, mesmo não tendo oportunidade para estudar em sua infância.

Agradecimento

- A Deus, pelo dom da vida e por permitir que eu cursasse o Profmat;
- À Evilson, pela orientação, motivação e incentivo.
- À minha família, Maria (mãe), João (pai), Beatriz (irmã), a qual não me deixou abater nos momentos difíceis, Albertinho (irmão), essas pessoas estão diretamente relacionadas ao meu sucesso. Carrego um pouquinho deles em mim;
- À Josilane, minha esposa, pela paciência e companheirismo;
- Aos companheiros de Profmat, Canuto, Deusdete, Ítalo, Lázaro, Marcone, Sóstenes e Wesley pela ajuda incessante, incentivo, histórias de vida compartilhadas, enfim, uma turma pequena, mas de pessoas especiais, pessoas a qual nutro um grande respeito e admiração;
- À tia Bebel, pelo zêlo em me receber como hóspede por todo esse tempo de curso, me tendo como um dos seus filhos, sendo para mim uma mãe e amiga.
- Ao amigo Josenilson (Sidney), por ter me apresentado o Profmat.
- À Almir, Giovana, Evilson, Zaqueu, André, Bruno, Kalazas, Fábio e Débora, queridos professores, esplhos. Vocês tornaram nossa caminhada mais rica. Aprendemos mais do que disciplinas. A didática, o cuidado, a inspiração e a motivação nos fazem repensar nossas ações também como professores.
- À CAPES, pelo suporte financeiro.
- À Zaqueu e Marcelo, por aceitarem compor a Banca e, com isso, torná-lo mais especial.

Resumo

Neste trabalho estudaremos as transformações geométricas espaciais que podem ser executadas através de transformações lineares, afins e projetivas. Estas transformações podem ser representadas por matrizes, que é uma estrutura organizada e computacionalmente viável. Devemos então, fazer uma análise dessas transformações estruturando-as em um espaço vetorial e verificando seu comportamento. Após isso, usamos os conhecimentos oriundos da teoria das matrizes para relacionarmos tais transformações. São exemplos de transformações lineares as rotações, os cisalhamentos, reflexões, homotetias e projeções paralelas a um eixo, ambas usando como referência a origem do espaço ou algum dos eixos formados pela base do referencial adotado. Qualquer combinações entre estas, também é uma transformação linear. Já uma transformação afim é a composição de uma transformação linear com uma translação, atingindo uma maior abrangência, uma vez que agora não nos prendemos à origem. Por fim, uma transformação projetiva tem uma abrangência ainda maior. Desta vez, incluímos as relações de perspectiva e seus pontos de fuga. Dedicamos uma atenção especial às rotações no espaço devido ao fato de que estas transformações podem ser representadas por multiplicações de quatérnios, o que torna bem menor o custo computacional de sua implementação e armazenamento.

Palavras-Chave: Transformações espaciais, transformações projetivas, quatérnios e rotações no espaço.

Lista de Figuras

1.1 Arthur Cayley 1

1.2 Pintura rupestre encontrada no Sítio de El Buey. 2

1.3 Arte Marajoara. 2

4.1 Subtração/adição entre os pontos $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ 36

4.2 Interpolação entre os pontos $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ 37

4.3 Interpolação entre os pontos $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$ e $\mathbf{p_3}$ 37

4.4 Hiperplano afim do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ 38

5.1 Objeto Transladadp 42

5.2 Rotação de ângulo β em torno do eixo $\vec{e}_1$. 43

5.3 Coordenada esférica do ponto $\mathbf{p}$. 45

5.4 Sistemas ortonormais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ 45

5.5 R_{e_3}. 45

5.6 $R_{e_3 \times f_3}$. Rotação em torno do eixo nodal. 46

5.7 R_{f_3}. Rotação em torno do eixo $e_3^3 = f_3$, concluindo a rotação. 46

5.8 Sistemas ortonormais XYZ e $X'Y'Z'$ 48

5.9 Rotação em torno do eixo x, levando o eixo y até o plano $OX'Y'$. 48

5.10 Rotação em torno do eixo y_{r_1} fazendo com que o eixo x_{r_1} também pertença ao plano $OX'Y'$ e com isso os eixos z_{r_2} e z' se coincidam 48

5.11 Rotação em torno do eixo z, concluindo a rotação. 48

5.12 Objeto em posição inicial. 49

5.13 Objeto após rotação $R_y(\pi)$. 49

5.14 Etapas das rotações aplicadas em cada componente do braço robótico. . . . 50

5.15 Produto entre elementos da base canônica dos quatérnios. As setas mostram a ordem em que o produto é obtido. 52

5.16 Rotação em torno do eixo r fazendo um ângulo positivo de $\beta = 2\theta$ 56

5.17 Reflexão do objeto em torno do ponto $\mathbf{o}$. 60

5.18 Reflexão do objeto em torno da reta r. 60

5.19 Reflexão do objeto em torno do plano Π. 60
5.20 O ponto **p'** é a imagem do ponto **p** através da reflexão M 63
5.21 Cisalhamento em direção do eixo x sendo y o eixo central. 63
5.22 Na homotetia a distância entre os pontos $\mathbf{p}'$ e $\mathbf{q}'$ é k vezes a distância entre os pontos **p** e **q** 65
5.23 Os pontos pertencentes ao objeto se "deslocam"perpendicularmente ao plano Π 66
5.24 Os pontos do objeto se "deslocam"perpendicularmente a reta $r \parallel e_3$ 66
5.25 Homotetia com diferentes fatores. 67
5.26 68
5.27 69

6.1 P' é a projeção do ponto P no hiperplano Π 71
6.2 $P' = (x_1, y_1, 1)$ é um ponto afim do plano projetivo e $Q = (x_0, y_0, 0)$ representa um ponto ideal. 72
6.3 A reta projetiva t no $\mathbb{R}^3$ é um plano que passa pela origem. 72
6.4 Intersecção de duas retas no espaço projetivo. 72
6.5 Transformação de um ponto do infinito em um ponto de fuga. 75
6.6 Aplicação de uma transformação projetiva com dois pontos de fuga. 75

Sumário

1 Introdução **1**

2 Tópicos de Matrizes e Determinantes **4**

2.1 Matrizes 4

2.2 Operações com Matrizes 5

2.2.1 Igualdade de matrizes 5

2.2.2 Adição de matrizes 5

2.2.3 Produto de um Escalar por uma Matriz 6

2.2.4 Produto de Matrizes 6

2.2.5 Matriz Inversa 9

2.2.6 Matriz Ortogonal 10

2.3 Matrizes Elementares 12

2.3.1 Operações Elementares 12

2.4 Escalonamento de Matrizes 14

2.5 Resolução de Sistemas Lineares 15

2.6 Determinante de uma matriz quadrada 17

2.7 Regra de Cramer 25

3 Transformações Lineares **27**

3.1 Definições e propriedades 27

3.2 Matriz de uma transformação linear 29

3.3 Autovalores e Autovetores 30

3.4 Produto Interno 31

3.5 Produto Vetorial 32

3.5.1 Interpretação Geométrica 33

4 Transformações afins **35**

4.1 Espaço Afim 35

4.2 Coordenadas afins 38
4.3 Transformações afins 38
4.3.1 Matriz de uma transformação afim 40

5 Transformações geométricas **41**
5.1 Translação 41
5.1.1 Mudança de Referencial 42
5.2 Rotação no $\mathbb{R}^3$ 43
5.2.1 Rotação em torno do eixo $\vec{e}_1$ 43
5.2.2 Coordenadas Esféricas do Espaço 44
5.2.3 Ângulos de Euler 44
5.2.4 Rotação em Torno de um Eixo Usando Quatérnios 51
5.2.5 Eixo Resultante de Duas Rotações Consecutivas 58
5.2.6 Matriz da Rotação em Torno do Eixo r 58
5.2.7 Rotações em Torno de Eixos que Não Passam pela Origem 59
5.3 Reflexões no $\mathbb{R}^3$ 59
5.3.1 Matriz da reflexão em torno do ponto $\mathbf{o}$ 60
5.3.2 Matriz de uma reflexão em torno do eixo OX 60
5.3.3 Matriz de reflexão em torno do plano OXY 61
5.4 Cisalhamento 63
5.4.1 Matriz do Cisalhamento S_{yz} 64
5.5 Homotetia 65
5.5.1 Matriz da Homotetia $H_k^{\mathbf{o}}$ 65
5.5.2 Outras Homotetias 66
5.6 Projeção no Plano Paralela um Eixo 68
5.6.1 Projeção Paralela no Plano OXY 68

6 Transformações Projetivas **71**
6.1 Espaço Projetivo 71
6.2 Matriz de uma Transformação Projetiva 73

Capítulo 1

Introdução

O termo matrizes surgiu oficialmente pelo matemático inglês James Joseph Sylvester (1814 – 1897) em seu artigo publicado na Philosophical Magazine de 1850, porém já se sabe que os chineses, alguns séculos antes de Cristo, já usavam métodos para resolver sistemas lineares de equações que sugeriam o uso de matrizes.

Em meados de 1790 o matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), quando estudava a caracterização dos máximos e mínimos de uma função real de várias variáveis, conseguiu reduzir o problema ao estudo do sinal da forma quadrática associada à matriz (o termo matriz não era usado na época) das derivadas segundas de tal função.

Em 1855, Arthur Cayley (1821 – 1895) da Universidade de Cambridge, motivado pelo estudo das formas quadráticas e das transformações lineares, passou a tratar as matrizes como uma classe notável de objetos matemáticos operando como elementos da álgebra. Em um de seus artigos destacou que a noção de matrizes deveria anteceder a dos determinantes o que ocorrera de maneira inversa, já que os determinantes eram estudados sistematicamente na matemática há mais tempo.

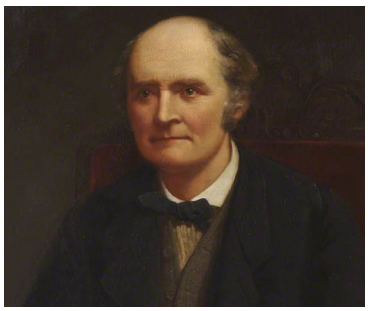


Figura 1.1: Arthur Cayley

Com Cayley, as matrizes ganharam um estudo mais organizado, onde, dentre outras contribuições, definiu matriz identidade e matriz nula, introduziu a soma de matrizes e a multiplicação de matrizes por escalares, bem como estabeleceu suas propriedades.

O produto de duas matrizes também foi sugerido como método para aplicação em duas transformações sucessivas, composição de transformações, e o mesmo já verificava que esta operação não portava a propriedade comutativa.

Hoje a Teoria das Formas Quadráticas, que chegou a ser um dos temas mais discutidos no mundo matemático e proporcionou o estudo básico das matrizes, é apenas um capítulo

da Teoria das Matrizes.

Na educação básica brasileira o estudo das matrizes resume-se à apresentação da operações de adição, produto por escalar e produto de matrizes, bem como suas propriedades, não havendo uma aplicação geométrica ou estrutural dela.

Não se sabe precisamente quando iniciou-se o interesse do homem pelas transformações geométricas, porém as primeiras evidências surgem nas produções artísticas de pinturas rupestres da pré-história. Uma das mais antigas foi encontrada no do sítio de El Buey, na Bolívia. No Brasil, a arte marajoara através de suas pinturas em cerâmica mostram figuras geométricas dispostas de maneira simétrica. Estima-se que essas manifestações artísticas datam entre 400 e 1600. Na educação básica brasileira as transformações não são tratadas de maneira sistemática, porém em diversos livros didáticos há menções de algumas delas. Hoje, o conhecimento das transformações geométricas tem papel funda-

Figura 1.2: Pintura rupestre encontrada no Sítio de El Buey.

Figura 1.3: Arte Marajoara.

mental na manipulação gráfica, principalmente na computação onde uma há uma gama de softwares que vão desde desenhos a animações 3D, os quais portam ferramentas que transformam os objetos criados nos seus respectivos espaços virtuais.

O objetivo deste trabalho é verificar de que maneira a álgebra de matrizes se relaciona com as transformações geométricas, uma vez que esta implementa uma maneira sucinta e organizada de fornecer instruções, principalmente na área de computação.

De início, trataremos das definições e propriedades das matrizes e dos determinantes, objetivando aplicar este conhecimento nos capítulos posteriores. Também se faz necessário verificar de que maneira se comporta uma transformação linear e como este tipo de transformação se relaciona com o produto de matrizes. Da mesma forma, estudaremos as transformações afins e as matrizes próprias deste tipo de transformação.

Conhecendo o espaço afim e suas características, veremos as consequências geométricas das transformações deste espaço, começando pelas translações, já que estas tem uma forte relação com a mudança de referencial de uma transformação, o que torna mais abrangente e interessante nosso estudo. Por conseguinte, nosso foco se voltará para as rotações, onde daremos um enfoque especial a duas parametrizações, por Ângulos de Euler e por quatérnios. Ainda faremos algumas aplicações, inclusive utilizando o aplicativo Geogebra. Nosso estudo ainda tratará da construção das matrizes de reflexão, cisalhamento, homotetia e projeção paralela a um vetor, sempre de maneira bem objetiva. Finalizamos falando sobre o espaço das projeções cônicas $\mathbb{RP}^2$ (estendendo, logo após, ao espaço $\mathbb{RP}^2$),

bem como a anatomia da matriz desta transformação.

Ao longo do nosso texto encontraremos links para os arquivos do Geogebra os quais, na versão pdf, podem ser utilizados para verifiar de maneira lúdica a aplicação das matrizes de transformação, conforme objetivamos aqui.

Capítulo 2

Tópicos de Matrizes e Determinantes

2.1 Matrizes

Definição 2.1. *Uma matriz A de ordem $(m \times n)$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, pode ser definida como uma tabela de dados (números, polinômios, funções, etc) dispostos em m linhas e n colunas, onde as linhas são filas dispostas na horizontal e as colunas são filas na vertical.*

É comum chamar tais dados de elementos ou entradas da matriz. Para nosso estudo trataremos apenas das matrizes que têm como entradas números reais.

As entradas de uma matrize podem ser representadas, de maneira genérica, por uma letra minúscula do alfabeto acompanhada de dois índices, o primeiro mostra em qual linha se encontra o elemento e o segundo em qual coluna, conforme mostramos abaixo:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Se $m = n$, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n, denotado por $A_{n \times n}$, ou simplesmente A_n. Do contrário, A é uma matriz retangular. Uma matriz retangular onde $n = 1$ e $m > 1$ é chamada de matriz linha, e para $m = 1$ e $n > 1$, a chamamos de matriz coluna.

As entradas da matriz quadrada $A = [a_{ij}]_n$, tais que $i = j$ formam a diagonal principal da matriz. Por outro lado, temos também a diagonal secundária, que é composta pelos elementos a_{ij}, tais que $i + j = n + 1$.

As matrizes quadradas $[a_{ij}]_n$ são denominadas:

(i) matriz triangular superior, quando $a_{ij} = 0$, sempre que $i < j$;

(ii) matriz triangular inferior, quando $a_{ij} = 0$, sempre que $i > j$;

(iii) diagonal, quando $a_{ij} = 0$, sempre que $i \neq j$ e existir pelo menos um elemento $a_{ij} \neq 0$ para $i = j$.

2.2 Operações com Matrizes

2.2.1 Igualdade de matrizes

Dizemos que duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são iguais, sempre que temos $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

2.2.2 Adição de matrizes

Definição 2.2. *Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$. A adição da matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ à matriz $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ será igual a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ se, e somente se, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.*

Proposição 2.3. *Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$. No que tange à adição de matrizes, valem as seguintes propriedades:*

A1 *(Comutatividade) $A + B = B + A$;*

A2 *(Existência de Elemento Neutro Aditivo) $A+O = A$, onde O é a matriz cujas entradas são todas iguais a zero;*

A3 *(Existência de Simétrico Aditivo) $A + (-A) = O$, onde $-A$ é chamada de matriz oposta de A;*

A4 *(Associatividade) $A + B + C = A + B + C = A + C + B$*

Observação 2.4. *A matriz O acima é comumente chamada de matriz nula. A matriz oposta de A pode ser definida como a matriz $-A$ obtida de A de modo que, sendo a_{ij} uma entrada de A, b_{ij} é uma entrada de $-A$ se, e somente se, $b_{ij} = -a_{ij}$.*

Demonstração.

A1 Observe que, como $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, então $A + B = B + A$, mostrando que a adição de matrizes goza da propriedade comutativa.

A2 Sendo O uma matriz, tal que todas as suas entradas é igual a 0, $a_{ij} + o_{ij} = a_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, o que mostra que a adição de matrizes possui uma matriz que é o elemento neutro aditivo.

A3 Tome a matriz $-A$, obtida de A multiplicando cada um de seus elementos por -1, assim temos $A + (-A) = [a_{ij} - a_{ij}] = O$.

A4 Dadas as matrizes A, B e C de ordem $m \times n$, $a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + c_{ij}) + b_{ij}$.

□

2.2.3 Produto de um Escalar por uma Matriz

Definição 2.5. *Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e um escalar $k \in \mathbb{R}$, definimos o produto do escalar k pela matriz A, denotado por kA, a operação que consiste em multiplicar cada elemento de A por k, ou seja, $kA = C$ se, e só se, $C = [ka_{ij}]_{m\times n}$.*

Proposição 2.6. *Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e k um escalar definido no conjunto das entradas dessas matrizes. Para o produto de um escalar por uma matriz, valem as seguintes propriedades:*

ME1 *(Elemento Escalar Neutro)* $1 \cdot A = A$

ME2 *(Associatividade)* $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$

ME3 *(Distributividade da Multiplicação de escalar em relação a Adição de Matrizes)* $k(A + B) = kA + kB$.

ME4 *(Distributividade da multiplicação da soma de escalares por uma matriz)* $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

ME1 Se $k = 1$ temos que $1 \cdot A = 1 \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = A$. Assim, 1 é o escalar elemento neutro da operação kA.

ME2 Para qualquer $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1(k_2a_{ij}) = (k_1k_2)a_{ij}$.

ME3 Seja $C = A + B$, então $kC = kA + kB$, isto é, $kc_{ij} = k(a_{ij} + b_{ij}) = ka_{ij} + kb_{ij}$.

ME4 A verificação ocorre de maneira direta.

□

Em resumo, as operações de adição de matrizes e multiplicação de matrizes por escalares, satisfazem as propriedades dos objetos da Álgebra Linear, sendo o conjunto das matrizes $m \times n$ um espaço vetorial denotado comumente por $\mathcal{M}_{m\times n}$, isomorfo, por exemplo, ao espaço $\mathbb{R}^{mn}$ com suas propriedades citadas acima.

2.2.4 Produto de Matrizes

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p\times n}$. O produto da matriz A pela matriz B, denotada por AB será a matriz

$$C = [c_{ij}]_{m\times n}, \text{ onde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Do ponto de vista dos espaços vetoriais, se considerarmos $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ como a matriz formada por m vetores dispostos em colunas (vetores-coluna da matriz A) e $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ uma matriz cujas colunas são listas de escalares, o produto AB é a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, cujas n linhas são formadas por combinações lineares dos vetores-coluna da matriz A através dos coeficientes de B.

Exemplo 2.7. *Dados os vetores* $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ *e* $\vec{w} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, *dispostos como vetores-coluna da matria* A, *denotados por* $[\vec{u}]$, $[\vec{v}]$ *e* $[\vec{w}]$, *respectivamente. As combinações lineares* $k_{11}\vec{u}+k_{21}\vec{v}+k_{31}\vec{w}$ *e* $k_{12}\vec{u}+k_{22}\vec{v}+k_{32}\vec{w}$ *na forma de vetores-coluna podem ser representados pelo produto*

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k_{11} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + k_{21} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + k_{31} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} & k_{12} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + k_{22} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + k_{32} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k_{11}[\vec{u}] + k_{21}[\vec{v}] + k_{31}[\vec{w}] & k_{12}[\vec{u}] + k_{22}[\vec{v}] + k_{32}[\vec{w}] \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

onde B *é a matriz dos escalares.*

Por outro lado, a partir do exemplo acima, podemos observar que se considerarmos A como sendo uma matriz de 4 listas de coeficientes dispostos em linha e B como sendo a matriz formada por 3 vetores-linha, $\vec{u} = (x_1, x_2)$, $\vec{v} = (y_1, y_2)$ e $\vec{w} = (z_1, z_2)$, o mesmo produto resulta em quatro combinações lineares dos vetores-linha da matriz B através das listas de coeficiente das linhas de A.

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\ \beta_1 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\ \gamma_1 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} + \gamma_3 \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

onde, se denotarmos $[\vec{u}] = [x_1 \;\; x_2]$, $[\vec{v}] = [y_1 \;\; y_2]$ e $[\vec{w}] = [z_1 \;\; z_2]$, como vetores-linhas de B, obtemos as combinações $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} + \alpha_3\vec{w}$, $\beta_1\vec{u} + \beta_2\vec{v} + \beta_3\vec{w}$ e $\gamma_1\vec{u} + \gamma_2\vec{v} + \gamma_3\vec{w}$.

O produto de matrizes torna este conjunto uma estrutura ainda mais rica e inclui mais quatro propriedades. Portanto, sempre que as operações forem possíveis temos:

Proposição 2.8.

M1 $A(B + C) = AB + AC$

M2 $(A + B)C = AC + BC$

M3 $A(BC) + (AB)C$

M4 *Existe uma matriz quadrada, a qual chamamos de matriz identidade e denotamos por* I, *tal que* $AI = A$ *ou* $IA = A$, *conforme o caso.*

Demonstração.

M1 Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{p\times m}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ e $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ e seja $B + C = D = [d_{ij}]_{m\times n}$, então $d_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$. Assim,

$$AD = [e_{ij}]_{p\times n}, \text{ onde } e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj},$$

ou seja, $A(B + C) = AB + AC$

M2 Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ e $C = [c_{ij}]_{n\times p}$ e seja $A + B = D = [d_{ij}]_{m\times n}$, então $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Portanto, $DC = [e_{ij}]_{m\times p}$, onde

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj},$$

mostrando que $(A + B)C = AC + BC$.

M3 Suponha que as matrizes A, B e C sejam de ordens $m\times n$, $n\times p$ e $p\times s$, respectivamente. Então, sendo

$$AB = [d_{ik}]_{m\times p}, \text{ onde } d_{ik} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk},$$

$$\text{e } BC = [d'_{lj}]_{n\times s}, \text{ onde } d'_{lj} = \sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj}, \text{ temos}$$

$$\begin{aligned}(AB)C = [e_{ij}]_{m\times s}, \text{ onde } e_{ij} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kj} &= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}\right)c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_{il}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_{il}d'_{lj} = (A(BC))_{ij}.\end{aligned}$$

M4 Seja I uma matriz quadrada tal que $IA = A$, onde $I = [y_{ij}]_n$ e $A = [a_{in}]_{n\times p}$, então $IA = \sum_{k=1}^{n} y_{ik}a_{kj} = a_{ij}$, ou seja, $y_{i1}a_{1j} + y_{i2}a_{2j} + \cdots + y_{ii}a_{ij} + \cdots y_{im}a_{mj} = a_{ij}$. Assim, basta tomar $y_{ij} = 1$, para $i = j$ e $y_{ij} = 0$ para $i \neq j$ para que esta igualdade seja verdadeira. O caso em que $AI = A$ tem demonstração análoga.

□

Podemos observar que se A é uma matriz quadrada, então $AI = IA = A$. Quando a matriz identidade I é de ordem n, costuma-se denotar por I_n.

Outro fato importante e de fácil verificação é que o produto de matrizes não é comutativo.

Motivados pela matriz identidade I_n, podemos definir a **matriz inversa**.

2.2.5 Matriz Inversa

Definição 2.9. *Dada uma matriz quadrada A, dizemos que ela é* **invertível** *ou* **não singular** *se, e somente se, existe uma matriz B tais que $AB = BA = I$. Neste caso a matriz B é denominada* **matriz inversa** *de A, denotada por A^{-1}.*

Proposição 2.10.

(i) Se A é invertível, antão A^{-1} também é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) Se A e B são invertíveis, então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demonstração.

(i) De fato,

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I_n \\ \Leftrightarrow AA^{-1}(A^{-1})^{-1} &= I(A^{-1})^{-1} \\ \Leftrightarrow A[A^{-1}(A^{-1})^{-1}] &= (A^{-1})^{-1} \\ \Leftrightarrow AI &= (A^{-1})^{-1} \\ \Leftrightarrow A &= (A^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

(ii) Com efeito,

$$\begin{aligned} (AB)^{-1}AB &= I_n \\ \Leftrightarrow (AB)^{-1}ABB^{-1} &= I_nB^{-1} \\ \Leftrightarrow (AB)^{-1}A &= B^{-1} \\ \Leftrightarrow (AB)^{-1}AA^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\ \Leftrightarrow (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.11. *Seja A uma matriz invertível, existe uma única matriz B tal que $B = A^{-1}$*

Demonstração.

Seja as matrizes B e C inversas da matriz A. Então $AB = I_n$ e $AC = I_n$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow BAC &= B \\ \Leftrightarrow I_nC &= B \\ \Leftrightarrow C &= B \end{aligned}$$

□

Definição 2.12. *Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times m}$, dizemos que a matriz B é a transposta (A^t) da matriz A, se e somente se, $b_{ij} = a_{ji}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.*

Proposição 2.13. *Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ e $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ tais que $C = AB$, então $C^t = B^tA^t$.*

Demonstração. Pela definição de produto de matrizes,

$$C = [c_{ij}]_{m\times p}, \text{ onde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Então, como $A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$ e $B^t = [b_{ji}]_{p\times n}$,

$$C^t = [c_{ji}]_{p\times m}, \text{ onde } c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}a_{ki},$$

o que nos permite concluir que $C^t = [c_{ji}]_{p\times m} = B^tA^t$

□

Da matriz transposta surge alguns tipos de matrizes notáveis, **matriz simétrica, matriz antissimétrica e matriz ortogonal**. Uma matriz quadrada é simétrica se e somente se $A^t = A$ e antissimétrica se $A^t = -A$.

2.2.6 Matriz Ortogonal

Definição 2.14. *Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n é ortogonal quando*

$$AA^t = A^tA = I_n.$$

Proposição 2.15. *Sejam A e B matrizes ortogonais de ordem n, então $C = AB$ é uma matriz ortogonal.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} CC^t &= AB(AB)^t \\ &= ABB^tA^t \\ &= A(BB^t)A^t \\ &= AI_nA^t \\ &= AA^t = I_n \end{aligned}$$

mostrando que C é ortogonal. □

Definição 2.16. *Chamamos de* grupo *um conjunto G, não vazio, munido de uma operação*

$$G \times G \longrightarrow G$$

$$(a, b) \longmapsto a \cdot b,$$

satisfazendo as seguintes propriedades.

(*i*) ***(Associatividade)*** *Se a, b, $c \in G$, então $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;*

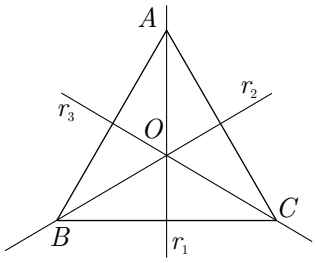
(ii) ***(Elemento Neutro)*** *Existe um elemento $e \in G$ tal que, para todo $a \in G$, $a \cdot e = e \cdot a = a$;*

(iii) ***(Existência de Inverso)*** *Para todo $a \in G$ existe um elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.*

Exemplo 2.17. *O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ munidos da operação de* ***adição****, $+$, é um grupo.*

Exemplo 2.18. *Seja ΔABC um triângulo equilátero, com circuncentro na origem O do espaço euclidiano. Seja r_1, r_2 e r_3 as mediatrizes dos lados do triângulo onde r_1 intersecta o ponto A, r_2 intersecta o ponto B e r_3 intersecta o ponto C. As transformações que preservam o triângulo são:*

- *R_0, $R_{\frac{2\pi}{3}}$, $R_{\frac{4\pi}{3}}$, rotações no plano determinado pelos pontos A, B e C, em torno do ponto O, de ângulos 0, $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$, respectivamente;*
- *R_1, R_2 e R_3, rotações de ângulo π em torno dos eixos r_1, r_2 e r_3, respectivamente.*



O conjunto $S_\Delta = \{R_0, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_1, R_2, R_3\}$ munido da operação de composição é um grupo.

O conjunto das matrizes ortogonais de ordem n, munido da operação de composição (produto de matrizes) tem estrutura de grupo, sendo denotado por grupo $O(n)$, uma vez que goza das seguintes propriedades:

O1 A composição de duas matrizes ortogonais, é uma matriz ortogonal (**Proposição 2.15**);

O2 Existência do elemento identidade I_n (é fácil verificar que $I_n \in O(n)$);

O3 A composição é associativa (conforme **M3**);

O4 Existência de inverso A^{-1} tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

Observação 2.19. *A propriedade* **O4** *é aparentemente obvia haja vista a definição de matriz ortogonal. Mas devemos nos atentar ao detalhe que a definição não garante, $A^{-1} \in O(n)$. Com efeito, $A^{-1} = A^t$ e A^t é ortogonal, pois $A^t(A^t)^t = A^tA = I$.*

Veremos mais à frente que o determinante de uma matriz ortogonal assume apenas dois valores, 1 e -1. Verificamos, então, que se tomarmos todas as matrizes ortogonais de ordem n cujos determinantes são iguais a 1, este subconjunto também tem estrutura de grupo, o grupo das matrizes ortogonais especiais, o qual denotamos por $SO(n)$.

Trataremos de maneira mais clara do grupo $SO(3)$ no capítulo 5.

Pela definição de matriz ortogonal, podemos ainda verificar um resultado bem importante. Sendo A uma matriz ortogonal temos

$$AA^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $I_n = [y_{ij}]$, para $i = j$ teremos

$$y_{ij} = (a_{i1})^2 + (a_{i2})^2 + \cdots + (a_{in})^2 = \|(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})\| = 1,$$

por outro lado, para $i \neq j$ temos

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = \langle (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), (a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}) \rangle = 0.$$

Logo, da Álgebra Linear, se tomarmos cada linha da matriz A como um vetor, tais vetores são normais, pois seus módulos são iguais a 1 e são, dois a dois, ortogonais, já que o produto interno usual, denotado por $\langle , \rangle$, de cada par desses vetores é 0. Verifica-se, então, que as linhas de uma matriz ortogonal formam uma base ortonormal.

Podemos, fazendo $A^tA = I_n$, verificar que as colunas da matriz A também forma uma base ortonormal.

As verificações acima demonstram a seguinte proposição:

Proposição 2.20. *Seja $\beta = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ uma base ortonormal e A uma matriz ortogonal de ordem n, então, A transforma β em outra base ortonormal.*

2.3 Matrizes Elementares

As matrizes elementares desempenham um papel bastante importante na álgebra de matrizes. Embora seja de bastante importância na resolução do sistemas lineares de equações, não é um tema muito abordado no Ensino Médio Brasileiro.

2.3.1 Operações Elementares

Antes de definirmos **matriz elementar**, é necessário inteirar-nos sobre operações lineares na matriz. Existem três modificações aplicáveis em uma matriz que consideramos uma operação elementar:

(e_1) Permutação entre linhas ($L_i \leftrightarrow L_j$). Dada uma matriz $A_{m\times n}$, escolhendo duas de suas linhas L_i, de entradas a_{ik}, e L_j, de entradas a_{jk}, com $k \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq k \leq n$, dizemos que a permutação entre essas linhas é a operação de substituir cada entrada a_{ik} por a_{jk} ao tempo em que substituímos cada entrada a_{jk} por a_{ik}.

(e_2) Multiplicação de uma linha por um escalar $\alpha \neq 0$ ($L_i \to \alpha L_i$). Esta operação consiste em multiplicar cada entrada a_{ik} da linha L_i pelo escalar α.

(e_3) Substituição de uma linha L_i pela soma dessa linha L_i com a linha L_j ($L_i \to L_i + L_j$), isto é, somar cada a_{ik} com a_{jk}.

Observação 2.21. *É de fácil verificação que as operações elementares não afetam a relação de dependência linear entre as linhas de uma matriz.*

Definição 2.22. *Uma matriz adquirida da matriz identidade I_n através de uma operação elementar é chamada de* **matriz elementar**.

Proposição 2.23. *As matrizes elementares são inversíveis e sua inversa também é uma matriz elementar e*

(i) Se a matriz E_1 é obtida de I, depois de sofrer a operação $L_i \leftrightarrow L_j$, então $E_1^{-1} = E_1$;

(ii) Se a matriz E_2 é obtida de I depois de sofrer a operação $L_i \to \alpha L_i$, então E_2^{-1} é uma matriz que sofreu a operação $L_i \to \frac{1}{\alpha} L_i$;

(iii) Se a matriz E_3 é obtida de I depois de sofrer $L_i \to L_i + L_j$, então $(E_3)^{-1}$ é uma matriz que sofreu a operação $L_i \to L_i - L_j$.

Demonstração. Seja

(i) Observe que na matriz E_1 em cada linha e em cada coluna temos apenas uma entrada 1 e as demais entradas 0. Assim, teremos na matriz $[e_{ij}]_n = (E_1)^2 = E_1E_1 = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}e_{kj} = 0$, se $i \neq j$, ou 1, se $i = j$.

(ii) De maneira análoga ao item (i), em cada linha e em cada coluna das matrizes E_2 e E_2^{-1} temos apenas um elemento não nulo e ocupando a mesma posição em ambas as matrizes. Logo, seja $e_{ij} \in E_2E_2^{-1}, e_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $e_{ij} = (e_2)_{ij}(e_2')_{ij} = 1$ se $i = j$, para $(e_2)_{ij} \in E_2$ e $(e_2')_{ij} \in E_2^{-1}$.

(iii) Observe a matriz abaixo:

$$E_3 = [(e_3)_{ij}]_n = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ L_i \\ \\ L_j \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \text{e}$$

$$(E_3)^{-1} = [(e_3')_{ij}]_n = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ L_i \\ \\ L_j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Seja E_3' uma matriz que sofreu a operação $L_i \to L_i - L_j$, com exceção das linhas i e j, todas as entradas são 0 quando $i \neq j$ e 1 quando $i = j$, tanto na matriz E_3 quanto na matriz E_3', o que nos faz afirmar que o mesmo ocorrerá com a matriz $(E_3)E_3'$. Resta-nos analisar o que ocorrerá nas linhas i e j da matriz E_3E_3'. Seja $(e_3)_{ij} \in E_3E_3'$, então $(e_3)_{ii} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1, (e_3)_{jj} = (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1, (e_3)_{ij} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$ e $(e_3)_{ji} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$. O resultado para $E_3'E_3$ é análogo.

Portanto, $E_3' = (E_3)^{-1}$

□

Podemos afirmar, e a demonstração é de simples compreensão, que dada a matriz A, aplicar a operação elementar e_i nesta matriz é o mesmo que executar o produto E_iA, onde E_i é a matriz elementar correspondente à operação e_i.

2.4 Escalonamento de Matrizes

Uma matriz nula já é considerada escalonada. Por outro lado, dada uma matriz $A_{m\times n}$, não nula, escalonar esta matriz à **forma reduzida de escada** é aplicar nela operações elementares de modo a fazer com que a primeira entrada não nula de cada linha seja igual a 1 (pivô da linha) e que na coluna onde se encontra um pivô as demais entradas sejam todas iguais a 0. Em seguida, permuta-se essas linhas de maneira que, dados dois pivôs, a_{ij} e a_{kl}, sempre que $i < k$ tenhamos $j < l$. Também devemos permutar as linhas fazendo com que as linhas nulas sejam as últimas. A matriz resultante é chamada de **matriz reduzida à forma de escada** a qual denotaremos por $\overline{A}$. Este processo é muito utilizado para resolver sistemas de equações lineares pelo nome de **Método de Eliminação de Gauss-Jordan**.

Definição 2.24. *Dizemos que duas matrizes são* **linha-equivalentes** *ou* **equivalentes por linhas** *quando uma pode ser obtida de outra através de um número finito de operações elementares em suas linhas.*

Então, podemos afirmar que a matriz A é invertível, se e somente se A é linha-equivalente à matriz identidade e $A^{-1} = E_1E_2 \cdots E_n$, em que E_i é uma matriz elementar.

É de fácil verificação que toda matriz é linha-equivalente a uma matriz escalonada reduzida à forma de escada.

2.5 Resolução de Sistemas Lineares

O escalonamento de matrizes pode ser utilizado para resolução de sistemas lineares. Ao londo desta seção veremos de que maneira isto ocorre.

Definição 2.25. *Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações da forma*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_j & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases}$$

Este sistema pode ser representado matricialmente. Tomando A como a matriz dos coeficientes a_{ij}, X como a matriz das variáveis x_j e B como a matriz dos termos independentes b_i, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, sua representação é a equação matricial $AX = B$, isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Quando um sistema tem todos os seus termos independentes iguais a 0, dizemos que ele é um sistema linear homogêneo. Logo, todo sistema linear homogêneo admite uma solução dada pena n-upla $(0, 0, ..., 0)$ a qual é chamada solução trivial.

Uma solução do sistema linear é a n-upla (matiz coluna $S = [s_i]_{n\times 1}$) que satisfaz a equação $AX = B$, isto é, que $AS = B$. Este sistema de equações é classificado de acordo com as possibilidades referentes às suas soluções, podendo ser um sistema **impossível**, quando não há uma solução, ou **possível**, se houver. Um sistema possível ainda pode ser **determinado**, quando há uma única solução, ou **indeterminado**, quando há infinitas soluções. Observe que se aplicarmos as mesmas operações elementares nas linhas das matrizes A e B a solução do sistema resultante é igual a do sistema original; chamamos estes sistemas de **equivalentes**. Então podemos incluir a matriz B como última coluna da matriz A e escaloná-la (*método de eliminação de Gauss-Jordan*). A essa matriz damos o nome de **matriz ampliada do sistema linear** e denotaremos por $A|B$.

O número de linhas não nulas de uma matriz na sua forma escalonada é chamado de *posto da matriz*. Um resultado muito útil acerca do posto de uma matriz aplicado a sistemas lineares veremos a seguir:

Teorema 2.26 (Posto da Matriz)**.** *Dado o sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas $AX = B$, Seja $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ o posto da matriz A e $\mathcal{P}_{\mathcal{A}|\mathcal{B}}$ o posto da matriz ampliada $A|B$, então o sistema é possível se, e somente se, $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}_{\mathcal{AB}}$, podendo ser*

(i) *determinado, caso $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}_{\mathcal{AB}} = n$*

(ii) *indeterminado, caso* $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}_{\mathcal{AB}} < n$. *Neste caso teremos* $n - \mathcal{P}$ *incógnitas que podem assumir qualquer número real.*

Demonstração. $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} \neq \mathcal{P}_{\mathcal{AB}}$ se, e só se, $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} < \mathcal{P}_{\mathcal{AB}}$, logo existe uma linha na matriz $A|B$ escalonada do tipo $[0\ 0\ \cdots\ 0\ 1]$ o que equivale a termos uma linha do sistema escalonado da forma $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$, tornando o sistema impossível. Se $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}_{\mathcal{AB}}$ a forma escalonada de ambas as matrizes têm o mesmo número de linhas não nulas, respectivamente, o mesmo número de linhas nulas.Vamos dividir esta condição para dois casos:

Caso 1: $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}_{\mathcal{AB}} = n$. Neste caso teremos uma matriz do tipo

$$(\overline{A|B})_{m\times(n+1)} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & b_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \cdots, x_n = b_n$. Logo, o sistema é possível e determinado.

Caso 2: $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}_{\mathcal{AB}} < n$. Desta vez, teremos uma matriz na forma escalonada com a representação

$$(\overline{A|B})_{m\times(n+1)} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{i(k+1)} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & a_{k(k+1)} & \cdots & a_{kn} & b_k \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 & = & b_1 & - & (a_{1(k+1)}x_{(k+1)} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ \vdots & = & \vdots & - & \vdots \\ x_i & = & b_i & - & (a_{i(k+1)}x_{(k+1)} + \cdots + a_{in}x_n) \\ \vdots & = & \vdots & - & \vdots \\ x_k & = & b_k & - & (a_{1(k+1)}x_{(k+1)} + \cdots + a_{kn}x_n) \end{cases}$$

Podemos verificar que as soluções do sistema são dadas em função de $n - k$ incógnitas, havendo infinitas soluções. Assim, o sistema é possível e indeterminado.

□

Pelo teorema acima, podemos verificar, de modo especial, que todo sistema homogêneo é possível. Podendo ser determinado ou indeterminado nos termos deste teorema. Ainda, podemos verificar que se o sistema apresenta n equações e n incógnitas ele será possível e determinado se, e somente se, a matriz dos coeficientes é invertível. Contudo, se um sistema com n equações e n incógnitas é homogêneo, o mesmo terá solução não trivial se, e somente se, a matriz dos coeficientes não for invertível.

Contudo, as matrizes nos dá muitas ferramentas para análise e solução de sistemas lineares. Além do escalonamento há outro método para resolução de sistemas de equações lineares que utilizam o conceito dos determinantes das matrizes para sua execução: a chamada **Regra de Cramer**. Na próxima seção definiremos o determinante de uma matriz quadrada e em seguida concluiremos com a Regra de Cramer.

2.6 Determinante de uma matriz quadrada

Definição 2.27. *Seja J_n um conjunto com os n primeiros números naturais, chamamos de* **permutação**, *$\delta(i)$, dos elementos de J_n toda função bijetiva $J_n \to J_n$.*

Chamamos de P_n o número máximo de permutações diferentes dos elementos de J_n. Usando indução sobre n é fácil verificar que $P_n = n!$. Denotaremos por $P(n)$ o conjunto de todas as permutações dos elementos de J_n. Para um dado $1 \leq k \leq n!$, indicaremos cada permutação desses elementos J_n por

$$p_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \cdots & \delta(n) \end{pmatrix},$$

ou simplesmente por

$$p_k = \begin{pmatrix} \delta(1) & \delta(2) & \cdots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

onde

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

será chamada de permutação identidade. Deste modo, $P(n) = \{p_1, p_2, \cdots, p_{n!}\}$

Exemplo 2.28. *Dado o conjunto $J_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então*

$$p_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

é uma das $5! = 120$ permutação de J_5.

Sejam p_i e p_j duas permutações de J_n, dizemos que p_i é uma transposição de p_j e vice-versa se uma puder ser obtida da outra trocando dois de seus elementos e mantendo fixos os demais. O termo transposição também se aplica à transformação de p_i em p_j.

Exemplo 2.29. *Sejam $p_i = (1 \;\; 5 \;\; 4 \;\; 3 \;\; 2)$ e $p_j = (2 \;\; 5 \;\; 4 \;\; 3 \;\; 1)$ elementos de J_5. p_i é uma transposição de p_j, haja vista a troca ocorrida somente entre os elementos 2 e 1.*

Proposição 2.30. *Podemos transformar p_k em p_1 através de um número finito de transposições.*

Demonstração.

Provaremos por indução em n.

Com efeito, para $n = 2$, temos duas opções,

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

onde com apenas uma troca podemos sair de p_2 para p_1.

Suponha que, através de um número finito de trocas, possamos transformar $p_k \in P(n)$ em $p_1 \in P(n)$. Então, qualquer que seja o p_k, podemos colocar entre seus elementos, o elemento $(n+1)$, tornando p_k em um certo $p_{k'} \in P(n+1)$. Fixando o elemento $(n+1)$ podemos, por hipótese, trocar as posições dos demais elementos de $p_{k'}$ de modo a termos

$$p_{k''} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & i+1 & i+2 & \cdots & n & n+1 \\ 1 & 2 & \cdots & i & n+1 & i+1 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

A partir disto, basta efetuar n transposições, $(n+1)$ por $(i+1)$, $(n+1)$ por $(i+2)$, $\cdots$, $(n+1)$ por (n) para chegaremos à permutação identidade de $p_1 \in P(n+1)$. □

Definição 2.31. *Dizemos que p_k é par (respectivamente ímpar) se para transformá-la em p_1, precisamos de um número par (respectivamente ímpar) de transposições. O sinal da permutação p_k é definido pela função:*

$$\sigma(p_k) = \begin{cases} -1, & se \;\; p_k \;\; é \;\; ímpar. \\ 1, & se \;\; p_k \;\; é \;\; par. \end{cases} \text{, ou ainda, } \sigma(p_k) = (-1)^{p_k}$$

Definição 2.32. *Seja $A_n = [a_{ij}]_n$, $1 \leq i, j \leq n$, uma matriz quadrada de ordem n, com entradas no corpo K, chamamos de* ***determinante da matriz*** *A, ou* $\det(A)$*, a função que associa esta matriz a um elemento de K, através da expressão:*

$$\sum_{p_k \in P(n)} \sigma(p_k) a_{1\delta(1)} a_{2\delta(2)} \cdots a_{n\delta(n)}.$$

Exemplo 2.33. *Seja R uma matriz com entradas em $K = \mathbb{R}$, isto é,*

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0,5 \\ 2\sqrt{3} & 6 & -4 \\ 0 & -1 & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}, \text{ então}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot (-4) \cdot (-1) + \sqrt{3} \cdot (-4) \cdot 0 - \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} + 0,5 \cdot (-1) \cdot 2\sqrt{3} - 0,5 \cdot 6 \cdot 0 \\ &= 4 - 4 + 0 - 4 - \sqrt{3} + 0 \\ &= -4 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Dentre as propriedades dos determinantes é importante para nosso estudo destacar algumas delas, o que trataremos nas proposições abaixo.

Proposição 2.34. *Dada uma matriz A_n onde duas de suas linhas ou duas de suas colunas são iguais, então* $\det(A) = 0$.

Demonstração.

Suponha, que a linha i seja igual a linha j, então podemos notar que para cada permutação $a_{1\delta(1)}a_{2\delta(2)}\cdots a_{i\delta(i)}\cdots a_{j\delta(j)}\cdots a_{n\delta(n)}$ teremos outra permutação que é da forma $a_{1\delta(1)}a_{2\delta(2)}\cdots a_{j\delta(i)}\cdots a_{i\delta(j)}\cdots a_{n\delta(n)}$. Como elas são permutações as quais uma pode ser obtida da outra através de uma única transposição, elas têm sinais opostos. Logo, a soma do produto dos seus elementos é nula. Temos então, $\frac{n!}{2}$ parcelas nulas do somatório, o que mostra que o mesmo é nulo.

□

Proposição 2.35. *Seja I a matriz identidade, então* $\det(I) = 1$.

Demonstração.

De fato, por definição, $\det(A) = \sum_{p_k \in P(n)} \sigma(p_k)a_{1\delta(1)}a_{2\delta(2)}\cdots a_{n\delta(n)}$. Em $n!-1$ parcelas deste somatório temos 0 como fator e na parcela restante, a única sem o fator 0, temos o produto $1\cdot 1\cdot 1\cdots 1$ que, como esta parcela é formada pela permutação identidade, tem sinal par, logo temos que $\det(A) = 1$. □

Para a proposição seguinte, representaremos por A_J o vetor na j-ézima linha da matriz A.

Proposição 2.36. *Sejam as matrizes A, A' e A'' com elementos pertencentes a K e um escalar $k \in K$, tal que*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix},\ A' = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A'_J \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} \text{ e } A'' = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ kA''_J \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix},\ \textit{onde } A_J = A'_J + kA''_J,\ \textit{então}$$

$$\det(A) = \det(A') + k\cdot\det(A'')$$

Demonstração.

Sabemos da definição de determinantes que

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{p_k\in P(n)} \sigma(p_k)a_{1\delta(1)}a_{2\delta(2)}\cdots a_{j\delta(j)}\cdots a_{n\delta(n)} \\
&= \sum_{p_k\in P(n)} \sigma(p_k)a_{1\delta(1)}a_{2\delta(2)}\cdots (a'_{j\delta(j)} + ka''_{j\delta(j)})\cdots a_{n\delta(n)} \\
&= \sum_{p_k\in P(n)} \sigma(p_k)(a_{1\delta(1)}a_{2\delta(2)}\cdots a'_{j\delta(j)}\cdots a_{n\delta(n)} + a_{1\delta(1)}a_{2\delta(2)}\cdots ka''_{j\delta(j)}\cdots a_{n\delta(n)}) \\
&= \left(\sum_{p_k\in P(n)} \sigma(p_k)a_{1\delta(1)}a_{2\delta(2)}\cdots a'_{j\delta(j)}\cdots a_{n\delta(n)} + k\right)\cdot\left(\sum_{p_k\in P(n)} a_{1\delta(1)}a_{2\delta(2)}\cdots a''_{j\delta(j)}\cdots a_{n\delta(n)}\right) \\
&= \det(A') + k\cdot\det(A'')
\end{aligned}$$

□

Observe que a matriz A' foi obtida de A através das operações elementares e_2 e e_3.

Corolário 2.37. *Seja A' a matriz obtida de A através da operação elementar e_1, isto é, a permutação $A_I \leftrightarrow A_J$, então* $\det(A') = -\det(A)$.

Demonstração.

Das **Proposições 2.34 e 2.36**

$$0 = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_I + A_J \\ \vdots \\ A_I + A_J \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_I + A_J \\ \vdots \\ A_I \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_I + A_J \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_I \\ \vdots \\ A_I \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_I \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_I \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix}$$

temos então que

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_I \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_I \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} = 0,$$

o que implica

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_I \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_I \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix}$$

□

Corolário 2.38. *Dada a matriz A', obtida da matriz A substituindo uma linha pela soma desta linha com um múltiplo de uma outra, então* $\det(A') = \det(A)$.

Demonstração. Com efeito,

$$\det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_I + kA_J \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_I \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} + k \cdot \det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_J \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} = \det(A) + 0 = \det(A). \qquad \square$$

Corolário 2.39. *Seja A' uma matriz obtida da matriz A substituindo a j-ésima linha pela soma dela com uma combinação linear das demais, então* $\det(A') = \det(A)$

Demonstração. Basta usar o **Corolário 2.38** seguidas vezes. $\square$

Podemos observar, portanto, que pelas proposições e corolários acima, tomando as matrizes elementares E_1, E_2 e E_3, temos que $\det(E_1) = -1$, $\det(E_2) = \alpha$, $\alpha \neq 0$ e $\det(E_3) = 1$. Ainda, sendo E_i uma matriz elementar, $\det(E_iA) = \det(E_i)\det(A)$. Contudo, usando esta constatação de maneira recorrente e sendo $A = E_sE_{s-1}\cdots E_1B$, $s \in \mathbb{N}$, temos que

$$\det(A) = \det(E_s)\det(E_{s-1})\cdots\det(E_1)\det(B)$$

Proposição 2.40. *Seja A e B matrizes linha-equivalentes entre si, então*

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(B) \neq 0$$

Demonstração. A e B são matrizes linha-equivalentes se, e somente se, $A = E_rE_{r-1}\cdots E_1B$. Sabemos que, dado $r \in \mathbb{N}$, $\det(A) = \det(E_rE_{r-1}\cdots E_1B) = \det(E_rE_{r-1}\cdots E_1)\det(B)$. Como nenhuma matriz elementar tem determinante zero, existe um certo $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\det(A) = k \cdot \det(B)$, logo

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(B) \neq 0$$

$\square$

Corolário 2.41. *A é uma matriz invertível, se e somente se, $detA \neq 0$*

Demonstração. Se A é uma matriz invertível, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $A = E_rE_{r-1}\cdots E_1I_n$. Sabemos que $\det(E_rE_{r-1}\cdots E_1) \neq 0$. Como $\det(A) = \det(E_rE_{r-1}\cdots E_1I_n)$ $= \det(E_rE_{r-1}\cdots E_1)$, conclui-se que $\det(A) \neq 0$.

Por outro lado, se $detA \neq 0$ e seja B a matriz reduzida de A à forma de escada, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $A = E_sE_{r-1}\cdots E_1B$, então

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(E_sE_{r-1}\cdots E_1)\det(B) \neq 0 \\ &\Rightarrow \det(B) \neq 0 \\ &\Rightarrow B = I_n, \end{aligned}$$

mostrando que A é invertível. $\square$

Teorema 2.42 (Binet)**.** *Seja A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem, então*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Demonstração. Vamos basear nossa demonstração em duas hipóteses:

(i) A não é invertível. Neste caso AB também não é invertível, sendo $\det(A) = \det(AB) = 0$. Daí, $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$;

(ii) A é invertível. Então, existe um $s \in \mathbb{N}$ de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} A = E_s E_{s-1} \cdots E_1 I_n &= E_s E_{s-1} \cdots E_1 \\ \Leftrightarrow \det(AB) &= \det(E_s E_{s-1} \cdots E_1 B) \\ &= \det(E_s)\det(E_{s-1}) \cdots \det(E_1)\det(B) \\ &= \det(E_s E_{s-1} \cdots E_1)\det(B) \\ &= \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

□

Denotaremos por $A(i|j)$ a matriz obtida de A retirando a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

Definição 2.43. *Dada a matriz $A_n = [a_{ij}]_n$, $1 \leq i, j \leq n$, uma matriz quadrada de ordem n, definimos o cofator do elemento a_{ij} como $\Delta_{ij}(A) = (-1)^{(i+j)}\det(A(i|j))$. A matriz $[\Delta_{ij}(A)]$ é chamada de* **matriz dos cofatores** *e sua transposta é chamada de* **matriz adjunta de** *A, denotada por* $\operatorname{adj}(A)$.

Teorema 2.44. *Dada uma matriz $A_n = [a_{ij}]_n$, de ordem n, então, escolhida uma linha i, temos*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)).$$

O teorema acima é usualmente chamado de **Método de Laplace**, muito usado no ensino médio brasileiro.

Demonstração. Observe a matriz abaixo:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right]$$

$\det(A)$ é composto pelo somatório de $n!$ parcelas com n fatores cada, donde em $(n-1)!$ parcelas a_{ij} é um dos fatores. Podemos verificar que em nenhuma dessas parcelas estão presentes, como fatores, os demais elementos da coluna j e da linha i. Daí,

$$\sum a_{1\delta(1)} a_{2\delta(2)} \cdots a_{(j-1)\delta(j-1)} a_{ij} a_{(j+1)\delta(j+1)} \cdots a_{n\delta(n)} = a_{ij}\det(A(i|j))$$

$$\Leftrightarrow \sum a_{ij}a_{1\delta(1)}a_{2\delta(2)}\cdots a_{(j-1)\delta(j-1)}a_{(j+1)\delta(j+1)}\cdots a_{n\delta(n)} = a_{ij}(-1)^j \det(A(i|j))$$

$$\Leftrightarrow \sum a_{1\delta(1)}a_{2\delta(2)}\cdots a_{(i)\delta(i)}a_{ij}a_{(i+1)\delta(i+1)}\cdots a_{n\delta(n)} = a_{ij}(-1)^{(i+j)} \det(A(i|j)) \ .$$

Fazendo o mesmo com os demais elementos da linha e somando os respectivos resultados obtemos as $n(n-1)! = n!$ parcelas de $\det(A)$ que é igual a

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+j}a_{ij}\det(A(i|j)).$$

□

Observação 2.45. *De maneira análoga, podemos mostrar que o Método de Laplace pode ser utilizado não só em linhas, mas também em colunas, ou seja, também é válido*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A(i|j)).$$

Proposição 2.46. *Dada uma matriz A, então* $\det(A) = \det(A^t)$.

Demonstração. Vamos provar por indução em n, onde n representa a ordem da matriz.

Para $n = 1$, trivial.

Agora, supondo que $\det(A) = \det(A^t)$ sendo A uma matriz quadrada de ordem n, vamos verificar que isto acarreta $\det(A') = \det(A'^t)$ sendo A' uma matriz quadrada de ordem $n+1$.

Com efeito,

$$\det(A') = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A'(i|j)).$$

Como $A'(i|j)$ é de ordem n, por hipótese, $\det(A'(i|j)) = \det(A'(i|j)^t)$ e além disso, como vimos anteriormente o determinante pelo método de Laplace pode ser calculado através dos cofatores, tanto de uma linha como de uma coluna de A'. Portanto,

$$\det(A') = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A'(i|j)^t) = \det(A'^t),$$

seguindo assim o resultado, conforme ilustrado abaixo:

$$\det\left[\begin{array}{cc|c|cc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1(n+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{i(n+1)} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+1)1} & \cdots & a_{(n+1)j} & \cdots & a_{(n+1)(n+1)} \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{cc|c|cc} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{(n+1)1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{1j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{(n+1)j} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1(n+1)} & \cdots & a_{i(n+1)} & \cdots & a_{(n+1)(n+1)} \end{array}\right]$$

□

Proposição 2.47. *Se A é uma matriz ortogonal, então* $\det(A) = \pm 1$.

Demonstração.

Por definição de matriz ortogonal, temos que

$$AA^t = I_n, \text{ o que acarreta, } \det(AA^t) = \det(I_n)$$

Então, pela **Proposição 2.35** e **Teorema 2.42**,

$$\det(A)\det(A^t) = 1$$

Usando o resultado da **Proposição 2.46**, temos

$$\det(A)\det(A) = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$$

□

Observação 2.48. *A verificação da afirmação vista anteriormente, de que $SO(n)$ munido da operação de composição (ou produto) é um grupo, se deve as propriedades abaixo:*

(S_1) Dadas duas matrizes $A, B \in SO(n)$, então $det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$, o que mostra que $AB \in SO(n)$;

(S_2) (Existência de elemento identidade). $I_n \in SO(n)$, pois $\det(I_n) = 1$.

(S_3) (Existência de inverso). $A^{-1} \in SO(n)$, pois $\det(A^{-1}) = \det(A^t) = \det(A) = 1$;

(S_4) (Associatividade).

Proposição 2.49. *Seja A uma matriz quadrada invertível, então $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$*

Demonstração. Dada a matriz $B = \operatorname{adj}(A) \cdot A$ vamos, primeiramente, mostrar que $B = \det(A) \cdot I_n$. Para isso, basta mostrarmos que

$$b_{ij} = \begin{cases} \det(A), & \text{se } \ i = j \\ 0, & \text{se } \ i \neq j \ . \end{cases}$$

De fato, sendo $\operatorname{adj}(A) = [\Delta_{ji}(A)]$, onde denotaremos, simplesmente, por $[\Delta_{ji}]$, temos que

$$B = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{i1} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{i2} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1j} & \Delta_{2j} & \cdots & \Delta_{ij} & \cdots & \Delta_{nj} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{in} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Veja que, se $i = j$, teremos $b_{jj} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A(i|j)) = \det(A)$ pelo Teorema de Laplace.

Por outro lado, sendo $i \neq j$, $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\Delta_{ki}(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{kj}\det(A(k|i))$, que é o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

que tem duas colunas iguais e, pela **Proposição 2.34**, é igual a 0. Mostramos, então que $\operatorname{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$, o que implica $\left(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\right) \cdot A = I_n$. Logo, pela definição de matriz inversa, $\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = A^{-1}$. □

2.7 Regra de Cramer

Dada o sistema de equações lineares $AX = B$, denotaremos por A^J a matriz obtida de A substituindo sua j-ésima coluna pela única coluna da matriz B

Teorema 2.50. *Seja A uma matriz invertível, o sistema $AX = B$ tem solução $S = [s_i]$, onde*

$$s_i = \frac{\det(A^J)}{\det(A)}.$$

Demonstração.

Como $A \cdot S = B$ então

$\left(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\right) \cdot A \cdot S = \left(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\right) \cdot B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot S = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) \cdot B \Rightarrow$ $S = [s_i] = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) \cdot B$.

Denotando por $[s'_i] = \operatorname{adj}(A) \cdot B$, então $\det(A) \cdot s_i = s'_i = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj} b_{k1}$, que é o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_{11} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_{21} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{j(j-1)} & b_{j1} & a_{j(j+1)} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_{n1} & a_{j(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^J.$$

Logo,

$$\det(A) \cdot s_i = \det(A^J) \Rightarrow s_i = \frac{\det(A^J)}{\det(A)}.$$

$\square$

Capítulo 3

Transformações Lineares

3.1 Definições e propriedades

Definição 3.1. *Dados dois espaços vetoriais V e W, a função $T : V \to W$ é chamada de transformação linear, sempre que, dados dados os vetores $u, v \in V$ e o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$*

(i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

(ii) $T(\lambda v) = \lambda T(v)$

Chamamos o conjunto V de domínio de T e W de contradomínio de T. Além disso, definimos subconjunto de W formado por todas as correspondências dos elementos de V através da transformação linear T, $T(V)$, como a imagem de T, e denotaremos por $Im(T)$.

Da **Definição 3.1, (ii)**, se T é uma transformação linear, então $T(\vec{0}) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0$, isto é, uma transformação linear sempre leva o vetor nulo em outro vetor nulo, mas podem existir no domínio V elementos não nulos tais que $T(v) = 0$. Ao subconjunto de V, cujos elementos correspondem ao vetor nulo em W pela transformação linear T, damos o nome de Núcleo de T e denotamos por $Ker(T)$

Podemos ainda verificar que uma transformação linear preserva as operações dos espaços vetoriais. Através das duas condições acima, observa-se, equivalentemente, que uma função é uma transformação linear se, e somente se, dados n vetores, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, e n escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \in \mathbb{R}$,

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_1 T(v_2) + \cdots + \lambda_1 T(v_n). \tag{3.1}$$

Proposição 3.2. *Sejam $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base do espaço vetorial V e $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vetores do espaço W, existe uma única transformação $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i, i \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração. Seja $v \in V$ existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$. Logo, da igualdade (3.1), $T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \cdots + \lambda_n T(v_n)$.

Existência:

Dada a função $T(v) = T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots, \lambda_n w_n$, com $w_i \in W$, vamos mostrar que tal função é uma transformação linear. De fato, tomando o vetor $u = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \cdots + \delta_n v_n$, temos que

$$\begin{aligned}
u + v &= \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \cdots + \delta_n v_n + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n \\
&= (\delta_1 + \lambda_1) v_1 + (\delta_2 + \lambda_2) v_2 + \cdots + (\delta_n + \lambda_n) v_n \\
\Rightarrow T(u + v) &= T((\delta_1 + \lambda_1) v_1 + (\delta_2 + \lambda_2) v_2 + \cdots + (\delta_n + \lambda_n) v_n) \\
&= (\delta_1 + \lambda_1) w_1 + (\delta_2 + \lambda_2) w_2 + \cdots + (\delta_n + \lambda_n) w_n \\
&= \delta_1 w_1 + \lambda_1 w_1 + \delta_2 w_2 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \delta_n w_n + \lambda_n w_n = T(u) + T(w)
\end{aligned}$$

Além disso,

$T(\varepsilon v) = T(\varepsilon \delta_1 v_1 + \varepsilon \delta_2 v_2 + \cdots + \varepsilon \delta_n v_n)$
$= \varepsilon \delta_1 w_1 + \varepsilon \delta_2 w_2 + \cdots + \varepsilon \delta_n w_n = \varepsilon(\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2 + \cdots + \delta_n w_n) = \varepsilon T(v).$

Portanto, como $v_i = 0v_1 + 0v_2 + ... + v_i + \cdots + 0v_n$, então

$$T(v_i) = T(0v_1 + 0v_2 + ... + v_i + \cdots + 0v_n) = 0w_1 + 0w_2 + \cdots + w_i + \cdots + 0w_n = w_i$$

Unicidade

Seja S, uma transformação linear tal que $S(v_i) = w_i$, então, pela linearidade de S,
$S(v) = \lambda_1 S(v_1) + \lambda_2 S(v_2) + \cdots + \lambda_n S(v_n) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 S w_2 + \cdots + \lambda_n w_n = T(v)$ □

Proposição 3.3. *Dada a função $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, então T será uma transformação linear se, e somente se, para $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$ existirem números reais a_{ij}, com $i, j \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, de modo que*

$$T(v) = (a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n + a_{21}x_1 + \cdots a_{2n}x_n + \cdots + a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n)$$

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, então

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

Logo,

$$T(v) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \cdots + x_n T(e_n)$$

Pondo

$$T(e_i) = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})$$

temos que

$$T(v) = (a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n + a_{21}x_1 + \cdots a_{2n}x_n + \cdots + a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n)$$

□

Esta proposição nos motiva a estudar de que forma as matrizes influenciam nas transformações lineares, o que veremos na próxima seção.

3.2 Matriz de uma transformação linear

A igualdade verificada na proposição anterior pode ser representada através de multiplicação de matrizes, se considerarmos os vetores v e $T(v) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, onde $y_i = a_{i1}x_1 + \cdots a_{in}x_n$ como matrizes-coluna e os vetores da imagem criada da base canônica pela transformação T dispostos nas colunas da matria de ordem $m \times n$, conforma vemos abaixo:

$$T(v) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é a matriz da transformação linear.

Isso é muito importante para nosso estudo, uma vez que para executarmos transformações geométricas nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, podemos recorrer às correspondentes bases canônicas, tornando o trabalho mais facilitado.

A utilização de matrizes na execução de transformações geométricas é um facilitador na manipulação computacional das coordenadas de um determinado objeto desse espaço. Definiremos no próximo capítulo as principais transformações geométricas nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Generalizando esse fato, dadas duas bases: $\alpha = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ do espaço V e $\beta = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ do espaço W, seja a transformação $T : V \to W$, então

$$T(v) = T(k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2) + \cdots + k_nT(v_n).$$

Como β é uma base do contradomínio de T, então existem escalares a_{ij} tais que

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}w_j,$$

Logo,

$$T(v) = k_1 \sum_{j=1}^{m} a_{j1}w_j + k_2 \sum_{j=1}^{m} a_{j2}w_j + \cdots + k_n \sum_{j=1}^{m} a_{jn}w_j = \sum_{i=1}^{n} k_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}w_j \ ,$$

equivalente a

$$\begin{aligned}
T(v) &= k_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots + k_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m) \\
&= (k_1a_{11} + k_2a_{12} + k_na_{1n})w_1 + \cdots + (k_1a_{m1} + k_2a_{m2} + \cdots + k_na_{mn})w_m \\
&= [w_1 \;\; w_2 \;\; \cdots \;\; w_m] \cdot \begin{bmatrix} k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n} \\ k_1a_{21} + k_2a_{22} + \cdots + k_na_{2n} \\ \vdots \\ k_1a_{m1} + k_2a_{m2} + \cdots + k_na_{mn} \end{bmatrix} \\
&= [w_1 \;\; w_2 \;\; \cdots \;\; w_m] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[T(v)]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Tal equação será denotado, nesta ordem, por

$$[T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta \cdot [v]_\alpha, \tag{3.3}$$

onde $[T]_\alpha^\beta$ é a matriz de ordem $(m \times n)$ da transformação T nas bases α e β e $[v]_\alpha$ é a matriz $(n \times 1)$ dos escalares de v representado na base α.

É, portanto, de fácil verificação que a matriz $[T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta \cdot [v]_\alpha$, é a matriz das coordenadas do vetor $T(v)$ na base β. Também notamos que a i-ésima coluna da matriz $[T]_\alpha^\beta$ representa as coordenadas do vetor $T(v_i)$ na base β.

Quando uma transformação linear T tiver como domínio e contra-domínio um mesmo espaço V, a chamaremos de operador linear em V.

Exemplo 3.4. *Chamamos de operador identidade em V a aplicação $I_V : V \to V$, tal que dado $v \in V$, temos que $I_V(v) = v$. Assim, se tal operador ocorre da base α para α, não é difícil verificar que sua matriz $[I_V]_\alpha^\alpha$ é a* ***matriz identidade****.*

Exemplo 3.5. *Seja o vetor v o qual foi transformado, primeiro pela operação T_1 e depois pela operação T_2, no vetor w, operações estas na mesma base α, então $w = [w]_\alpha = [T_2]_\alpha^\alpha \cdot ([T_1]_\alpha^\alpha \cdot [v]_\alpha)$. Assim, pela associatividade do produto de matrizes, dizemos que a matriz $[B]_\alpha^\alpha = [T_2]_\alpha^\alpha \cdot [T_1]_\alpha^\alpha$ é a matriz do operador correspondente à composição $T_2 \circ T_1$. Como pudemos ver, o produto das matrizes numa composição de operadores ocorre na ordem inversa no que diz respeito à ordem em que estes operadores são, de fato, aplicados.*

3.3 Autovalores e Autovetores

Definição 3.6. *Dados um espaço V no corpo $\mathbb{K}$, um operador linear $T : V \to V$ e um vetor não nulo $v \in V$, se $T(v) = kv$, $k \in \mathbb{K}$, chamamos v de* ***autovetor*** *de T associado ao* ***autovalor*** *k.*

Exemplo 3.7. *Dado o operador* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *cuja matriz é*

$$[T]_\varepsilon^\varepsilon = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

se ele possui um autovetor, então temos

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

o qual ocorre se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 3-k & 5 & -5 \\ -1 & 3-k & 2 \\ 1 & -2 & 3-k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ onde denotaremos por } [T']_\varepsilon^\varepsilon \cdot [v]_\varepsilon = [\vec{0}]$$

Observe que se $[T']_\varepsilon^\varepsilon$ *for invertível teremos*

$$[T'^{-1}]_\varepsilon^\varepsilon \cdot [T']_\varepsilon^\varepsilon \cdot [v]_\varepsilon = [\vec{0}] \Rightarrow [v]_\varepsilon = [\vec{0}],$$

porém $[v]_\varepsilon$ *não pode ser nulo. Pelo* **Teorema 2.42**, $[T']_\varepsilon^\varepsilon$ *não ser invertível é o mesmo que afirmar que* $\det([T']_\varepsilon^\varepsilon) = 0$. *Então o operador* T *terá um autovetor relativo ao autovalor* k *se, e somente se,*

$$\det([T']_\varepsilon^\varepsilon) = (3-k)^3 + 14(3-k) = 0 \Leftrightarrow [(3-k)^2 + 14](3-k) = 0.$$

Portanto, $k = 3$ *para o qual temos como autovetores os vetores não nulos do subespaço* $t(2,1,1)$, $t \in \mathbb{R}$

3.4 Produto Interno

Do ponto de vista geométrico de um espaço vetorial V, é interessante definirmos uma maneira de medirmos distâncias, ângulos, etc, ou seja, uma métrica. Para tornar isto possível, definimos o *produto interno* $\langle u, v\rangle$, com $u, v \in V$. Um produto interno deve satisfazer os seguintes axiomas:

(i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

(ii) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$;

(iii) $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$, $k \in \mathbb{R}$;

(iv) $\langle v, v\rangle \geq 0$ onde a igualdade ocorre se, e somente se, $v = 0$

Um produto interno interessante para nosso estudo é o *produto escalar* ou *produto interno usual* $\langle u, v\rangle$ onde, sendo $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ e $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$,

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

.

Definição 3.8. *Seja V um espaço com produto interno, definimos a* **norma** *ou* **comprimento** *do vetor u o número real $\sqrt{\langle u, u\rangle}$ denotado por $\|u\|$.*

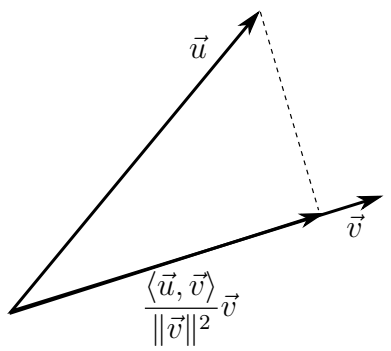
Se $\|u\| = 1$ dizemos que u é um *vetor unitário.*

Definição 3.9. *Dados os vetores u e v pertencentes ao espaço vetorial V com produto interno, dizemos que a* **distância** *entre os vetores u e v, denotada por* $\text{dist}(u, v)$*, é igual à norma de $u - v$, ou seja,*

$$\text{dist}(u, v) = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}.$$

Do ponto de vista geométrico do espaço $\mathbb{R}^3$, o produto escalar $\langle u, v\rangle$ pode ser interpretado como o numero real k que está relacionado com a $proj_v u$ que é a projeção ortogonal do vetor u no vetor v, de modo que

$$proj_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v$$



Também, usando a lei dos cossenos, o produto escalar se relaciona com o ângulo θ formado entre vetores u e u através da expressão $\langle u, v\rangle = \cos\theta \|u\| \|v\|$

3.5 Produto Vetorial

Sejam os vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, definimos o produto vetorial

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Podemos também calcular o produto vetorial através do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Assim, o produto vetorial é *alternado*, daí vem uma propriedade importante desta operação, a *anticomutatividade*, isto é,

$$u \times v = -(v \times u).$$

Ainda usando as propriedades do determinante,

$$(ku) \times v = k(u \times v)$$

e

$$(u + v) \times w = u \times w + v \times w$$

3.5.1 Interpretação Geométrica

Proposição 3.10. *Dados dois vetores não nulos $u, vecv \in \mathbb{R}^3$, $u \times v$ é perpendicular ao plano gerado por u e v*

Demonstração. Com efeito, seja u e v L.I.,

$$\begin{aligned}
\langle u \times v, k_1 u + k_2 v\rangle &= \langle u \times v, k_1 u\rangle + \langle u \times v, k_2 v\rangle \\
&= k_1 \langle u \times v, u\rangle + k_2 \langle u \times v, v\rangle \\
&= k_1 \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \cdot k_2 \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Como u e v não são nulos, seja θ o ângulo formado pelos vetores $u \times v$ e $k_1 u + k_2 v$, então $\cos\theta = 0$, o que mostra que $u \times v \perp k_1 u + k_2 v$.

Se u e v são L.D., temos que u é da forma ku e qualquer combinação linear de u e v é da forma $k'u$. Verificando pelo ponto de vista do determinante formado, este é igual a 0.

□

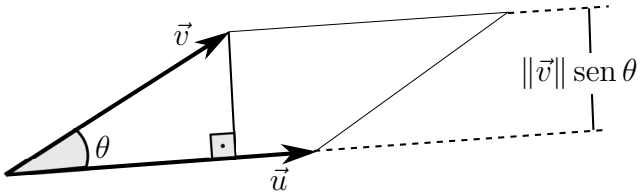
Proposição 3.11. *O vetor $u \times v$ tem norma igual a $\|u\|\|v\| \operatorname{sen}\theta$, onde θ é o ângulo formado pelos vetores u e v*

Demonstração.

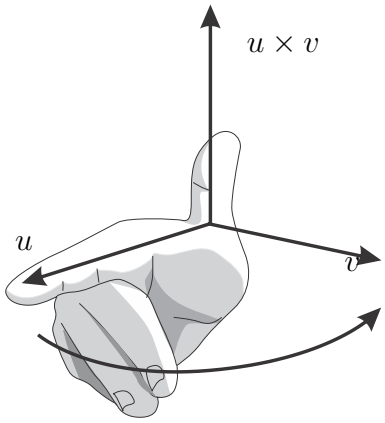
$$\begin{aligned}
\|u \times v\| &= \sqrt{(u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2} \\
&= \sqrt{(u_2v_3)^2 + (u_3v_2)^2 + (u_3v_1)^2 + (u_1v_3)^2 + (u_1v_2)^2 + (u_2v_1)^2 - 2(u_2v_2u_3v_3 + u_1v_1u_3v_3 + u_1v_1u_2v_2)} \\
&= \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - (u_1v_1)^2 - (u_2v_2)^2 - (u_3v_3)^2 - 2(u_2v_2u_3v_3 + u_1v_1u_3v_3 + u_1v_1u_2v_2)} \\
&= \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2} \\
&= \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - \frac{\|u\|^2\|v\|^2\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2\|v\|^2}} \\
&= \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \cos^2\theta} \\
&= \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2(1 - \cos^2\theta)} = \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2(\operatorname{sen}^2\theta)} = \|u\|\|v\| \operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

□

Observação 3.12. *Da Geometria Euclideana temos que $\|u\| = \|u\|\|v\| \operatorname{sen}\theta$ que é igual a área do paralelogramo formado pelos vetores v e u.*



Definição 3.13. *Dado o terno ordenado* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *formado por vetores LI, sendo* Π *o plano determinado pelos vetores* v_1 *e* v_2*, dizemos que tal conjunto é um* terno positivamente ordenado *se satisfaz a regra da mão direita, isto é, se esticarmos os dedos indicador, médio, anelar e mínimo da mão direita na direção do vetor* v_1 *e fecharmos a mão no sentido do vetor* v_2 *o polegar esticado apontará para o subespaço delimitado pelo plano* Π *onde se encontra o vetor* v_3*.*



Observação 3.14. *O sentido de* $u \times v$ *é o mesmo sentido determinado pela regra da mão direita, isto é, o terno* $\{u, v, u \times v\}$ *é positivamente ordenado.*

Capítulo 4

Transformações afins

Antes de iniciarmos nosso estudo sobre Transformações Afins, vamos definir a translação de vetores.

Definição 4.1. *Dados os vetores $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ambos pertencentes ao espaço $\mathcal{V}$, definimos a translação do vetor u através do vetor w a transformação $S_w : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ tal que*

$$S_w(u) = u + w = (x_1 + z_1, x_2 + z_2, \ldots, x_n + y_n)$$

As transformações lineares do espaço euclidiano não contemplam as translações. Ou seja, dados os vetores $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e $w = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, então

$$S_w(v + u) = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \ldots, +x_n + y_n + z_n) \neq S_w(v) + S_w(u)$$

mostrando que S não é um operador linear. Além disso, o espaço euclidiano não se tem uma distinção clara entre vetores e pontos, bem como as operações entre pontos e vetores. Neste capítulo, para não causar confusão, representaremos pontos com letras do alfabeto em negrito, escalares com letras do alfabeto em itálico e vetores com letras do alfabeto companhada na parte superior por uma seta, por exemplo, o ponto $\mathbf{p}$, o escalar k e o vetor $\vec{v}$.

Para que não haja confusão, a partir de agora denotaremos um ponto $\mathbf{p}$ usando uma letra minúscula do alfabeto latino em negrito, um vetor $\vec{v}$ com uma letra minúscula em itálico acompanhada de uma seta na parte superior e um escalar k com uma letra em itálico.

4.1 Espaço Afim

Definição 4.2. *Seja $\mathcal{P}$ o espaço dos pontos e $\mathcal{V}$ o espaço dos vetores, se $\mathbf{p}$ é um elemento de $\mathcal{P}$ e $\vec{v}$ um elemento de $\mathcal{V}$, chamamos de espaço afim o par $\mathcal{A} = (\mathcal{V},\mathcal{P})$, onde existe um único ponto $\mathbf{q} \in \mathcal{P}$ tal que valha a operação $\mathbf{p} + \vec{v} = \mathbf{q}$.*

Como $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial, então são admitidas as combinações lineares entre vetores,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \vec{v}_i,$$

relações de dependência e independência linear, bem como as transformações lineares $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, onde

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i T(\vec{v}_i)$$

Trataremos aqui os casos onde $\mathcal{P} = \mathcal{V} = \mathbb{R}^n$.

Da adição entre um ponto e um vetor definiremos uma outra operação, a subtração entre os pontos $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$, onde $\mathbf{p} + \vec{v} = \mathbf{q} \Leftrightarrow \mathbf{q} - \mathbf{p} = \vec{v}$

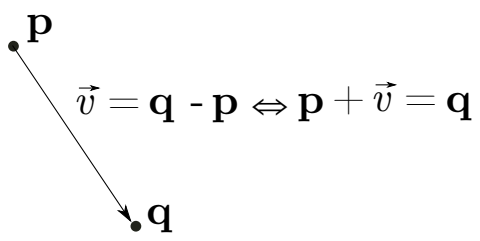


Figura 4.1: Subtração/adição entre os pontos $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$

Veja que a operação de subtração entre dois pontos ocorre de maneira semelhante à subtração entre dois vetores. Note que tal operação pode ser generalizada da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{p_i} \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i = 0$$

De fato, seja

$$k_1 \mathbf{p_1} + \cdots + k_{(i-1)} \mathbf{p_{(i-1)}} + k_i \mathbf{p_i} + k_{(i+1)} \mathbf{p_{(i+1)}} + \cdots + k_n \mathbf{p_n}, \tag{4.1}$$

$$\text{com } k_1 + \cdots + k_{(i-1)} + k_i + k_{(i+1)} + \cdots + k_n = 0,$$

tomando, sem perda de generalidade, k_i, temos que $k_i = k_1 - \cdots - k_{(i-1)} - k_{(i+1)} - \cdots - k_i$. Substituindo em (4.1) temos

$$= k_1 \mathbf{p_1} - k_1 \mathbf{p_i} + \cdots + k_{(i-1)} \mathbf{p_{(i-1)}} - k_{(i-1)} \mathbf{p_i} + k_{(i+1)} \mathbf{p_i} - k_{(i+1)} \mathbf{p_i} + \cdots + k_n \mathbf{p_n} - k_n \mathbf{p_i}$$

$$= k_1 (\mathbf{p_1} - \mathbf{p_i}) + \cdots + k_{(i-1)} (\mathbf{p_{(i-1)}} - \mathbf{p_i}) + \cdots + k_{(i+1)} (\mathbf{p_{(i+1)}} - \mathbf{p_i}) \cdots + k_n (\mathbf{p_n} - \mathbf{p_i})$$

$$= k_1 \vec{v}_1 + \cdots + k_{(i-1)} \vec{v}_{(i-1)} + \cdots + k_{(i+1)} \vec{v}_{(i+1)} \cdots + k_n \vec{v}_n = \vec{v} \in \mathcal{V}$$

Definição 4.3. *Definimos a operação de interpolação de pontos como*

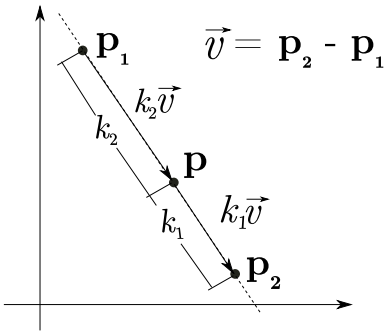


Figura 4.2: Interpolação entre os pontos $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$

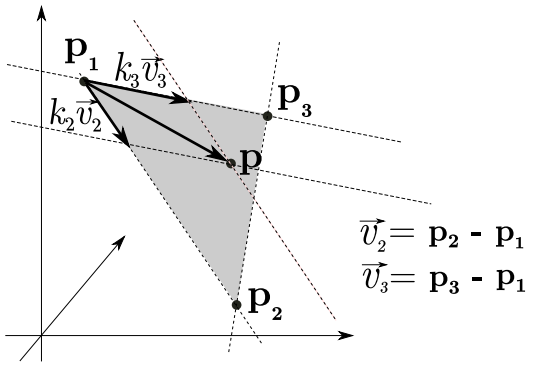


Figura 4.3: Interpolação entre os pontos $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$ e $\mathbf{p_3}$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p_1} + k_2(\mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}) = (1 - k_2)\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2} \ \textit{com}\ k_2 \in [0; 1]$$

ou ainda, dado k_1*, tal que* $k_1 + k_2 = 1$ *e* $k_1, k_2 \in [0; 1]$

$$\mathbf{p} = k_1\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2}.$$

Vale frisar que qualquer ponto p da reta suporte do vetor $\vec{v}$ pode ser representado pela expressão $\mathbf{p} = k_1\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2}$ com $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, tal que $k_1 + k_2 = 1$, obtendo assim a equação paramétrica dessa reta.

De maneira análoga, dados três pontos no espaço, $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}$, não colineares, estes determina o plano α onde qualquer ponto $\mathbf{p} \in \alpha$ pode ser representado pela expressão $\mathbf{p} = k_1\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2} + k_3\mathbf{p_3}$ com $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ e $k_1 + k_2 + k_3 = 1$, sendo que $k_1, k_2, k_3 \in [0, 1]$, se, e somente se, $\mathbf{p}$ pertence à região triangular do plano α que tem como vértices os pontos $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$ e $\mathbf{p_3}$. O mesmo ocorre com quatro pontos não coplanares, onde $\mathbf{p} = k_1\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2} + k_3\mathbf{p_3} + k_4\mathbf{p_4}$, com $k_1 + \cdots + k_4 = 1$, $k_1, \cdots, k_4 \in [0, 1]$ se, e somente se, $\mathbf{p}$ pertence ao tetraedro determinado por tais pontos. Veja, por exemplo, na **Figura 4.3** que

$$\mathbf{p} = \mathbf{p_1} + k_3\vec{v}_3 + k_2\vec{v}_2 = \mathbf{p_1} + k_3(\mathbf{p_3} - \mathbf{p_1}) + k_2(\mathbf{p_2} - p_1) = (1 - k_3 - k_2)\mathbf{p_1} + k_3\mathbf{p_3} + k_2\mathbf{p_2}.$$

Se $k_1 + k_2 + k_3 = 1$, então

$$\mathbf{p} = k_1\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2} + k_3\mathbf{p_3}$$

Chamamos, então, de combinação afim de pontos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{p_i} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i = 1$$

onde a interpolação de pontos é um caso particular dessa combinação que ocorre quando $k_i \in [0; 1]$.

4.2 Coordenadas afins

Definição 4.4. *Dado um espaço afim $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{V})$, seja $\mathbf{p_0} \in \mathcal{P}$ e $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ uma base de $\mathcal{V}$, chamamos de referencial de $\mathcal{A}$ a lista $F = (\mathbf{p_0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$.*

Esse referencial determina um sistema de coordenadas com origem no ponto $\mathbf{p_0}$, isto é, seja $\mathbf{p}$ um ponto no espaço, existe um único vetor $\vec{v} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n \in \mathcal{V}$, tal que $\mathbf{p} = \mathbf{p_0} + k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n$. Os escalares $k_1, k_2, \cdots, k_n, 1$ são chamados de coordenadas afins do ponto $\mathbf{p}$ no referencial F.

Na geometria dos espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ o mesmo é inserido no espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ de modo que, dadas as coordenadas euclidianas $k_1, k_2, \cdots, k_n, k_{n+1}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, então $\mathbb{R}^n$ se coloca como o hiperplano $k_{n+1} = 1$. Este fato, elimina as propriedades gozadas pela origem do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

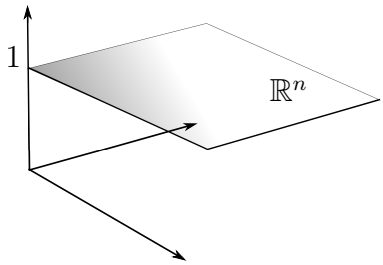


Figura 4.4: Hiperplano afim do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$

4.3 Transformações afins

Definição 4.5. *Seja $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{V}_1)$ e $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{V}_2)$ dois espaços afins, a função $T : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ é chamada de transformação afim se, e só se, valem as seguintes condições:*

(i) T transforma vetores em vetores, $T(\vec{v}) = \vec{v'}$, e além disso, a restrição $T|\mathcal{V} : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ é uma transformação linear;

(ii) T transforma pontos em pontos, $T(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$, e ainda, $T(\mathbf{p} + k\vec{v}) = T(\mathbf{p}) + kT(\vec{v})$

Ou de maneira geral,

$$Se \sum_{i=1}^{n} k_i = 1 \Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{p_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i T(\mathbf{p_i})$$

preservando a combinação afim de pontos.

Proposição 4.6. *Uma transformação afim $T : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ transforma uma reta em outra reta.*

Demonstração. De fato, seja r a reta dada pela equação paramétrica $r(k) = (1-k)\mathbf{p_1} + k\mathbf{p_2}$, temos

$$T(r(k)) = T((1-k)\mathbf{p_1} + k\mathbf{p_2}) = T((1-k)\mathbf{p_1}) + T(k\mathbf{p_2}) = (1-k)T(\mathbf{p_1}) + kT(\mathbf{p_2}) = r'$$

□

Proposição 4.7. *Dadas duas retas r e s, tais que $r \parallel s$ então, se T é uma transformação afim, $T(r) \parallel T(s)$.*

Demonstração. Sejam r e r as retas dadas pelas equações paramétricas $r(k_1) = (1 - k_1)\mathbf{p_1} + k_1\mathbf{p_2}$ e $s(k_2) = (1-k_2)\mathbf{p_3} + k_2\mathbf{p_4}$, respectivamente, e ainda os vetores $\vec{v}_1 = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}$ e $\vec{v}_2 = \mathbf{p_4} - \mathbf{p_3}$ temos

$$r' = T(r(k_1)) = T((1-k_1)\mathbf{p_1} + k_1\mathbf{p_2}) = T(\mathbf{p_1} + k_1(\mathbf{p_2} - \mathbf{p_1})) = T(\mathbf{p_1} + k_1(\vec{v}_1)),$$

que pelo item (ii) da **Definição 4.5** equivale a

$$r' = T(\mathbf{p_1}) + k_1 T(\vec{v}_1).$$

Por outro lado,

$$s' = T(s(k_2)) = T((1-k_2)\mathbf{p_3} + k_2\mathbf{p_4}) = T(\mathbf{p_3} + k_2(\mathbf{p_4} - \mathbf{p_3})) = T(\mathbf{p_3} + k_2(\vec{v}_2)),$$

que equivale a

$$s' = T(\mathbf{p_3}) + k_1 T(\vec{v_2}).$$

Precisamos mostrar que $T(\vec{v}_2) = cT(\vec{v}_1)$, isto é $s' \parallel r'$. Com efeito, como as retas r e s são paralelas, existe um número real k_3 tal que $\vec{v}_2 = k_3\vec{v}_1$. Daí,

$$T(\vec{v}_2) = T(k_3\vec{v}_1)$$

que, pelo item (i) da **Definição 4.5**, equivale a

$$T(\vec{v}_2) = k_3 T(\vec{v}_1),$$

mostrando que $r' \parallel s'$. □

Observação 4.8. *Uma translação também se aplica aos pontos do espaço afim aqui definido de modo que dado um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ e um vetor $\vec{v}_0 \in \mathcal{V}$, uma translação T de $\mathbf{p}$ através de $\vec{v}_0$ é a transformação onde $T(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \vec{v}_0$.*

Proposição 4.9. *Se a função $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $T(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}) + \vec{v}_0$, onde S é uma transformação linear e $\vec{v}_0$ é um vetor fixado, é uma transformação do $\mathbb{R}^n$ (ou seja, uma transformação linear seguida de uma translação), então tal função é uma transformação afim.*

Demonstração. Dada uma combinação afim de pontos do espaço $\mathbb{R}^n$, $k_1\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2} + \cdots + k_n\mathbf{p_n}$, com $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 1$, então

$$T(k_1\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2} + \cdots + k_n\mathbf{p_n}) = S(k_1\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2} + \cdots + k_n\mathbf{p_n}) + \vec{v}_0,$$

que pela linearidade de S equivale a

$$\begin{aligned} T(k_1\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2} + \cdots + k_n\mathbf{p_n}) &= k_1 S(\mathbf{p_1}) + k_2 S(\mathbf{p_2}) + \cdots + k_n S(\mathbf{p_n}) + \vec{v}_0 \\ &= k_1 S(\mathbf{p_1}) + k_2 S(\mathbf{p_2}) + \cdots + k_n S(\mathbf{p_n}) + (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)\vec{v}_0 \\ &= k_1(S(\mathbf{p_1}) + \vec{v}_0) + k_2(S(\mathbf{p_2}) + \vec{v}_0) + \cdots + k_n(S(\mathbf{p_n}) + \vec{v}_0) \\ &= k_1 T(\mathbf{p_1}) + k_2 T(\mathbf{p_2}) + \cdots + k_n T(\mathbf{p_n}). \end{aligned}$$

Logo, T preserva uma combinação afim de pontos e, portanto é uma transformação afim.

$\square$

Observe a afirmação, de que toda transformação afim é uma translação, também é verdadeira. Com efeito, seja $\mathbf{p}, \mathbf{0} \in \mathcal{P}$, com $\mathbf{0}$ na origem do espaço $\mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{p}) = T(\mathbf{0}+\vec{p}) = T(\mathbf{0}) + T(\vec{p})$, tomando $T(\mathbf{0}) = \mathbf{o}$ e $T(\vec{p}) = \vec{v}$ temos a veracidade do que propomos.

4.3.1 Matriz de uma transformação afim

Seja $\mathbf{p}$, e $\mathbf{q}$ pontos, e $F = (\mathbf{p_0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ e $G = (\mathbf{q_0}, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \cdots, \vec{w}_n)$ referenciais do espaço afim $\mathbb{R}^n$, tais que $\mathbf{p} = \mathbf{p_0} + k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n$, temos que

$$T(\mathbf{p}) = T(\mathbf{p_0}) + T(k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n),$$

que pela linearidade de T nos vetores de $\mathcal{V}$ equivale a

$$k_1T(\vec{v}_1) + k_2T(\vec{v}_2) + \cdots + k_nT(\vec{v}_n) + T(\mathbf{p_0}).$$

$T(\vec{v}_j)$ e $T(\mathbf{p_0})$ podem ser representados, respectivamente, como

$$(a_{1j}\vec{w}_1 + a_{2j}\vec{w}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{w}_n) \text{ e } (a_{1(n+1)}\vec{w}_1 + a_{2(n+1)}\vec{w}_2 + \cdots + a_{n(n+1)}\vec{w}_n + \mathbf{q_0}).$$

Então,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{p}) &= k_1(a_{11}\vec{w}_1 + \cdots + a_{n1}\vec{w}_n) + \cdots + k_n(a_{1n}\vec{w}_1 + \cdots + a_{nn}\vec{w}_n) + (a_{1(n+1)}\vec{w}_1 + \cdots + a_{n(n+1)}\vec{w}_n) + \mathbf{q_0} \\ &= (a_{11}k_1 + \cdots + a_{1n}k_n + a_{1(n+1)})\vec{w}_1 + \cdots + (a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nn}k_n + a_{n(n+1)})\vec{w}_n + \mathbf{q_0} \end{aligned}$$

Que podemos representar pela multiplicação das matrizes

$$[\vec{w}_1 \quad \vec{w}_2 \quad \cdots \quad \vec{w}_n \quad \mathbf{q_0}] \cdot \begin{bmatrix} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n + a_{1(n+1)} \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n + a_{2(n+1)} \\ \vdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nn}k_n + a_{n(n+1)} \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou ainda,

$$[\vec{w}_1 \quad \vec{w}_2 \quad \cdots \quad \vec{w}_n \quad \mathbf{q_0}] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1(n+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n(n+1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tal equação será denotado, nesta ordem, por $T(\mathbf{p})_G^F = [G] \cdot [T]_G^F \cdot [k]_F$, onde $T(\mathbf{p})_G^F$ é a transformação afim do ponto $\mathbf{p}$ do referencial F do espaço afim $\mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{q}$ do referencial G de $\mathbb{R}^n$; $[G]$ é a matriz de ordem $(1 \times (n+1))$ que representa o referencial G; $[T]_G^F$ é a matriz de ordem $((n+1) \times (n+1))$ da transformação afim T nos referenciais F e G e $[k]_F$ é a matriz $((n+1) \times 1)$ das coordenadas de $\mathbf{p}$ representado no referencial F. Portanto, a matriz $[T]_G^F \cdot [k]_F$, é a matriz das coordenadas do ponto $T(\mathbf{p})$ no referencial G.

Capítulo 5

Transformações geométricas

Ao longo deste capítulo, chamaremos de *objeto geométrico* qualquer conjunto de pontos do espaço tridimensional.

Dados os objetos geométricos $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ do espaço, a função bijetiva $T : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é chamada de *transformação geométrica.*

Definição 5.1. *Uma transformação geométrica é uma isometria se, e somente se,*

(i) dados dois pontos de $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{g}_1$ e $\boldsymbol{g}_2$, e dois pontos de $\mathcal{H}$, $\boldsymbol{h}_1$ e $\boldsymbol{h}_2$ tais que $T(\boldsymbol{g}_1) = \boldsymbol{h}_1$ e $T(\boldsymbol{g}_2) = \boldsymbol{h}_2$, então dist($\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2$) = dist($\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2$)

(ii) dados três pontos de $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$ e $\boldsymbol{g}_3$, e três pontos de $\mathcal{H}$, $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ e $\boldsymbol{h}_3$, tais que $T(\boldsymbol{g}_1) = \boldsymbol{h}_1$, $T(\boldsymbol{g}_2) = \boldsymbol{h}_2$ e $T(\boldsymbol{g}_3) = \boldsymbol{h}_3$, então a medida do ângulo formado pelos pontos de $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$ e $\boldsymbol{g}_3$, ser igual à medida do ângulo formado pelos pontos $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ e $\boldsymbol{h}_3$, nesta ordem.

Em outras palavras, uma isometria não altera o tamanho do segmento formado por quaisquer par de pontos do objeto original $\mathcal{G}$, nem a medida dos ângulos obtidos de tal objeto. O novo objeto, $\mathcal{H}$, é uma copia da figura $\mathcal{G}$ que sofreu uma *translação*, uma *rotação* ou uma *reflexão.*

5.1 Translação

Uma das transformações geométricas isométricas é a *translação.* A translação do ponto $\mathbf{p}$ através do vetor $\vec{v}$, como vimos na **Proposição 4.9**, é uma transformação afim. Consiste no ponto $\mathbf{q}$ obtido pela soma do ponto $\mathbf{p}$ com o vetor $\vec{v}$. Em outras palavras, um objeto transladado é aquela cujos pontos sofreram um deslocamento na mesma direção e no mesmo sentido de $\vec{v}$ e de tamanho igual a norma de $\vec{v}$.

Dado um ponto do hiperplano afim $z = 1$, $\mathbf{p} = (x_1, \cdots, x_n, 1)$, um vetor $\vec{v} = (t_1, \cdots, t_n, 0)$ e T uma translação do ponto $\mathbf{p}$ pelo vetor $\vec{v}$, então temos que $\mathbf{q} = T(\mathbf{p}) = (x_1 + t_1, \cdots, x_n + t_n, 1)$. Podemos representar essa transformação através do produto abaixo:

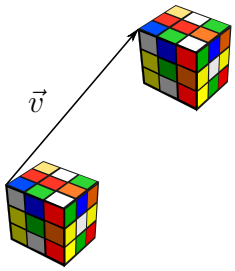


Figura 5.1: Objeto Transladadp

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \\ \vdots \\ x_n + t_n \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde

$$A_{(n+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz desta translação.

5.1.1 Mudança de Referencial

A geometria afim juntamente com as translações tem importância fundamental nas demais transformações geométricas, pois a partir dela podemos estabelecer referenciais diferentes para aplicarmos quaisquer outras transformações. Mais precisamente,dada a base canônica $\varepsilon = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ e um ponto O, sabemos da geometria afim que estes definem o referencial $\mathcal{E} = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots \vec{e_n}\}$. Assim, dado um referencial $\mathcal{F} = \{P, \vec{f_1}, \vec{f_2}, \cdots \vec{f_n}\}$, composto pelo ponto P e a base $\delta = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f_n}\}$, podemos executar uma transformação geométrica levando em consideração o referencial $\mathcal{F}$, ou seja, tratando todos os pontos do objeto a ser transformado de maneira que suas coordenadas sejam escritas através da combinação linear dos vetores da base δ a partir do ponto P. Para isso faz-se necessário

(i) aplicar uma transformação linear L que execute a mudança da base ε para δ e em seguida

(ii) aplicar a translação T levando a origem do referencial do ponto O para o ponto P.

Observação 5.2. *Adiante, na* **Seção 5.4**, *trataremos de cisalhamentos no espaço* $\mathbb{R}^3$. *Um cisalhamento no espaço* $\mathbb{R}^3$ *pode estar relacionado a uma translação no plano* $z = k$ *deste espaço, bem como a uma transformação projetiva do espaço* $\mathbb{RP}^2$. *Pela definição de cisalhamento e translação, essa relação pode ser generalizada para espaços de dimensão finita.*

5.2 Rotação no $\mathbb{R}^3$

Para executarmos uma rotação no $\mathbb{R}^3$ necessitamos de um eixo e de um ângulo o qual se dará a rotação, conforme veremos no **Teorema 5.5**. Dada uma reta s e um ponto $\mathbf{p} \notin s$, tomando o ponto $\mathbf{o}$ (projeção ortogonal de $\mathbf{p}$ na reta s) a distância de $\mathbf{o}$ a $\mathbf{p}$ é chamada de raio r. Uma transformação R é uma *rotação em torno da reta* s se $R(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$, onde $\mathbf{p}'$ tem, em relação à reta s, o mesmo raio que $\mathbf{p}$. O ponto $\mathbf{o}$ é o centro da rotação, a reta s é chamada de eixo de rotação.

5.2.1 Rotação em torno do eixo $\vec{e}_1$

Seja $\mathbf{p} = (x,\ r\cos\alpha,\ r\,\mathrm{sen}\,\alpha, 1)$, e R_{e_1} uma rotação de ângulo β em torno do eixo $\vec{e}_1$, conforme vemos na **Figura 5.2**,

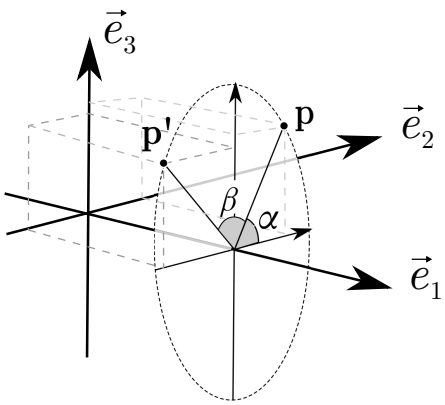


Figura 5.2: Rotação de ângulo β em torno do eixo $\vec{e}_1$.

$$\begin{aligned} R_{e_1}(\mathbf{p}) \;=\; \mathbf{p}' &= (x,\ r\cos(\alpha+\beta),\ r\,\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta), 1) \\ &= (x,\ r\cos\alpha\cos\beta - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta,\ r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, 1) \\ &= [R_{e_1}][\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\mathrm{sen}\,\beta & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}\,\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ r\cos\alpha \\ r\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde $[R_{e_1}]$ é conhecida como matriz de rotação.

Analogamente temos:

$$[R_{e_2}] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \mathrm{sen}\,\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [R_{e_3}] = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\mathrm{sen}\,\beta & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma rotação R_{e_1} é um *operador linear*. De fato, sejam $\mathbf{p} = (x, y, z, 1)$ e $\mathbf{p}' = (x', y', z', 1)$ pontos do espaço afim $\mathcal{A}$ e $k, k' \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
R_{e_1}(k\mathbf{p}+k'\mathbf{p}') &= R_{e_1}(kx+k'x', ky+k'y', kz+k'z', k+k') \\
&= (kx+k'x', (ky+k'y')\cos\beta-(kz+k'z')sin(\beta, (ky+k'y')\operatorname{sen}\beta+(kz+k'z')\cos\beta, k+k') \\
&= (kx, ky\cos\beta - kz\operatorname{sen}\beta, ky\operatorname{sen}\beta + kz\cos\beta) + (k'x', k'y'\cos\beta - k'z'\operatorname{sen}\beta, k'y'\operatorname{sen}\beta + k'z'\cos\beta, k+k') \\
&= k(x, y\cos\beta - z\operatorname{sen}\beta, y\operatorname{sen}\beta + z\cos\beta, 1) + k'(x', y'\cos\beta - z'\operatorname{sen}\beta, y'\operatorname{sen}\beta + z'\cos\beta, 1) \\
&= kR_{e_1}(\mathbf{p}) + k'R_{e_1}(\mathbf{p}')
\end{aligned}
$$

Do mesmo modo, nota-se que R_{e_2} e R_{e_3} também são transformações lineares e, consequentemente, transformações afins.

5.2.2 Coordenadas Esféricas do Espaço

Dada uma esfera de centro na origem do $\mathbb{R}^3$ e raio 1, ou seja, $x^2+y^2+z^2=1$, com (x,y,z) pertencente a essa esfera, que denotaremos por S^2, existe uma parametrização do espaço chamada de *coordenadas esféricas*, onde cada um dos seus pontos podem ser definidos por dois parâmetros:

- Latitude, uma rotação positiva de ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ a partir do ponto $(1,0,0)$ que percorre o plano OXY até o ponto $\mathbf{q} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$;

- Longetude, uma rotação positiva a partir do ponto $\mathbf{q}$ em torno da origem, percorrendo o plano que contem o eixo OZ e o ponto $\mathbf{q}$, rotação esta que perfaz um ângulo $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ até o ponto $\mathbf{p} = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi)$, como podemos ver na **Figura 5.3.**

Observe que nessa parametrização, para $\phi = \frac{\pi}{2}$ ou $\phi = -\frac{\pi}{2}$, o ponto $\mathbf{p}$ será $(0,0,1)$ ou $(0,0,-1)$, respectivamente, qualquer que seja θ, fazendo com que haja infinitos pares (θ, ϕ) cuja coordenada corresponda ao ponto $\mathbf{p}$. Dizemos, então, que neste ponto a parametrização apresenta uma *singularidade*, isto é, um comportamento no qual perdemos uma liberdade de escolha. Para que não haja singularidade no nosso sistema de coordenadas faz-se necessário restringir o domínio de ϕ para o intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ao restringirmos esse domínio, os pontos pertencentes ao eixo OZ não serão representados nessa parametrização.

5.2.3 Ângulos de Euler

Podemos parametrizar uma orientação no espaço através de três rotações em torno dos eixos coordenados. Dados dois sistemas ortonormais positivos distintos, $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, formado pela base canônica do espaço $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, ambos de mesma origem, como na **Figura 5.4**, uma rotação positiva transforma a base $\mathcal{E}$ na base $\mathcal{F}$, nesta ordem, através da sequência de rotações descritas abaixo. Observe que o eixo $\vec{e}\,_i^j, i, j \in \{1,2,3\}$ será a denotação para cada eixo da base $\mathcal{E}$ depois de sofrer a j-ézima rotação:

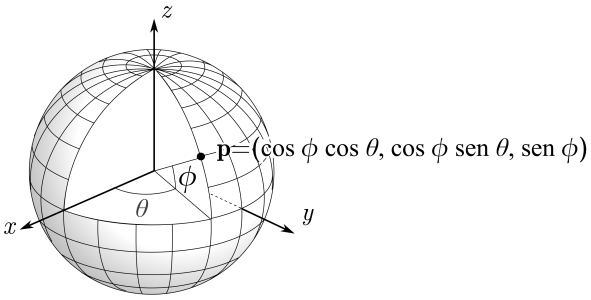


Figura 5.3: Coordenada esférica do ponto **p**.

- R_{e_3}, uma rotação de ângulo ϕ em torno do eixo $\vec{e}_3$, levando o eixo $\vec{e}_1$ até o eixo $\vec{e}_3 \times \vec{f}_3$, o qual chamamos de *eixo nodal*. **Figura 5.5**.
- $R_{e_3 \times f_3}$ de ângulo θ em torno do eixo $\vec{e}_3 \times \vec{f}_3 = \vec{e}\,^1_1$, levando o eixo $\vec{e}_3 = \vec{e}\,^1_3$ até o eixo f_3. **Figura 5.6**.
- R_{f_3} de ângulo ψ em torno do eixo $R_{f_3} = \vec{e}\,^2_3$. Neste estágio, os eixos $\vec{e}\,^2_1$, $\vec{e}\,^2_2$, $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ são coplanares. Esta rotação deve levar o eixo $\vec{e}\,^2_1$ ao eixo $\vec{f}_1$ e o eixo $\vec{e}\,^2_2$ ao eixo $\vec{f}_2$. **Figura 5.7**.

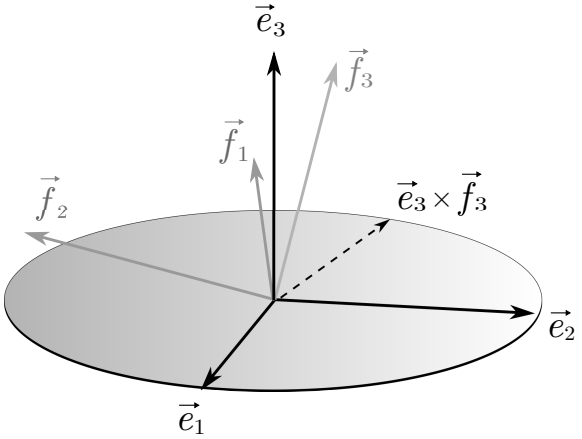


Figura 5.4: Sistemas ortonormais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$

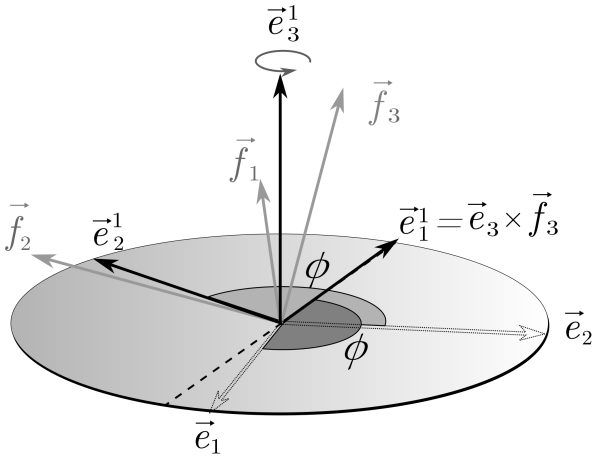


Figura 5.5: R_{e_3}.

Essa mesma orientação pode ser obtida, em vez de usarmos um referencial instantâneo, usarmos o referencial definido pela base $\mathcal{E}$ fazendo, nesta ordem, R_{e_3} de ângulo ψ, R_{e_1} de ângulo θ e R_{e_3} de ângulo ϕ. Os ângulos ϕ, θ e ψ são chamados de *ângulos de Euler*, em homenagem ao matemático suíço *Leonhard Paul Euler* (1707 - 1783).

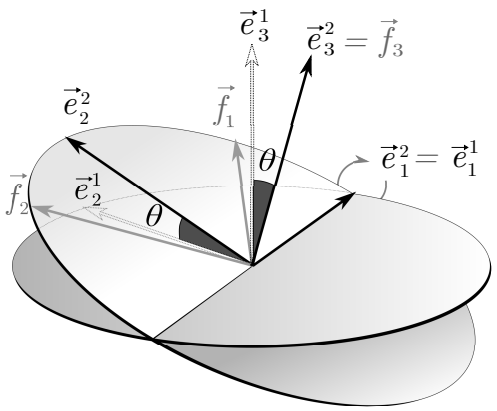


Figura 5.6: $R_{e_3 \times f_3}$. Rotação em torno do eixo nodal.

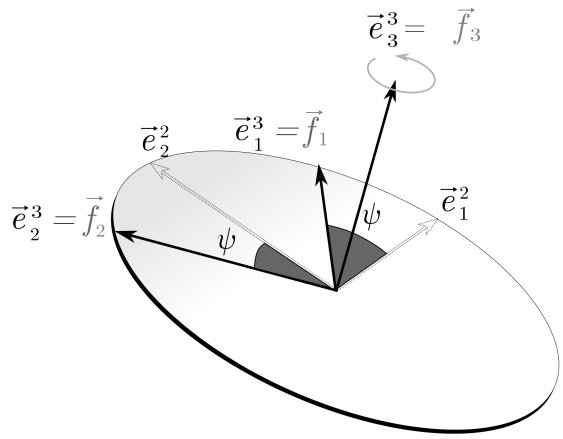


Figura 5.7: R_{f_3}. Rotação em torno do eixo $e_3^3 = f_3$, concluindo a rotação.

Sabemos que a matriz da rotação em torno de um dos eixos relativos à base canônica é uma matriz ortogonal positiva. Sendo assim, como qualquer mudança na orientação de um objeto pode ser executada através de uma sucessão dessas rotações e sabendo que o conjunto das matrizes ortogonais positivas tem estrutura de grupo, concluímos que qualquer orientação é definida por uma matriz ortogonal positiva. Por outro lado, uma matriz ortogonal leva uma base ortonormal positiva em outra base ortonormal positiva, o que no leva a concluir que a aplicação de uma matriz ortogonal produz uma rotação em um objeto do espaço $\mathbb{R}^3$.

Observação 5.3. *A base ortonormal* $\mathcal{E}' = \{(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta, 0), (-\operatorname{sen}\beta, \cos\beta, 0), (0,0,1)\}$, *por exemplo, é obtida da base canônica* $\mathcal{E}$ *através de uma rotação* R_{e_3}. *Observe que os vetores da base* $\mathcal{E}$ *são representados na base* $\mathcal{E}'$ *como*

$$\begin{aligned} &\{(\cos(-\beta), \operatorname{sen}(-\beta), 0), (-\operatorname{sen}(-\beta), \cos(-\beta), 0), (0,0,1)\} \\ =&\{(\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta, 0), (\operatorname{sen}\beta, \cos\beta, 0), (0,0,1)\}. \end{aligned}$$

Concluímos que, sendo $[I_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$ *a matriz de mudança de base de* $\mathcal{E}$ *para* $\mathcal{E}'$, $[I_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} = [R_{e_3}]^t$.

Partindo da base canônica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, ao executarmos o primeiro giro, $R_{e_3}(\phi)$, obtemos um novo sistema de coordenadas o qual chamamos de $\mathcal{E}_1$. Mudando a base de $\mathcal{E}$ para este novo sistema de coordenadas, os elementos de $\mathcal{E}$, na base $\mathcal{E}_1$ podem ser obtidos, através do produto da matriz $R_{e_3}(\phi)^{-1} = R_{e_3}(\phi)^t$ pela matriz formada por cada um dos pontos deste objeto na base de $\mathcal{E}$ dispostos em colunas como abaixo:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{matrix} \right|$$

Agora, aplicando a segunda rotação, de ângulo θ, em torno do vetor e_1^1, obteremos o sistema ortonormal $\mathcal{E}_2$. Mudando agora da base $\mathcal{E}_1$ para a base $\mathcal{E}_2$, como após a primeira

rotação, fazemos o produto da matriz $R_{e_1^1}(\theta)^t$ por cada um dos pontos do objeto que estão na base $\mathcal{E}_1$ na forma de matriz coluna, e assim sucessivamente até a terceira rotação em torno do eixo e_3^2. Com isso, um ponto $\mathbf{p} = \mathbf{o} + xe_1 + ye_2 + ze_3$ na base $\mathcal{E}$, escrito como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{F}$ será obtido conforme abaixo:

$$[\mathbf{p}]_{\mathcal{F}} = R_{e_3}(\psi)^t \cdot R_{e_1^1}(\theta)^t \cdot R_{e_3^2}(\phi)^t \cdot [\mathbf{p}]_{\mathcal{E}} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, se quisermos obter os elementos da base $\mathcal{F}$ escritos na base $\mathcal{E}$, sendo $A^t = R_{e_3}(\psi)^t \cdot R_{e_1}(\theta)^t \cdot R_{e_3}(\phi)^t$, basta fazermos $(A^t)^{-1} \cdot [\mathbf{p}]_{\mathcal{F}}$. Essa expressão, usando a propriedade do produto das transpostas, equivale a $R_{e_3}(\phi) \cdot R_{e_1}(\theta) \cdot R_{e_3}(\psi) \cdot [\mathbf{p}]_{\mathcal{F}}$, ou ainda

$$A[\mathbf{p}]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 & \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix}$$

Logo, podemos calcular as coordenadas dos pontos do novo objeto através da matriz A obtida pelo produto das matrizes de rotação. Essa matriz é chamada de *matriz de Euler* para rotações do tipo (e_3, e_1^2, e_3^3) ou simplesmente ZXZ, confirme abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\psi - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi & -\cos\phi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\cos\psi & \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi & \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi & -\cos\phi\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\theta\cos\psi & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Há também uma parametrização usando ângulos de Euler, porém em torno dos eixos e_1, e_2, e_3 ou XYZ, onde dados dois sistemas, XYZ e $X'Y'Z'$ usamos essas três rotações conforme as **Figuras 5.8**, **5.9**, **5.10** e **5.11**.

Nesse caso, os ângulos de Euler e matriz de Euler correspondentes também são conhecidos como *ângulos de Tait–Bryan* e *matriz de Tait–Bryan* (nomeados através de Peter Guthrie Tait e George Bryan), cujo uso é frequente na orientação aeronáutica tendo cada rotação nomenclaturas diferentes: cabeceio ou yaw (rotação de ângulo α em torno do eixo x), empinamento ou pitch (rotação de ângulo β em torno do eixo y) e balanceio ou roll (rotação de γ em torno do eixo z).

Seja R_x a matriz referente ao yaw, R_y pitch e R_z roll, de maneira análoga a obtenção da *matriz de Euler*, podemos definir a *matriz de Tait–Bryan* B fazendo o produto $R_z^{-1}R_y^{-1}R_x^{-1}$, para representarmos em termos da base $\{f_1, f_2, f_3\}$ (veja **Figura 5.8**) correspondente ao sistema ortonotmal $X'Y'Z'$ ou $B^{-1} = R_xR_yR_z$, se quisermos representar em termos da base $\{e_1, e_2, e_3\}$, correspondente ao sistema XYZ.

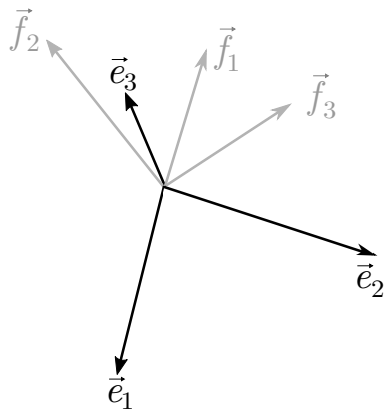


Figura 5.8: Sistemas ortonormais XYZ e $X'Y'Z'$

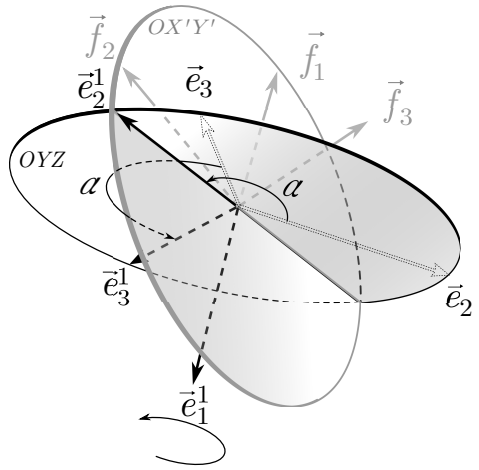


Figura 5.9: Rotação em torno do eixo x, levando o eixo y até o plano $OX'Y'$.

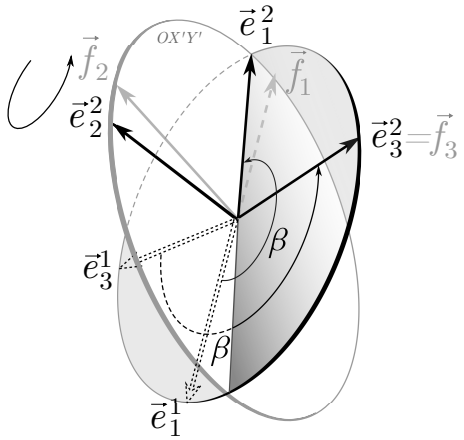


Figura 5.10: Rotação em torno do eixo y_{r_1} fazendo com que o eixo x_{r_1} também pertença ao plano $OX'Y'$ e com isso os eixos z_{r_2} e z' se coincidam

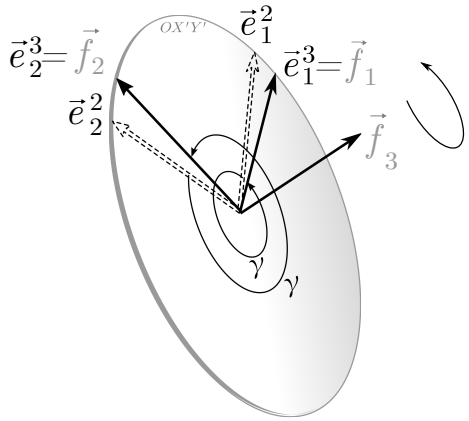


Figura 5.11: Rotação em torno do eixo z, concluindo a rotação.

Gimbal lock

A parametrização das rotações através dos ângulos de Euler apresenta uma configuração a qual dois eixos coincidem. Por exemplo, usando a parametrização do tipo $\{R_x, R_y, R_z\}$, existe uma hierarquia entre estas rotações, uma vez que a cada giro é criado um novo sistema ortonormal, isto é, o eixo de rotação relativo a R_y é influenciado pela rotação R_x, assim como o eixo relativo à rotação R_z é influenciado por R_x e por R_y. Nesse caso, quando fazemos uma rotação de ângulo $\pm\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo y, os eixos que se referem às rotações R_x e R_z se coincidem, eliminando um grau de liberdade e fazendo com que a rotação não se comporte da maneira esperada, havendo aí uma singularidade.

Observando matriz de Euler referente a essas rotações a qual denotaremos por $M_{(\alpha,\beta,\gamma)}$, para $\beta = \frac{\pi}{2}$ essa singularidade fica evidente.

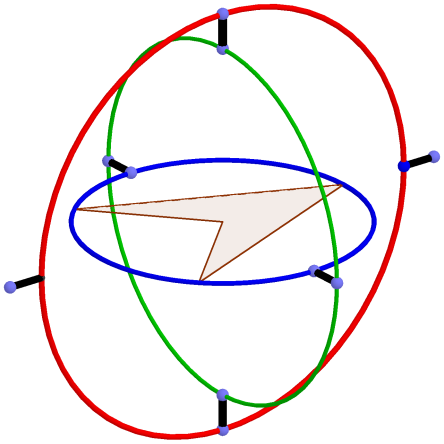


Figura 5.12: Objeto em posição inicial.

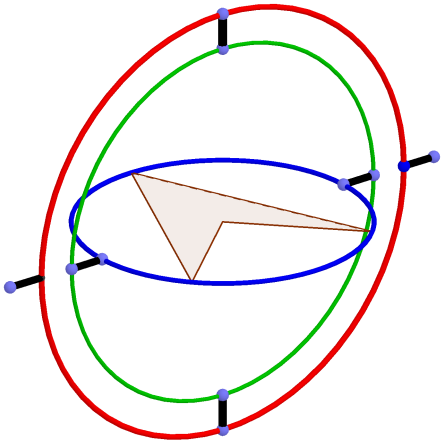


Figura 5.13: Objeto após rotação $R_y(\pi)$.

$$
\begin{aligned}
M_{(\alpha,\frac{\pi}{2},\gamma)} &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2}\cos\gamma & \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\gamma - \cos\alpha\operatorname{sen}\gamma & \cos\alpha\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma \\ \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\gamma & \cos\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\gamma & -\operatorname{sen}\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\gamma \\ -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen}\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\operatorname{sen}\gamma & \cos\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma \\ 0 & \cos\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma & -\operatorname{sen}\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\operatorname{sen}\gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen}(\alpha-\gamma) & \cos(\alpha-\gamma) \\ 0 & \cos(\alpha-\gamma) & -\operatorname{sen}(\alpha-\gamma) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Agora, temos apenas um grau de liberdade para escolher o ângulo $\alpha - \gamma$, como vimos na **Figura 5.13**. Este problema é bastante enfrentado nas áreas da aeronáutica e da computação gráfica. Neste caso, tem-se duas possibilidades, usar uma parametrização com singularidades ou restringir o domínio, neste caso, do ângulo β variando no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Concluímos, levando em conta a hierarquia de como ocorrem as rotações usando ângulos de Euler, e pelos resultados vistos ao decorrer desta seção, que uma rotação executada de maneira direta (com o produto das matrizes, da esquerda para a direita, na ordem em que as rotações ocorrem) produzem transformações locais, enquanto na ordem inversa, essas rotações são executadas sempre levando em consideração os eixos do sistema global ou inicial.

Rotações Aplicadas em Diferentes Referenciais

As rotações podem ocorrer em torno de eixos os quais a origem da base canônica não faça parte. Vimos na página 42, que isso é possível mudando de referencial e em seguida aplicando, neste caso, a rotação necessária.

Exemplo 5.4. *Podemos utilizar as matrizes de rotação em diferentes referenciais para representarmos um movimento de um braço robótico a partir de um referencial inicial.*

Sendo tal braço robótico composto de três partes principais e articulado em três pontos,

denotaremos cada parte como P_1 (braço), localizado entre os pontos de articulação A_1 (ombro) e A_2 (cotovelo), P_2 (antebraço), componente localizado entre os pontos A_2 e A_3 (punho) e P_2 (mão), a partir de A_3, com $A_n = \{x_n, y_n, z_n, 1\}$

O braço (veja a **Figura 5.14***) é movimentado pelo ponto A_1; o antebraço depende da rotação ocorrida tanto a partir do ponto A_1 como do ponto A_2, por fim temos a mão, que sofre a rotação provocada pelos três pontos A_1, A_2 e A_3.*

Se este braço robótico pertencente ao espaço afim $z = 1$, com referencial ortogonal $\mathcal{E} = \{O, e_1, e_2, e_3\}$, podemos executar um determinado movimento deste braço da seguinte forma:

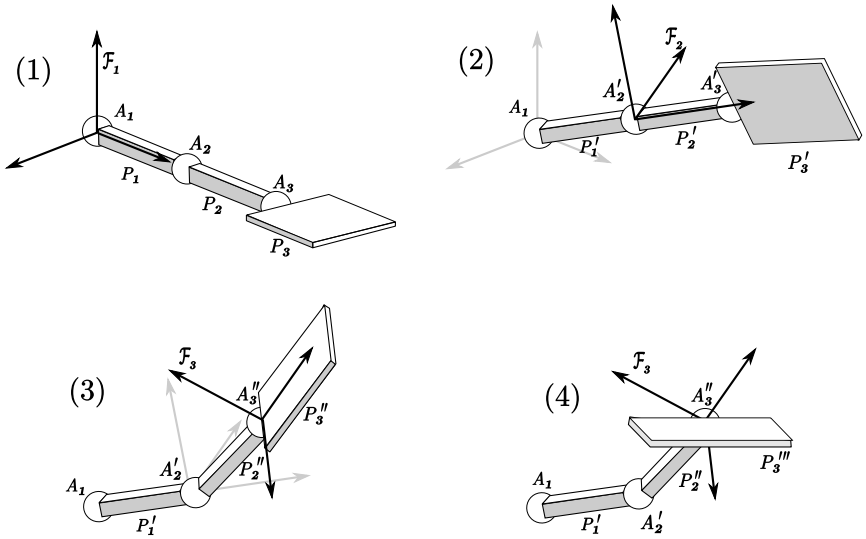


Figura 5.14: Etapas das rotações aplicadas em cada componente do braço robótico.

(**1**) *Primeiro, fazemos a mudança do referencial $\mathcal{E}$ para o referencial $\mathcal{F}_1 = \{A_1, f_1, f_2, f_3\}$ aplicando o produto por uma matriz ortogonal positiva R_0 juntamente com uma translação T_0.*

(**2**) *Após isso, fazemos a primeira rotação em todos os pontos do braço robótico, através da matriz R_1, gerando os pontos A_n' obtidos de A_n e as partes do braço robótico (P_n') obtidas de P_n, $n \in \{1, 2, 3\}$, através da matriz R_1. Agora, fazemos a mudança do referencial $\mathcal{F}_1$ para o referencial $\mathcal{F}_2 = \{A_2', f_1', f_2', f_3'\}$ através do produto pelas matrizes $R_1^{-1}T_1$, com T_1 sendo a matriz da translação através do vetor $A_2' - A_1$;*

(**3**) *Aplicamos, em seguida, a segunda rotação R_2, desta vez nas partes P_2' e P_3' e no ponto de articulação A_3' obtendo as partes P_2'' e P_3'' e o ponto de articulação A_3'', seguido da mudança para o referencial $\mathcal{F}_3 = \{A_3'', f_1''', f_2''', f_3'''\}$.*

(**4**) *Por último, executamos a rotação de matriz R_2 na parte P_3'' gerando a parte P_3''', seguido de uma mudança de referencial para $\mathcal{E}$ e, assim, chagando à configuração desejada.*

Concluímos esta seção, com um resultado que muito importante que enfatiza o que foi dito no início dessa seção.

Teorema 5.5 (Euler)**.** *Dado um objeto $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ e um ponto $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^3$, o movimento mais geral que $\mathcal{G}$ pode executar, de modo que o ponto $\mathbf{o}$ permaneça fixo é uma rotação em torno de um eixo que passa por $\mathbf{o}$.*

Demonstração. Sabemos que uma rotação no espaço é obtida uma transformação ortogonal. A matriz desta transformação é a matriz quadrada M de ordem 3 tal que $MM^t = M^tM = I$. Para demonstrar este teorema, basta mostrar que esta matriz tem um autovalor 1 correspondente a um autovetor $\vec{n}$, isto é, $M[\vec{n}] = [\vec{n}]$, que é o mesmo que $M[\vec{n}] = I[\vec{n}]$, ou ainda que $(M - I)[\vec{n}] = 0$

Para que esta equação tenha solução não nula $(M - I)$ não pode ser invertível. Agora, esta demonstração resume-se a mostrar que $\det(M - I) = 0$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}\det(M-I) &= \det(M - I)\\ &= \det(M - M^tM)\\ &= \det(M(I - M^t))\\ &= \det(-M(M^t - I)).\end{aligned}$$

Como $I = I^t$ e a matriz transposta da soma de matrizes é igual a soma das transpostas destas matrizes, e ainda usando o **Teorema 2.42**, temos que:

$$\begin{aligned}\det(M-I) &= \det((-I)M(M^t - I^t))\\ &= \det(-I)\det(M)\det(M - I)^t\\ &= -1 \cdot 1 \cdot \det(M - I) = -\det(M - I)\end{aligned}$$

Ora, se $\det(M - I) = -\det(M - I)$, então $\det(M - I) = 0$, mostrando que a equação tem solução não nula.

□

5.2.4 Rotação em Torno de um Eixo Usando Quatérnios

Introdução aos Quatérnios

As teoria dos quatérnios foi desenvolvida pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805 — 1865) para aplicação das rotações no espaço $\mathbb{R}^3$, assim como os números complexos ($\mathbb{C}$) são usados para rotações no espaço $\mathbb{R}^2$. Podemos dizer o conjunto dos Quatérnios ($\mathbb{H}$) têm uma estrutura que se comporta como uma ampliação do conjunto dos números complexos.

Nesta seção, denotaremos um quatérnio por uma letra minúscula em negrito ($\mathbf{h}$, por exemplo) e um ponto por uma letra maiúscula em negrito, como em $\mathbf{P}$.

O espaço dos quatérnios pode ser definido como um espaço $\mathbb{R}^4$, representado como

$$\mathbf{h} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \text{ correspondente no } \mathbb{R}^4 \text{ ao vetor } \vec{h} = (a, b, c, d),$$

tendo como base canônica os quatérnios $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, equivalente em $\mathbb{R}^4$ a $\{(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)\}$, nesta ordem, e apresentando a operação de *produto* entre seus elementos da base, conforme diagrama abaixo:

Além disso, $\mathbf{i}^2 = -1$, $\mathbf{j}^2 = -1$ e $\mathbf{k}^2 = -1$. O quatérnio $\mathbf{1}$ é o elemento identidade desta operação, ou seja, $\forall\ \mathbf{q} \in \mathbb{H}$, $\mathbf{1} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{q}$.

Uma outra maneira de representar um quatérnio é na forma de uma matriz $Q =$

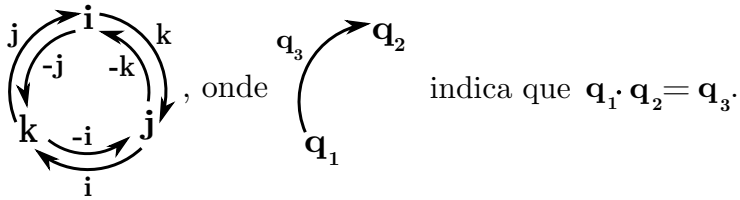


Figura 5.15: Produto entre elementos da base canônica dos quatérnios. As setas mostram a ordem em que o produto é obtido.

$[q_{ij}]_{4\times 4}$, onde

$$Q = \begin{bmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{bmatrix} = a[e] + b[i] + c[j] + d[j],$$

onde a base canônica é formada pelas matrizes

$$[e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [i] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, [j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que o quatérnio 1 é o *elemento neutro* do produto entre quatérnios. Também é fácil notar que esta operação não é *comutativa*, porém, conforme veremos mais afrente, o produto de quatérnios é *associativo*.

A operação acima é estendida para obter o produto $\mathbf{pq}$, onde $\mathbf{p} = (a\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ e $\mathbf{q} = (b\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)$, com $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2 \in \mathbb{R}^4$, da seguinte maneira:

$$(a\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)(a\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = ab\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1 + a\mathbf{p}_1\mathbf{q}_2 + b\mathbf{p}_2\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{q}_2.$$

O subespaço gerado pelo elemento da base $(1, 0, 0, 0)$ é chamado de *espaço* $\mathbb{R}^1$ *ou espaço dos escalares*, já os quatérnios da forma $bi + cj + dk$, isomorfo ao subespaço gerado pelos elementos $\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, é chamado de *espaço dos vetores do* $\mathbb{R}^3$ ou *espaço dos quatérnios puros*

Um quatérnio $\mathbf{h} = a + bi + cj + dk$ é dividido em duas partes, $\Re(\mathbf{h}) = a$ (*parte real* de $\mathbf{h}$) e $\mathbf{u} = bi + cj + dk$ (*parte vetorial* ou *quatérnio puro associado* a $\mathbf{h}$). Assim podemos escrever de maneira sucinta $\mathbf{h} = a + \mathbf{u}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}$ associado ao vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$.

Dados dois quatérnios, $\mathbf{h_1} = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ e $\mathbf{h_2} = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$, com os quatérnios puros associados $\mathbf{u_1} = b_1 i + c_1 j + d_1 k$ e $\mathbf{u_2} = b_2 i + c_2 j + d_2 k$, então

$$\begin{aligned}
\mathbf{h_1 h_2} &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
&= a_1 a_2 + a_1(b_2 i + c_2 j + d_2 k) + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 + b_1 c_2 ij + b_1 d_2 ik + c_1 a_2 j + c_1 b_2 ji + \\
&\quad c_1 c_2 j^2 + c_1 d_2 jk + d_1 a_2 k + d_1 b_2 ki + d_1 c_2 kj + d_1 d_2 k^2 \\
&= a_1 a_2 + a_1(b_2 i + c_2 j + d_2 k) + a_2(b_1 i + c_1 j + d_1 k) - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + c_1 d_2 i - d_1 c_2 i + \\
&\quad d_1 b_2 j - b_1 d_2 j + b_1 c_2 k - c_1 b_2 k \\
&= a_1 a_2 - \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle + a_1 \mathbf{u_2} + a_2 \mathbf{u_1} + \mathbf{u_1} \times \mathbf{u_2}.
\end{aligned}$$

Usando o resultado acima, se tomarmos dois quatérnios puros, $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$, o produto deles será

$$\mathbf{v_1}\mathbf{v_2} = -\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle + \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}. \tag{5.1}$$

Este fato é bastante interessante do ponto de vista da Álgebra Linear, pois mostra que o produto de quatérnios engloba o produto escalar e o produto vetorial do espaço $\mathbb{R}^3$.

Note que, como o espaço dos quatérnios puros é isomorfo ao espaço $\mathbb{R}^3$, definimos o produto interno usual e produto vetorial entre quatérnios puros de maneira análoga a o que ocorre no $\mathbb{R}^3$.

Proposição 5.6. *Dados os quatérnios puros* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ *e* $\mathbf{r}$, *então* $(\mathbf{pq})\mathbf{r} = \mathbf{p}(\mathbf{qr})$

Demonstração. Para demonstrarmos esta proposição nos valeremos da igualdade (5.1) e dos resultados estudadas na Álgebra Linear listadas abaixo:

1. Dados três vetores, $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, então $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\langle\vec{a},\vec{c}\rangle - \vec{c}\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ (Fórmula de Lagrange)

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (anticomutatividade do produto vetorial)

3. $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\vec{b},\vec{a}\rangle$ (comutatividade do produto escalar)

4. $\langle\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\rangle = -\langle\vec{a},\vec{c}\times\vec{b}\rangle = \langle\vec{b},\vec{c}\times\vec{a}\rangle = -\langle\vec{b},\vec{a}\times\vec{c}\rangle = \langle\vec{c},\vec{a}\times\vec{b}\rangle = -\langle\vec{c},\vec{b}\times\vec{a}\rangle$ (alternância do produto misto)

Daí,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{pq})\mathbf{r} &= (-\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle + (\mathbf{p}\times\mathbf{q}))\mathbf{r} = -\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle\mathbf{r} + (\mathbf{p}\times\mathbf{q})\mathbf{r} \\
&= -\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle\mathbf{r} - \langle\mathbf{p}\times\mathbf{q},\mathbf{r}\rangle + (\mathbf{p}\times\mathbf{q})\times\mathbf{r} \\
&= -\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle\mathbf{r} - \langle\mathbf{p}\times\mathbf{q},\mathbf{r}\rangle - \mathbf{r}\times(\mathbf{p}\times\mathbf{q}) \\
&= -\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle\mathbf{r} - \langle\mathbf{p}\times\mathbf{q},\mathbf{r}\rangle - \mathbf{p}\langle\mathbf{r},\mathbf{q}\rangle + \mathbf{q}\langle\mathbf{r},\mathbf{p}\rangle \\
&= -\mathbf{p}\langle\mathbf{r},\mathbf{q}\rangle - \langle\mathbf{q}\times\mathbf{r},\mathbf{p}\rangle + \mathbf{q}\langle\mathbf{r},\mathbf{p}\rangle - \langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle\mathbf{r} \\
&= -\mathbf{p}\langle\mathbf{r},\mathbf{q}\rangle - \langle\mathbf{q}\times\mathbf{r},\mathbf{p}\rangle + \mathbf{p}\times(\mathbf{q}\times\mathbf{r}) \\
&= -\mathbf{p}\langle\mathbf{q},\mathbf{r}\rangle + \mathbf{p}(\mathbf{q}\times\mathbf{r}) = \mathbf{p}(-\langle\mathbf{q},\mathbf{r}\rangle + (\mathbf{q}\times\mathbf{r})) = \mathbf{p}(\mathbf{qr})
\end{aligned}$$

□

Corolário 5.7. *Dados os quatérnios* $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ *e* $\mathbf{h}$, *então* $(\mathbf{fg})\mathbf{h} = \mathbf{f}(\mathbf{gh})$

Demonstração.

Sejam $\mathbf{f} = a + \mathbf{p}$, $\mathbf{g} = b + \mathbf{q}$ e $\mathbf{h} = c + \mathbf{r}$, então

$$\begin{aligned}
(\mathbf{fg})\mathbf{h} &= [(a+\mathbf{p})(b+\mathbf{q})](c+\mathbf{r}) \\
&= abc + ab\mathbf{r} + ac\mathbf{q} + a\mathbf{qr} + bc\mathbf{p} + b\mathbf{pr} + c\mathbf{pq} + (\mathbf{pq})\mathbf{r} \\
&= abc + ab\mathbf{r} + ac\mathbf{q} + a\mathbf{qr} + bc\mathbf{p} + b\mathbf{pr} + c\mathbf{pq} + \mathbf{p}(\mathbf{qr}) \text{ (usando a } \textbf{Proposição 5.6}\text{)} \\
&= (a+\mathbf{p})[(b+\mathbf{q})(c+\mathbf{r})] = \mathbf{f}(\mathbf{gh})
\end{aligned}$$

□

O corolário acima mostra uma propriedade importante da operação de produto de quatérnios que é a sua *associatividade*.

Observação 5.8. *Outra maneira de demonstrar a associatividade e a não comutatividade do produto de quatérnios é através da sua representação matricial. Neste caso, é só verificar que o produto de matrizes goza da propriedade associativa, porém não é comutativo.*

Chamamos de *conjugado* do quatérnio $\mathbf{h} = a + bi + cj + dk$, o quatérnio $\mathbf{h}^* = a - bi - cj - dk = a - \mathbf{u}$. O conjugado goza das propriedades:

C1 $(\mathbf{h}^*)^* = \mathbf{h}$

C2 $(\mathbf{hg})^* = \mathbf{g}^*\mathbf{h}^*$

A propriedade **C1** é obvia. Para verificarmos a propriedade **C2**, tomemos $\mathbf{h} = a + \mathbf{u}$ e $\mathbf{g} = e + \mathbf{v}$. Como $\mathbf{hg} = ae - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + a\mathbf{v} + e\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, segue que

$$\begin{aligned}(\mathbf{hg})^* &= ae - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - a\mathbf{v} - e\mathbf{u} - \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= ea - \langle -\mathbf{v}, -\mathbf{u} \rangle + e(-\mathbf{u}) + a(-\mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) \times (-\mathbf{u}) = \mathbf{g}^*\mathbf{h}^*\end{aligned}$$

Também podemos verificar que

$$\frac{\mathbf{h} + \mathbf{h}^*}{2} = \frac{2a}{2} = \Re(\mathbf{h}).$$

A *norma* do quatérnio $\mathbf{h} = a + bi + cj + dk$, denotada por $\|\mathbf{h}\|$, é obtida através da norma do vetor (a, b, c, d), ou seja,

$$\|\mathbf{h}\| = \sqrt{\langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

A partir disso segue que $\|\mathbf{h}\|^2 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + \|\mathbf{u}\|^2$. Outro fato referente à norma dos vetores é que $\|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\|^*$. A verificação é imediata.

Há ainda uma relação entre as definições de *norma* e *conjugado*, que se assemelha bastante com a mesma relação usada entre números complexos, conforme proposição seguinte:

Proposição 5.9. *Seja* $\mathbf{h}$ *um quatérnio qualquer, então*

$$\mathbf{hh}^* = \mathbf{h}^*\mathbf{h} = \|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}^*\|$$

Demonstração.

Seja $\mathbf{h} = a + bi + cj + dk$, então $\mathbf{hh}^* = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk)$

$= a^2 - abi - acj - adk + abi - b^2i^2 - bcij - bdik + acj - bcji - c^2j^2 - cdjk + adk - bdki - cdkj - d^2k^2$

$= a^2 - abi - acj - adk + abi + b^2 - bck + bdj + acj + bck + c^2 - cdi + adk - bdj + cdi + d^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ □

Proposição 5.10. *Sejam* $\mathbf{h_1}$ *e* $\mathbf{h_2}$ *dois quatérnios, então* $\|\mathbf{h_1h_2}\| = \|\mathbf{h_1}\|\|\mathbf{h_2}\|$.

Demonstração.

$\|\mathbf{h_1h_2}\| = (\mathbf{h_1h_2})(\mathbf{h_1h_2})^* = \mathbf{h_1h_2h_2^*h_1^*} = \mathbf{h_1}\|\mathbf{h_2}\|\mathbf{h_1^*} = \mathbf{h_1h_1^*}\|\mathbf{h_2}\| = \|\mathbf{h_1}\|\|\mathbf{h_2}\|$

□

A partir da definição de *norma* podemos definir *quatérnio unitário*. Afirmar que $\mathbf{h} = a + bi + cj + dk$ é um quatérnio unitário equivale a dizer que , $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Se $\mathbf{hg} = 1$ dizemos que $\mathbf{g}$ é o *inverso multiplicativo* de $\mathbf{h}$ e o denotamos por $\mathbf{h}^{-1}$. Podemos determinar $\mathbf{h}^{-1}$ usando as definições de *norma* e *conjugado*, isto é,

$$1 = \frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\mathbf{h}\mathbf{h}^*}{\|\mathbf{h}\|}, \text{ mostrando que } \mathbf{h}^{-1} = \frac{\mathbf{h}^*}{\|\mathbf{h}\|}$$

É possível, tomando um quatérnio qualquer $\mathbf{h} = a + \mathbf{u}$, representá-lo da forma $\mathbf{h} = a + e\mathbf{v}$, onde $\mathbf{v}$ é um quatérnio unitário, bastando tomar

$$e = \|\mathbf{u}\| \text{ e } \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Nessa representação, se $\mathbf{h}$ é um quatérnio unitário, com o quatérnio puro associado $e\mathbf{v} = e(b'i + c'j + d'k)$ ocorre que

$$\|\mathbf{h}\|^2 = 1 = \|a + e(b'i + c'j + d'k)\|^2 = a^2 + e^2(b'^2 + c'^2 + d'^2) = a^2 + e^2$$

e assim $a = \cos\theta$ e $e = \operatorname{sen}\theta$, para um $\theta \in \mathbb{R}$, de maneira bastante similar a o que ocorre com os números complexos.

Usando Quatérnios para Executar Rotações no $\mathbb{R}^3$

Dado o quatérnio unitário $\mathbf{q} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\mathbf{n}$, onde $\operatorname{sen}\theta\mathbf{n}$ é o quatérnio puro associado a $\mathbf{q}$ e $\mathbf{n}$ é um quatérnio unitário, tomando $\vec{v}$ um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$ correspondente ao quatérnio puro $\mathbf{v}$, a função $\varphi_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) = \mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^*$ transforma o quatérnio $\mathbf{v}$ no quatérnio $\mathbf{v}'$. No espaço $\mathbb{R}^3$ essa função é uma transformação que produz o vetor $\vec{v'}$ obtido de $\vec{v}$ através de uma rotação em torno do vetor $\vec{n}$, correspondentes, nesta ordem aos quatérnios $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}$ e a $\mathbf{n}$, com um ângulo positivo de 2θ, como enuncia o seguinte teorema:

Teorema 5.11. *Uma rotação do vetor $\vec{v}$ de ângulo 2θ em torno de um eixo, cujo vetor diretor unitário é $\vec{n}$, é representado pelo produto quaterniônico $\varphi_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) = \mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^{-1}$, onde $\mathbf{q} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\mathbf{n}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$ quatérnios puros correspondentes a $\vec{v}$ e $\vec{n}$.*

Demonstração. Primeiro vamos verificar que $\mathbf{v}'$ é um *quatérnio puro*, o que corresponde a $\vec{v'} \in \mathbb{R}^3$, isto é φ é uma transformação $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Para provar este fato, basta mostrar que $\Re(v') = 0$, o que faremos quando tratarmos da matriz desta transformação.

Em segundo lugar mostraremos que a função φ é uma *transformação linear*. De fato,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{q}}(\alpha\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) &= \mathbf{q}(\alpha\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})\mathbf{q}^* \\
&= \mathbf{q}\alpha\mathbf{v_1}\mathbf{q}^* + \mathbf{q}\mathbf{v_2}\mathbf{q}^* \\
&= \alpha\mathbf{q}\mathbf{v_1}\mathbf{q}^* + \mathbf{q}\mathbf{v_2}\mathbf{q}^* \\
&= \alpha\varphi_{\mathbf{q}}(\mathbf{v_1}) + \varphi_{\mathbf{q}}(\mathbf{v_2})
\end{aligned}$$

Agora, note que $\varphi_{\mathbf{q}}$ é uma *transformação ortogonal*. Com efeito,

$$\|\varphi_{\mathbf{q}}\| = \|\mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^*\| = \|\mathbf{q}\|\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{q}^*\| = \|\mathbf{v}\|$$

Podemos verificar, ainda que a função $\varphi_{\mathbf{q}}$ é uma rotação. Como ela é uma transformação ortogonal, seu determinante de sua matriz é igual a ± 1. Precisamos, portanto, mostrar que ela é positiva, ou seja, o determinante de sua matriz é igual a 1. De fato. O espaço dos quatérnios unitários é a esfera de raio unitário e centrado na origem do espaço $\mathbb{R}^4$, isto é, dado um quatérnio unitário $\mathbf{q} = a + bi + cj + dk$, temos que

$$S^3 = \{\mathbf{q}; \|\mathbf{q}\| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.$$

Este espaço, do ponto de vista topológico, é conexo[1]. Observe que, para $\mathbf{q} = 1$ a função $\varphi_{\mathbf{q}}$ equivalente a função identidade I, cujo determinante é 1, sendo uma transformação positiva. Portanto, usando argumentos de continuidade, esta função é positiva, qualquer que seja o quatérnio $\mathbf{q}$. Com isso, verifica-se que $\varphi_{\mathbf{q}}$ *é uma rotação*.

Por fim, vamos mostrar que o ângulo de rotação executado através da função $\varphi_{\mathbf{q}}$ é de 2θ. Para isso, vamos obter a coordenada do vetor $R_r(\vec{p}) = \vec{p'}$, obtido de $\vec{p}$ através de uma rotação de ângulo β em torno do eixo r, e em seguida, comparemos com a coordenada do vetor associado ao quatérnio $\varphi_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$.

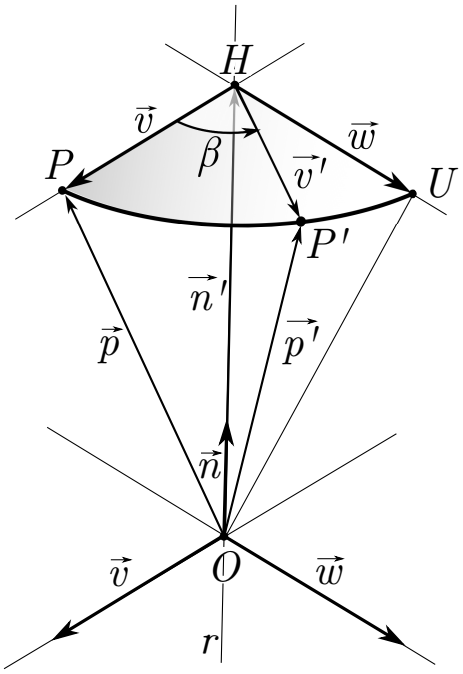


Figura 5.16: Rotação em torno do eixo r fazendo um ângulo positivo de $\beta = 2\theta$

Na **Figura 5.16**, $\vec{n}$ é um vetor unitário que forma o referencial ortogonal $\mathcal{F} = \{ O, \vec{v}, \vec{w}, \vec{n}\}$ e é vetor por onde passa o eixo r. Executamos através de r a rotação de ângulo β do ponto P, cuja imagem é o ponto P'. O vetor $\vec{n'}$, como podemos notar,

[1]Para o leitor interessado em se aprofundar nos conceitos de conexidade e continuidade da topologia da esfera unitária S^3, recomendamos a leitura de **Munkres, 1975**[8].

é a projeção ortogonal de $\vec{p}$ no vetor $\vec{n}$, o que, junto ao fato de $\vec{n}$ ser unitário, acarreta $\langle\vec{p},\vec{n}\rangle\vec{n} = \vec{n'}$. Outras relações são válidas, conforme abaixo:

$\vec{w} = \vec{n} \times \vec{v}$, já que $\mathcal{F}$ é ortogonal e $\vec{n}$ unitário.
$\vec{v'} = \cos\beta\vec{v} + \operatorname{sen}\beta\vec{w}$
$\vec{p'} = \vec{n'} + \vec{v'}$
$\vec{v} = \vec{p} - \vec{n'} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{p} - \langle\vec{p},\vec{n}\rangle\vec{n}$

Das relações acima temos

$$\vec{w} = \vec{n} \times \vec{v} = \vec{n} \times (\vec{p} - \langle\vec{p},\vec{n}\rangle\vec{n}) = (\vec{n} \times \vec{p}) - (\vec{n} \times \langle\vec{p},\vec{n}\rangle\vec{n}) = \vec{n} \times \vec{p}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\vec{p'} &= n' + \vec{v'} \\
&= (\langle\vec{p},\vec{n}\rangle\vec{n}) + (\cos\beta\vec{v} + \operatorname{sen}\beta\vec{w}) \\
&= \langle\vec{p},\vec{n}\rangle\vec{n} + \cos\beta(\vec{p} - \langle\vec{p},\vec{n}\rangle\vec{n}) + \operatorname{sen}\beta(\vec{n} \times \vec{p}) \\
&= \langle\vec{p},\vec{n}\rangle\vec{n} - \cos\beta\langle\vec{p},\vec{n}\rangle\vec{n}) + \cos\beta(\vec{p}) + \operatorname{sen}\beta(\vec{n} \times \vec{p}) \\
&= (1 - \cos\beta\langle\vec{p},\vec{n}\rangle\vec{n} + \cos\beta(\vec{p}) + \operatorname{sen}\beta(\vec{n} \times \vec{p}) \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Por outro lado, pondo $\mathbf{q} = a + \mathbf{t}$, sendo $\mathbf{t}$ o quatérnio puro associado a $\mathbf{q}$

$$\begin{aligned}
\varphi_\theta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}' &= \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1} \\
&= (a + \mathbf{t})\mathbf{p}(a - \mathbf{t}) \\
&= (-\langle\mathbf{t},\mathbf{p}\rangle + a\mathbf{p} + \mathbf{t} \times \mathbf{p})(a - \mathbf{t}) \\
&= -a\langle\mathbf{t},\mathbf{p}\rangle - \langle a\mathbf{p} + \mathbf{t} \times \mathbf{p}, (-\mathbf{t})\rangle + (-\langle\mathbf{t},\mathbf{p}\rangle)(-\mathbf{t}) + a(a\mathbf{p} + \mathbf{t} \times \mathbf{p}) + a\mathbf{p} \times (-\mathbf{t}) + (\mathbf{t} \times \mathbf{p}) \times (-\mathbf{t}) \\
&= -a\langle\mathbf{t},\mathbf{p}\rangle + \langle a\mathbf{p},\mathbf{t}\rangle + \langle\mathbf{t} \times \mathbf{p},\mathbf{t}\rangle + \langle\mathbf{t},\mathbf{p}\rangle\mathbf{t} + a^2\mathbf{p} + a(\mathbf{t} \times \mathbf{p}) - a(\mathbf{p} \times \mathbf{t}) + \mathbf{t} \times (\mathbf{t} \times \mathbf{p}) \\
&= -a\langle\mathbf{t},\mathbf{p}\rangle + a\langle\mathbf{t},\mathbf{p}\rangle + \langle\mathbf{t},\mathbf{p}\rangle\mathbf{t} + a^2\mathbf{p} + a(\mathbf{t} \times \mathbf{p}) + a(\mathbf{t} \times \mathbf{p}) + \langle\mathbf{t},\mathbf{p}\rangle\mathbf{t} - \langle\mathbf{t},\mathbf{t}\rangle\mathbf{p} \\
&= a^2\mathbf{p} + 2a(\mathbf{t} \times \mathbf{p}) - \langle\mathbf{t},\mathbf{t}\rangle\mathbf{p} + 2\langle\mathbf{t},\mathbf{p}\rangle\mathbf{t} \\
&= (a^2 - \langle\mathbf{t},\mathbf{t}\rangle)\mathbf{p} + 2a(\mathbf{t} \times \mathbf{p}) + 2\langle\mathbf{t},\mathbf{p}\rangle\mathbf{t}
\end{aligned}$$

Agora, substituindo a por $\cos\theta$ e $\mathbf{t}$ por $\operatorname{sen}\theta\mathbf{n}$ temos,

$$\begin{aligned}
\varphi_\theta(\mathbf{p}) &= (\cos^2\theta - \langle\operatorname{sen}\theta\mathbf{n}, \operatorname{sen}\theta\mathbf{n}\rangle)\mathbf{p} + 2\cos\theta(\operatorname{sen}\theta\mathbf{n} \times \mathbf{p}) + 2\langle\operatorname{sen}\theta\mathbf{n},\mathbf{p}\rangle\operatorname{sen}\theta\mathbf{n} \\
&= (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\|\mathbf{n}\|)\mathbf{p} + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) + 2\operatorname{sen}^2\theta\langle\mathbf{n},\mathbf{p}\rangle\mathbf{n} \\
&= (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\mathbf{p} + \operatorname{sen}2\theta(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) + (1 - \cos 2\theta)\langle\mathbf{n},\mathbf{p}\rangle\mathbf{n} \\
&= \cos 2\theta\mathbf{p} + \operatorname{sen}2\theta(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) + (1 - \cos 2\theta)\langle\mathbf{n},\mathbf{p}\rangle\mathbf{n} \\
&= (1 - \cos 2\theta)\langle\mathbf{p},\mathbf{n}\rangle\mathbf{n} + \cos 2\theta\mathbf{p} + \operatorname{sen}2\theta(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Que é a mesma expressão em (5.2), bastando apenas tomar $\beta = 2\theta$ □

Contudo, uma rotação no $\mathbb{R}^3$ é obtida, tanto usando os *ângulos de Euler*, como os *quatérnios*, através de três graus de liberdade para escolha. No primeiro, os ângulos ϕ, θ e ψ, e no segundo, dois graus de liberdade para escolhermos o eixo, através do vetor unitário pela coordenada esférica usando os parâmetros ϕ e θ, e mais uma escolha para o ângulo de rotação β.

5.2.5 Eixo Resultante de Duas Rotações Consecutivas

Como já vimos, dadas duas rotações, R_1 e R_2, a composição delas também é uma rotação. O uso dos quatérnios para executarmos rotações nos dá um mecanismo para sabermos de maneira bem clara qual é o eixo dessa composição.

Seja $\varphi_{\mathbf{u_1}}$ uma rotação em torno do eixo unitário $\vec{n}_1$ através do quatérnio $\mathbf{u_1}$ e $\varphi_{\mathbf{u_2}}$ a rotação em torno do eixo $\vec{n}_2$ também unitário e referente ao quatérnio $\mathbf{u_1}$, vamos realizar, nesta sequência, as duas rotações do quatérnio puro $\mathbf{v}$. Se $\mathbf{v}'$ é obtido de $\mathbf{v}$ após tais rotações, então

$$\mathbf{v}' = \varphi_{\mathbf{u_2}}(\varphi_{\mathbf{u_1}}(\mathbf{v})) = \varphi_{\mathbf{u_2}}(\mathbf{u_1 v u_1^{-1}}) = \mathbf{u_2}(\mathbf{u_1 v u_1^{-1}})\mathbf{u_2}^{-1}.$$

Agora, gozando da associatividade dos quatérnios, temos

$$\mathbf{v}' = (\mathbf{u_2 u_1})\mathbf{v}(\mathbf{u_1^{-1} u_2}^{-1}) = (\mathbf{u_2 u_1})\mathbf{v}(\mathbf{u_2 u_1})^{-1} = \varphi_{\mathbf{u_2 u_1}}(\mathbf{v}).$$

Sendo assim, concluímos que tal rotação ocorre através do eixo correspondente ao quatérnio $\mathbf{u_2 u_1}$.

Exemplo 5.12. *Dado um objeto do espaço $\mathbb{R}^3$, onde o mesmo sofre, primeiramente, uma rotação de ângulo α em torno do eixo x, depois uma rotação de ângulo β em torno do eixo y, e em seguida uma rotação de ângulo γ em torno do eixo z, como vimos na subseção 5.2.3, podemos calcular o vetor correspondente ao eixo de rotação resultante r dessas três rotações através do produto dos quatérnios $\mathbf{q_x} = \cos\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\mathbf{x}$, $\mathbf{q_y} = \cos\frac{\beta}{2} + \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\mathbf{y}$ e $\mathbf{q_z} = \cos\frac{\gamma}{2} + \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\mathbf{z}$. Então temos:*

$$\begin{aligned}(\mathbf{q_z q_y})\mathbf{q_x} &= (\cos\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} - \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle + \cos\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\mathbf{y} + \cos\tfrac{\beta}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\gamma}{2}\mathbf{z} + \operatorname{sen}\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}(\mathbf{z}\times\mathbf{y}))\mathbf{q_x}\\ &= (\cos\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} + \cos\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\mathbf{y} + \cos\tfrac{\beta}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\gamma}{2}\mathbf{z} - \operatorname{sen}\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\mathbf{x})(\cos\tfrac{\frac{\alpha}{2}}{2} + \operatorname{sen}\tfrac{\frac{\alpha}{2}}{2}\mathbf{x}),\end{aligned}$$

onde, prosseguindo nossos cálculos, chegamos ao quatérnio

$$\begin{aligned}&\cos\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\alpha}{2} +\\ &(\cos\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2})\mathbf{x} +\\ &(\cos\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\alpha}{2})\mathbf{y} +\\ &(\operatorname{sen}\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} - \cos\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\alpha}{2})\mathbf{z}\end{aligned}$$

Assim, esta composição de rotações, que também é uma rotação tem como eixo a reta r guiada pelo vetor

$$\vec{n} = (\cos\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2}, \cos\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\alpha}{2}, sen\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} - \cos\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\alpha}{2}),$$

fazendo um ângulo de $\operatorname{arcsen}\|\vec{n}\|$.

5.2.6 Matriz da Rotação em Torno do Eixo r

A partir da expressão (5.3), tomemos $\mathbf{n} = bi + cj + dk$ e $2\theta = \beta$. Para qualquer quatérnio puro $\mathbf{p} = xi + yj + zk$, temos

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) &= (1-\cos\beta)\langle(x,y,z),(a,b,c)\rangle(a,b,c) + \cos\beta(x,y,z) + \operatorname{sen}\beta(a,b,c)\times(x,y,z)\\ &= (1-\cos\beta)(a^2x+aby+acz, abx+b^2y+bcz, acx+bcy+c^2z)\\ &\quad + \cos\beta(x,y,z) + \operatorname{sen}\beta(bz-cy, cx-az, ay-bx)\end{aligned}$$

ou em forma de matrizes

$$\left((1-\cos\beta)\begin{bmatrix} a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & \cos\beta\end{bmatrix} + \operatorname{sen}\beta\begin{bmatrix} 0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

Logo, $\varphi_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = A\cdot[\mathbf{p}]$, onde

$$A = \begin{bmatrix} (1-\cos\beta)a^2+\cos\beta & (1-\cos\beta)ab - c\operatorname{sen}\beta & (1-\cos\beta)ac + b\operatorname{sen}\beta\\ (1-\cos\beta)ab + c\operatorname{sen}\beta & (1-\cos\beta)b^2+\cos\beta & (1-\cos\beta)bc - a\operatorname{sen}\beta\\ (1-\cos\beta)ac - b\operatorname{sen}\beta & (1-\cos\beta)bc + a\operatorname{sen}\beta & (1-\cos\beta)c^2+\cos\beta\end{bmatrix}$$

é a matriz da transformação $\varphi_{\mathbf{q}}$ e $[\mathbf{p}]$ é a representação em matriz coluna do quatérnio $\mathbf{p}$.

5.2.7 Rotações em Torno de Eixos que Não Passam pela Origem

Finalizamos nossa seção generalizando nossa rotação no sentido de executarmos em torno de uma reta qualquer do subespaço afim $z = 1$. Sendo esta rotação R_r de ângulo β, onde r é um eixo que não passa pela origem, necessitamos fazê-la de um referencial apropriado. Neste caso, escolhemos um ponto $\mathbf{p} \in r$ e em seguida mudamos do referencial $\{\mathbf{o}, e_1, e_2, e_3\}$ para o referencial $\{\mathbf{p}, e_1, e_2, e_3\}$, depois aplicamos a rotação $R_{r'}$ de ângulo β, onde $r' \parallel r$ e $\mathbf{o} \in r'$. Por fim, fazemos a mudança inversa de referencial. Sendo $[T]$ a matriz de mudança de referencial, então temos que

$$[R_r] = [T]^{-1}[R_{r'}][T].$$

5.3 Reflexões no $\mathbb{R}^3$

Em $\mathbb{R}^3$ podemos obter três tipos de reflexão, a primeira é a reflexão referente a um ponto, a segunda é a reflexão referente a uma reta e a terceira é a reflexão em torno de um plano. Trataremos aqui apenas das reflexões ortogonais.

Definição 5.13. *Dado um ponto* $\mathbf{o}$*, o qual chamamos de centro de reflexão, e o vetor* $\vec{v} = \mathbf{p}-\mathbf{o}$ *definimos a reflexão do ponto* $\mathbf{p}$ *em torno de* $\mathbf{o}$ *como o ponto* $M(\mathbf{p}) = \mathbf{p}' = \mathbf{o}-\vec{v}$.

Em outras palavras, se $\mathbf{o}$ é o centro da reflexão M e $M(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$, então $\mathbf{o}$ é o ponto médio do segmento $\mathbf{pp}'$.

Definição 5.14. *Seja* $\mathbf{q}$ *a projeção ortogonal do ponto* $\mathbf{p}$ *na reta* r *e* $\vec{v} = \mathbf{p}-\mathbf{q}$*, podemos definir a reflexão ortogonal de* $\mathbf{p}$ *em relação ao eixo de reflexão* r *como sendo o ponto* $\mathbf{p}'$*, tal que* $\mathbf{p}' = T(\mathbf{p}) = \mathbf{q}-\vec{v}$.

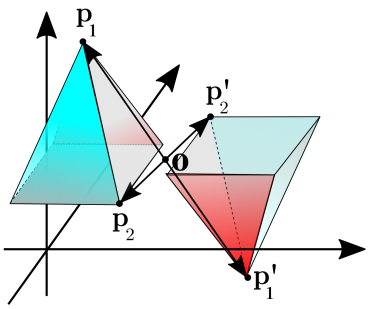


Figura 5.17: Reflexão do objeto em torno do ponto **o**.

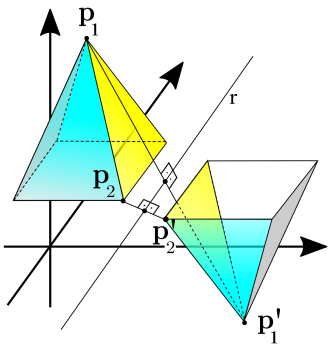


Figura 5.18: Reflexão do objeto em torno da reta r.

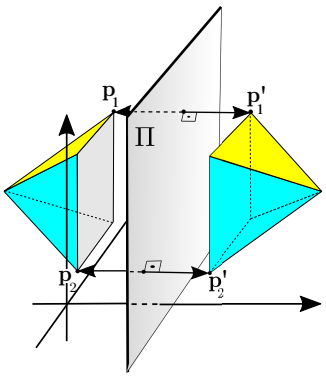


Figura 5.19: Reflexão do objeto em torno do plano Π.

Podemos verificar que, nesse caso que o eixo r é a mediatriz do segmento $\mathbf{pp'}$.

Também podemos definir uma reflexão ortogonal do ponto $\mathbf{p}$ em torno da reta r como sendo a transformação aplicada nesse ponto através da rotação de π radianos deste ponto em torno de r.

Definição 5.15. *Seja* $\mathbf{q}$ *a projeção ortogonal do ponto* $\mathbf{p}$ *no plano* Π *e* $\vec{v} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$, *podemos definir a reflexão ortogonal de* $\mathbf{p}$ *em relação a* Π *como sendo o ponto* $\mathbf{p}'$, *tal que* $\mathbf{p}' = T(\mathbf{p}) = \mathbf{q} - \vec{v}$

Neste caso, o plano Π coincide com o plano mediador do segmento $\mathbf{pp'}$.

5.3.1 Matriz da reflexão em torno do ponto o

Pela **definição 5.13**, podemos notar que uma reflexão em torno de um ponto não é uma transformação linear, nos obrigando a recorrermos ao espaço afim $z = 1$. Seja $\mathbf{o} = (a, b, c, 1)$ e $\mathbf{p} = (x, y, z, 1)$ pontos do espaço afim $z = 1$ e $\vec{v} = \mathbf{p} - \mathbf{o} = (x - a, y - b, z - c, 0)$, então $M((x, y, z, 1)) = \mathbf{o} - \vec{v} = (2a - x, 2b - y, 2c - z, 1)$, isto é,

$$M((x, y, z, 1)) = M \cdot [\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & -1 & 2c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Onde M é a matriz da reflexão e $[\mathbf{p}]$ é a matriz coluna correspondente ao ponto $\mathbf{p}$.

5.3.2 Matriz de uma reflexão em torno do eixo OX

Para procedermos essa transformação precisamos de uma matriz M que transforme o ponto $\mathbf{p}$ de coordenadas (x, y, z) no ponto $\mathbf{p} = (x, -y, -z)$. Não é difícil verificar a linearidade desta transformação e por isso tal matriz pode ser quadrada de ordem 3, conforme abaixo.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

As matrizes aplicadas na reflexão em torno dos eixos OY e OZ segue construção análoga.

Outra maneira de definir a matriz de reflexão em torno do eixo OX é através da matriz de rotação em torno de um eixo, vista na página 59 fazendo $\beta = \pi$ e $\mathbf{n} = i$. Usando o mesmo método podemos definir uma matriz de reflexão em torno de uma reta qualquer, bastando apenas conhecer seu vetor diretor unitário. Este fato nos fornece uma generalização para reflexão em torno de qualquer eixo, bastando apenas conhecer o vetor diretor unitário deste eixo.

Exemplo 5.16. *Dada a reta r, tal que a origem está contida nesta reta, cujo vetor diretor unitário é representado pelo quatérnio puro $\mathbf{n} = bi + ck + dk$, então a reflexão em torno de r é representado pela matriz*

$$M = \begin{bmatrix} (1-\cos\pi)b^2 + \cos\pi & (1-\cos\pi)bc - d\operatorname{sen}\pi & (1-\cos\pi)bd + b\operatorname{sen}\pi \\ (1-\cos\pi)bc + d\operatorname{sen}\pi & (1-\cos\pi)c^2 + \cos\pi & (1-\cos\pi)cd - a\operatorname{sen}\pi \\ (1-\cos\pi)bd - c\operatorname{sen}\pi & (1-\cos\pi)cd + b\operatorname{sen}\pi & (1-\cos\pi)d^2 + \cos\pi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2b^2-1 & 2bc & 2bd \\ 2bc & 2c^2-1 & 2cd \\ 2bd & 2cd & 2d^2-1 \end{bmatrix}$$

Se o eixo r não passa pela origem, então podemos considerar, no espaço afim, uma translação do vetor $\vec{n}$ para um ponto qualquer de r. Seja este ponto $\mathbf{o}'$ de coordenadas $(e, f, g, 1)$ então procedemos uma translação até a origem, de matriz T^{-1}, aplicamos a reflexão, matriz M e, por fim, aplicamos a translação inversa, matriz T. Obtém-se, assim a matriz $M' = T \cdot M \cdot T^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2b^2-1 & 2bc & 2bd & 0 \\ 2bc & 2c^2-1 & 2cd & 0 \\ 2bd & 2cd & 2d^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 1 & 0 & -f \\ 0 & 0 & 1 & -g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2b^2-1 & 2bc & 2bd & -2[e(b^2-1) + bcf + bdg] \\ 2bc & 2c^2-1 & 2cd & -2[bce + f(c^2-1) + cdg] \\ 2bd & 2cd & 2d^2-1 & -2[bde + cdf + g(d^2-1)] \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.3.3 Matriz de reflexão em torno do plano OXY

Neste caso, dado um ponto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ de coordenadas (x, y, z), ele será refletido no plano OXY de modo que apenas a coordenada z será substituída pelo seu oposto, o que nos leva a concluir que a matriz de transformação é

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Do mesmo modo que na subseção anterior, nos casos de reflexão que usam os planos OXZ e OYZ, a construção da matriz da transformação segue o mesmo raciocínio.

Observe que quaisquer das reflexões que mostramos é uma transformação linear. Tomando, por exemplo, a reflexão T em torno do eixo OX,

$$\begin{aligned} &T(x,y,z) = (x,-y,-z) \Rightarrow \\ &T(\alpha(x_1,y_1,z_1) + \beta(x_2,y_2,z_2)) = T(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ &\qquad = (\alpha x_1 + \beta x_2, -\alpha x_1 - \beta y_2, -\alpha z_1 - \beta z_2) \\ &\qquad = \alpha(x_1,-y_1,-z_1) + \beta(x_2,-y_2,z_2) \\ &\qquad = \alpha T(x_1,y_1,z_1) + \beta T(x_2,y_2,z_2) \end{aligned}$$

Exemplo 5.17. *Dado o plano* Π *que passa pela origem do espaço* $\mathbb{R}^3$ *e contém os vetores* $\vec{u} = (1, \sqrt{2}, 1)$ *e* $\vec{v} = (-2\sqrt{2}, 2, 0)$*, obtenha o ponto* $\mathbf{p}'$ *obtido através da reflexão ortogonal do ponto* $\mathbf{p} = (2,1,0)$ *em relação ao plano* Π*.*

Solução:

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (-2, -2\sqrt{2}, 6)$. Isto significa que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortogonal. Normalizando cada um desses vetores formamos a base ortonormal

$$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}.$$

Sendo ε a base canônica e como os vetores de β formam uma matriz ortogonal, a matriz de mudança de base se ε para β é

$$[I_{\mathbb{R}^3}]_\varepsilon^\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

uma vez que $[I_{\mathbb{R}^3}]_\varepsilon^\beta \cdot [\beta] = I_3 = [\varepsilon]$.

Queremos agora escrever as coordenadas do ponto $\mathbf{p}$ na base ε e em seguida aplicar a matriz M de reflexão em torno do plano OXY e, em seguida, aplicar a matriz de mudança inversa de base, ou seja, $[I_{\mathbb{R}^3}]_\varepsilon^\beta = ([I_{\mathbb{R}^3}]_\beta^\varepsilon)^{-1} = ([I_{\mathbb{R}^3}]_\beta^\varepsilon)^t$.

Contudo, executando o produto $[I_{\mathbb{R}^3}]_\beta^\varepsilon \cdot M \cdot [I_{\mathbb{R}^3}]_\varepsilon^\beta \cdot [\mathbf{p}]$, obtendo assim o ponto

$$\mathbf{p}' = \left(\frac{10 - \sqrt{2}}{6}, \frac{2 - \sqrt{2}}{3}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right).$$

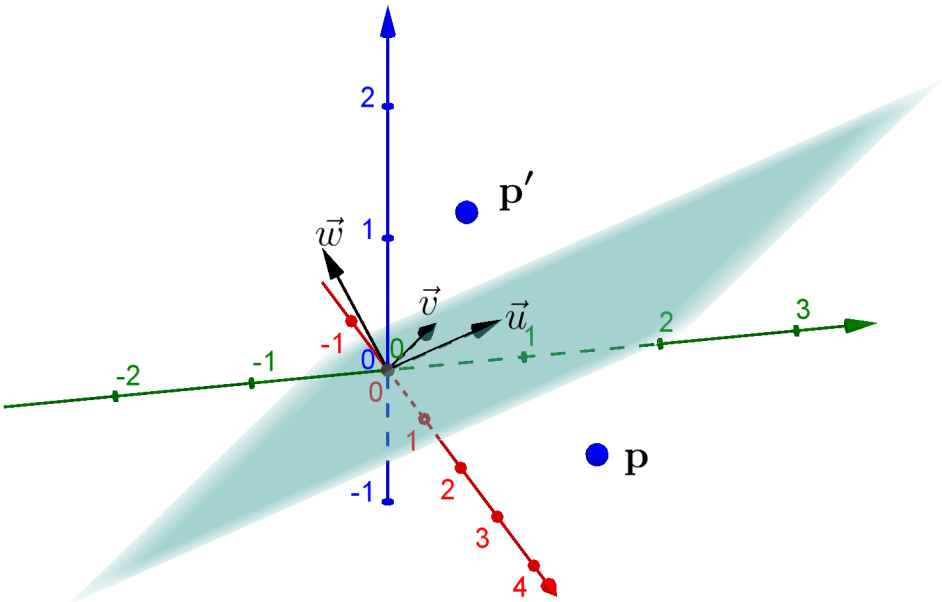


Figura 5.20: O ponto **p'** é a imagem do ponto **p** através da reflexão M

5.4 Cisalhamento

Uma das transformações geométricas lineares e não isométricas é o *cisalhamento*. No espaço $\mathbb{R}^3$ a partir do referencial canônico, definiremos seis tipos de cisalhamento, os quais, aqui, caracterizados pelo *eixo central* (eixo o qual nenhum ponto pertencente a ele será alterado pela transformação) e pelo *eixo de deslocamento* (eixo que determina a direção do cisalhamento).

Definição 5.18. *Seja $\mathcal{G}$ um objeto do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, tratado a partir do referencial canônico, definimos o cisalhamento yx de fator $tg\theta$ como sendo a transformação S_{yx}, onde cada ponto $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ pertencente a $\mathcal{G}$ faz um deslocamento de tamanho igual a $z_0 tg\theta$, tendo OY como eixo central e OX como eixo de deslocamento.*

Pode-se comparar um cisalhamento com o movimento de uma pilha de cartas, onde todas as cartas são movidas em uma mesma direção, avançando cada carta mais (ou menos) que sua vizinha, conforme **Figura 5.21**.

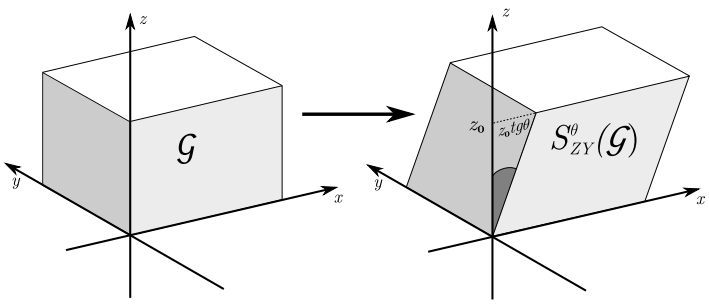


Figura 5.21: Cisalhamento em direção do eixo x sendo y o eixo central.

Contudo, $S_{yx}(\mathbf{p}) = (x + ztg\theta, y, z)$

5.4.1 Matriz do Cisalhamento S_{yz}

É bastante simples a verificação de que tal transformação é linear. Agora, diante o exposto, fica fácil construir a matriz responsável por esta transformação, conforme abaixo:

$$S_{yz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & tg\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se, de modo análogo, definir os cisalhamentos $S_{xy}, S_{xz}, S_{zx}, S_{yz}$ e S_{zy}, conforme esquema abaixo:

$$S = \begin{bmatrix} k & S_{zx} & S_{yx} \\ S_{zy} & k & S_{xy} \\ S_{yz} & S_{xz} & k \end{bmatrix},$$

onde k é o fator de homotetia o qual estudaremos na próxima seção.

Exemplo 5.19. *Dado um objeto $\mathcal{G}$ do espaço $\mathbb{R}^3$, queremos executar um cisalhamento do tipo S_{yx} de ângulo θ, porém na direção do vetor $(\sqrt{5}, -2, 0)$.*

Com efeito, tal vetor encontra-se no plano OXY. Sendo ψ ângulo que ele forma com o vetor da base canônica (1,0,0), então

$$\cos\psi = \frac{\langle (1,0,0), (\sqrt{5}, -2, 0)\rangle}{\|(1,0,0)\|\|(\sqrt{5}, -2, 0)\|} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Por outro lado,

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{2}{3}$$

Agora vamos executar o cisalhamento de um referencial apropriado. Para isso, faremos primeiro uma mudança de referencial obtida através de uma rotação em torno do eixo OZ, ou seja, $[R]^t[\mathcal{G}]$, depois aplicamos o cisalhamento, $[S_{yx}][R]^t[\mathcal{G}]$, e por último aplicamos a mudança inversa de referencial,

$$[R][S_{yx}][R]^t[\mathcal{G}] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & tg\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [\mathcal{G}],$$

ou simplesmente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3}tg\theta \\ 0 & 1 & \frac{2}{3}tg\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [\mathcal{G}],$$

observando $\mathcal{G}$ do referencial canônico.

De modo geral, se $\vec{v}$ pertencente ao plano OXY fazendo um ângulo ψ a partir do eixo OX a matriz de cisalhamento S_{yx} na direção de $\vec{v}$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos\psi \operatorname{tg}\theta \\ 0 & 1 & \operatorname{sen}\psi \operatorname{tg}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.5 Homotetia

Definição 5.20. *Dado um número real k, os pontos $\mathbf{o}$ e $\mathbf{p}$ e o vetor $\vec{v} = \mathbf{p} - \mathbf{o}$, a* homotetia *de fator k a partir do ponto $\boldsymbol{o}$, é a transformação $H_k^{\mathbf{o}}$, não isométrica, onde $H_k^{\mathbf{o}}(\boldsymbol{p}) = \mathbf{p}' = \mathbf{o} + k\vec{v}$.*

Ao ponto $\mathbf{o}$, damos o nome de centro da homotetia. Tal definição está intrinsecamente ligada ao conceito de semelhança de figuras geométricas, tendo natureza afim, já que o paralelismo é conservado. Há, entretanto, uma modificação de maneira diretamente proporcional na distância entre cada ponto com o centro da homotetia, bem como entre cada ponto transformado.

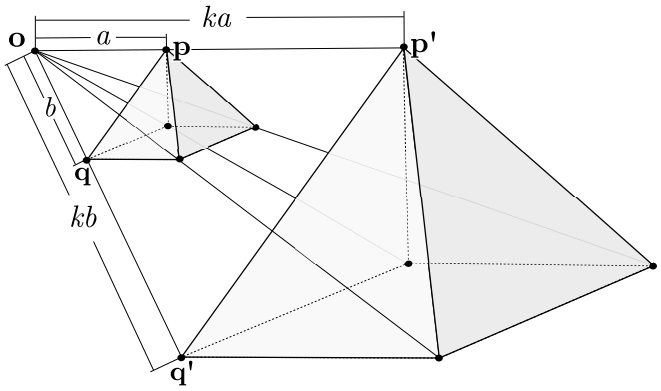


Figura 5.22: Na homotetia a distância entre os pontos $\mathbf{p}'$ e $\mathbf{q}'$ é k vezes a distância entre os pontos $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$

5.5.1 Matriz da Homotetia $H_k^{\mathbf{o}}$

Seja $\mathbf{o} = (a, b, c, 1)$ e $\mathbf{p} = (x, y, z, 1)$, pela definição acima , temos

$$H_k^{\mathbf{o}}(\mathbf{p}) = \mathbf{o} + k(\mathbf{p} - \mathbf{o}) = (a(1-k) + kx, b(1-k) + ky, c(1-k) + kz, 1),$$

ou em notação de matrizes,

$$H_k^{\mathbf{o}}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} a(1-k) + kx \\ b(1-k) + ky \\ c(1-k) + kz \\ 1 \end{bmatrix} = H[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & a(1-k) \\ 0 & k & 0 & b(1-k) \\ 0 & 0 & k & c(1-k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde concluímos que H é a matriz desta homotetia.

Uma homotetia através de um fator k, pode ser chamada de *dilatação*, quando $k \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ou de *contração*, quando $k \in (-1, 1)$.

5.5.2 Outras Homotetias

Sendo $k \in \mathbb{R}$, $E = \{\mathbf{o}, \varepsilon\}$ um referencial e ε a base canônica do $\mathbb{R}^3$, tomemos o plano Π paralelo ao plano determinado pelos vetores $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ tal que $\mathbf{o} \in \Pi$. Agora vamos interpretar geometricamente como se comporta a homotetia de fator k partindo do plano Π na direção e no sentido de $\vec{e}_1$, por exemplo. Um ponto $\mathbf{p} = (x, y, z, 1)$, através desta transformação, dará lugar ao ponto $\mathbf{p}' = (a(1-k) + kx, y, z, 1)$, já que apenas a componente x sofrerá a homotetia. Em outras palavras, se a distância de $\mathbf{p}$ até o plano Π é de a unidades, então a distância de $\mathbf{p}'$ até Π será de ka unidades, como vemos na **Figura 5.23**.

Sabendo que Π delimita dois subespaços em $\mathbb{R}^3$, concluímos que $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ pertencem ao mesmo subespaço delimitado pelo plano Π se $k > 0$, pertencem a subespaços opostos se $k < 0$ e $\mathbf{p}' \in \Pi$, quando $k = 0$. A matriz desta transformação, contudo, será

$$H_{e_1} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & a(1-k) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

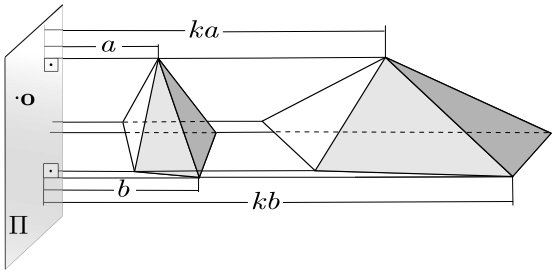


Figura 5.23: Os pontos pertencentes ao objeto se "deslocam" perpendicularmente ao plano Π

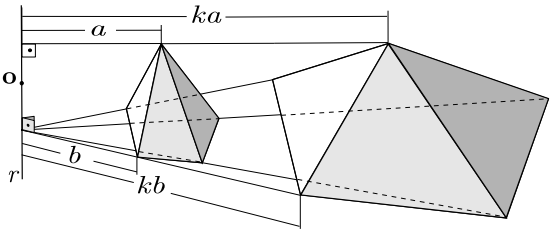


Figura 5.24: Os pontos do objeto se "deslocam" perpendicularmente a reta $r \parallel e_3$

Já vimos, portando que partindo de um ponto do espaço de três dimensões a homotetia ocorre em três direções, conforme seu referencial. Se, por acaso parte, de um plano ortogonal a um dos vetores da base, a homotetia ocorre em apenas na direção deste vetor. E se a homotetia partir de uma reta que passa pelo ponto $\mathbf{o}$ e é paralela a um dos eixos do referencial adotado? É o que veremos agora.

Tomemos agora a reta r que passa pelo ponto $\mathbf{o} = (a, b, c, 1)$, paralela ao eixo e_3, por exemplo, a homotetia de fator k na qual um ponto $\mathbf{p} = (x, y, z, 1)$, cuja distância até a reta r é de a unidades, é transformada no ponto $\mathbf{p}'$ cuja a distância até a reta r é de ka unidades é a transformação $H_r^{\mathbf{o}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}' = (a(1-k) + kx, b(1-k) + ky, z, 1)$. Em outras palavras, esta homotetia, transforma proporcionalmente as medidas de um determinado objeto ao longo do eixo e_1 e e_2, mas mantém idêntica as medidas na direção do eixo e_3.

Contudo, a matriz de tal transformação é

$$H[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & a(1-k) \\ 0 & k & 0 & b(1-k) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

É análoga a dedução da matriz da homotetia que utilizam os demais eixos da base canônica.

Também podemos executar transformações homotéticas com diferentes fatores para cada direção. A partir de um referencial canônico tomemos os planos $\Pi_1 = (a, y, z, 1)$, $\Pi_2 = (x, b, z, 1)$ e $\Pi_3 = (x, y, c, 1)$. Em seguida, executemos a homotetia a partir do plano Π_i de fator k_i, $i \in \{1, 2, 3\}$. Denotando por $H_{\mathbf{o}}$ esta transformação, onde $\mathbf{o} = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = (a, b, c, 1)$, então dado um ponto $\mathbf{p} = (x, y, z, 1)$, temos que $H_{\mathbf{o}}(\mathbf{p}) = (k_1x + a(1-k_1), k_2y + b(1-k_2), k_3z + c(1-k_3))$. Logo, obtemos a matriz

$$H_{\mathbf{o}} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & a(1-k_1) \\ 0 & k_2 & 0 & b(1-k_2) \\ 0 & 0 & k_3 & c(1-k_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chamaremos, assim, o ponto $\mathbf{o}$ de centro da homotetia.

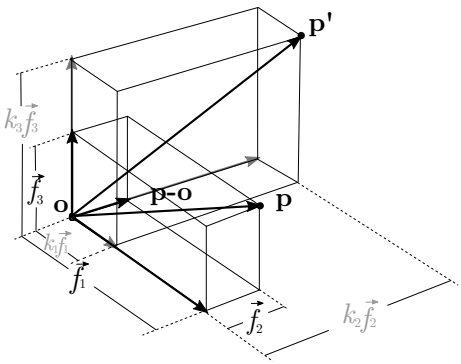


Figura 5.25: Homotetia com diferentes fatores.

Uma outra maneira é ver esta homotetia como na **Figura 5.25**. Neste caso, há um comportamento similar ao estabelecimento de coordenadas tomadas pelo referencial ortogonal $\mathcal{F} = \{\mathbf{o}, \vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}, \}$ o qual é obtido através das coordenadas do vetor $\mathbf{p} - \mathbf{o}$. Temos então, $\mathbf{o} = (a, b, c)$ e $\mathbf{p} = (x, y, z) = \mathbf{o} + (x-a, 0, 0) + (0, y-b, 0) + (0, 0, z-c)$, assim

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \mathbf{o} + k_1(x-a, 0, 0) + k_2(0, y-b, 0) + k_3(0, 0, z-c) \\ &= (a + k_1x - k_1a, b + k_2y - k_2b, c + k_3z - k_3c) \\ &= (k_1x + a(1-k_1), k_2y + b(1-k_2), k_3z + c(1-k_3)) = H_{\mathbf{o}}(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

5.6 Projeção no Plano Paralela um Eixo

Definição 5.21. *Dados no espaço euclidiano um objeto $\mathcal{G}$, um plano Π e uma reta r na direção do vetor $\vec{v}$ não paralelo a Π, dizemos que a projeção paralela de $\mathcal{G}$ no plano Π é a transformação $P : \mathcal{G} \longrightarrow \Pi$ onde, para todo ponto $\mathbf{q} \in \mathcal{G}$, $P(\mathbf{q}) = \Pi \cap r_{\mathbf{q}}$, onde $r_{\mathbf{q}}$ é a reta paralela a r que passa por $\mathbf{q}$.*

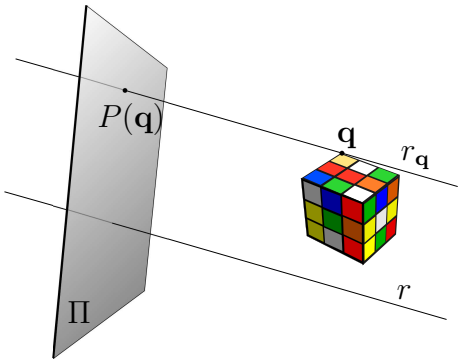


Figura 5.26

5.6.1 Projeção Paralela no Plano OXY

Seja $\vec{v} = (a, b, c)$ um vetor do espaço e $\mathbf{q} = (x, y, z)$, tomemos o escalar k, não nulo, tal que $\mathbf{q} + k\vec{v}$ pertença ao plano OXY. Assim,

$$P(\mathbf{q}) = \mathbf{q} + k\vec{v} = (x + ka, y + kb, z + kc).$$

Como $P(\mathbf{q}) \in OXY$ então $z + kc = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{z}{c}, c \neq 0$ e com isso

$$P(\mathbf{q}) = (x - \frac{az}{c}, y - \frac{bz}{c}, 0).$$

Observe que esta é uma transformação linear, pois

$$P(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

e dado um ponto $\mathbf{q}' = (x', y', z')$ temos

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}') &= \left(x + \delta x' - \frac{a(z + \delta z')}{c}, y + \delta y' - \frac{b(z + \delta z')}{c}, 0\right) \\
&= \left(x + \delta x' - \frac{az}{c} - \frac{\delta a z'}{c}, y + \delta y' - \frac{bz}{c} - \frac{\delta b z'}{c}, 0\right) \\
&= \left(x - \frac{az}{c} + \delta\left(x' - \frac{az'}{c}\right), y - \frac{bz}{c} + \delta\left(y' - \frac{bz'}{c}\right), 0\right) = P(\mathbf{q}) + \delta P(\mathbf{q}')
\end{aligned}$$

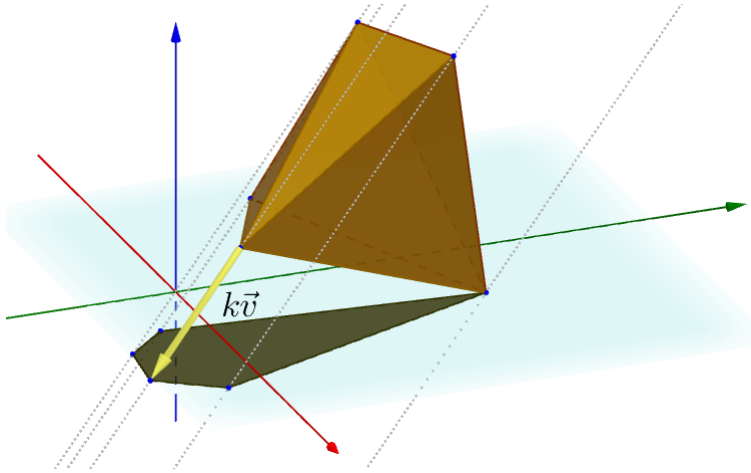


Figura 5.27

Portanto, esta transformação pode ser executada através da matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\dfrac{b}{c} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5.22. *Dado um plano* Π *que passa pelos pontos* $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$, $\mathbf{o} = (1, 0, -1)$ *e* $\mathbf{p} = (2, 0, 1)$ *e um vetor* $\vec{u} = (2, 1, 1)$, *podemos definir a matriz* P *da projeção no plano* Π *através do vetor* $\vec{u}$. *Com efeito, o plano* Π *passa pela origem e é gerado pelos vetores* $\mathbf{n}-\mathbf{o} = \vec{v} = (1, 2, 0)$ *e* $\mathbf{p}-\mathbf{o} = \vec{w} = (1, 0, 2)$. *Utilizando a definição da norma e do produto vetorial podemos encontrar uma base ortonormal a qual dois de seus vetores geram o plano* Π, *ou seja, a base*

$$\beta = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

Agora devemos aplicar a transformação de um referencial adequado. Para isto, aplicamos a matriz

$$I_{\varepsilon}^{\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

que faz a mudança do referencial canônico $\mathcal{E} = \{\mathbf{0}, \varepsilon\}$ *para o referencial* $\mathcal{B} = \{\mathbf{0}, \beta\}$

Tratado neste novo referencial nosso vetor $\vec{u}$ *terá coordenada*

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{6}, -\frac{5}{3}\right).$$

Portanto, nossa matriz de projeção, aplicada no referencial $\mathcal{B}$ *será*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{7\sqrt{2}}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, nossa projeção é aplicada através da composição de três transformações, I_ε^β, P *e* $(I_\varepsilon^\beta)^t$, *onde sua matriz é obtida através do produto de matrizes*

$$P_\Pi = (I_\varepsilon^\beta)^t \cdot P \cdot I_\varepsilon^\beta.$$

Observação 5.23. *No* **Exemplo 5.22**, *se o plano* Π *não passasse pela origem, poderíamos executar tal transformação nos valendo das transformações do espaço afim, onde utilizaríamos as matrizes de ordem 4 com suas devidas translações ao mudarmos de referencial.*

Capítulo 6

Transformações Projetivas

6.1 Espaço Projetivo

Dado o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, tomemos o plano afim Π, de pontos do tipo $(x, y, 1)$, e o ponto O, a origem desse espaço. Seja P um ponto do espaço $\mathbb{R}^3$ não pertencente ao plano Π' formado pelos pontos do tipo $(x, y, 0)$, a reta r que passa pelos pontos O e P intersecta o plano Π no ponto P'. Chamamos P' de *projeção cônica* do ponto P no plano Π.

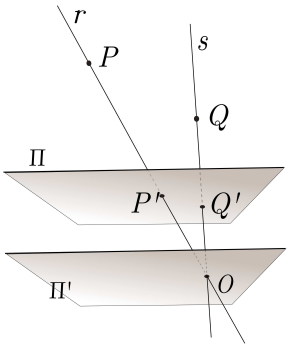


Figura 6.1: P' é a projeção do ponto P no hiperplano Π

Observe que não só P como todos os pontos da reta r são projetados no plano Π no mesmo ponto P'. Cada reta que passa pela origem de $\mathbb{R}^3$, sem que a origem pertença a essa reta pode ser considerada como um ponto projetivo e o conjunto de todos esses pontos projetivos formam o *espaço peojetivo* $\mathbb{RP}^2$.

Os pontos projetivos que pertencem ao plano afim, como o próprio nome sugere, é chamado de *pontos afins do espaço projetivo*. Por outro lado, os pontos que pertencem ao plano Π' são chamados de *pontos ideais ou pontos no infinito*.

Se $P = (x, y, z)$ é um ponto do espaço euclidiano pertencente a uma reta que também passa pela origem, qualquer outro ponto P' pertencente a essa reta, é um múltiplo de P, de modo que se k é um número real não nulo, $P' = kP$. Em outras palavras, qualquer outro representante de P no ponto projetivo pode ser representado como $k(x, y, z)$. Por

isso, define-se comumente a coordenada deste ponto projetivo, que passa por P, como $k[x, y, z]$. Portanto, uma coordenada projetiva é definida a menos de um produto por um escalar.

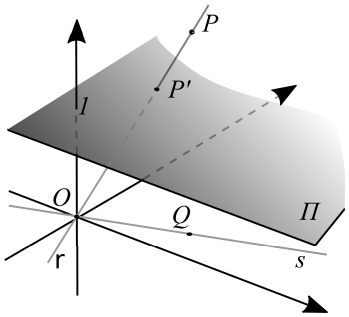


Figura 6.2: $P' = (x_1, y_1, 1)$ é um ponto afim do plano projetivo e $Q = (x_0, y_0, 0)$ representa um ponto ideal.

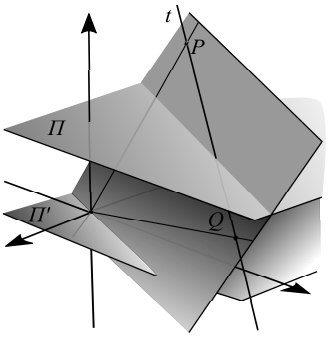


Figura 6.3: A reta projetiva t no $\mathbb{R}^3$ é um plano que passa pela origem.

Sejam r_1 e r_2 duas retas paralelas projetadas no plano Π, $z = 1$, como na **Figura 6.4**, elas representam no espaço $\mathbb{R}^3$ dois planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, respectivamente, que intersectam a origem. Seja r a intersecção entre esses dois planos, sabemos da geometria euclideana que r é paralela a r_1 e r_2 e ainda passa pela origem, ou seja, $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ é um ponto ideal do $\mathbb{RP}^2$.

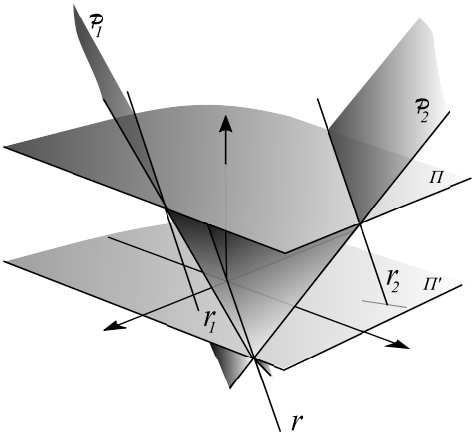


Figura 6.4: Intersecção de duas retas no espaço projetivo.

Essa representação nos permite afirmar que no espaço projetivo não existem retas paralelas. Este fato nos é muito valioso nas representações de imagens do mundo ao nosso redor em fotografias, pinturas, monitores e outras formas de projeção. Olhando,

por exemplo, as bordas de uma estrada reta de cima, notamos que estas bordas são paralelas, porém se nos imaginarmos em pé, no meio da estrada, teremos a impressão que tais bordas se encontram no horizonte. A geometria projetiva se encarrega de representar estas situações, pois como vimos, dadas duas retas, ou ainda, um feixe de retas paralelas, sempre existirá um ponto no infinito onde estas retas se intersectam.

6.2 Matriz de uma Transformação Projetiva

Uma transformação projetiva $T : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ transforma pontos projetivos, isso significa que do ponto de vista do modelo de espaço projetivo apresentado aqui ela transforma uma reta que passa pela origem em outra reta que também passa pela origem. Assim, deduzimos que essa transformação tem natureza linear e é invertível, logo deve existir uma matriz $A_{3\times3}$ invertível capaz de representá-la. Ainda, se T é uma transformação projetiva, $kT(\mathbf{p}) = T(k\mathbf{p}) = T(\mathbf{p})$, isto é, uma transformação projetiva, do mesmo modo que uma coordenada projetiva, é definida a menos de um produto por escalar. Este fato nos permite usar uma transformação projetiva usando um representante do ponto projetivo pertencente ao plano $z = 1$.

Partindo da afirmação acima, analisemos a matriz $A_{3\times3}$ da transformação T no que se refere ao efeito provocado por cada um de seus blocos conforme divisão mostrada abaixo.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & t_1 \\ c & d & t_2 \\ \hline p_1 & p_2 & z \end{array}\right]$$

Vamos denotar o bloco com os elementos a, b c e d como bloco A_{11}, o bloco A_{12} será a matriz com elementos t_1 e t_2, A_{21} a matriz de elementos p_1 e p_2 e A_{22} a matriz de elemento z.

Tomando o elemento ponto afim do plano projetivo $\mathbf{p} = (x, y, 1)$ vamos verificar qual o efeito do bloco A_{12} sobre o ponto $\mathbf{p}$. Na operação

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} ax + by \\ cx + dy \\ 1 \end{array}\right]$$

notamos que o bloco A_{11} é responsável pelas transformações lineares entre os pontos afins e preserva a natureza afim destes pontos.

De maneira semelhante, se aplicarmos esta matriz a um ponto ideal $\mathbf{p'} = (x, y, 0)$, obteremos o ponto ideal $(ax + by, cx + dy, 0)$ que foi gerado de $\mathbf{p'}$ através de uma transformação linear.

Portanto, o bloco A_{11} preserva a natureza dos pontos projetivos, ou seja, pontos ideais são transformados em pontos ideais, e pontos afins são transformados em pontos afins por T. Além disso, o bloco A_{11} mostra que as transformações lineares planas aplicadas no plano $z = 1$ ou $z = 0$ nada mais são que transformações projetivas.

Substituindo na matriz A os elementos do bloco A_{12} temos

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & t_1 \\ c & d & t_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by+t_1 \\ cx+dy+t_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O que nos mostra que a linearidade da transformação e a natureza afim do ponto $\mathbf{p}$ é mantida, essa transformação ainda é seguida de uma translação através do vetor $(t_1, t_2, 0)$.

A relação entre transformação linear e projetiva se mantém entre transformação afim e projetiva quando estamos no plano $z = 1$, isto é, uma transformação projetiva também engloba as translações.

Por outro lado,

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & t_1 \\ c & d & t_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto significa que aplicada a um ponto ideal essa transformação equivale a uma transformação linear sem translação, mas ele se transforma em outro ponto pertencente ao plano $z = 0$. T transforma um ponto ideal em outro.

O bloco A_{22} faz a homotetia em relação origem do planos afim. Ao substituirmos o elemento desse bloco obtemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & t_1 \\ c & d & t_2 \\ \hline 0 & 0 & s \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by+t_1 \\ cx+dy+t_2 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ax+by+t_1}{s} \\ \frac{cx+dy+t_2}{s} \\ 1 \end{bmatrix}$$

se aplicado a um ponto afim ou

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & t_1 \\ c & d & t_2 \\ \hline 0 & 0 & s \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \\ 0 \end{bmatrix}$$

se aplicado em um ponto ideal.

No plano afim, essa matriz aplica uma transformação linear, seguida de uma translação, seguida ainda de uma homotetia de fator $\frac{1}{s}$. No plano $z = 0$, dos pontos ideais, ela aplica apenas uma transformação linear. Pode-se perceber ainda que a natureza dos pontos, seja ideais ou do plano afim, é preservada.

Até agora tivemos resultados bastantes parecidos com os da geometria afim. Falta, por fim, verificarmos qual impacto dos componentes do bloco A_{21}. Para termos uma ideia clara dessa transformação escrevamos a matriz $A_{3\times 3}$ obtida a partir da identidade modificando apenas os elementos do bloco A_{21} e em seguida apliquemos a transformação em um ponto genérico do plano afim e em um ponto ideal.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline p_1 & p_2 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ p_1x+p_2y+1 \end{bmatrix}$$

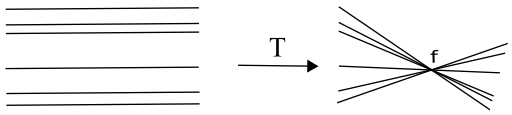


Figura 6.5: Transformação de um ponto do infinito em um ponto de fuga.

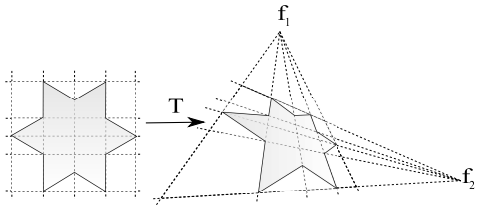


Figura 6.6: Aplicação de uma transformação projetiva com dois pontos de fuga.

e por outro lado

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline p_1 & p_2 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ p_1x + p_2y \end{bmatrix}$$

Primeiramente, observando o primeiro produto, existe infinitos $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $p_1x + p_2y + 1 = 0$, bastando tomar

$$y = -\frac{1 + p_1x}{p_2},\ p_2 \neq 0,$$

mostrando que existem infinitos pontos afins da forma $(x, y, 1)$ que são transformados pela matriz A em pontos ideais.

Por outro lado, de maneira parecida, existem infinitas soluções para a equação $p_1x + p_2y = 1$. Isso significa que existem infinitos pontos ideais da forma

$$\left(x, \frac{1 + p_1x}{p_2}, 0\right),\ p_2 \neq 0$$

que a matriz A transforma em pontos afins do espaço projetivo.

Do ponto de vista do espaço projetivo, afirmar que T transforma pontos ideais em pontos afins equivale a dizer que dado um feixe de retas paralelas no plano afim existe um ponto $\mathbf{f}$ desse plano onde T transforma tais retas em retas que se intersectam em no ponto $\mathbf{f}$ o qual chamamos de *ponto de fuga*.

De maneira análoga, a matriz de uma transformação projetiva do espaço $\mathbb{RP}^3$ tem as mesmas características, porém sendo uma matriz de ordem 4. Neste caso, temos três elementos responsáveis pelas transformações de perspectiva, p_1, p_2 e p_3, conforme podemos ver na matriz B.

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & t_1 \\ d & e & f & t_2 \\ g & h & i & t_3 \\ \hline p_1 & p_2 & p_3 & z \end{array}\right]$$

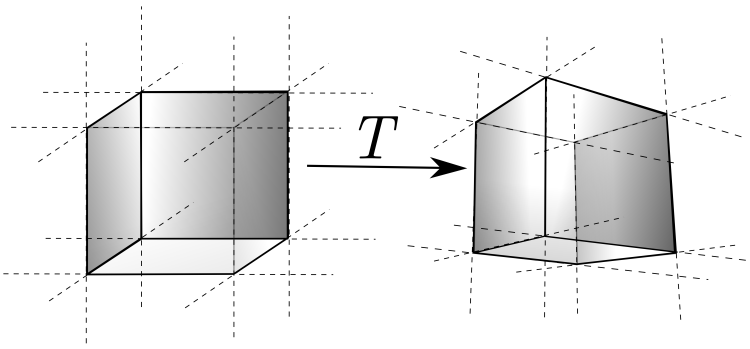


Figura 6.7: Transformação com três pontos de fuga.

Referências Bibliográficas

[1] Barbosa, J. A. T., *Noções sobre Matrizes e Sistemas de Equações Lineares*, 2ª Edição. FEUP Edições, 1999.

[2] Baratojo, J. T., *Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares*, EdiPUCRS, 2008.

[3] Velho, L.; Gomes, J.,*Fundamentos da Computação Gráfica*, 1ª Edição, Impa 2015.

[4] Hefez A.; Fernandes C. de S., *Introdução à Álgebra Linear*, 2ª Edição, SBM, 2016.

[5] Gómez, J. J. D.; Frensel, K. R.; Crissaff, L. dos S., *Geometria Analítica*, 1ª Edição, SBM, 2013.

[6] Lemos, N. A. *Mecânica Analítica*, 2ª Edição, Editora Livraria da Fisica, 2007.

[7] Garcia, A.; Lequain, Y. *Elementos de Álgebra*, 6ª Edição, Editora SBM, 2015.

[8] Munkres, J. R. *Topology: A First Course*, Editora Prentice-Hall, 1975.

[9] Boyer, C. B. *História da Matemática*, Editora Blücher, 1974.