

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MÉTODOS MATEMÁTICOS DA MECÂNICA
NEWTONIANA**

Ricardo Câmara da Silva

Orientador: Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Feira de Santana

Abril de 2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**MÉTODOS MATEMÁTICOS DA MECÂNICA
NEWTONIANA**

Ricardo Câmara da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Feira de Santana
26 de Abril de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA - BIBLIOTECA CENTRAL JULIETA CARTEADO

Silva, Ricardo Câmara da

S583m Métodos matemáticos da mecânica newtoniana / Ricardo Câmara da
Silva - Feira de Santana, 2017.
55f.: il.

Orientador: Jean Fernandes Barros.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

1. Mecânica - Métodos Matemáticos. 2. Mecânica Newtoniana. 3.
Equações de Newton. I. Barros, Jean Fernandes, orient. II. Universidade
Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU:531



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE RICARDO CÂMARA DA SILVA DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos vinte e seis dias do mês de abril de dois mil e dezessete às 9:00 horas no MT55 - Módulo 5, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título “**Métodos Matemáticos da Mecânica Newtoniana**”, do discente **Ricardo Câmara da Silva**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Jean Fernandes Barros (Orientador, UEFS), Jean Paulo dos Santos Carvalho (CETEC-UFRB-Feira) e Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 26 de abril de 2017.

Prof. Dr. Jean Fernandes Barros (UEFS)
Orientador

Prof. Dr. Jean Paulo dos Santos Carvalho (CETEC-UFRB-Feira)

Prof. Me. Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas (UEFS)

Visto do Coordenador:

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos,

A Deus, por sua misericórdia, proteção e provisão;

Aos docentes do PROFMAT/UEFS, em especial ao professor Jean F. Barros, meu orientador, pelo auxílio, disposição e paciência;

A minha esposa Luciana por sua paciência e cuidado;

As amigadas construídas na família PROFMAT/UEFS;

A CAPES pelo apoio e incentivo financeiro ao longo do curso.

Resumo

Neste trabalho buscamos formalizar algébrica e geometricamente os principais aspectos e resultados da mecânica newtoniana. Definimos e descrevemos a estrutura matemática envolvida na análise do movimento de corpos e partículas. Com isso, justificamos a forma especial das equações de Newton. Em seguida, estabelecemos as leis de conservação e damos algumas aplicações. Finalizamos esse trabalho demonstrando a equivalência entre as leis de Kepler e a lei da Gravitação Universal de Newton.

Palavras-Chave: Mecânica Newtoniana, Equações de Newton, Leis de Conservação.

Abstract

In this work we seek to formalize algebraically and geometrically the main aspects and results of Newtonian mechanics. We define and describe the mathematical structure involved in the analysis of the motion of bodies and particles. Thus, we justify the special form of Newton's equations. Next, we establish conservation laws and give some applications. We conclude this work by demonstrating the equivalence between Kepler's laws and Newton's law of Universal Gravitation.

Key-words: Newtonian Mechanics, Newton Equations, Conservation Laws.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Sumário	vi
Introdução	1
1 Os Conceitos Fundamentais da Mecânica	3
1.1 A Estrutura Euclidiana	3
1.2 O Espaço Afim	7
1.3 A Formulação Newtoniana do Espaço-Tempo	13
1.4 As Equações de Newton	22
1.5 Relatividade e Suas Restrições	24
1.6 Alguns Sistemas Mecânicos	26
2 Os Princípios da Mecânica Newtoniana	30
2.1 Campos Conservativos	30
2.2 Leis Dinâmicas de Newton	33
2.3 As Leis de Conservação	34
3 Implicações da Teoria Newtoniana	37
3.1 Campos de Forças Centrais	37
3.2 Investigação da Órbita	41
3.3 As Leis de Kepler	44
3.4 A Lei da Gravitação Universal	47
3.5 A equivalência Newton-Kepler	48
4 Considerações Finais: Mecânica na Graduação	52

Introdução

É fato incontestável que o início do desenvolvimento humano dar-se por meio da observação do movimento, por ser este o mais imediato e intrigante dos fenômenos físicos observáveis. O movimento sempre fascinou ao homem, que desde muito cedo fora atraído pela variação da posição espacial dos objetos e corpos em geral.

As pessoas numa grande metrópole, os automóveis numa rodovia, os aviões na imensidão do céu, são observações de deslocamento de corpos numa sociedade que se configura através do movimento. Daí a necessidade de se entender a mobilidade dos corpos em sua essência científica e a partir daí concretizar a sua adequada compreensão matemática.

Na perspectiva das descobertas, muitos foram os homens que contribuíram para o estudo do movimento dos corpos. Provavelmente o filósofo grego Aristóteles(384-322 a.C) foi o pioneiro no estudo formal do movimento. Ele classificara o movimento em duas classes: os movimentos *naturais*, que prediziam o lugar próprio de cada corpo baseando-se na teoria dos quatro elementos, e os *violentos*, que caracterizavam-se basicamente pela interação entre os corpos através de choques, colisões, empurrões, etc.

Já a Astronomia, destacando-se por contribuições das diversas civilizações, concentrou as primeiras tentativas em identificar e coordenar o movimento dos corpos celestes, bem como o deslocamento dos homens na superfície terrestre, ambos através de abordagens geométricas. O grego Aristarco de Samos(310 a.C-230 a.C) foi um dos pioneiros no cálculo das distâncias astronômicas entre o Sol e a Terra, a Terra e a Lua e e a Lua e o Sol. Seus cálculos também proporcionaram excelentes estimativas para os tamanhos desses astros.

Adjacente ao movimento dos astros, destacavam-se os questionamentos sobre quais seriam suas causas e essência no cosmo. Entender o movimento dos astros era imprescindível para a busca de respostas para as clássicas reflexões filosóficas: de onde viemos?, para onde vamos?, qual é a origem do movimento dos astros?, etc.

Em perspectiva de organização cosmológica surge o geocentrismo de Cláudio Ptolomeu(90-168), que perdurara por séculos. Até que por volta do início do século XVI, um pensamento distinto surge com Nicolau Copérnico(1473-1543), fixando o Sol como o centro do Universo.

As concepções de Copérnico alcançaram grande amplitude e aceitação entre alguns dos cientistas da época. Destacaram-se neste sentido os cientistas Galileu Galilei(1564-1642), Johannes Kepler(1571-1630) e Issac Newton(1643-1727), sendo o último dentre eles

o sintetizador das leis gerais do movimento e o pioneiro em formalizar a força vinculada à origem dos movimentos planetários e das suas trajetórias curvas no espaço.

Motivadas por um fascínio pelo movimento, as notas que se seguem buscam recapitular, por um viés “moderno”, a consolidação da mecânica newtoniana. No Capítulo I, apresentamos os conceitos fundamentais da mecânica. Destacam-se neste capítulo a estrutura espaço-temporal do movimento e sua relatividade. No Capítulo II, são apresentados os princípios básicos da mecânica newtoniana, como as leis de conservação, as leis dinâmicas e, em destaque, a noção matemática de campo conservativo.

Já no Capítulo III, onde o conceito de campo central de forças é apresentado, destacamos a sua importância para a investigação das órbitas. Ainda neste capítulo são reapresentadas para o leitor as leis de Kepler e a Gravitação Universal de Newton, bem como a equivalência teórica entre ambas. Por fim, no capítulo IV, encontram-se algumas concepções acerca do ensino de Mecânica na graduação em Matemática.

Capítulo 1

Os Conceitos Fundamentais da Mecânica

1.1 A Estrutura Euclidiana

Por *Corpo* (ou *Partícula*) entendemos todo ente físico cujas dimensões podem ser desprezadas quando descrevemos seu movimento. O movimento de corpos no espaço, que é o conjunto das suas possíveis posições, pode ser descrito através de observações *uni*, *bi* e *tri-dimensionais*. Adjacente ao deslocamento e à posição desses objetos no espaço sempre existe uma referência adequada que proporciona a modelagem mais simples do movimento.

Para esse último feito, dota-se o espaço de uma *estrutura euclidiana*, que é uma estrutura de espaço vetorial munida de uma forma bilinear simétrica definida positiva (produto interno), onde os pontos passam a ter uma posição bem definida, de maneira que se torna possível identificar se eles estão em repouso ou em movimento, bem como equacionar todo arcabouço físico envolvido no fenômeno que se deseja estudar.

Uma vez fixado um referencial, repouso e movimento acabam sendo fenômenos mecanicamente opostos e dão origem às subdivisões da Mecânica, listadas a seguir:

- **Estática** é a parte da Mecânica responsável por estudar o equilíbrio dos corpos devido a neutralização de efeitos internos e externos.
- **Cinemática** é o ramo da Mecânica responsável por estudar a trajetória descrita pelo movimento de corpos, sem se preocupar com as causas do movimento.
- **Dinâmica** é a subdivisão da Mecânica responsável por estudar as causas do movimento de corpos.

Nota-se que a cinemática preocupa-se com a análise da geometria da trajetória descrita

pelos objetos ao passo que a dinâmica procura caracterizar como e por qual motivo o corpo entrou em movimento.

Uma noção de crucial importância, que provém de uma estrutura euclidiana, é a noção de distância entre dois pontos. Dados dois pontos A e B do espaço, denotamos a distância entre eles por $d(A, B) = \|A - B\|$, onde $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ é a norma euclidiana usual. Facilmente pode-se ver que tal função satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d \geq 0$, e $d(A, B) = 0$ se, e somente se, $A = B$;
2. $d(A, B) = d(B, A)$, para todos A e B ;
3. para todos A, B e C , $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

A distância permite introduzir sobre uma reta, no plano e no espaço tridimensional a noção de coordenada, propriedade marcante da estrutura euclidiana. Para mais detalhes sobre a distância euclidiana o leitor pode consultar [10]. Se fizermos inicialmente uma restrição no movimento considerando as trajetórias das partículas como retilíneas e a referência como sendo a origem \mathbf{O} da estrutura euclidiana, observamos que o movimento unidimensional encontra-se concatenado analiticamente à reta real \mathbb{R} , isto é, ao espaço unidimensional.

A coordenada de uma partícula P numa trajetória retilínea unidimensional num dado instante t_0 , que será denotada por $C_1(P)$, é definida por $C_1(P) = \pm d(P, \mathbf{O}) = \pm |P - \mathbf{O}| = x_P$ e representa a posição da partícula P no referido instante. A diferença $P - \mathbf{O}$ carrega em si a ideia de referência à origem da reta real e se P encontra-se a direita de \mathbf{O} sua coordenada tem sinal positivo e, terá sinal negativo, em caso contrário.

Dados dois pontos A e B sobre a reta, se a partir de certo instante $d(A, \mathbf{O})$ deixa de ser constante, então existe movimento de A em relação à origem. Caso contrário o ponto A encontra-se em repouso. Se porém $d(A, B)$ variar com o passar do tempo, então as partículas referenciadas em A e B movem-se uma em relação à outra.

Na figura 1.1, temos, para um instante t determinado, $C_1(A) = 2$, $C_1(B) = 4, 6$, $C_1(C) = 7$ e $C_1(E) = -1$. Denotamos $C_1(\mathbf{O}) = 0$ como a coordenada da origem da reta ou eixo real. Além disso, as partículas referenciadas nos pontos A, C e E encontram-se em movimento em relação à origem e fluem no sentido crescente da trajetória (movimento progressivo) ao passo que a partícula centrada em B também movimenta-se, mas flui no sentido oposto (movimento retrógrado). A partir do instante t nota-se que a partícula centrada em B se afasta de C e se aproxima de E e A .

O movimento bidimensional atrela-se semelhantemente ao plano \mathbb{R}^2 . Nesse espaço as coordenadas de uma partícula são unicamente determinadas pela referência à origem e em relação aos eixos ortogonais. As coordenadas de uma partícula P numa posição qualquer dentro desse espaço para um dado instante serão denotadas por $C_2(P) = (x_P, y_P)$, em que

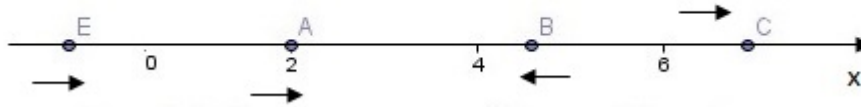


Figura 1.1: Partículas se deslocando sobre uma mesma reta. Fonte: o Autor.

x_P representa a posição da partícula P em relação ao eixo horizontal x e y_P é a posição de P em relação ao eixo vertical y , num dado instante.

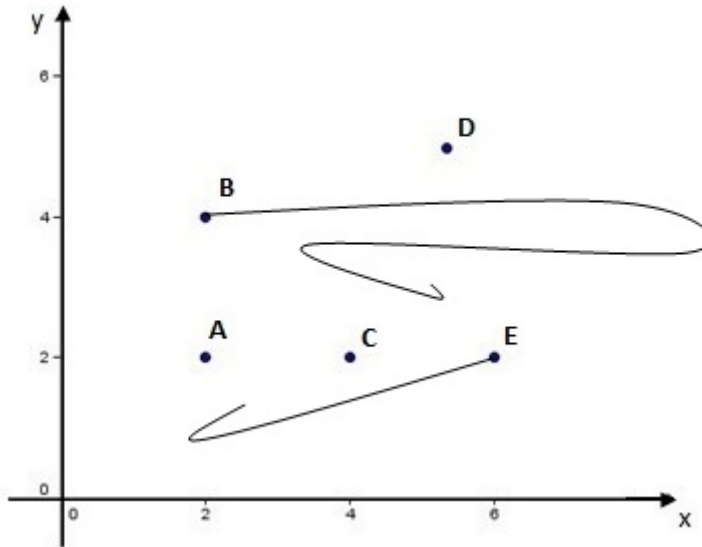


Figura 1.2: Partículas se deslocando ou em repouso em \mathbb{R}^2 . Fonte: o Autor.

Na figura 1.2 temos $C_2(A) = (2, 2)$, $C_2(B) = (2, 4)$, $C_2(C) = (4, 2)$, $C_2(D) = (5, 5, 5)$ e $C_2(E) = (6, 2)$ no instante t_0 . De maneira análoga ao caso unidimensional denotamos $C_2(\mathbf{O}) = (0, 0)$ como as coordenadas da origem. As partículas B e E encontram-se em movimento em relação à origem adotada ao passo que as partículas A, C e D estão em repouso.

Já o movimento tridimensional vincula-se com o espaço \mathbb{R}^3 , onde as partículas podem ser referenciadas em relação à origem e ao triedro ortogonal. As coordenadas de uma partícula P numa posição qualquer para um dado instante dentro do espaço tridimensional serão denotadas por $C_3(P) = (x_P, y_P, z_P)$, em que x_P , y_P e z_P representam as posições da partícula P em relação aos eixos x , y e z , respectivamente, em relação a origem $C_3(\mathbf{O}) = (0, 0, 0)$. A figura 1.3 mostra os pontos A, B, C, D, E, F e G em \mathbb{R}^3 .

Nota-se facilmente que A, B, C e E encontram-se em movimento e D, F e G em repouso. As trajetórias de B, C e E possuem aspecto “curvo” e A movimenta-se em linha reta no

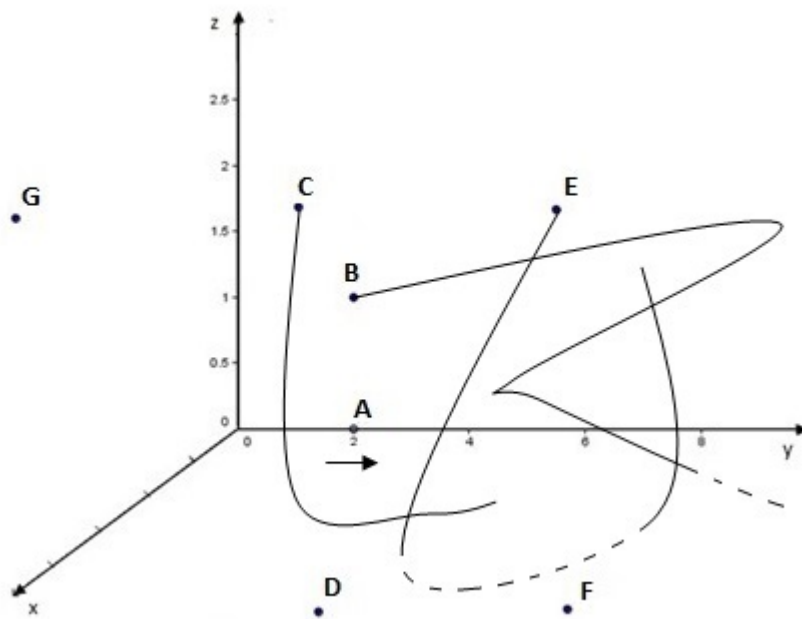


Figura 1.3: Partículas se deslocando ou em repouso em \mathbb{R}^3 . Fonte: o Autor.

sentido crescente do eixo y . Observe que $C_3(A) = (0, 2, 0)$ e $C_3(F) = (4, 8, 0)$ para o instante t_0 .

É o espaço tridimensional quem propicia um ambiente onde podemos estudar o movimento de um conjunto de partículas o mais próximo possível da realidade física.

Podemos observar que a estrutura euclidiana é a *estrutura canônica*, isto é, a estrutura de referência mais simples em que os espaços uni, bi e tri-dimensionais têm origem \mathbf{O} fixada, de modo que as posições das partículas nesses espaços são determinadas em relação à origem. O tempo também é unidimensional, e desenvolve-se de maneira contínua e suave sobre a reta \mathbb{R} , concomitante ao movimento das partículas .

A estrutura euclidiana impõe ao estudo do movimento uma referência sem a qual seria impossível modelá-lo. No entanto, existe a possibilidade de analisar um movimento sem necessariamente depender da referência à origem da estrutura euclidiana. Basta detacarmos para o deslocamento da partícula um ponto de partida e um ponto de chegada, sem que um desses pontos coincida necessariamente com a origem \mathbf{O} referenciada, de forma que esse ponto de partida se desloque continuamente ao passo que referencia o movimento. Nessa estrutura os pontos e os vetores poderão não coincidir como antes. Com isso temos uma nova origem \mathbf{O}' definida e fixada para cada instante t do movimento, isto é, uma referência variável continuamente no tempo.

Isso significa que o movimento pode ocorrer dentro de um espaço euclidiano sem que

se leve em consideração, inicialmente, um observador específico. As partículas estariam “livres” dentro dessa nova perspectiva e ocupariam variadas posições no espaço. A movimentação seria apenas “perceptível” para um referencial externo. Tal fato parece de início estranho, mas é uma das proposições do formalismo *newtoniano-galileano* e ocorre graças a algumas características e propriedades que se podem acrescentar a uma estrutura euclidiana quando a ela associamos um conjunto não vazio de pontos que se distinguem dos vetores do espaço, o que será objeto de estudo das próximas seções.

1.2 O Espaço Afim

Para esta seção, tomamos como referência básica o livro [9], onde o leitor interessado pode obter mais informações.

Desprender-se da referência à origem fixa da estrutura euclidiana não significa deixar de ter uma referência, pois é o movimento intrínseco ao referencial e o referencial intrínseco ao movimento. Como intuitivamente já se sabe, podemos destacar outros pontos do espaço e analisar o movimento de uma partícula a partir deles, de maneira que uma partícula em movimento passa por um desses pontos tendo sua referência deslocada de maneira contínua. Isso implica podermos pensar informalmente num movimento dentro de um espaço vetorial onde se esqueceu qual dos pontos é a origem.

De início precisamos discutir até que momento pontos e vetores “coincidem”. Na estrutura euclidiana padrão ou canônica apresentada na seção 1.1 os pontos e os vetores do espaço se identificam, pois sendo nulas as coordenadas da origem do sistema de referência existe uma bijeção entre os pontos do espaço e o espaço vetorial definido a partir da origem. Acontece que um espaço vetorial pode ser definido a partir de qualquer outro ponto do espaço, pois se tratando de espaços vetoriais as representações de seus elementos podem ser tomadas em qualquer ponto do espaço se forem preservadas as direções e os sentidos dos vetores. Isso significa que em qualquer outra configuração de referência distinta da canônica os pontos e os vetores não mais se identificam.

Definição 1.1. Um *espaço afim* associado ao espaço vetorial \mathbb{R}^n é um conjunto de pontos \mathbb{A}^n tal que

- (i) Para cada ponto $A \in \mathbb{A}^n$ e para cada vetor $v \in \mathbb{R}^n$ existe um único ponto $B \in \mathbb{A}^n$ tal que $\overrightarrow{AB} = v \in \mathbb{R}^n$;
- (ii) Se $\overrightarrow{AB} = v$ e $\overrightarrow{BC} = u$ são elementos de \mathbb{R}^n , então $\overrightarrow{AC} = v + u \in \mathbb{R}^n$. (Identidade de Chasles)

Neste caso, dizemos que \mathbb{A}^n tem *dimensão* n .

A idéia implícita na definição 1.1 é considerarmos duas cópias de \mathbb{R}^n , uma para os vetores e outra para os pontos de maneira que teremos um conjunto de pontos sem estrutura

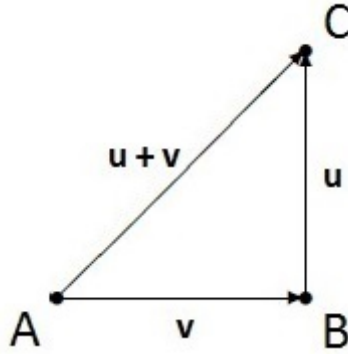


Figura 1.4: Correspondência entre pontos e vetores de \mathbb{R}^n .

Fonte: o Autor.

no espaço e um conjunto de vetores livres atuando sobre esses pontos. Intuitivamente, pode-se pensar o conjunto dos vetores como um conjunto de forças movendo os pontos (as partículas) do outro conjunto.

Note que o ponto B pode ser compreendido como sendo a soma do ponto $A \in \mathbb{A}^n$ com o vetor $v \in \mathbb{R}^n$, isto é, $B = A + v$. Observa-se também que a soma de dois pontos de \mathbb{A}^n não está definida, mas a diferença entre dois de seus pontos constitui um vetor em \mathbb{R}^n .

Além disso, no espaço vetorial \mathbb{R}^n ocorre para todo vetor v que $v + \mathbf{0} = v$, o que torna a origem $\mathbf{0}$ um ponto que se distingue dos demais. Isso porque observa-se claramente que $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ pode ser obtido por meio de todo vetor que se inicia e termina num mesmo ponto, isto é, para todo $A \in \mathbb{A}^n$ tem-se $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA} \in \mathbb{R}^n$.

Nota-se que \mathbb{R}^n executa uma ação de grupo sobre \mathbb{A}^n uma vez que cada vetor $u \in \mathbb{R}^n$ atua sobre todo ponto $P \in \mathbb{A}^n$ deslocando-o para uma nova posição Q do espaço tal que $Q = P + u$, isto é, $\overrightarrow{PQ} = u$. De fato, \mathbb{R}^n age transitiva e livremente sobre \mathbb{A}^n .

Proposição 1.2. *Outras propriedades relevantes do espaço afim são:*

1. Se, dado $u \in \mathbb{R}^n$, existe $A \in \mathbb{A}^n$ tal que $A = A + u$, então $u = \mathbf{0}$. (Livre)
2. O simétrico de $\overrightarrow{AB} = v$ é o vetor $\overrightarrow{BA} = -v$.
3. $\forall P \in \mathbb{A}^n$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, tem-se que $P + (u + v) = (P + u) + v = (P + v) + u$. (Transitividade)

Demonstração. A afirmação 1 é imediata. Vejamos, para 2, pondo $v = \overrightarrow{AB}$ e $x = \overrightarrow{BA}$, por (ii) da definição 1.1, segue-se que $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = v + x \Rightarrow x = -v$. Agora, para 3, dado $P \in \mathbb{A}^n$, por (i) da definição 1.1, segue-se que existem únicos $C, D \in \mathbb{A}^n$ tais que $\overrightarrow{CP} = u$ e $\overrightarrow{PD} = v$. Logo, por (ii), $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PD} = u + v$. Isto significa que $D = C + (u + v)$. Desta forma, $C + (u + v) = D = P + v = (C + u) + v$. A outra igualdade é obtida de forma análoga. \square

É claro que o conceito de espaço afim não se limita ao espaço vetorial \mathbb{R}^n , mas por praticidade, concentraremos nossa atenção para os espaços afins sobre esse espaço vetorial.

Exemplo 1.3. O conjunto L de todos os pontos (x, y) que satisfazem a equação $x + y - 1 = 0$ é um espaço afim unidimensional. De fato, considerando a ação

$$(x, y) \mapsto (x, 1 - x) + u := (x + u, 1 - x - u), \forall u \in \mathbb{R},$$

temos que, dados $A = (a, 1 - a)$ e $u \in \mathbb{R}$, tomando $B = (a + u, 1 - a + u)$, temos que $\overrightarrow{AB} = u$. Agora, dados $u, v \in \mathbb{R}$ tais que $B = (a + u, 1 - a + u)$ e $C = (b + v, 1 - b + v)$, temos que

$$C = (A + u) + v = ((a + u) + v, 1 - (a + u) + v) = (a + (u + v), 1 - a + (u + v)) = A + (u + v).$$

Observemos que L tem como lugar geométrico a reta que passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$. De fato, L é a translação da reta $x + y = 0$.

Exemplo 1.4. Mais geralmente, o subconjunto $H \subset \mathbb{R}^n$ dos pontos (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisfazem a equação

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - 1 = 0$$

sob a ação $A_+ : H \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow H$ definida por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + u := (x_1 + u_1, x_2 + u_2, \dots, x_{n-1} + u_{n-1}, 1 - x_1 - u_1 - x_2 - u_2 - \dots - x_{n-1} - u_{n-1}),$$

$\forall u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, é um espaço afim $(n - 1)$ -dimensional, que denominamos de *hiperplano*. Trata-se do hiperplano que passa pelos pontos das extremidades dos vetores da base canônica de \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.5. O conjunto P dos pontos (x, y, z) de \mathbb{R}^3 que satisfazem a igualdade $x^2 + y^2 = z$ sob a ação $P \times \mathbb{R}^2 \rightarrow P, \forall u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$(x, y, x^2 + y^2) + u := (x + u_1, y + u_2, (x + u_1)^2 + (y + u_2)^2)$$

também constitui um espaço afim. P é um parabolóide de revolução com eixo em $0z$.

Uma curiosidade importante é que as geometrias dos espaços afins e dos espaços vetoriais possuem características distintas. Isso porque as propriedades geométricas de um espaço vetorial não variam quando submetidas ao grupo das transformações lineares bi-jetivas ao passo que num espaço afim tais propriedades são invariantes sob o grupo das transformações afins bi-jetivas, e esses dois grupos não são isomorfos por haverem mais transformações afins do que transformações lineares, ver Proposição 1.10.

Por distinguir pontos de vetores, os espaços afins e sua geometria são estruturas pertinentes para lidar com movimentos, trajetórias, forças, etc, bem como para propiciar uma representação “limpa” da cinemática e da dinâmica.

Teorema 1.6. *Seja R um subespaço vetorial k -dimensional ($k \leq n$) de \mathbb{R}^n . Então, R (visto como um conjunto) é um espaço afim associado a \mathbb{R}^k .*

Demonstração. Mostremos (i) e (ii) da definição 1.1. Mostremos (i), dados $A \in R$ e $u \in \mathbb{R}^k$, pelo fato de que R é fechado com respeito a adição de vetores, tomando $B = A + u \in R$, temos o desejado. Para mostrarmos (ii), dados $u, v \in \mathbb{R}^k$, digamos $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{BC}$, temos que $\overrightarrow{AC} = u + v$, como queríamos demonstrar. \square

O teorema fornece-nos uma infinidade de espaços afins sobre \mathbb{R}^n , já que qualquer subespaço vetorial desse espaço é capaz de gerar um espaço afim sobre si mesmo. Em particular, todo espaço vetorial é um espaço afim. Além disso, os subespaços vetoriais podem gerar espaços afins quando fixamos um ponto de passagem $P \in \mathbb{R}^n$ e um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n , como segue a

Definição 1.7. *Seja D subespaço vetorial de \mathbb{R}^n e $P \in \mathbb{A}^n$. O conjunto $\mathfrak{R} \subset \mathbb{A}^n$ tal que $\mathfrak{R} = \{P + u; u \in D\}$ é dito subespaço afim de \mathbb{A}^n .*

O conjunto D diz-se *subespaço de direções* de \mathfrak{R} e caso ocorra $\mathfrak{R} = P + D$ dizemos que \mathfrak{R} é o subespaço afim de \mathbb{A}^n que passa por P e tem direção D . Como consequência da definição 1.7, segue-se que o paralelismo no espaço deriva imediatamente das direções dos espaços afins.

De posse do espaço afim \mathbb{A}^n podemos estudar as translações e os diversos movimentos das partículas. Antes de partirmos para tal estudo fazem-se essenciais algumas considerações.

Dados $C = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ um conjunto de pontos de \mathbb{A}^n e $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, para cada $P \in \mathbb{A}^n$, consideremos a combinação linear $\sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{PP_i}$. Supondo que $\sum_{i=1}^k a_i = 0$, é fácil ver que, dado $Q \in \mathbb{A}^n$,

$$\sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{PP_i} = \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{QP_i}.$$

De fato, dado $P \in \mathbb{A}^n$, usando a identidade de Chasles,

$$\sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{PP_i} = \sum_{i=1}^k a_i (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP_i}) = \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) \overrightarrow{PQ} + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{QP_i} = \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{QP_i}.$$

Agora, supondo que $\sum_{i=1}^k a_i = 1$, podemos mostrar que, dados $P, Q \in \mathbb{A}^n$,

$$P + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{PP_i} = Q + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{QP_i}.$$

Vejam os,

$$\begin{aligned}
P + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{PP_i} &= P + \sum_{i=1}^k a_i (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP_i}) \\
&= P + \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) \overrightarrow{PQ} + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{QP_i} \\
&= P + \overrightarrow{PQ} + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{QP_i} \\
&= Q + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{QP_i},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Isto mostra-nos que o ponto $X = P + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{PP_i}$ independe da origem $P \in \mathbb{A}^n$. Esta afirmação motiva a definição abaixo.

Definição 1.8. Seja $C = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ um conjunto de pontos de \mathbb{A}^n e $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. Dado $P \in \mathbb{A}^n$, o ponto $P + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{PP_i}$, onde $\sum_{i=1}^k a_i = 1$, é denominado a *combinação afim* ou *combinação baricêntrica*, ou simplesmente *baricentro*, dos pontos P_1, P_2, \dots, P_k associados aos pesos a_1, a_2, \dots, a_k , denotado por $\sum_{i=1}^k a_i P_i$.

Da definição acima, segue-se que, dados $P_1, P_2, \dots, P_k \in \mathbb{A}^n$ e $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, o baricentro X dos pontos P_i 's associados aos pesos a_i 's é o único ponto tal que

$$\overrightarrow{PX} = \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{PP_i}, \text{ para todo } P \in \mathbb{A}^n.$$

Desta forma, fazendo $X = P$, concluímos que X é o único ponto tal que $\sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{XP_i} = 0$.

Definição 1.9. Sejam \mathbb{A}_1^n e \mathbb{A}_2^m dois espaços afins sobre os espaços vetoriais \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , respectivamente. Uma aplicação $T : \mathbb{A}_1^n \rightarrow \mathbb{A}_2^m$ é uma *transformação afim* se preserva baricentros, isto é, dados a_1, a_2, \dots, a_k e P_1, P_2, \dots, P_k , tem-se que

$$T\left(\sum_{i=1}^k a_i P_i\right) = \sum_{i=1}^k a_i T(P_i),$$

onde $\sum_{i=1}^k a_i = 1$.

Observemos que, dada uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, e dados $P \in \mathbb{A}_1^n$ e $Q \in \mathbb{A}_2^m$, temos que a transformação $T : \mathbb{A}_1^n \rightarrow \mathbb{A}_2^m$ definida por $T(P + v) = Q + L(v)$ é

afim. Vejamos, dados $P_1, P_2, \dots, P_k \in \mathbb{A}^n$ e $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k a_i(P + \overrightarrow{PP_i}) &= P + \sum_{i=1}^k \overrightarrow{a_i P(P + \overrightarrow{PP_i})} \\ &= P + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{PP_i} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k a_i(Q + L(\overrightarrow{PP_i})) &= Q + \sum_{i=1}^k \overrightarrow{a_i Q(Q + L(\overrightarrow{PP_i}))} \\ &= Q + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{L(PP_i)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{i=1}^k a_i(P + \overrightarrow{PP_i})\right) &= T\left(P + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{PP_i}\right) \\ &= Q + L\left(\sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{PP_i}\right) \\ &= Q + \sum_{i=1}^k a_i L(\overrightarrow{PP_i}) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i(Q + L(\overrightarrow{PP_i})) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i T(P + \overrightarrow{PP_i}). \end{aligned}$$

Portanto, T é afim. Reciprocamente,

Proposição 1.10. *Dada a transformação afim $T : \mathbb{A}_1^n \rightarrow \mathbb{A}_2^m$, existe uma única transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $T(P + v) = T(P) + L(v)$, para todo $P \in \mathbb{A}_1^n$ e para todo $v \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Basta definirmos $L(v) = \overrightarrow{T(P)T(P+v)}$. □

Uma consequência imediata da proposição acima é que toda transformação afim leva reta em reta.

Exemplo 1.11. As translações em \mathbb{R}^n são transformações afins. De fato, sendo $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\tau(v) = P_0 + v$ e pondo $\tau(0) = P_0$, basta tomarmos $L(v) = v, \forall v \in \mathbb{R}^n$ e $P = P_0$. Das considerações acima, segue-se que τ é uma transformação afim.

Da proposição 1.10, segue-se que a composição de transformações afins é uma transformação afim. Além disso, uma transformação afim é bijetiva se, e somente se, a transformação linear correspondente é um isomorfismo (linear). Uma transformação afim bijetiva é dita um *isomorfismo (afim)*. Neste caso, os espaços afins são ditos *isomorfos*. Sendo assim,

$$\mathbb{A}_1^n \text{ e } \mathbb{A}_2^m \text{ são isomorfos se, e somente se, } n = m.$$

Agora, fixado um ponto $O \in \mathbb{A}^n$, cada partícula pode ser nele referenciada obedecendo a definição a seguir.

Definição 1.12. Seja \mathbb{A}^n um espaço afim associado à \mathbb{R}^n . Para um ponto O fixo de \mathbb{A}^n e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ uma base de \mathbb{R}^n , dizemos que o par $[O, \beta]$ é um *sistema referencial* (ou *sistema de coordenadas afins*), em \mathbb{A}^n .

De posse dessa definição, como todo vetor $v = \overrightarrow{OP} \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear de β , existem (únicos) $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n$. Dizemos então que (a_1, a_2, \dots, a_n) são as coordenadas afins de P em relação ao sistema referencial $[O, \beta]$.

Exemplo 1.13. Para $P = O + 3e_1 + 4e_2 + 5e_3$, onde $e = (e_1, e_2, e_3)$ representa a base canônica de \mathbb{R}^3 , temos $(3, 4, 5)$ são as coordenadas do ponto P no referencial $[O, e]$.

As coordenadas afins dos pontos do espaço constituem uma ferramenta essencial para formalizarmos analiticamente o movimento dos corpos nos âmbitos uni, bi e tridimensionais. A próxima seção sintetiza a aplicabilidade desses conceitos com o formalismo newtoniano.

1.3 A Formulação Newtoniana do Espaço-Tempo

Nesta seção, consideraremos que o nosso *espaco* é tridimensional e euclidiano e o *tempo* é unidimensional. Este é um dos fatos experimentais básicos da teoria da Mecânica Clássica (M.C.) (conforme [2] e [3]). Já sabemos também que o estudo do movimento necessita de sistema de coordenadas, um referencial, que pode ser de origem:

- (i) *inercial ou galileana*, quando encontra-se em velocidade constante ou nula;
- (ii) *não-inercial*, quando a velocidade é variável, isto é, existe uma aceleração não nula atuando no sistema.

Outros dois fatos experimentais da M.C. são:

1. **O Princípio da Relatividade de Galileu - PRG:** Existem sistemas referenciais, ditos *inerciais*, que possuem as seguintes propriedades:

- (a) A todo instante, todas as leis da natureza são as mesmas para quaisquer desses sistemas que sejam adotados;
- (b) Qualquer movimento retilíneo uniforme dentro desses sistemas de coordenadas é em si próprio inercial.

2. O Princípio da Determinância de Newton - PDN: O estado inicial de um sistema mecânico (a totalidade das posições e velocidades de seus pontos em algum momento do tempo) determina unicamente todo o seu movimento.

Em 1687 Isaac Newton reformulou de forma mais simples o princípio da relatividade galileano em seu trabalho intitulado *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Newton afirmou que um referencial inercial é aquele para o qual as partículas não sofrem a influência ativa de forças.

Já Albert Einstein, durante a sua fundamentação da *Teoria da Relatividade Geral* em 1915, afirmou que uma vez escolhido um sistema de coordenadas de modo que as leis da Física tenham nele uma aparência mais simples, essas mesmas leis são também válidas para qualquer outro sistema de coordenadas obtido via translação uniforme do sistema de coordenadas no início fixado.

Ao concebermos as posições e velocidades iniciais de um sistema físico podemos compreender o seu movimento em estágios anteriores e posteriores ao longo da linha do tempo. Essa é uma interpretação imediata do PDN. Assim, pondo-se inicialmente a Terra como referência, pode-se transferir o mesmo sistema físico para outros referenciais inerciais do espaço por meio das translações afins e neles as mesmas leis obtidas anteriormente serão preservadas. Na realidade, todo sistema de coordenadas associado a Terra ou a outros astros, como o Sol e as Estrelas, são somente aproximadamente inerciais.

Relembremos que \mathbb{R}^n age livre e transitivamente sobre \mathbb{A}^n . Esta ação de grupo, denominado *grupo de deslocamentos paralelos*, de modo que, dado $v \in \mathbb{R}^n$, todo ponto $P \in \mathbb{A}^n$ é deslocado por v , passando a ocupar a posição $P + v$. Podemos observar a ação de \mathbb{R}^n em \mathbb{A}^n na figura 1.5.

Lembramos que \mathbb{R}^n é munido de um produto interno que define uma função distância $d : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para $X, Y \in \mathbb{A}^n$, tem-se $d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\langle X - Y, X - Y \rangle}$.

Essa função distância conduz-nos à seguinte

Definição 1.14. O espaço afim \mathbb{A}^n munido da função distância d é dito um *espaço euclidiano n -dimensional*.

É claro que para ocorrer um deslocamento no espaço deve-se transcorrer certo intervalo de tempo. Na formulação newtoniana o tempo consiste em uma transformação linear que atua sobre os vetores do espaço. Eis assim uma justificativa para o uso do termo *espaço-tempo*. Agora estamos aptos para definir uma estrutura galileana.

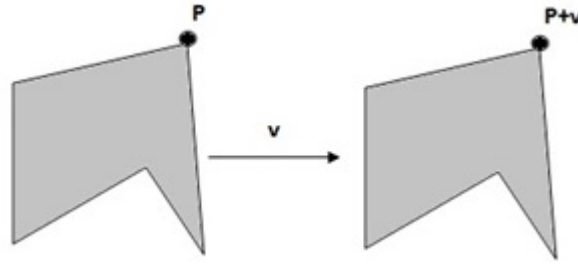


Figura 1.5: Deslocamento Paralelo em \mathbb{R}^n .

Fonte: o Autor.

Definição 1.15. Uma *estrutura espaço-tempo galileana* é uma estrutura que se constitui dos seguintes elementos:

1. O universo é um espaço quadridimensional afim \mathbb{A}^4 em que os deslocamentos paralelos de seus pontos (*pontos mundos ou eventos*), constituem o espaço vetorial \mathbb{R}^4 ;
2. O tempo é um funcional linear $t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ que atua sobre os vetores do espaço deslocando-os paralelamente de modo que um intervalo entre dois eventos P e Q é dado por $\Delta t = t(Q - P)$. Se $t(Q - P) = 0$ os eventos P e Q são ditos *simultâneos*. O tempo é a quarta dimensão do movimento e sua fluidez contínua é geometricamente denominada de *eixo tempo* ;
3. A distância entre dois eventos simultâneos é dada pelo produto escalar de \mathbb{R}^3 através da função d .

Observa-se que o conjunto de todos os eventos simultâneos com um dado evento é um espaço afim tridimensional em \mathbb{A}^4 , denotado por \mathbb{A}^3 , e é denominado de *espaço dos eventos simultâneos*. E mais, o kernel de t , que é um subespaço linear tridimensional de \mathbb{R}^4 , consiste daqueles deslocamentos de \mathbb{A}^4 que toma algum evento, e logo, todos, em um evento simultâneo com ele.

Um espaço \mathbb{A}^4 munido de uma estrutura espaço-tempo galileana é dito um *espaço galileano*. Um exemplo importante de espaço galileano é o produto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, que é, claramente, um espaço euclidiano 4-dimensional. Agora, definimos $t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ por $t(t, x) = t$. Nós denominamos $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ de *espaço de coordenadas galileano*. Mais geralmente, se considerarmos um espaço euclidiano tridimensional \mathbb{E}^3 , tem-se que o espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$ é um espaço galileano. A seguir, veremos um importante resultado.

Teorema 1.16. *Todos os espaços galileanos são isomorfos entre si. Em particular, todo espaço galileano é isomorfo ao espaço de coordenadas galileano.*

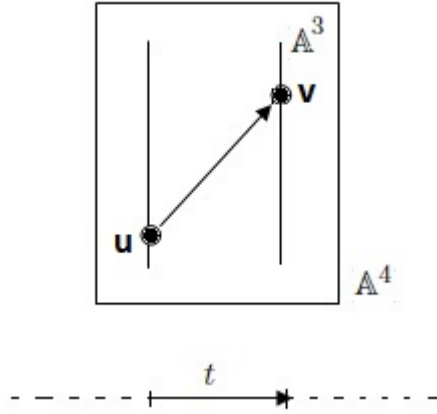


Figura 1.6: Eventos simultâneos e o lapso temporal t sobre o eixo tempo. Fonte: o Autor.

Demonstração. Sejam \mathbb{A}_1^4 e \mathbb{A}_2^4 dois espaços galileanos. Já vimos que, dados $P \in \mathbb{A}_1^4$ e $Q \in \mathbb{A}_2^4$, e a transformação identidade $Id : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, conforme a proposição 1.10. Portanto temos que a transformação $T : \mathbb{A}_1^4 \rightarrow \mathbb{A}_2^4$ definida por $T(P + v) = Q + Id(v) = Q + v$ é um isomorfismo. É imediato que T preserva a estrutura galileana. \square

De posse do resultado obtido observamos que não há necessidade de considerarmos outros espaços afins distintos de \mathbb{A}^4 para o nosso estudo nem outra estrutura galileana distinta de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Portanto, doravante fixaremos nossa atenção no espaço de coordenadas galileanas.

O *grupo de Galileu*, denotado por \mathbb{G} , é o conjunto de todas as transformações que preservam a estrutura do espaço galileano. Essas transformações são denominadas transformações galileanas, isto é, são transformações afins de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ que preservam lapsos temporais e distâncias entre eventos simultâneos. Sendo assim, se $g(t, x) = (t', x')$ é uma transformação galileana, então ela atua transformando o sistema de referência (t, x) no novo sistema (t', x') tal que

1. $t_1 - t_2 = t'_1 - t'_2$ e
2. $t_1 = t_2 \Rightarrow |x_1 - x_2| = |x'_1 - x'_2|$.

Fixando um ponto qualquer de \mathbb{R}^3 e escolhendo três eixos perpendiculares entre si, introduzimos nessa estrutura um sistema de referência em que cada elemento do grupo de Galileu transforma este sistema de referência em outro, que se move de maneira uniforme e de modo retilíneo em relação ao primeiro sistema. Tais movimentos são referidos como sendo inerciais. Portanto, pode-se observar que as transformações galileanas têm a

capacidade de transformar um referencial em outro sem interferir na inercialidade desses referenciais.

Agora vamos inicialmente mostrar que o conjunto que define o grupo de Galileu é não trivial.

Exemplo 1.17. Consideremos as seguintes transformações galileanas, denominadas de *clássicas*:

movimento uniforme com velocidade v : $g_1(t, x) = (t, x + vt), t \in \mathbb{R}, x, v \in \mathbb{R}^3$;

translação dos eixos coordenados: $g_2(t, x) = (t + s, x + y), t, s \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^3$;

rotação dos eixos coordenados: $g_3(t, x) = (t, Gx), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3$ onde $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação ortogonal.

Mostremos que, de fato, tais transformações são galileanas. Elas são, claramente, afins. Para g_1 , temos que $t = t'$ e $x + vt = x'$. Logo, $t_1 - t_2 = t'_1 - t'_2$, o que prova o item 1. Agora,

$$t_1 = t_2 \Rightarrow |x'_1 - x'_2| = |x_1 + vt_1 - x_2 - vt_2| = |x_1 - x_2|,$$

o que prova o item 2. Para g_2 , temos que $t' = t + s$. E assim, $t'_1 - t'_2 = t_1 + s - t_2 - s = t_1 - t_2$. Além disso, $|x'_1 - x'_2| = |x_1 + y - x_2 - y| = |x_1 - x_2|$. Analogamente, para g_3 , $t_1 - t_2 = t'_1 - t'_2$, e $|x'_1 - x'_2| = |G(x_1) - G(x_2)| = |x_1 - x_2|$, já que G é ortogonal. Logo, a menos de variação dos parâmetros, existem pelo menos três transformações de Galileu.

Nota 1.18. Transformações ortogonais são transformações que preservam produto interno, isto é, se G é uma transformação ortogonal, então para cada par de vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$ tem-se $\langle G(u), G(v) \rangle = \langle u, v \rangle$. Como consequência segue que G preserva ângulos e distâncias. A menos quando houver confusão, não faremos distinção entre a transformação ortogonal e a matriz a ela associada, ambas serão denotadas por G . Assim, a matriz de uma transformação ortogonal G é aquela que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $G^t G = G G^t = I$, onde I é a matriz identidade;

(ii) $G^{-1} = G^t$;

(iii) $\det(G) = \pm 1$.

A propriedade (iii) é uma consequência imediata da propriedade (i), pois $G G^t = I \Rightarrow \det(G G^t) = \det(I) = 1 \Rightarrow \det(G) \cdot \det(G^t) = 1 \Rightarrow \det^2(G) = 1 \Rightarrow \det(G) = \pm 1$. O conjunto de todas as transformações ortogonais constitui o grupo das transformações ortogonais $\mathbb{O}(3)$. As matrizes de $\mathbb{O}(3)$ tais que $\det(G) = 1$ formam um subgrupo importante de $\mathbb{O}(3)$ que munido da operação de composição é denominado *grupo especial ortogonal*, que é o grupo das rotações de \mathbb{R}^3 , e é representado por $\mathbb{SO}(3)$.

Já sabemos que as coordenadas espaço-tempo de um evento no espaço galileano são representadas por (t, x) , em que x representa um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^3 e o ponto X do espaço concatenado à x traduz, em \mathbb{R}^3 , a posição do corpo no instante t . Uma mudança de sistema de referência nesse espaço seria uma transição $(t, x) \rightarrow (t', x')$ realizada através de uma transformação de Galileu. Nesses dois sistemas de referência, os sistemas de coordenadas relacionam-se por uma equação matricial do tipo

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix},$$

onde A é a matriz bloco

$$\begin{pmatrix} G & v^T \\ l & k \end{pmatrix},$$

com G uma matriz 3×3 , $v, l \in \mathbb{R}^3$ e $k, s \in \mathbb{R}$. Aqui, v^T indica a matriz 3×1 , cujas entradas são as coordenadas do vetor v . Isto significa que

$$\begin{cases} x' &= Gx + vt + y \\ t' &= \langle l, x \rangle + kt + s. \end{cases}$$

Vamos agora mostrar que no caso de uma transformação galileana o sistema acima é da forma

$$\begin{cases} x' &= Gx + vt + y \\ t' &= t + s, \end{cases}$$

onde $G \in \mathbb{O}(3)$, v é o movimento uniforme, também chamado transformação pura de Galileu, y e s representam as translações espacial e temporal, respectivamente. Sendo assim, precisamos mostrar que $k = 1$ e $l = 0$. Vejamos, $t'_1 - t'_2 = \langle l, x_1 - x_2 \rangle + k(t_1 - t_2)$, e como $t'_1 - t'_2 = t_1 - t_2$, temos que $\langle l, x \rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e, portanto, $l = 0$. Finalmente, $t_1 = t_2 \Rightarrow |x'_1 - x'_2| = |G(x_1) + vt_1 + y - G(x_2) - vt_2 - y| = |G(x_1) - G(x_2)| = |x_1 - x_2|$ que decorre da propriedade (2). Portanto, G é ortogonal como queríamos. Tal fato prova um dos principais resultados dessa seção que é o

Teorema 1.19. *Toda transformação galileana do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ pode ser escrita de maneira única como composição das transformações galileanas clássicas.*

Na figura 1.7, temos uma descrição geométrica do teorema 1.19. Observe que a origem do sistema de referência acompanha a partícula em cada instante durante o seu deslocamento. De posse do resultado obtido introduziremos a seguinte notação para podermos descrever uma transformação de Galileu g dada genericamente em um formato mais simples. Consideraremos, baseados em [1], a transformação g dada da seguinte forma

$$g = (G, v, y, s) \tag{1.1}$$

em que as “coordenadas” destacadas caracterizam as rotações sofridas no espaço, representadas por G , a velocidade de mudança do sistema de referência, caracterizada por v ,

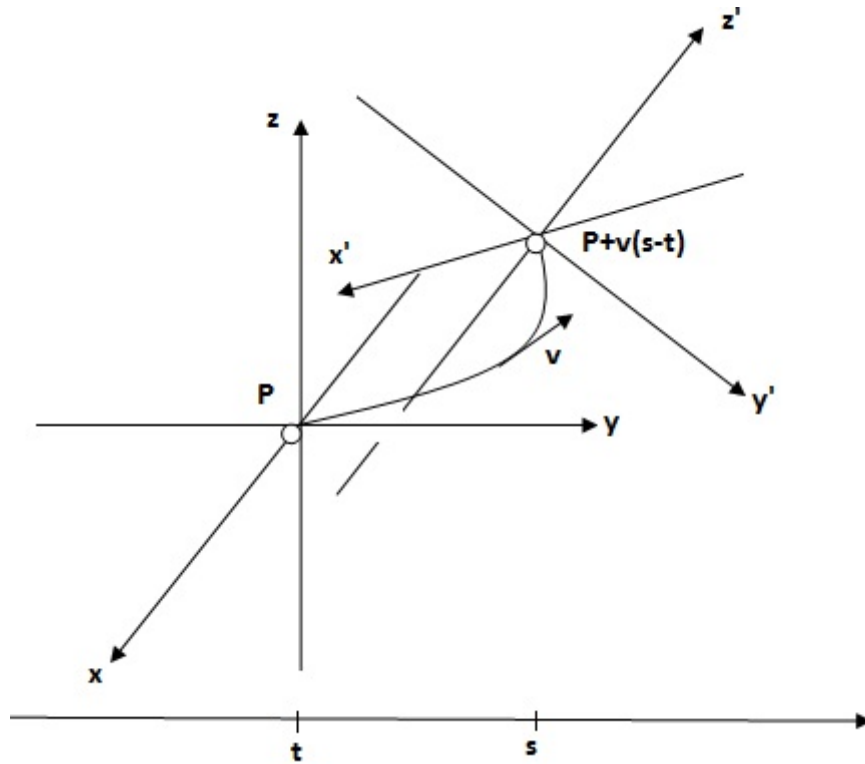


Figura 1.7: As transformações galileanas clássicas compoendo uma transformação galileana genérica. Fonte: o Autor.

a translação espacial executada dada por y e o lapso temporal transcorrido s , respectivamente.

A operação de composição entre duas transformações galileanas é então obtida destacando-se os termos que dependem exclusivamente de cada uma das coordenadas da transformação dada pela notação (1.1). Assim, para um sistema de referência (t, x) adotado, G é o termo atua sobre a posição x da partícula e v o que atua sobre o tempo t de modo que $g = G(x) + v(t) + y + s$. Para cada g , os termos y e s são constantes e quando se tratar da composição de duas ou mais transformações galileanas, devem ser adicionados.

Lema 1.20. *A composição de duas transformações galileanas é galileana.*

Demonstração. De fato, sejam $g_1 = (G_1, v_1, y_1, s_1)$ e $g_2 = (G_2, v_2, y_2, s_2)$ duas transformações galileanas. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
 g_2 \circ g_1 &= G_2(G_1x + v_1t + y_1) + v_2(t + s_1) + y_2 + s_2 + s_1 \\
 &= G_2G_1x + G_2v_1t + G_2y_1 + v_2t + v_2s_1 + y_2 + s_2 + s_1 \\
 &= (G_2G_1)x + (G_2v_1 + v_2)t + (G_2y_1 + v_2s_1 + y_2) + (s_2 + s_1) \\
 &= (G_2G_1, G_2v_1 + v_2, G_2y_1 + v_2s_1 + y_2, s_2 + s_1)
 \end{aligned}$$

□

Agora, vejamos uma das mais belíssimas aplicações da álgebra moderna à M.C.

Proposição 1.21. *O conjunto das transformações galileanas satisfaz a estrutura de um grupo.*

Demonstração. Para provar tal afirmativa consideremos, com base na equação (1.1), três transformações galileanas aleatórias

$$g = (G, v, y, s),$$

$$h = (H, u, k, a)$$

e

$$j = (J, w, l, b)$$

e a operação envolvida como sendo a composição usual de funções, isto é, vamos mostrar que (\mathbb{G}, \circ) é grupo. De fato, a transformação identidade $e(t, x) = (t, x) = (t', x') \equiv (I, 0, 0, 0)$ é galileana, pois $t' = t$ e $x' = x$ implicam de imediato os itens 1 e 2, e define o elemento neutro do conjunto \mathbb{G} , uma vez que para toda transformação galileana g temos

$$(g \circ e) = (GI, G.0 + v, G.0 + v.0 + y, s + 0) = (G, v, y, s) = g = e \circ g$$

A transformação $\bar{g} = (\bar{G}, \bar{v}, \bar{y}, \bar{s})$ tal que $\bar{g} \circ g = g \circ \bar{g} = e = (G\bar{G}, G\bar{v} + v, y + v\bar{s} + G\bar{y}, s + \bar{s})$ é definida por $\bar{g} = [G^{-1}, -G^{-1}v, G^{-1}(vs - y), -s]$ e é a transformação galileana inversa de g . Para a associatividade temos

$$\begin{aligned} (g \circ h) \circ j &= [(GH)J, GHw + Gu + v, (y + va + Gk) + (Gu + v)b + GHl, (s + a) + b] \\ &= [G(HJ), G(Hw + u) + v, y + v(a + b) + G(k + ub + Hl), s + (a + b)] \\ &= g \circ (h \circ j) \end{aligned}$$

Portanto, (\mathbb{G}, \circ) é grupo. □

Corolário 1.22. *A dimensão do grupo de Galileu é 10.*

Demonstração. Uma vez que as matrizes ortogonais formam uma família de três parâmetros, transformações de Galileu da forma geral envolvem 10 parâmetros independentes, pois temos três parâmetros para as rotações, três parâmetros para as translações espaciais, três parâmetros para os movimentos uniformes e um parâmetro para a variação temporal. Assim, a dimensão do grupo de Galileu é igual a $3+3+3+1=10$. □

Exemplo 1.23. Denotando as coordenadas concatenadas ao par $[(t, x), X]$ de um evento

no espaço temporal por $x^{t,X} = \begin{bmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, em que X é o ponto do espaço afim onde o evento

se encontra no instante t , observa-se que a mudança para o novo sistema de coordenadas $[(t', x'), X']$, para a transformação galileana g que relaciona esses sistemas, é expressa por

$$g(t, x) = \begin{bmatrix} t' \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + s \\ x_1 + v_1 t + y_1 + \mu_1 \\ x_2 + v_2 t + y_2 + \mu_2 \\ x_3 + v_3 t + y_3 + \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{s}{t} & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & \frac{y_1}{x_2} & \frac{\mu_1}{x_3} \\ v_2 & \frac{y_2}{x_1} & 1 & \frac{\mu_2}{x_3} \\ v_3 & \frac{y_3}{x_1} & \frac{\mu_3}{x_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

desde que tenhamos $x_i \neq 0, i = 1, 2, 3, t \neq 0$ e T a transformação ortogonal tal que $T(x) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

Exemplo 1.24. Considerando o tempo como absoluto as equações $t = t', x' = x - vt, y' = y$ e $z = z'$ são as equações de transformação de Galileu entre os sistemas referenciais de coordenadas (t, x) e (t', x') .

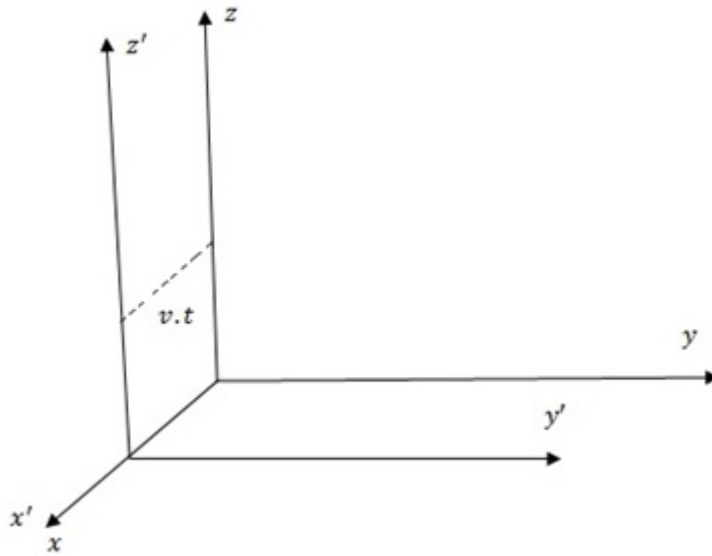


Figura 1.8: Deslocamento de velocidade v na direção do eixo x .

Fonte: [8].

A transformação linear associada à transformação entre os eixos coordenados é

$$L(t, x) = \begin{bmatrix} t' \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1.4 As Equações de Newton

Até agora nos referimos ao movimento essencialmente como intuitivo, passível de observação e percepção. Por esse motivo, iniciamos esta seção com uma conceituação mais formal para ideia de movimento.

Definição 1.25. Seja I é um intervalo da reta real. Um movimento em \mathbb{R}^n é uma aplicação diferenciável $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

De agora em diante, suporemos que uma aplicação ou função é diferenciável tantas vezes quantas forem necessárias. A imagem da aplicação x é uma *trajetória* ou *curva* em \mathbb{R}^n . A derivada

$$v(t_0) := \dot{x}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

é denominada de *vetor velocidade* no ponto t_0 . A segunda derivada

$$a(t_0) := \ddot{x}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\dot{x}(t) - \dot{x}(t_0)}{t - t_0}$$

é denominada de *vetor aceleração* no ponto t_0 .

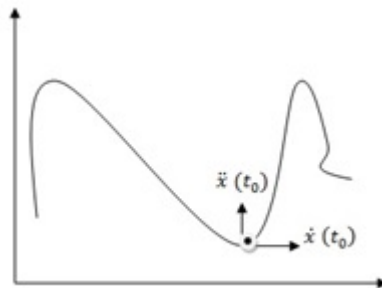


Figura 1.9: Aceleração e velocidade de uma partícula no instante $t = t_0$. Fonte: o Autor.

Exemplo 1.26. Os vetores velocidade e aceleração de um movimento parametrizado por comprimento de arco são ortogonais. De fato, como $|\dot{x}| = 1$, temos que $0 = \langle \ddot{x}, \dot{x} \rangle + \langle \dot{x}, \ddot{x} \rangle$ e como o produto interno é simétrico tem-se $\langle \ddot{x}, \dot{x} \rangle = 0$. Veja o esquema da figura 1.9.

Uma curva no espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ é também denominada *linha mundo*. Os eventos ocorrem de modo a transladar o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 sobre o eixo tempo acompanhando a trajetória de um observador ao longo dessa linha.

A movimentação de n pontos no espaço galileano é descrita por n linhas mundo e as trajetórias que descrevem tal movimentação são definidas por n aplicações $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \dots, n$. Deste modo, temos n cópias de \mathbb{R}^3 transladando concomitantemente sobre o eixo tempo. O produto direto das n cópias de \mathbb{R}^3 é denominado de *espaço de configurações* do sistema de n pontos. As n aplicações x_i do espaço sobre o eixo tempo definem uma única aplicação $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$, denominada de *movimento de um sistema de n pontos*.

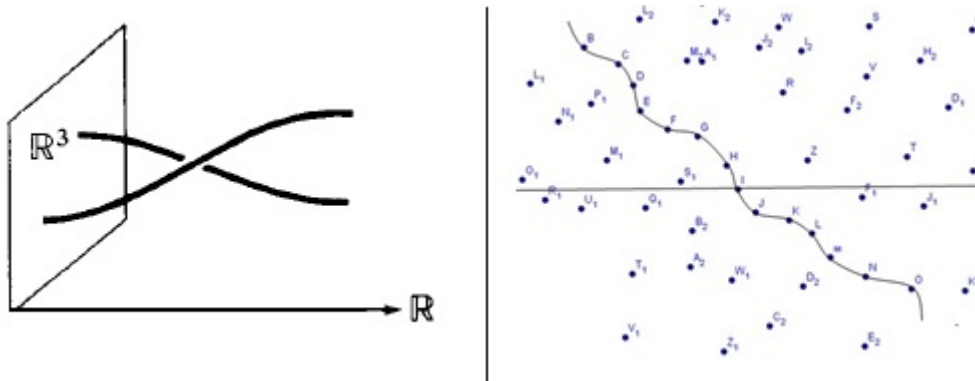


Figura 1.10: A esquerda as linhas mundo do movimento de dois eventos e o traslado do espaço. Fonte: [2]. A direita o tempo ocorre na vertical e o presente encontra-se sobre a linha horizontal. A nuvem de eventos abaixo da linha horizontal representa o passado e a parte acima mostra eventos futuros. Fonte: o Autor.

Sabemos pelo PDN que os movimentos de um sistema de pontos são determinados unicamente pelas suas posições iniciais e velocidades iniciais. Sendo assim, a aceleração do sistema é determinada pelas posições e velocidades iniciais. Isto significa que existe uma aplicação $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ tal que

$$\ddot{x}(t) = F(t, x, \dot{x}). \quad (1.2)$$

A equação diferencial assim definida é a famosa equação fundamental da mecânica newtoniana e avalia o estado inercial de um sistema de partículas no espaço. Somente quando $\ddot{x}(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ é que o movimento das n partículas encontra-se referenciado inercialmente.

A forma da função F na equação (1.2) é determinada experimentalmente para cada sistema mecânico. Do ponto de vista matemático, a forma de F é a definição do sistema mecânico correspondente. Isto demonstra a peculiaridade existente na modelagem de cada sistema, bem como a possível complexidade em solucionar a equação (1.2). No entanto, fixadas condições iniciais adequadas, o *Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais* garante que a função F e as condições iniciais $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$ determinam um único movimento. Para mais informações sobre o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais o leitor interessado pode consultar [15], [7] e [6].

1.5 Relatividade e Suas Restrições

A equação (1.2) carrega implicitamente a necessidade da adoção inicial de um sistema de coordenadas. Os sistemas que se movem em relação ao inicial nos quais a equação (1.2) permanece igualmente caracterizada constituem a *classe de sistemas inerciais* de coordenadas.

Podemos também observar que o PRG afirma que existe uma estrutura galileana (uma classe de sistemas de coordenadas inerciais) tal que, quando analisamos as linhas mundo dos pontos de algum sistema mecânico por uma mesma transformação galileana, obtemos as linhas mundo do mesmo sistema com novas condições iniciais.

No exemplo 1.24 nota-se que o sistema de coordenadas $x'y'z'$ move-se em relação ao sistema xyz mantendo os respectivos eixos paralelos entre si e que a origem de $x'y'z'$ move-se com velocidade constante em relação à xyz .

Exemplo 1.27. Considere dois sistemas inerciais A e B como na figura 1.11.

Note que o sistema B movimenta-se mantendo os eixos x_B e y_B paralelos a x_A e y_A , respectivamente, e que a origem de B desloca-se com velocidade constante v em relação à origem do sistema A. A mudança de coordenadas de A para B constitui-se vetorialmente pela equação

$$\vec{r}_A(t) = \vec{r}_B(t) + \vec{v}t$$

com $r_A(t)$ e $r_B(t)$ infinitamente diferenciáveis de modo que $\dot{r}_A(t) = \dot{r}_B(t) + v$ e $\ddot{r}_A = \ddot{r}_B$.

Essas equações mostram que são equivalentes os estudos do movimento relativos aos referenciais A e B.

Note que estamos impondo condições ao lado direito da equação (1.2) para um sistema de coordenadas inerciais. De modo geral a equação (1.2) deve ser invariante no que diz respeito ao grupo das transformações de Galileu. Assim, as seguintes considerações são necessárias:

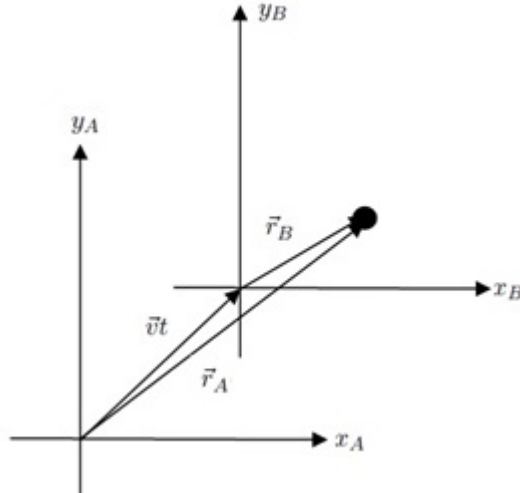


Figura 1.11: Mudança de sistema de coordenadas de A para B. Fonte: o Autor.

1. Se $x = \phi(t)$ é solução da equação (1.2), então $x = \phi(t + s)$ também o é, ou seja, as translações temporais não influenciam em um sistema mecânico dentro de um sistema de coordenadas inerciais e o sistema é dito *autônomo*. Assim, temos $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$, e então as leis das naturezas permanecem constantes.
2. Se $x_i = \phi_i(t), i \in \{1, \dots, n\}$ é o movimento de um sistema de n pontos que satisfaz a equação (1.2), então o movimento $\phi_i(t) + y, y \in \mathbb{R}^3$ também satisfaz a equação (1.2). A invariância com relação a essas translações significa que o espaço euclidiano tridimensional é *homogêneo*, isto é, tem as mesmas propriedades em todos os seus pontos. Isto mostra-nos que o lado direito da equação (1.2) depende somente das “coordenadas relativas” $x_i - x_j$.
3. Devido à invariância por movimentos uniformes, que não altera \ddot{x}_i ou $x_i - x_j$, e adiciona a cada \dot{x}_j um vetor fixo, temos que o lado direito da equação (1.2) depende somente das “velocidades relativas” $\dot{x}_i - \dot{x}_j$.
4. Se $\phi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, i \in \{1, \dots, n\}$ é o movimento de um sistema de n pontos que satisfaz a equação (1.2) e $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação ortogonal, então o movimento $G \cdot \phi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, i \in \{1, \dots, n\}$ também satisfaz a equação (1.2), isto é,

$$F(Gx, G\dot{x}) = GF(x, \dot{x})$$

com $Gx = (Gx_1, \dots, Gx_n), x_i \in \mathbb{R}^3$. A invariância em relação as rotações mostra que o espaço euclidiano tridimensional é *isotrópico*, ou seja, não há direções preferidas.

Uma consequência importante de todas estas restrições é que

Proposição 1.28. *Se um sistema mecânico consiste de somente um ponto, então sua aceleração em um sistema de coordenadas inercial é igual a zero. (1ª Lei de Newton)*

Demonstração. Num sistema de coordenadas inercial, já sabemos que F depende somente de coordenadas e velocidades relativas. Como o sistema tem um único ponto, temos que F independe de x e \dot{x} . Isto significa que a única alteração possível seria na direção. Mas, como F é invariante por rotações, chegamos a conclusão de que:

- ou o corpo está em repouso, caso em que $x(t_0) = 0$ e $\dot{x}(t_0) = 0$, num determinado instante t_0 ;
- ou o seu movimento dá-se ao longo de uma reta.

De qualquer forma, a aceleração do sistema é zero. □

1.6 Alguns Sistemas Mecânicos

Nessa seção, abordaremos alguns exemplos de sistemas mecânicos. De início podemos observar que a inclusão de todos os objetos envolvidos num fenômeno pode tornar complexa a sua análise. Por esse motivo, podemos desprezar alguns dos objetos envolvidos em prol da simplificação do modelo matemático. É o que fazemos, por exemplo, quando ignoramos os efeitos da Lua e do Sol ao modelarmos fenômenos que ocorrem na superfície da Terra.

Exemplo 1.29. A queda livre de um corpo nas proximidades terrestre tem a seguinte equação experimental

$$\ddot{x} = -g \tag{1.3}$$

onde $g \approx 9,81m/s^2$ é a aceleração gravitacional terrestre e x representa a altura do corpo de massa 1 (nos casos omissos adotaremos sempre esse valor para a massa) em relação à superfície terrestre.

A energia potencial gravitacional é dada por $U = gx$ de modo a termos $\frac{dU}{dx} = g$, e assim a equação do sistema mecânico fica na forma

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}.$$

Além disso, se $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável temos $\frac{\partial U}{\partial x}$ como o gradiente de U de maneira que, para $x = (x_1, \dots, x_n)$, temos $\frac{\partial U}{\partial x} = (\frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n})$, com $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ sendo a derivada parcial de U em relação à coordenada x_i , $i = 1, \dots, n$.

Nessas condições temos $\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$, onde $U(x) = \langle \vec{g}, x \rangle$. Na figura 1.12, temos um esquema da atuação de g sobre um corpo.

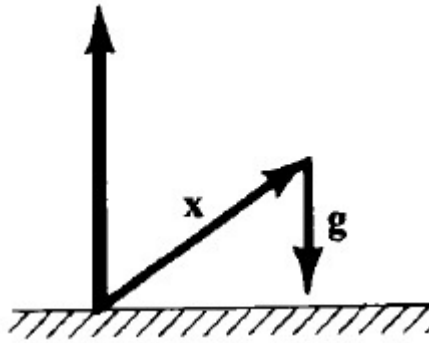


Figura 1.12: Corpo em queda livre na proximidade terrestre. Fonte: [2].

O vetor \vec{g} é chamado vetor aceleração gravitacional. A norma desse vetor não é constante em todo o universo. Ela depende da massa do astro que tem o corpo em sua proximidade e da distância do objeto ao centro de massa do astro. Em 1687 Newton publicou a famosa obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* onde descreveu, além de suas três leis fundamentais do movimento, a Lei da Gravitação Universal, a qual afirma que a força de interação gravitacional existente entre dois corpos de massas m_1 e m_2 é dada por

$$\vec{F} = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (1.4)$$

em que $G = 6,674287 \times 10^{-11} m^3 / Kg \cdot s^2$ é a constante de gravitação universal e r é a distância entre os centros de massa dos corpos.

Tal lei é uma consequência da terceira lei de Kepler e da aceleração centrípeta e terá seu histórico detalhado na seção 3.4. De posse da equação (1.4) pode-se determinar a intensidade da aceleração gravitacional nas proximidades de um astro qualquer pela expressão

$$g = \frac{F}{m_{objeto}} = \frac{G \cdot m_{astro}}{r^2}$$

Exemplo 1.30. Quando se tratar de grandes alturas na superfície terrestre a equação (1.3) passa a sofrer restrições no seu domínio de aplicação. Newton, no entanto, elaborou uma lei mais precisa na qual a aceleração gravitacional é inversamente proporcional ao quadrado da distância medida a partir do centro da Terra, expressa pela seguinte equação

$$\ddot{x} = -g \cdot \frac{r_0^2}{r^2}$$

com $r = r_0 + x$.

Temos assim

$$-\frac{dU}{dx} = -gr_0^2 \frac{1}{r^2} \Rightarrow \int dU = gr_0^2 \int \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow U = -\frac{gr_0^2}{r}$$

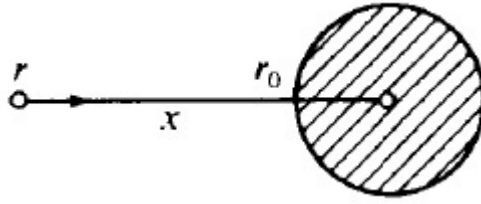


Figura 1.13: Atuação do campo gravitacional. Fonte: [2].

e então a energia potencial pode ser escrita na forma

$$U = -\frac{k}{r} \quad (1.5)$$

com $k = gr_0^2$, sendo portanto inversamente proporcional à distância r do corpo ao centro da Terra. Essa nova distância define um limite para a atuação do campo vetorial gravitacional terrestre. Observa-se que quando r tende a crescer infinitamente a energia potencial tende a 0, mostrando assim que os efeitos gravitacionais terrestres tendem à cessar quando se atinge grandes distâncias do centro de massa do astro.

Para finalizar esse exemplo vamos determinar a velocidade de escape de um corpo na superfície terrestre. Tal velocidade é aquela capaz de igualar a energia cinética do corpo à sua energia potencial gravitacional e faz com que o corpo fique na iminência de voar infinitamente após afastar-se dos efeitos gravitacionais.

Fazendo $r = r_0$ na equação (1.5) obtemos $U = gr_0$ e como a energia cinética é dada por $E_c = \frac{1}{2}v^2$, segue que devemos ter $E_c = U$ em valores absolutos e, portanto,

$$\frac{1}{2}v^2 = gr_0 \Rightarrow v = \sqrt{2gr_0}$$

Adotando o raio da Terra como $r_0 = 6,371 \times 10^6 m$ temos

$$v = \sqrt{2 \times 9,81 \times 6,371 \times 10^6} = 11178,38 m/s \approx 11,2 km/s$$

Portanto, a velocidade recomendada para o escape deve ser superior a $11,2 km/s$. Essa é a *segunda velocidade cósmica*. Observe que a abordagem aqui adotada despreza a atração do corpo pelo Sol, que não deixará o corpo escapar do sistema solar, fato que poderia ser evitado caso a velocidade imprimida ao corpo superasse $16,6 km/s$.

Exemplo 1.31. O sistema massa-mola, para pequenas elongações x da mola sobre um eixo de deslocamento, tem seu movimento modelado pela equação

$$\ddot{x} = -\alpha^2 x \quad (1.6)$$

onde α é uma constante que depende das características mecânicas da mola. A energia potencial do sistema é de origem elástica e é dada por

$$U = \frac{\alpha^2 x^2}{2}$$

Se substituirmos a massa por outras duas massas verifica-se experimentalmente que, sob

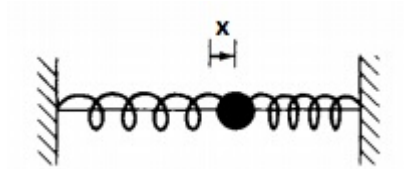


Figura 1.14: Sistema Massa-Mola.

Fonte: [2].

uma mesma extensão imposta à mola, a aceleração reduz-se à metade.

Para dois corpos de massas m_A e m_B submetidos a uma mesma elongação a relação $\frac{\ddot{x}_A}{\ddot{x}_B}$ é estabelecida experimentalmente pelo inverso da relação entre suas massas, isto é,

$$\frac{\ddot{x}_A}{\ddot{x}_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

Além disso, o produto $m\ddot{x}$ independe do corpo escolhido por ser uma característica da extensão da mola. Tal produto caracteriza a força que age sobre o corpo.

Exemplo 1.32. (Sistemas Conservativos) Um sistema mecânico é dito *conservativo* se, existe uma função diferenciável $U : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o movimento de n pontos, de massas m_1, m_2, \dots, m_n , é dado pelo sistema de equações

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (1.7)$$

para $i = 1, \dots, n$.

Nos exemplos 1.30 e 1.31 as equações dos movimentos têm essa forma e as equações de inúmeros outros sistemas mecânicos podem ser descritas pela equação (1.7), dentre os quais podemos citar o problema dos três corpos da mecânica celeste e as equações das oscilações elétricas.

Capítulo 2

Os Princípios da Mecânica Newtoniana

2.1 Campos Conservativos

Nesta seção, estudaremos a relação entre trabalho e energia potencial. Para tanto, precisamos relembrar conceitos fundamentais como o de campos vetoriais, o que pode ser feito com o auxílio de um bom livro de cálculo vetorial.

Campo de força, por sua vez, é um campo vetorial, isto é, é uma função que associa a cada ponto de um conjunto aberto de \mathbb{R}^3 um vetor em \mathbb{R}^3 . De maneira geral, dado um certo referencial, associamos a cada ponto P do espaço um vetor posição $\vec{r}_P = (x, y, z)$ e um vetor força $\vec{F}_P = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$, onde F_x, F_y, F_z são as componentes fundamentais do campo vetorial \vec{F} .

Exemplo 2.1. A equação (1.4), referente à Lei da Gravitação Universal, para movimentos próximos da superfície terrestre, define um campo de força denominado campo vetorial gravitacional.

Exemplo 2.2. Uma carga elétrica q no vácuo gera em torno de si uma região de interação elétrica denominada de campo elétrico. Nesse campo, as forças são definidas pela expressão

$$\vec{F}_{e_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

em que q_i é a carga que interage com q e \vec{r}_i é o vetor posição de q_i em relação à q e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo. O sentido de fluxo do campo provém dos sinais das cargas q_i e q .

Campos de força exercem papel fundamental nas interações entre corpos em todo o universo. Uma vez imersa em um campo de forças, uma partícula sofrerá sua ação física e se deslocará ao longo de uma trajetória ou caminho orientado. A força realizará trabalho

sobre a partícula que, por sua vez, é inerente à energia potencial concatenada ao campo. Lembremos que o *trabalho realizado por uma força \vec{F} sobre uma partícula ao longo do segmento de reta $S = \overrightarrow{M_1 M_2}$* é dado pelo produto escalar

$$\tau = \langle \vec{F}, \vec{S} \rangle = FS \cos \varphi.$$

Para um campo vetorial contínuo e uma curva retificável α , procedemos de maneira análoga para as porções infinitesimais de forças ΔF_i e linhas poligonais ΔS_i em cada ponto da curva de maneira que existe o limite

$$\tau = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \langle \Delta \vec{F}_i, \Delta \vec{S}_i \rangle = \int_{\alpha} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle.$$

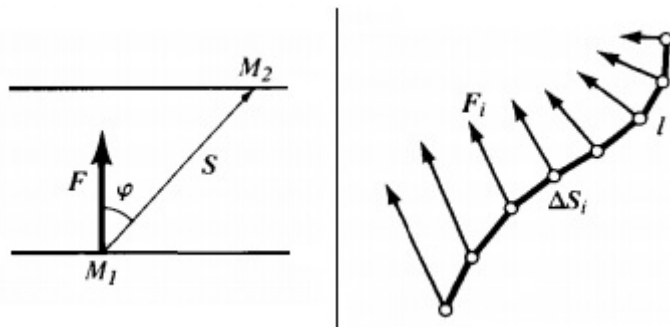


Figura 2.1: Trabalho realizado em um campo de forças.
Fonte: [2].

Para o que se segue, relembremos do cálculo vetorial que um campo vetorial $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é conservativo se, $\vec{F} = -\nabla U$, onde Ω é um aberto e $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ é o *operador gradiente*. Neste caso, $U : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dito uma *função potencial*. Segue-se, facilmente, que uma condição necessária para que o campo vetorial F seja conservativo é que o campo \vec{F} seja irrotacional, isto é, $\nabla \times \vec{F} = 0$. Mas, esta condição não é suficiente, pois, o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j},$$

não é conservativo embora ocorra $\nabla \times \vec{F} = 0$. Isto decorrerá do resultado a seguir.

Teorema 2.3. *Um campo vetorial \vec{F} é conservativo se, e somente se, seu trabalho ao longo de qualquer caminho depende apenas dos pontos extremos do caminho e não da forma o caminho.*

Demonstração. Seja M_0 o ponto de partida da partícula. Suponha que o trabalho do campo sobre a partícula independa do caminho. Sendo assim,

$$U(M) = - \int_{M_0}^M \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle,$$

para qualquer ponto final M , é tal que $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{X}}$, isto é, o campo é conservativo e U é um dos seus potenciais. Reciprocamente, suponhamos que F é conservativo e U é um potencial de \vec{F} . Logo,

$$\int_{M_0}^M \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{M_0}^M -\left\langle \frac{\partial U}{\partial \vec{X}}, d\vec{S} \right\rangle = U(M_0) - U(M).$$

Portanto, o trabalho não depende da curva de percurso. \square

O resultado acima, mostra-nos que se um campo vetorial é conservativo, então o trabalho realizado pelo caminho ao longo de uma curva fechada é nulo. Isto mostra que o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$$

não é conservativo, apesar de irrotacional, pois, considerando a curva fechada $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definida por $\alpha(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$, temos que

$$\int_{\alpha} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 2\pi \neq 0.$$

Neste caso, o problema reside no fato de que o conjunto aberto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ não é simplesmente conexo. Para a definição de conjunto simplesmente conexo e a demonstração do resultado a seguir, para espaços euclidianos n -dimensionais ($n \geq 2$), consulte [7].

Teorema 2.4. *Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial diferenciável, onde Ω é um aberto simplesmente conexo. Então, \vec{F} é irrotacional se, e somente se, \vec{F} é conservativo.*

Exemplo 2.5. Os campos de força dos exemplos 2.1 e 2.2 são conservativos, já que podemos exibir os potenciais correspondentes. Também, é conservativo o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$, já que \mathbb{R}^3 é simplesmente conexo e \vec{F} é irrotacional. Pelo resultado acima, basta mostrar que \vec{F} é irrotacional, como segue

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & y + z \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} - \vec{k} - \vec{j} - \vec{i} = \vec{0}.$$

Sendo assim, existe uma função potencial U , a ser determinada. Proçedamos para obtê-la. As componentes do campo são $F_x = y + z$, $F_y = x + z$ e $F_z = x + y$ de modo que

$$\frac{dF}{dx} = y + z \Rightarrow F_x = \int (y + z) dx = xy + xz + C(y, z)$$

derivando em relação à y e igualando a F_y temos

$$x + C'(y, z) = x + z \Rightarrow C'(y, z) = z \Rightarrow C(y, z) = \int z dy = yz + C(z)$$

e, finalmente, derivando em relação à z e igualando a F_z temos

$$x + y + C'(z) = x + y \Rightarrow C'(z) = 0.$$

Sendo assim, existe uma constante real C tal que uma função potencial de \vec{F} é dada por

$$U(x, y, z) = xy + yz + xz + C.$$

Exemplo 2.6. O campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ não é conservativo. De fato, se um campo for conservativo deve também ser irrotacional e como temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{k} \neq \vec{0},$$

segue-se que F não pode ser conservativo.

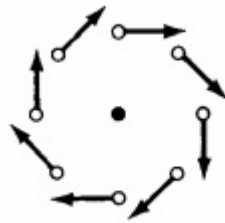


Figura 2.2: Um campo não conservador. Fonte: [2].

A figura 2.2 indica que o campo é rotacional.

2.2 Leis Dinâmicas de Newton

Nessa seção, anunciamos as três leis dinâmicas do movimento, fundamentais para a Mecânica, propostas por Newton. Ao mesmo tempo, discutimos as relações dessas leis com o PRG e o PDN.

Primeira Lei de Newton

Já demonstramos a 1ª lei de Newton na proposição 1.28, como consequência do PDN e do PRG. A primeira lei de Newton, também conhecida como *lei ou princípio da inércia*, pode ser enunciada como segue:

Todo corpo continua em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que forças passem a atuar sobre ele alterando esse estado.

Em [5], o princípio da inércia exerce papel fundamental por reclassificar os fenômenos de movimento na categoria de *estado*. Além disso, é importante salientar que a essência desse princípio já havia sido proposta por Galileu e Descartes.

Segunda Lei de Newton

Para o enunciado da segunda lei, temos a seguinte versão:

A mudança de estado do movimento ocorre pela ação de força resultante e é proporcional à sua intensidade.

A segunda lei exprime a relação existente entre a força aplicada ao corpo e a mudança na sua então presente velocidade. A equação (1.2) descreve a segunda lei de Newton, que é uma consequência do PDN, uma vez que surge como consequência do teorema de existência e unicidade de soluções das equações diferenciais. Além disso, como em sistemas inerciais vale a invariância das leis através do grupo das transformações de Galilei, segue que a forma mais simples da equação (1.2) dada por $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$ é também consequência do PRG.

Como já sabido, para um corpo de massa m submetido à uma força resultante \vec{F} , a segunda lei pode ser expressa pela equação

$$\vec{F} = m\ddot{x} = m\vec{a}.$$

Terceira Lei de Newton

Já a terceira lei, também chamada de *Lei da Ação e Reação*, busca caracterizar as interações dinâmicas entre dois ou mais corpos, e pode ser enunciada da seguinte forma:

As interações dinâmicas entre dois corpos são perceptíveis em cada um deles de maneira que as forças existentes encontram-se aos pares, ação e reação, e tendem a se anular mutuamente.

A terceira lei, por sua vez, independe do PRG e do fato do sistema ser autônomo, homogêneo ou isotrópico. Além disso, as forças de ação e de reação são iguais em módulo e direção e têm sentidos opostos, caracterizando a versão fraca dessa lei. Na versão forte da terceira lei garante-se ainda que as interações ocorram ao longo da linha que liga dois centros de gravidade dos corpos.

2.3 As Leis de Conservação

Nessa seção, analisamos as principais leis de conservação da Mecânica. Antes disto, dado um sistema mecânico de dois pontos, as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 aplicadas aos pontos são direcionadas ao longo da reta que une os dois pontos. A 3ª lei de Newton, diz-nos que $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Isto motiva a definição de *forças de interação* e de *sistema mecânico fechado* (ou *isolado*). Vejamos, um sistema de n partículas, de massas m_1, m_2, \dots, m_n , é dito *fechado* (ou *isolado*) se, para cada $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}, \quad \vec{F}_{kl} = -\vec{F}_{lk},$$

onde o vetor \vec{F}_{ij} indica a força com a qual o j -ésimo ponto age sobre o i -ésimo ponto. Da definição, segue-se que $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$. Um exemplo importante de interação é a gravitação universal.

Para o que se segue, consideremos um sistema de coordenadas inercial num espaço euclidiano tridimensional, escolhida uma orientação. A seguir, uma série de definições que caracterizam a dinâmica de um sistema mecânico.

1. O *momento linear* (ou *quantidade de movimento linear*) de uma partícula é dado por

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.1)$$

No caso de um sistema de n partículas, de massas m_1, m_2, \dots, m_n , adicionamos os momentos lineares de cada ponto, isto é, $\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$.

Ao introduzir essa nova grandeza fundamental da física, Descartes, e posteriormente, Newton, proporcionaram futuros avanços para a teoria das colisões (aqui merecem destaque as contribuições do físico holandês Christian Huygens) e conseqüentemente uma descrição mais adequada para a interação entre dois ou mais sistemas físicos.

2. O *momento angular* é dado por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.2)$$

No caso de um sistema de n partículas, de massas m_1, m_2, \dots, m_n , adicionamos os momentos angulares de cada ponto, isto é, $\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i$.

3. O *momento de força* é dado por

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.3)$$

No caso de um sistema de n partículas, de massas m_1, m_2, \dots, m_n , adicionamos os momentos de força de cada ponto, isto é, $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$.

4. A *energia cinética* é dada por

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.4)$$

onde $v^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$.

No caso de um sistema de n partículas, de massas m_1, m_2, \dots, m_n , a energia cinética do sistema é dada por $T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$.

Seja um sistema de n pontos, de massas m_1, m_2, \dots, m_n , de vetores posições $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$. Consideremos o baricentro dos n pontos associados aos pesos $\frac{m_1}{\sum_{i=1}^n m_i}, \frac{m_2}{\sum_{i=1}^n m_i}, \dots, \frac{m_n}{\sum_{i=1}^n m_i}$, isto é,

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

denominado *centro de massa*. É fácil ver que o centro de massa não depende da origem do referencial. Uma consequência imediata das considerações até aqui, é que

$$\dot{p} = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}.$$

Disto, segue-se que

Proposição 2.7. (*Conservação do Momento Linear*) *Em um sistema isolado de n partículas, o momento linear total é conservado.*

E, também

Proposição 2.8. *O centro de massa de um sistema isolado de n partículas move-se uniformemente e retilineamente, isto é, $\ddot{\xi} = 0$.*

Uma outra consequência é que

$$\dot{L} = \sum_{i=1}^n \dot{L}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{v}_i \times p_i + \vec{r}_i \times \dot{p}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = M.$$

E assim,

Proposição 2.9. (*Conservação do Momento Angular*) *Em um sistema isolado de n partículas, o momento angular de uma partícula relativo ao centro do referencial adotado é conservado.*

De fato,

$$M = \dot{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \left(\sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = 0.$$

A seguir, mostremos que a energia total de um sistema conservativo é conservada.

Proposição 2.10. (*Conservação da Energia Total*) *Em um sistema conservativo, a energia total é conservada, isto é, $T + U$ é constante em relação ao tempo, onde U é um potencial do sistema.*

Demonstração. Vejamos,

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \dot{T} + \dot{U} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}_i, \vec{v}_i \rangle + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial U}{\partial x_i}, \vec{v}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}_i, \vec{v}_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle -\vec{F}_i, \vec{v}_i \rangle = 0.$$

□

Capítulo 3

Implicações da Teoria Newtoniana

3.1 Campos de Forças Centrais

Definição 3.1. Um campo vetorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dito *central* se, sua linha de ação passa sempre por um ponto fixo, denominado de *centro do movimento*.

Considerando a origem $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ como centro do movimento, para todo ponto $X = (x, y, z)$, em que o campo está definido, tem-se que a sua imagem por F aponta para $\mathbf{0}$ de maneira que, conforme [7],

$$F(X) = f(X)X$$

em que f é um campo escalar de mesmo domínio que F .

Uma pergunta natural surge, sob quais condições um campo central é conservativo e vice-versa. Os resultados a seguir nos ajudam nesse sentido.

Proposição 3.2. *Seja F um campo conservativo de potencial U . Então F é central se, e somente se, U depende apenas de $|X| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.*

Proposição 3.3. *Se F é um campo central contínuo, cuja intensidade depende somente de $|X|$, então F é conservativo.*

As demonstrações desses resultados podem ser encontradas em [7].

O resultado que se segue é de crucial importância para o estudo das trajetórias de partículas em um campo central de forças.

Proposição 3.4. *Se P é uma partícula de massa m imersa em um campo central e em movimento, então a sua trajetória está contida em um plano.*

Demonstração. Seja $X = X(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x, y, z)$ o vetor posição da partícula no instante t . Como F é central, pela segunda lei de Newton, tem-se que $m\ddot{X} = f(X)X$. Tomando o produto vetorial por X , temos que $m\ddot{X} \times X = f(X)X \times X = (0, 0, 0) = 0$. Agora, como $\frac{d}{dt}(\dot{X} \times X) = \ddot{X} \times X + \dot{X} \times \dot{X} = 0$, temos que $\dot{X} \times X$ é constante, digamos, igual a $C = (c_1, c_2, c_3)$. Sendo assim,

- se $C \neq (0, 0, 0)$, temos

$$\langle X, C \rangle = \langle X, \dot{X} \times X \rangle = 0 \Rightarrow c_1x + c_2y + c_3z = 0$$

e portanto $X(t)$ está em um plano ortogonal a C e que passa pela origem.

- se $C = (0, 0, 0)$, tomando $r = |X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ segue que

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sqrt{\langle X, X \rangle} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle X, X \rangle}} \cdot 2\langle \dot{X}, X \rangle.$$

Logo,

$$r\dot{r} = \langle \dot{X}, X \rangle.$$

Portanto, para $r \neq 0$ temos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{X}{r} \right] = \frac{r\dot{X} - \dot{r}X}{r^2} = \frac{r^2\dot{X} - r\dot{r}X}{r^3} = \frac{\langle X, X \rangle \dot{X} - \langle \dot{X}, X \rangle X}{r^3}$$

e com auxílio da identidade vetorial

$$(X \times Y) \times Z = \langle Z, X \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X,$$

temos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{X}{r} \right] = \frac{(X \times \dot{X}) \times X}{r^3} = \frac{C \times X}{r^3} = 0$$

isto é, $\frac{X}{r}$ é constante e então $X(t)$ está sobre uma reta para todo t e, evidentemente, pertence a um plano. □

Portanto, para caracterizarmos o movimento de uma partícula em um campo central podemos restringi-lo ao plano sem nenhuma perda de informação. A trajetória de uma partícula é comumente denominada de *órbita*, graças às implicações históricas aferidas a esse conceito frente a teoria da gravitação.

A fim de simplicidade faremos $r = |X|$ por em muitos instantes ser conveniente a utilização de coordenadas polares. Nessa perspectiva todo ponto X do espaço terá por correspondência o par (r, θ) .

As coordenadas cartesianas (x, y) associam-se às polares de forma natural por intermédio das equações

$$x = r \cos \theta \text{ e } y = r \sin \theta, \tag{3.1}$$

e sob tais condições a órbita $(x(t), y(t))$ da partícula será determinada por $(r(t), \theta(t))$. Nessas novas coordenadas $r(t)$ é também conhecido como *raio vetor*.

Teorema 3.5. (*Conservação do Momento Angular em Movimento Central*) Para movimentos em um campo central, o momento angular de uma partícula relativo ao centro do campo adotado é conservado.

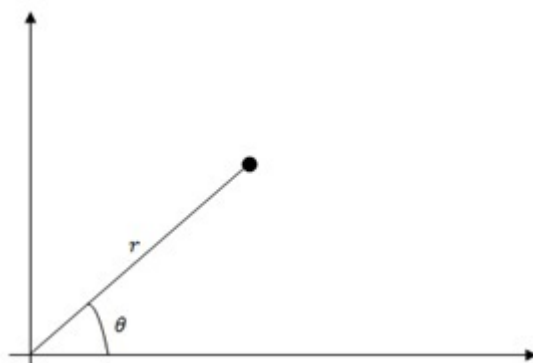


Figura 3.1: Coordenadas polares. Fonte: o Autor.

Demonstração. Como o campo é central, os vetores \ddot{r} e r são colineares, uma vez que, no plano onde ocorre o movimento, \ddot{r} é a componente centrípeta e também aponta para o centro do campo. Logo,

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = m\frac{d}{dt}[\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] = m[\dot{r} \times \dot{r} + r \times \ddot{r}] = m[0 + 0] = 0$$

□

De acordo com a proposição 3.4, e de posse do plano π que contém a órbita da partícula, podemos reescrever o momento angular em sua forma escalar da seguinte maneira:

$$L = m(xy\dot{y} - y\dot{x}) \quad (3.2)$$

para $X = (x(t), y(t))$ em π . Isso porque

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = mX \times \dot{X} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m(xy\dot{y} - y\dot{x})\vec{k}.$$

Assim, no movimento central temos ainda a seguinte versão da lei de conservação do momento angular:

Proposição 3.6. *Se uma partícula de massa m encontra-se em movimento num campo de forças $F = (f_x, f_y)$, então o seu momento angular é constante se, e somente se, F é central.*

Demonstração. Seja $X = (x, y)$. Como a derivada de (3.2) é dada por

$$\dot{L} = m\dot{y}x - m\dot{x}y = xf_y - yf_x$$

nota-se que ela se anula somente quando $\frac{x}{f_x} = \frac{y}{f_y} = \text{const}$, o que significa dizer que F e X são paralelos, isto é, F é central. □

Observando que

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \quad \text{e} \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta,$$

temos que

$$\begin{aligned} m(xy - y\dot{x}) &= m[r \cos \theta (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) - r \sin \theta (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta)] \\ &= m[r\dot{r} \cos \theta \sin \theta + r^2\dot{\theta} \cos^2 \theta - r\dot{r} \cos \theta \sin \theta + r^2\dot{\theta} \sin^2 \theta] \\ &= mr^2\dot{\theta}, \end{aligned}$$

isto é, $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}$. Daí, como m em seu modo clássico é invariante, segue que $r^2\dot{\theta}$ é constante. Ponhamos então

$$r^2\dot{\theta} = \kappa \tag{3.3}$$

para representar a *componente de momento angular* da órbita.

Bem, se $\kappa = 0$, como r não se anula identicamente, então $\dot{\theta} = 0$. E assim, a partícula move-se ao longo de uma reta passando pelo centro do movimento. Agora, admitindo $r^2\dot{\theta} \neq 0$, que é o caso interessante, nota-se que $\dot{\theta}$ terá sinal bem definido, e conseqüentemente, $\theta(t)$ é estritamente monótona ao longo da órbita.

Agora, reescrevendo o campo em coordenadas polares, tem-se que

$$F(X) = f(X)X = f(X)(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Da segunda lei de Newton, temos que

$$m\ddot{X} = f(X)r(\cos \theta, \sin \theta) = f(X)|X|(\cos \theta, \sin \theta).$$

Fazendo $P = P(X) = F(X)|X|$, de modo que

$$\ddot{x} = \frac{P}{m} \cos \theta \quad \text{e} \quad \ddot{y} = \frac{P}{m} \sin \theta, \tag{3.4}$$

e diferenciando (3.1) duas vezes, chegamos a

$$\ddot{x} = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \cos \theta - [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}] \sin \theta$$

e

$$\ddot{y} = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \sin \theta + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}] \cos \theta.$$

Daí, obtemos que

$$\ddot{x} \cos \theta = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \cos^2 \theta - [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}] \sin \theta \cos \theta$$

$$\ddot{y} \sin \theta = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \sin^2 \theta + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}] \sin \theta \cos \theta.$$

Sendo assim, somando membro a membro, temos que

$$\ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \tag{3.5}$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos também

$$\ddot{x} \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta = -2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta} \quad (3.6)$$

Daí, substituindo (3.4) em (3.5) e (3.6), encontramos

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{P}{m} \text{ e } 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0, \quad (3.7)$$

que representa o movimento da partícula em coordenadas polares.

Note que, para $r \neq 0$,

$$r^2\dot{\theta} = \kappa \Leftrightarrow 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0,$$

o que mostra que há uma equivalência entre (3.3) e a segunda equação de (3.7). E assim, no que se segue é desnecessário considerá-la.

Já para a primeira expressão de (3.7), consideramos a monotonicidade de $\theta(t)$ e obtemos t como função de θ . Portanto, r passa a depender de θ , isto é, $r(\theta) = r \circ t(\theta)$. Assim, ainda para $r \neq 0$, observamos que a função $g(r) = \frac{1}{r}$ está bem definida. Diferenciando até a segunda ordem, tem-se

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dt}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{\kappa}$$

e

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{\kappa} \frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \kappa \dot{\theta}$$

Finalmente, substituindo \ddot{r} em (3.7), obtemos

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 P}{m\kappa^2}, \quad (3.8)$$

que é a equação das órbitas em sua forma polar para uma partícula de massa m no campo central F , conhecida como *equação de Binet*.

3.2 Investigação da Órbita

De acordo com o teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais, se ao menos a primeira derivada de P existir e for também contínua, e se admitirmos conhecidos r , θ , \dot{r} e $\dot{\theta}$ para $t = 0$, então a equação (3.8) possui solução única.

Por simplicidade, vamos impor condições a P para obter uma equação diferencial de primeira ordem de modo que todas as suas soluções não constantes sejam também soluções de (3.8).

Suponhamos que P seja contínuo e dependa exclusivamente de r . Daí, da proposição 3.3, segue que P é conservativo, isto é, existe um potencial U de P de maneira que a energia mecânica total E_t é constante durante o movimento. Desta forma,

$$E_t = E_c + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + U \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{2(E_t - U)}{m}.$$

Observando que

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \right)^2 + \left(\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \right)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2,$$

e que

$$-\frac{\dot{r}}{\kappa} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \Rightarrow \dot{r}^2 = \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 \kappa^2,$$

chegamos na seguinte equação

$$\left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{2(E_t - U)}{m\kappa^2}. \quad (3.9)$$

Note que nos pontos de máximos e mínimos da órbita, quando $\dot{r} = 0$, (3.9) reduz-se a

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2(E_t - U)}{m\kappa^2}. \quad (3.10)$$

E assim, o raio vetor pode ser representado por

$$r = \kappa \sqrt{\frac{m}{2(E_t - U)}}.$$

Da expressão da energia mecânica total, segue-se que

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2(E_t - U)}{m}}.$$

Pode-se também determinar o instante t_r concatenado ao raio r que será dado por

$$t_r = \int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E_t - U}}.$$

Além disso, como $\dot{\theta} = \frac{\kappa}{r^2}$ e

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = \frac{\frac{\kappa}{r^2}}{\sqrt{\frac{2(E_t - U)}{m}}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\kappa}{r^2 \sqrt{E_t - U}}$$

segue-se que

$$\theta = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\kappa}{r^2 \sqrt{E_t - U}} dr.$$

Agora, da primeira equação de (3.7) e de (1.2) decorre

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

e pondo $\dot{\theta}^2 = \left(\frac{\kappa}{r^2} \right)^2$ nessa expressão obtém-se

$$\ddot{r} - \frac{\kappa^2}{r^3} = -\frac{\partial U}{\partial r}.$$

Definido-se a energia potencial efetiva por

$$V(r) = U(r) + \frac{\kappa^2}{2r^2} \quad (3.11)$$

pode-se reescrever a equação do movimento como

$$\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

uma vez que

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\kappa^2}{r^3}.$$

Neste caso, a energia total é dada por

$$E_t = \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r).$$

Sendo assim, todas as órbitas correspondentes a uma dada energia e um dado κ , estão na região $V \leq E_t$.

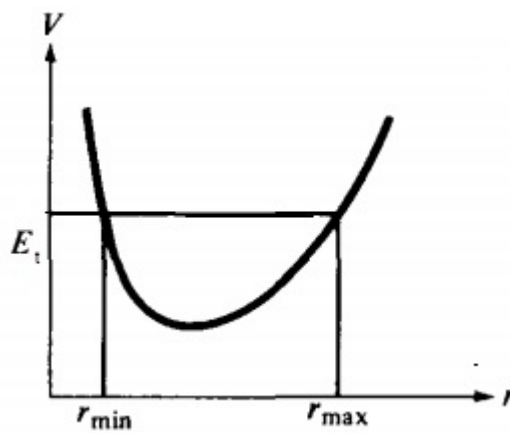


Figura 3.2: Energia potencial efetiva.
Fonte: [2].

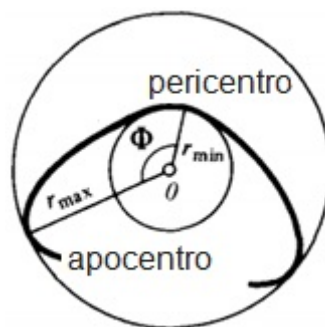


Figura 3.3: Órbita para $r_{min} < r_{max}$. Fonte: [2].

Deste modo, supondo-se órbitas limitadas, existem r_{min} e r_{max} tais que $0 \leq r_{min} \leq r \leq r_{max} < \infty$, e sempre que V for igual a E_t observa-se que r admite valores extremos,

que são os pontos de máximo ou de mínimo de $r(\theta)$. O movimento é então limitado entre os círculos de origem igual à do campo e raios extremos. Para $r = r_{min}$ o equivalente ponto da órbita é chamado *pericentro* e quando $r = r_{max}$ é denominado *apocentro*. Se o centro de referência do movimento em relação ao campo central for o Sol, por exemplo, tais pontos são chamados periélio e afélio, respectivamente. Observe na figura 3.3 que o ângulo Φ ocorre entre o pericentro e o apocentro seguinte e é dado por $\Phi = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\kappa}{r^2 \sqrt{E_t - U}} dr$. O ângulo entre dois pericentros consecutivos mede 2Φ .

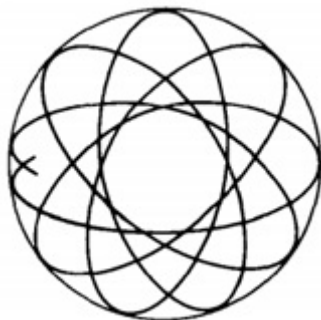


Figura 3.4: Coroa coberta densamente pela órbita.
Fonte: [2].

Os raios vetores que saem do centro ao pericentro e ao apocentro são eixos de simetria da órbita, que não é fechada, a menos que o ângulo Φ seja comensurável com 2π rad. Isso significa que caso Φ não seja comensurável com 2π rad a órbita tende a cobrir toda a coroa circular gerada a partir dos círculos de raios r_{min} e r_{max} . A percepção geométrica indica que sempre que r_{min} e r_{max} se aproximam a coroa circular degera-se a um círculo, que coincide com a órbita.

3.3 As Leis de Kepler

O *heliocentrismo* do astrônomo e matemático polonês Nicolau Copérnico influenciou os físicos, matemáticos e astrônomos Galileu Galilei e Johannes Kepler. Sabemos do legado de Galileu para a estruturação da análise matemática do movimento através do PRG e outras não menores contribuições.

Kepler, por sua vez, mergulhou nas questões do sistema mundo e no movimento dos astros, formulando entre 1609 e 1619 as leis fundamentais da Mecânica Celeste. Em sua obra intitulada *Mysterium Cosmographicum* tratou de justificar às hipóteses heliocêntricas e em 1609 com a publicação de *Astronomia Nova* descreveu as suas três leis. Uma vez firmada a idéia de que o Sol ocupa lugar de destaque no Universo, as famosas *Leis de*

Kepler foram assim enunciadas:

Primeira Lei de Kepler: Os planetas se movimentam no espaço com órbitas elípticas e o Sol ocupa um dos focos;

Segunda Lei de Kepler: O raio vetor que une os centros dos planetas ao centro do Sol percorre áreas iguais em intervalos de tempos iguais;

Terceira Lei de Kepler: Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas em torno do Sol são diretamente proporcionais aos cubos do semieixo maior de suas órbitas e a constante de proporcionalidade é a mesma para todos os planetas.

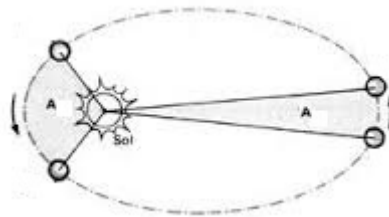


Figura 3.5: As duas primeiras leis de Kepler. Fonte: [17]

Na primeira lei de Kepler está implícita a existência de um plano de órbita para cada planeta. Em sua segunda lei há a indicação de uma velocidade *areolar* ou taxa areolar, taxa de variação da área varrida durante a trajetória do raio vetor dada por \dot{A} , que se mantém constante ao longo do movimento.

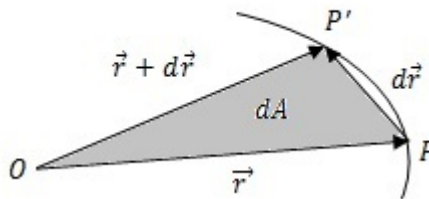


Figura 3.6: Velocidade Areolar. Fonte: o Autor.

De fato, sendo dA a fração de área varrida e dr a fração de arco para um infinitesimal intervalo de tempo dt temos que a área do $\triangle OP'P$ na figura 3.6 é dada por $dA \simeq \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r} \Rightarrow \frac{dA}{dt} \simeq \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ e quando $dt \rightarrow 0$ temos $\dot{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{L}$.

A área varrida encontra-se entre a órbita e dois raios vetores consecutivos partindo do centro (de referência) para os pontos $A = (r, \theta_A)$ e $B = (r, \theta_B)$ como mostra a figura 3.7.

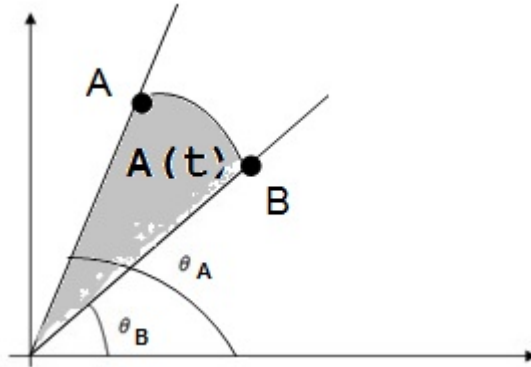


Figura 3.7: Área varrida em $\Delta t = t_B - t_A$. Fonte: o Autor.

A área $A(t)$ em coordenadas polares é dada por

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{\theta_A}^{\theta_B} r^2 d\theta$$

e sua derivada, a velocidade areolar, é dada por

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta},$$

e é constante visto que L é constante em um campo central. Note que para dois intervalos de tempo iguais as áreas varridas são iguais, o que demonstra a segunda lei de Kepler.

A terceira lei de Kepler pode ser representado de maneira algébrica. Sendo a a medida do semieixo maior da elipse temos

$$\frac{T^2}{a^3} = k \tag{3.12}$$

e está estreitamente engajada a uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância.

As leis de Kepler não foram aceitas naturalmente pelos cientistas da época. As órbitas de Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e da Terra são quase circulares o que tornaram os dados herdados do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe(1546-1601) e complementados por Kepler, seu fiel assistente, imprecisos para a caracterização de um sistema elíptico. Hoje é sabido que as órbitas dos planetas não são perfeitamente elípticas devido as interações do planeta com os demais astros do sistema solar.

Além deste fato, os conflitos atrelados ao heliocentrismo e liderados pela Igreja, impediram por décadas a expansão em escala das ideias de Kepler. Até que Chistopher

Wren(1632-1723), professor de astronomia do *Gresham College* e experimentador renomado da *Royal Society*, analisa os trabalhos de Kepler em 1609 e atribui a devida importância às suas leis.

3.4 A Lei da Gravitação Universal

Para mais detalhes sobre essa seção o leitor pode consultar [12].

Em 1777 foi publicada em Paris uma obra que sintetizava os *quatro modelos* de órbitas planetárias concebidos ao longo da história. Em ordem cronológica, o primeiro deles, que perdurara por mais de um milênio, foi proposto no século II pelo grego alexandrino Cláudio Ptolomeu. Astrônomo e geógrafo aristotélico, para Ptolomeu a Terra estaria fixa ocupando o centro do Universo e os demais planetas e a Lua orbitariam em torno dela. Esse modelo geocêntrico sofrera intensa influência da então imponente Igreja durante a Idade Média.

No segundo deles, proposto em 1543 por Copérnico, o Sol teria a posição privilegiada no Universo, sendo o seu centro, ao passo que os demais astros girariam em torno deste. As idéias heliocêntricas de Copérnico abalaram os preceitos da Igreja e sofreram intensa resistência em serem aceitas. Isso porque a Terra, fruto ímpar da Criação divina, estaria perdendo o lugar de destaque.

O terceiro modelo que fora proposto no fim do século VI por Brahe parece ponderar heliocentrismo e geocentrismo, uma vez que o Sol e a Lua orbitariam em torno da Terra e os demais planetas em torno do Sol.

Finalmente, em 1644 o matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650) explica as órbitas dos planetas como consequência da rotação do Sol em torno de seu eixo. Em suas suposições o espaço estaria preenchido por um fluido composto por pequenas partículas, e quando o Sol girava imensos turbilhões (vórtices) levariam a Terra e os demais planetas para as suas órbitas.

Todos os quatro modelos penetravam a ciência da gravitação apenas em termos organizacionais. Eles propunham cosmologias, mas não indicavam com precisão a origem das interações que garantiam as suas estruturas. Havia nesse sentido um questionamento comum a todos os modelos: Como comprovar a existência de uma força dirigida para o centro do Universo, inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o astro e o centro, que explicasse a trajetória dos planetas?

Tal questionamento fora feito por Wren sob forma de desafio aos então jovens astrônomos Edmond Halley(1656-1742) e Robert Hooke(1635-1703). Quem dentre eles respondesse ao questionamento faria jus a um livro de 40 xelins ($\frac{1}{20}$ da libra esterlina). No entanto, a resposta a tal questionamento viera a partir dos contatos entre Halley e o sucesso de Isaac Barrow(1630-1677) na cadeira lucasiana de matemática da Universidade de Cambridge, o

então recluso matemático e físico inglês Isaac Newton.

Newton responde ao questionamento no Livro III do Princípios através de argumentos geométricos. Isso porque, influenciado pela ascensão do movimento da renascença, desenvolvera uma aversão aos modernos, em especial ao cartesianismo e ao algebrismo, após o seu retorno de Woolsthorpe por conta da peste negra que assolara a Europa.

Daremos aqui um tratamento mais algébrico para a resposta a esse questionamento por dispormos de uma matemática que outrora Newton não dispunha. Conforme a equação (1.4) pode-se expressar a intensidade da força de campo central envolvida no movimento dos planetas e demais astros do seguinte modo

$$F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (3.13)$$

A força envolvida nas órbitas dos planetas tem um caráter contínuo de acordo com a segunda lei de Newton. Como ele já era conhecedor das leis de Kepler, inferiu ser essa força de aspecto centrípeto e juntamente com as suas leis dinâmicas para os movimentos garantiu a planaridade e o formato elíptico das órbitas.

Já a universalidade de (3.13) dá-se devido a terceira lei de Kepler, que também indica o comportamento mútuo da força. Além disso, a dificuldade na observação física deste último aspecto, nas interações entre o Sol e a Terra ou entre a Terra e a Lua, por exemplo, dá-se graças às grandes diferenças entre as massas envolvidas.

No entanto, para afirmar a equação (3.13) se faz necessário admitir duas premissas. A primeira delas considera o Sol fixo, o que é uma inverdade, pois o Sol também se move (hoje se sabe que até as galáxias, compostas por milhões de estrelas, também se movem). A segunda premissa afirma que pode-se desprezar as interações gravitacionais entre o planeta observado e os demais.

Se passarmos a considerar os efeitos gravitacionais do Sol e dos demais planetas sobre o planeta estudado, a abordagem torna-se altamente complexa. Se apenas o movimento do Sol for admitido temos o famoso problema dos dois corpos, e se além disso admite-se a influência dos demais planetas temos um *problema dos n corpos* e a complexidade aumenta drasticamente.

3.5 A equivalência Newton-Kepler

Admitindo como preceitos as três leis dinâmicas de Newton prova-se a equivalência entre a gravitação universal e as três leis de Kepler. Esse é o objetivo dessa seção.

Proposição 3.7. *Gravitação Universal \Rightarrow Leis de Kepler.*

Demonstração. Sendo o movimento central com força atrativa dada pela lei da Gravitação Universal, isto é, inversamente proporcional ao quadrado da distância, temos por hipótese

$$P(r) = -\frac{\mu}{r^2}, \text{ com } \mu > 0 \text{ constante.}$$

Substituindo em (3.8) temos

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{m\kappa^2}$$

que é uma equação do tipo oscilador harmônico cuja solução geral é dada por

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{m\kappa^2} + A \cos(\theta - \theta_0), 0 \leq \theta_0 < 2\pi.$$

Precisamos agora determinar a amplitude A . Seja então $U(r)$ um potencial para P , ou seja,

$$U(r) = - \int P(r) dr = - \int -\frac{\mu}{r^2} dr = -\frac{\mu}{r}.$$

Assim, de posse da equação (3.9) tem-se

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} &= \frac{2(E_t - U)}{m\kappa^2} \\ \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\mu}{m\kappa^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \right) \right]^2 + \left(\frac{\mu}{m\kappa^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \right)^2 &= \frac{2(E_t + \frac{\mu}{r})}{m\kappa^2} \\ (-A \sin(\theta - \theta_0))^2 + \frac{\mu^2}{m^2\kappa^4} + \frac{2\mu A \cos(\theta - \theta_0)}{m\kappa^2} + A^2 \cos^2(\theta - \theta_0) &= \frac{2E_t}{m\kappa^2} + \frac{2\mu}{m\kappa^2 r} \\ A^2 + \frac{\mu^2}{m^2\kappa^4} + \frac{2\mu}{m\kappa^2} \left(A \cos(\theta - \theta_0) - \frac{1}{r} \right) &= \frac{2E_t}{m\kappa^2} \\ A^2 + \frac{\mu^2}{m^2\kappa^4} + \frac{2\mu}{m\kappa^2} \left(-\frac{\mu}{m\kappa^2} \right) &= \frac{2E_t}{m\kappa^2} \\ A^2 = \frac{2E_t}{m\kappa^2} + \frac{\mu^2}{m^2\kappa^4} \Rightarrow A^2 = \frac{2m\mu^2\kappa^2 E_t}{m^2\kappa^2\kappa^2\mu^2} + \frac{\mu^2}{m^2\kappa^4} \Rightarrow A &= \frac{\mu}{m\kappa^2} \sqrt{1 + \frac{2m\kappa^2 E_t}{\mu^2}} \end{aligned}$$

Desse modo, a solução da equação diferencial do oscilador é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{\mu}{m\kappa^2} + A \cos(\theta - \theta_0) = \frac{\mu}{m\kappa^2} + \frac{\mu}{m\kappa^2} \sqrt{1 + \frac{2m\kappa^2 E_t}{\mu^2}} \cos(\theta - \theta_0) \\ \frac{1}{r} &= \frac{\mu}{m\kappa^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2m\kappa^2 E_t}{\mu^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Agora, relembremos da equação das cônicas em coordenadas polares dada por

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta}, l > 0, e \geq 0,$$

em que e é a sua excentricidade e $2l$ é a sua corda focal. Além disso, se $e < 1$ a equação representa uma elipse, se $e = 1$ a equação representa uma parábola e se $e > 1$ representa uma hipérbole. E para fins comparativos reescrevemos (3.14) na forma

$$r = \frac{m\kappa^2}{\mu} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{2m\kappa^2 E_t}{\mu^2}} \cos(\theta - \theta_0)} \quad (3.15)$$

donde segue que $2l = \frac{2m\kappa^2}{\mu}$ e $e = \sqrt{1 + \frac{2m\kappa^2 E_t}{\mu^2}}$. Note que

$$e < 1 \Leftrightarrow \frac{2m\kappa^2 E_t}{\mu^2} < 0 \Leftrightarrow E_t < 0.$$

Finalmente, como as trajetórias dos planetas devem ser periódicas e ilimitadas, a única cônica que satisfaz a órbita é a elipse, provando a primeira das leis de Kepler. As demais possibilidades encontram-se na tabela abaixo:

Cônica	Energia	Excentricidade (e)
Circular	< 0	$e = 0$
Elipse	< 0	$0 < e < 1$
Parábola	0	$e = 1$
Hipérbole	> 0	$e > 1$

A segunda lei de Kepler decorre do fato explanado durante a seção 3.3, em que a área varrida entre dois raios vetores consecutivos é constante em um campo central. Note que o centro do campo é um dos focos da elipse, ocupado em nosso sistema pela estrela Sol.

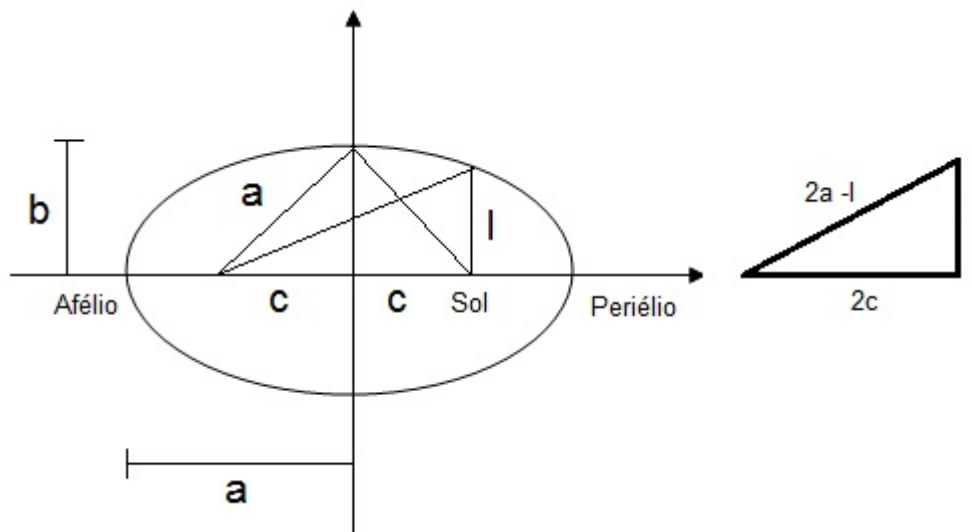


Figura 3.8: Medidas em uma elipse. Fonte: o Autor.

Para a terceira lei de Kepler, observemos, para a órbita representada na figura 3.8, que o período do movimento é dado por

$$T = \frac{A(t)}{\dot{A}(t)} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}\kappa} = \frac{2\pi ab}{\kappa},$$

e nos triângulos observados são válidas as relações $-b^2 = c^2 - a^2$ e $l = \frac{b^2}{a}$, com a e b sendo respectivamente as medidas dos semieixos maior e menor da elipse. De fato,

aplicando a o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo em destaque na figura 3.8 temos $(2a - l)^2 = (2c)^2 + l^2 \Rightarrow 4(b^2 - al) = 0 \Rightarrow l = \frac{b^2}{a}$. Daí, segue que

$$2l = \frac{2b^2}{a} = \frac{2m\kappa^2}{\mu} \Rightarrow \kappa = \frac{b\mu^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}m^{\frac{1}{2}}}{\mu^{\frac{1}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3m}{\mu}},$$

isto é,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 m}{\mu} \Leftrightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{\mu}.$$

Finalmente, considerando M a massa do Sol, a força central P é indicada pela equação (3.13) de modo que temos $\mu = GMm$, e por conseguinte, temos

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const.}$$

□

Proposição 3.8. *Leis de Kepler \Rightarrow Gravitação Universal.*

Demonstração. Pela segunda lei de Kepler, temos que a velocidade areolar é constante. Desta forma, o momento angular é constante. Disto, segue-se que, pela proposição 3.6, o campo é central, tendo como centro o Sol e ocupando um dos focos da elipse de equação polar reescrita na forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l}(1 + e \cos \theta).$$

A equação de Binet diz-nos que

$$-P = \frac{m\kappa^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right].$$

Agora, como

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{l}(1 + e \cos \theta) \right) + \frac{1}{l}(1 + e \cos \theta) = -\frac{e}{l} \cos \theta + \frac{1}{l} + \frac{e}{l} \cos \theta = \frac{1}{l},$$

temos que

$$P = -\frac{m\kappa^2}{r^2} \left(\frac{1}{l} \right) = -\frac{m\kappa^2}{l} \frac{1}{r^2}.$$

Portanto, o campo é atrativo e inversamente proporcional ao quadrado da distância. Note ainda que, como $al = b^2$, temos que

$$T = \frac{2\pi ab}{\kappa} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{\kappa^2} = \frac{4\pi^2 a^3 l}{\kappa^2} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 l}{\kappa^2},$$

ou seja, $\frac{l}{\kappa^2}$ é constante. E assim, $\frac{m\kappa^2}{l}$ é constante. Logo, a constante de proporcionalidade é também a mesma para todos os planetas. □

Capítulo 4

Considerações Finais: Mecânica na Graduação

Escrever esse trabalho marcou sem dúvida a minha carreira acadêmica. Sempre questioneei sobre como os matemáticos de formação entendem a Mecânica Newtoniana. Isso porque o contato com essa área na graduação ainda acontece de forma imatura, uma vez que o graduando em matemática concebe as leis gerais do movimento quase sempre sem atrelá-las ao formalismo matemático.

As leis aparecem naturalmente e até que são bem aceitas e utilizadas pelos estudantes de matemática, sem muitas contestações. Se funcionam, ou pelo menos se afirmam isso, então não há necessidade de investigar a veracidade dos fatos, afinal, as demonstrações matemáticas já ocupam o tempo dos estudantes. O ensino da Mecânica se resume então às meras aplicações de fórmulas. Esses e muitos outros são alguns resquícios de uma formação secundarista ainda exígua presente em nosso país.

O fato é que leis podem ser sintetizadas por um viés matemático assim como acontece com os teoremas. Há porém um sutileza em questão: teoremas são resultados que podem ser demonstrados muitas vezes por artifícios puramente matemáticos, ao passo que as leis surgem a partir de fenômenos observados e sistematicamente testados e marcam, na maioria das vezes, generalizações de difícil percepção.

Não obstante, distinguir o empírico do abstrato nunca se revelou uma tarefa fácil. A matemática é uma ciência fascinante em sua abstração e, quando empregada na análise de problemas provenientes do mundo real, revela o seu poder transformador. Há, portanto, uma ação de mútua ajuda entre o homem e a matemática. Afinal, o que seria da sociedade sem as modelgens do mundo físico propostas por essa ciência? Previsões do tempo por meio de aparatos tecnológicos, máquinas, supercomputadores, por exemplo, são comprovações físicas da interação humano-ciência.

E o que dizer da Mecânica? Esta é de fato, assim como a matemática, uma ciência universal. As leis que regem o movimento dos corpos e partículas consolidadas a partir

do século XVI propiciaram todo o desenvolvimento tecnológico dos séculos subseqüentes e também culminaram nos diversos avanços em outros campos da Ciência.

Esperamos que esse trabalho contribua significativamente para o ensino de Mecânica da graduação em matemática, seja por seus aspectos teóricos-matemáticos ou pela abordagem um pouco mais “moderna” que adotamos, visto que a literatura brasileira ainda carece de destaques algébricos e geométricos no tratamento de teorias até então concebidas e ensinadas por muitos através de aspectos somente empíricos.

Sem mais a tratar, é fato que Galileu, Kepler e Newton influenciaram a humanidade e não apenas a sua ciência. Conceber a essência desta disciplina com tamanha profundidade filosófica e matemática é reconhecer os esforços dos homens que ao longo dos séculos dedicaram suas histórias aos grandes entraves desta fascinante Ciência chamada Mecânica.

Referências Bibliográficas

- [1] ABREU, Luciano M.. SANTANA, Ademir E. SANTOS, Esdras S.. FILHO, Aurino Ribeiro. *Notas sobre o Grupo de Galilei: Aspectos Geométricos e Recentes Desenvolvimentos*. Sitientibus Série Ciências Físicas 05: Caderno de Física da UEFS, Feira de Santana, 2009.
- [2] ARNOLD, Vladimir.I.. *Graduate Texts in Mathematics: Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [3] ARNOLD, Vladimir.I. KOSLOV, Valery V., NEISHTADT, Anatoly I.. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, Moscow, 2002.
- [4] BUENO, H. Prado. *Álgebra Linear: Um segundo Curso*. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- [5] CHIBENI, Silvio Seno. *A Fundamentação Empírica das Leis Dinâmicas de Newton*. Revista Brasileira de Ensino de Física, Campinas, 1998.
- [6] DOERING, I. Claus. LOPES, Artur O.. *Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [7] FIGUEIREDO, D. Guedes. NEVES, A. Freiria. *Equações Diferenciais Aplicadas*. IMPA, Rio de Janeiro, 2015.
- [8] GONDAR, J.Lopes. CIPOLATTI, Rolci. *Iniciação à Física Matemática. Modelagens de Processos e Métodos de Solução*. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [9] SHAFAREVICH, I. R. and REMIZOV, A. O.. *Linear Algebra and Geometry*. Translated by David Kramer and Lena Nekludova. Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [10] LIMA, E. Lages. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [11] MARTIN, A. Paulo. SINGER, M. Lúcia *Tópicos de Álgebra Linear: Espaços Afins*. IME-USP, São Paulo, 2007.
- [12] Revista Gênios da Ciência - SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL - ED. Nº 7 *Newton: Pai da Física Moderna*. Duetto Editorial.

- [13] ANGUILERA, Valdir. *Uma pequena história do movimento*. Disponível em: <http://www.valdiraguilera.net/historia-do-movimento.html>. Acesso em: 3 de Fevereiro de 2017.
- [14] Notas de Álgebra Linear *Espaço Afim associado a um espaço vetorial*. Disponível em: <https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~mmlopes/GEOM08/apont/Apontgeometria2008.pdf>. Acesso em: 28 de Agosto de 2016.
- [15] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de Equações Diferenciais ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [16] VIEIRA, T. Miranda de Almeida.. *Geometria*. IM-UFAL, Maceió, 2014.(Apostilha)
- [17] Leis de Kepler. Disponível em <http://fisicafascinante.tumblr.com/post/19707476613/leis-de-kepler>. Acesso em 22 de Fevereiro de 2017.