UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

ALGUMAS VARIAÇÕES DO JOGO TORRE DE HANÓI

Mirian Silva Santos

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti

Feira de Santana

Maio de 2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ALGUMAS VARIAÇÕES DO JOGO TORRE DE HANÓI

Mirian Silva Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti

Feira de Santana
15 de maio de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA - BIBLIOTECA CENTRAL JULIETA CARTEADO

Santos, Mirian Silva

S233a Algumas variações da Torre de Hanói / Mirian Silva Santos - Feira de Santana, 2017.

51f.: il.

Orientador: Haroldo Gonçalves Benatti.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2017.

1 . Matemática - Ensino médio. 2. Material didático - Professores. 3. Torre de Hanói. I. Benatti, Haroldo Gonçalves, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU:51:373.5

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DA DISCENTE MIRIAN SILVA SANTOS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos quinze dias dias do mês de maio de dois mil e dezessete às 8:30 horas na sala MT 58, UEFS , ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"Algumas variações do Jogo Torre de Hanói"**, da discente **Mirian Silva Santos**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Haroldo Gonçalves Benatti (Orientador, UEFS), Juarez dos Santos Azevedo (UFRB) e Marcos Grilo Rosa (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 15 de maio de 2017.

Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS)
Orientador

Prof. Dr. Juarez dos Santos Azevedo (UFRB)

Prof. Dr. Marcos Grilo Rosa (UEFS)

Visto do Coordenador:

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos à Sociedade Brasileira de Matemática-SBM pela brilhante iniciativa de investir no ensino básico de matemática e a CAPES pelo apoio financeiro.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Pará - IFPA, Campus Rural de Marabá, por permitir a conclusão deste curso.

Gostaria de agradecer também ao meu orientador, Haroldo Gonçalves Benatti, pela dedicação e paciência durante as orientações, principalmente na fase inicial de decisão do tema.

Resumo

Neste trabalho exploramos o problema Clássico da Torre de Hanói, as Torres de Hanói Dupla, a Torre de Hanói Cíclica e a Torre de Hanói com 4 pinos. Para tanto, usamos os conceitos de recorrências lineares de primeira e segunda ordem com o intuito de determinar uma expressão matemática, em função da quantidade de discos, que quantifica o número mínimo de movimentos para solucionar essas variações do problema. Tivemos como objetivo a construção de um material didático que possa ser utilizado por professores do ensino médio, que queiram inserir em suas aulas o Clássico problema da Torre de Hanói, bem como, as curiosas variações desse problema.

Palavras-chave: Torre de Hanói, Variações da Torre de Hanói e Recorrências.

Abstract

In this work we explore the Tower of Hanoi Classic problem, the Towers of Double Hanoi, the Tower of Cyclic Hanoi and the Tower of Hanoi with 4 pins. For this, we use the concepts of first and second order linear recurrences in order to determine a mathematical expression, as a function of the number of disks, that quantifies the minimum number of movements to solve these variations of the problem. We had as objective the construction of a didactic material that can be used by high school teachers, who want to insert in their classes the classic problem of the Tower of Hanoi, as well as the curious variations of this problem.

Keywords: Tower of Hanoi, Variations of the Tower of Hanoi and Recurrences.

Sumário

Introdução

O problema da Torre de Hanói despertou minha atenção logo no início do mestrado, tanto pela sua beleza quanto pelas inúmeras possibilidades de se trabalhar a Matemática com esse jogo, sendo possível sua utilizacão desde o ensino fundamental até o ensino superior. Conteúdos como função exponencial, sequências, indução matemática e recorrências são alguns dos exemplos em que podemos inserir o problema da Torre de Hanói como uma ferramenta valiosa.

Nosso propósito aqui é construir um material didático que possa ser utilizado por professores do ensino básico, que queiram inserir em suas aulas o Clássico problema da Torre de Hanói, bem como as curiosas variações desse problema, ou até mesmo por estudantes de Licenciatura em Matemática que tenham interesse no tema.

Neste trabalho reunimos variações do problema Torre de Hanói, algumas foram resolvidas passo a passo usando os conceitos de recorrência e outras foram deixadas como propostas de atividades para o leitor.

O trabalho estar organizado em três capítulos. No capítulo I apresentamos uma breve revisão de sequências. Em seguida, definimos uma recorrência e alguns conceitos iniciais. Para finalizar, mostramos como encontrar a solução de uma recorrência de primeira e segunda ordem.

No capítulo II temos o problema Clássico da Torre de Hanói. Inicialmente abordamos sua história, depois resolvemos alguns casos particulares e finalizamos com a solução geral do problema.

Já no capítulo III apresentamos e resolvemos três variações da Torre de Hanói: a primeira é conhecida como a Torre de Hanói Cíclica; a segunda, a Torre Dupla de Hanói, a qual foi subdividida em mais três subproblemas; e a terceira, Torre de Hanói com 4 pinos. Essa última é um problema que ainda se encontra em aberto, por isso fizemos apenas alguns casos particulares. Ao final de cada variação deixamos como proposta de atividade para o leitor alguns outros problemas.

Capítulo 1

Recorrências

1.1 Sequências

Definição 1.1. Uma *sequência numérica* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma função que associa cada número natural[1] $n \in \mathbb{N}$ a um número real $s_n \in \mathbb{R}$. O termo s_n é denominado termo geral da sequência, ou ainda, o n-ésimo termo da sequência s.

Em geral, representamos uma sequência pela lista de seus termos $(s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ...)$. Quando a sequência possuir uma lista finita de números $(s_1, s_2, s_3, ..., s_n)$ chamaremos de sequência finita, caso contrário será chamada de sequência infinita.

Uma sequência pode ser representada através de:

- Uma proposição matemática. Por exemplo: a sequência dos números positvos múltiplos de 3 é $s_n = (0, 3, 6, 9, 12, ...)$.
- Uma expressão matemática. Por exemplo: a sequência definida por $s_n = 2n+1$ com $n \in \mathbb{N}$ é $s_n = (3, 5, 7, 9, ...)$.
- Uma relação de recorrência. Nesse caso cada termo da sequência, exceto alguns termos iniciais, é determinado por meio do(s) termo(s) imediatamente anterior(es). Por exemplo: a sequência de primeiro termo $s_1 = 1$ e segundo termo $s_2 = 3$, dada por $s_n = 2s_{n-1} - s_{n-2}$ com $n \geq 3$ é $s_n = (1, 3, 5, 7, 11, 15, 19, ...)$.

Frequentemente é necessário definir a sequência a partir do zero, isto é $s : \mathbb{N} \cup 0 \to \mathbb{R}$. Nestes casos o primeiro termo passaria a ser s_0, o segundo s_1 e assim sucessivamente. Pode até parecer estranho adotar essa nomeclatura, mas isso pode facilitar os cálculos em alguns exemplos.

[1] Nesse trabalho estamos considerando o conjunto dos números naturais como sendo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

1.2 Recorrências

Definição 1.2. Uma *recorrência* é uma sequência definida em função dos seu(s) termo(s) anterior(es) imediato(s).

Vejamos a seguir alguns exemplos de recorrências.

Exemplo 1.3. A sequência de Fibonacci[2] cujos termos são $s_n = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)$ pode ser definida recursivamente como $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \geq 0)$, sendo $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Exemplo 1.4. A sequência $s_n = (0, 3, 6, 9, ...)$ dos números múltiplos de 3 é dada pela recorrência $s_{n+1} = s_n + 3$, com $n \geq 0$ e $s_1 = 0$.

Exemplo 1.5. Considere a sequência dada por $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n - 1$, com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

Solução: Fazendo $n = 0$ na relação acima, obtemos $x_2 = 2x_1 + x_0 - 1 = 2 \cdot 1 + 0 - 1 = 1$; fazendo agora $n = 1$, obtemos $x_3 = 2x_2 + x_1 - 1 = 2 \cdot 1 + 1 - 1 = 2$, e assim por diante obteremos a sequência $x_n = (0, 1, 1, 2, 4, 9, ...)$.

■

Uma recorrência, por si só, não determina a sequência, pois é necessário conhecer também um ou mais termos iniciais da sequência. Como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 1.6. A recorrência dada por $s_{n+1} = s_n + 3$, com $s_1 = 0$, é a sequência dos múltiplos de três. Mas, se não estivesse estabelecido o valor do s_1, essa recorrência também seria satisfeita por todas as progressões aritméticas de razão 3, a exemplo de $(1, 4, 7, 10, 13, ...)$.

Observe que existem algumas formas equivalentes para representarmos uma mesma recorrência. A recorrência do exemplo 1.3 poderia ser escrita como $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall\ n \geq 2$. Esse procedimento evidencia que o nome que damos ao índice de uma sequência não é relevante para sua definição (cf. [10]).

Uma recorrência é dita homogenêa quando todos os seus termos dependem exclusivamente de termos anteriores (cf. exemplo 1.3). Caso exista algum termo independente na recorrência, essa será chamada de não homogênea (cf. os exemplos 1.4 e 1.5).

Quando cada termo da recorrência for expresso em função do seu antecessor imediato, essa será chamada de recorrência de primeira ordem (cf. o exemplo 1.4). Se cada termo for expresso em função dos dois antecessores imediatos, será chamada de recorrência de segunda ordem (cf. os exemplos 1.3 e 1.5).

---

[2] É uma sequência infinita, descrita por Leonard Fibonacci, começa por 0 e 1, e os termos seguintes são a soma dos dois termos anteriores.

Uma recorrência é dita linear se, e somente se, a sequência que a define é uma função do primeiro grau [9]. Por exemplo, $x_{n+1} = 2x_n + n^2$ é linear, mas $x_{n+1} = 2x_n^2$ não é linear.

Assim, a equação de recorrência do exemplo 1.3 é uma recorrência linear homogênea de segunda ordem. O exemplo 1.4 é uma recorrência linear não homogênea de primeira ordem. Já o exemplo 1.5 é uma recorrência linear não homogênea de segunda ordem.

Para resolver uma equação de recorrência devemos encontrar uma expressâo para x_n que dependa apenas de n e não mais de termos anteriores. Nosso propósito nas duas seções seguintes é mostrar como resolver uma equação de recorrância.

Os teoremas e demonstrações das próximas seções podem ser encontrados em [9] e [10].

1.3 Resolvendo Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Resolveremos primeiramente os casos em que as *recorrências lineares são homogêneas e de primeira ordem*. Essas recorrências são expressas da forma:

$$x_{n+1} = g(n)x_n.$$

Sendo $g(n)$ e x_n não nulos.

Daí teremos:

$$\begin{aligned} x_1 &= g(0)x_0 \\ x_2 &= g(1)x_1 \\ x_3 &= g(2)x_2 \\ &\vdots \\ x_n &= g(n-1)x_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando lado a lado as equações acima, obteremos:

$$x_n \cdot x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 = x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_0 \cdot g(0) \cdot g(1) \cdot g(2) \cdot g(3) \cdot \ldots \cdot g(n-1).$$

Cancelando os termos semelhantes a ambos os membros, concluímos:

$$x_n = x_0 \cdot g(0) \cdot g(1) \cdot g(2) \cdot g(3) \cdot \ldots \cdot g(n-1),$$

ou seja,

$$x_n = x_0 \cdot \prod_{k=0}^{n-1} g(k).$$

Exemplo 1.7. Considere a recorrência $x_{n+1} = nx_n$ com $x_1 = 1$. Encontre uma solução para a recorrência em função de n.

Solução: Temos:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 3x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1)x_{n-1}. \end{aligned}$$

Daí, multiplicando lado a lado as equações acima e cancelando os termos semelhantes, obteremos:

$$x_n = x_1 \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Como $x_1 = 1$, concluímos que a solução da recorrência é:

$$x_n = (n-1)!.$$

■

Consideraremos agora as *recorrências lineares não homogêneas de primeira ordem*, as quais são expressas na forma:

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n). \tag{1.1}$$

Sendo $g(n)$ e $h(n)$ funções não nulas.

Os casos mais simples de se resolver ocorre quando $g(n) = 1$, ou seja, quando a recorrência aparece na forma de $x_{n+1} = x_n + h(n)$. Mostraremos mais adiante, no teorema 1.9, que qualquer recorrência linear não homogênea de primeira ordem pode ser reescrita desse modo.

Tomando $g(n) = 1$ na equação (1.1), teremos:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h(0) \\ x_2 &= x_1 + h(1) \\ x_3 &= x_2 + h(2) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + h(n-1). \end{aligned}$$

Somando lado a lado as equações acima, obteremos:

$$x_n + \ldots + x_3 + x_2 + x_1 = x_{n-1} + \ldots + x_3 + x_2 + x_1 + x_0 + h(n-1) + \ldots + h(2) + h(1) + h(0).$$

Cancelando os termos semelhantes a ambos os membros, concluímos:

$$x_n = x_0 + h(n-1) + \ldots + h(2) + h(1) + h(0),$$

ou seja,

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} h(k).$$

Exemplo 1.8. Considere novamente a recorrência $s_{n+1} = s_n + 3$, com $s_1 = 0$. Mostraremos como encontrar uma expressão matemática que determinará cada termo dessa sequência em função de n.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1 + 3 \\ s_3 &= s_2 + 3 \\ s_4 &= s_3 + 3 \\ &\vdots \\ s_n &= s_{n-1} + 3. \end{aligned}$$

Somando lado a lado e cancelando os termos semelhantes a ambos os membos, obteremos:

$$s_n = s_1 + (3 + 3 + 3 + \ldots + 3).$$

Como há $n - 1$ termos iguais a 3 dentro dos parênteses e $s_1 = 0$, concluímos que $s_n = 3(n-1)$ ou, equivalentemente $s_{n+1} = 3n$. O que já era de se esperar, pois essa recorrência define a sequência dos múltiplos de 3.

■

O próximo teorema mostra que qualquer recorrência da forma $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ pode ser transformada em $x_{n+1} = x_n + h(n)$.

Teorema 1.9. *Se a_n é uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)a_n}.$$

Demonstração: Substituindo $x_n = a_n y_n$ na equação de recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$, obteremos

$$y_{n+1}a_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n). \tag{1.2}$$

Como a_n é uma solução da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, então podemos dizer que $a_{n+1} = g(n)a_n$. Daí, substituindo $a_{n+1} = g(n)a_n$ em (1.2), teremos:

$$y_{n+1}g(n)a_n = g(n)a_n y_n + h(n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)a_n}.$$

■

Vejamos no exemplo a seguir como aplicar esse teorema (1.9).

Exemplo 1.10. Resolva a equação de recorrência $x_{n+1} = nx_n + (n+1)!$ sendo $x_1 = 1$.

Solução: Encontraremos primeiramente uma solução para $x_{n+1} = nx_n$. Temos que:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 3x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1)x_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando lado a lado as equações acima, cancelando os termos semelhantes e sabendo que $x_1 = 1$, obteremos $x_n = (n-1)!$.

Como $x_n = (n-1)!$ é uma solução de $x_{n+1} = nx_n$, pelo teorema (1.9) devemos substituir $x_n = (n-1)!\, y_n$ na recorrência $x_{n+1} = (n+1)! + nx_n$. Daí, teremos:

$$\begin{aligned} n!y_{n+1} &= (n+1)! + n(n-1)!\, y_n \\ n!y_{n+1} &= (n+1)! + n!\, y_n \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{(n+1)!}{n!} \\ y_{n+1} &= y_n + (n+1). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Resolvendo a equação de recorrência (1.3). Tem-se

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 2 \\ y_3 &= y_2 + 3 \\ y_4 &= y_3 + 4 \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + n. \end{aligned}$$

Somando membro a membro, obtemos:

$$y_n = y_1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n. \tag{1.4}$$

Por outro lado, como $x_1 = 1$ e $0! = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} x_n &= (n-1)!y_n \\ y_1 &= \frac{x_1}{(1-1)!} \\ y_1 &= 1. \end{aligned}$$

E, portanto, a equação (1.4) pode ser reescrita da forma:

$$y_n = \frac{(n+1)n}{2}. \tag{1.5}$$

Substituindo a equação (1.5) em $x_n = (n-1)!\, y_n$, concluímos que a solução procurada é

$$x_n = (n-1)!\, \frac{(n+1)n}{2},$$

ou seja,

$$x_n = \frac{(n+1)!}{2}.$$

■

1.4 Resolvendo Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Já sabemos que cada termo a_{n+2} da recorrência linear de segunda ordem depende dos dois termos anteriores imediatos, ou seja, a_{n+1} e a_n. O termo a_{n+2} pode ser representado da forma

$$a_{n+2} = g(n)a_{n+1} + h(n)a_n + f(n),$$

onde $h(n) \neq 0$, pois caso contrário a recorrência seria de primeira ordem.

Trataremos primeiramente das recorrências lineres de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, ou seja, as que possuem a forma

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n. \tag{1.6}$$

Para cada recorrência do tipo (1.6) existe uma equação do segundo grau escrita na forma $r^2 = pr + q$, chamada de equação característica. A suposição inicial de que o coeficiente de a_n seja não nulo implica que a equação característica não tenha o zero como raiz.

O teorema a seguir mostra como a solução das recorrências do tipo (1.6) está relacionada com as raízes da equação característica.

Teorema 1.11. *Seja $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ uma equação de recorrência onde p e q são constantes reais dadas, não ambas nulas. Se a equação $r^2 = pr + q$ tiver raízes reais r_1 e r_2, então existem constantes reais C_1 e C_2, determinadas pelos termos iniciais da recorrência, tais que:*

1. *Se $r_1 \neq r_2$, então $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência.*

2. *Se $r_1 = r_2 = r$, então $x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ é solução da recorrência.*

Demonstração: Para o item 1, devemos substituir $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$. Daí,

$$C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} = p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n)$$

$$r_1^2C_1r_1^n + r_2^2C_2r_2^n = pr_1C_1r_1^n + pr_2C_2r_2^n + qC_1r_1^n + qC_2r_2^n$$

$$r_1^2C_1r_1^n - pr_1C_1r_1^n - qC_1r_1^n = qC_2r_2^n + pr_2C_2r_2^n - r_2^2C_2r_2^n$$

$$C_1r_1^n(r_1^2 - pr_1 - q) = C_2r_2^n(-r_2^2 + pr_2 + q).$$

Como r_1 e r_2 são as raízes da equação característica $r^2 = pr + q$, tem-se:

$$r_1^2 - pr_1 - q = 0 \qquad \text{e} \qquad -r_2^2 + pr_2 + q = 0.$$

Portanto,

$$C_1r_1^n0 = C_2r_2^n0 = 0$$

e $x_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ é solução da recorrência $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$.

Para o item 2. Se $r_1 = r_2 = r$, então da equação característica, $r^2 = pr + q$, obteremos $r = \frac{p}{2}$. Daí, substituindo $x_n = C_1r^n + C_2nr^n$ em $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$, tem-se:

$$C_1r^{n+2} + C_2(n+2)r^{n+2} = p(C_1r^{n+1} + C_2(n+1)r^{n+1}) + q(C_1r^n + C_2nr^n)$$

$$C_1r^nr^2 + C_2nr^nr^2 + 2C_2r^nr^2 = pC_1r^nr + pC_2nr^nr + pC_2r^nr + qC_1r^n + qC_2nr^n$$

$$C_1r^n(r^2 - pr - q) + C_2nr^n(r^2 - pr - q) + C_2r^{n+1}(2r - p) = 0.$$

Como r é raíz da equação característica $r^2 = pr + q$ e $r = \frac{p}{2}$, tem-se:

$$r_1^2 - pr_1 - q = 0 \qquad \text{e} \qquad 2r - p = 0.$$

Logo,

$$C_1r^n0 + C_2nr^n0 + C_2r^{n+1}0 = 0.$$

Concluindo assim que $x_n = C_1r^n + C_2nr^n$ é solução da recorrência.

■

Na prática, para resolvermos uma recorrência linear de segunda ordem homogênea devemos encontrar as raízes da equação característica, verificar se as raízes são iguais ou não, em seguida aplicar uma das fórmulas dos itens 1 ou 2 do teorema (1.11). Por fim, encontrar os valores das constantes C_1 e C_2.

Exemplo 1.12. A sequência de Fibonacci (ver exemplo 1.3) é determinada pela expressão $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostração: De acordo com o exemplo (1.3) a recorrência que define a sequência de Fibonacci é $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. A equação caracterítica é $r^2 = r + 1$ e suas raízes são:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Pelo teorema (1.11), como as raízes são distintas, $F_n = C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ é solução da recorrência. Resta encontrar os valores das constantes C_1 e C_2. Como $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, tem-se:

$$\begin{cases} F_0 = C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0 \\ F_1 = C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_2 = 1 \end{cases}.$$

Resolvendo esse último sistema encontraremos,

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Portanto,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

■

Exemplo 1.13. Veremos como resolver a recorrência $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$ para $x_0 = 3$ e $x_1 = -6$.

Solução: A equação característica dessa recorrência é $r^2 + 2r + 1 = 0$ e suas raízes são $r_1 = r_2 = -1$. Logo, pelo teorema (1.11), $x_n = C_1(-1)^n + C_2n(-1)^n$ é solução da recorrência.

Para determinar C_1 e C_2 tem-se:

$$\begin{cases} x_0 = C_1(-1)^0 + C_2 0(-1)^0 \\ x_1 = C_1(-1)^1 + C_2 1(-1)^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ -C_1 - C_2 = -6 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema obteremos $C_1 = C_2 = 3$. Concluindo assim que

$$x_n = 3(-1)^n + 3n(-1)^n$$

e, ainda,

$$x_n = 3(-1)^n(1+n)$$

é solução da recorrência.

■

Apresentaremos a seguir um método que resolve algumas recorrências lineares de segunda ordem não homogênea, porém não todas.

De um modo geral, para resolver uma recorrência linear de segunda ordem não homogênea devemos encontrar a solução da recorrência homogênea (a qual já sabemos fazer) e uma solução particular da não homogênea, essa última será por tentativas e erros. É o que nos mostra o próximo teorema.

Teorema 1.14. *Seja x_n uma solução da recorrência*

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + f(n),$$

então a substituição $a_n = x_n + y_n$ transforma a recorrência em

$$y_{n+2} = py_{n+1} + qy_n.$$

Demonstração: Substituindo $a_n = x_n + y_n$ em $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + f(n)$, tem-se

$$x_{n+2} + y_{n+2} = p(x_{n+1} + y_{n+1}) + q(x_n + y_n) + f(n)$$

$$y_{n+2} = py_{n+1} + qy_n - x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n + f(n).$$

Como x_n é solução da recorrência, ou seja, $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n + f(n)$, concluiremos que

$$y_{n+2} = py_{n+1} + qy_n.$$

■

Exemplo 1.15. Resolva a recorrência $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n$ para $x_0 = 1$ e $x_1 = 4$.

Solução: A equação característica da recorrência homogênea, $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$, é $r^2 - 5r + 6 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Portanto, a solução geral dessa recorrência homogênea é $h_n = C_1 3^n + C_2 2^n$. Tentaremos encontrar uma solução particular, a_n, da recorrência

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n. \tag{1.7}$$

Provavelmente essa solução a_n será um polinômio de grau um (se não for devemos tentar outra solução), pois ao substitui-lá em $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n$ devemos obter n. Tentaremos $a_n = An + B$. Substituindo essa suposta solução em (1.7), tem-se

$$A(n+2) + B - 5[A(n+1) + B] + 6(An + B) = n$$

$$An - 5An + 6An + 2A - 5A + B - 5B + 6B = n$$

$$2An - 3A + 2B = n.$$

Daí, a_n será solução se $2An = n$ e $-3A + 2B = 0$. Resolvendo essas duas últimas equações encontraremos $A = \frac{1}{2}$ e $B = \frac{3}{4}$.

Portanto, $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}$ é uma solução particular e $x_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + C_1 3^n + C_2 2^n$ é a solução geral da recorrência não homogênea.

Para o que resta, tem-se $x_0 = 1$ e $x_1 = 4$. Daí,

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{3}{4} + C_1\cdot 3^0 + C_2\cdot 2^0 \\ x_1 = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3}{4} + C_1\cdot 3^1 + C_2\cdot 2^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{4} \\ 3C_1 + 2C_2 = \frac{11}{4} \end{cases}.$$

Resolvendo esse último sistema obteremos $C_1 = \frac{9}{4}$ e $C_2 = -2$. Concluindo, assim, que a solução geral da recorrência $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n$ é

$$x_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + \frac{9}{4}3^n - 2\cdot 2^n.$$

■

Exemplo 1.16. Resolva a recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^{n+3}$, com $x_0 = 3$ e $x_1 = 6$.

Solução: A recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^{n+3}$ tem equação caracterítica $r^2 - 4r + 4 = 0$, cujas raízes são $r_1 = r_2 = 2$. Portanto, a solução da homogênea $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ é $h_n = C_1 2^n + C_2 n\, 2^n$. Tentaremos encontrar uma solução particular, a_n, da recorrência

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^{n+3}. \tag{1.8}$$

Observe que, ao substituir a_n no primeiro membro da equação (1.8), devemos encontrar 2^{n+3}. Por isso, é intuitivo pensar que essa solução, a_n, seja uma função exponencial de base 2. Testanto $a_n = A.2^n$ em (1.8), tem-se:

$$\begin{aligned} A2^{n+2} - 4A2^{n+1} + 4A2^n &= 2^{n+3} \\ 4A2^n - 8A2^n + 4A2^n &= 2^{n+3} \\ A2^n(4 - 8 + 4) &= 2^{n+3} \\ 0 &= 2^{n+3}. \end{aligned}$$

O que é impossível. Logo, a recorrência não admite solução da forma $a_n = A.2^n$. Observe que nosso objetivo era encontrar o valor de A de modo que, ao substituir $A.2^n$ em (1.8), geraria uma exponencial que pudéssemos igualar a 2^{n+3}. Mas $A.2^n$ é solução da homogênea (tomando $C_2 = 0$ e $C_1 = A$) e, substituída na equação, daria zero e não uma exponencial como queríamos.

Sempre que nossa tentativa não der certo em algum dos termos, fazemos a correção aumentando o grau desse termo, ou seja, multiplicando o termo por n. Nesse caso, aumentando o grau da nossa tentativa anterior teríamos $a_n = An2^n$. Mas, novamente essa é uma solução da homogênea (tomando $C_1 = 0$ e $C_2 = A$) e, quando susbstituida em (1.8), dará zero e não uma exponencial de base 2 como desejamos.

Então, aumentando mais uma vez o grau da nossa tentativa, teremos $a_n = An^2 2^n$ e substituindo-a na equação (1.8) tem-se:

$$A(n+2)^2 2^{n+2} - 4A(n+1)^2 2^{n+1} + 4An^2 2^n = 2^{n+3}$$

$$4A\,2^n(n^2+4n+4) - 8A\,2^n(n^2+2n+1) + 4A\,2^n n^2 = 2^{n+3}$$

$$A\,2^n n^2(4-8+4) + A\,2^n n(16-16) + A\,2^n(16-8) = 2^{n+3}$$

$$8A\,2^n = 2^{n+3}$$

$$8A\,2^n = 2^3 2^n$$

$$A = 1.$$

Portanto, a equação particular da recorrência é $a_n = n^2 2^n$ e a equação geral é $x_n = n^2 2^n + C_1 2^n + C_2 n\, 2^n$. Como $x_0 = 3$ e $x_1 = 6$, tem-se:

$$\begin{cases} x_0 = 0^2 \cdot 2^0 + C_1 \cdot 2^0 + C_2 \cdot 0 \cdot 2^0 \\ x_1 = 1^2 \cdot 2^1 + C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot 1 \cdot 2^1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 3 \\ 2C_1 + 2C_2 = 4 \end{cases}.$$

Daí, obteremos $C_1 = 3$ e $C_2 = -1$. Concluindo assim que a solução geral da recorrência não homogenêa é

$$x_n = n^2 2^n + 3 \cdot 2^n - n\, 2^n$$

e, ainda,

$$x_n = 2^n(n^2 - n + 3).$$

■

Usaremos no próximo capítulo as ideias apresentadas até aqui para encontrar as soluções das variações do problema da Torre de Hanói.

Capítulo 2

O Clássico Problema da Torre de Hanói

O jogo Torre de Hanói, também conhecido como Torre de Brahma, é um antigo quebra-cabeça inventado[1] pelo matemático francês Édouard Lucas por volta de 1883, que consiste em uma base contendo três pinos em um dos quais são colocados n discos (8 discos na figura 2.1) de tamanhos diferentes, dispostos em ordem crescente de diâmetro do topo para a base. O objetivo do jogo é transportar todos os discos do pino inicial para um pino qualquer usando o outro pino como auxiliar, movendo apenas um disco por vez e jamais colocando um disco maior sobre um menor.

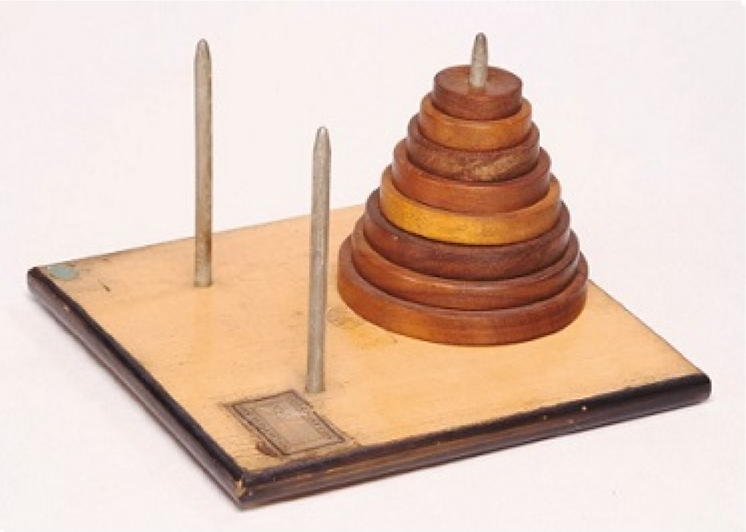

Figura 2.1: Torre de Hanói com 8 discos [4].

O jogo original, comercializado por volta de 1883, foi feito com oito discos conforme

[1] Apesar de alguns autores (ver por exemplo [7], [11] e [12]) afirmarem que a Torre de Hanói foi inventada por volta de 1883 por Édouard Lucas, não existe nenhuma evidência concreta que comprove isso, segundo Andreas e at al. [4].

podemos ver na figura (2.1). Há quem diga (ver [4]) que o nome do jogo foi inspirado na torre da cidade de Hanói, capital do Vietnã, uma vez que se encontrava nas manchetes dos jornais franceses da época.

Existem várias lendas que retratam a origem desse jogo, trazemos aqui uma tradução da lenda contada em [5] e citada por Pereira e Rodrigues em [11]:

"No grande templo de Brahma em Benares, numa bandeja de metal sob a cúpula que marca o centro do mundo, três agulhas de diamantes servem de pilar a sessenta e quatro discos de ouro puro. Incansavelmente, os sacerdotes transferem os discos, um de cada vez, de agulha para agulha, obdecendo sempre à lei imutável de Brahma, nenhum disco poderá sobrepor a um menor, no início do mundo, todos os sessenta e quatro discos de ouro foram dispostos na primeira das três agulhas, constituindo a Torre de Brahma. No momento em que o menor dos discos for colocado de tal modo que se forme uma vez mais a Torre de Brahma numa agulha diferente da inicial, tanto a torre como o templo serão transformados em pó e o ribombar de um trovão assinalará o fim do mundo."

Mas, afinal, quanto tempo seria necessário até que todos os sessenta e quatro discos fossem movidos? Para responder a essa pergunta encontraremos uma fórmula matemática que expresse o número mínimo de movimentos em função dos n discos.

Em matemática muitas vezes devemos analisar, primeiramente, alguns casos particulares do problema para, a partir daí, encontrar uma solução geral. Consideremos os seguintes casos:

- Para $n = 1$.

  Basta mover o disco do pino A para o C ver figura 2.2. Logo, é necessário apenas um movimento.

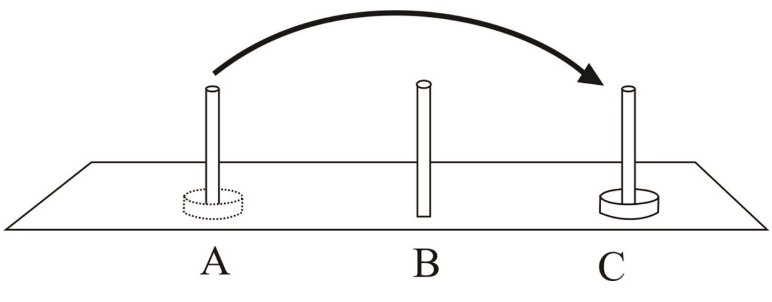

Figura 2.2: Passo para resolver o problema clássico com $n = 1$.

- Para $n = 2$.

  Devemos mover o disco menor do pino A para o B e, em seguida, mover o disco maior do pino A para o C. Por fim, mover o disco menor do pino B para o C. Portanto, o número mínimo de movimentos foi três ver figura 2.3.

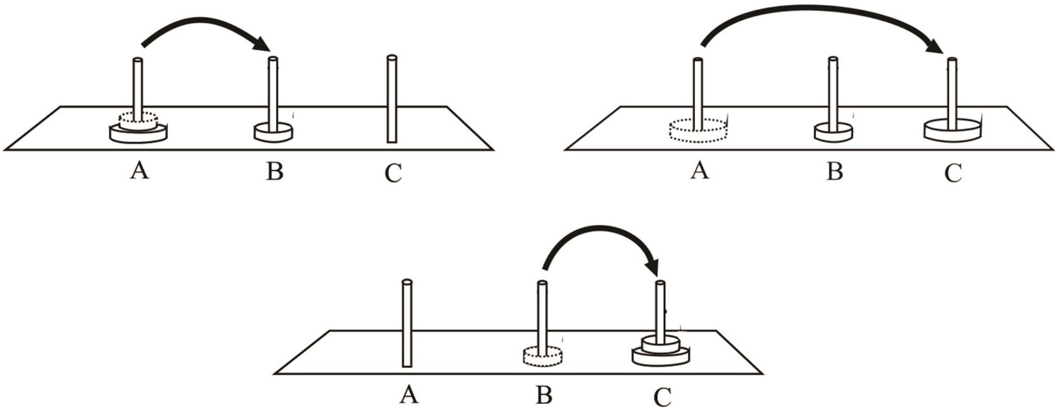

Figura 2.3: Passos para resolver o problema clássico com $n = 2$.

- Para $n = 3$.

  Devemos mover o disco menor do pino A para o C e o disco médio do pino A para o B. Em seguida, move novamente o disco menor do pino C para o B. Agora, move o disco maior do pino A para o C e o disco menor do pino B para o A. Finalmente, move o disco médio do pino B para o C e o disco menor do pino A para o C. Portanto foram necessários 7 movimentos para transportar, do primeiro para o terceiro pino, a torre com três discos ver figura 2.4.

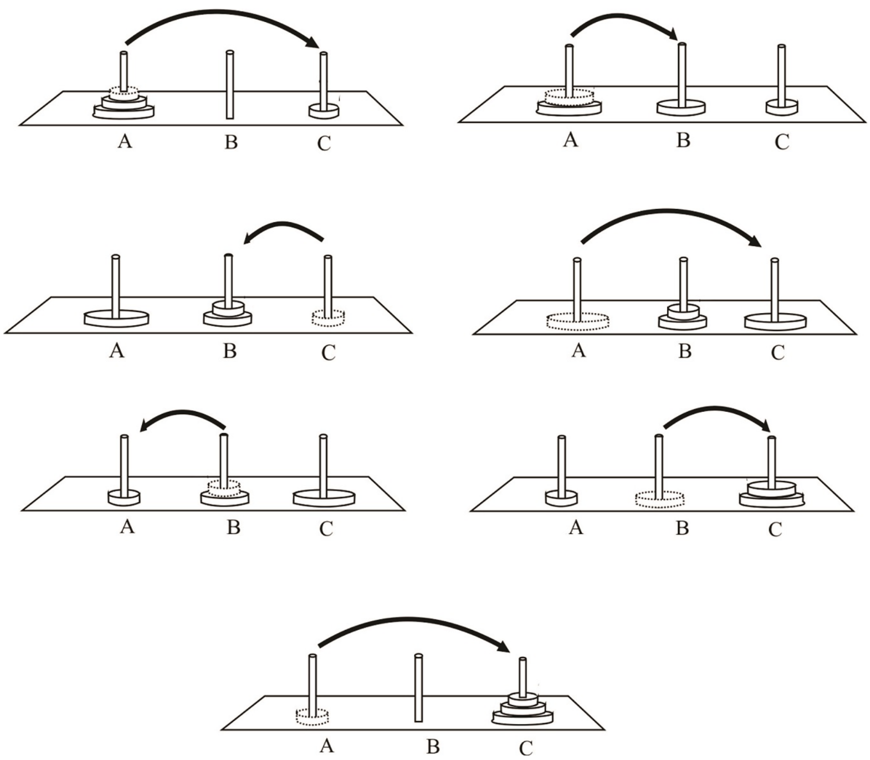

Figura 2.4: Passos para resolver o problema clássico com $n = 3$.

Ao resolver o caso para $n = 3$ percebemos que foi necessário, primeiramente, mover a torre com dois discos para um pino auxiliar, depois mover o disco maior para o pino de destino e, finalmente, mover a torre com dois discos para o pino destino.

Seguindo essa estratégia, para resolvermos o caso com $n = 4$ devemos mover a torre com três discos (já sabemos que são necessários 7 movimentos para isso) para um pino auxiliar, mover o quarto disco (mais um movimento) para o pino de destino e, por fim, mover a torre com três discos do pino auxiliar para o pino de destino. Resultando em 15 movimentos, no mínimo.

Sendo assim, para $n = 5$ o número mínimo de movimentos são 3, pois são necessários 15 movimentos para mover a torre com 4 discos do pino inicial para o final, 1 movimento para mover o quinto disco do pino inicial para o final e, novamente, mais 15 movimentos para mover a torre com 4 discos do pino auxiliar para o final.

Essa ideia é usada para generalizarmos a solução do problema e encontrarmos uma relação de recorrência, conforme veremos mais adiante. Mas, antes, iremos encontrar uma solução intuitiva para o problema.

Analisando a tabela 2.1 que mostra o número de movimentos necessários para mover n discos, podemos conjecturar que o número mínimo de movimentos, T_n, satisfaz à equação $T_n = 2^n - 1$.

Número de discos (n)	**Número de movimentos** (T_n)
1	$2^1 - 1 = 1$
2	$2^2 - 1 = 3$
3	$2^3 - 1 = 7$
4	$2^4 - 1 = 15$
5	$2^5 - 1 = 31$

Tabela 2.1: Número mínimo de movimentos.

Mas é claro que $T_n = 2^n - 1$ é apenas uma suposição. Não é porque deu certo para os cinco primeiros valores de n que vai valer sempre. Devemos verificar se será válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja T_n o número mínimo de movimentos para mover uma torre com n discos de um pino para outro, e T_{n-1} o número mínimo de movimentos para mover uma torre com $n - 1$ discos; então, para movermos n discos devemos mover, primeiramente, $n - 1$ discos para um pino auxiliar, depois mover o n-ésimo disco para o pino de destino e, por fim, mover mais uma vez a torre com $n - 1$ discos para o pino de destino. Portanto, $T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1$. Mas, será que essa é a expressão que dar o número mínimo de movimentos? Assim,

$$T_n \leq 2T_{n-1} + 1. \tag{2.1}$$

Para provar que $T_n = 2T_{n-1}+1$ devemos mostrar que $T_n \geq 2T_{n-1}+1$ usando o princípio da tricotomia. Observe que o maior disco sempre será movido para um pino vazio, ou seja, para movê-lo é necessário mover os $n-1$ discos que estão sobre ele. Portanto, precisamos transferir $n-1$ discos para um pino auxiliar, o que é feito com no *mínimo* T_{n-1} movimentos. Para transferir o disco maior é preciso apenas um movimento. E, por fim, os $n-1$ discos devem ser tranferidos do pino auxiliar para o pino final, o que é feito, com no *mínimo* T_{n-1}, movimentos. Assim,

$$T_n \geq 2T_{n-1} + 1. \tag{2.2}$$

Portanto, comparando (2.1) e (2.2) podemos concluir pelo princípio da tricotomia que:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

ou, ainda,

$$T_{n+1} = 2T_n + 1, \qquad n \geq 0. \tag{2.3}$$

A equação (2.3) é uma recorrência linear de primeira ordem não homogênea. Para resolvê-la devemos encontrar, primeiramente, uma solução qualquer para $T_{n+1} = 2T_n$. Escrevendo

$$\begin{aligned} T_2 &= 2T_1 \\ T_3 &= 2T_2 \\ T_4 &= 2T_3 \\ &\vdots \\ T_n &= 2T_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando lado a lado as equações acima e cancelando os termos semelhantes tem-se:

$$T_n = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2)T_1.$$

Como existe $n-1$ termos iguais a dois dentro do parêntese e $T_1 = 1$. Concluímos que $T_n = 2^{n-1}$ é uma solução da recorrência $T_{n+1} = 2T_n$.

Como $T_n = 2^{n-1}$ é uma solução de $T_{n+1} = 2T_n$, pelo teorema (1.9) devemos substituir $T_n = 2^{n-1}\, y_n$ na recorrência $T_{n+1} = 2T_n + 1$. Daí, teremos:

$$\begin{aligned} 2^{n+1-1}\, y_{n+1} &= 2 \cdot 2^{n-1}\, y_n + 1 \\ 2^n\, y_{n+1} &= 2^n\, y_n + 1 \\ y_{n+1} &= y_n + 2^{-n}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Resolvendo a equação de recorrência (2.4). Tem-se

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 2^{-1} \\ y_3 &= y_2 + 2^{-2} \\ y_4 &= y_3 + 2^{-3} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro e cancelando os termos semelhantes, obteremos:

$$y_n = y_1 + (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-1)})$$

$$y_n = y_1 + 1 - 2^{1-n}. \tag{2.5}$$

Por outro lado, como $T_1 = 1$, tem-se

$$T_n = 2^{n-1}\, y_n$$

$$T_1 = 2^0\, y_1$$

$$y_1 = 1.$$

Portanto a equação (2.5) pode ser reescrita na forma:

$$y_n = 2 - 2^{1-n}. \tag{2.6}$$

Substituindo a equação (2.6) em $T_n = 2^{n-1}\, y_n$, concluímos que a solução procurada é

$$T_n = 2^{n-1}\,(2 - 2^{1-n}),$$

ou seja,

$$T_n = 2^n - 1.$$

Portanto, os sacerdotes terão que realizar no mínimo $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ movimentos. Sendo otimistas, se realizassem um movimento por segundo (supondo que não erraria nenhuma jogada) seria necessário 585 bilhões de anos para terminar.

Proposta de Atividade

1. *Sugerimos ao leitor resolver, passo a passo, o problema da Torre de Hanói com 4 e 5 discos, para fixar melhor as ideias apresentadas neste capítulo.*

2. *Considere o mesmo problema da Torre de Hanói (inicialmente os n discos estão empilhados no pino A devendo ser tranportados para o pino C) com uma terceira regra: um disco só pode ser movido para um pino adjacente, ou seja, se o disco estiver no pino A só pode ser movido para o pino B, do pino B só pode ser movido para A ou C, e do pino C só pode ir para a B.*

Capítulo 3

Variações da Torre de Hanói

Nesse período de um pouco mais de um século, desde o surgimento do jogo Torre de Hanói até os tempo de hoje, surgiram inúmeras variações do problema, algumas dessas discutiremos aqui nesse capítulo.

3.1 Torre de Hanói Cíclica

A Torre de Hanói Cíclica foi inventada por Atkinson [1] em 1981. Essa é uma variação do clássico problema da Torre de Hanói que consiste em dispor três pinos em círculo, onde em um dos pinos são colocados n discos de diâmetros diferentes em ordem crescente do topo para base. A torre formada pelos n discos deve ser transportada do pino de origem para o pino de destino, de modo que todos os movimentos aconteçam no sentido horário ($A \to C \to B \to A$).

Atkinson [1] percebeu que resolver o problema movendo os discos para a direita do pino de origem (pino A para C) era diferente de resolver o problema movendo os discos para a esquerda do pino de origem (pino A para B). Vejamos alguns casos particulares:

- Para $n = 1$.
  - *Para a direita:* Para mover uma torre com $n = 1$ disco do pino A para C basta um único movimento ver figura 3.1.

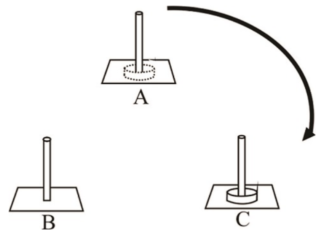

Figura 3.1: Movendo para a direita a torre com $n = 1$ disco.

– *Para a esquerda:* Nesse caso devemos transportar a torre com $n = 1$ disco do pino A para o B. Para tanto, devemos mover o disco do pino A para o C e, em seguida transportá-lo do pino C para o B ver figura 3.2. Resultando, assim, em dois movimentos.

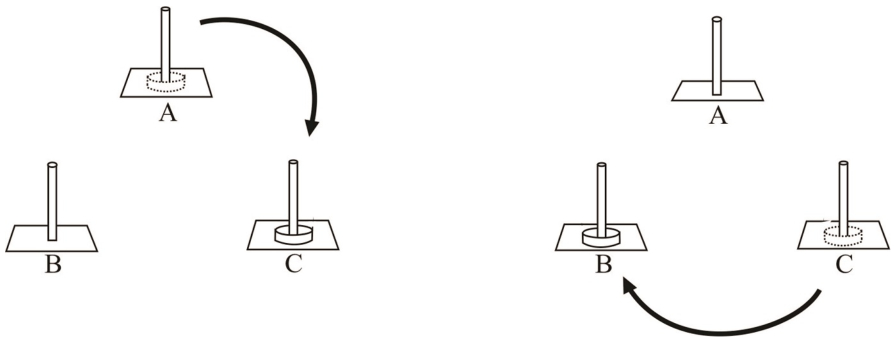

Figura 3.2: Movendo para a esquerda a torre com $n = 1$ disco.

O leitor pode estar se perguntando: "E por que não transportar a torre logo para o pino de destino, uma vez que ele está livre?"Se fizéssemos isso estaríamos realizando um movimento no sentido horário. O que é proíbido, pois só devemos realizar movimentos no sentido horário.

- Para $n = 2$.

– *Para a direita:* Move o disco menor do pino A para o C e do C para o B. Em seguida, move o disco maior do pino A para o C. Por fim, move novamente o disco menor do pino B para o A e do A para o C ver figura 3.3. Logo, foram necessários 5 movimentos.

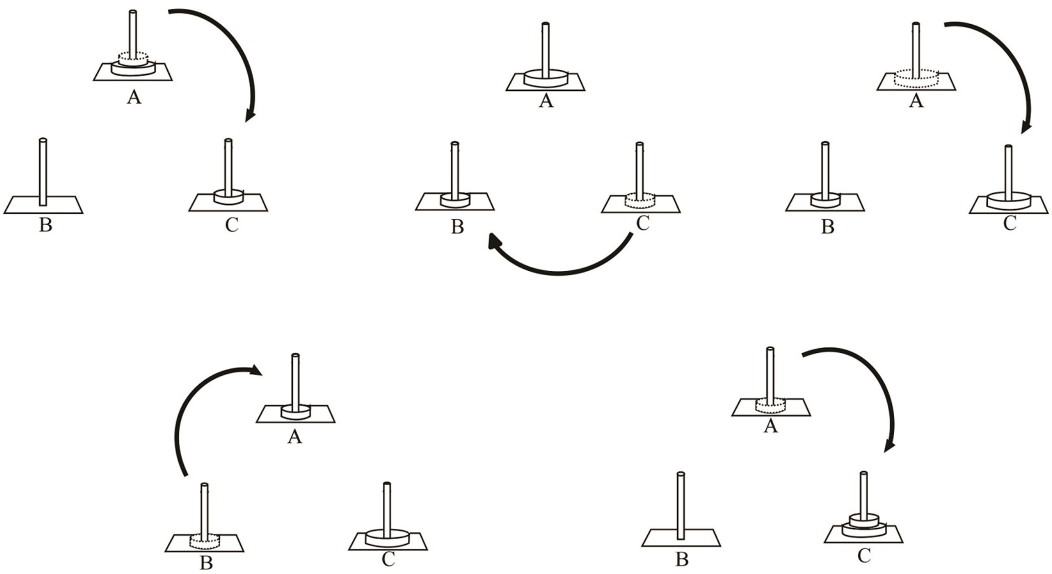

Figura 3.3: Movendo para a direita a torre com $n = 2$ discos.

– *Para a esquerda:* Devemos mover o disco menor do pino A para o C e do C para o B. Depois, mover o disco maior do pino A para o C. Em seguida, mover o disco menor do pino B para o A e o disco maior, do pino C para o B. Finalmente, mover o disco menor do pino A para o C e do C para o B ver figura 3.4. Totalizando, assim, 7 movimentos.

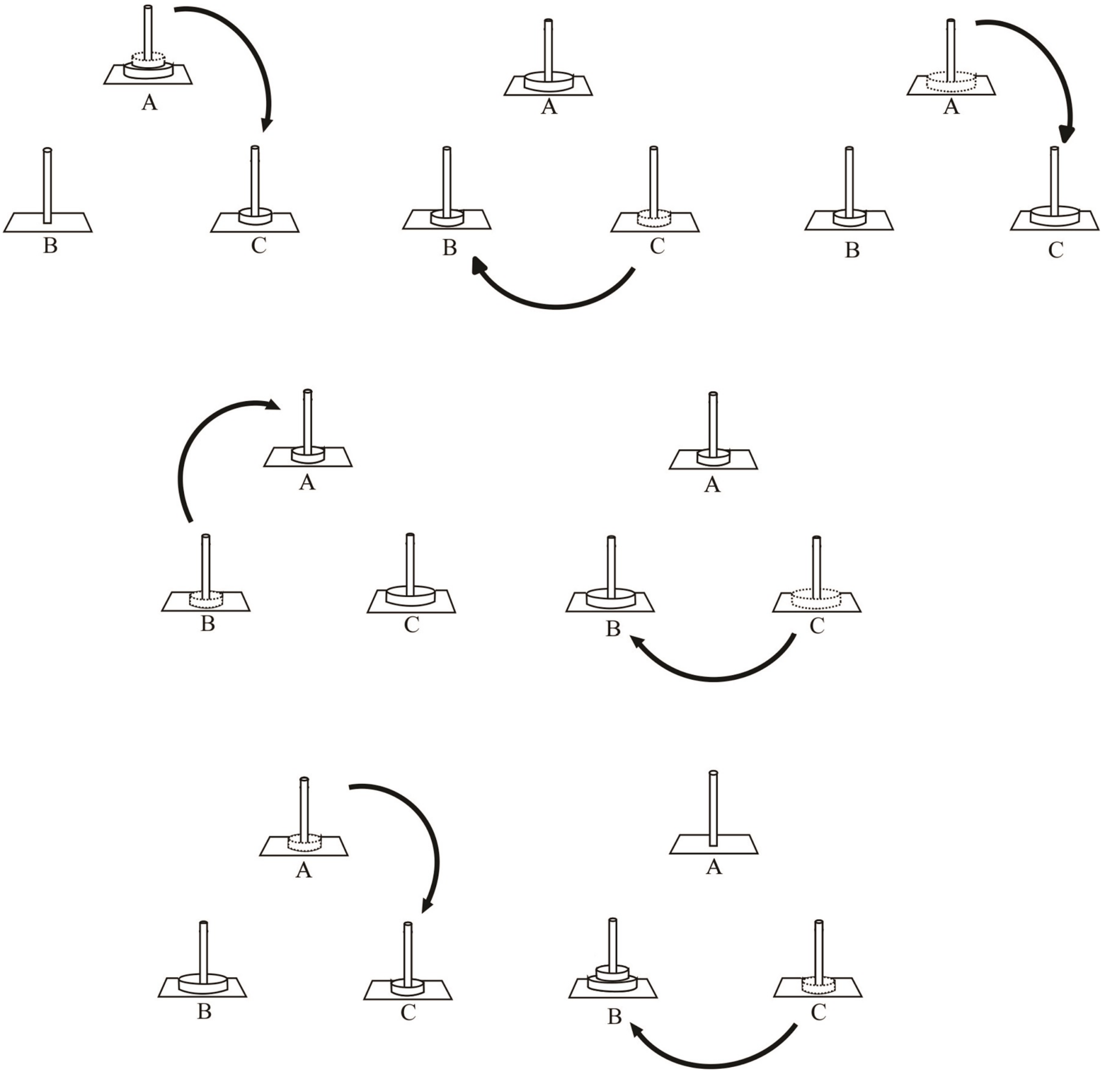

Figura 3.4: Movendo para a esquerda a torre com $n = 2$ discos.

- Para $n = 3$.

  – *Para a direita:* Devemos mover o disco menor do pino A para o C e do C para o B. Em seguida, mover o disco médio do pino A para o C. Agora, mover o disco menor do pino B para o A e o disco médio do pino C para o B. Depois, mover o disco menor do pino A para o C e do C para o B. Agora, mover o disco maior do pino A para o C e o menor disco do pino B para o A e do A para o C. Depois, mover o disco médio do pino B para o A e o disco menor do pino C para o B. Mais uma vez, mover o disco médio do pino A para o C e o disco menor do pino B para o A e do A para o C ver figura 3.5. Somando, assim, 15 movimentos.

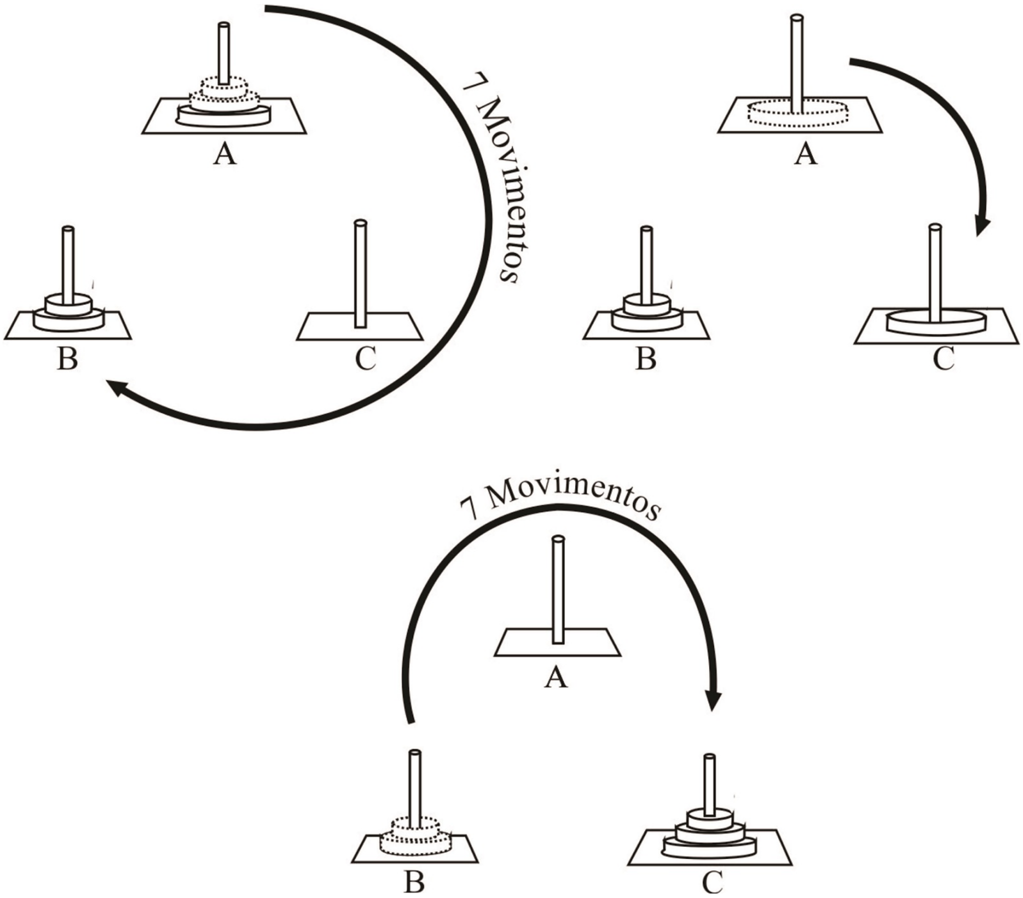

Figura 3.5: Movendo para a direita a torre com $n = 3$ discos.

– *Para a esquerda:* Devemos mover o disco menor do pino A para o C e do C para o B. Depois, mover o disco médio do pino A para o C e o disco menor do pino B para o A. Em seguida, mover o disco médio do pino C para o B e o disco menor do pino A para o C e do C para o B. Depois, mover o disco maior do pino A para o pino C e o disco menor do pino B para o A e do A para o C. Mais uma vez, move o disco médio do pino B para o A e o disco menor do pino C para o B e do B para o A. Finalmente, move o disco maior do pino C para o B e o disco menor do pino A para o C e do C para o B. Em seguida, move o disco médio do pino A para o C e o disco menor do pino B para o A. Mais uma vez, move o disco médio do pino C para o B, e o disco menor do pino A para o C e do C para o B ver figura 3.6. Concluindo, assim, com 21 movimentos.

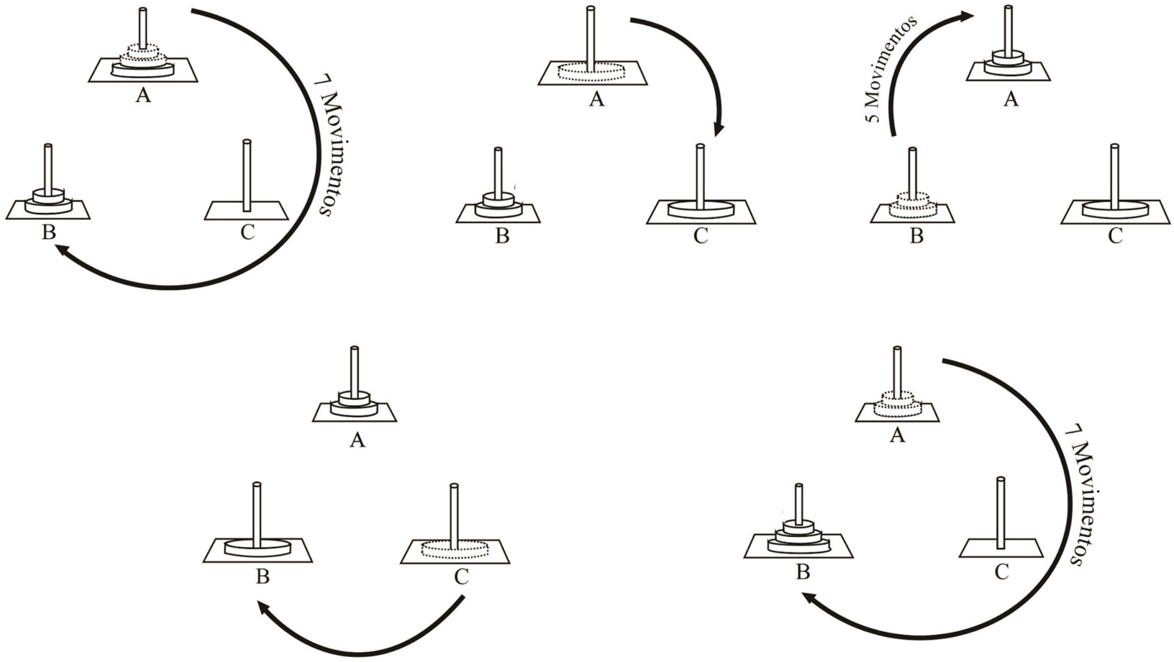

Figura 3.6: Movendo para a esquerda a torre com $n = 3$ discos.

Para generalizar esse problema devemos considerar dois casos: um, quando os discos são transferidos para o pino a direita do pino de origem (do pino A para o C, por exemplo) e, outro, quando os pinos são transferidos para o pino a esquerda do pino de origem (do pino A para o B).

Considerando c_n como o número de movimentos realizados para transferir os n discos para a direita do pino de origem (do pino A para o C) e a_n o número de movimentos realizados para transferir os n discos para a esquerda do pino de origem (do pino A para o B), se quisermos transferir n discos do pino A para C, ou seja, a direita do pino de origem, devemos primeiramente transferir $n-1$ discos do pino A para B. Observe que fazer esse processo é o mesmo que mover os $n-1$ discos para o pino a esquerda do pino de origem. Depois, transferir o n-ésimo disco do pino A para C e, finalmente, transferir a torre com $n-1$ discos do pino B para C, quando novamente estaremos movendo a torre com $n-1$ discos para um pino a esquerda. Podemos concluir que o número de movimentos para transferir a torre com n discos para um pino a direita do pino de origem é determinado por

$$c_n = 2a_{n-1} + 1, \quad \text{se} \quad n \geq 1 \tag{3.1}$$

Para resolver o problema de mover n discos para a esquerda do pino de origem (do pino A para o B) devemos primeiramente transferir $n-1$ discos do pino A para B, mas isso é o mesmo que transferir $n-1$ discos para um pino a esquerda. Em seguida, mover o n-ésimo disco do pino A para C e, mais uma vez, mover a torre com $n-1$ discos, do pino

B para o A; observe que ao realizar essa etapa estamos transferindo $n-1$ discos para um pino a direita. Agora, mover o n-ésimo disco do pino C para B e, por fim, mover a torre com $n-1$ discos do pino A para o pino B, mais uma vez transferimos os $n-1$ discos para um pino a esquerda. Portanto, o número de movimentos para transferir a torre com n discos para um pino a esquerda do pino de origem é determinado por

$$a_n = 2a_{n-1} + c_{n-1} + 2, \quad \text{se} \quad n \geq 1. \tag{3.2}$$

As equações (3.1) e (3.2) formam o sistema:

$$\begin{cases} c_n = 2a_{n-1} + 1, & \text{sendo} \quad c_0 = 0 \quad \text{e} \quad c_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + c_{n-1} + 2, & \text{com} \quad a_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_1 = 2 \end{cases}.$$

Substituindo a equação (3.1) em (3.2) obteremos à sequinte recorrência de segunda ordem não homogênea:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3$$

ou, ainda,

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 2a_n = 3, \qquad n \geq 0. \tag{3.3}$$

A equação característica da recorrência $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 2a_n = 3$ é $r^2 - 2r - 2 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 1 + \sqrt{3}$ e $r_2 = 1 - \sqrt{3}$. Pelo teorema (1.11), a solução da recorrência homogênea, $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 2a_n = 0$, é $h_n = C_1(1+\sqrt{3})^n + C_2(1-\sqrt{3})^n$.

Agora precisamos encontrar uma solução particular, t_n, para a recorrência (3.3). Observe que ao substituir t_n em $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 2a_n$ devemos encontrar 3. Logo, é intuitivo pensar que t_n seja uma constante. Tentaremos $t_n = A$ (lembre-se: se essa tentativa não der certo, "aumentaremos o grau" de A, ou seja, multiplicaremos nossa solução por n).

Substituindo $t_n = A$ em (3.3), tem-se:

$$A - 2A - 2A = 3$$

$$A = -1.$$

Portanto, pelo teorema (1.14), a solução geral da recorrência (3.3) é

$$a_n = C_1(1+\sqrt{3})^n + C_2(1-\sqrt{3})^n - 1.$$

Resta encontrar os valores das constantes C_1 e C_2. Para isso, sabemos que $a_0 = 0$ e $a_1 = 2$, pois esses valores representam o número de movimentos para resolver o problema com zero e um disco, respectivamente. Daí segue:

$$\begin{cases} a_0 = C_1(1+\sqrt{3})^0 + C_2(1-\sqrt{3})^0 - 1 \\ a_1 = C_1(1+\sqrt{3})^1 + C_2(1-\sqrt{3})^1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1(1+\sqrt{3}) + C_2(1-\sqrt{3}) = 3 \end{cases}.$$

Resolvendo esse último sistema obteremos $C_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$ e $C_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$. Logo,

$$a_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n - 1. \tag{3.4}$$

Substituindo a equação (3.4) em (3.1), tem-se:

$$c_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$c_n = 2\left[\frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^{n-1} + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^{n-1} - 1\right] + 1$$

$$c_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n - 1.$$

Logo, as expressões fechadas que representam a solução do problema Torre de Hanói Cíclica são

$$a_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n - 1 \tag{3.5}$$

e

$$c_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n - 1. \tag{3.6}$$

Portanto, se quisermos resolver o problema da Torre de Hanói Cíclica transferindo os discos para o pino a direita do pino de origem utilizaremos a equação (3.5), caso contrário utilizaremos a equação (3.6).

Segundo Stockmeyer [17], a demonstração de que as equações (3.5) e (3.6) fornecem o número mínimo de movimentos não foi apresentada por Atkinson. Mas Stockmeyer provou, usando a ideia de grafos, que além dessas sequências de movimentos fornecerem a solução mínima elas também são únicas.

Proposta de Atividade

1. *O problema da Torre de Hanói Colorida pode ser descrito como segue: Três pinos estão dispostos em um círculo e, assim, o sentido horário e anti-horário podem ser definidos no sentido usual do ponteiro do relógio quando visto a partir do topo. Existem n discos de tamanhos diferentes, cada um dos quais é de cor branca ou preta, inicialmente empilhados sobre um dos três pinos com os discos maiores abaixo do menor. O objetivo é mover estes discos em torno até que eles sejam empilhados sobre um determinado pino. Seguindo as seguintes regras: i) Apenas um dos discos do topo pode ser movido em cada momento; ii) Não pode colocar um disco maior sobre um menor; iii) Os discos brancos e pretos podem ser movidos para seus pinos vizinhos apenas no sentido horário e anti-horário, respectivamente.*

3.2 Torre Dupla de Hanói

Essa também é uma variação do problema clássico da Torre de Hanói e pode ser encontrada no livro de Matemática Concreta [3]. A Torre Dupla de Hanói contém $2n$ discos de n tamanhos diferentes, dois de cada tamanho. As regras são as mesmas: só é permitido mover um disco de cada vez e nunca um disco maior pode repousar sobre um menor. O objetivo do jogo é transportar a Torre Dupla com $2n$ discos do pino A para o C.

A partir dessas configurações nos deparamos com alguns subproblemas:

1. *Quantos movimentos são necessários para transportar a Torre Dupla do pino A para o C se os discos de mesmo tamanho são indistinguíveis?*

2. *Quantos movimentos são necessários se os discos de mesmo tamanho são pintados com cores diferentes e tivermos que reproduzir a ordem original de cima para baixo de todos os discos no arranjo final?*

3. *Quantos movimentos são necessários se os discos de mesmo tamanho são pintados com cores diferentes e o objetivo é mudá-los do pino A para a C, mantendo a ordem de cores em todas as jogadas?*

Analisaremos casos particulares de cada subproblema para tentar encontrar uma expressão matemática que determine o número mínimo de movimentos em cada situação acima.

3.2.1 Subproblema 1 - Os discos de mesmo tamanho são indistinguíveis

Se os discos de mesmo tamanho são indistinguíveis tem-se:

- Para $n = 1$.

  Nesse caso temos uma torre com dois discos de mesmo tamanho e a ordem com eles serão colocados no pino C é indiferente. Portanto, serão necessários apenas dois movimentos para transportar a torre de $2n$ discos do pino A para o C ver figura 3.7.

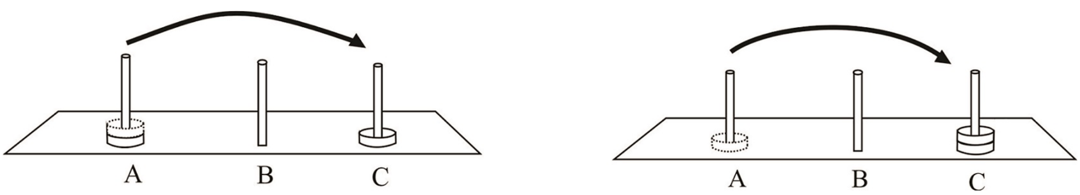

Figura 3.7: Passo para mover a Torre Dupla com $n = 1$ disco indistinguível.

- Para $n = 2$.

Nesse caso a torre possuirá quatro discos de dois tamanhos diferentes. Gastaremos dois movimentos para transportar os dois discos menores do pino A para o B e mais dois movimentos para transportar os discos maiores do pino A para o C. Por fim, levaremos os dois discos menores do pino B para o C com mais dois movimentos ver figura 3.8, totalizando 6 movimentos.

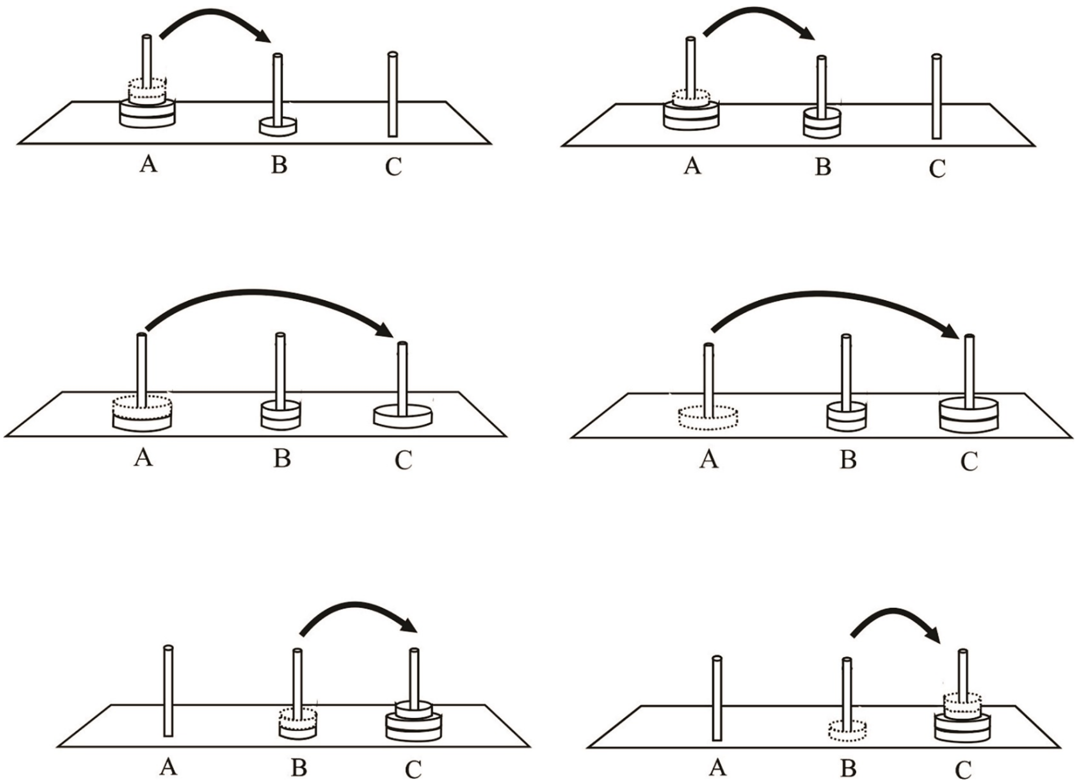

Figura 3.8: Passos para mover a Torre Dupla com $n = 2$ disco indistinguíveis.

- Para $n = 3$.

  A torre possui seis discos de três tamanhos diferentes. Primeiramente, fazemos a transferência do dois discos menores do pino A para o C, realizando dois movimentos. Depois, movemos os discos médios do pino A para o B, com mais dois movimentos. Agora, movemos os discos menores do pino C para o B. Em seguida, movemos os discos maiores do pino A para o C e os menores do pino B para o A. Finalmente, movemos os discos médios do pino B para o C e os discos menores do pino A para o C ver figura 3.9. Resultando assim, em 14 movimentos, pois a cada transferência de discos de mesmo tamanho de um pino para outro foram necessários dois movimentos.

Observando esses casos particulares percebemos que, para tranferir $2n$ discos do pino A para C, precisamos transferir, primeiramente, $2n - 2$ discos do pino A para o B. Em seguida, transferir os dois últimos discos do pino A para C e, mais uma vez, mover a torre com $2n - 2$ discos do pino B para o C.

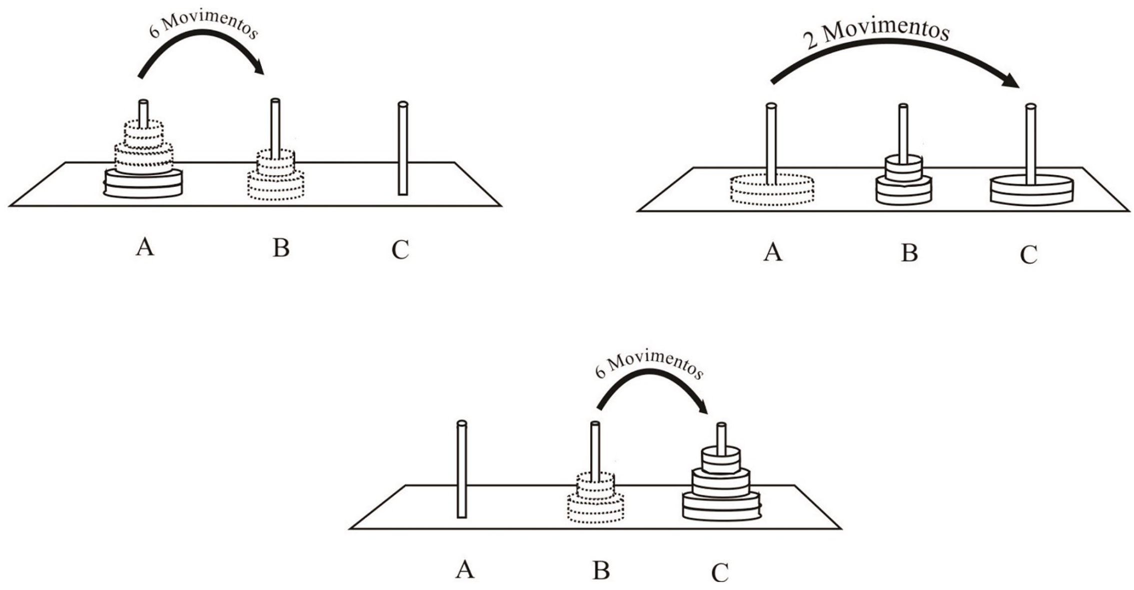

Figura 3.9: Passos para mover a Torre Dupla com $n = 3$ disco indistinguíveis.

Seja X_n o número mínimo de movimentos para mover uma Torre Dupla de $2n$ discos de n tamanhos diferentes e X_{n-1} o número mínimo de movimentos para mover uma Torre Dupla de $2n - 2$ discos de $n - 1$ tamanhos diferentes; então, precisamos de $2X_{n-1} + 2$ movimentos para resolver o problema. No entanto, não sabemos se esta é a expressão que nos fornece o número mínimo de movimentos. Assim,

$$X_n \leq 2X_{n-1} + 2. \tag{3.7}$$

Provemos, pelo princípio da tricotomia, que na verdade $X_n = 2X_{n-1} + 2$. Para isso, mostraremos que $X_n \geq 2X_{n-1} + 2$. Comece observando que, para mover os dois discos maiores do pino A, é preciso que os $2n - 2$ discos saiam de cima deles. E ainda tem que existir um pino vazio para recebê-los. Logo, precisamos mover os $2n - 2$ discos para um são pino, o que é necessário no *mínimo* X_{n-1} movimentos. Para mudarmos os dois discos maiores são mais 2 movimentos, no mínimo. E depois, para colocarmos os $2n-2$ discos em cima dos discos maiores, precisamos de, no *mínimo*, de mais X_{n-1} movimentos. Assim, o problema é resolvido com, no *mínimo*, $2X_{n-1} + 2$ movimentos. Logo,

$$X_n \geq 2X_{n-1} + 2. \tag{3.8}$$

Portanto, analisando as desigualdades (3.7) e (3.8), concluímos pelo princípio da tricotomia que

$$X_n = 2X_{n-1} + 2,$$

isto é,

$$X_{n+1} = 2X_n + 2, \quad \text{sendo} \quad n \geq 0 \quad \text{e} \quad X_1 = 2. \tag{3.9}$$

A equação (3.9) é uma recorrência de primeira ordem não homogênea. Usaremos o teorema 1.9 para encontrarmos uma expressão matemática que dependa somente do valor de n e não mais de termos anteriores.

Uma solução particular para a recorrência $X_{n+1} = 2X_n$ é $X_n = 2^n$, pois

$$\begin{aligned}
X_2 &= 2X_1 \\
X_3 &= 2X_2 \\
X_4 &= 2X_3 \\
&\vdots \\
X_n &= 2X_{n-1}.
\end{aligned}$$

E multiplicando membro a membro obteremos $X_n = 2^{n-1}x_1$. Como são necessários dois movimentos para mover uma Torre Dupla com dois discos de tamanhos iguais, tem-se $X_1 = 2$, logo $X_n = 2^n$.

Daí, pelo teorema 1.9, a substituição de $X_n = 2^n y_n$ na recorrência (3.9) nos fornece:

$$\begin{aligned}
2^{n+1}y_{n+1} &= 2.2^n y_n + 2 \\
y_{n+1} &= y_n + 2^{-n}. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Resolvendo a recorrência (3.10), tem-se:

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + 2^{-1} \\
y_3 &= y_2 + 2^{-2} \\
y_4 &= y_3 + 2^{-3} \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)}.
\end{aligned}$$

Somando membro a membro obteremos:

$$\begin{aligned}
y_n &= y_1 + (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-1)}) \\
y_n &= y_1 + 1 - 2^{-n+1}. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Como $X_1 = 2$, tem-se:

$$\begin{aligned}
X_n &= 2^n y_n \\
X_1 &= 2^1 y_1 \\
y_1 &= 1
\end{aligned}$$

.

Daí, a equação (3.11) pode ser reescrita como $y_n = 2 - 2^{-n+1}$. E a solução geral é

$$X_n = 2^n y_n$$
$$X_n = 2^n(2 - 2^{-n+1})$$

$$X_n = 2^{n+1} - 2. \tag{3.12}$$

Portanto, o número mínimo de movimentos para mover a Torre Dupla de Hanói em que os discos de mesmo tamanho são indistinguíveis é determinado pela equação (3.12).

3.2.2 Subproblema 2 - A ordem final dos discos deve ser a mesma do início

Consideremos agora uma Torre Dupla de Hanói com os discos de mesmo tamanho pintados em cores diferentes. A torre com $2n$ discos de n tamanhos diferentes deverá ser transportada do pino A para o C, de modo que, ao final, a ordem dos discos seja mantida.

Primeiramente, resolveremos os casos mais simples.

- Para $n = 1$.

  Teremos uma torre com dois discos de mesmo tamanho, mas com cores diferentes. São necessários 3 movimentos para transportá-la do pino A para o C ver figura 3.10. Pois, movemos o disco preto do pino A para o B, o disco branco do pino A para o C e novamente o disco preto do pino B para o C.

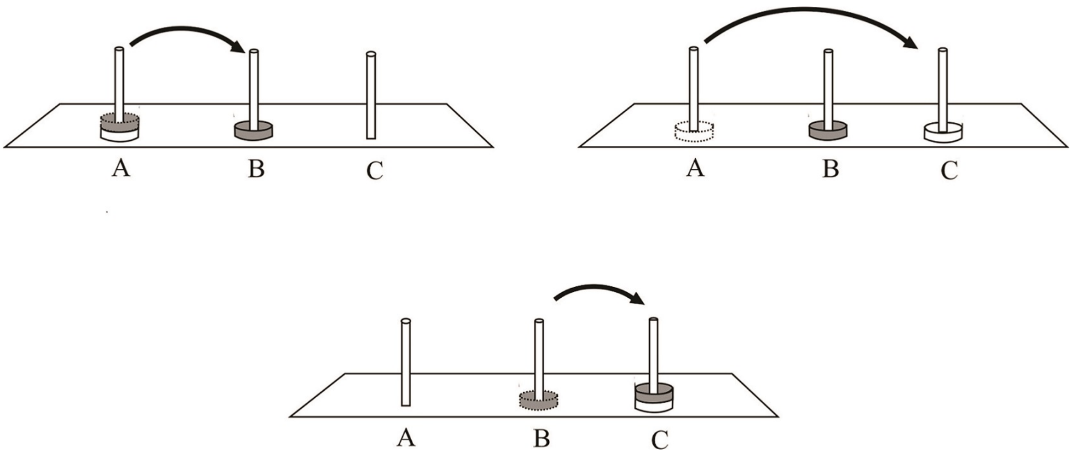

Figura 3.10: Passo para mover a Torre Dupla com $n = 1$ disco distinguíveis.

- Para $n = 2$.

  A torre possuirá quatro discos de dois tamanhos diferentes sendo os discos de mesmo tamanho pintados com cores distintas. Gastaremos dois movimentos para transportar os dois discos menores do pino A para o C e dois movimentos para transportar os discos maiores do pino A para o B. Em seguida, gastaremos quatro movimentos para mover os discos menores do pino C para o A e os discos maiores do pino B para o C. Observe que, ao final dessa etapa, todos os discos do pino A e do pino C estão na mesma ordem do início dos movimentos. Por fim, são necessários mais três movimentos ver figura 3.11 para movermos os discos menores do pino A para o C, de modo que, ao final, o objetivo do jogo tenha sido alcançado. Totalizando, assim, 11 movimentos.

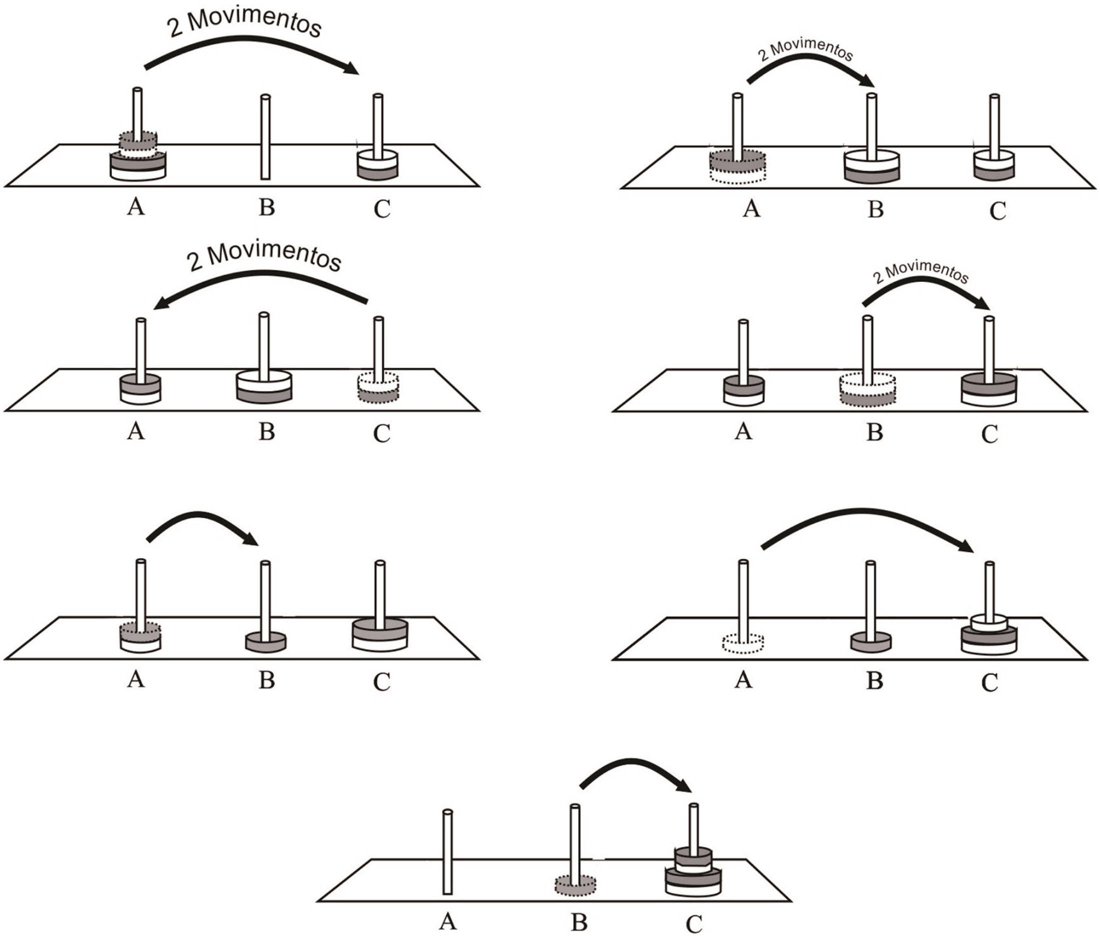

Figura 3.11: Passo para mover a Torre Dupla com $n = 2$ discos distinguíveis.

- Para $n = 3$.

  A torre possui seis discos de três tamanhos diferentes, sendo os discos de mesmo tamanho pintados com cores distintas. Gastaremos seis movimentos para transportar, sem se preocupar com a ordem, os dois discos menores do pino A para o B, os discos médios do pino A para o C e, novamente, os discos menores do pino B para o C. Em seguida, são gastos dois movimentos para transportar os discos maiores do pino A para o B, seis movimentos para transportar todos os discos do pino C para o A e mais dois movimentos para transportar os discos maiores do pino B para o

C. Após essa etapa, todos os discos do pino A e do pino C estão na mesma ordem do início dos movimentos. Por fim, nos resta mover os quatro discos do pino A para o C ver figura 3.12, o que já sabemos, pelo caso anterior, que são necessários mais onze movimentos. Portanto, foram gastos 27 movimentos.

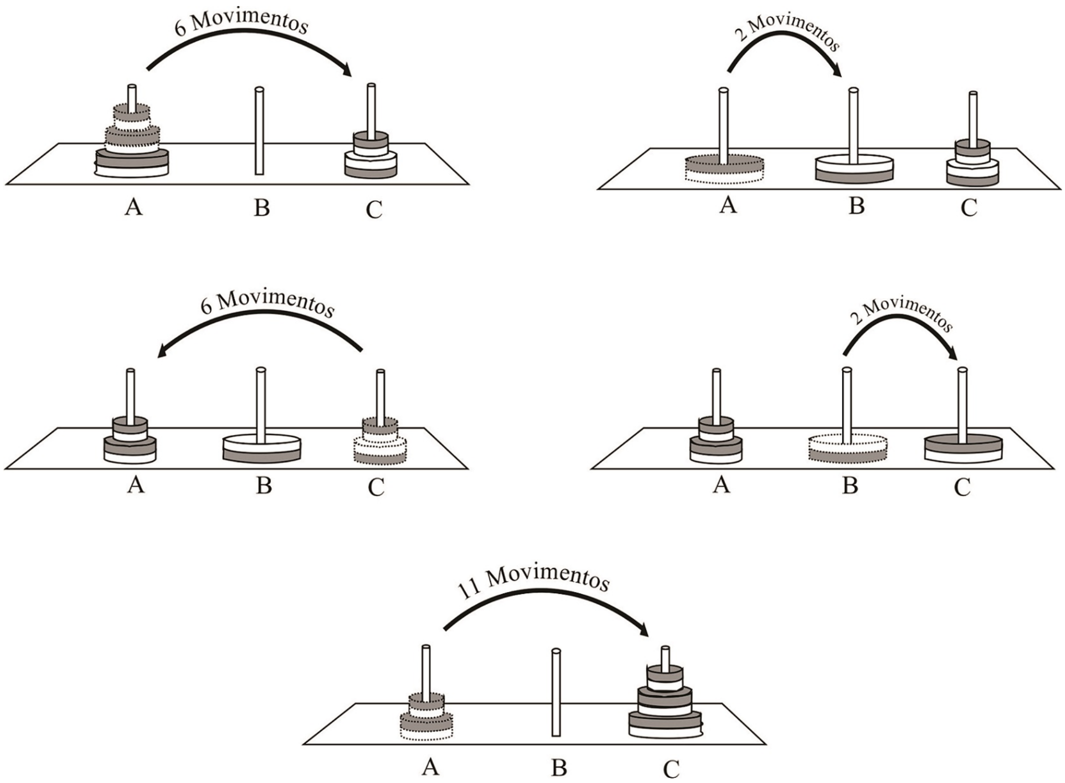

Figura 3.12: Passo para mover a Torre Dupla com $n = 3$ discos distinguíveis.

Observe que, ao mover a Torre Dupla podendo inverter a ordem dos discos de mesmo tamanho, gastamos menos movimentos do que se tivéssemos que manter a ordem em todas as jogadas. Então, para obtermos o número mínimo de movimentos devemos considerar, em algumas jogadas, que a ordem dos discos de mesmo tamanho seja invertida. Lembrando que, no final, a Torre Dupla deve continuar com a mesma ordem do início.

Continuaremos chamando de X_n o número mínimo de movimentos para transportar a Torre Dupla de Hanói sem se preocupar com a ordem dos discos de mesmo tamanho; e tomaremos S_n como o número mínimo de movimentos para transportar a Torre Dupla de Hanói de modo que, ao final, a ordem seja a mesma da torre inicial.

Para generalizar esse subproblema podemos pensar do seguinte modo:

- Move-se a Torre Dupla com $2n - 2$ discos do pino A para C, o que pode ser feito com X_{n-1} movimentos, no mínimo;

- Move-se, sem se preocupar com a ordem, os dois discos maiores do pino A para o B, sendo mais dois movimentos, no mínimo;

- Move-se a Torre Dupla com $2n-2$ discos do pino C para A; são mais X_{n-1} movimentos, no mínimo e, nesse passo, os discos terminam com a mesma ordem inicial;
- Move-se os dois discos maiores do pino B para o C; são mais dois movimento e, após esse passo, a ordem desses dois discos é a mesma do subproblema inicial;
- Finalmente, move-se a Torre Dupla com $2n-2$ discos do pino A para o C, sendo necessário mais S_{n-1} movimentos.

O leitor pode está se perguntando: e por que não seria X_{n-1} movimentos? Observe que, ao iniciar esse passo, a Torre Dupla com $2n-2$ discos que se encontra no pino A está na mesma ordem do início do jogo; portando, se fizéssemos X_{n-1} movimentos, os discos chegariam no pino C com a ordem invertida, o que não pode acontecer.

Somando esses movimentos obteremos $X_{n-1}+2+X_{n-1}+2+S_{n-1}=S_{n-1}+2X_{n-1}+4$.Mas não sabemos se essa solução é a que usa o menor número de movimentos. Assim,

$$S_n \leq S_{n-1}+2X_{n-1}+4. \tag{3.13}$$

Para provar que $S_n=S_{n-1}+2X_{n-1}+4$ precisamos mostrar que $S_n \geq S_{n-1}+2X_{n-1}+4$ e usar o princípio da tricotomia para comparar essas desigualdades.

Observe que, para movermos os discos maiores, precisamos retirar os $2n-2$ discos de cima deles; além disso, deve existir um pino vazio para recebê-los. Logo, precisamos mover os $2n-2$ discos para o pino de destino, o que requer, no *mínimo*, X_{n-1} movimentos. Para mudarmos os dois discos maiores para o pino auxiliar sem se preocupar com a ordem, são necessários mais dois movimentos, no mínimo. Em seguida, devemos desocupar o pino de destino, para isso, movemos os $2n-2$ discos do pino de destino para o pino de origem, sendo necessários, no *mínimo*, X_{n-1} movimentos. Depois, precisamos de mais dois movimentos para levarmos os discos maiores do pino auxiliar para o pino de destino. Após essas etapas, a ordem dos discos é a mesma do início do jogo; portanto, precisamos de, no *mínimo*, S_{n-1} movimentos para levarmos os $2n-2$ discos do pino de origem para o pino de destino. Deste modo,

$$S_n \geq S_{n-1}+2X_{n-1}+4. \tag{3.14}$$

Comparando as desigualdades (3.13) e (3.14) e, em seguida, aplicando o princípio da tricotomia, tem-se:

$$S_n = S_{n-1}+2x_{n-1}+4. \tag{3.15}$$

Sabemos, pelo subproblema 1 (cf. equação 3.12) , que $X_n=2^{n+1}-2$. Daí a recorrência (3.15) é reescrita da forma:

$$S_n = S_{n-1}+2(2^n-2)+4$$

$$S_n = S_{n-1} + 2^{n+1}$$

ou, ainda,

$$S_{n+1} = S_n + 2^{n+2}, \quad \text{com} \quad n \geq 0 \quad \text{e} \quad S_1 = 3. \tag{3.16}$$

Essa é uma recorrência de primeira ordem não homogênea em que o coeficiente de S_n é igual a um, por isso sua solução é mais simples.

Resolvendo a recorrência (3.16), tem-se:

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 + 2^3 \\ S_3 &= S_2 + 2^4 \\ S_4 &= S_3 + 2^5 \\ &\vdots \\ S_n &= S_{n-1} + 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as igualdades acima, obteremos:

$$\begin{gathered} S_n = S_1 + (2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{n+1}). \\ S_n = S_1 + 8 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \\ S_n = S_1 + 2^3(2^{n-1} - 1) \\ S_n = S_1 + 2^{n+2} - 8 \end{gathered}$$

Como $S_1 = 3$, concluímos que o número mínimo de movimentos para para mover uma Torre Dupla de Hanói, em que os discos de mesmo tamanho estão pintados com cores diferentes, mantendo a ordem original de cima para baixo de todos os discos no arranjo final, é determinado por:

$$S_n = 2^{n+2} - 5, \forall\, n \geq 0. \tag{3.17}$$

Observe que, ao transferir uma Torre Dupla com $2n - 2$ discos, em que os discos de mesmo tamanho são pintados com cores diferentes, de um pino para outro invertemos a ordem dos discos. E, ao transferirmos mais uma fez essa torre, a ordem dos discos volta ser como no início do jogo. Portanto, ao final do quarto movimento, realizado com a Torre Dupla com $2n-2$ discos, a ordem inicial dos discos é mantida, surgindo assim uma solução alternativa para esse subproblema. Veja:

- Mova a Torre Dupla com $2n - 2$ discos do pino A para C, isso pode ser feito com X_{n-1} movimentos;

- Mova o disco maior preto do pino A para o B, mais um movimento;

- Mova a Torre Dupla com $2n-2$ discos do pino C para B, para isso são necessários mais X_{n-1} movimentos;
- Mova o disco maior branco do pino A para o C, mais um movimento;
- Mova a Torre Dupla com $2n-2$ discos do pino B para A, são mais X_{n-1} movimentos;
- Mova o disco maior preto do pino B para o C, mais um movimento;
- Finalmente mova a Torre Dupla com $2n-2$ discos do pino A para C, são mais X_{n-1} movimentos.

Somando os números de movimentos obteremos:

$$S_n = 4X_{n-1} + 3 \tag{3.18}$$

Pelo subproblema 1 (cf. equação 3.12) sabemos que $X_n = 2^{n+1} - 2$. Daí, a recorrência (3.18) é reescrita da forma:

$$S_n = 4(2^n - 2) + 3$$

$$S_n = 2^{n+2} - 5, \quad \forall n \geq 0. \tag{3.19}$$

Portanto, os dois caminhos apresentados acima nos levam ao mesmo resultado.

3.2.3 Subproblema 3 - A ordem dos discos deve ser mantida em todas as jogadas

Imaginemos a mesma situação do subproblema anterior, uma Torre Dupla contendo $2n$ discos de n tamanhos diferentes sendo os discos de mesmo tamanho pintados com cores distintas. Devemos tranportar a Torre Dupla do pino A para C mantendo a ordem dos discos de mesmo tamanho em todas as jogadas. Veja:

- Para n=1.

  Necessitamos de três movimentos, pois levamos o disco preto do pino A para B e o disco branco do pino A para C. Finalizamos transportando o disco preto do pino B para o C ver figura 3.13.

- Para n=2.

  Movemos os dois discos menores do pino A para o C, gastando três movimentos. Movemos o disco maior preto do pino A para o B e os dois discos menores do pino C para o B, sendo gastos mais quatro movimentos. Movemos o disco maior branco do pino A para o C e os dois discos menores do pino B para o A, gastando mais quatro movimentos. Por fim, movemos o disco maior preto do pino B para o C e os

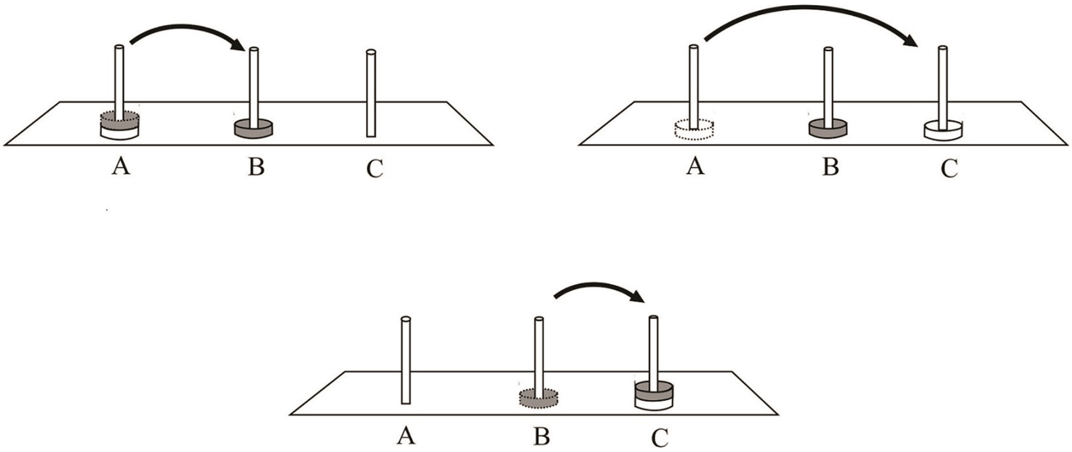

Figura 3.13: Passo para mover a Torre Dupla com $n = 1$ disco indistinguíveis.

discos menores do pino A para o C, sendo mais quatro movimentos ver figura 3.14. Portanto, foram necessários 15 movimentos para resolver o problema.

- Para n=3.

  Primeiramente, movemos os quatro primeiros discos do pino A para o C, o que é possível com apenas 15 movimentos (veja o caso anterior). Em seguida, movemos o disco maior preto do pino A para o B e os quatro discos do pino C para o B, sendo mais 16 movimentos. Depois, movemos o disco maior branco do pino A para o C e os quatro primeiros discos do pino B para o A, sendo mais 16 movimentos. Finalmente, movemos o disco maior preto do pino B para o C e os quatro discos do pino A para o C, sendo mais 16 movimentos ver figura 3.15. Totalizando, assim, 63 movimentos.

Analisando esses casos particulares, e considerando J_n como o número mínimo de movimentos para transportar a Torre Dupla com $2n$ discos, de modo que a ordem dos discos de mesmo tamanho seja mantida em todas as jogadas, podemos concluir que:

- Movemos a Torre Dupla com $2n-2$ discos do pino A para o C; isso pode ser realizado com J_{n-1} movimentos;
- Movemos o disco maior preto do pino A para o B, mais um movimento;
- Movemos a Torre Dupla com $2n-2$ discos do pino C para o B, isso pode ser realizado com mais J_{n-1} movimentos;
- Movemos o disco maior branco do pino A para o C, mais um movimento;
- Movemos a Torre Dupla com $2n-2$ discos do pino B para o A; isso pode ser realizado com mais J_{n-1} movimentos;

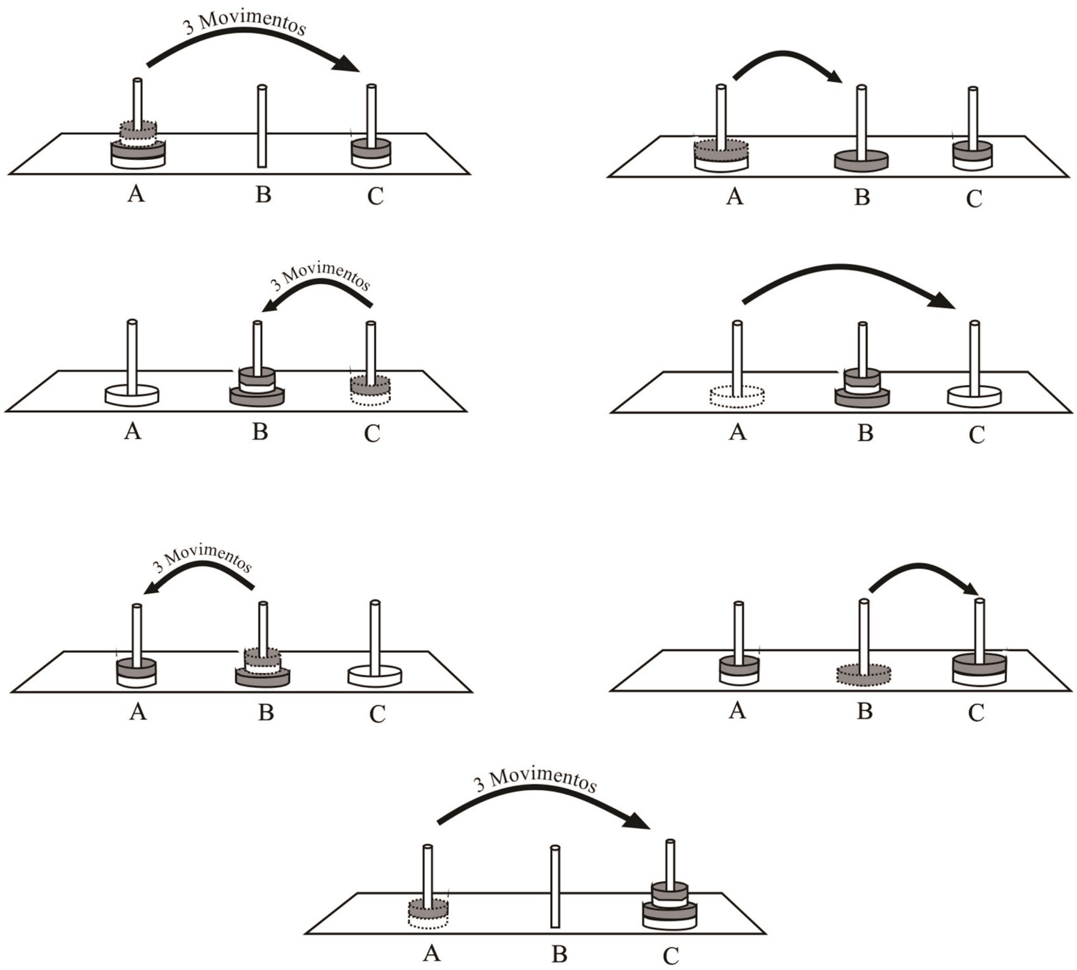

Figura 3.14: Passo para mover a Torre Dupla com $n = 2$ discos indistinguíveis.

- Movemos o disco maior preto do pino B para o C, mais um movimento;
- Por fim, movemos a Torre Dupla com $2n - 2$ discos do pino A para o C; isso pode ser realizado com mais J_{n-1} movimentos.

Somando esses resultados acima, obteremos

$$J_{n-1} + 1 + J_{n-1} + 1 + J_{n-1} + 1 + J_{n-1} = 4J_{n-1} + 3.$$

Como não sabemos se essa expressão nos fornece o menor número de movimentos, tem-se

$$J_n \leq 4J_{n-1} + 3. \tag{3.20}$$

Precisamos mostar que $J_n \geq 4J_{n-1} + 3$ para concluir que $J_n = 4J_{n-1} + 3$.

Analisando o comportamento dos dois discos maiores percebemos que, para movê-los, devemos retirar primeiramente os $2n-2$ discos menores de cima deles, e ainda, deve existir

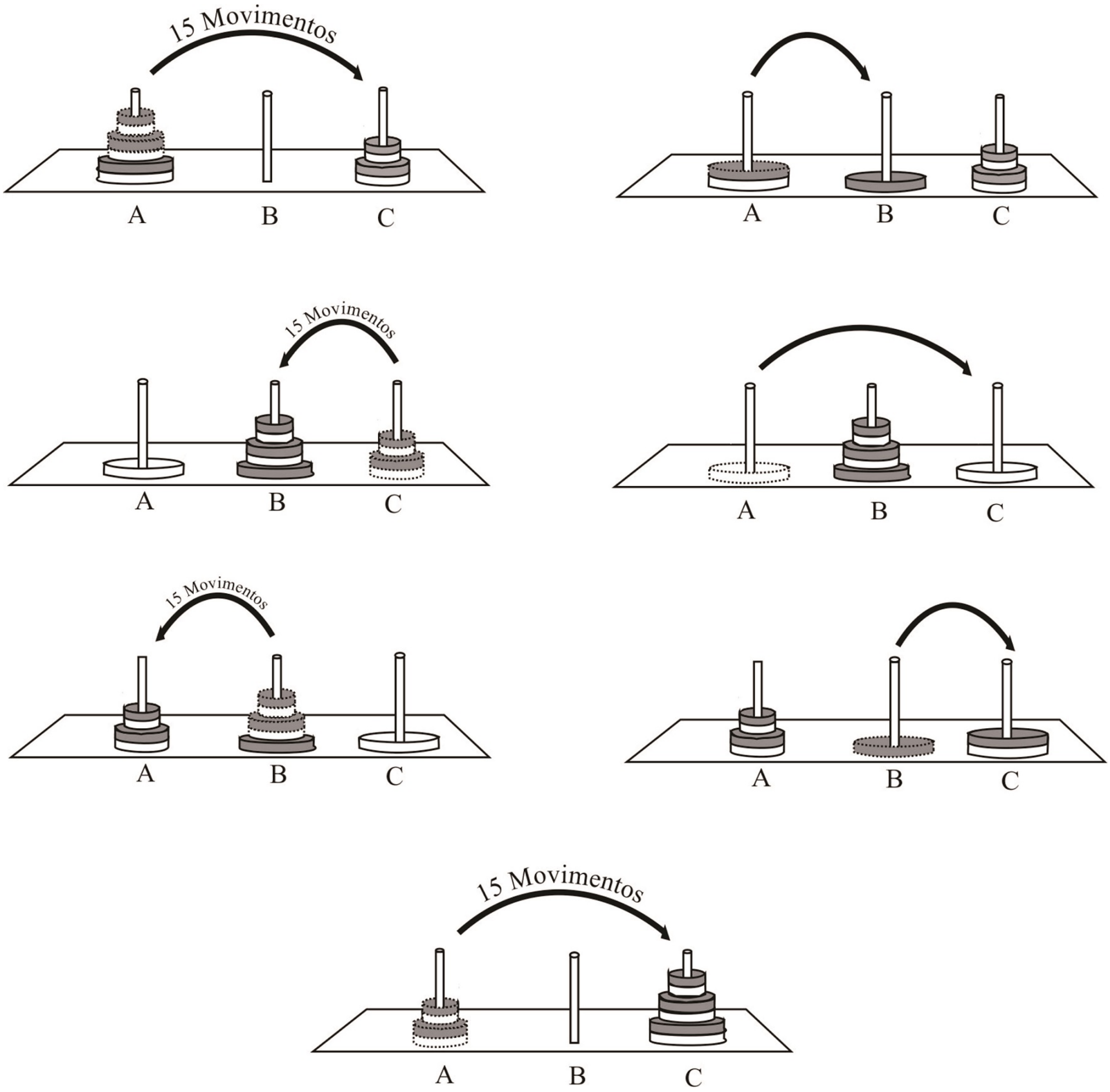

Figura 3.15: Passo para mover a Torre Dupla com $n = 3$ discos indistinguíveis.

um pino vazio para recebê-los. Logo, precisamos transferir os $2n-2$ discos menores do pino de origem para o pino de destino, o que é possível com, no mínimo, J_{n-1} *movimentos.* Em seguida, gastamos mais um movimento para mover o disco maior preto do pino de origem para o pino auxiliar. Como devemos deixar o pino de destino livre para receber o disco maior branco, precisamos transferir os $2n-2$ discos menores do pino de destino para o pino auxiliar, o que é possível com, no mínimo, J_{n-1} movimentos. Depois transferimos o disco maior branco do pino de origem para o pino de destino, com um movimento. O próximo passo é transferir o disco maior preto; mas, antes, devemos retirar os $2n-2$ discos menores de cima dele, o que requer, no mínimo, J_{n-1} movimentos, para, em seguida, movê-lo para o pino de destino com mais um movimento. Por fim, transferimos novamente os $2n-2$ discos menores para o pino de destino com, no mínimo, J_{n-1} movimentos. Assim, para resolver esse problema precisamos na verdade de $J_{n-1}+1+J_{n-1}+1+J_{n-1}+1+J_{n-1} = 4J_{n-1}+3$

movimentos. Logo

$$J_n \geq 4J_{n-1} + 3. \tag{3.21}$$

Comparando as desigualdades (3.20) e (3.21). Em seguida, aplicando o princípio da tricotomia, tem-se:

$$J_n = 4J_{n-1} + 3$$

ou, ainda,

$$J_{n+1} = 4J_n + 3, \quad \forall n \geq 0 \quad \text{e} \quad J_1 = 3. \tag{3.22}$$

A equação (3.22) é uma recorrência de primeira ordem não homogênea e, mais uma vez, usaremos o teorema (1.9) para encontrar a solução da recorrência em função de n.

Primeiramente encontraremos uma solução para a recorrência homogênea $J_{n+1} = 4J_n$. Daí vem:

$$\begin{aligned} J_2 &= 4J_1 \\ J_3 &= 4J_2 \\ J_4 &= 4J_3 \\ &\vdots \\ J_n &= 4J_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando lado a lado as equações acima, cancelando os termos semelhantes e sabendo que $J_1 = 3$, concluimos que $J_n = 3 \cdot 4^{n-1}$.

Como $J_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ é uma solução de $J_{n+1} = 4J_n$, pelo teorema (1.9) devemos substituir $J_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot y_n$ na recorrência $J_{n+1} = 4J_n + 3$. Daí, teremos:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4^{n+1-1} \cdot y_{n+1} &= 4 \cdot 3 \cdot 4^{n-1} \cdot y_n + 3 \\ 4^n \cdot y_{n+1} &= 4^n \cdot y_n + 1 \\ y_{n+1} &= y_n + 4^{-n}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Resolvendo a equação de recorrência (3.23). Tem-se

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 4^{-1} \\ y_3 &= y_2 + 4^{-2} \\ y_4 &= y_3 + 4^{-3} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + 4^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

Somando

$$y_n = y_1 + 4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \cdots + 4^{-(n-1)}$$
$$y_n = y_1 + 4^{-1}\frac{4^{-(n-1)} - 1}{4^{-1} - 1}$$
$$y_n = y_1 - \frac{1}{3} \cdot (4^{-n+1} - 1). \tag{3.24}$$

Por outro lado, como $J_1 = 3$, tem-se

$$J_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot y_n$$
$$J_1 = 3 \cdot 4^{1-1} \cdot y_1$$
$$3 = 3 \cdot 1 \cdot y_1$$
$$y_1 = 1.$$

Daí, a equação (3.24) pode ser reescrita da forma $y_n = 1 - \frac{1}{3} \cdot (4^{-n+1} - 1)$. E a solução da recorrência (3.22) será:

$$J_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot y_n$$
$$J_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \left[1 - \frac{1}{3} \cdot (4^{-n+1} - 1)\right]$$
$$J_n = 2^{2n} - 1. \tag{3.25}$$

Portanto, o número mínimo de movimentos para transportar uma Torre Dupla com $2n$ discos de modo que a ordem dos discos de mesmo tamanho seja mantidas em todas as jogadas é determinado pela equação (3.25).

Proposta de Atividade

1. *Uma Torre de Hanói tripla contém $3n$ discos de n tamanhos diferentes, três de cada um dos tamanhos. As regras continuam as mesmas: mover um disco de cada vez e não é permitido colocar um disco maior sobre outro menor. (a) Quantos movimentos são necessários para transferir os $3n$ discos do pino A para a C, supondo que discos de mesmo tamanho sejam idênticos? (b) Suponha agora que discos de mesmo tamanho são pintados com cores diferentes e o objetivo é mudá-los do pino A para o C, mantendo a ordem de cores em todas as jogadas.*

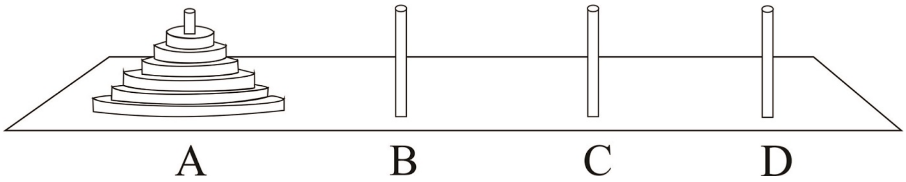

Figura 3.16: Torre de Hanói com 4 pinos.

3.3 Torre de Hanói com 4 Pinos

Essa variação é composta por quatro pinos, em um dos quais são colocados n discos de tamanhos diferentes (6 na figura 3.16). O objetivo é transportar os n discos do pino inicial para um outro pino qualquer, usando os demais como auxiliar e obdecendo as regras iniciais do problema Clássico da Torre de Hanói.

O problema da Torre de Hanói com 4 pinos também conhecido como *The Reves Puzzle* e foi publicado por volta do ano de 1907 no livro *The Canterbury Puzzles* do Dudeney [2]. Há relatos (ver [2]) de que um grupo de peregrinos viajava para o santuário de Santo Thomas em Canterbury e, durante essa viagem, vários contos eram narrados aos peregrinos, com o objetivo de que a viagem se tornasse mais divertida. Em uma das paradas, em um botequim, vários queijos de diferentes tamanhos chamaram a atenção do anfitrião, o que fez organizar quatro banquinhos no meio do salão, em um dos quais empilhou 8 queijos, conforme ilusta a figura (3.17). Em seguida, disse ao grupo que lhes mostraria um quebra-cabeça próprio que os divertiria durante o repouso. O objetivo era levar todos os queijos para o outro banquinho, movendo um queijo de cada vez e nunca colocar qualquer queijo maior sobre um que fosse menor.

Posteriormente, em 1939, a revista *American Mathematical Monthly* publicou a generalização desse problema (ver [15]), isto é, uma Torre de Hanói com n discos e k pinos. Surgiram várias propostas de soluções, das quais se destacam duas soluções equivalentes, apresentada pelos autores J. S. Frame e B. M. Stewart no ano de 1941, atualmente conhecida como a conjectura de Frame-Stewart (ver [16]).

Esse algoritmo se baseia em um parâmetro i, tal que $1 \leq i < n$, e consiste nos seguintes passos [11]:

- Transferir a torre com $n - i$ discos menores do primeiro pino para um pino auxiliar, usando os quatro pinos para realizar o processo.

- Transferir a torre com i discos restantes do primeiro pino para o pino de destino. Como os $n - i$ discos estão ocupando um dos pinos só nos resta três pinos para realizar esse processo. Logo, pelo problema Clássico da Torre de Hanói, sabemos que isso é possível com $2^i - 1$ movimentos.

- Transferir a torre com $n - i$ discos menores do pino auxiliar para o pino de destino,

Figura 3.17: Ilustração retirada do livro *The Canterbury Puzzles* que mostra o grupo de peregrinos diante do *The Reves Puzzle*.

usando os quatro pinos para realizar o processo.

Tomando M_n como o número de movimentos para transferir a torre com n discos usando os quatro pinos, podemos representar a conjectura de Frame-Stewart por:

$$M_n = 2M_{n-i} + 2^i - 1 \quad \text{com} \quad n \geq 0. \tag{3.26}$$

Vejamos alguns casos particulares:

- Para $n = 1$.

  Para um único disco é fácil notar que $M_1 = 1$.

- Para $n = 2$.

  Movemos o disco menor para um dos pinos auxiliares e o disco maior para o pino de destino; por fim, movemos o disco menor do pino auxiliar para o pino de destino, logo, foram necessários três movimentos, ou seja, $M_2 = 3$.

- Para $n = 3$.

  Neste caso devemos considerar o parâmetro i tal que $1 \leq i < n$, ou seja, $i = 1, 2$. A partir daí, usando a equação (3.26), determinamos o número de movimentos para resolver o problema, conforme tabela 3.1.

  O menor número de movimentos foi obtido quando movemos o disco menor do pino inicial para um dos pinos auxiliares e, em seguida, usamos a regra do problema

Parâmetro i	**Número de movimentos** (M_n)
1	$M_3 = 2M_2 + 2^1 - 1 = 7$
2	$M_3 = 2M_1 + 2^2 - 1 = 5$

Tabela 3.1: Número de movimentos para $n = 3$.

Clássico da Torre de Hanói para mover os discos restantes (visto que temos $i = 2$ discos e três pinos diponíveis para realizar esses movimentos). Para finalizar, movemos novamente o disco menor, do pino auxiliar para o final. Logo $M_3 = 5$.

- Para $n = 4$.

  Aqui o parâmetro i toma os valores $i = 1, 2, 3$. Daí, usando os parâmetros e a equação (3.26) obtemos o número de movimentos para solucionar o problema, conforme mostra a tabela 3.2.

Parâmetro i	**Número de movimentos** (M_n)
1	$M_4 = 2M_3 + 2^1 - 1 = 11$
2	$M_4 = 2M_2 + 2^2 - 1 = 9$
3	$M_4 = 2M_1 + 2^3 - 1 = 9$

Tabela 3.2: Número de movimentos para $n = 4$.

Neste caso, o número mínimo de movimentos foi obtido quando usamos o parâmetro $i = 2$ e $i = 3$, ou seja, $M_4 = 9$.

É importante notar que o valor de M_3 usado na tabela 3.2 foi o menor número de movimentos (cf. tabela 3.1) para solucionar o problema da Torre de Hanói com 4 pinos e 3 discos.

- Para $n = 5$.

  Tomando como parâmetro $i = 1, 2, 3, 4$, encontramos a quantidade de movimentos para solucionar o problema com cinco discos, o que pode ser observado na tabela 3.3.

Parâmetro i	**Número de movimentos** (M_n)
1	$M_5 = 2M_4 + 2^1 - 1 = 19$
2	$M_5 = 2M_3 + 2^2 - 1 = 13$
3	$M_5 = 2M_2 + 2^3 - 1 = 13$
4	$M_5 = 2M_1 + 2^4 - 1 = 17$

Tabela 3.3: Número de movimentos para $n = 5$.

Nesse caso, o número mínimo de movimentos foi obtido quando usamos o parâmetro

$i = 2$ e $i = 3$. Observe novamente que utilizamos o valor mínimo de M_3 e M_4 para solucionar este caso de $n = 5$. Logo, são necessários 13 movimentos para transportar cinco discos, isto é, $M_5 = 13$.

Embora seja uma solução bastante convincente, não existe uma prova de que esse algoritmo fornece o número mínimo de movimentos para todo valor de n. O que se sabe (ver [6]) é que esse algoritmo foi verificado, exaustivamente, até o caso com 20 discos.

Voltando ao problema dos queijos, citado no início da seção, descrevemos a seguir uma solução, no mínimo curiosa, para os casos com 3, 4 e 5 banquinhos. A mesma foi descrita por Dudeney no livro [2] e pode ser observada na tabela (3.4).

Nº de Banquinhos	**Número de queijos**						
3	1	2	3	4	5	6	7
4	1	3	6	10	15	21	28
5	1	4	10	20	35	56	84
Nº de Banquinhos	**Número de movimentos**						
3	1	3	7	15	31	63	127
4	1	5	17	49	129	321	769
5	1	7	31	111	351	1023	2815

Tabela 3.4: Tabela com a solução do problema para os casos com 3, 4 e 5 banquinhos criada por Dudeney [2].

Nesta tabela temos duas colunas: na primeira está o número de banquinhos e na segunda o número de queijos e de movimentos, respectivamente. Este método (ver tabela 3.4) consiste no seguinte:

- Na primeira linha[1] contém os números naturais.

- Na segunda linha cada elemento representa a soma dos elementos da primeira linha. Por exemplo, o segundo elemento dessa linha é 3 pois $3 = 1+2$. O terceiro elemento é 6 pois $6 = 1 + 2 + 3$. O quarto elemento é 10 pois $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. O quinto elemento desta linha é 15 pois $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$, e assim sucessivamente.

- A terceira linha é encontrada usando a mesma ideia do item anterior, só que somando agora os números da segunda linha. Por exemplo, o segundo elemento é 4 pois $4 = 1 + 3$. O terceiro elemento é 10 pois $10 = 1 + 3 + 6$. O quarto elemento é 20 pois $20 = 1 + 3 + 6 + 10$. O quinto elemento é 35 pois $35 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15$.

[1]Quando nos referimos a linha, nesta solução, estamos considerando as linhas que contém dados numéricos.

Observe que cada elemento destas linhas citadas acima representa o número de queijos. Por exemplo, o número 6 na primeira linha significa que são seis queijos empilhados sobre um dos 3 banquinhos. Já o número 6 na segunda linha indica que são seis queijos empilhados sobre um dos 4 banquinhos.

- Na quarta linha contém as potências de 2, menos 1. Por exemplo, o primeiro termo é 1 pois $1 = 2^1 - 1$. O segundo termo é 3 pois $3 = 2^2 - 1$. O terceiro é 7 pois $7 = 2^3 - 1$.

- Na quinta linha começamos repetindo o número 1 para ser o primeiro elemento. Os próximos elementos são encontrados dobrando-se o número anterior e adicionando o elemento correspondente que fica acima do lugar onde você irá escrever o resultado. Por exemplo, o segundo elemento é 5 pois $5 = 2 \cdot 1 + 3$. O terceiro elemento é 17 pois $17 = 2 \cdot 5 + 7$. O quarto elemento é 49 pois $49 = 2 \cdot 17 + 15$. O quinto elemento é 129 pois $129 = 2 \cdot 49 + 31$.

- Última linha é obtida da mesma maneira que a anterior. Por exemplo, o segundo elemento é 7 pois $7 = 2 \cdot 1 + 5$, o quarto elemento é 111 pois $111 = 2 \cdot 31 + 49$.

Nestas três últimas linhas cada elemento representa o número de movimentos para as quantidades de queijos que estão nas três linhas iniciais. Desde modo, no caso de três banquinhos, a primeira e a quarta linha nos dizem que 4 queijos podem ser removidos com 15 movimentos, 5 queijos com 31 movimentos e 7 queijos com 127 movimentos. A segunda e a quinta linha mostram que, com quatro banquinhos, 10 queijos podem ser movidos com 49 movimentos e 21 discos com 321 movimentos. Além disso, com cinco banquinhos, encontramos na terceira e sexta linha que 20 queijos requerem 11 movimentos, e 35 queijos 351 movimentos.

Um fato curioso nesse método é que, para o caso com quatro banquinhos, os números $(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...)$ que representam a quantidade de queijos, são conhecidos como números triangulares[2]. Já o caso com cinco banquinhos, os números $(1, 4, 10, 20, 35, 56, ...)$ que representam a quantidade de queijos, são conhecidos como números tetraédicos[3]. Em [2] Dudeny afirma, sem desmonstrar, que essa é uma solução válida para todo número triangular e tetraédico.

Outro fato curioso é que esse método fornece o valor do parâmetro i para o qual conseguiremos obter a quantidade mínima de movimentos. Por exemplo, com quatro banquinhos e 10 queijos a coluna de números anterior mostra que devemos transferir os 6 queijos menores (neste caso o i = 4) para um banquinho auxiliar com 17 movimentos.

[2]Um número triangular é um número natural e pode ser representado por um triângulo equilátero. O n-ésimo número triangular é determinado por $t_n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

[3]São números naturais que podem ser representados por meio de uma pirâmide de base triangular. Seu n-ésimo termo é determinado por $p_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}$

Em sequida, transferir os 3 queijos seguintes para outro banquinho auxiliar com mais 7 movimentos. Depois, transferir o disco maior do banquinho de origem para o banquinho final, com mais 1 movimento. Por fim, transferimos os 3 queijos do banquinho auxiliar para o banquinho final com mais 7 movimentos e os 6 queijos do banquinho auxiliar para o banquinho final com mais 17 movimentos. Assim, a quantidade total de movimentos é $17 + 7 + 1 + 7 + 17 = 49$.

Apesar de ser interessante, esse método não é eficiente visto que os números de queijos devem ser números tringulares ou tetraédicos.

Se, para o caso com quatro banquinhos, os números de queijos não são triangulares e, para cinco banquinhos não são tetraédicos, teremos mais de um valor para o paramêtro i que fornecerá o número mínimo de movimentos [2].

Proposta de Atividade

1. *Sugerimos ao leitor resolver alguns casos particulares do problema da Torre de Hanói com 5 pinos.*

Capítulo 4

Considerações Finais

Neste trabalho construimos uma material didático que servirá como suporte para os professores da educação básica que queiram inserir a Torre de Hanói em suas aulas. Pudemos notar que a maioria das soluções apresentadas nos capítulos II e III recaem em uma função exponencial. Por isso, uma boa oportunidade para inclusão das variações da Torre de Hanói nas aulas de Matemática do ensino básico seria quando fossem ser estudados os conteúdos de potência, equação exponencial, função exponencial e até mesmo em sequências numéricas.

Acreditamos ainda, que mais importante do que nossos alunos quantificarem o número de movimentos mínimos para solucionar essas variações é fazer com eles percebam as sequências de passos e deduzam as expressões matemáticas que fornecem esse quantitativo. Apesar da Torre de Hanói ser um problema antigo, tivemos dificuldade para encontrar referenciais teóricos em português que tratassem das suas variações. Por isso, julgamos que essa temática está longe de ser esgotada e há um vasto campo para ser explorado pelos matemáticos, como, por exemplo, a conjectura de Frame-Stewart apresentada na última variação do capítulo III. Outras variações também podem servir de temas para futuros trabalhos algumas sugestões são encontradas no livro de Matemática Concreta [3] e no artigo [13].

Todas as expressões matemáticas que encontramos nos capítulos II e III para determinar o número mínimo de movimentos podem ser comprovadas por indução. Optamos por não fazer essas demonstrações para evitar que o texto ficasse prolixo.

Referências Bibliográficas

[1] ATKISON, M. D. *The Cyclic Towers of Hanoi.* Information Processing Letters, (13): 118-119, 1981.

[2] DUDENEY, H. E. *The Canterbury Puzzles (and other curious problems).*Thomas Nelson Sons, London, 1907.

[3] GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. *Matemática Concreta:Fundamentos para a Ciência da Computação.* Tradução Valéia de Magalhães Iorico. - [Reimp.], - Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[4] HINZ, M. A.; KLAVZAR, S.; MILUTINOVIC, U. PETR, C.*The Tower of Hanoi Myths and Maths* Birkhäuser; 2013 edition (January 31, 2013).

[5] HOFSTADTER, R. D.*Metamagical themas. Scientific American.* - 2(248):16-22, Março 1983.

[6] HOUSTON, B.; HASSAN M.*Explorations in 4-peg Tower of Hanoi.* Technical Report TR-04-10, 2004.

[7] LUCAS, É. *Théorie des nombres.* - Tome premier, Gauthiers-Villars et fils - Paris, 1891.

[8] MORAIS FILHO, D. C. *Manual de Redação Matemática.* - Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[9] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P.Matemática Discreta. - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar: números reais.* - 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[11] PEREIRA, A. F.; RODRIGUES, R. *O problema das Torres de Hanoi: a lenda, algoritmos e generalizações.* - Gazeta de Matemática, janeiro de 2003 - nº144.

[12] SHINE, C. Y. *21 Aulas de Matemática Olímpica.* - Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[13] SOARES, J. A. R.; SANTOS, T. N. *Variantes da Torre de Hanói.* Atas do IV Simpósio de Iniciação Científica da Pós-graduação - São Paulo: USP, 2008.

[14] STEFFENON, R. R.; GUARNIERI, F. M. *Belos Problemas de Matemática Indução e Contagem.* - Rio Grande: IV Colóquio de Matemática da Região Sul, 2006.

[15] STEWART, B. M. Advanced problem 3918. *American Mathematical Monthly.* Vol.46, No. 6 (Jun. - Jul., 1939), pp. 363-364, 1939.

[16] STEWART, B. M.; FRAME, J. S. Advanced problem solution 3918. *American Mathematical Monthly.* Vol. 48, No. 3 (Mar., 1941), pp. 216-219, 1941.

[17] STOCKMEYER, P. K. *The average distance between nodes in the cyclic towers of Hanoi digraph.* Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications, 1996.