



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Uma Abordagem de Pontos Críticos e as Funções de Morse

**Antonio dos Santos de Freitas**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientadora  
**Profa. Dra. Ariane Luzia dos Santos**

**2017**

514 Freitas, Antonio dos Santos de  
F866a Uma abordagem de pontos críticos e as funções de Morse /  
Antonio dos Santos de Freitas. - Rio Claro, 2017  
77 f. : il., figs., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Ariane Luzia dos Santos

1. Topologia. 2. Curvas. 3. Funções diferenciáveis. 4.  
Parametrização. 5. Superfícies. 6. Vetores. I. Título.

# TERMO DE APROVAÇÃO

Antonio dos Santos de Freitas

UMA ABORDAGEM DE PONTOS CRÍTICOS E AS FUNÇÕES DE MORSE

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Ariane Luzia dos Santos  
Orientadora

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi  
Unesp - IGCE - Rio Claro

Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento  
Unesp - IQ - Araraquara

Rio Claro, 26 de Maio de 2017

*Dedico este trabalho à minha esposa Glauce Ronice e aos meus filhos Matheus,  
Heitor e Arthur Gabriel (in memoriam).*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, por toda força dada para que este sonho se realizasse.

A Sociedade Brasileira de Matemática pela iniciativa do programa PROFMAT.

A UNESP de Rio Claro pela oportunidade dada para realização deste trabalho.

A Capes pelo apoio financeiro durante todo o curso.

Aos meus filhos Matheus e Heitor, e a minha esposa Glauce Ronice pela compreensão nos momentos de ausência, mesmo estando por perto e pelo incentivo que sempre me deram.

Aos meus colegas de curso pelo companheirismo e pelo apoio nas horas difíceis.

A todos os professores da UNESP pela dedicação e pelos incentivos.

A professora Dra. Alice Kimie Miwa Libardi pelas sugestões dadas, inclusive o tema, e por todo auxílio durante o curso.

A minha orientadora Dra. Ariane Luzia dos Santos, pelas sugestões, apoio, dedicação e por toda paciência que teve comigo.

A todos aqueles que acreditaram em mim e torceram para que fosse possível a conclusão deste curso.

*Tente! E não diga que a vitória está perdida. Se é de batalhas que se vive a vida.  
Tente outra vez!*  
Raul Seixas

# Resumo

Este trabalho aborda em especial a análise dos pontos críticos de uma função diferenciável. Fazemos inicialmente uma abordagem sobre funções diferenciáveis com duas variáveis e outros temas necessários para a compreensão de algumas demonstrações e conceitos que serão abordados neste trabalho e em seguida apresentamos uma abordagem sobre curvas e superfícies.

Depois, apresentamos um estudo sobre pontos críticos e as funções de Morse, que estão relacionadas ao estudo dos pontos críticos não degenerados de uma função diferenciável  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  em uma superfície, e mostramos ainda que toda função diferenciável em torno de um ponto crítico não degenerado pode ser escrita como um polinômio quadrático.

Para finalizar o trabalho, fazemos uma proposta de abordagem dos pontos críticos de uma função diferenciável destinada à 3ª série do ensino médio usando o conceito de derivada com uma variável.

**Palavras-chave:** Curvas, Funções Diferenciáveis, Parametrização, Superfícies, Vetores.

# Abstract

This work deals in particular with the analysis of the critical points of a differentiable function. We make an initial approach on differentiable functions with two variables and other topics necessary for the understanding of the sampled concepts and concepts that will be approached in this work and next we present an approach on curves and surfaces.

Then, we present a study on critical points and Morse functions, which are related to the study of the nondegenerate critical points of a differentiable  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  function on a surface, and we show that any differentiable function around a nondegenerated critical point can be written as a quadratic polynomial.

To finalize the work, we make a proposal to approach the critical points of a differentiable function destined for the 3rd grade of high school using the concept of derivative with one variable.

**Keywords:** Curves, Differentiable Functions, Parameterization, Surfaces, Vectors.



# Lista de Figuras

1.1	$\ v\  = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ . . . . .	13
2.1	$\alpha(t) = (3 \cos t, 2 \sin t, t)$ . . . . .	20
2.2	$\alpha(t) = (5 \cos t, 5 \sin t, 2t)$ . . . . .	20
2.3	$\alpha(t) = (t, t^2)$ . . . . .	21
2.4	$\alpha(t) = (2t, t^2 - 1)$ . . . . .	21
2.5	Triedro de Frenet . . . . .	24
3.1	Parabolóide Hiperbólico: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = z$ . . . . .	31
3.2	Parabolóide Elíptico: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = z$ . . . . .	31
3.3	Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ . . . . .	32
3.4	Cone Elíptico: $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ . . . . .	33
3.5	Superfície de revolução: Cilindro . . . . .	34
3.6	Superfície de revolução: Toro . . . . .	34
3.7	Plano tangente ao parabolóide elíptico . . . . .	36
3.8	Plano tangente ao elipsóide . . . . .	36
4.1	$(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento . . . . .	43
4.2	$f(x, y) = 3x^2 - 4y^2$ . . . . .	45
4.3	$f(x, y) = x^4 + y^4$ . . . . .	46
4.4	$f(x, y) = -4x^2 + 2xy - y^2$ . . . . .	47
4.5	$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2$ . . . . .	47
4.6	A é ponto de mínimo (índice 0) e B é ponto de sela (índice 1) . . . . .	50
4.7	C é ponto de máximo (índice 2) . . . . .	51
4.8	Toro S . . . . .	52
4.9	Superfície S . . . . .	53
4.10	Superfície Q . . . . .	54
5.1	A reta s é secante à curva f . . . . .	55
5.2	O ponto Q se aproxima de P . . . . .	56
5.3	$P_1$ é ponto de máximo local e $P_2$ é ponto de mínimo local . . . . .	57
5.4	P é ponto de mínimo . . . . .	59
5.5	P é ponto de máximo . . . . .	59
5.6	$P_1$ é ponto de mínimo local e $P_2$ é ponto de máximo local . . . . .	60
5.7	Esquema de construção da caixa . . . . .	61
5.8	Esquema da movimentação dos pontos . . . . .	61
5.9	$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ . . . . .	63
5.10	$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$ . . . . .	64

5.11	Menu Principal . . . . .	64
5.12	Barra de Ferramentas . . . . .	64
5.13	Janelas . . . . .	65
5.14	Entrada . . . . .	65
5.15	Pares Ordenados . . . . .	66
5.16	Propriedades de um ponto . . . . .	67
5.17	Alterando propriedades de um ponto . . . . .	67
5.18	Copiando imagem . . . . .	68
5.19	Digitando a função . . . . .	69
5.20	Construção do gráfico . . . . .	70
5.21	Função na Entrada . . . . .	71
5.22	Traçando segmentos . . . . .	72
5.23	Tracejado . . . . .	73
5.24	Copiando . . . . .	74
5.25	Gráfico pronto . . . . .	74

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1	Algumas Definições . . . . .	12
1.2	Produto Interno e Produto Vetorial no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	13
1.3	Funções Diferenciáveis . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Curvas</b>	<b>19</b>
2.1	Curvas Parametrizadas Diferenciáveis . . . . .	19
2.2	Curvas Regulares e Comprimento de Arco . . . . .	21
2.3	Teoria Local das Curvas . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Superfícies</b>	<b>29</b>
3.1	Superfície Parametrizada Regular . . . . .	29
3.2	Plano Tangente . . . . .	34
3.3	Primeira Forma Quadrática . . . . .	37
3.4	Mudança de Parâmetros . . . . .	37
3.5	Orientação de Superfícies . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Pontos Críticos</b>	<b>40</b>
4.1	Máximos e Mínimos . . . . .	40
4.2	As Funções de Morse . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Aplicação na Sala de Aula</b>	<b>55</b>
5.1	Determinando Máximos e Mínimos com a Derivada . . . . .	55
5.2	Usando o Geogebra . . . . .	64
	<b>Referências</b>	<b>76</b>

# Introdução

Encontramos diversas situações em que é importante determinar os pontos de máximo ou mínimo de uma função, sendo usado para isso valores reais que nos permite maximizar ou minimizar uma determinada situação. Esses valores são chamados de pontos críticos de uma função.

Um conceito muito importante que nos ajuda a determinar os pontos críticos de uma função é a derivada.

O estudo das derivadas foi desenvolvido ao longo de 2500 anos. O que era no início apenas o estudo da reta tangente, se transformou em um poderoso instrumento para a resolução de diversos problemas.

A partir do século XVII, com Leibniz e Newton, o Cálculo Diferencial passou a ser indispensável à vários campos da Ciência, e no século XIX, Cauchy introduziu formalmente o conceito de limite e de derivada.

Faremos neste trabalho o uso da derivada não apenas para identificar um ponto crítico, mas também para sua classificação em máximo, mínimo ou sela. Esta classificação é feita a partir da determinação das derivadas parciais de 2ª ordem e do determinante Hessiano, um importantíssimo conceito usado na classificação dos pontos críticos.

Este trabalho aborda o uso da derivadas e do determinante Hessiano na classificação dos pontos críticos de uma superfície. A classificação dos pontos críticos de uma superfície é muito importante para nos auxiliar na identificação do formato que uma determinada superfície possui.

Outro conceito muito importante para o nosso estudo dos pontos críticos, são as funções de Morse, que estão relacionadas com os pontos críticos não degenerados, que são aqueles em que o determinante Hessiano é diferente de zero. Uma função é de Morse se todos os seus pontos críticos são não degenerados.

No Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos que serão usados ao longo deste trabalho, entre eles o conceito de diferenciabilidade de uma função com duas variáveis, para isso foram usadas as referências [1], [2], [6], [7] e [9]; no Capítulo 2 falamos de curvas regulares parametrizadas e conceitos importantes para o estudo das superfícies; no Capítulo 3 fazemos uma abordagem de superfícies regulares parametrizadas. Nestes dois capítulos foram usadas as referências [2], [3], [12], [14], [15] e [17].

No Capítulo 4 introduzimos o conceito de pontos críticos, abordando pontos de máximo, mínimo e de sela, e apresentamos a relação entre as funções de Morse e os pontos críticos de uma superfície, onde foram usadas as referências [1], [7], [13], [16] e [18].

Para finalizar, no Capítulo 5, apresentamos uma abordagem sobre pontos críticos e o uso da derivada, destinada à 3ª série do ensino médio, com exemplos para determinar pontos de máximo ou mínimo de funções polinomiais de grau maior ou igual 2 e também a construção de seus gráficos com a utilização do geogebra, sendo usadas as referências [4], [5], [8], [10] e [11]. Colocamos neste capítulo algumas orientações para auxiliar o

professor com o uso do geogebra na construção dos gráficos.

Com o uso da derivada, encontramos os pontos críticos destas funções facilitando um melhor entendimento para a construção dos gráficos sem o uso de um software. É muito importante também que os alunos possam usar um software, como o geogebra, para depois compararem com o gráfico feito manualmente.

Estas abordagens tem como objetivo auxiliar o professor na sua formação, pois possui um aprofundamento do tema proposto. Esperamos poder contribuir de forma significativa para a melhoria da aprendizagem dos alunos e também na formação dos professores.

# 1 Preliminares

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos que serão necessários para o entendimento de algumas demonstrações e conceitos abordados posteriormente ao longo deste trabalho.

## 1.1 Algumas Definições

**Definição 1.1.** Uma bola aberta de raio  $r$  centrada em um ponto  $p \in \mathbb{R}^3$ , é o conjunto de todos os pontos  $x \in \mathbb{R}^3$  tal que  $|x - p| < r$ .

**Exemplo 1.1.** O conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$  é uma bola aberta em  $\mathbb{R}^3$ , pertencendo ao interior de uma esfera.

**Definição 1.2.** Um conjunto  $A$  é aberto em  $\mathbb{R}^3$  se, para cada ponto  $p \in A$ , existe uma bola aberta de raio  $r$  centrada em  $p$  inteiramente contida em  $A$ .

Dizemos que um ponto  $a$  é interior ao conjunto  $X \subset \mathbb{R}^3$ , quando existe um número  $\delta > 0$  tal que  $(a - \delta, a + \delta)$  está contido em  $X$ .

Quando um ponto  $a$  pertence ao interior de um conjunto  $X$ , tal que  $X \subset \mathbb{R}^3$ , dizemos que o conjunto  $X$  é uma vizinhança do ponto  $a$ ; em particular uma bola aberta com centro em  $a$  é uma vizinhança de  $a$ .

**Exemplo 1.2.** Toda bola aberta em  $\mathbb{R}^3$  de raio  $r$  e centro  $(x_0, y_0, z_0)$ , de modo que  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.3.** Seja  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  definida e diferenciável em  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Definimos matriz jacobiana de  $f$  no ponto  $x$ , por

$$J(f) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 1.3.** A matriz jacobiana da aplicação  $f(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$  é

$$J(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{bmatrix}.$$

## 1.2 Produto Interno e Produto Vetorial no $\mathbb{R}^3$

**Definição 1.4.** A norma ou comprimento do vetor  $v = \overrightarrow{AB}$  no  $\mathbb{R}^3$  é  $\|v\| = d(A, B)$ , sendo  $d(A, B)$  a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ .

Seja  $OXYZ$  um sistema de eixos ortogonais. Se o vetor  $v = \overrightarrow{OP}$ , de modo que as coordenadas de  $v$  e do ponto  $P$  coincidem, então, sendo  $v = \overrightarrow{OP} = (a, b, c)$ , temos  $P = (a, b, c)$  e logo,  $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ , como podemos observar na figura a seguir.

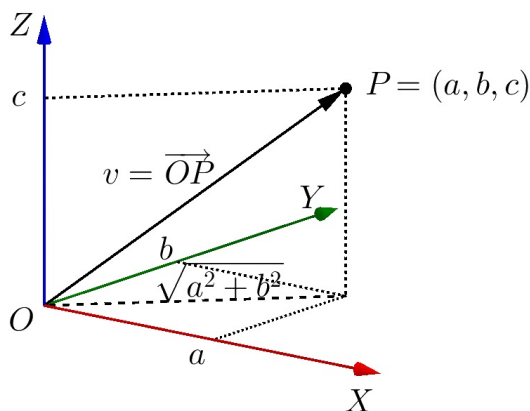


Figura 1.1:  $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Um vetor  $v$  é chamado de *unitário* se  $\|v\| = 1$ .

**Definição 1.5.** O produto interno entre os vetores  $u$  e  $v$  no espaço, é o número real

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } u = \vec{0} \text{ ou } v = \vec{0} \\ \|u\|\|v\|\cos \theta, & \text{se } u \neq \vec{0} \text{ e } v \neq \vec{0}, \end{cases}$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $u$  e  $v$ .

O ângulo que um vetor  $v \neq \vec{0}$  faz com ele mesmo é igual a zero e como o  $\cos 0^\circ = 1$ , então podemos concluir que  $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$ .

**Definição 1.6.** O vetor  $u$  é perpendicular ou ortogonal ao vetor  $v$ , quando o ângulo entre eles é reto ou quando um deles for nulo, então  $u \perp v \iff \langle u, v \rangle = 0$ .

**Definição 1.7.** Sejam  $u = (x_1, y_1, z_1)$  e  $v = (x_2, y_2, z_2)$  vetores no  $\mathbb{R}^3$ , o produto vetorial de  $u$  por  $v$  é  $u \times v = (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1)$ .

Uma maneira de determinar o produto vetorial é calcular o determinante da matriz de ordem 3 que possui os vetores  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  e  $e_3 = (0, 0, 1)$  como elementos da primeira linha, os elementos da segunda linha são as coordenadas do vetor  $u$  e da terceira linha são as coordenadas do vetor  $v$ . Então temos,

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3 \\ &= (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned}$$

**Definição 1.8.** Os vetores  $u = \overrightarrow{AB}$ ,  $v = \overrightarrow{AC}$  e  $w = \overrightarrow{AD}$  são linearmente independentes (LI) se os pontos  $A, B, C$  e  $D$  não são coplanares, ou seja, não pertencem a um mesmo plano. Se estes vetores não são linearmente independentes, eles serão linearmente dependentes (LD) e então os pontos  $A, B, C$  e  $D$  são coplanares.

**Proposição 1.1.** Dados os vetores  $u$  e  $v$  tal que  $u \times v \neq \vec{0}$ , sendo  $\vec{0} = (0, 0, 0)$ , então  $u, v$  e  $u \times v$  são linearmente independentes.

*Demonstração.* Sejam  $O, A, B$  e  $C$  pontos no espaço, tais que os vetores  $u = \overrightarrow{OA}$ ,  $v = \overrightarrow{OB}$  e  $u \times v = \overrightarrow{OC}$ . Como  $u \times v \neq \vec{0}$ , os vetores  $u$  e  $v$  não são múltiplos, ou seja, os pontos  $O, A$  e  $B$  não são colineares.

Seja  $\pi$  o plano que passa pelos pontos  $O, A$  e  $B$ . Suponhamos por absurdo, que os vetores  $u, v$  e  $u \times v$  não são LI, então o ponto  $C$  pertence ao plano  $\pi$  e assim existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que  $u \times v = \overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} = \alpha u + \beta v$ .

Logo,  $\|u \times v\|^2 = \langle u \times v, u \times v \rangle = \langle u \times v, \alpha u + \beta v \rangle = \alpha \langle u \times v, u \rangle + \beta \langle u \times v, v \rangle = 0$ , temos uma contradição, pois por hipótese,  $u \times v \neq \vec{0}$ . □

### 1.3 Funções Diferenciáveis

Agora abordaremos o conceito de diferenciabilidade para funções de duas variáveis reais, mostrando quando uma função é diferenciável num ponto  $(x, y)$ .

Começemos com a definição de diferenciabilidade para uma função real à valores reais.

Seja uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é *diferenciável* ou *derivável* em  $x_0$  se, e somente se, o limite, quando  $h$  tende a zero, da razão  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  existir e for finito.

Porém esta forma não é adequada para generalização, pois se  $f$  for uma função com duas variáveis reais,  $h$  será um par ordenado. Vamos mostrar uma forma equivalente à definição de diferenciabilidade com duas variáveis.

Suponha que  $f$  é diferenciável em  $x_0$ , então existe um número real  $a$ , onde  $a = f'(x_0)$ , tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Temos,

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a = 0 \\ \iff & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = 0 \\ \iff & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{|h|} = 0. \end{aligned}$$



Portanto,  $f$  é diferenciável em  $x_0$  se, e somente se, existir um real  $a$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{|h|} = 0.$$

**Definição 1.9.** *Sejam  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto de  $\mathbb{R}^2$ , e  $(x_0, y_0) \in A$ . Dizemos que  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$  se, e somente se, existirem  $a$  e  $b$  tais que*

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0.$$

A seguir apresentaremos algumas propriedades das funções diferenciáveis.

**Teorema 1.1.** *Se  $f$  for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  será contínua em  $(x_0, y_0)$ .*

*Demonstração.* Sendo  $f$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , existem reais  $a$  e  $b$  tais que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0, \tag{1.1}$$

onde  $E(h, k)$  é uma função dada por

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + E(h, k).$$

Como

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (ah + bk) = 0$$

e

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} E(h, k) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \|(h, k)\| \cdot \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Resulta que,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0).$$

Logo,  $f$  é contínua em  $(x_0, y_0)$ . □

**Teorema 1.2.** *Sejam  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto, e  $(x_0, y_0) \in A$ . Se  $f$  for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  admitirá derivadas parciais neste ponto.*

*Demonstração.* Seja  $f$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , existem reais  $a$  e  $b$  tais que

$$\lim_{(h,0) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah - b \cdot 0}{\|(h, 0)\|} = 0$$

$$\iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{|h|} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{h} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - a = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - a = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a. \end{aligned}$$

Temos ainda que,

$$\begin{aligned} &\lim_{(0,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - a \cdot 0 - bk}{\|(0, k)\|} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - bk}{|k|} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - bk}{k} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} - b = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b. \end{aligned}$$

Portanto, as derivadas parciais existem, ou seja,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$ , sendo  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ . □

**Corolário 1.1.** *Sejam  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto e  $(x_0, y_0) \in A$ .*

$$\text{Então, } f \text{ é diferenciável em } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} a) f \text{ admite derivadas parciais em } (x_0, y_0); \\ b) \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0. \end{cases}$$

Onde,

$$E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k.$$

A seguir temos três exemplos, onde podemos verificar quando uma função é diferenciável, sendo o exemplo 1.6 de uma função contínua, que possui derivadas parciais, mas o limite (1.1) não existe, portanto não é diferenciável.

**Exemplo 1.4.** A função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

*Solução*

A função  $f$  admite derivadas parciais em todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , ou seja,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ .  
Temos,

$$\begin{aligned} E(h, k) &= f(x+h, y+k) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k \\ &= (x+h)^2 + (y+k)^2 - (x^2 + y^2) - 2xh - 2yk \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + y^2 + 2yk + k^2 - x^2 - y^2 - 2xh - 2yk \\ &= h^2 + k^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{(h^2 + k^2) \cdot \sqrt{h^2 + k^2}}{h^2 + k^2} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  é diferenciável em qualquer ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 1.5.** A função  $f$  não é diferenciável em  $(0,0)$ , sendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

*Solução*

Vamos mostrar que o limite de  $f$  não existe. Calculando o limite por caminhos, temos:

Por uma reta  $y = kx$ ,

$$\lim_{(x,kx) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 kx}{x^4 + (kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 xk}{x^2(x^2 + k^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xk}{x^2 + k^2} = 0.$$

Por uma parábola  $y = x^2$ ,

$$\lim_{(x,x^2) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Logo, temos valores diferentes para o limite quando tomamos caminhos diferentes e então o limite não existe. Portanto,  $f$  não é contínua em  $(0,0)$  e podemos concluir pelo Teorema 1.1, que  $f$  não é diferenciável em  $(0,0)$ .

**Exemplo 1.6.** A função  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

não é diferenciável na origem.

*Solução*

Primeiramente vamos verificar se a função é contínua, temos:

$$f(t, 0) = \frac{t \cdot 0}{\sqrt{t^2 + 0^2}} = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 0.$$

$$f(0, t) = \frac{0 \cdot t}{\sqrt{0^2 + t^2}} = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Isso ainda não nos garante que a função é contínua. Então, sendo uma função limitada se o seu módulo for menor ou igual a uma constante, temos

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1,$$

pois  $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  e assim podemos verificar que  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  é limitada. Deste modo, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot y = 0.$$

Logo, a função  $f$  é contínua em  $(0,0)$ . Verificamos se a função  $f$  possui derivadas parciais.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{\sqrt{0^2 + y^2}} = 0.$$

Então a função  $f$  possui derivadas parciais na origem iguais a zero. Precisamos verificar o limite (1.1).

Temos que

$$E(h,k) = f(0+h, 0+k) - f(0,0) - 0 \cdot h - 0 \cdot k = \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \text{ e}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{\sqrt{(h^2 + k^2)^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2 + k^2}.$$

Calculando este limite pelo caminho  $k = h$ , obtemos

$$\lim_{(h,h) \rightarrow (0,0)} \frac{hh}{h^2 + h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{2h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pelo caminho  $h = 2k$ , temos

$$\lim_{(2k,k) \rightarrow (0,0)} \frac{2kk}{(2k)^2 + k^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2k^2}{5k^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Portanto, como o  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}$  não existe, a função não é diferenciável em  $(0,0)$ .

## 2 Curvas

Neste capítulo veremos alguns conceitos sobre curvas, pois algumas propriedades aparecem no estudo das superfícies. Indicaremos por  $\mathbb{R}^3$  o conjunto dos ternos ordenados  $(x, y, z)$  de números reais.

### 2.1 Curvas Parametrizadas Diferenciáveis

**Definição 2.1.** *Uma curva parametrizada diferenciável de  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $\alpha$ , de classe  $C^\infty$ , de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ . A variável  $t \in I$  é o parâmetro da curva e o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  formado pelos pontos  $\alpha(t), t \in I$ , é o traço da curva.*

Dizemos que uma aplicação é de classe  $C^\infty$  quando existem derivadas de todas as ordens e todas são contínuas num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

Observamos que uma curva parametrizada diferenciável de  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$ , onde  $x(t), y(t), z(t)$  são funções diferenciáveis de classe  $C^\infty$ . Mostremos a seguir alguns exemplos de curvas parametrizadas.

**Exemplo 2.1.** As equações  $x(t) = 3 \cos t, y(t) = 2 \sin t, z(t) = t$  representam uma curva parametrizada.

*Solução*

Temos,  $x^2 = 9 \cos^2 t$  e  $y^2 = 4 \sin^2 t$ , ou seja,  $\frac{x^2}{9} = \cos^2 t$  e  $\frac{y^2}{4} = \sin^2 t$ . Pela relação fundamental trigonométrica,  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , então temos  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

Podemos verificar a curva pelo gráfico a seguir, onde o traço desta curva está contido no cilindro elíptico de base  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  e altura  $t$ .

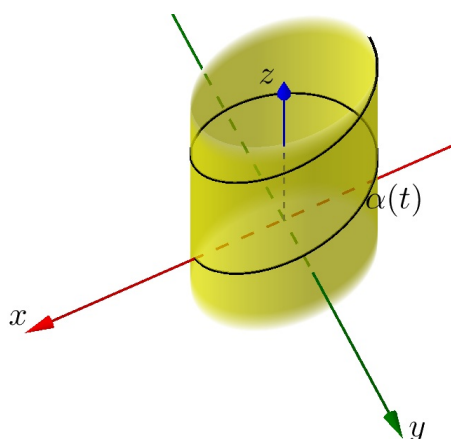


Figura 2.1:  $\alpha(t) = (3 \cos t, 2 \sin t, t)$

**Exemplo 2.2.** A aplicação  $\alpha(t) = (5 \cos t, 5 \sin t, 2t)$ , para  $t \in \mathbb{R}$  representa uma curva parametrizada.

*Solução*

Podemos escrever  $x^2 = 25 \cos^2 t$  e  $y^2 = 25 \sin^2 t$ , e ainda  $\frac{x^2}{25} = \cos^2 t$ ,  $\frac{y^2}{25} = \sin^2 t$ . Logo, temos  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1$  e então,  $x^2 + y^2 = 25$ . Portanto, o traço desta curva está contido no cilindro circular de base  $x^2 + y^2 = 25$  e altura  $2t$ .

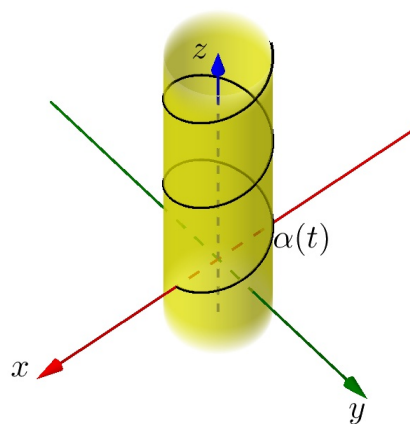
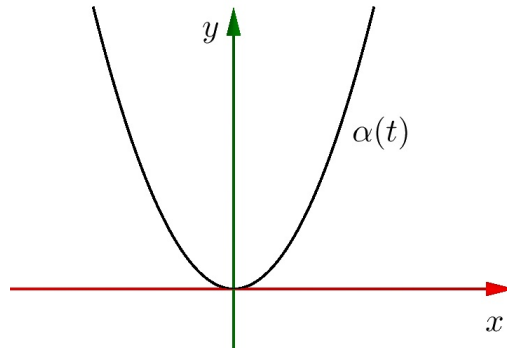
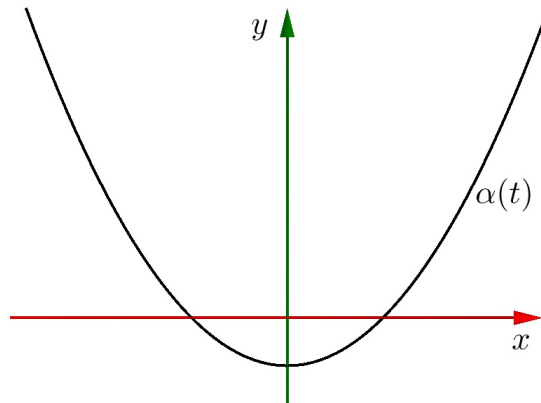


Figura 2.2:  $\alpha(t) = (5 \cos t, 5 \sin t, 2t)$

**Exemplo 2.3.** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma curva diferenciável parametrizada representada por uma parábola, pois temos  $x = t$  e  $y = t^2$  e então,  $y = x^2$ .

Figura 2.3:  $\alpha(t) = (t, t^2)$ 

**Exemplo 2.4.** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sendo  $\alpha(t) = (2t, t^2 - 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma curva parametrizada representada por uma parábola, ou seja,  $x = 2t$  e  $y = t^2 - 1$  e então, como  $t = \frac{x}{2}$ , temos  $y = \frac{x^2}{4} - 1$ .

Figura 2.4:  $\alpha(t) = (2t, t^2 - 1)$ 

## 2.2 Curvas Regulares e Comprimento de Arco

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva diferenciável parametrizada. Para cada  $t \in I$  tal que  $\alpha' \neq 0$ , há uma reta bem definida contendo o ponto  $\alpha(t)$  e o vetor  $\alpha'(t)$ . Essa reta é tangente a  $\alpha$  em  $t$ .

**Definição 2.2.** Uma curva diferenciável parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada regular se  $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$ .

**Definição 2.3.** Uma curva regular parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, para cada  $t_0, t \in I, t_0 \leq t$ , o comprimento do arco da curva de  $t_0$  a  $t$ ,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0,$$

onde  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$  é o comprimento do vetor  $\alpha'(t)$ .

**Proposição 2.1.** *Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se,  $\forall t \in I, \|\alpha'(t)\| = 1$ .*

*Demonstração.* Suponhamos  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco. Consideremos a função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde para cada  $t, t_0 \in I$ , temos

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt.$$

Se  $t \geq t_0$ , então, por hipótese  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0$ .

Para  $t_0 \geq t$ , temos  $s(t_0) = \int_t^{t_0} \|\alpha'(t)\| dt = t_0 - t$ .

Como  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = -\int_t^{t_0} \|\alpha'(t)\| dt$ , então,  $s(t) = t - t_0 = -(t_0 - t)$ , ou seja,  $s(t) = t - t_0$ .

Logo, para todo  $t \in I$ ,  $s(t) = t - t_0$  e  $s'(t) = 1$ . Como  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ , então  $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$ .

Reciprocamente, se  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , então  $s(t) = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$ . □

**Exemplo 2.5.** A curva dada por  $\alpha(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, \sin t, -\frac{3}{5} \cos t\right)$  está parametrizada por comprimento de arco.

*Solução*

Temos que mostrar que  $\|\alpha'(t)\| = 1$ . Então,  $\alpha'(t) = \left(-\frac{4}{5} \sin t, \cos t, \frac{3}{5} \sin t\right)$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{\left(-\frac{4}{5} \sin t\right)^2 + (\cos t)^2 + \left(\frac{3}{5} \sin t\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{25} \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25} \sin^2 t} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, como  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , então  $\alpha(t)$  está parametrizada por comprimento de arco.

## 2.3 Teoria Local das Curvas

Seja  $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Temos  $\|\alpha'(t)\| = 1$  e então  $\|\alpha''(t)\|$  é a taxa de variação em relação a tangente de  $s$ . Assim,  $\|\alpha''(t)\|$  nos mostra o quanto a curva se afasta em uma vizinhança de  $s$  em relação a tangente de  $s$ .

**Definição 2.4.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ . O número  $\|\alpha''(t)\| = k(s)$ , chama-se curvatura de  $\alpha$  em  $s$ .*

A curvatura de  $\alpha$  representa a velocidade em que as retas tangentes mudam de direção, ou seja, a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem em relação a tangente em  $s$ . Se a curvatura tem sinal positivo, a imagem é a mesma se o sinal for negativo.



**Exemplo 2.6.** Sendo  $\alpha(s) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s, \frac{1}{2}s \right)$ , uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, vamos determinar sua curvatura.

$$\text{Temos } \alpha'(s) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s, \frac{1}{2} \right) \text{ e } \alpha''(s) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s, 0 \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } k(s) = \|\alpha''(s)\| &= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos s\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{3}{4} \cos^2 s + \frac{3}{4} \sin^2 s} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}(\cos^2 s + \sin^2 s)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura de  $\alpha(s)$  é  $k(s) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Proposição 2.2.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então,  $\alpha(I)$  é um segmento de reta se, e somente se,  $k(s) = 0, \forall s \in I$ .*

*Demonstração.* Se  $\alpha(I)$  é uma reta, temos  $\alpha(s) = vs + c$ , onde  $c$  e  $v \in \mathbb{R}^3$ ,  $v$  é um vetor unitário e  $c$  uma constante.

Logo,  $\alpha'(s) = v$  e  $\alpha''(s) = 0$ , ou seja,  $k(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$ .

Reciprocamente, se  $\|\alpha''(s)\| = 0, \forall s \in I$ , então  $\alpha''(s) = 0$ . Fazendo a integração, obtemos  $\alpha'(s) = v$ .

Integrando  $\alpha'(s)$ , temos  $\alpha(s) = vs + c$ .

Portanto,  $\alpha(s) = vs + c$  representa uma reta e sua curvatura é  $k(s) = 0$ .  $\square$

**Definição 2.5.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $k(s) > 0$ . O vetor  $n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$  é normal a  $\alpha$  em  $s$ .*

Sendo  $t(s) = \alpha'(s)$ , então temos  $t'(s) = k(s)n(s)$ , onde  $t(s)$  e  $n(s)$  são ortonormais.

**Definição 2.6.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e  $k(s) > 0$ . O vetor binormal a  $\alpha$  em  $s$  é  $b(s) = t(s) \times n(s)$ .*

Os vetores ortonormais  $t(s), n(s)$  e  $b(s)$ , formam que o chamamos de **Triedro de Frenet** da curva  $\alpha$  em  $s$ , como mostra a figura a seguir.

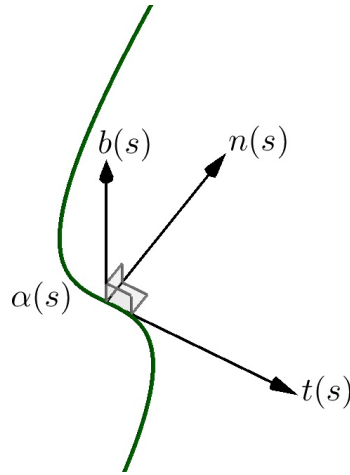


Figura 2.5: Triedro de Frenet

Como  $b(s) = t(s) \times n(s)$ , então  $b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s)$ . Temos que  $t'(s) = k(s)n(s)$  e neste caso  $k(s) = 0$ , logo,

$$b'(s) = k(s)n(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) = 0 \cdot n(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) = t(s) \times n'(s).$$

Para mostrar que  $b'(s)$  é normal a  $t(s)$  e a  $b(s)$ , devemos ter  $\langle b'(s), t(s) \rangle = 0$  e  $\langle b'(s), b(s) \rangle = 0$ .

Para  $\langle b'(s), t(s) \rangle = 0$ , temos

$$b'(s)t(s) + b(s)t'(s) = 0$$

$$b'(s)t(s) + b(s)k(s)n(s) = 0$$

e como  $k(s) = 0$ , então  $b'(s)t(s) = 0$ .

Do mesmo modo, para  $\langle b'(s), b(s) \rangle = 0$ , temos que  $\langle b(s), b(s) \rangle = \|b(s)\| \cdot \|b(s)\| \cos 0^\circ$  e como  $b(s)$  é um vetor unitário, ou seja,  $\|b(s)\| = 1$ , então  $\langle b(s), b(s) \rangle = 1$ .

Logo,

$$b'(s)b(s) + b(s)b'(s) = 0$$

$$2b'(s)b(s) = 0 \implies b'(s)b(s) = 0.$$

Então, como  $b'(s)$  é normal a  $t(s)$  e também a  $b(s)$ , podemos concluir que  $b'(s)$  é paralelo a  $n(s)$  e assim,  $b'(s)$  é um múltiplo de  $n(s)$ .

**Definição 2.7.** O número real  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  é denominado torção da curva  $s$ .

A torção mede o quanto uma curva deixa de ser plana.

**Exemplo 2.7.** Dada  $\alpha(s) = \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \cos s, \frac{\sqrt{5}}{5} \sin s, \frac{\sqrt{20}}{5} s \right)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , parametrizada pelo comprimento de arco, vamos determinar o triedro de Frenet, a curvatura e sua torção.

*Solução*

Como  $t(s) = \alpha'(s)$ , temos  $t(s) = \left( -\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{sen} s, \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{cos} s, \frac{\sqrt{20}}{5} \right)$ . Assim,

$$\alpha'(s) = \left( -\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{cos} s, -\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{sen} s, 0 \right) \text{ e como } k(s) = \|\alpha''(s)\|, \text{ então}$$

$$k(s) = \sqrt{\left( -\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{cos} s \right)^2 + \left( -\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{sen} s \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{25} \operatorname{cos}^2 s + \frac{5}{25} \operatorname{sen}^2 s} = \sqrt{\frac{5}{25} (\operatorname{cos}^2 s + \operatorname{sen}^2 s)} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Determinando  $n(s)$  temos,

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)} = \frac{\left( -\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{cos} s, -\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{sen} s, 0 \right)}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{5} (\operatorname{cos} s, \operatorname{sen} s, 0)}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = (-\operatorname{cos} s, -\operatorname{sen} s, 0).$$

Como  $b(s) = t(s) \times n(s)$ , então

$$= \left( \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{cos} s & \frac{\sqrt{20}}{5} \\ -\operatorname{sen} s & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{sen} s & \frac{\sqrt{20}}{5} \\ -\operatorname{cos} s & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{sen} s & \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{cos} s \\ -\operatorname{cos} s & -\operatorname{sen} s \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left( \frac{\sqrt{20}}{5} \operatorname{sen} s, -\frac{\sqrt{20}}{5} \operatorname{cos} s, \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{sen}^2 s + \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{cos}^2 s \right) = \left( \frac{\sqrt{20}}{5} \operatorname{sen} s, -\frac{\sqrt{20}}{5} \operatorname{cos} s, \frac{\sqrt{5}}{5} \right).$$

Derivando  $b(s)$ , temos  $b'(s) = \left( \frac{\sqrt{20}}{5} \operatorname{cos} s, \frac{\sqrt{20}}{5} \operatorname{sen} s, 0 \right)$ . Como  $b'(s) = \tau(s)n(s)$ , então  $\frac{\sqrt{20}}{5}(\operatorname{cos} s, \operatorname{sen} s, 0) = \tau(s)(-1)(\operatorname{cos} s, \operatorname{sen} s, 0)$ .

Logo,  $\tau(s) = -\frac{\sqrt{20}}{5}$ .

Podemos perceber neste caso que a curva tem torção positiva se  $k < 0$  e negativa se  $k > 0$ , por isso, a torção muitas vezes é definida com sinal oposto, ou seja,  $b'(s) = -\tau(s)n(s)$ .

Temos ainda, que se a curvatura tem sinal positivo, a imagem é a mesma se o sinal for negativo, ou seja, a curvatura permanece invariante mesmo fazendo uma mudança de orientação. O triedro de Frenet definido pelos vetores ortonormais  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$  satisfaz as equações

$$\begin{cases} t' = kn \\ n' = -\tau b - kt \\ b' = \tau n, \end{cases}$$

que são chamadas de *fórmulas de Frenet*, onde ocultaremos o termo  $(s)$  por comodidade.

Agora vamos verificar o que acontece com uma curva em uma vizinhança de um de seus pontos. Para isso faremos uso da fórmula de Taylor.

Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ ,  $s \in I$ , uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e tendo curvatura  $k(s) \neq 0, \forall s \in I$ .

Tomando  $s = 0$  e considerando o sistema de coordenadas de modo que  $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ ,  $t = (1, 0, 0)$ ,  $n = (0, 1, 0)$ ,  $b = (0, 0, 1)$ , então,

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \alpha''(0)\frac{s^2}{2!} + \alpha'''(0)\frac{s^3}{3!} + R,$$

sendo  $R$  as potências de ordem maior que três.

Fazendo uso das fórmulas de Frenet, obtemos,

$$\alpha'(0) = t,$$

$$\alpha''(0) = kn,$$

$$\begin{aligned} \alpha'''(0) &= k'n + kn' = k'n + k(-\tau b - tk) \\ &= k'n - kb\tau - k^2t = -k^2t + k'n - kb\tau. \end{aligned}$$

Substituindo os resultados em  $\alpha(s)$ , temos

$$\begin{aligned} \alpha(s) - \alpha(0) &= ts + kn\frac{s^2}{2} + (-k^2t + k'n - kb\tau)\frac{s^3}{3!} + R \\ &= ts + kn\frac{s^2}{2} - \frac{k^2ts^3}{6} + \frac{k'n s^3}{6} - \frac{k\tau b s^3}{6} + R \\ &= \left(s - \frac{k^2s^3}{6}\right)t + \left(\frac{ks^2}{2} + \frac{k's^3}{6}\right)n - \left(\frac{k\tau s^3}{6}\right)b + R. \end{aligned}$$

Como  $t = (1, 0, 0)$ ,  $n = (0, 1, 0)$  e  $b = (0, 0, 1)$  e sendo  $R = (R_x, R_y, R_z)$ , temos

$$\alpha(s) = \left(s - \frac{k^2s^3}{6}, \frac{ks^2}{2} + \frac{k's^3}{6}, -\frac{k\tau s^3}{6}\right) + (R_x, R_y, R_z).$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{k^2s^3}{6} + R_x, \\ y(s) &= \frac{ks^2}{2} + \frac{k's^3}{6} + R_y, \\ z(s) &= -\frac{k\tau s^3}{6} + R_z. \end{aligned}$$

Chamamos esta representação de forma canônica de  $\alpha$  em uma vizinhança de  $s = 0$ .

**Definição 2.8.** Duas curvas regulares  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  são congruentes se existe uma isometria  $F$  de  $\mathbb{R}^3$ , tal que  $\beta = F \circ \alpha$ .

A seguir enunciaremos o Teorema Fundamental das Curvas.

### Teorema 2.1.

- (a) Dadas duas funções diferenciáveis, com  $k(s) > 0$  e  $\tau(s)$ , sendo  $s \in I \subset \mathbb{R}$ , existe uma curva regular  $\alpha(s)$  parametrizada pelo comprimento de arco, tal que  $k(s)$  é a curvatura e  $\tau(s)$  é a torção de  $\alpha$  em  $s$ .

- (b) A curva  $\alpha(s)$  é única se fixarmos um ponto  $\alpha(s_0) = p_0 \in \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha'(s_0) = u$ ,  $\alpha''(s_0) = k(s_0)v$ , tal que  $u$  e  $v$  são vetores ortonormais de  $\mathbb{R}^3$ .
- (c) Se duas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  têm a mesma curvatura e torção (a menos de sinal), então  $\alpha$  e  $\beta$  são congruentes.

*Demonstração.* Primeiramente, vamos provar o item (c).

Considerando uma isometria  $F$  e uma curva  $\bar{\alpha} = F \circ \alpha$  que é congruente a  $\alpha$ .

Tomando  $s_0 \in I$  e supondo que  $\tau_\alpha = \tau_\beta$ , ou  $\tau_\alpha = -\tau_\beta$ , sendo  $\tau_\alpha$  a torção referente à curva  $\alpha$  e  $\tau_\beta$  referente à curva  $\beta$ .

Sendo  $F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$ , temos,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(t_\alpha(s_0)) = t_\beta(s_0),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(n_\alpha(s_0)) = n_\beta(s_0) \text{ e}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(b_\alpha(s_0)) = b_\beta(s_0).$$

Então,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(s_0) &= \beta(s_0), \quad \bar{k} = k_\alpha = k_\beta, \quad \bar{\tau} = \tau_\alpha = \tau_\beta \text{ e} \\ \bar{t}(s_0) &= t_\beta(s_0), \quad \bar{n}(s_0) = n_\beta(s_0), \quad \bar{b}(s_0) = b_\beta(s_0). \end{aligned}$$

Considerando uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $s \in I$ , temos  $f(s) = \|\bar{t}(s) - t_\beta(s)\|^2 + \|\bar{n}(s) - n_\beta(s)\|^2 + \|\bar{b}(s) - b_\beta(s)\|^2$ .

Podemos perceber que  $f'(s) = 0, \forall s \in I$  e então  $f(s)$  é constante.

Logo,  $f(s_0) = 0$  e podemos concluir que  $f(s) \equiv 0$  e  $\bar{t} = t_\beta$ . Portanto,  $\bar{\alpha} = \beta$ .

- (a) Mostremos que existe um referencial ortonormal  $t(s), n(s)$  e  $b(s)$  e que  $\alpha(s) = \int_{s_0}^s t(s) ds$ .

Representando  $t(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s)), n(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s)),$

$b(s) = (b_1(s), b_2(s), b_3(s))$  e fixando

$$t(s_0) = (t_1(s_0), t_2(s_0), t_3(s_0)) = (1, 0, 0),$$

$$n(s_0) = (n_1(s_0), n_2(s_0), n_3(s_0)) = (0, 1, 0),$$

$$b(s_0) = (b_1(s_0), b_2(s_0), b_3(s_0)) = (0, 0, 1), \text{ temos que}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle t, t \rangle = 2k \langle t, n \rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle n, n \rangle = -2k \langle t, n \rangle - 2\tau \langle b, n \rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle b, b \rangle = 2\tau \langle b, n \rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle t, n \rangle = k \langle n, n \rangle - k \langle t, t \rangle - \tau \langle t, b \rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle t, b \rangle = k \langle b, n \rangle + \tau \langle t, n \rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle b, n \rangle = \tau \langle n, n \rangle - k \langle t, b \rangle - \tau \langle b, b \rangle, \text{ e com a condição inicial}$$

$$\begin{aligned}\langle t(s_0), t(s_0) \rangle &= \langle n(s_0), n(s_0) \rangle = \langle b(s_0), b(s_0) \rangle = 1 \text{ e} \\ \langle t(s_0), n(s_0) \rangle &= \langle t(s_0), b(s_0) \rangle = \langle b(s_0), n(s_0) \rangle = 0.\end{aligned}$$

Então a solução de valor inicial é única e é dada pelas funções

$$\begin{aligned}\langle t(s), t(s) \rangle &= \langle n(s), n(s) \rangle = \langle b(s), b(s) \rangle \equiv 1 \text{ e} \\ \langle t(s), n(s) \rangle &= \langle t(s), b(s) \rangle = \langle b(s), n(s) \rangle \equiv 0.\end{aligned}$$

Portanto, a solução para,

$$\begin{aligned}t'_i(s) &= k(s)n_i(s), \\ n'_i(s) &= -k(s)t_i(s) - \tau(s)b_i(s), \quad 1 \leq i \leq 3, \\ b'_i(s) &= \tau(s)n_i(s),\end{aligned}$$

com condição inicial  $t(s_0) = (1, 0, 0)$ ,  $n(s_0) = (0, 1, 0)$  e  $b(s_0) = (0, 0, 1)$  forma um referencial para todo  $s$ , e ainda  $b(s) = t(s) \times n(s)$ , pois  $s = s_0$ .

Definindo a curva  $\alpha(s) = \int_{s_0}^s t(s)ds$  e como  $t(s)$  é um vetor unitário, então  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ .

Temos que  $\alpha'(s) = t(s)$ ,  $\alpha''(s) = t'(s)$  e então  $\alpha''(s) = k(s)n(s)$ .

Como  $n(s)$  é um vetor unitário e  $k(s) > 0$ , então  $n$  é o vetor unitário na direção de  $\alpha'$ , sendo  $n$  normal à  $\alpha$  e portanto,  $k(s)$  é a curvatura de  $\alpha$ , e  $\tau$  é a torção de  $\alpha$ .

(b) Fixando  $t(s_0) = u$ ,  $n(s_0) = v$  e  $b(s_0) = u \times v$ , obtemos uma única solução para o sistema

$$\begin{aligned}t'_i(s) &= k(s)n_i(s), \\ n'_i(s) &= -k(s)t_i(s) - \tau(s)b_i(s), \quad 1 \leq i \leq 3, \\ b'_i(s) &= \tau(s)n_i(s),\end{aligned}$$

e então  $t(s), n(s), b(s)$  é um referencial ortonormal.

Como a curva  $\alpha$  deve satisfazer  $\alpha'(s) = t(s)$ , então  $\alpha(s) = p_0 + \int_{s_0}^s t(s)ds$ . □

## 3 Superfícies

Abordaremos neste capítulo algumas propriedades de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , onde temos o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Além disso, as superfícies serão diferenciáveis, ou ainda, possuem um plano tangente em qualquer ponto.

### 3.1 Superfície Parametrizada Regular

Uma superfície é representada por um subconjunto de pontos de  $X(u, v)$  em  $\mathbb{R}^3$ , tal que  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , onde  $(u, v)$  são variáveis em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definição 3.1.** *Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação  $X : U \subset \mathbb{R}^2$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , tal que :*

- (a)  $X$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ ;
- (b) Para todo  $q = (u, v) \in U$ , a derivada de  $X$  em  $q$ ,  $\frac{\partial X}{\partial q} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é injetora.

Dizemos que  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  é diferenciável de classe  $C^\infty$  quando as funções  $x, y, z$  possuem as derivadas parciais de todas as ordens e sendo todas contínuas.

Se  $X$  é diferenciável e injetora, então isso nos dá a existência de um plano tangente em cada ponto.

Sejam  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , associaremos à  $\frac{\partial X}{\partial q}$ , sendo  $q = (u_0, v_0)$ , a matriz jacobiana, ou seja,

$$J(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix},$$

sendo  $\frac{\partial X}{\partial u}(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$  que representaremos por  $X_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$  e ainda  $\frac{\partial X}{\partial v}(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$  que será representada por  $X_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$ .

**Proposição 3.1.** *Seja  $X$  uma superfície parametrizada diferenciável, então  $\frac{\partial X}{\partial q}$  é injetora se, e somente se, os vetores  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$  são linearmente independentes e  $J(q)$  tem posto 2.*

*Demonstração.* Suponhamos que exista  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  tais que  $\alpha X_u(q) + \beta X_v(q) = 0$  e que  $n = (\alpha, \beta) = \alpha e_1 + \beta e_2 \in \mathbb{R}^2$ .

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial q}(n) &= \frac{\partial X}{\partial q}(\alpha e_1 + \beta e_2) \\ &= \alpha \frac{\partial X}{\partial q}(e_1) + \beta \frac{\partial X}{\partial q}(e_2) = \alpha X_u(q) + \beta X_v(q) = 0. \end{aligned}$$

Logo, como  $\frac{\partial X}{\partial q}$  é injetora, temos  $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$ , então  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ . Portanto,  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$  são linearmente independentes.

Reciprocamente, se  $\frac{\partial X}{\partial q}(n) = 0$  temos,

$$\alpha \frac{\partial X}{\partial q}(e_1) + \beta \frac{\partial X}{\partial q}(e_2) = \alpha X_u(q) + \beta X_v(q) = 0.$$

Como  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$  são linearmente independentes, então  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ . Logo,  $\frac{\partial X}{\partial q}$  é injetora.

Sendo o produto vetorial  $X_u \times X_v$  linearmente independentes, temos que  $X_u \times X_v \neq (0, 0, 0)$ , como mostrado no Capítulo 1, então os determinantes menores de ordem 2 da matriz jacobiana deverão ter pelo menos um de seus valores diferentes de zero, ou seja,  $J(q)$  tem posto 2.  $\square$

**Exemplo 3.1.** Seja  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{8} - \frac{v^2}{4}\right)$ , é uma superfície parametrizada de um parabolóide hiperbólico, temos que,

$$X_u = \left(1, 0, \frac{u}{4}\right) \quad \text{e} \quad X_v = \left(0, 1, -\frac{v}{2}\right)$$

Então  $X$  é diferenciável. Logo,

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{u}{4} & -\frac{v}{2} \end{bmatrix},$$

tem posto 2, e então  $X_u \times X_v$  são linearmente independentes, pois  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ .

Portanto, a superfície  $X$  é regular.



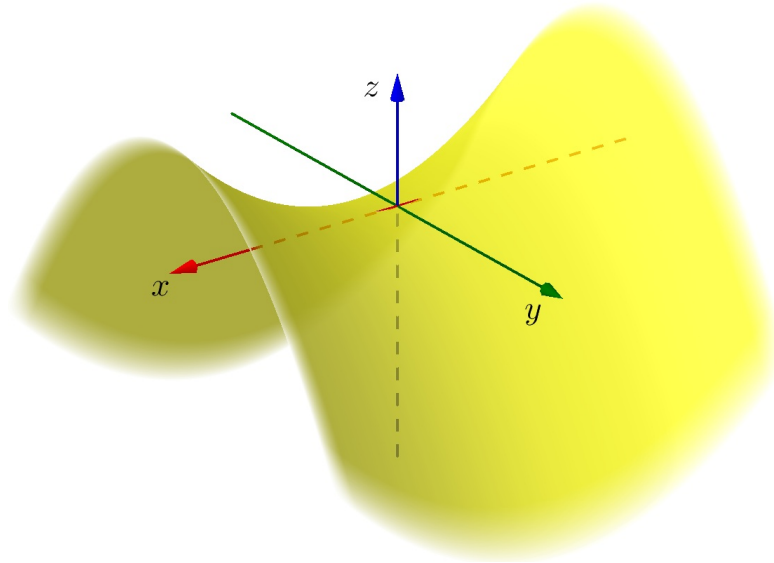


Figura 3.1: Parabolóide Hiperbólico:  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = z$

**Exemplo 3.2.** Consideremos a superfície  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{2}\right)$

é a forma parametrizada do parabolóide elíptico  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = z$ .

Temos  $X_u = \left(1, 0, \frac{u}{2}\right)$ ,  $X_v = (0, 1, v)$ , e então  $X$  é diferenciável.

Logo,  $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{u}{2} & v \end{bmatrix}$  e  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ . Portanto,  $X_u$  e  $X_v$  são linearmente independentes e então a superfície  $X$  é regular.

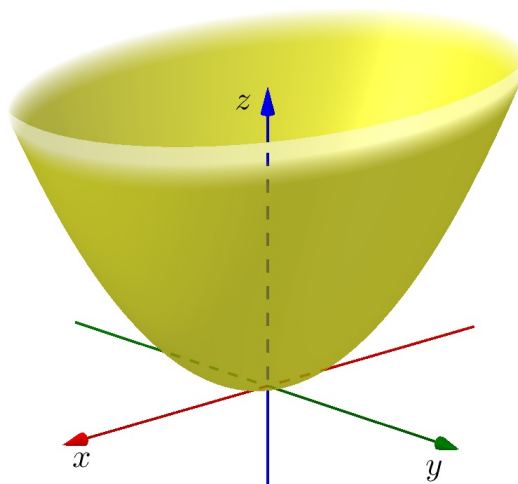


Figura 3.2: Parabolóide Elíptico:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = z$

**Exemplo 3.3.** Consideremos a aplicação  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $X(u, v) = (2\text{sen}v \cos u, 2\text{sen}v \text{sen}u, 2\cos v)$ , onde  $0 < v < \pi$  e  $0 \leq u \leq 2\pi$ .

Temos que,

$$\begin{aligned} X_u &= (-2\text{sen}v \text{sen}u, 2\text{sen}v \cos u, 0), \\ X_v &= (2\cos v \cos u, 2\cos v \text{sen}u, -2\text{sen}v) \end{aligned}$$

e então  $X$  é diferenciável.

Logo,

$$J = \begin{bmatrix} -2\text{sen}v \text{sen}u & 2\cos v \cos u \\ 2\text{sen}v \cos u & 2\cos v \text{sen}u \\ 0 & -2\text{sen}v \end{bmatrix}$$

e  $X_u \times X_v = (-4\text{sen}^2v \cos u, -4\text{sen}^2v \text{sen}u, -4\text{sen}v \cos v)$ .

Aplicando propriedades de vetores temos,

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\|^2 &= \langle X_u \times X_v, X_u \times X_v \rangle \\ &= \langle (-4\text{sen}^2v \cos u, -4\text{sen}^2v \text{sen}u, -4\text{sen}v \cos v), (-4\text{sen}^2v \cos u, -4\text{sen}^2v \text{sen}u, -4\text{sen}v \cos v) \rangle \\ &= 16\text{sen}^4v \cos^2u + 16\text{sen}^4v \text{sen}^2u + 16\text{sen}^2v \cos^2v \\ &= 16\text{sen}^4v (\cos^2u + \text{sen}^2u) + 16\text{sen}^2v \cos^2v \\ &= 16\text{sen}^4v + 16\text{sen}^2v \cos^2v \\ &= 16\text{sen}^2v (\text{sen}^2v + \cos^2v) \\ &= 16\text{sen}^2v. \end{aligned}$$

Então, os vetores  $X_u$  e  $X_v$  são linearmente independentes, pois  $v \in (0, \pi)$ , ou seja,  $X_u \times X_v = 16\text{sen}^2v \neq 0$ , onde teremos uma esfera de raio 2, exceto os dois polos.

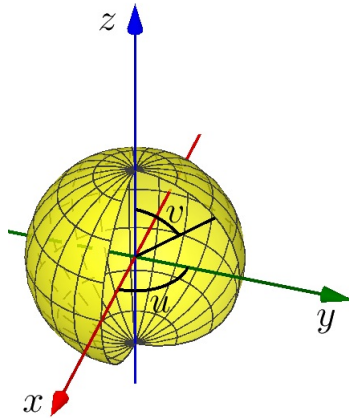


Figura 3.3: Esfera:  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

**Exemplo 3.4.** Considere a superfície  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $X(u, v) = (u, v, \sqrt{2u^2 + 2v^2})$  é a forma parametrizada do cone elíptico  $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ .

Temos,

$$X_u = \left(1, 0, \frac{2u}{\sqrt{2u^2 + 2v^2}}\right) \text{ e } X_v = \left(0, 1, \frac{2v}{\sqrt{2u^2 + 2v^2}}\right),$$

e então  $X$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ .

Logo, a superfície  $X$  não é regular em  $(0, 0)$ .

Podemos perceber pela figura a seguir que a superfície forma um "bico" na origem.

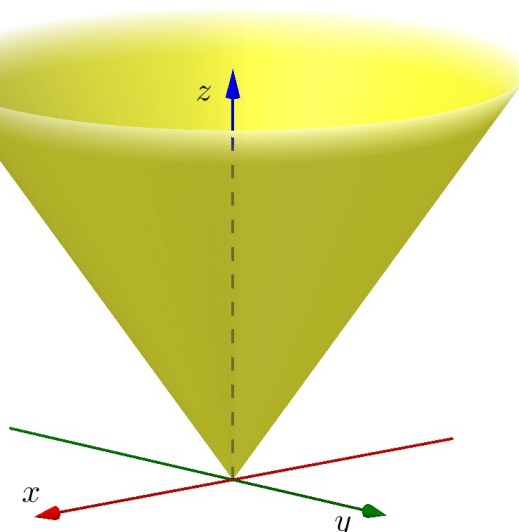


Figura 3.4: Cone Elíptico:  $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$

**Proposição 3.2.** Sejam  $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$  e  $u \in I \subset \mathbb{R}$ , uma curva regular tal que  $f(u) \neq 0$ .

Então,  $X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u))$ , onde  $u \in I$  e  $v \in \mathbb{R}$  é uma superfície parametrizada regular.

*Demonstração.* Como  $\alpha$  é diferenciável,  $X$  também é diferenciável, então  $X_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \operatorname{sen} v, g'(u))$  e  $X_v = (-f(u) \operatorname{sen} v, f(u) \cos v, 0)$ .

Como  $X_u$  e  $X_v$  são linearmente independentes, pois

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} f'(u) \operatorname{sen} v & g'(u) \\ f(u) \cos v & 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} f'(u) \cos v & g'(u) \\ -f(u) \operatorname{sen} v & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} f'(u) \cos v & f'(u) \operatorname{sen} v \\ -f(u) \operatorname{sen} v & f(u) \cos v \end{vmatrix} e_3 \\ &= (-g'(u)f(u) \cos v, -g'(u)f(u) \operatorname{sen} v, f'(u)f(u)) \text{ e então} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\|^2 &= \langle (X_u \times X_v), (X_u \times X_v) \rangle \\ &= (g'(u))^2 f^2(u) \cos^2 v + (g'(u))^2 f^2(u) \operatorname{sen}^2 v + (f'(u))^2 f^2(u) \\ &= (g'(u))^2 f^2(u) \cdot (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + (f'(u))^2 f^2(u) \\ &= (g'(u))^2 f^2(u) + (f'(u))^2 f^2(u) \\ &= f^2(u) \cdot [(g')^2(u) + (f')^2(u)] \neq 0, \end{aligned}$$

sendo  $\alpha$  uma curva regular e  $f \neq 0$ .

Logo, concluímos que  $X$  é uma superfície parametrizada regular.  $\square$

A aplicação  $X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u))$  é chamada de *superfície de revolução*, que obtemos quando fazemos a rotação de uma curva em torno de um dos eixos, e neste caso em torno do eixo  $z$ .

As curvas  $X(u_0, v)$  e  $X(u, v_0)$  são chamadas respectivamente meridianos e paralelos.

**Exemplo 3.5.** Seja  $X(u, v) = (2 \cos v, 2 \operatorname{sen} v, u)$  a superfície de um cilindro circular de raio 2, sendo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , onde  $X$  é obtida pela rotação da curva  $\alpha(u) = (2, 0, u)$  em torno do eixo  $z$ .

A curva  $\alpha$  representa uma reta contida no plano  $xz$ , paralela ao eixo  $z$  e quando rotacionada dá origem ao cilindro de raio 2.

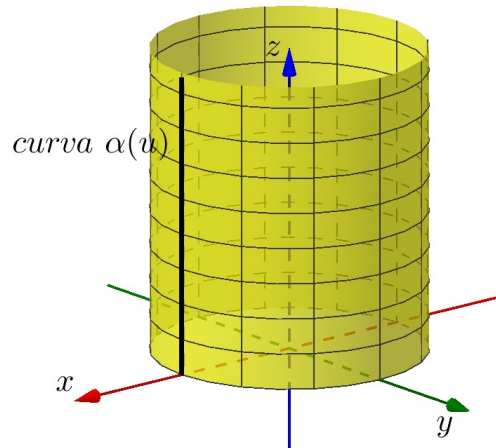


Figura 3.5: Superfície de revolução: Cilindro

**Exemplo 3.6.** Seja  $\alpha(u) = (4 + 2 \cos u, 0, 2 \sin u)$  uma circunferência de centro  $(4, 0, 0)$  e raio  $r = 2$  contida no plano  $xz$ .

Como  $f(u) = 4 + 2 \cos u$  e  $g(u) = 2 \sin u$ , então obtemos  $X(u, v) = ((4 + 2 \cos u) \cos v, (4 + 2 \cos u) \sin v, 2 \sin u)$  rotacionando a circunferência  $\alpha$  em torno do eixo  $z$ , que é o toro circular.

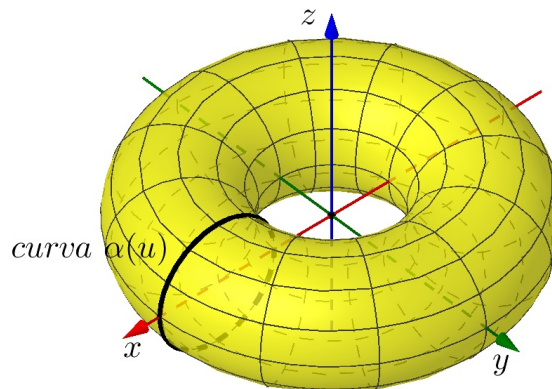


Figura 3.6: Superfície de revolução: Toro

## 3.2 Plano Tangente

Seja  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ , tal que  $t \in I \subset \mathbb{R}$  é uma curva diferenciável onde seu traço está contido em uma superfície  $X$ . Dizemos que o vetor  $w$  de  $\mathbb{R}^3$  é um vetor tangente a  $X$  em  $q = (u_0, v_0)$  se  $w = \alpha'(t_0)$ .

**Definição 3.2.** O plano tangente à  $X$  em  $(u_0, v_0)$  é o conjunto de todos os vetores tangentes à  $X$ , em que representaremos por  $P_q X$ , sendo  $q = (u_0, v_0)$ .

Na proposição a seguir veremos que o plano tangente é obtido pelo produto vetorial de  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$ .

**Proposição 3.3.** *Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e  $q = (u_0, v_0)$  um ponto de  $X$ , então o plano  $P_q X$  é o conjunto de vetores obtidos por  $X_u \times X_v$ .*

*Demonstração.* Sejam  $X_u = (a, b, c)$  e  $X_v = (d, e, f)$  vetores tangentes à superfície  $X$  no ponto  $q = (u_0, v_0)$ , tal que  $X_u$  e  $X_v$  não sejam colineares.

Temos,

$$w = X_u \times X_v = \left( \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right) = (bf - ce, cd - af, ae - bd).$$

Logo,  $w = (bf - ce, cd - af, ae - bd)$  é o vetor normal ao plano tangente à  $X$  no ponto  $q = (u_0, v_0)$ , pois como  $X_u$  e  $X_v$  estão contidos no plano, então

$$\langle w, X_u \rangle = \langle (bf - ce, cd - af, ae - bd), (a, b, c) \rangle = 0 \text{ e}$$

$$\langle w, X_v \rangle = \langle (bf - ce, cd - af, ae - bd), (d, e, f) \rangle = 0.$$

Portanto, os vetores  $X_u$  e  $X_v$  nos dão o vetor normal ao plano que é tangente à superfície em um ponto  $q = (u_0, v_0)$ .  $\square$

Definiremos o vetor normal unitário ao plano tangente e a um ponto  $q$  de  $X$  como o vetor  $N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v)$ .

**Exemplo 3.7.** Seja  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a superfície parametrizada de um parabolóide elíptico, tal que  $X(u, v) = (u, v, \frac{u^2}{8} + \frac{v^2}{2})$ .

$$\text{Temos, } X_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{u}{4}\right) \text{ e } X_v(u, v) = (0, 1, v).$$

Considerando o ponto  $q = (u_0, v_0) = (4, 1)$  pertencente à superfície, então,  $X_u(4, 1) = (1, 0, 1)$  e  $X_v(4, 1) = (0, 1, 1)$ .

Logo, o vetor  $w$  normal ao plano tangente à  $X$  é

$$w = X_u \times X_v = \left( \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 1).$$

Sendo o ponto  $P = \left(4, 1, \frac{5}{2}\right)$  pertencente ao plano tangente, então sua equação é  $2x + 2y - 2z = 5$ , onde o vetor normal é  $w = (-1, -1, 1)$ .

Temos ainda que o vetor normal unitário é

$$N(4, 1) = \frac{(-1, -1, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

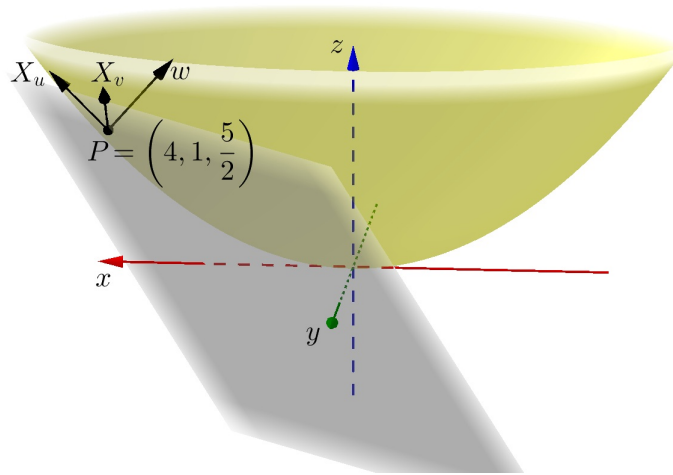


Figura 3.7: Plano tangente ao parabolóide elíptico

**Exemplo 3.8.** Seja  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a superfície parametrizada do elipsóide  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ , tal que  $X(u, v) = \left( u, v, \frac{\sqrt{4 - (u^2 + 2v^2)}}{2} \right)$  e  $u^2 + 2v^2 < 4$ .

Temos  $X_u = \left( 1, 0, -\frac{u}{2\sqrt{4 - (u^2 + 2v^2)}} \right)$  e  $X_v = \left( 0, 1, -\frac{v}{\sqrt{4 - (u^2 + 2v^2)}} \right)$ .

Tomando um ponto  $q = (0, 0)$ , então  $X_u = (1, 0, 0)$  e  $X_v = (0, 1, 0)$ .

Logo,  $w = X_u \times X_v = \left( \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1)$ , é o vetor normal ao plano tangente.

Como o ponto  $(0, 0, 1)$  pertence ao plano tangente, sua equação é  $z = 1$  e ainda seu vetor unitário é  $N(0, 0) = (0, 0, 1)$ .

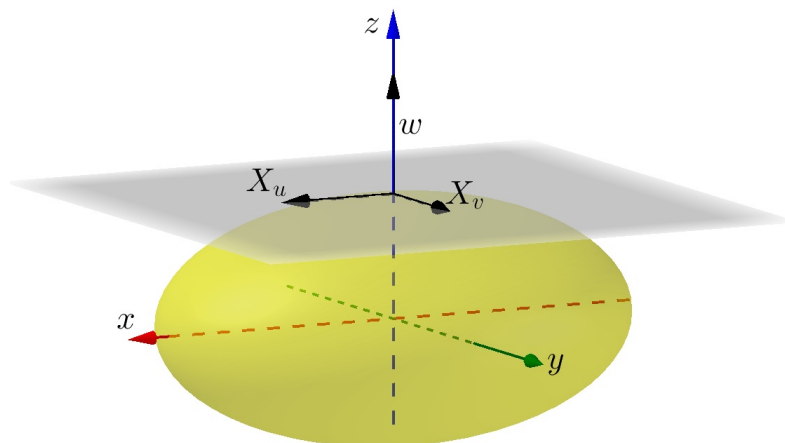


Figura 3.8: Plano tangente ao elipsóide

### 3.3 Primeira Forma Quadrática

**Definição 3.3.** *Seja  $X : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Para qualquer  $q \in U$ , a aplicação  $Iq : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $w \rightarrow Iq(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$  é denominada a primeira forma quadrática de  $X$  em  $q$ .*

Sejam  $X(u, v)$  uma superfície e  $q = (u_0, v_0)$  um ponto, então, um vetor  $w \in P_q X$  é da forma  $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$ , sendo  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Logo, como  $Iq = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$ , temos  $Iq = (aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0))^2$  e então,  $Iq(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0)$ .

Faremos as seguintes representações,

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) \text{ e}$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0).$$

Desse modo, temos  $Iq(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0)$ , que é a primeira forma quadrática, sendo  $E(q)$  e  $G(q) > 0$ , pois  $X_u$  e  $X_v$  não são nulos.

**Exemplo 3.9.** Sejam  $X(u, v) = (4 \cos u, 4 \sin u, v)$  uma superfície parametrizada e  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

Temos,  $X_u = (-4 \sin u, 4 \cos u, 0)$  e  $X_v = (0, 0, 1)$ .

Então,

$$E = \langle (-4 \sin u, 4 \cos u, 0), (-4 \sin u, 4 \cos u, 0) \rangle \\ = 16 \sin^2 u + 16 \cos^2 u = 16 \cdot (\sin^2 u + \cos^2 u) = 16,$$

$$F = \langle (-4 \sin u, 4 \cos u, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0 \text{ e}$$

$$G = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1.$$

Portanto, a forma quadrática é dada por  $Iq(w) = 16a^2 + b^2$ .

**Exemplo 3.10.** Seja  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a superfície parametrizada de um parabolóide hiperbólico, tal que  $X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{2}\right)$ .

Temos  $X_u = \left(1, 0, \frac{u}{2}\right)$  e  $X_v = (0, 1, -v)$ .

Logo,

$$E = \left\langle \left(1, 0, \frac{u}{2}\right), \left(1, 0, \frac{u}{2}\right) \right\rangle = 1 + \frac{u^2}{4},$$

$$F = \left\langle \left(1, 0, \frac{u}{2}\right), (0, 1, -v) \right\rangle = -\frac{uv}{2},$$

$$G = \langle (0, 1, -v), (0, 1, -v) \rangle = 1 + v^2.$$

Portanto, a forma quadrática é dada por

$$Iq(w) = \left(1 + \frac{u^2}{4}\right) a^2 + 2 \left(-\frac{uv}{2}\right) ab + (1 + v^2) b^2.$$

### 3.4 Mudança de Parâmetros

Podemos parametrizar uma superfície de várias maneiras, de modo que possuam o mesmo traço, como por exemplo, o hiperbolóide  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ , que podemos

parametrizar como  $X(u, v) = (u + v, u - v, \sqrt{1 - 4uv})$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , sendo  $4uv < 1$ , ou  $Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, \sqrt{1 - \bar{u}^2 + \bar{v}^2})$ ,  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2$ , sendo  $\bar{u}^2 < 1 + \bar{v}^2$ .

A proposição a seguir, nos mostra que localmente toda superfície pode ser reparametrizada, de modo que seu gráfico represente uma função diferenciável.

**Proposição 3.4.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Para cada  $(u_0, v_0) \in U$ , existe um aberto  $V$ ,  $(u_0, v_0) \in V \subset U$  e uma mudança de parâmetros  $h : \bar{U} \rightarrow V$ , tal que o traço de  $Y = X \circ h$  é o gráfico de uma função diferenciável.*

*Demonstração.* Considerando  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , e suponhamos que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida por  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , então pelo teorema da função inversa, existe um aberto  $V$ , com  $(u_0, v_0) \in V \subset U$ , tal que  $F$  restrita a  $V$  possui inversa  $F^{-1}$  diferenciável.

Sejam  $\bar{U} = F(V)$  e  $h : \bar{V} \rightarrow V$  a inversa de  $F$ , então temos que mostrar que  $Y = X \circ h$  representa o gráfico de uma função diferenciável.

$$\begin{aligned} \text{Se } (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}, \text{ temos } Y(\bar{u}, \bar{v}) &= (x \circ h(\bar{u}, \bar{v}), y \circ h(\bar{u}, \bar{v}), z \circ h(\bar{u}, \bar{v})) \\ &= (F \circ h(\bar{u}, \bar{v}), z \circ h(\bar{u}, \bar{v})). \end{aligned}$$

Como  $h = F^{-1}$ , ou seja,  $h$  é inversa de  $F$ , então,  $Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, z \circ h(\bar{u}, \bar{v}))$ .

Portanto  $Y$  descreve o gráfico da função diferenciável  $z \circ h$ .

□

**Exemplo 3.11.** Sejam  $X(u, v) = (u + v, u - v, 8uv)$ , sendo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  e  $Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, 2\bar{u} - 2\bar{v})$ ,  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}$ . Vamos mostrar que  $Y$  é uma reparametrização de  $X$ .

*Solução*

Temos que  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  e  $Y(\bar{u}, \bar{v}) = X \circ h(\bar{u}, \bar{v})$ .

Então,  $Y(\bar{u}, \bar{v}) = X(h(\bar{u}, \bar{v}))$

$$\implies (\bar{u}, \bar{v}, 2\bar{u} - 2\bar{v}) = X(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$$

$$\implies (\bar{u}, \bar{v}, 2\bar{u} - 2\bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}) + v(\bar{u}, \bar{v}), u(\bar{u}, \bar{v}) - v(\bar{u}, \bar{v}), 8u(\bar{u}, \bar{v})v(\bar{u}, \bar{v})).$$

Logo,

$$\begin{cases} \bar{u} = u + v \\ \bar{v} = u - v \\ 2\bar{u} - 2\bar{v} = 8uv \end{cases}, \text{ então } u = \frac{\bar{u} + \bar{v}}{2} \text{ e } v = \frac{\bar{u} - \bar{v}}{2}.$$

Temos,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = \left( \frac{\bar{u} + \bar{v}}{2}, \frac{\bar{u} - \bar{v}}{2} \right)$  e  $\frac{\partial h}{\partial \bar{u}} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  e  $\frac{\partial h}{\partial \bar{v}} = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ .

$$\text{Então, } J(h) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

Portanto, podemos concluir que  $Y$  é uma reparametrização de  $X$ .



### 3.5 Orientação de Superfícies

Se escolhermos um ponto  $q \in X$ , sendo  $X$  uma superfície regular, de modo que na interseção de quaisquer duas vizinhanças as orientações coincidam, então dizemos que  $X$  é orientável.

**Definição 3.4.** *Uma superfície regular é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de modo que se um ponto  $q \in X$  pertence a duas vizinhanças, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em  $q$ . Se não for possível escolher tal família, então a superfície é não-orientável.*

**Proposição 3.5.** *Uma superfície regular  $X \subset \mathbb{R}^3$  é orientável se, e somente se, existir um campo diferencial  $N : X \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vetores normais em  $X$ .*

*Demonstração.* Se  $X$  é orientável, então podemos cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de modo que na interseção de duas delas, a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo.

Seja  $q = X(u, v)$ , pontos de cada vizinhança coordenada, definimos

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|},$$

e se  $q$  pertence a duas vizinhanças coordenadas com parâmetros  $(u, v)$  e  $(\bar{u}, \bar{v})$ , os vetores normais  $N(u, v)$  e  $N(\bar{u}, \bar{v})$  coincidem, pois

$$Y_u \times Y_v = (X_u \times X_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})},$$

onde  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$  é o Jacobiano da mudança de coordenadas.

Temos que  $N : X \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável e seja  $N$  um campo diferenciável de vetores normais em  $X$  e considerando uma família de coordenadas conexas cobrindo  $X$ , para os pontos  $q = X(u, v)$  de cada vizinhança coordenada  $X(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^3$ , é possível pela continuidade de  $N$  fazermos que  $N(q) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$ .

Então, temos o produto interno  $\langle N(q), \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \rangle = f(q) = \pm 1$ , que é uma função contínua em  $X(U)$ . Como  $X(U)$  é conexo, o sinal de  $f$  é constante.

Logo, procedendo desse modo com todas as vizinhanças coordenadas, teremos na interseção em  $X(u, v)$  e  $Y(\bar{u}, \bar{v})$ , o Jacobiano positivo, pois se não teríamos

$$\frac{Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}}}{\|Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}}\|} = N(p) = -\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = -N(p), \text{ o que é uma contradição.}$$

Podemos concluir que a família de vizinhanças satisfaz a definição 3.4 e então a superfície  $X$  é orientável. □

## 4 Pontos Críticos

Neste capítulo mostraremos como determinar os pontos críticos de uma função com duas variáveis reais e classificá-los em ponto de mínimo, ponto de máximo ou ponto de sela. Para isso faremos uso de um conceito muito importante, a matriz Hessiana.

Falaremos sobre os pontos críticos de uma superfície e as funções de Morse, sendo abordados os pontos críticos não degenerados e ainda como se comporta uma função na vizinhança de um ponto crítico.

### 4.1 Máximos e Mínimos

**Definição 4.1.** Dada uma função  $z = f(x, y)$ , um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  é chamado de

- (a) um **ponto de máximo local** relativo de  $f$  se existir uma bola aberta tal que  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  para todo  $(x, y) \in D_f$ . O valor de  $f(P_0)$  é chamado de **valor máximo local** de  $f$ .
- (b) um **ponto de mínimo local** relativo de  $f$  se existir uma bola aberta tal que  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$  para todo  $(x, y) \in D_f$ . O valor de  $f(P_0)$  é chamado de **valor mínimo local** de  $f$ .

Se a condição  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  valer para todos os pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$ , então  $P_0$  é chamado *ponto de máximo absoluto* de  $f$  e  $f(x_0, y_0)$  de *valor máximo absoluto* de  $f$ . Se a condição  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$  valer para todos os pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$ , então  $P_0$  é chamado de *ponto de mínimo absoluto* de  $f$  e  $f(x_0, y_0)$  de *valor mínimo absoluto* de  $f$ .

**Definição 4.2.** Um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  é chamado *ponto crítico* de  $f$  se as derivadas parciais satisfazem  $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$ , ou então, se alguma delas não existir.

Dizemos que uma função é *diferenciável de classe  $C^r$*  se existir todas as derivadas parciais de ordem até  $r$  e sendo todas elas contínuas. Se uma função é de classe  $C^2$ , então ela é diferenciável até segunda ordem, sendo todas elas contínuas.

**Definição 4.3.** Seja  $f$  de classe  $C^2$ . A função  $H$  dada por

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

denomina-se hessiano de  $f$ .

Sendo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ , pelo Teorema de Schwarz, então,

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right]^2.$$

**Teorema 4.1.** *Sejam  $f$  de classe  $C^2$  e  $(x_0, y_0)$  um ponto interior  $D_f$ . Suponhamos que  $(x_0, y_0)$  seja ponto crítico de  $f$ . Então:*

- (a) *Se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$  e  $H(x_0, y_0) > 0$ , então  $(x_0, y_0)$  será **ponto de mínimo local** de  $f$ .*
- (b) *Se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$  e  $H(x_0, y_0) > 0$ , então  $(x_0, y_0)$  será **ponto de máximo local** de  $f$ .*
- (c) *Se  $H(x_0, y_0) < 0$ , então  $(x_0, y_0)$  não será extremante local. Neste caso  $(x_0, y_0)$  será **ponto de sela**.*
- (d) *Se  $H(x_0, y_0) = 0$ , nada se pode afirmar.*

Primeiramente vamos demonstrar o item (c), mas antes daremos uma prova de que existem pelo menos dois pontos distintos para uma função na forma quadrática, em que o resultado tem sinais opostos. Este fato é muito importante para os demais casos.

*Demonstração.* Considerando a forma quadrática  $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ , mostremos que se  $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0$ , então existem  $(h_1, k_1)$  e  $(h_2, k_2)$  tais que  $Q(h_1, k_1) < 0$  e  $Q(h_2, k_2) > 0$ .

Para  $a = 0$  e  $b \neq 0$ , temos  $Q(h, k) = k \cdot (2bh + ck)$ . Então existe um  $n \in \mathbb{R}$  tal que  $Q(n, 1)$  e  $Q(n, -1)$  terão sinais contrários, ou seja,  $Q(n, 1) = 1 \cdot (2bn + c) = 2bn + c$  e  $Q(n, -1) = -1 \cdot (2bn - c) = -2bn + c$ . Se  $bn > \frac{c}{2}$ , teremos valores diferentes para  $Q$ , sendo um positivo e outro negativo.

Para  $a \neq 0$ , podemos representar  $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$  como

$$Q(h, k) = a \cdot \left( h + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a} \cdot k^2.$$

Basta colocar  $a$  em evidência e fazer o completamento de quadrados, ou seja,

$$Q(h, k) = a \cdot \left( h^2 + \frac{2bhk}{a} + \frac{ck^2}{a} \right) = a \cdot \left[ h^2 + \frac{2bhk}{a} + \left( \frac{bk}{a} \right)^2 - \left( \frac{bk}{a} \right)^2 + \frac{ck^2}{a} \right]$$

$$= a \cdot \left[ \left( h + \frac{bk}{a} \right)^2 + \frac{(ac - b^2)}{a^2} \cdot k^2 \right] = a \cdot \left( h + \frac{bk}{a} \right)^2 + a \cdot \frac{(ac - b^2)}{a^2} \cdot k^2.$$

Como  $ac - b^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ , então temos  $Q(h, k) = a \cdot \left( h + \frac{bk}{a} \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a} \cdot k^2$ .

Podemos tomar  $Q(1, 0)$  e  $Q\left(\frac{b}{a}, -1\right)$ , que obteremos sinais contrários, ou seja,

$$Q(1, 0) = a \cdot \left( 1 + \frac{b \cdot 0}{a} \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a} \cdot 0^2 = a$$

e

$$Q\left(\frac{b}{a}, -1\right) = a \cdot \left( \frac{b}{a} + \frac{b \cdot (-1)}{a} \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \cdot (-1)^2}{a} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a}.$$

Logo, o valor de  $Q(1, 0)$  e  $Q\left(\frac{b}{a}, -1\right)$  terão sinais contrários, pois por hipótese

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0.$$

(c) Seja  $f$  de classe  $C^2$  no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e sejam  $(x_0, y_0) \in A$  e  $(h, k) \neq (0, 0)$ , tal que o segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$ , esteja contido em  $A$ . Consideremos a função  $g$  dada por  $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ , onde  $x = x_0 + ht$  e  $y = y_0 + kt$ .

Temos pela regra da cadeia que,

$$g'(t) = \frac{d}{dt}[f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot k.$$

Calculando a segunda derivada, ou seja,  $g''(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] h + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] k$ , temos,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}$$

e

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} g''(t) &= \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot h + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \cdot k \right] \cdot h + \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \cdot h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \cdot k \right] \cdot k \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \cdot k^2. \end{aligned}$$

Como pelo teorema de Schwarz,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ , então

$$g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \cdot k^2.$$

Comparando  $g''(t)$  com  $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ , temos  $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ ,  
 $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$  e  $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ , ou seja,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Logo, existem  $(h_1, k_1)$  e  $(h_2, k_2)$  tais que  $g''(0) < 0$  e  $g''(0) > 0$ . Então,  $t = 0$  é ponto de máximo e também ponto de mínimo de  $g''(t)$ .

Portanto,  $(x_0, y_0)$  não é extremo local, sendo então, um ponto de sela da função  $f$ .

(a) Dada a função  $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ ,  $t \in [0, 1]$ , onde  $x = x_0 + ht$  e  $y = y_0 + kt$ , pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, temos,

$$g(t) = g(t_0) + g'(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{g''(\bar{t})}{2} \cdot (t - t_0)^2, \text{ onde } \bar{t} \text{ está em } ]0, 1[.$$

Na função  $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ , temos  $g(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$  e  $g(0) = f(x_0, y_0)$ . Temos ainda que,

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k$$

e

$$g''(\bar{t}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})k^2,$$

onde  $\bar{x} = x_0 + h\bar{t}$  e  $\bar{y} = y_0 + k\bar{t}$ .

Podemos verificar que  $(\bar{x}, \bar{y})$  é um ponto interno ao segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$ , pois  $\bar{t} \in ]0, 1[$ . A figura a seguir nos mostra o ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$  e suas extremidades.

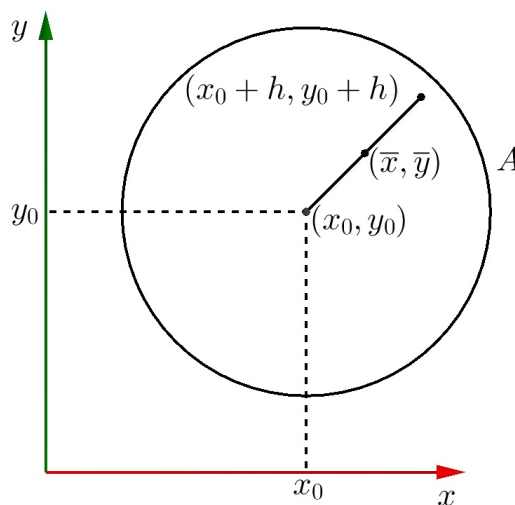


Figura 4.1:  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ao segmento

Substituindo os valores na equação  $g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(\bar{t})}{2}$ , temos,  
 $f(x_0 + h, y_0 + k) =$   
 $f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot k^2 \right].$

Como  $(x_0, y_0)$  é ponto crítico, temos  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ , então

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot k^2 \right].$$

Como  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$  e  $H(x, y) > 0$ , então temos  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) > 0$  e  $H(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ , pois  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ , e para todo  $(h, k) \neq 0$ , como demonstrado anteriormente temos que,

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot k^2 \right] > 0.$$

Logo,  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0$  e então  $f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0)$  para todo  $(x, y) \in A$ , com  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ .

Portanto,  $(x_0, y_0)$  é um ponto de mínimo local de  $f$ .

(b) De modo análogo, se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) < 0$  e  $H(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ , então teremos

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot k^2 \right] < 0.$$

Logo,  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < 0$  e então  $f(x_0 + h, y_0 + k) < f(x_0, y_0)$ , ou seja,  $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ .

Portanto,  $(x_0, y_0)$  é um ponto de máximo de  $f$ .

(d) Neste caso o teste do determinante é inconclusivo pois mesmo  $H(x_0, y_0) = 0$  poderemos ter um ponto de máximo, de mínimo ou de sela. Veremos no exemplo 4.2 uma situação que mostra este fato.  $\square$

Apresentamos alguns exemplos, sendo o 4.2, de uma função em que o determinante hessiano é zero, mas apesar disso conseguimos classificar o ponto crítico analisando a função e também verificando o seu gráfico.

**Exemplo 4.1.** A função  $f(x, y) = 3x^2 - 4y^2$  possui um ponto de sela.

*Solução*

Primeiro determinamos as derivadas parciais, ou seja,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = -8y$ .

As derivadas se anulam somente para  $x = 0$  e  $y = 0$ . Então o único ponto crítico é o ponto  $P_0 = (0, 0)$ .

Classificando o ponto  $P_0 = (0, 0)$  temos,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8.$$

Então,  $H(0,0) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -48$ . Como  $H(0,0) = -48 < 0$ , então o ponto  $P_0 = (0,0)$  nos fornece um ponto de sela.

Sendo  $(x, y, z)$  as coordenadas de um ponto em  $\mathbb{R}^3$  e substituindo os valores de  $P_0 = (0,0)$  na função  $f$ , teremos o ponto de sela da superfície em  $P = (0,0,0)$ .

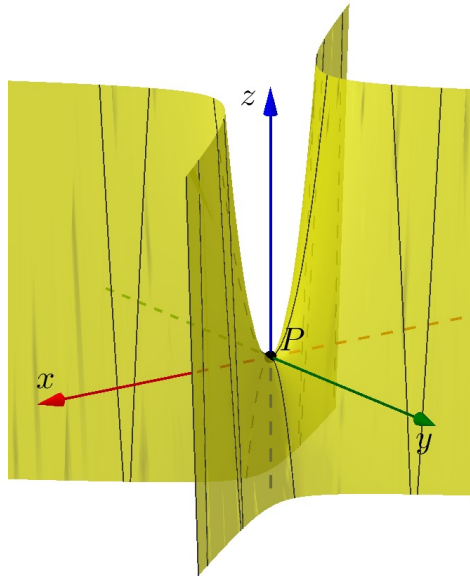


Figura 4.2:  $f(x, y) = 3x^2 - 4y^2$

**Exemplo 4.2.** Vamos determinar e classificar os pontos críticos da função  $f(x, y) = x^4 + y^4$ .

*Solução*

$$\text{Temos } \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3.$$

Podemos perceber que as derivadas se anulam em  $x = 0$  e  $y = 0$ , ou seja, o ponto crítico é  $P_0 = (0,0)$

As derivadas parciais de segunda ordem são,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2.$$

$$\text{Então } H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nesse caso não conseguimos classificar o ponto  $P_0 = (0,0)$  através do determinante hessiano. Porém, podemos perceber que a função  $f(x, y) = x^4 + y^4$ , admite para  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}$  somente valores não negativos, ou seja,  $f(x, y) \geq 0$ .

Logo,  $P_0 = (0, 0)$  nos fornece um ponto de mínimo, pois será o menor valor possível da função e então o ponto  $P = (0, 0, 0)$  é um ponto de mínimo da superfície. Podemos verificar também que isso ocorre pela figura a seguir.

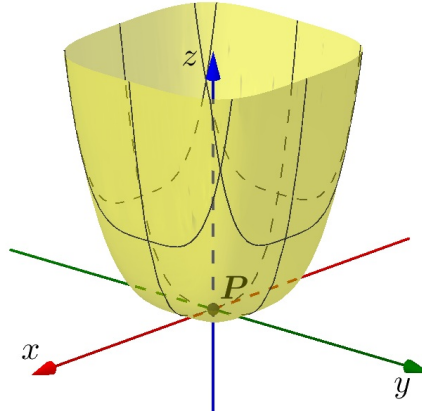


Figura 4.3:  $f(x, y) = x^4 + y^4$

**Exemplo 4.3.** A função  $f(x, y) = -4x^2 + 2xy - y^2$  possui um ponto de máximo.

*Solução*

$$\text{Temos } \frac{\partial f}{\partial x} = -8x + 2y \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y.$$

$$\text{No sistema } \begin{cases} -8x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}, \text{ temos } x = 0.$$

Substituindo  $x = 0$  na primeira equação, temos  $y = 0$ . Então  $P_0 = (0, 0)$  é o único ponto crítico da função.

Calculando as derivadas parciais de segunda ordem temos,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -8; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2.$$

Verificando o determinante hessiano para  $P_0 = (0, 0)$ , temos

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12. \text{ Como } H(0, 0) = 12 > 0 \text{ e}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -8 < 0$ ,  $P_0 = (0, 0)$  fornece um ponto de máximo local e então  $P = (0, 0, 0)$  é um ponto de máximo local da superfície.



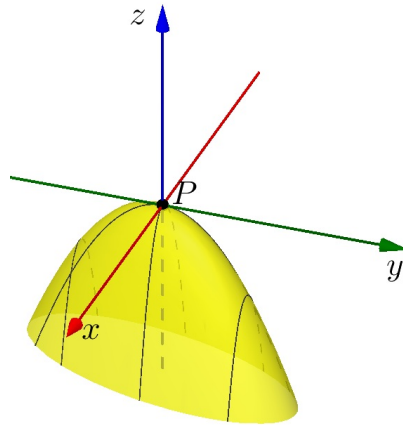


Figura 4.4:  $f(x, y) = -4x^2 + 2xy - y^2$

**Exemplo 4.4.** A função  $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2$  possui um ponto de mínimo.

*Solução*

Temos  $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 3y$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 4y$ .

Devemos ter 
$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 4y = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos  $x = 0$  e  $y = 0$ , ou seja, temos um ponto crítico  $P_0 = (0, 0)$ .

Para classificar o ponto crítico, vamos determinar as derivadas parciais de segunda ordem, ou seja,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$ .

Calculando o determinante hessiano, temos  $H(0, 0) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 9 = 7$ .

Como  $H(0, 0) = 7 > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 4 > 0$ ,  $P_0 = (0, 0)$  nos fornece um ponto de mínimo local e então o ponto  $P = (0, 0, 0)$  é um ponto de mínimo da superfície.

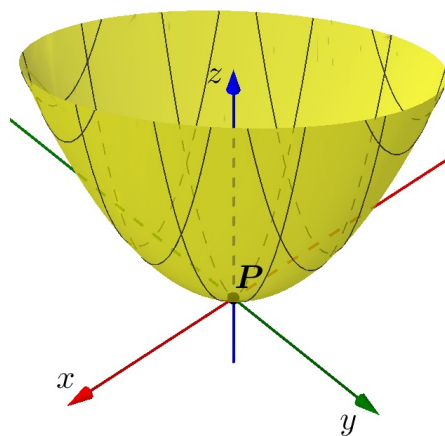


Figura 4.5:  $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2$

## 4.2 As Funções de Morse

Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$ , ou seja, uma função que possui derivadas de todas as ordens, sendo todas contínuas. Dizemos que um ponto  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  é um ponto crítico de  $f$  se as derivadas parciais de  $f$  em  $p_0$  for igual a zero.

**Definição 4.4.** *Sejam  $X$  uma superfície e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Se  $p_0 \in X$  é um ponto crítico de  $f$ , então  $f'(p_0) = 0$ .*

Sendo  $X \subset \mathbb{R}^3$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , os pontos críticos de  $f$  são aqueles onde o plano tangente que passa por esses pontos é paralelo ao plano  $xy$ .

**Definição 4.5.** *Um ponto crítico  $p_0 \in X$  de uma função diferenciável  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é não degenerado se  $\det H(f)(p_0) \neq 0$ .*

**Exemplo 4.5.** Seja  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a superfície parametrizada do parabolóide elíptico  $2x^2 + 3y^2 = z$ , tal que  $X(u, v) = (u, v, 2u^2 + 3v^2)$ . Vamos mostrar que a função  $z \in X$  possui um ponto crítico não degenerado.

*Solução*

Sendo  $z(u, v) = 2u^2 + 3v^2$ , então temos  $\frac{\partial z}{\partial u} = 4u$  e  $\frac{\partial z}{\partial v} = 6v$ . As derivadas parciais de  $z$  se anulam no ponto  $(u, v) = (0, 0)$ , sendo o único ponto crítico.

As derivadas de segunda ordem são dadas por  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 4$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 6$  e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = 0.$$

Logo,  $H(0, 0) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24$ .

Como  $H(0, 0) \neq 0$ , então temos que  $(u, v) = (0, 0)$  nos fornece um ponto de mínimo e quando substituimos na função  $z$  obtemos o ponto  $A = (0, 0, 0)$ .

Portanto, o ponto  $A = (0, 0, 0)$  é um ponto crítico não degenerado do parabolóide elíptico.

Vamos verificar no lema a seguir que toda função diferenciável em uma vizinhança de um ponto crítico não degenerado é localmente equivalente a um polinômio quadrático, onde os coeficientes são dados pela matriz Hessiana. Este lema é conhecido como *Lema de Morse*.

**Lema 4.1** (Lema de Morse). *Sejam  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável e  $p_0 \in X$  um ponto crítico não degenerado de  $f$ , então existe uma parametrização  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset X$ , tal que  $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  é semelhante à uma das seguintes formas:*

- (a)  $f \circ \varphi(x, y) = f(p_0) + x^2 + y^2$ ,
- (b)  $f \circ \varphi(x, y) = f(p_0) - x^2 - y^2$  ou
- (c)  $f \circ \varphi(x, y) = f(p_0) + x^2 - y^2$ .

*Demonstração.* Vamos supor sem perda de generalidade que o ponto crítico é  $p_0 = (0, 0)$ . Como  $p_0 = (0, 0)$  é um ponto crítico da função  $f$ , então devemos ter  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Fazendo o desenvolvimento da função  $f$  em série de Taylor até a 2ª ordem em torno de  $p_0 = (0, 0)$  temos,

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot (x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot (y - 0) + \frac{1}{2!} \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \cdot (x - 0)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \cdot (xy - 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \cdot (y - 0)^2 \right) + g(x, y),$$

sendo  $g(x, y)$  os termos de ordem superior no desenvolvimento.

Temos,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$  e representando,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = a, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = b \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = c,$$

podemos escrever,

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{2} \cdot (ax^2 + 2bxy + cy^2) + g(x, y).$$

Percebe-se que como  $f$  é de classe  $C^2$ , então  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ .

Para  $p_0 = (0, 0)$ , teremos  $f(0, 0) = f(0, 0) + g(0, 0)$  e então  $g(0, 0) = 0$ . Temos ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) \implies \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) \implies \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0 \text{ e} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) &= \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Então,  $g$  e todas as suas derivadas de até 2ª ordem para  $(0, 0)$  é igual a 0.

Sendo  $p_0 = (0, 0)$  um ponto crítico não degenerado de  $f$ , então

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 \neq 0.$$

Fazendo o completamento de quadrados para a parte quadrática de  $f$ , temos:

Para  $a \neq 0$  temos,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a \cdot \left( x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \left( c - \frac{b^2}{a} \right) y^2. \quad (4.1)$$

Para  $c \neq 0$  temos,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = c \cdot \left( y + \frac{b}{c}x \right)^2 + \left( a - \frac{b^2}{c} \right) x^2. \quad (4.2)$$

Se  $a = c = 0$ , então  $b \neq 0$  e assim  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 2bxy = \frac{b}{2} \cdot [(x+y)^2 - (x-y)^2]$ .

Se  $a \neq 0$ , fazemos a mudança de coordenadas, ou seja,  $X^2 = a \cdot \left( x + \frac{b}{a}y \right)^2$  e  $Y^2 = \left( c - \frac{b^2}{a} \right) y^2$ , sendo  $c - \frac{b^2}{a} > 0$ , e então a parte quadrática de  $f$  pode ser representada por  $\pm X^2 \pm Y^2$ .

Para os casos em que  $c \neq 0$  e  $b \neq 0$ , obtemos fórmulas semelhantes.

Logo, podemos dizer que existe uma mudança de coordenadas  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2$ , tal que  $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  tem a forma  $(x, y) \mapsto d \pm x^2 \pm y^2 + g(x, y)$ , sendo  $d = f(0, 0)$  e os sinais  $\pm$  ocorrem separadamente.

Se a função  $g = g_1x^2 + g_2y^2$ , de modo que  $g_1$  e  $g_2$  sejam funções definidas em uma vizinhança de  $(0, 0)$ , temos,

$$f \circ \varphi(x, y) = d \pm x^2 \pm y^2 + g(x, y)$$

$$f \circ \varphi(x, y) = d \pm x^2 \pm y^2 + g_1x^2 + g_2y^2$$

$$f \circ \varphi(x, y) = d \pm x^2(1 + g_1) \pm y^2(1 + g_2),$$

onde  $g_1$  e  $g_2$  se anulam em  $(0, 0)$ .

Tomando  $X^2 = (1 + g_1)x^2$  e  $Y^2 = (1 + g_2)y^2$ , obtemos que a aplicação  $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f \circ \varphi(x, y) = d \pm X^2 \pm Y^2$ .

Logo, sendo  $d = f(p_0)$ , e usando a mudança de coordenadas, obtemos,

$$f \circ \varphi(x, y) = f(p_0) + X^2 + Y^2,$$

$$f \circ \varphi(x, y) = f(p_0) - X^2 - Y^2 \text{ ou}$$

$$f \circ \varphi(x, y) = f(p_0) + X^2 - Y^2. \quad \square$$

Essas expressões são chamadas *formas canônicas da função  $f$* . A quantidade de sinais negativos de cada expressão é chamado de *índice do ponto  $p_0$* , sendo de índice 0, 1 ou 2, de acordo com  $f \circ \varphi(x, y) - f(p_0)$  seja igual à  $X^2 + Y^2$ ,  $X^2 - Y^2$  ou  $-X^2 - Y^2$ , respectivamente.

Teremos para cada índice um ponto crítico denominado de maneira diferente, sendo índice 0, ponto de mínimo; índice 1, ponto de sela; e índice 2, ponto de máximo.

As figuras à seguir representam cada uma das expressões de índices diferentes.

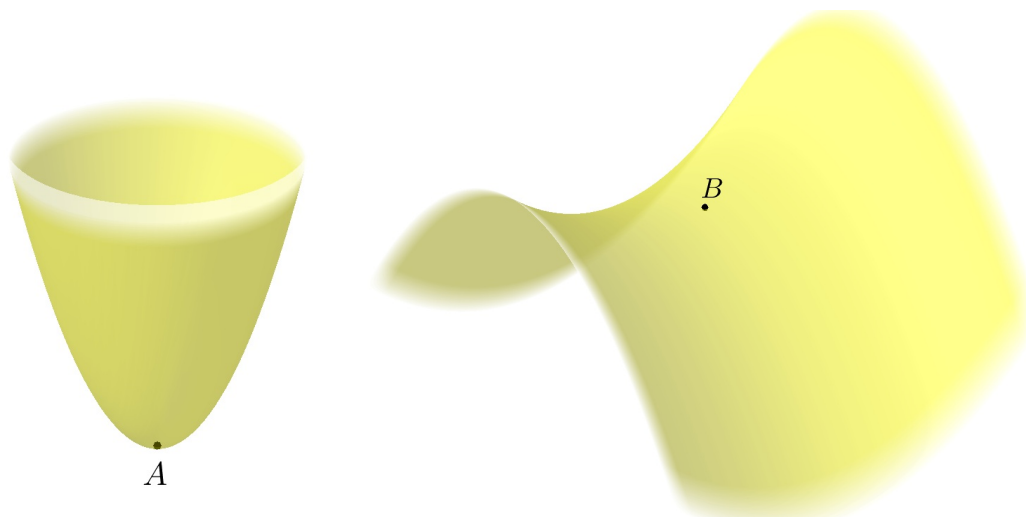


Figura 4.6: A é ponto de mínimo (índice 0) e B é ponto de sela (índice 1)



Figura 4.7:  $C$  é ponto de máximo (índice 2)

**Definição 4.6.** Uma função diferenciável  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita uma função de Morse se todos os seus pontos críticos são não degenerados.

**Exemplo 4.6.** Seja  $S$  um toro em  $\mathbb{R}^3$  obtido pela rotação de um círculo de raio  $r = 1$  e centro  $(4, 0, 0)$  em torno do eixo  $y$ . Vamos determinar seus pontos críticos, mostrando que são todos não degenerados e ainda faremos a classificação de cada um deles.

*Solução*

Seja  $S(u, v) = ((4 + \cos u) \cdot \cos v, \sin u, (4 + \cos u) \cdot \sin v)$  a superfície parametrizada do toro  $S$ . Os pontos críticos de  $S$  serão obtidos pela função  $z(u, v) = 4 \cos v + \cos u \cos v$ .

Temos,  $\frac{\partial z}{\partial u} = -\sin u \cos v$  e  $\frac{\partial z}{\partial v} = -4 \sin v - \sin v \cos u$  e então devemos ter  $-\sin u \cos v = 0$  e  $-4 \sin v - \sin v \cos u = 0$ . Isso ocorrerá se  $(u, v) = (0, 0)$ ,  $(u, v) = (\pi, 0)$ ,  $(u, v) = (\pi, \pi)$ , ou  $(u, v) = (0, \pi)$ .

Determinando as derivadas parciais de segunda ordem, temos  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = -\cos u \cos v$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = -4 \cos v - \cos v \cos u$  e  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \sin u \sin v$ .

Teremos quatro casos para analisar.

1º caso:  $(u, v) = (0, 0)$

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 5.$$

Nesse caso, como  $H(0, 0) = 5 > 0$  e  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = -1 < 0$ , então,  $(u, v) = (0, 0)$  nos fornece um ponto de máximo e substituindo em  $z$ , obtemos o ponto  $A = (0, 0, 5)$  que é um ponto de máximo da superfície  $S$ .

2º caso:  $(u, v) = (\pi, 0)$

$$H(\pi, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3.$$

Como  $H(\pi, 0) < 0$ , então o ponto  $B = (0, 0, 3)$  é um ponto de sela.

3º caso:  $(u, v) = (\pi, \pi)$

$$H(\pi, \pi) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

Como  $H(\pi, \pi) < 0$ , então o ponto  $C = (0, 0, -3)$  é um ponto de sela.

4º caso:  $(u, v) = (0, \pi)$

$$H(0, \pi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

Como  $H(0, \pi) > 0$  e  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} > 0$ , então obtemos o ponto de mínimo  $D = (0, 0, -5)$ .

Podemos fazer em cada caso uma mudança de coordenadas e obter um polinômio quadrático.

Para o 1º caso, temos  $z \circ \varphi - z(0, 0) = -u^2 - 5v^2$  e fazendo  $X^2 = u^2, Y^2 = 5v^2$ , então a forma quadrática fica  $z \circ \varphi - z(0, 0) = -X^2 - Y^2$ , sendo portanto de índice 2.

Para o 2º e 3º casos, as formas quadráticas são de índice 1 e para o 4º caso a forma quadrática é de índice 0.

Portanto, podemos concluir também que a função  $z : S \rightarrow \mathbb{R}$  é de Morse, pois todos os seus pontos críticos são não degenerados.

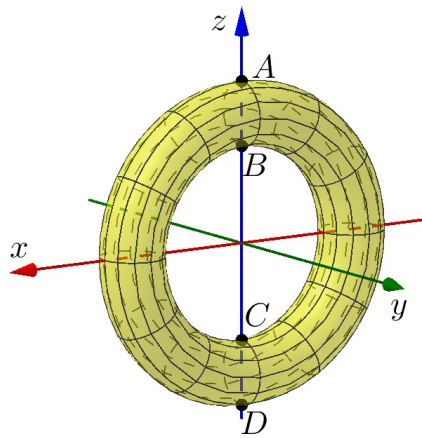


Figura 4.8: Toro S

**Exemplo 4.7.** Seja  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, tal que  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 3xy$  e sendo  $z = f(x, y)$ , vamos mostrar que a função é de Morse e classificar o ponto crítico.

*Solução*

Temos,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 + 3y$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 + 3x$ . As derivadas parciais se anulam para  $x = 0$  e  $y = 1$ .

As derivadas de segunda ordem são  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$ .

Logo,  $H(0, 1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$ .

Como  $H(0, 1) = -5$ , temos um ponto de sela. Substituindo  $(x, y) = (0, 1)$  em  $z = f(x, y)$ , obtemos o ponto  $P = (0, 1, -1)$ , que é ponto de sela da superfície  $S$ .

Escrevendo o polinômio  $h$  referente à matriz Hessiana, tal que  $h = 2x^2 + 2 \cdot 3xy + 2y^2$  e fazendo o completamento de quadrados de acordo com a equação (4.1), temos  $h = 2x^2 + 2 \cdot 3xy + 2y^2 = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \left(2 - \frac{9}{2}\right)y^2$  e assim

temos  $h = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5}{2}y^2$ .

Então,  $f \circ \varphi - f(0,1) = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5}{2}y^2$ . Fazendo  $X^2 = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2$  e  $Y^2 = \frac{5}{2}y^2$ , a forma quadrática fica  $f \circ \varphi - f(0,1) = X^2 - Y^2$  e logo esta forma quadrática é de índice 1.

Portanto, a função  $f$  é de Morse, tendo apenas um ponto crítico não degenerado, que é o ponto de sela  $P = (0,1,-1)$ .

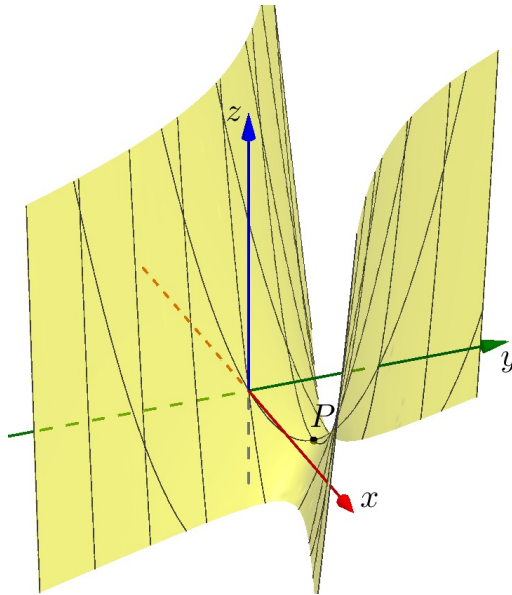


Figura 4.9: Superfície  $S$

**Exemplo 4.8.** Seja  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  a função de uma superfície  $Q$ , tal que  $f(x,y) = x^4 - y^4$  e  $z = f(x,y)$ , mostremos que  $f$  não é de Morse.

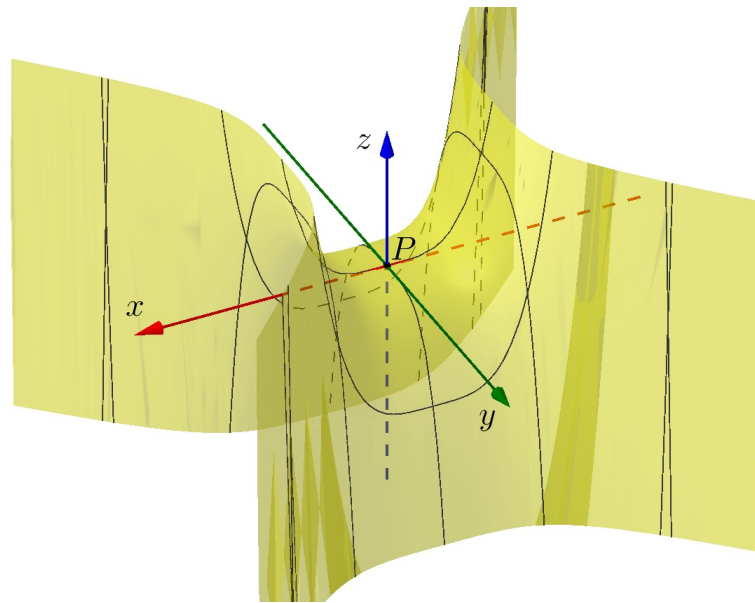
*Solução*

Temos,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = -4y^3$ . As derivadas parciais se anulam quando  $x = 0$  e  $y = 0$ .

Logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \text{ e então, } H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Portanto, apesar de  $P = (0,0,0)$  ser um ponto crítico, ele é degenerado, pois o determinante hessiano é nulo, ou seja,  $H(0,0) = 0$ . Então concluímos que a função  $f$  não é de Morse.

Figura 4.10: Superfície  $Q$



## 5 Aplicação na Sala de Aula

Neste capítulo, usaremos o conceito de derivada para funções polinomiais em uma variável, determinando os pontos críticos, quando houver, e fazendo a construção dos gráficos relacionados a cada função com o uso do geogebra. Esta abordagem está voltada à 3ª série do ensino médio.

Apresentamos também, algumas orientações para auxiliar o professor no uso do geogebra na construção dos gráficos.

### 5.1 Determinando Máximos e Mínimos com a Derivada

Sejam  $y = f(x)$  uma curva definida no intervalo  $(a, b)$ ,  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_1, y_1)$  dois pontos distintos dessa curva. Traçando uma reta  $s$  secante que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$ , podemos considerar o triângulo retângulo  $PRQ$  e então a inclinação da reta  $s$  é o seu coeficiente angular, ou seja,  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ , como podemos verificar na figura a seguir.

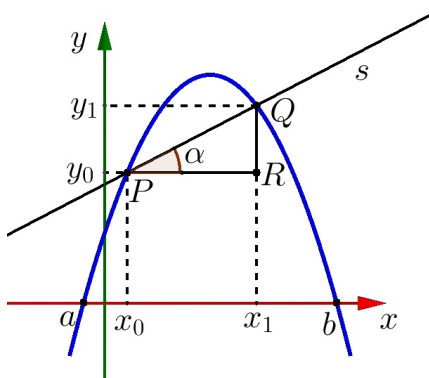


Figura 5.1: A reta  $s$  é secante à curva  $f$

Se fixarmos o ponto  $P$  e movermos o ponto  $Q$  sobre a curva  $f$  em direção à  $P$ , podemos perceber que quanto mais o ponto  $Q$  se aproxima de  $P$ , a inclinação da reta  $s$  varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante. Esse limite é a inclinação da reta tangente à curva no ponto  $P$ , como podemos ver na figura a seguir.

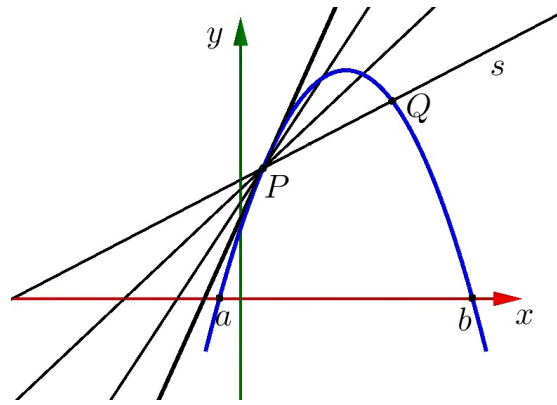


Figura 5.2: O ponto  $Q$  se aproxima de  $P$

**Definição 5.1.** *Sejam  $f$  uma função definida em um aberto  $I$  e  $x_0$  um elemento de  $I$ . Chamamos derivada de  $f$  no ponto  $x_0$ , o limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , se existir e for finito.*

Representaremos a derivada de uma função  $f$  por  $f'$ . Dado o polinômio  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , definimos a derivada de  $p(x)$  como sendo o polinômio  $p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$ .

Se  $c$  é uma constante e  $f(x) = c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então  $f'(x) = 0$ .

**Exemplo 5.1.** Vamos determinar a derivada de cada função polinomial a seguir.

- (a)  $p(x) = 2x^2 + 5$
- (b)  $p(x) = 5x^3 + 3x^2 + 8x + 7$
- (c)  $p(x) = x^4 + 2x^2 + x + 1$
- (d)  $p(x) = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 + 6x$
- (e)  $p(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3} - x^2 + \sqrt{3}x$

*Solução*

- (a)  $p'(x) = 4x$
- (b)  $p'(x) = 15x^2 + 6x + 8$
- (c)  $p'(x) = 4x^3 + 4x + 1$
- (d)  $p'(x) = 12x^5 - 15x^4 - 6x^2 + 14x + 6$
- (e)  $p'(x) = \frac{x^3}{2} + x^2 - 2x + \sqrt{3}$

**Definição 5.2.**

- (a) *Uma função  $f$  tem um máximo relativo em  $x_0$ , se existir um intervalo aberto  $I$ , tal que  $\forall x \in I \implies f(x) \leq f(x_0)$ . Então, o valor de  $f(x_0)$  é **máximo local de  $f$** .*
- (b) *Uma função  $f$  tem um mínimo relativo em  $x_0$ , se existir um intervalo aberto  $I$ , tal que  $\forall x \in I \implies f(x) \geq f(x_0)$ . Então, o valor de  $f(x_0)$  é **mínimo local de  $f$** .*

O teorema a seguir, conhecido como Teorema de Fermat, nos mostra que se  $x_0$  é um ponto de extremo local, então  $f'(x_0) = 0$ . Quando isso ocorre, a reta tangente ao ponto crítico é paralela ao eixo das abscissas, como mostra a figura a seguir.

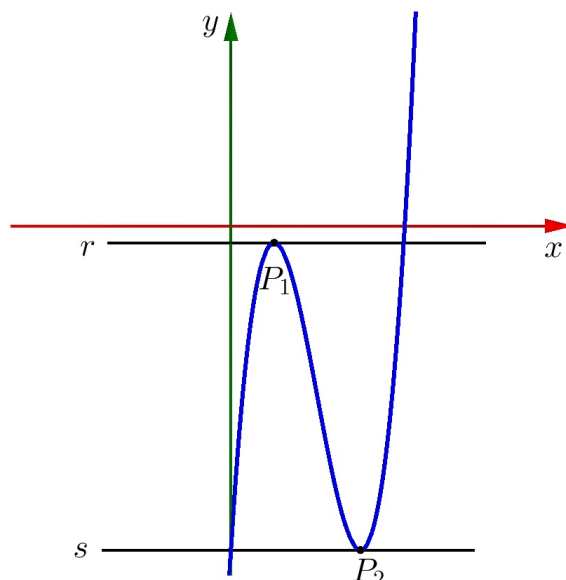


Figura 5.3:  $P_1$  é ponto de máximo local e  $P_2$  é ponto de mínimo local

**Teorema 5.1** (Teorema de Fermat). *Se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função derivável no ponto  $x_0 \in D$  e  $x_0$  é ponto de extremo local interior de  $f$ , então  $f'(x_0) = 0$ .*

*Demonstração.* Supondo que  $x_0$  é um ponto de mínimo local interior de  $f$ , então existe uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que, para todo  $x \in V$ , temos

$$f(x_0) \leq f(x) \implies \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ para } x < x_0; \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ para } x > x_0. \end{cases}$$

Se  $f$  é derivável em  $x_0$ , existe o limite e é finito, então  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ , que é igual aos limites laterais.

Logo,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0 \end{array} \right\} \implies f'(x_0) = 0$$

Para o caso em que  $x_0$  é ponto de máximo, temos

$$f(x_0) \geq f(x) \implies \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ para } x < x_0; \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ para } x > x_0. \end{cases}$$

Logo, se  $f$  é derivável em  $x_0$ , o limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$  e temos os limites laterais,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0 \end{array} \right\} \implies f'(x_0) = 0$$

Portanto, se  $x_0$  é ponto de extremo local,  $f'(x_0) = 0$ . □

**Observação:** A demonstração do teorema pode ser omitida para os alunos.

A seguir veremos alguns exemplos de aplicação da derivada para determinar os pontos críticos de uma função.

**Exemplo 5.2.** Dadas as funções polinomiais a seguir, vamos determinar os seus pontos críticos.

(a)  $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$

(b)  $f(x) = -5x^2 + 20x - 10$

(c)  $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$

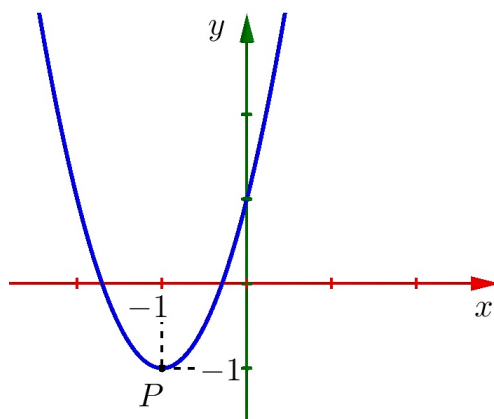
*Solução*

Devemos primeiramente derivar a função e em seguida determinar o valor de  $x$  para o qual a derivada se anula. Em seguida, substituímos o valor encontrado na função  $f$  e então determinamos o ponto crítico.

(a)  $f'(x) = 4x + 4$

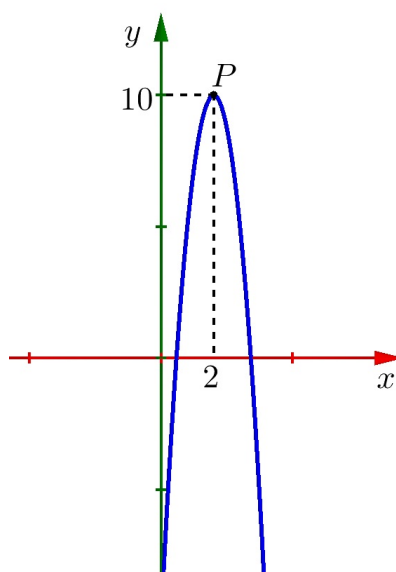
$$4x + 4 = 0 \implies x = -1$$

Logo,  $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1 = -1$ . Temos o ponto crítico  $P = (-1, -1)$  e como o gráfico da função é uma parábola de concavidade voltada para cima, então concluímos que o ponto  $P$  é de mínimo.

Figura 5.4:  $P$  é ponto de mínimo

$$(b) \quad f'(x) = -10x + 20 \\ -10x + 20 = 0 \implies x = 2$$

Logo,  $f(2) = -5 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 - 10 = 10$ . Temos o ponto crítico  $P = (2, 10)$  e como a concavidade da parábola está voltada para baixo, então o ponto  $P$  é de máximo.

Figura 5.5:  $P$  é ponto de máximo

$$(c) \quad f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$$

Para  $3x^2 + 4x + 1 = 0$ , temos  $x_1 = -\frac{1}{3}$  e  $x_2 = -1$ . Logo, para  $x_1 = -\frac{1}{3}$  obtemos  $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{85}{27}$ , sendo  $P_1 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{85}{27}\right)$  e para  $x_2 = -1$  obtemos  $f(-1) = -3$ , então  $P_2 = (-1, -3)$ .

Como a ordenada de  $P_1$  é menor que a ordenada de  $P_2$ , podemos concluir que  $P_1$  é ponto de mínimo local e  $P_2$  é ponto de máximo local.

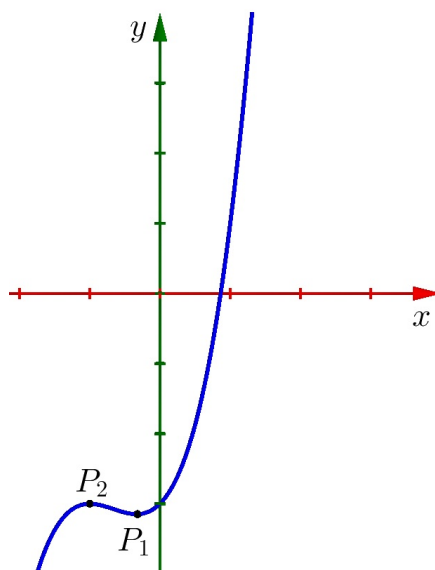


Figura 5.6:  $P_1$  é ponto de mínimo local e  $P_2$  é ponto de máximo local

**Exemplo 5.3.** Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R\$ 30,00 mais R\$ 1,00 por lugar vago. Vamos determinar o número de passageiros que deverão ir à excursão para que a empresa tenha o maior lucro possível.

*Solução*

Sendo  $x$  o número de lugares vagos e  $R(x)$  o valor arrecadado pela empresa em função dos lugares vagos, escrevemos a função  $R(x) = (x + 30) \cdot (40 - x)$  e então  $R(x) = -x^2 + 10x + 1200$ .

Logo,  $R'(x) = -2x + 10$  e obtemos  $x = 5$ . Como o lucro máximo ocorre quando há 5 lugares vagos, então, deverão ir na excursão 35 pessoas.

**Exemplo 5.4.** Para construir uma caixa retangular sem tampa será usado um papelão de formato quadrado de  $1m^2$  de área, de modo que o volume da caixa seja o maior possível. Vamos determinar as dimensões dessa caixa para que o volume seja máximo.

*Solução*

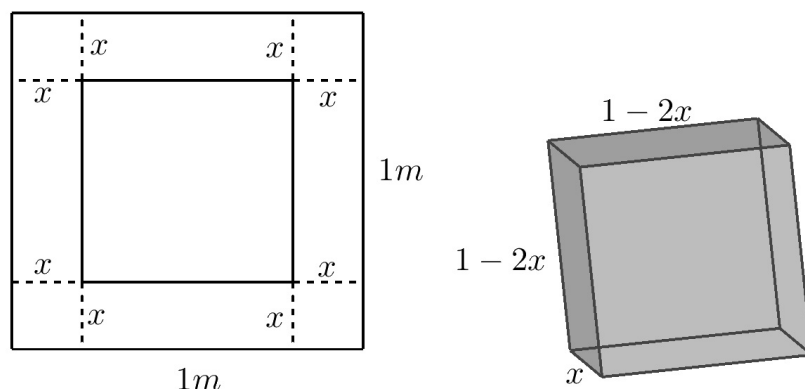


Figura 5.7: Esquema de construção da caixa

Representando o volume da caixa por  $V(x)$ , temos  $V(x) = x \cdot (1 - 2x) \cdot (1 - 2x)$  e então  $V(x) = 4x^3 - 4x^2 + x$ . Logo,  $V'(x) = 12x^2 - 8x + 1$  e então para  $12x^2 - 8x + 1 = 0$  temos  $x_1 = \frac{1}{2}$  e  $x_2 = \frac{1}{6}$ .

Determinando as dimensões, para  $x_1 = \frac{1}{2}$ , temos  $1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$ , o que não é possível pela condição de existência da caixa. Para  $x_2 = \frac{1}{6}$ , temos  $1 - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ .

Portanto, as dimensões da caixa para que o volume seja máximo são  $\frac{2}{3}$ m,  $\frac{2}{3}$ m e  $\frac{1}{6}$ m.

**Exemplo 5.5.** No instante  $t = 0$ , o ponto  $A$  está em  $(-3, 0)$  e o ponto  $B$  em  $(0, 0)$ . A partir desse instante,  $B$  se move para cima com velocidade de 1cm/s e  $A$  se move para a direita com velocidade de 2cm/s. Vamos determinar a distância mínima entre os dois pontos.

*Solução*

Sendo  $t$  o instante em segundos que cada ponto se move, então a distância do ponto  $A$  da origem é dada pela expressão  $3 - 2t$  e a distância de  $B$  da origem, é dada por  $t$ .

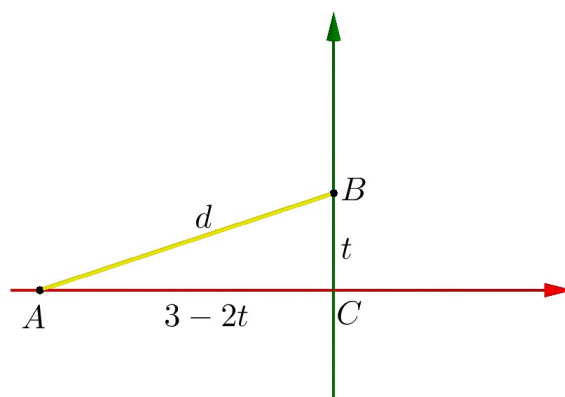


Figura 5.8: Esquema da movimentação dos pontos

Observando a figura, temos um triângulo retângulo  $ABC$  de catetos  $3 - 2t$  e  $t$ . Sendo a hipotenusa  $d = \overline{AB}$ , pelo Teorema de Pitágoras temos,

$$d^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$d^2 = (3 - 2t)^2 + t^2$$

$$d^2 = 5t^2 - 12t + 9.$$

A distância  $d$  será mínima quando  $d^2$  também for. Logo,  $(d^2)' = 10t - 12$  e então para  $10t - 12 = 0$  temos  $t = \frac{6}{5}$ . Substituindo em  $d^2$  temos,

$$d^2 = 5 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 12 \cdot \frac{6}{5} + 9$$

$$d^2 = \frac{36}{5} - \frac{72}{5} + 9$$

$$d = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Portanto, a menor distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$  cm.

**Exemplo 5.6.** Vamos esboçar o gráfico de cada função polinomial a seguir, determinando suas raízes e os pontos críticos.

(a)  $f(x) = (x - 1) \cdot (x - 4) \cdot (x - 4)$

*Solução*

Podemos verificar que as raízes da função são  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 4$ , sendo a última raiz dupla. Desenvolvendo o produto dos termos, temos  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ .

Logo,  $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$  e para  $3x^2 - 18x + 24 = 0$ , obtemos  $x_3 = 4$  e  $x_4 = 2$ . Substituindo em  $f$ , para  $x_3 = 4$  obtemos  $f(4) = 0$  e para  $x_4 = 2$  temos  $f(2) = 4$ .

Portanto, temos os pontos críticos  $P_3 = (4, 0)$  e  $P_4 = (2, 4)$ , sendo  $P_3$  um ponto de mínimo local e  $P_4$  um ponto de máximo local. A figura a seguir representa um esboço do gráfico.



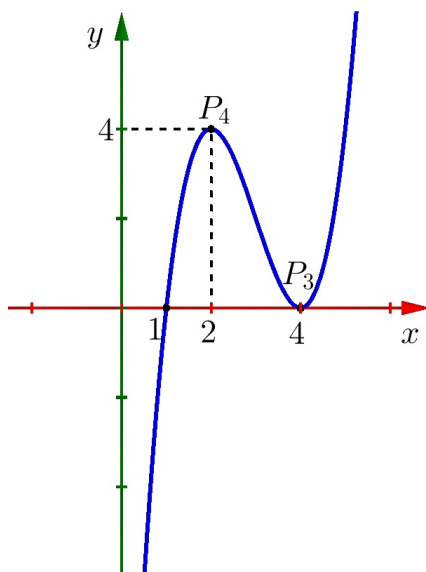


Figura 5.9:  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

(b)  $f(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$

*Solução*

As raízes da função são  $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 2$  e  $x_4 = 3$ . Desenvolvendo o produto entre os termos, obtemos  $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$ .

Logo,  $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6$  e para  $4x^3 - 12x^2 + 2x + 6 = 0$ , podemos perceber que  $x_5 = 1$  é solução e assim  $(x - 1) \cdot (4x^2 - 8x - 6) = 0$ . Resolvendo a equação  $(4x^2 - 8x - 6) = 0$ , temos  $x_6 = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$  e  $x_7 = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$ .

Substituindo na função  $f$ , para  $x_5 = 1$ , temos  $f(1) = 4$ ; para  $x_6 = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$  temos  $f\left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right) = -\frac{9}{4}$  e para  $x_7 = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$ ,  $f\left(\frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ .

Portanto, os pontos críticos são  $P_5 = (1, 4), P_6 = \left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}, -\frac{9}{4}\right)$  e  $P_7 = \left(\frac{2 - \sqrt{10}}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ , sendo  $P_5$  um ponto de máximo,  $P_6$  e  $P_7$  pontos de mínimos. A figura a seguir ilustra o gráfico da função  $f$ .

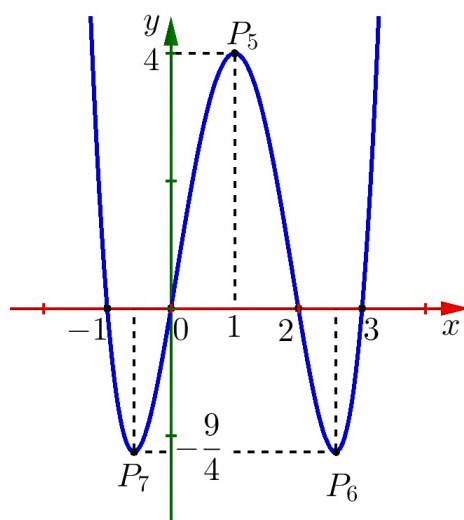


Figura 5.10:  $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$

## 5.2 Usando o Geogebra

O geogebra é um software gratuito que possibilita o desenho de pontos, vetores, segmentos, gráficos de funções, figuras geométricas e vários outros recursos.

Ele possui janela de visualização 2D, ou seja, em  $\mathbb{R}^2$  e também 3D, ou seja, em  $\mathbb{R}^3$ .

Abordaremos aqui as construções de gráficos de funções em  $\mathbb{R}^2$ , onde o sistema de coordenadas apresenta dois eixos, que serão chamados de  $x$  e  $y$ , que são respectivamente os eixos das abscissas e das ordenadas.

O geogebra pode ser encontrado para download no endereço <https://www.geogebra.org/download>.

Após o download e a instalação do geogebra, vamos conhecer um pouco da tela inicial. Na parte superior da tela temos o *menu principal*.

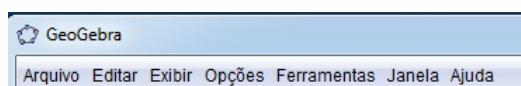


Figura 5.11: Menu Principal

Abaixo do menu principal temos a *barra de ferramentas*.



Figura 5.12: Barra de Ferramentas

A tela está dividida em duas; do lado esquerdo, temos a *Janela de Álgebra*, onde aparecem as coordenadas dos pontos, as funções, vetores e toda parte algébrica. Do lado direito, a *Janela de Visualização* dos pontos, gráficos e outros, como mostra a figura.

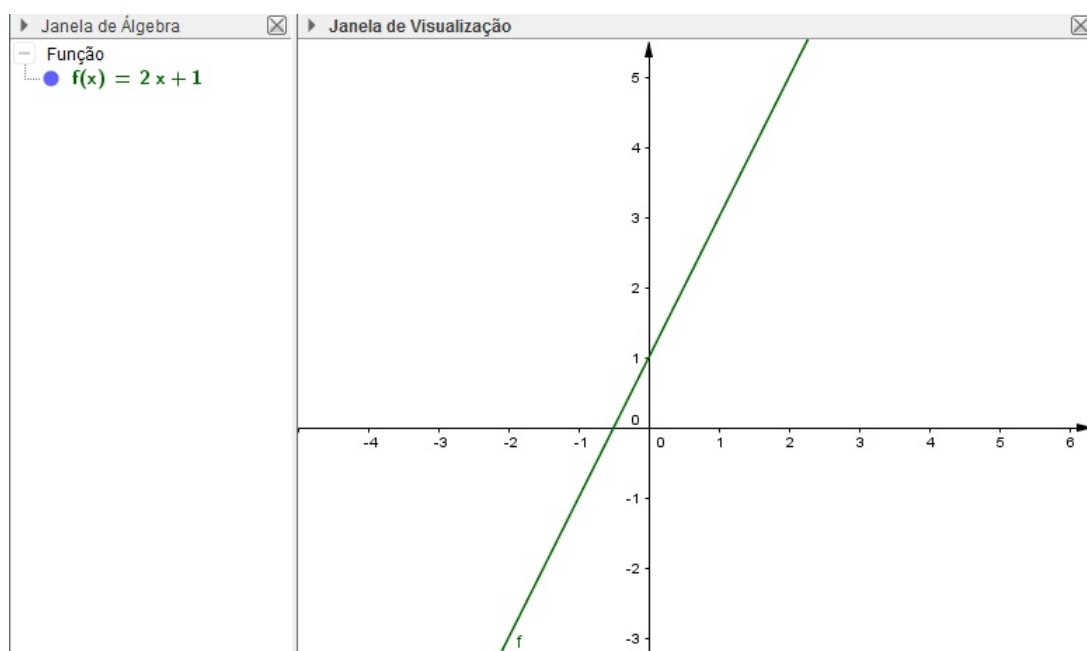


Figura 5.13: Janelas

Na parte inferior da tela, temos a *Entrada*, onde digitamos as funções para visualizarmos nas janelas.



Figura 5.14: Entrada

Para começar trabalhar com o geogebra, iniciaremos com a representação de pares ordenados.

**Exemplo 5.7.** Vamos representar os pares ordenados  $A = (2, 5)$ ,  $B = (3, 0)$ ,  $C = \left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ ,  $D = (-1, 4)$  e  $E = (2, -2)$ . Começamos fazendo um clique com o botão direito do mouse na Janela de Visualização e então apertamos a opção malha, assim a janela fica quadriculada, o que permitirá representar os pontos com mais facilidade.

Em seguida, devemos ir na barra de ferramentas e dar um clique em *ponto* e depois procure as coordenadas dos pontos que deseja marcar. Após marcar os pontos, podemos retirar a malha repetindo o procedimento feito anteriormente para colocá-la .

A figura a seguir mostra os pontos marcados.

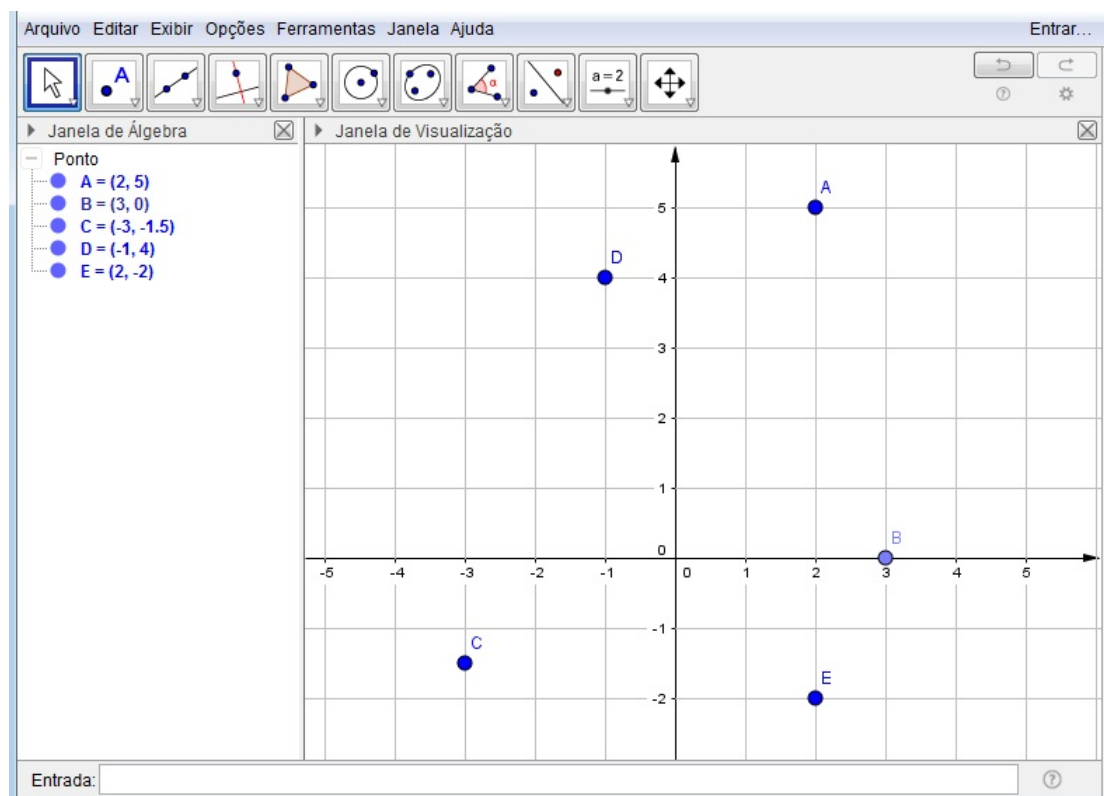


Figura 5.15: Pares Ordenados

Se algum dos pontos não ficar na posição correta de acordo com as coordenadas, é só dirigir o cursor até a janela da esquerda e no ponto correspondente, dar dois cliques e então digitar as coordenadas corretas e em seguida apertar a tecla *enter*, assim o ponto ficará no lugar desejado. Também podemos renomear um ponto mudando a letra referente à ele seguindo os mesmos passos anteriores e digitando a letra desejada.

Para nomear os eixos devemos ir até *texto* que fica no segundo botão da direita para a esquerda na barra de ferramentas. Em seguida clique próximo dos eixos para nomeá-los.

Podemos mudar o estilo de um ponto, tamanho ou cor, é só dar um clique com o botão direito em cima do ponto e então devemos ir em propriedades e mudar o que for desejável como mostram as figuras.

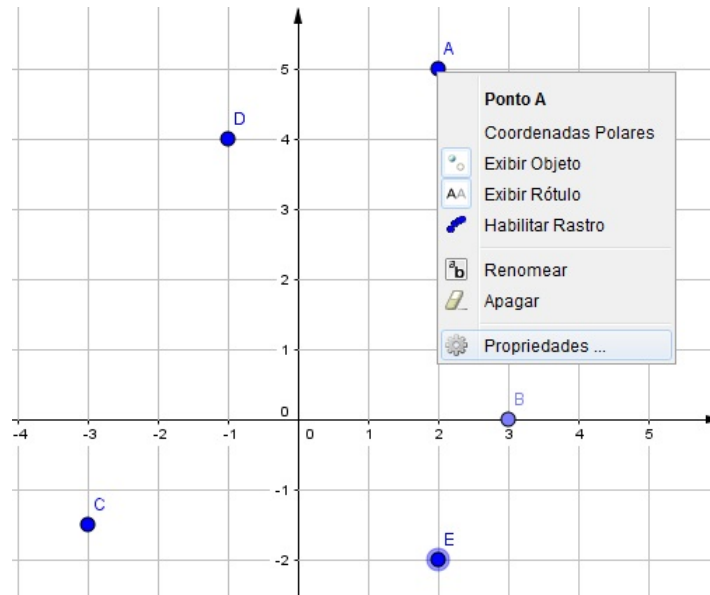


Figura 5.16: Propriedades de um ponto

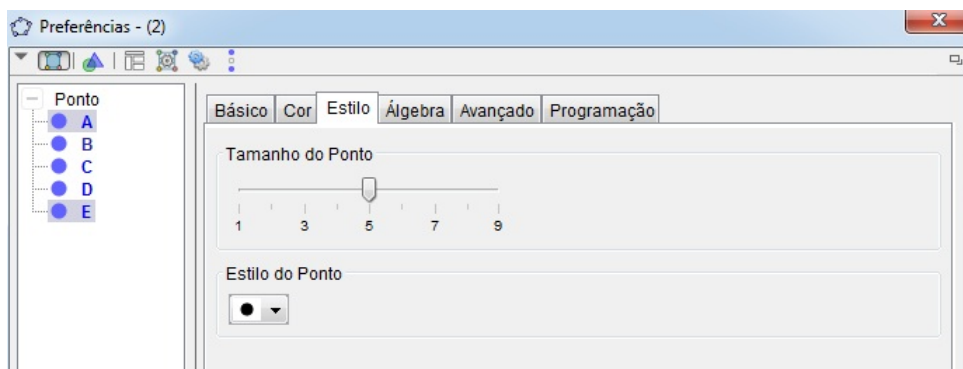


Figura 5.17: Alterando propriedades de um ponto

Após terminar os trabalhos no geogebra, podemos salvar para fazer a impressão; para isso devemos ir em *editar*, depois *Copiar para Área de Transferência*. Em seguida é só colar no *Paint* ou *Word* e então editar a figura se for o caso.

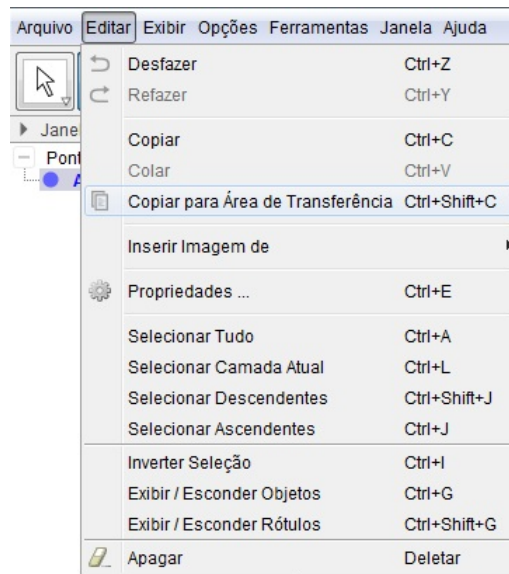


Figura 5.18: Copiando imagem

**Exemplo 5.8.** Vamos representar o gráfico da função  $f(x) = x^2 + 4x + 3$ .

Para digitar a função que possui termos com expoente, devemos digitar a letra, nesse caso  $x$ , depois o acento circunflexo e então digitar o número que será o expoente, como mostra a figura.

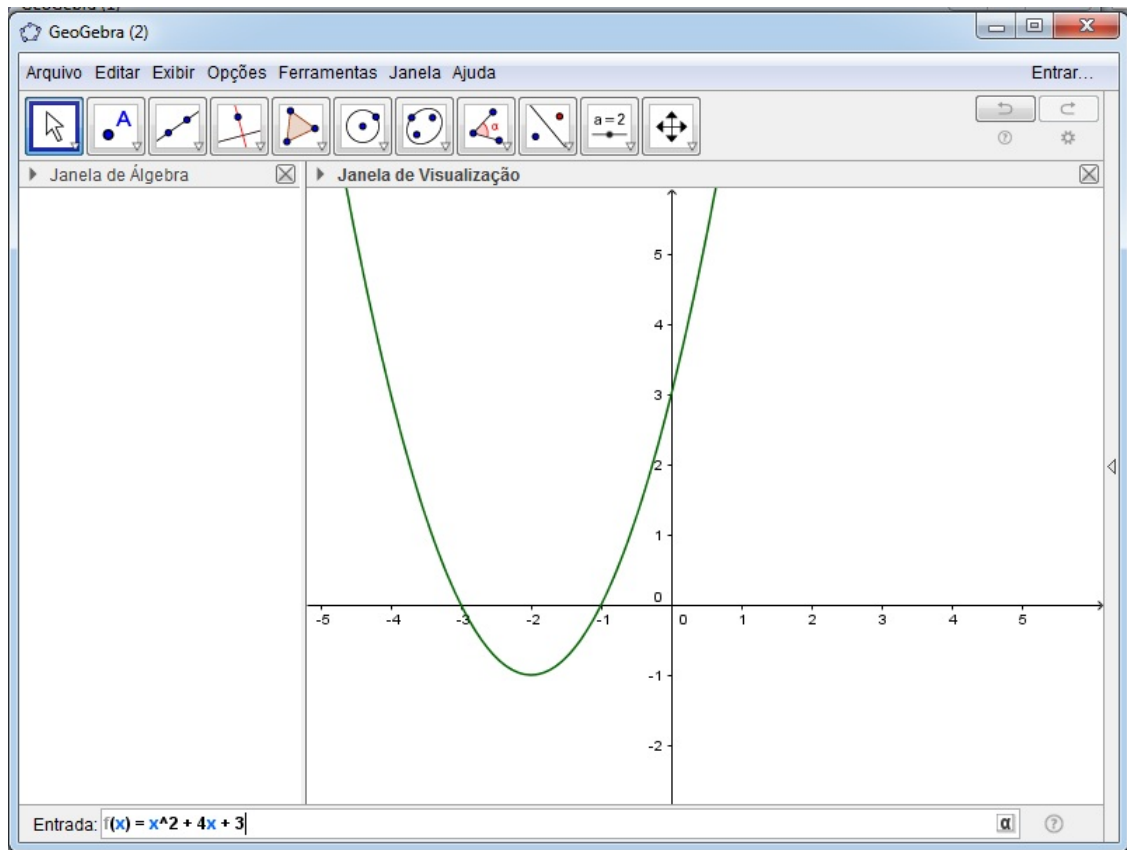


Figura 5.19: Digitando a função

Se após terminar de digitar a função o gráfico não aparecer, é só apertar a tecla *enter*.

Em seguida podemos marcar as raízes e também o ponto de mínimo da função. Se desejar mudar a cor do gráfico, clique na parábola com o botão direito e então é só ir em propriedades e alterar a cor ou ainda podemos alterar a espessura da linha ou mudar seu estilo.

A figura a seguir mostra o gráfico após algumas mudanças.

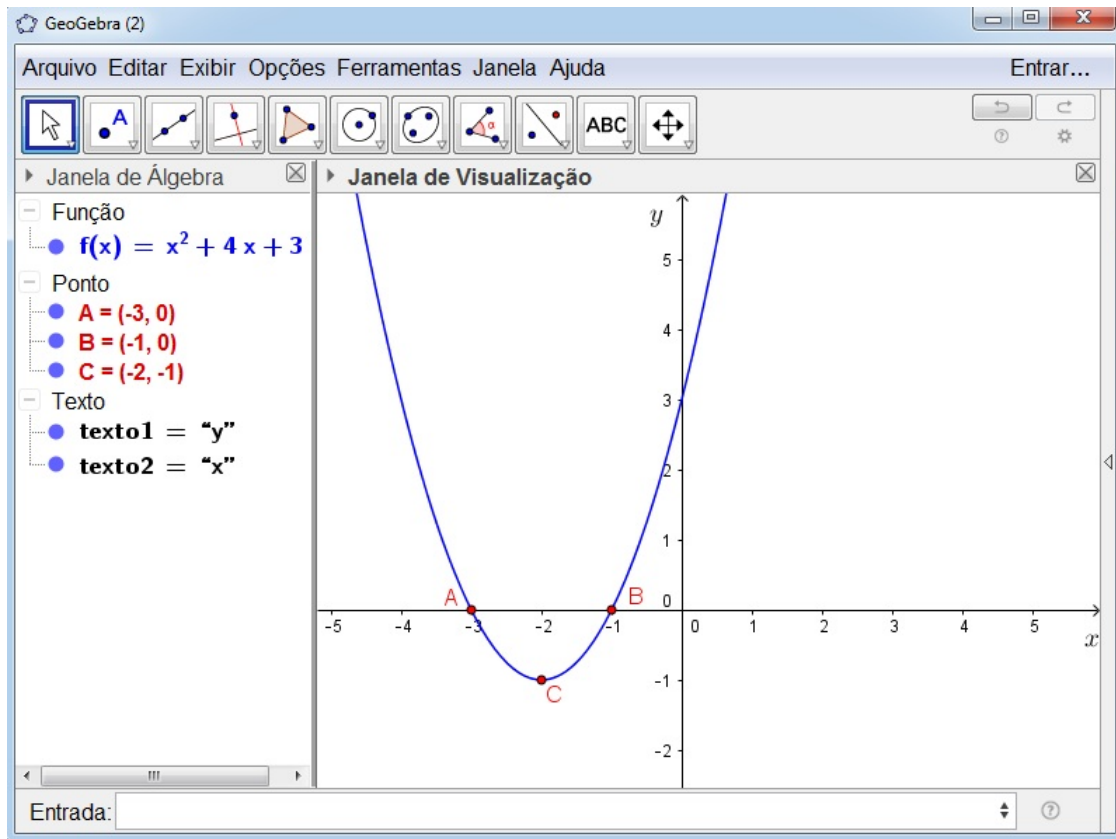


Figura 5.20: Construção do gráfico

**Exemplo 5.9.** Vamos construir o gráfico da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x. \quad (5.1)$$

A função 5.1 em que faremos a representação do seu gráfico, é a do exemplo 5.6 item (b), portanto já temos as suas raízes e seus pontos críticos determinados.

Começamos digitando a função.



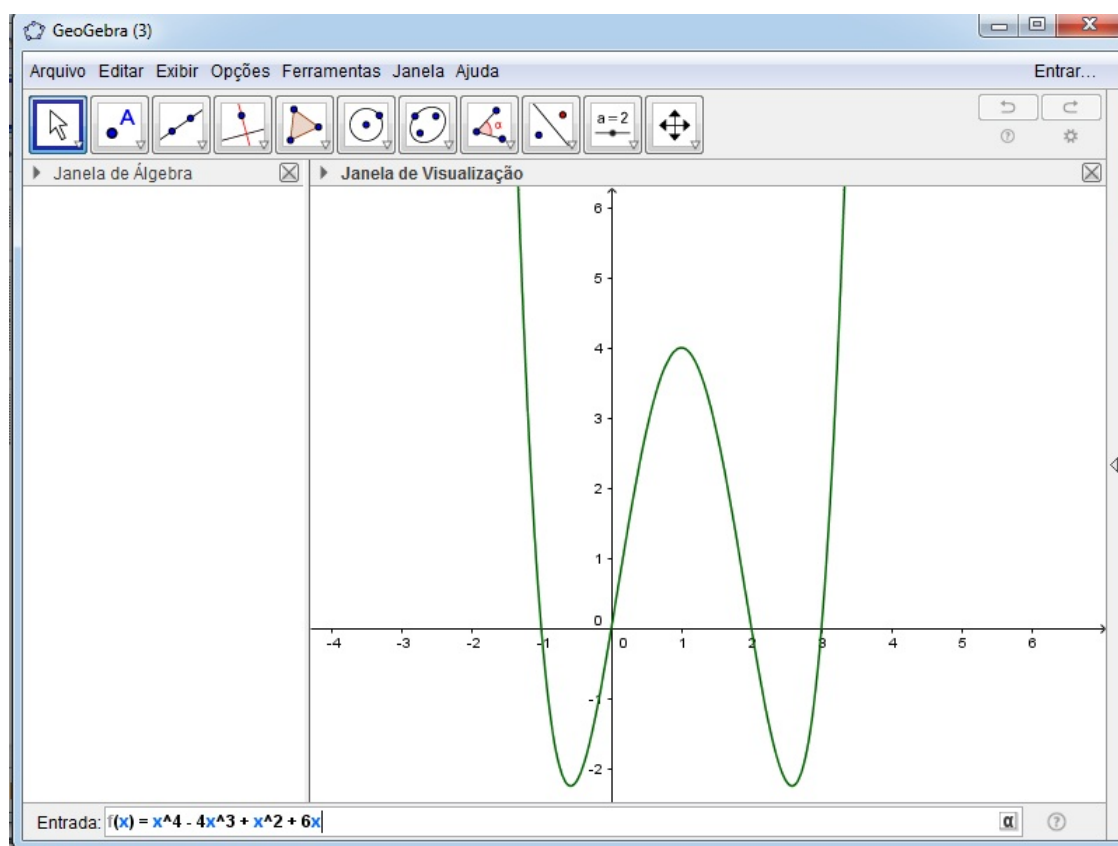


Figura 5.21: Função na Entrada

Depois marcamos as raízes das funções e os pontos críticos  $A = (1, 4)$ ,  $B = \left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}, -\frac{9}{4}\right)$  e  $C = \left(\frac{2 - \sqrt{10}}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ .

Representamos as frações na forma decimal, como  $-\frac{9}{4} = -2,25$ ;  $\frac{2 + \sqrt{10}}{2} \cong 2,58$  e  $\frac{2 - \sqrt{10}}{2} \cong -0,58$ . No geogebra a vírgula que separa a parte inteira da parte fracionária é substituída pelo ponto(.).

Se as coordenadas de um ponto não aparecer corretamente, ou seja, estiver difícil marcar o ponto no lugar correto, é só ir na janela da esquerda, digitar os números corretos e após apertar *enter*.

Podemos marcar um tracejado que liga os números das coordenadas com o ponto, para isso marcamos os pontos  $H = \left(0, -\frac{9}{4}\right)$ ,  $I = \left(\frac{2 - \sqrt{10}}{2}, 0\right)$ ,  $J = (1, 0)$ ,

$K = (0, 4)$  e  $L = \left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}, 0\right)$ .

Depois de marcados os pontos, devemos ir até a barra de ferramentas e dar um clique em *segmento*. Em seguida é só dar um clique em um ponto que aparecerá o segmento, então arraste o mouse até o outro ponto que deseja ligar e dar um clique sobre este ponto.

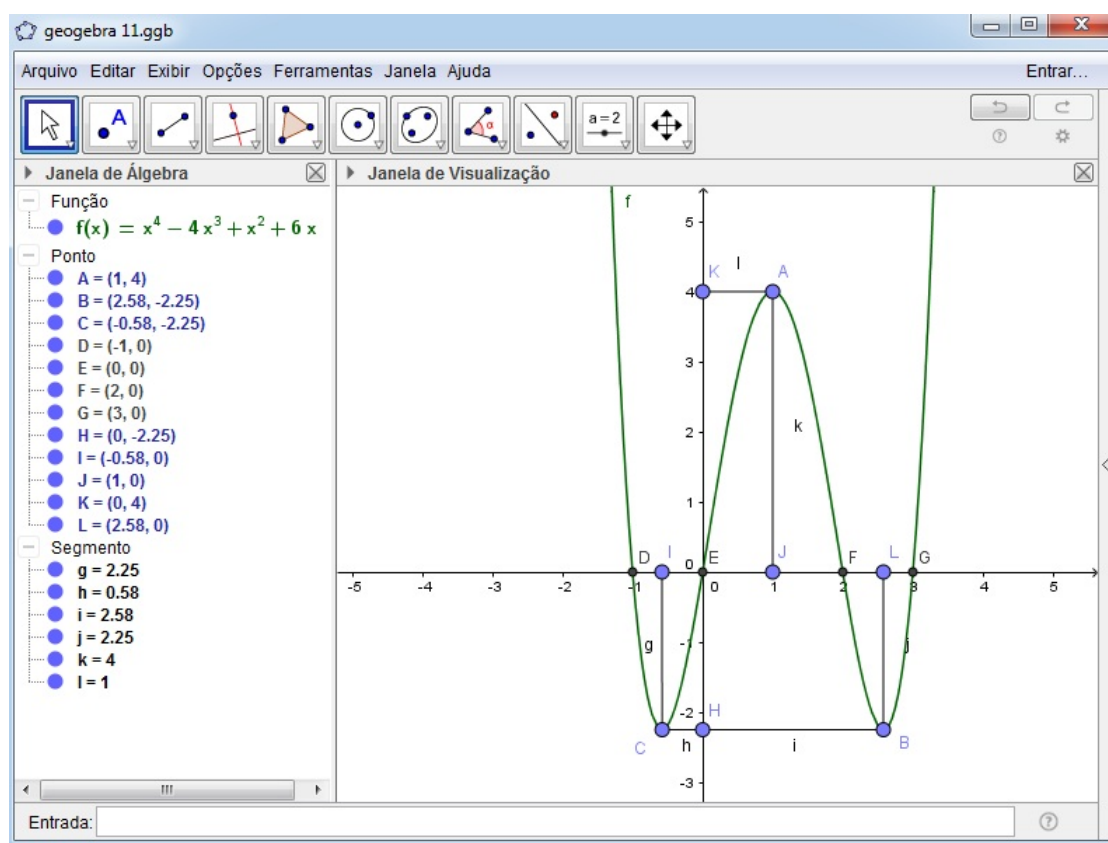


Figura 5.22: Traçando segmentos

As letras que aparecem referentes aos segmentos podem ser ocultadas, dando um clique com o botão direito do mouse sobre o segmento, depois clique com o botão esquerdo sobre *Exibir Rótulo*, então a letra não aparecerá.

Após traçar os segmentos, clique sobre um deles com o botão direito, e então clique em propriedades e depois na opção *Estilo*, mude o segmento para tracejado e então repita os mesmos passos para os demais segmentos, assim a figura ficará como a seguinte.

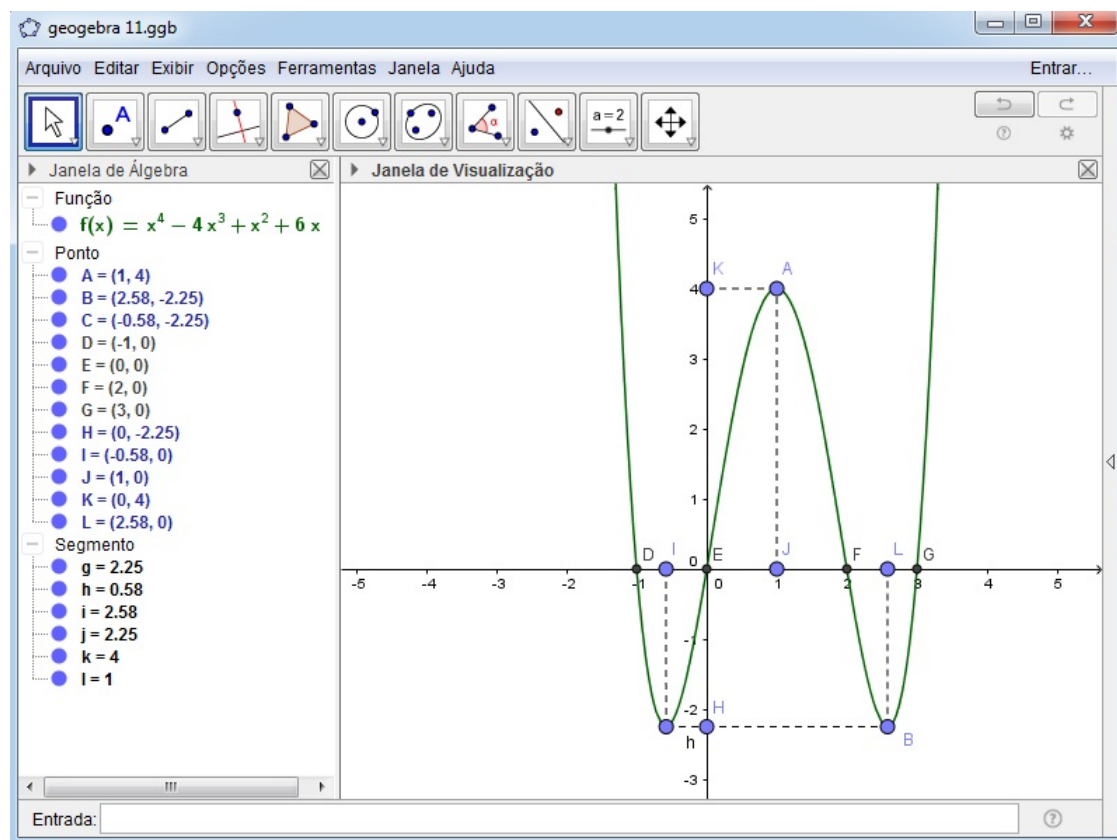


Figura 5.23: Tracejado

Depois podemos apagar os pontos  $H, I, J, K$  e  $L$ , pois não serão mais necessários. Para isso, devemos ir na janela da esquerda e dar um clique em cima do círculo que aparece em frente de cada par ordenado que desejamos apagar.

Em seguida, podemos diminuir o tamanho dos pontos, indo em propriedades, dando um clique sobre o ponto com o botão direito do mouse.

Após terminar a construção, devemos ir em *Copiar para Área de Transferência* e depois colar no *Word* ou *Paint* para poder editar e fazer a impressão se for o caso.

Depois de colar o gráfico da função no *word*, por exemplo, e editar se for o caso, a figura está pronta para ser usada em uma atividade como mostra a Figura 5.25.

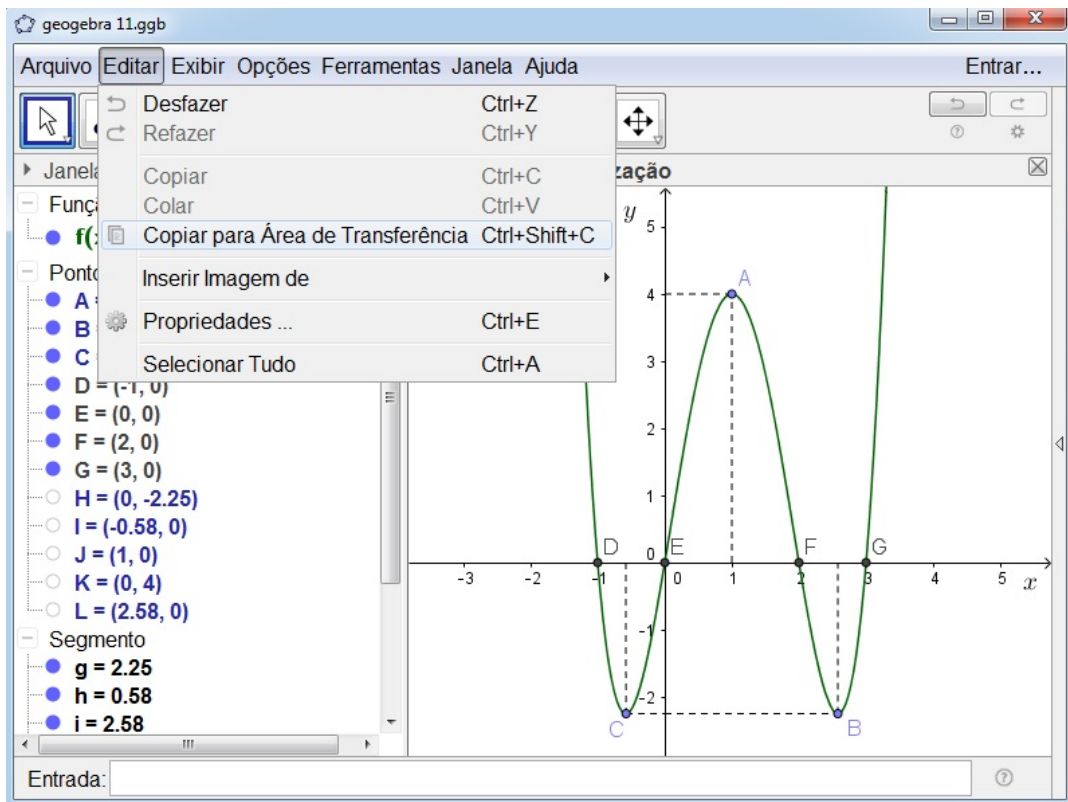


Figura 5.24: Copiando

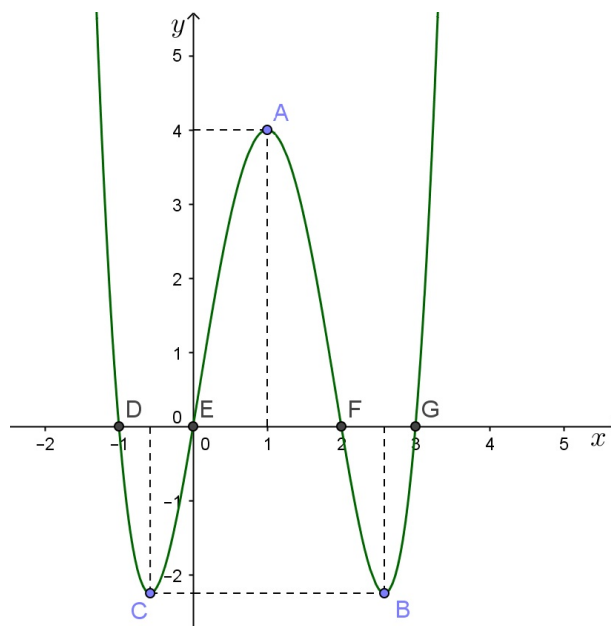


Figura 5.25: Gráfico pronto

# Considerações Finais

Inicialmente foi feita uma abordagem sobre funções diferenciáveis com duas variáveis e outros temas necessários para a compreensão de algumas demonstrações e conceitos que foram abordados neste trabalho.

Este trabalho teve como objetivo identificar os pontos críticos de uma função e fazer um estudo mais detalhado deste tema.

Apresentamos um estudo sobre pontos críticos e as funções de Morse, que estão relacionadas aos pontos críticos não degenerados de uma função diferenciável  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  em uma superfície, e mostramos ainda que toda função diferenciável em torno de um ponto crítico não degenerado pode ser escrita como um polinômio quadrático.

No final deste trabalho, fizemos uma proposta de abordagem dos pontos críticos de uma função diferenciável destinada à 3ª série do ensino médio usando o conceito de derivada com uma variável.

O uso das derivadas na 3ª série do ensino médio seria um tema diferente dos já estudados pelos alunos, trazendo à eles um pouco mais de curiosidade sobre o assunto e facilitando a aprendizagem dos mesmos.

Não é necessário um aprofundamento sobre o tema. É importante que os alunos entendam como calcular a derivada de uma função polinomial e determinar o valor para que a derivada da função seja igual a zero, identificando assim, os pontos críticos.

Na experiência que tive com esta aplicação, pude perceber que as dificuldades encontradas pelos alunos foram as mesmas apresentadas se fosse um outro tema proposto no currículo para a série. Vale ressaltar, que foi trabalhado com os alunos a definição de derivada de uma função polinomial.

As situações apresentadas podem ser modificadas ou acrescentadas outras situações à critério do professor.

As orientações e dicas para o uso do geogebra é para facilitar um primeiro contato com o software, ajudando no trabalho com os alunos.

Espero que este trabalho possa servir de auxílio para o professor trabalhar com seus alunos, possibilitando à eles uma aprendizagem melhor.

# Referências

- [1] Bianchini, Waldecir: *Aprendendo Cálculo de Várias Variáveis*, Instituto de Matemática - UFRJ, 2016.
- [2] Biezuner, Roney Josué: *Notas de Aula de Geometria Diferencial*, Instituto de Ciências Exatas - UFMG, 2016.
- [3] Carmo, Manfredo Perdigão do: *Geometria de Curvas e Superfícies*, Coleção Textos Universitários, SBM, 5ª edição, 2012.
- [4] Dante, Luiz Roberto: *Matemática*, Ensino Médio, volume único, Editora Ática, 1ª edição, São Paulo, 2005.
- [5] Fleming, Diva Marília; Gonçalves, Mírian Buss: *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração*, Editora da UFSC, 5ª edição, São Paulo, 1992.
- [6] Gómez, Jorge J. Delgado; Fresl, Katia Rosenvald; Crissaff, Lhaylla dos Santos: *Geometria Analítica*, Coleção PROFMAT, SBM, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2013.
- [7] Guidorizzi, Luiz Hamilton: *Um Curso de Cálculo*, LTC, volume 2, Rio de Janeiro, 2014.
- [8] Iezzi, Gelson; Murakami, Carlos; Machado, Nilson José: *Fundamentos de Matemática, 8: limites, derivadas, noções de integral*, Editora Atual, 6ª edição, São Paulo, 2005.
- [9] Lima, Elon Lages: *Análise Real: Funções de Uma Variável*, Volume 1, Coleção Matemática Universitária, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 12ª edição, Rio de Janeiro, 2016.
- [10] Lima, Elon Lages: *Números e Funções Reais*, Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [11] Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo: *Matemática, Caderno do Professor*, Ensino Médio, 3ª série, volume 2, Secretaria da Educação, São Paulo, 2014.
- [12] Manfio, Fernando: *Introdução à Topologia Diferencial - Notas de aula em construção*, ICMC - USP.
- [13] Oliveira, Oswaldo R. Branco de: *O Hessiano em duas e Várias Variáveis*, IQUSP, 2009.

- 
- [14] Rodrigues, Lais Bássame; Agustini, Edson: *Um Texto Sobre Superfícies Parametrizadas Regulares*, FAMAT em Revista - Universidade Federal de Uberlândia, MG, 2007.
- [15] Sodré, Ulysses: *Geometria Diferencial - Superfícies no Espaço Tridimensional*, Artigo - Londrina - PR, 2007.
- [16] Tavares, Geovan: *Funções de Morse e Classificação de Superfícies*, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [17] Tenenblat, Ketí: *Introdução à Geometria Diferencial*, Blucher, 2ª edição, São Paulo, 2008.
- [18] Tognon, Carlos Henrique; Nogueira, Antonio Carlos: *Uma Introdução à Teoria de Pontos Críticos*, FAMAT em Revista - Universidade Federal de Uberlândia, MG, 2007.