



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ISOMETRIAS NO PLANO: UMA ABORDAGEM APLICÁVEL AO ENSINO BÁSICO

IVANILTON SALES DE JESUS

Salvador-Bahia

MARÇO DE 2017

ISOMETRIAS NO PLANO: UMA ABORDAGEM APLICÁVEL AO ENSINO BÁSICO

IVANILTON SALES DE JESUS

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, do Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano.

Salvador - Bahia

Março de 2017

Modelo de ficha catalográfica fornecido pelo Sistema Universitário de Bibliotecas da UFBA para ser confeccionada pelo autor

J58 Jesus, Ivanilton Sales de
Isometrias no Plano - Uma abordagem aplicável ao ensino
básico / Ivanilton Sales de Jesus. -- Salvador, 2017.
62 f. : il

Orientador: Carlos Eduardo Nogueira Bahiano.
Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática)
-- Universidade Federal da Bahia, UFBA, 2017.

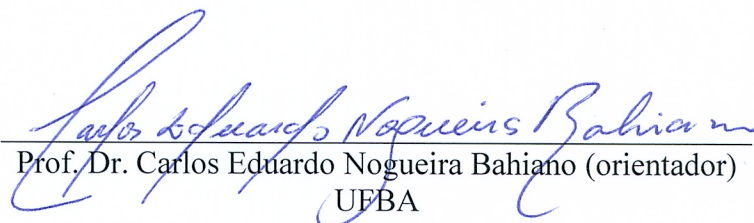
1. Matemática: estudo e ensino. 2. Álgebra: estudo e
ensino. 3. Isometrias no plano. 4. Simetrias no plano. 5.
Grupos de simetrias. I. Bahiano, Carlos Eduardo Nogueira. II.
Título.

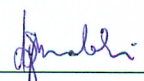
Isometrias no plano – Uma abordagem aplicável ao ensino básico

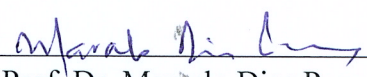
Ivanilton Sales de Jesus

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 30/03/2017.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano (orientador)
UFBA


Prof. Dr. André Luis Godinho Mandolesi
UFBA


Prof. Dr. Marcelo Dias Passos
UFBA

Dedico este trabalho à minha família, pelo apoio incondicional. Em especial à minha esposa Joalice e a meu filho Sérgio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela presença constante em minha vida nesses anos de estudo.

Aos meus pais, Vera Lúcia e Ivo Juraci que, infelizmente, se foram sem ver a realização desse sonho, mas sempre incentivaram a minha caminhada acadêmica e não mediram esforços para que eu chegasse até aqui. À minha esposa Joanice e meu filho Sérgio, que de forma amorosa e especial me deram força e coragem, me apoiando nos momentos de desespero e dificuldades. Aos meus irmãos Jackson e Leandro, que sempre me apoiaram com atenção e carinho.

Aos meus amigos de curso Etinevaldo, Leandro e Marcelo, que, além de fazerem parte da minha história no PROFMAT, agora, fazem parte da minha vida. Juntos conseguimos vencer mais essa etapa.

Aos meus amigos Alexandro Salvador e Ricardo Magalhães, que compartilharam comigo momentos de estudo, lazer e muitas risadas. Aos meus amigos dos colégios José Barreto, Maria Constança e Vitória Régia.

A todos os professores do curso, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano, que lançou a ideia e muito me ajudou, com paciência, confiança e dedicação, a concluir esse trabalho. Enfim, a todos os amigos que participaram comigo dessa jornada, o meu muito obrigado.

*“Matemática, vista corretamente,
possui não apenas verdade, mas
também suprema beleza - uma beleza
fria e autera, como a da escultura”.*

Bertrand Russell

Esta dissertação busca apresentar um estudo com os resultados básicos sobre as isometrias no plano. O objetivo é proporcionar aos estudantes e professores do ensino básico um material com linguagem matemática acessível e prática. Para isso, iniciamos com um estudo de conceitos básicos necessários ao entendimento do tema principal, passando pela noção de localização e distância no plano, transformações geométricas e teoria de grupos. Após isso, é apresentada a definição e as propriedades das isometrias. A partir das composições de isometrias, são apresentados dois teoremas: um de decomposição e outro de classificação de isometrias, que garante serem apenas quatro, os tipos de isometrias no plano. Como as isometrias preservam as medidas e formas, apresentaremos um estudo mais profundo sobre simetrias de um conjunto e grupos de simetrias que levará à classificação dos três grupos de simetrias.

Palavras-chave: Isometrias no plano, Simetria, Grupos de simetria planas.

ABSTRACT

This dissertation seeks to present a study with the basic results on the isometries in the plane. The goal is to provide students and teachers of basic education with material with accessible and practical mathematical language. For this, we started with a study of basic concepts necessary to understand the main theme, passing through the notion of location and distance in the plane, geometric transformations and group theory. After this, the definition and properties of the isometries are presented. From the isometry compositions, two theorems are presented: one of decomposition and the other of classification of isometries, which guarantees to be only four, the types of isometries in the plane. As the isometries preserve the measurements and forms, we will present a deeper study on symmetries of a set and groups of symmetries that will lead to the classification of the three groups of symmetries.

Keywords: Isometries in the plane, Symmetry, Groups of symmetries in the plane.

Introdução	1
1 Conceitos básicos	3
1.1 Localização na reta	3
1.2 Localização no plano	3
1.3 Plano euclidiano	4
1.4 Transformações no plano	5
1.5 Algumas notações para elementos do plano	6
1.6 Grupos	6
2 Isometria	8
2.1 Definição	8
2.2 Propriedades da isometria	10
2.3 Exemplos de isometrias	13
2.3.1 Translação	13
2.3.2 Reflexão por uma reta	15
2.3.3 Rotação	22
2.3.4 Reflexão deslizante	26
2.4 Composição de isometrias	28
2.4.1 Composição de duas reflexões em retas paralelas	28
2.4.2 Composição de três reflexões em retas paralelas	29
2.4.3 Composição de duas reflexões em retas concorrentes	30
2.4.4 Composição de três reflexões em retas concorrentes	31
2.4.5 Composição de translação com reflexão	32
2.4.6 Composição de três reflexões em retas com duas retas perpendicu- lares à terceira	33

2.4.7	Composição de translação com rotação	33
2.4.8	Composição de rotações	34
2.4.9	Composição de reflexão com rotação	36
2.4.10	Composição de três reflexões em retas	37
2.5	Classificação de isometrias	37
3	Simetrias	42
3.1	Simetrias planas	43
3.2	Classificação das figuras simétricas	47
3.2.1	Rosetas ou rosáceas	47
3.2.2	Frisos	48
3.2.3	Papéis de parede	48
4	Considerações finais	50
	Referências Bibliográficas	51

A Matemática é uma ciência que, cada vez mais, tem se mostrado importante nas mais diversas áreas da atividade humana. O conhecimento matemático e suas aplicações são de extrema importância para o desenvolvimento da sociedade como um todo. Dessa forma, é necessário que o ensino da Matemática seja muito consistente, tanto no ensino fundamental, quanto no ensino médio.

Em sala de aula, a Matemática deve ser apresentada de modo que os alunos obtenham um aprendizado mais significativo. Mas, infelizmente, o que se vê são alunos descontentes e revoltados no que diz respeito à Matemática. Ficam se perguntando qual a importância e necessidade de se aprender determinados conteúdos passados pelos professores.

Em muitos livros didáticos, a geometria, quando não é deixada de fora, é apresentada nos últimos capítulos. Infelizmente, alguns professores seguem fielmente os livros adotados em suas escolas, não mostrando interesse em inovar e possibilitar aos alunos um estudo prático e mais significativo.

Quando se fala em transformações geométricas, por exemplo, é de maneira rápida e, muitas das vezes, se limita a simetria axial, congruência e semelhança de triângulos, quando poderia explorar mais outras transformações.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1998, p.51), é muito importante o ensino das transformações geométricas (isometrias, homotetias), pois propicia aos alunos, desenvolvimento de muitas habilidades, como por exemplo, a percepção espacial e as relações de congruência e semelhança.

Atualmente, estão disponíveis muitos recursos computacionais que muito auxiliam no ensino e na aprendizagem da matemática, como é o caso dos softwares de geometria dinâmica, que tornam mais fácil e mais atraente a apresentação de relações e propriedades geométricas que antes não eram tão evidentes, podendo, dessa forma, motivar o aluno a ficar mais atento e aprofundar mais os conteúdos apresentados.

Em nossa pesquisa, vamos abordar as isometrias do plano, uma transformação geométrica que não altera nem as dimensões e nem a forma das figuras, e que tem uma grande importância tanto teoricamente, quanto na prática.

A isometria pode ser abordada tanto de forma geométrica, quanto algébrica. Como a proposta desse trabalho é propiciar aos professores do ensino básico, ferramentas para suas aulas e, por considerar importante as duas abordagens, em todo o trabalho ambas foram utilizadas, apesar da abordagem algébrica se sobressair em relação à geométrica.

Em muitas das demonstrações, temos como suporte figuras criadas com o software de geometria dinâmica GeoGebra, possibilitando uma maior percepção das ideias envolvidas. Essa ferramenta é de extrema importância para o professor em sala de aula, pois o auxilia na criação e na visualização de relações geométricas e algébricas.

O primeiro capítulo apresenta alguns tópicos e definições que são pré-requisitos para o estudo de isometrias, como localização e distâncias entre pontos no plano, transformações geométricas, pontos fixos, etc.

O segundo capítulo é o principal. É onde se apresenta e discute definição, propriedades e a classificação das isometrias. É nesse capítulo que será apresentada o teorema da fatoração das isometrias e os únicos tipos de isometrias possíveis.

O terceiro capítulo trará um estudo aprofundado sobre simetrias. A partir da definição de figura simétrica, será apresentada a definição de grupos de isometrias que muito irá contribuir para a classificação dos grupos de simetrias. Alguns exemplos dessa classificação foram apresentadas para permitir uma compreensão maior do conteúdo.

Em todos os capítulos são apresentados exemplos e aplicações para um maior entendimento.

Para fazer esse estudo das isometrias, foram usados os livros “Isometrias e Ornamentos do Plano Euclidiano” de Ledergerber-Ruoff (1982), “Isometrias”, de Lima (1996) e “Grupos de isometrias no plano ” de Spira (1996), um material usado no mini-curso da XIV Escola de Álgebra realizada pelo IMPA no mesmo ano. Para enriquecer ainda mais o estudo, foram realizadas pesquisas em textos de outras dissertações abordando o assunto. Esses textos são citados no desenvolvimento dessa dissertação e postos nas referências bibliográficas.

1.1 Localização na reta

Para falarmos de sistema de coordenadas na reta, tomamos um ponto $O \in r$, o qual chamamos origem, e a partir desse ponto, escolhemos uma das semiretas de r determinadas por O , como sendo semireta positiva.

Dessa forma, fica estabelecida uma correspondência biunívoca $f : r \rightarrow \mathbb{R}$ entre a reta r e o conjunto dos números reais, onde a cada ponto $X \in r$ corresponde um único número real $f(X) = x$, chamado de coordenada do ponto X , dada da seguinte forma:

- Se x pertence à semireta positiva, então $x = f(X) = d(X, O)$
- Se x não pertence à semireta positiva, então $x = f(X) = -d(X, O)$

Dados os pontos X e Y sobre a reta r , se suas coordenadas são x e y , respectivamente, então

$$d(X, Y) = |x - y| = |y - x|$$

1.2 Localização no plano

De acordo com Lima (2007), um sistema de coordenadas é introduzido no plano π quando se toma um par de eixos OX e OY , com origem comum O . Chama-se OX de eixo das abscissas e OY de eixo das ordenadas. Por conveniência, que será vista posteriormente, considera-se os eixos OX e OY perpendiculares no ponto O .

Todos os pontos de OX e OY possuem coordenadas. Lembre-se que a notação \mathbb{R}^2 representa o conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais. A escolha dos

eixos OX e OY permite definir uma bijeção $\pi \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa cada ponto $P \in \pi$ o par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, onde x (abscissa do ponto P) é a coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre OX , enquanto y (ordenada do ponto P) é a coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre OY .

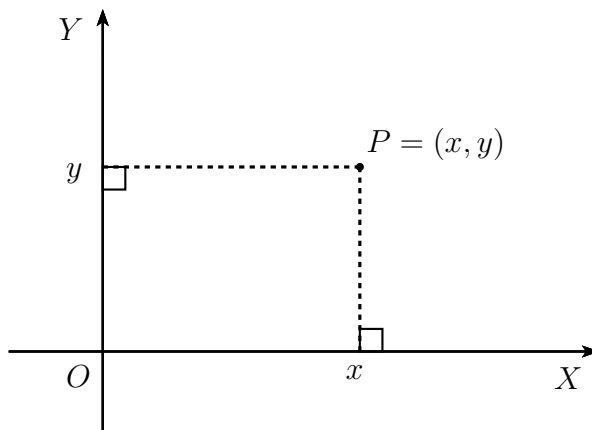


Figura 1.1: Sistema de coordenadas no plano

Uma vez fixado o par de eixo OX e OY , os pontos do plano π podem ser representados por pares ordenados de números reais e, de fato, será escrito simplesmente $P = (x, y)$ para significar que x é a abscissa e y é a ordenada do ponto P .

1.3 Plano euclidiano

Chama-se *plano euclidiano*, ao conjunto $\mathbb{R}^2 = \{A = (x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$, onde \mathbb{R} é o conjunto dos números reais e cada ponto desse plano tem sua coordenada escrita na forma (x, y) .

Definição 1.3.1. Uma **métrica** em \mathbb{R}^2 é uma função $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz as seguintes condições, para quaisquer A, B e $C \in \mathbb{R}^2$:

- (i) $d(A, A) = 0$;
- (ii) Se $A \neq B$, então $d(A, B) > 0$;
- (iii) $d(A, B) = d(B, A)$;
- (iv) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

Se d é uma métrica em \mathbb{R}^2 , então $d(A, B)$ é chamada distância entre os pontos A e B .

Proposição 1.3.1. *Tem-se que a função $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

onde $A = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ e $B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, é uma métrica em \mathbb{R}^2 .

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em Mir (2014).

1.4 Transformações no plano

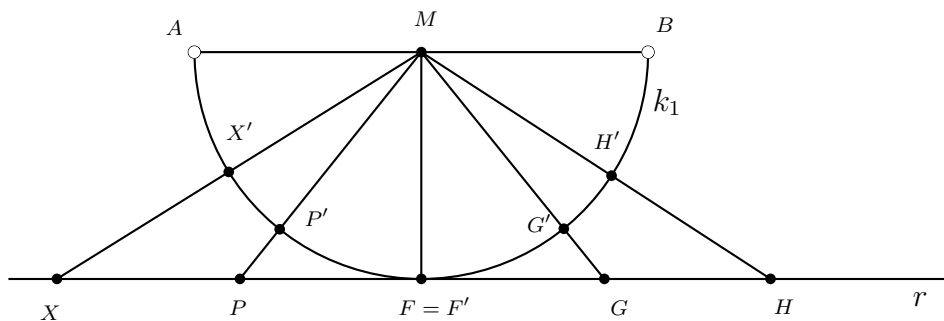
Em seus escritos, Rezende e Queiroz (2008), define uma transformação no plano da seguinte forma:

Definição 1.4.1. *Uma transformação no plano é uma função bijetiva do conjunto dos pontos do plano sobre si mesmo. Se \mathcal{F} é uma figura contida no plano, a imagem de \mathcal{F} pela transformação φ é definida como $\varphi(\mathcal{F}) = \{\varphi(P), P \in \mathcal{F}\}$.*

Uma outra maneira de definir transformação no plano é que: dado um plano Π , uma transformação φ em Π é uma aplicação $\varphi : \Pi \rightarrow \Pi$ que faz corresponder a cada ponto $P \in \Pi$ um ponto $Q = \varphi(P) \in \Pi$. O ponto $\varphi(P)$ chama-se a imagem de P por φ . (SILVA, 2013)

Veja abaixo um exemplo de transformação no plano.

Exemplo 1.4.1. *Consideremos uma semicircunferência k , de centro M e diâmetro $[AB]$, onde o segmento de reta AB seja paralelo à reta r , tangente a k no ponto F . Chamamos a semicircunferência sem os pontos A e B de semicircunferência aberta k_1 .*



Consideremos a aplicação $\Omega : r \rightarrow k_1$,

$$\Omega = \{(X, X') \in r \times k_1 / X' = k_1 \cap MX\}$$

Aos pontos mais afastados do ponto F , na reta r , correspondem os pontos mais próximos de A ou de B .

Definição 1.4.2. Dizemos que uma transformação α do plano **fixa** um ponto P se $\alpha(P) = P$. Além disso, dizemos que uma transformação α do plano **preserva** uma reta r do plano, se $\forall P \in r, \alpha(P) \in \alpha(r)$. Dizemos ainda que uma transformação α do plano **fixa** uma reta r quando $\alpha(P) = P, \forall P \in r$.

1.5 Algumas notações para elementos do plano

Para esse trabalho, ficará estabelecida algumas notações que serão utilizadas, sendo admitida fixada uma unidade de comprimento.

1. **Ponto:** o ponto será representado por uma letra maiúscula de nosso alfabeto, ou pelo par ordenado que o representa no plano cartesiano. Por exemplo, ponto A ou (x_A, y_A) .
2. **Segmento de reta:** o segmento de reta que passa pelos pontos A e B será representado por AB .
3. **Semirreta:** a semirreta de origem no ponto O e que contém o ponto A será representada por \underline{OA} .
4. **Medida de segmento:** a distância entre dois pontos A e B , que é a medida do segmento AB , será representada por \overline{AB} .
5. **Vetor:** o vetor definido por dois pontos A e B , orientado na direção de B será representado por \overrightarrow{AB} .
6. **Retas:** a reta que passa contém o segmento AB será representada por letras minúsculas de nosso alfabeto ou da seguinte maneira \overleftrightarrow{AB} .
7. **Ângulo:** o ângulo de vértice O cujos lados são as semirretas \underline{OA} e \underline{OB} será indicado por $A\hat{O}B$.
8. **Transformações no plano:** serão representadas por letras gregas minúsculas.

1.6 Grupos

Definição 1.6.1. (Relação binária) Sejam x e y dois elementos quaisquer de um conjunto G . Diz-se que $*$ é uma operação binária definida em G , ou lei de composição interna em G se, e somente se, ao par ordenado (x, y) de $G \times G$ corresponde, pela operação $*$, um único elemento de G , que se designa por $x * y$.

$$* : G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \mapsto z = x * y$$

Definição 1.6.2. (Grupo) Um grupo é uma estrutura da forma $(G, *)$, constituído de um conjunto G não vazio e uma operação binária $* : G \times G \rightarrow G$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- *Associatividade:* $\forall x, y, z \in G$, tem-se $(x * y) * z = x * (y * z)$
- *Existência do elemento neutro:* $\exists e \in G, \forall x \in G$, tem-se $x * e = e * x = x$
- *Existência do elemento inverso:* $\forall x \in G, \exists x^{-1} \in G$, tal que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

Tem-se que os elementos neutro (e) e inverso (x^{-1}) são únicos.

Observação: Um grupo $(G, *)$ diz-se comutativo ou abeliano se, além das propriedades anteriores, tiver a seguinte propriedade:

$$\forall x, y \in G, x * y = y * x$$

CAPÍTULO 2

ISOMETRIA

Considere uma figura F no plano. Se for imposto a F um deslocamento nesse plano de tal modo que sejam mantidas as dimensões e sua forma, teremos que essa nova figura será, visualmente, idêntica à primeira, ou seja, serão congruentes.

Uma transformação geométrica é uma aplicação que a cada ponto do plano faz corresponder um possível outro ponto do plano. Segundo Ledergerber-Ruoff (1982), o conceito de transformação geométrica surgiu principalmente considerando os movimentos rígidos, nos quais são mantidas forma e dimensões após o movimento no plano. Geometricamente, em uma transformação rígida de um objeto, o movimento não muda o tamanho da figura e nem altera a essência, comparando-se à forma inicial do objeto.

Por exemplo, seja M um ponto de uma figura, onde M ocupa a posição P no espaço, antes do movimento e seja P' o ponto correspondente a P , ocupado por M depois do movimento. Se P é levado em P' e Q em Q' , nesse movimento os segmentos PQ e $P'Q'$ são congruentes, por que cada um deles corresponde a um segmento fixo entre dois pontos da figura. As transformações que possuem essas características são as *isometrias* que serão estudadas a seguir.

2.1 Definição

Ledergerber-Ruoff (1982) dedica todo o capítulo 2 de seu livro ao estudo das isometrias no plano euclidiano (objeto desse estudo) e define isometrias da seguinte maneira: “uma aplicação de $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ em $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$, que conserva distâncias, chama-se isometria, isto é, se Ω é uma isometria, e P e Q dois pontos arbitrários, e se $\overline{P} = (P)\Omega$ e $\overline{Q} = (Q)\Omega$, então $|PQ| = |\overline{P}\overline{Q}|$ ” (p. 58). Aqui a autora indica $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ para representar o plano euclidiano e $(P)\Omega$ para indicar a imagem de P por Ω .

Já Lima (1996), dá a seguinte definição de isometrias no plano: “Uma isometria

entre os planos π e π' é uma função $T : \pi \rightarrow \pi'$ que preserva as distâncias. Isto significa que, para quaisquer pontos $X, Y \in \pi$, pondo $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, tem-se $d(X', Y') = d(X, Y)$ ” (p. 13). O autor usa $d(X, Y)$ ou \overline{XY} para indicar a distância entre esses pontos no plano, ou seja, o comprimento do segmento de reta XY .

Abaixo, tem-se a definição de *isometria* que será usada nesse trabalho. Adianta-se que nesse trabalho será usado $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ para se referir ao conjunto de pontos do plano euclidiano, em que foi fixada uma unidade de comprimento, e α para indicar uma isometria qualquer nesse plano. Isto permite apresentar a seguinte definição.

Definição 2.1.1. *Uma isometria é uma aplicação $\alpha : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ que preserva distâncias, isto é, para quaisquer pontos $P, Q \in \mathbb{E}$, pondo $P' = \alpha(P)$ e $Q' = \alpha(Q)$, tem-se $d(P', Q') = d(P, Q)$.*

Dessa forma, as figuras F_1 e F_2 contidas em \mathbb{E} , serão isométricas ou congruentes se, somente se existir uma isometria α que transforme F_1 em F_2 , ou seja,

$$F_2 = \alpha(F_1)$$

Exemplo 2.1.1. *Seja a aplicação $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, definida por $T(x, y) = \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)$. Dados $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ pontos de \mathbb{E} , verifique se T é uma isometria aplicando a definição.*

Resolução: Tem-se que $T(A) = \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}, \frac{a+b}{\sqrt{2}} \right)$ e $T(B) = \left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}, \frac{c+d}{\sqrt{2}} \right)$, implica

$$\begin{aligned} d(T(A), T(B))^2 &= \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}} - \frac{c-d}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} - \frac{c+d}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{a-b-c+d}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{a+b-c-d}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(a-b-c+d)^2 + \frac{1}{2}(a+b-c-d)^2 \\ &= \frac{1}{2}[(a-b-c+d)^2 + (a+b-c-d)^2] \\ &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 4ac - 4bd) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd) \\ &= (a-c)^2 + (b-d)^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$d(T(A), T(B)) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = d((a, b), (c, d)) = d(A, B)$$

Portanto, T é uma isometria.

2.2 Propriedades da isometria

Apresentaremos a seguir algumas proposições referentes a *isometria*, algumas com prova imediata. As proposições que serão apresentadas e demonstradas a seguir foram em sua maioria baseada nos escritos de Ledergerber-Ruoff, Lima e Spira.

Proposição 2.2.1. *Toda isometria α leva pontos distintos em pontos distintos.*

Proposição 2.2.2. *A imagem do segmento de reta PQ por uma isometria α é o segmento de reta $P'Q'$, onde $P' = \alpha(P)$ e $Q' = \alpha(Q)$.*

Demonstração: Com efeito, dado um ponto $Z \in PQ$ e seja $Z' = \alpha(Z)$. Então

$$\begin{aligned} Z \in PQ &\Leftrightarrow \overline{PQ} = \overline{PZ} + \overline{ZQ} \\ &\Leftrightarrow \overline{P'Q'} = \overline{P'Z'} + \overline{Z'Q'} \\ &\Leftrightarrow Z' \in P'Q' \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que, se o ponto Z está entre os pontos P e Q , então sua imagem Z' , também está entre as imagens de P e Q .

Proposição 2.2.3. *Seja ABC um triângulo e α uma isometria. Então os triângulos ABC e $\alpha(A)\alpha(B)\alpha(C)$ são congruentes.*

Proposição 2.2.4. *Toda isometria é uma bijeção, e a inversa de uma isometria também é uma isometria.*

Demonstração: Seja α uma isometria; a definição implica imediatamente que α é uma aplicação injetiva (Proposição 2.2.1). Vamos agora mostrar que α é sobrejetiva. Seja H um ponto qualquer de \mathbb{E} e P, Q pontos distintos e com imagens $P' = \alpha(P)$ e $Q' = \alpha(Q)$, tais que $H \notin P'Q'$. Considere o triângulo $HP'Q'$; temos que esse triângulo é um dos quatro triângulos congruentes $H_iP'Q'$ que possuem $P'Q'$ como lado, sendo $1 \leq i \leq 4$. Então existem outros tantos triângulos congruentes a estes da forma T_iPQ . Segue da proposição anterior e do fato de α ser injetiva que os H_i são imagens dos T_i ; em particular, H é imagem de algum desses T_i , o que mostra que α é sobrejetiva, permitindo afirmar que α é uma bijeção e, portanto, existe a transformação inversa α^{-1} .

Sejam $P', Q' \in \mathbb{E}$ e P e Q suas imagens por α^{-1} . Tem-se que α aplica P e Q sobre P' e Q' , respectivamente. Como α é uma isometria, temos:

$$|\alpha^{-1}(P')\alpha^{-1}(Q')| = |PQ| = |P'Q'|,$$

o que mostra que α^{-1} é uma isometria.

Proposição 2.2.5. *Se α é uma isometria e r é uma reta, então $\alpha(r)$ também é uma reta.*

Demonstração: Com efeito, seja $r \subset \mathbb{E}$ uma reta, $P, Q \in r$ pontos distintos e r' uma reta determinada por $\alpha(P)$ e $\alpha(Q)$. Dado qualquer $X \in r$, se $\alpha(X) \notin r'$ então $\alpha(P)\alpha(Q)\alpha(X)$ é um triângulo não degenerado; aplicando a proposição anterior a α^{-1} concluímos que PQX também é um triângulo não degenerado, o que é uma contradição. Logo $\alpha(X) \in r'$, e concluímos que $\alpha(r) \subset r'$. Trocando r e r' e repetindo o raciocínio para α^{-1} obtemos que $\alpha^{-1}(r') \subset r$, ou seja, $r' \subset \alpha(r)$, donde $\alpha(r) = r'$.

Proposição 2.2.6. *Toda isometria preserva a medida dos ângulos, isto é, a imagem de um ângulo $P\widehat{O}Q$ por uma isometria α , é um ângulo congruente $P'\widehat{O}'Q'$.*

Demonstração: Sejam as semiretas de origem comum \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} , e sejam $P' = \alpha(P)$, $O' = \alpha(O)$ e $Q' = \alpha(Q)$. Tem-se que $\overrightarrow{O'P'} = \alpha(\overrightarrow{OP})$ e $\overrightarrow{O'Q'} = \alpha(\overrightarrow{OQ})$.

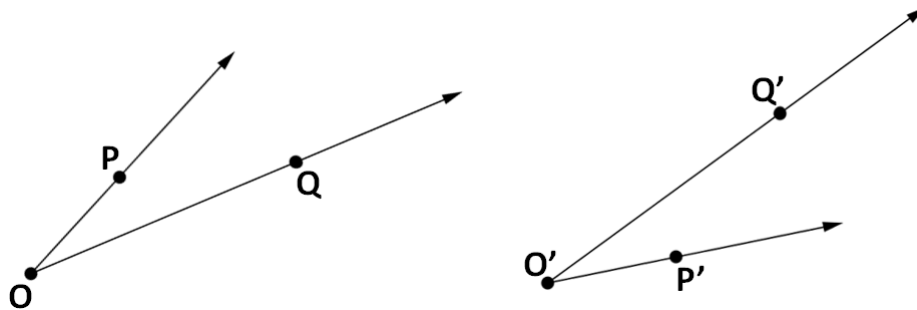


Figura 2.1: Isometria preserva ângulo

Temos pela isometria α que

$$|OP| = |O'P'|, |OQ| = |O'Q'| \text{ e } |PQ| = |P'Q'|$$

Logo, os dois triângulos $\Delta(OPQ)$ e $\Delta(O'P'Q')$ determinados são congruentes pelo caso LLL e, portanto, $P\widehat{O}Q = P'\widehat{O}'Q'$.

Corolário 2.2.1. *Uma isometria preserva o perpendicularismo entre retas, isto é, seja α uma isometria e r e l duas retas. Se $r \perp l$, então $r' \perp l'$, onde $r' = \alpha(r)$ e $l' = \alpha(l)$.*

Corolário 2.2.2. *A imagem de qualquer polígono por uma isometria é um polígono congruente ao original.*

Proposição 2.2.7. *Se uma isometria α fixa dois pontos distintos de uma reta r então $\alpha(P) = P$ para todo $P \in r$.*

Demonstração: Sejam dois pontos $P, Q \in r$ distintos e fixos por r , ou seja, $P = \alpha(P)$ e $Q = \alpha(Q)$. Se existisse um ponto $X \in r$ tal que $X' = \alpha(X) \neq X$ então, como se tem $d(P, X) = d(\alpha(P), \alpha(X)) = d(P, X')$, o ponto P seria o ponto médio do segmento XX' . Analogamente, Q também o ponto médio desse mesmo segmento XX' . Logo $P = Q$. Tem-se aqui uma contradição, pois P e Q são distintos.

Proposição 2.2.8. *Se uma isometria α possui três pontos fixos não colineares então α é a identidade.*

Demonstração: Seja α uma isometria e P, Q e R pontos pertencentes a \mathbb{E} , tais que $\alpha(P) = P$, $\alpha(Q) = Q$ e $\alpha(R) = R$. Considere ainda um ponto arbitrário $X \in \mathbb{E}$ não pertencente a nenhuma das retas determinadas pelos pontos P, Q e R que são fixas ponto a ponto por α , como visto na proposição anterior. Se traçarmos por X uma reta r que intercepte o triângulo PQR em pelo menos dois pontos distintos, temos que esses dois pontos serão fixos por α e r também é fixa ponto a ponto por α . Portanto, $\alpha(X) = X$, concluindo que α é a identidade.

Nesse escrito vamos nos referir à aplicação identidade como Id .

Proposição 2.2.9. *A composta de duas isometrias é, ainda, uma isometria.*

Demonstração: Sejam α e β duas isometrias no plano. Queremos mostrar com isso que $d((\alpha \circ \beta)(X), (\alpha \circ \beta)(Y)) = d(X, Y)$, para todo $X, Y \in \mathbb{E}$. Temos, então que:

$$\begin{aligned} d((\alpha \circ \beta)(X), (\alpha \circ \beta)(Y)) &= d(\alpha(\beta(X)), \alpha(\beta(Y))) \\ &= d(\beta(X), \beta(Y)), \text{ pois } \alpha \text{ é isometria.} \\ &= d(X, Y), \text{ pois } \beta \text{ é isometria.} \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha \circ \beta$ é uma isometria.

No restante desse trabalho, para facilitação da escrita, a composição $\alpha \circ \beta$ de isometrias será escrita como $\alpha\beta$.

Proposição 2.2.10. *O conjunto de todas as isometrias do plano, denotado por $Iso(\mathbb{E})$, munido da composição de isometrias é um grupo.*

Demonstração: Para isso, basta verificar se as condições de um conjunto ser grupo são válidas para $Iso(\mathbb{E})$.

(i) Pela proposição (2.2.9) a composta de isometrias é uma isometria.

(ii) A composição de isometrias é associativa, pois considerando $\alpha, \beta, \varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, tem-se que, para todo $P \in \mathbb{E}$,

$$[(\varphi \circ \beta) \circ \alpha](P) = (\varphi \circ \beta)(\alpha(P)) = \varphi(\beta(\alpha(P))) = \varphi \circ ((\beta \circ \alpha)(P)) = [\varphi \circ (\beta \circ \alpha)](P)$$

(iii) A aplicação identidade $Id : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ definida por $Id(P) = P$, para todo $P \in \mathbb{E}$ é uma isometria. Pois, $d(P, Q) = d(Id(P), Id(Q))$, $\forall P, Q \in \mathbb{E}$. Assim, $Id \circ \alpha = \alpha \circ Id = \alpha$, portanto $Iso(\mathbb{E})$ tem elemento neutro.

(iv) Pela proposição (2.2.4) todas as isometrias têm uma isometria inversa que, ainda, é uma isometria.

Proposição 2.2.11. *Sejam α e β isometrias. Se existirem em \mathbb{E} três pontos não colineares P , Q e R tais que $\alpha(P) = \beta(P)$, $\alpha(Q) = \beta(Q)$ e $\alpha(R) = \beta(R)$, tem-se que $\alpha = \beta$, isto é, $\alpha(X) = \beta(X)$ para todo $X \in \mathbb{E}$.*

Demonstração: Com efeito, nas condições acima descritas a isometria $\alpha^{-1}\beta$ deixa fixos os pontos P , Q e R , logo $\alpha^{-1}\beta = Id$, ou seja, $\alpha = \beta$.

Conhecidas as principais propriedades das isometrias no plano, serão apresentados exemplos dessas transformações.

2.3 Exemplos de isometrias

O exemplo mais óbvio de isometria é a função identidade $Id : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, que como já dito vamos representar por Id . Vejamos alguns outros exemplos de isometrias e suas propriedades.

2.3.1 Translação

Definição 2.3.1. *Considere um vetor \vec{v} do plano. Uma translação de vetor \vec{v} é uma função $\tau_{\vec{v}}$ que a cada ponto P do plano faz corresponder um ponto P' tal que $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.*

Escrevemos a translação pelo vetor \vec{v} como:

$$\tau_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$$

Sendo o ponto $P = (x, y)$ e um vetor $\vec{v} = (x_0, y_0)$, temos que a expressão analítica da translação $\tau_{\vec{v}}(P) = P'$ é dada por:

$$P' = \tau_{\vec{v}}(P) = (x, y) + (x_0, y_0) = (x + x_0, y + y_0)$$

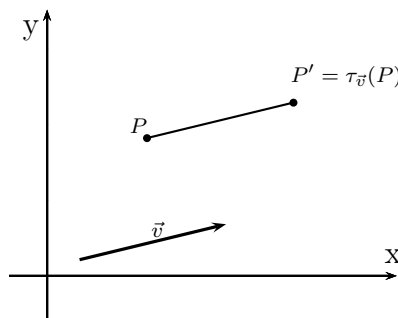


Figura 2.2: Translação por um vetor \vec{v}

Proposição 2.3.1. *A translação é uma isometria.*

Demonstração: De fato, dados $P' = \tau_{\vec{v}}(P)$ e $Q' = \tau_{\vec{v}}(Q)$, temos que $\overrightarrow{PP'} = \vec{v} = \overrightarrow{QQ'}$. Isto é, os segmentos PP' e QQ' determinados são equipolentes e, portanto, $PP'QQ'$ é um paralelogramo. Logo, temos $d(P', Q') = d(P, Q)$. A translação obedece às seguintes propriedades:

- $\tau_{\vec{u}}\tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{u}+\vec{v}} = \tau_{\vec{v}}\tau_{\vec{u}}$, para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$.
- $\tau_{\vec{v}}^{-1} = \tau_{-\vec{v}}$
- Se l é uma reta e $\vec{v} \neq \vec{0}$ então $\tau_{\vec{v}}(l) = l$ se, e somente se $l \parallel \vec{v}$.
- $\tau_{\vec{v}} = Id \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \tau_{\vec{v}}(P) = P$ para algum ponto P .

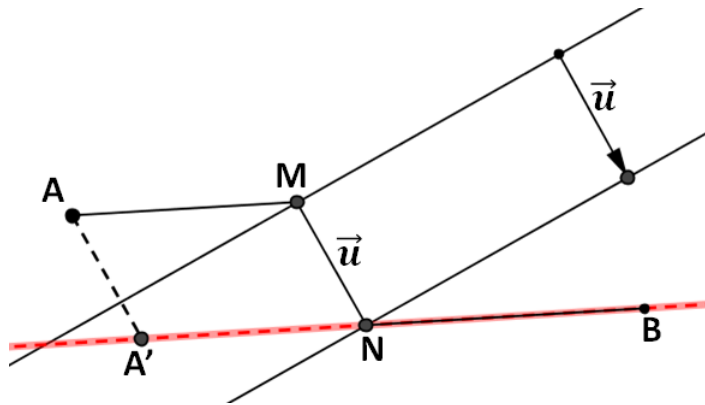
Exemplo 2.3.1. *Duas retas a e b estão representando dois passeios opostos de uma avenida. Em que pontos M e N , $M \in a$ e $N \in b$ deve-se colocar uma faixa de pedestres (perpendicular aos passeios), de modo que, uma pessoa localizada no ponto A possa ir para o ponto B , passando pela faixa, fazendo o menor percurso?*

Resolução: Para que o caminho de A para B seja o mínimo, temos que o trajeto $A - M - N - B$ são dados por segmentos de retas.

Seja \vec{u} o vetor distância da reta a à reta b , e $A' = \tau_{\vec{u}}(A)$. Temos:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN} = \vec{u}.$$

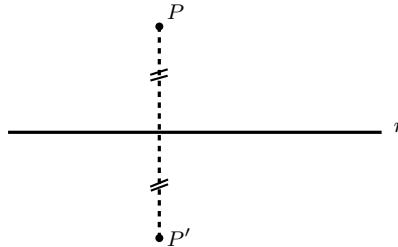
O caminho $A - M - N - B$ tem o mesmo comprimento do caminho $A - A' - N - B$. Este último percurso tem comprimento mínimo se $A' - N - B$ estão num mesmo segmento de reta.



Pela construção, vemos que as retas AM e NB são paralelas, se caminho $A - M - N - B$ tem comprimento mínimo.

2.3.2 Reflexão por uma reta

Definição 2.3.2. *Seja r uma reta. A reflexão por uma reta r é a função σ_r que a cada ponto P do plano associa um ponto $P' = \sigma_r(P)$ tal que a reta r é a mediatriz do segmento PP' , ou seja, P' é o simétrico de P em relação à reta r .*



Vamos determinar analiticamente a reflexão por uma reta r . Para isso, considere um vetor $\vec{v} = (a, b)$, paralelo a r .

Sejam a reta $r : -bx + ay = c$ e os pontos $P = (x, y)$ e $P' = (x', y')$ distintos. Temos que, como P' é simétrico de P pela reta r , então r é mediatriz do segmento PP' , ou seja, o ponto médio M do segmento PP' pertence à r e PP' é perpendicular a r .

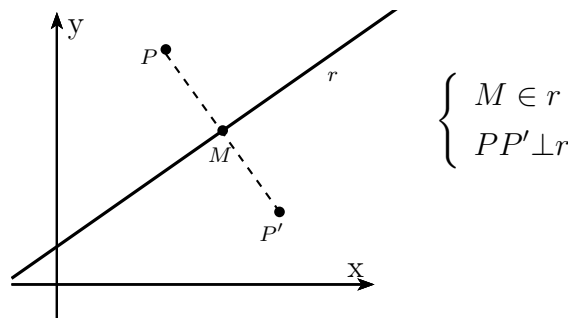


Figura 2.3: Reflexão de P por uma reta r qualquer

Como o ponto $M = \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2} \right) \in r$ é ponto médio de PP' , temos que $-b \left(\frac{x+x'}{2} \right) + a \left(\frac{y+y'}{2} \right) = c$ e para satisfazer $PP' \perp r$, temos que ter $\langle PP', (a, b) \rangle = 0$, assim $a(x' - x) + b(y' - y) = 0$.

Resolvendo o sistema abaixo, determina-se as coordenadas de $P' = (x', y')$ dado um ponto $P = (x, y)$ qualquer.

$$\begin{cases} -b \left(\frac{x+x'}{2} \right) + a \left(\frac{y+y'}{2} \right) = c \\ a(x' - x) + b(y' - y) = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} ay' - bx' = 2c + bx - ay & (I) \\ ax' + by' = ax + by & (II) \end{cases}$$

De (II), temos $y' = \frac{ax + by - ax'}{b}$ que substituindo em (I),

$$\begin{aligned}
a \left(\frac{ax + by - ax'}{b} \right) - bx' &= 2c + bx - ay \\
\frac{a^2x + aby - a^2x'}{b} - bx' &= 2c + bx - ay \\
a^2x + aby - a^2x' - b^2x' &= 2bc + b^2x - aby \\
a^2x + aby - b^2x + aby - 2bc &= a^2x' + b^2x' \\
x' &= \frac{a^2x + 2aby - 2bc - b^2x}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

Que substituindo em y' , temos

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{ax + by - a \left(\frac{a^2x + 2aby - 2bc - b^2x}{a^2 + b^2} \right)}{b} \\
y' &= \frac{a^3x + ab^2x + a^2by + b^3y - a^3x - 2a^2by + 2abc + ab^2x}{b(a^2 + b^2)} \\
y' &= \frac{b(2abx + a^2y + b^2y - 2a^2y + 2ac)}{b(a^2 + b^2)} \\
y' &= \frac{b^2y + 2abx + 2ac - a^2y}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

Portanto, dada uma reta $r : -bx + ay = c$ e um ponto $P = (x, y)$ temos que a reflexão do ponto P pela reta r é dada por:

$$P' = \sigma_r(P) = \left(\frac{a^2x + 2aby - 2bc - b^2x}{a^2 + b^2}, \frac{b^2y + 2abx + 2ac - a^2y}{a^2 + b^2} \right)$$

Veja a seguir o exemplo de reflexão do ponto $P = (2, 1)$ pela reta $-x + y = 1$:

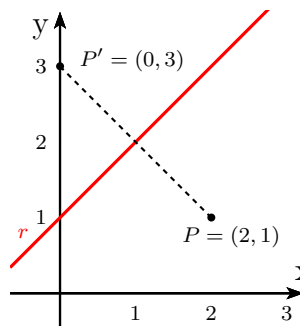
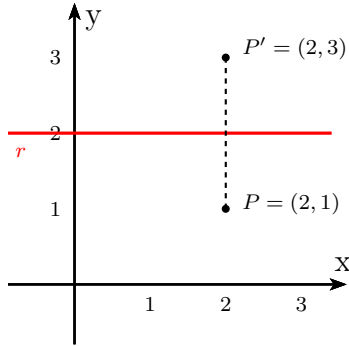
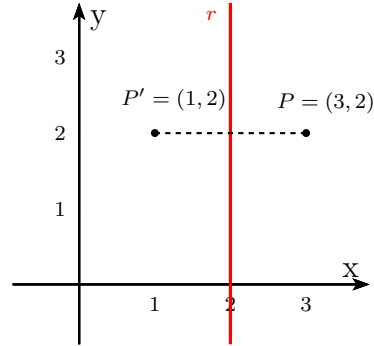


Figura 2.4: $\sigma_r(P)$, sendo $r : -x + y = 1$

Veja que no caso particular em que a reta r é paralela aos eixos Ox e Oy ($y = k$ e $x = k$, respectivamente), temos que, se $y = k$, então $P' = (x, 2k - y)$, pois nesse caso $\vec{v} = (1, 0)$ e se $x = k$, então $P' = (2k - x, y)$, pois nesse caso $\vec{v} = (0, 1)$, conforme figura a seguir:

Figura 2.5: $r : y = 2$ Figura 2.6: $r : x = 2$

Proposição 2.3.2. *A reflexão por uma reta r é uma isometria.*

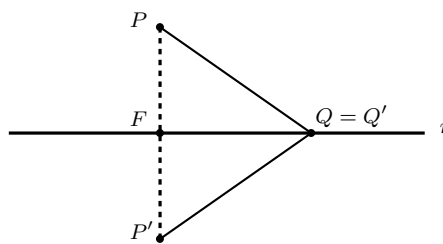
Demonstração: Para provar que a *reflexão por uma reta* é uma isometria, basta mostrar que, quaisquer que sejam os pontos P e Q e suas imagens P' e Q' por σ_r , vale $|PQ| = |P'Q'|$.

Temos assim, quatro casos a considerar:

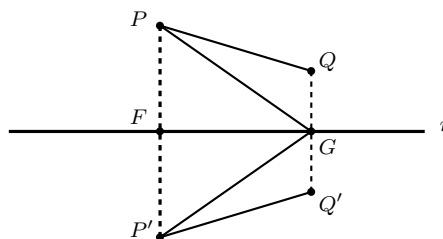
a) Se P e Q pertencem a r , então $P = P'$ e $Q = Q'$ e, portanto, vale a afirmação de ser isometria.

b) Se P não pertence a r e Q pertence a r , isto é, $Q = Q'$. Seja F a projeção ortogonal de P sobre a reta r . Se $Q = F$, temos imediatamente $|PQ| = |P'Q'|$.

Se $Q \neq F$, os triângulos $\triangle(FPQ)$ e $\triangle(FP'Q') = \triangle(FP'Q)$ são congruentes, pois tem um ângulo reto entre dois lados congruentes. Logo, $|PQ| = |P'Q'|$. Quando P pertence a r , e Q não pertence a r , a demonstração é análoga.



c) Se nem P e nem Q pertencem a r , consideremos F e G as projeções ortogonais de P e Q , respectivamente, sobre r .

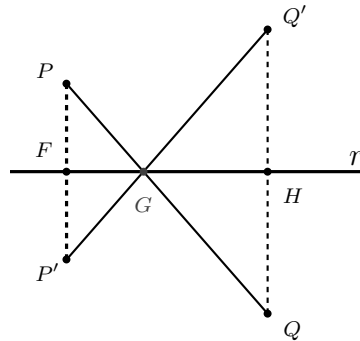


Se $F = G$, segue de imediato que $|PQ| = |P'Q'|$.

Se $F \neq G$, temos da mesma forma que no item b), que os triângulos $\triangle(PFG)$ e $\triangle(P'FG)$ são congruentes e $P\widehat{G}Q = P'\widehat{G}Q'$. Logo, pelo caso LAL, os triângulos $\triangle(PGQ)$ e $\triangle(P'GQ')$ também são congruentes. Portanto, $|PQ| = |P'Q'|$.

d) Se P e Q estiverem em lados opostos em relação à r . Sejam F e H as projeções ortogonais dos pontos P e Q sobre a reta r e G a interseção de PQ com a reta r .

Os triângulos retângulos GFP e GFP' têm cateto GF em comum e $\overline{FP} = \overline{FP'}$. Logo, $\overline{GP} = \overline{GP'}$. Da mesma forma, $\overline{GQ} = \overline{GQ'}$. Assim os triângulos GPP' e GQQ' são isósceles, portanto suas medianas são bissetrizes: $P\widehat{G}F = F\widehat{G}P'$ e $Q\widehat{G}H = H\widehat{G}Q'$. Por outro lado, $P\widehat{G}F = Q\widehat{G}H$ pois são opostos pelo vértice.



Então, $P\widehat{G}P' = Q\widehat{G}Q'$. Como $Q\widehat{G}Q'$ é o suplemento do ângulo $P\widehat{G}Q'$, segue-se que $P\widehat{G}P'$ também é, logo P', G e Q' são colineares.

Portanto,

$$\overline{P'Q'} = \overline{P'G} + \overline{GQ'} = \overline{PG} + \overline{GQ} = \overline{PQ}$$

Dessa forma, temos que a *reflexão por uma reta* é uma isometria e gozam das seguintes propriedades:

- $\sigma_r \neq Id$, qualquer que seja r .
- $\sigma_r^2 = Id$, o que é equivalente a $\sigma_r^{-1} = \sigma_r$.

Veja algumas situações resolvidas com o uso de reflexão em retas nos exemplos abaixo.

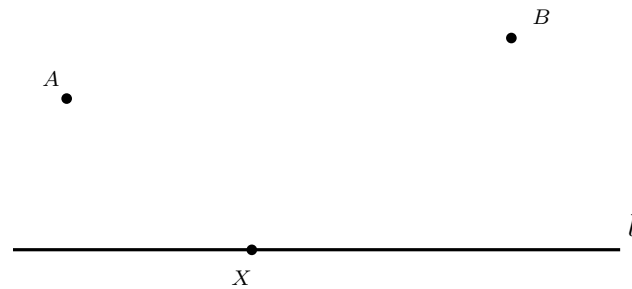
Exemplo 2.3.2. Determinar a equação da reta r , sendo r o eixo de reflexão dos pontos $A = (8, 5)$ e $B = (0, 9)$.

Seja $P = (x, y)$ um ponto genérico. Se $P \in r$ então, P é equidistante aos pontos A e B . Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
d(P, A) &= d(P, B) \\
\sqrt{(x-8)^2 + (y-5)^2} &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-9)^2} \\
x^2 - 16x + 64 + y^2 - 10y + 25 &= x^2 + y^2 - 18y + 81 \\
-16x - 10y + 89 &= -18y + 81 \\
-16x + 8y + 8 &= 0 \\
-2x + y + 1 &= 0
\end{aligned}$$

Logo, a equação da reta r é $r : -2x + y + 1 = 0$.

Exemplo 2.3.3. Considere um plano dividido em dois semiplanos por uma reta l . Num destes semiplanos considere dois pontos A e B , como mostra a figura abaixo. Vamos considerar um ponto X , qualquer, em l .



Prove que, $AX + XB$ terá o menor comprimento possível se $X \in A'B$, onde A' é o simétrico de A em relação à reta l .

Resolução: Seja A' o simétrico de A em relação à reta l . Devemos provar que $AX + XB < AY + YB$, qualquer que seja $Y \in l$ com $Y \neq X$.

Vamos considerar o caso em que Y está à esquerda de X , pois para o caso onde Y está à direita é feita de maneira análoga.

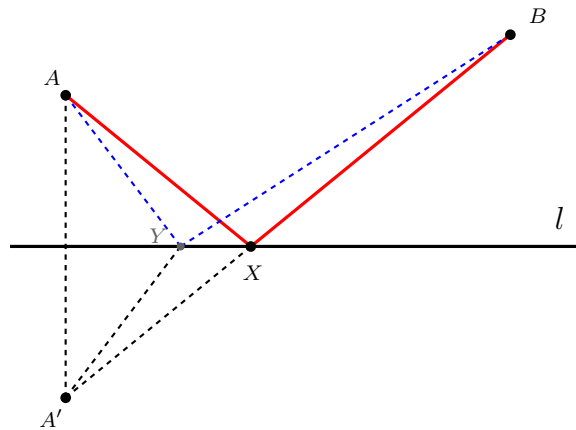


Figura 2.7: Distância mínima

Considere o triângulo $\triangle A'YB$. Por desigualdade triangular, temos que:

$$A'B < A'Y + YB$$

$$A'X + XB < A'Y + YB \quad \text{pela definição de reflexão } A'X=AX \text{ e } A'Y=AY$$

$$AX + XB < AY + YB$$

Logo, $AX + XB$ terá o menor comprimento possível se $X \in A'B$, onde A' é o simétrico de A em relação à l .

Exemplo 2.3.4. Considere um triângulo ABC , com ângulo agudo em C . Dado um ponto P no interior desse triângulo, determine o menor caminho para ir de P ao lado BC , passando pelo lado AC e retornar a P .

Resolução: Esse problema se resume em encontrar o triângulo de menor perímetro com vértice em P , num ponto sobre AC e num ponto sobre BC .

Seja P' o simétrico de P em relação ao lado AC do triângulo e P'' o simétrico de P em relação ao lado BC .

Tem-se que os segmentos $P'P''$ intercepta AC num ponto M e BC num ponto N . Pela definição de reflexão, tem-se $\overline{P'M} = \overline{MP}$ e $\overline{PN} = \overline{NP''}$.

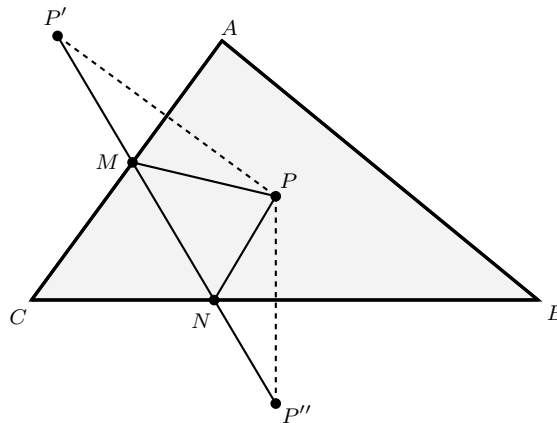


Figura 2.8: Triângulo PMN de perímetro mínimo

Dessa forma, pelo exemplo anterior, sabemos que $PM + MN$ será mínima se $M \in P'N$ e que $PN + NM$ será mínima se $N \in P''M$.

Conclui-se, então que, os pontos M e N , dados nas condições acima, pertencem ao segmento $P'P''$.

Assim,

$$\overline{P'P''} = \overline{P'M} + \overline{MN} + \overline{NP''} = \overline{PM} + \overline{MN} + \overline{NP} = P - M - N - P$$

sendo o percurso $P - M - N - P$, o perímetro do triângulo PMN.

Veja que, para quaisquer outros pontos genéricos $X \in AC$ e $Y \in BC$, diferentes simultaneamente de M e N , o triângulo PXY terá perímetro maior que o perímetro do triângulo PMN .

Considere $P'X$, reflexão do lado PX do triângulo PXY em relação ao segmento AC , e YP'' a reflexão do lado YP em relação ao segmento BC , dados na figura seguinte.

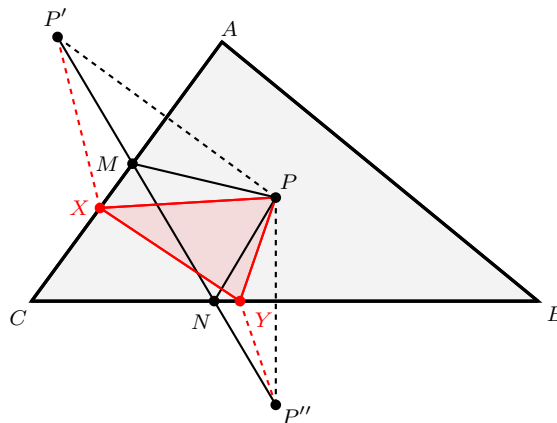


Figura 2.9: Triângulo genérico PXY

Tem-se, assim que, a poligonal $P'XY P''$ cujo comprimento dado por $\overline{P'X} + \overline{XY} + \overline{YP''}$ é maior que o segmento $P'P''$, devido ao fato de que a menor distância entre os pontos P' e P'' ser dada por um segmento de reta.

Pontanto, o menor caminho para ir de P ao lado BC , passando pelo lado AC e retornar a P é quando os pontos M e N estão sobre o segmento $P'P''$.

2.3.3 Rotação

Antes de definir rotação, necessitamos das noções de ângulo e de ângulo orientado. Segundo Rezende e Queiroz (2008),

... um **ângulo** é determinado pela união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semirretas \underline{OA} e \underline{OB} então essas semirretas são chamadas lados do ângulo, e o ponto O é chamado vértice do ângulo. (p. 21)

Ainda segundo os mesmos autores, um **ângulo orientado** é aquele no qual estão bem determinados o sentido de abertura do ângulo, indicando seu lado inicial, que é chamado origem do ângulo, e seu lado final, a extremidade.

Na figura abaixo, temos um ângulo formado pelas semiretas \underline{OA} e \underline{OB} , no qual foi escolhida a semirreta \underline{OA} para seu lado inicial, e a semirreta \underline{OB} , para o lado final. Desse modo, o ângulo está orientado de \underline{OA} para \underline{OB} e o denotamos por \widehat{AOB} . Sendo O o vértice desse ângulo.

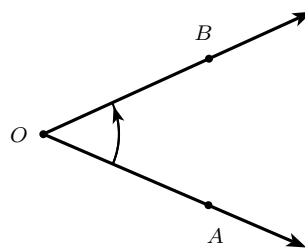
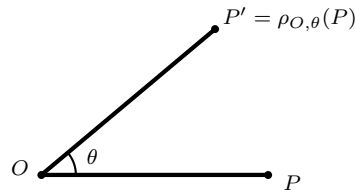


Figura 2.10: Ângulo orientado \widehat{AOB}

Definição 2.3.3. *Seja O um ponto do plano e θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) um ângulo orientado no sentido positivo (anti-horário). A função que tem O como ponto fixo e aplica todo ponto $P \neq O$ no ponto P' , tal que o ângulo $\widehat{POP'} = \theta$ e $|OP| = |OP'|$, chama-se rotação de centro O e ângulo θ , e é indicada por $\rho_{O,\theta}$.*

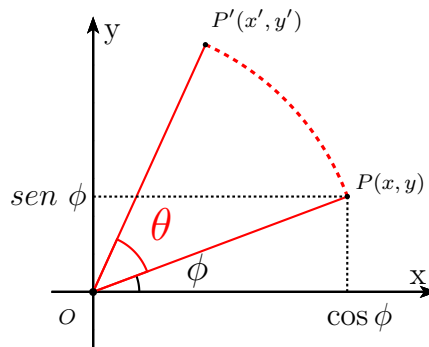
Temos que o ponto O é o *centro de rotação* e o ângulo θ é chamado de *ângulo de rotação*.



Vamos determinar analiticamente a rotação de centro O e ângulo θ . Temos então dois casos a considerar: uma rotação com centro na origem $O = (0, 0)$ e uma rotação com centro num ponto $O' \neq O$.

1) $O = (0, 0)$

Neste caso, temos uma rotação $\rho_{O, \theta}$ em torno da origem. Sejam $O = (0, 0)$, $P = (x, y)$ e $P' = \rho_{O, \theta}(P) = (x', y')$.



Considere ϕ como o ângulo formado entre o segmento OP e o eixo Ox no sentido positivo. Então $P = (x, y) = (|OP| \cos \phi, |OP| \sin \phi)$. Assim,

$$\begin{aligned} P' = (x', y') &= (|OP| \cos(\phi + \theta), |OP| \sin(\phi + \theta)) \\ &= (|OP|(\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta), |OP|(\sin \phi \cos \theta + \sin \theta \cos \phi)) \\ &= (|OP| \cos \phi \cos \theta - |OP| \sin \phi \sin \theta, |OP| \sin \theta \cos \phi + |OP| \sin \phi \cos \theta) \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \end{aligned}$$

Logo, $P' = \rho_{O, \theta}(P) = (x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta, x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta)$

2) $O' = (a, b) \neq (0, 0)$

Vamos determinar a rotação de centro $O' = (a, b)$, $P = (x, y)$ e $P' = \rho_{O, \theta}(P) = (x', y')$.

Considere o sistema $\bar{x}O'\bar{y}$ de origem O' transladado do sistema xOy pelo vetor $\vec{v} = (a, b)$.

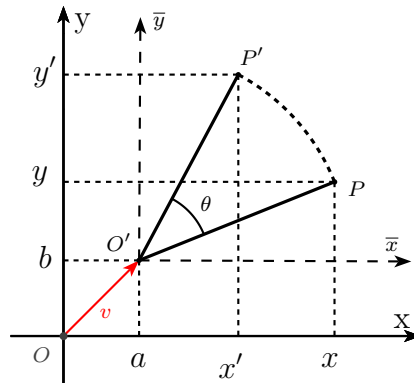


Figura 2.11: Rotação com centro fora da origem

Temos que a correspondência de coordenadas de P entre os eixos se faz da seguinte forma: $\bar{x} = x - a$ e $\bar{y} = y - b$. Assim, a rotação de P referente aos eixos $\bar{x}O'\bar{y}$ é dada por

$$P' = ((x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta, (x - a) \sin \theta + (y - b) \cos \theta)$$

E como essa rotação é obtida a partir da translação por $\vec{v} = (a, b)$ da rotação de centro na origem temos que, no sistema xOy

$$P' = \rho_{O'}\theta(P) = ((x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta + a, (x - a) \sin \theta + (y - b) \cos \theta + b)$$

Encerrando assim, as possíveis rotações no plano.

Proposição 2.3.3. *A rotação de centro O e ângulo θ é uma isometria.*

Demonstração: Sejam os pontos O , P e Q não colineares e um ângulo θ qualquer e, sejam também, os pontos $P' = \rho_{O,\theta}(P)$ e $Q' = \rho_{O,\theta}(Q)$. Observe a figura abaixo.

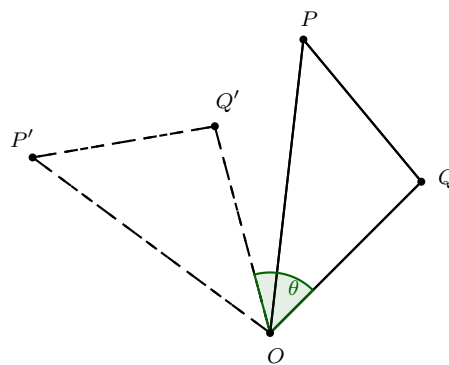


Figura 2.12: Rotação é isometria

Pela definição de rotação, temos que $OP = OP'$ e $OQ = OQ'$ e sabemos que $\widehat{POP'} = \widehat{QQ'Q'}$. Mas,

$$\widehat{QOP} = \widehat{QOQ'} - \widehat{P'OQ'} = \theta - \widehat{P'OQ'}$$

e

$$Q'\widehat{O}P' = P\widehat{O}P' - P\widehat{O}Q' = \theta - P\widehat{O}Q'$$

Logo, $Q'\widehat{O}P = Q'\widehat{O}P'$. Então pelo caso LAL temos que $\triangle(POQ) \cong \triangle(P'OQ')$ o que prova que $PQ = P'Q'$. Portanto, a rotação de centro O e ângulo θ é uma isometria e possui as seguintes propriedades:

- $\rho_{O,\theta} = Id \Leftrightarrow \theta = 0$
- $\rho_{O,\theta}\rho_{O,\psi} = \rho_{O,\theta+\psi} = \rho_{O,\psi}\rho_{O,\theta}$.
- Se $\theta = \pi$, então $P' = \rho_{O,\pi}(P) = \sigma_O(P)$, ou seja, os pontos P , O e P' são alinhados e σ_O é a reflexão central pelo ponto O .

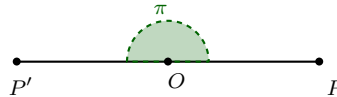


Figura 2.13: Reflexão pelo ponto O

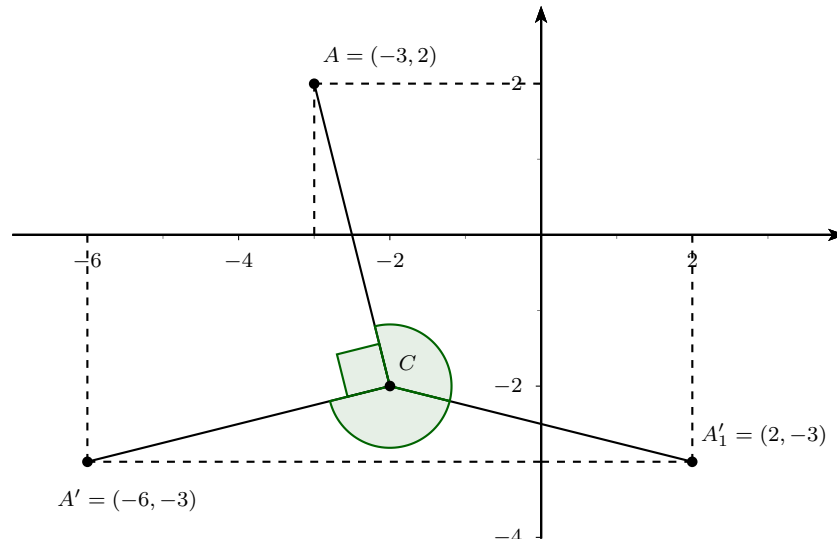
Exemplo 2.3.5. O ponto $A = (-3, 2)$ faz parte de uma figura que passou por uma rotação de centro $C = (-2, -2)$. Determinar a imagem desse ponto após a transformação, sabendo que ele possui ordenada igual a -3 e a rotação é com o menor ângulo no sentido anti horário.

Pela definição de rotação, a distância entre um ponto e o centro de rotação é a mesma distância entre esse centro e a respectiva imagem desse ponto.

Aplicando a fórmula da distância entre esses pontos temos:

$$\begin{aligned} d(A, C) &= d(A', C) \\ \sqrt{(-2 - (-3))^2 + (-2 - 2)^2} &= \sqrt{(-2 - x)^2 + (-2 - (-3))^2} \\ 1^2 + (-4)^2 &= 4 + 4x + x^2 + 1^2 \\ 16 &= 4 + 4x + x^2 \\ 0 &= x^2 + 4x - 12 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação acima, temos que: $x = -6$ ou $x = 2$. Logo, os pontos possuem coordenadas $(-6, -3)$ ou $(2, -3)$. Observe o gráfico abaixo:



Pelo gráfico acima, temos que o ponto obtido com a rotação de menor ângulo foi o ponto $A' = (-6, -3)$.

2.3.4 Reflexão deslizante

Definição 2.3.4. *Seja uma reta r e um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$, com $\vec{v} \parallel r$, chama-se reflexão deslizante à função que a cada ponto P do plano associa o ponto P' , que é obtido através da reflexão em torno da reta r , chamada de eixo, seguida da translação pelo vetor \vec{v} . Assim, a reflexão deslizante do ponto P é dada por $P' = \tau_{\vec{v},r} = \tau_{\vec{v}}\sigma_r(P)$, ou seja, temos que a reflexão deslizante é a composição de uma reflexão pela reta e uma translação por um vetor paralelo a essa reta.*

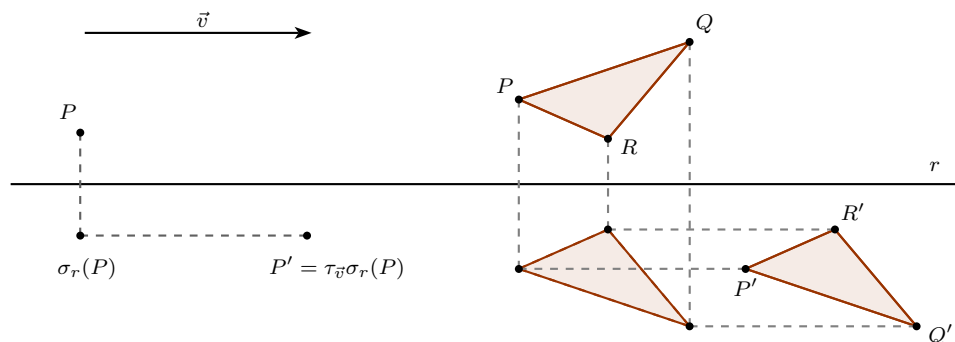


Figura 2.14: Reflexão deslizante

Vamos determinar analiticamente a reflexão deslizante. Para isso, considere a reta $r : -bx + ay = c$ e o vetor $\vec{v} = (a, b)$, paralelo a r . Como a reflexão deslizante é a

composição de uma translação com uma reflexão, temos que sua representação analítica é dada por uma reflexão por r seguida de uma translação pelo vetor \vec{v} .

Portanto, dada a reta r , o vetor $\vec{v} = (a, b)$ e um ponto $P = (x, y)$ temos que a reflexão deslizante do ponto P é dada por:

$$P' = \tau_{\vec{v}}\sigma_r(P) = \left(\frac{a^2x + 2aby - 2bc - b^2x}{a^2 + b^2} + a, \frac{b^2y + 2abx + 2ac - a^2y}{a^2 + b^2} + b \right)$$

Proposição 2.3.4. *A reflexão deslizante é uma isometria.*

Demonstração: De fato, temos que a reflexão por uma reta e a translação por um vetor são isometrias. E, como já visto, a composição de isometrias é, ainda, uma isometria. Portanto, a reflexão deslizante é uma isometria e obedece às seguintes propriedades:

- $\tau_{\vec{v},r} \neq Id$ quaisquer que sejam r e \vec{v} .
- $\tau_{\vec{v},r}^{-1} = \tau_{-\vec{v},r}$.
- Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ então $\tau_{\vec{v},r}(P) \neq P$ para todo P .
- Se P é um ponto arbitrário e $P' = \tau_{\vec{v},r}(P)$ então $M \in r$, sendo M o ponto médio do segmento PP' .

Exemplo 2.3.6. *Veja que na figura abaixo, são dados uma reta $r : -x + y = 1$, o vetor $\vec{v} = (1, 1)$, paralelo a r e o ponto $P = (3, 1)$. Tem-se que, a imagem de P pela reflexão em r é $H = (0, 4)$ e que, trasladando esse ponto pelo vetor \vec{v} chega-se ao ponto $P' = (1, 5)$ que é imagem de P' na composição dessas funções, ou seja, $(1, 5) = \tau_{\vec{v}}\sigma_r(3, 1)$*

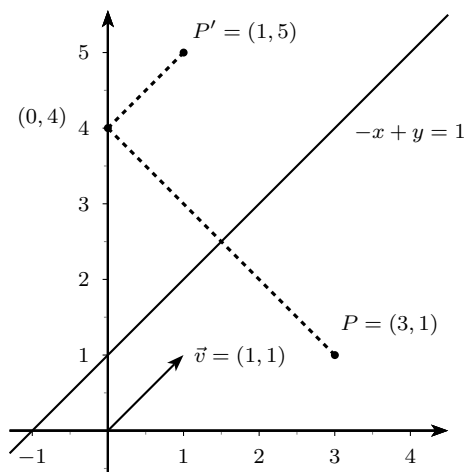


Figura 2.15: Reflexão deslizante do ponto $P = (3, 1)$

2.4 Composição de isometrias

Sabe-se que a composição de isometrias é, ainda, uma isometria. Nesta seção será estudado o resultado de algumas dessas composições de isometrias. Principalmente, as composições com reflexões. Esses resultados levarão à classificação das isometrias apresentadas na seção seguinte.

Dada a importância da composição entre reflexões, será apresentada, inicialmente, uma proposição com a composição entre reflexões em retas paralelas, demonstrada por Mir (2014).

2.4.1 Composição de duas reflexões em retas paralelas

Proposição 2.4.1. *Sejam σ_r e σ_s duas reflexões em torno das retas r e s , respectivamente. Se r e s são retas paralelas distintas, então $\alpha = \sigma_s\sigma_r$ é a translação por um vetor $\tau_{\vec{v}}$ perpendicular às retas e de comprimento igual ao dobro da distância entre elas.*

Demonstração: Considere P um ponto no plano. Suponha que P está num dos semiplanos determinados por r e s está no outro e, além disso, que a distância de P a r é menor ou igual que a distância d entre as retas r e s . Os demais casos são análogos.

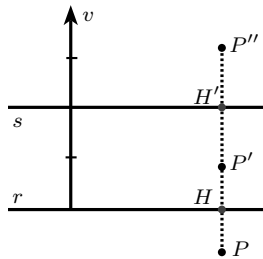


Figura 2.16: Composição de duas reflexões em retas paralelas

Seja $P' = \sigma_r(P)$ e $P'' = \sigma_s(P')$. Então $P'' = \sigma_s\sigma_r(P) = \alpha(P)$. Tome H o ponto de interseção da reta r com o segmento PP' e H' o ponto de interseção da reta s com o segmento $P'P''$.

Pela definição de reflexão conclui-se que os pontos P , P' e P'' são colineares.

Considere o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{2HH'}$. Então o vetor \vec{v} é perpendicular às retas r e s e o seu comprimento é $2d$. E ainda, temos que $\vec{v} = \overrightarrow{2HH'} = 2(\overrightarrow{HP'} + \overrightarrow{P'H'})$.

Como os pontos P , H e P' são colineares, pela definição de reflexão, e o segmentos PH e HP' são congruentes, segue que $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{HP'}$. Da mesma maneira que $\overrightarrow{P'H'} = \overrightarrow{H'P''}$. Assim,

$$\vec{v} = \overrightarrow{HP'} + \overrightarrow{HP'} + \overrightarrow{P'H'} + \overrightarrow{P'H'} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HP'} + \overrightarrow{P'H'} + \overrightarrow{P'P''} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = \overrightarrow{PP''}$$

Logo, $\tau_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v} = P + \overrightarrow{PP''} = P'' = \alpha(P)$.

Portanto, α é a translação por um vetor \vec{v} que é perpendicular às retas r e s e tem comprimento igual ao dobro da distância entre essas retas, sendo o sentido desse vetor de r para s .

2.4.2 Composição de três reflexões em retas paralelas

Proposição 2.4.2. *Sejam σ_r , σ_s e σ_t as reflexões em torno das retas r , s e t , respectivamente. Se r , s e t são retas paralelas distintas, então $\alpha = \sigma_t\sigma_s\sigma_r$ é uma reflexão em torno de uma reta u paralela às essas retas, sendo que a reta u é única.*

Demonstração: Considere $P \in \mathbb{E}$, um ponto. Seja P' a imagem do ponto P por reflexão no eixo r , P'' a imagem do ponto P' por reflexão no eixo s e P''' a imagem do ponto P'' por reflexão no eixo t . Então:

$$P''' = \sigma_t(P'') = \sigma_t(\sigma_s(P')) = \sigma_t(\sigma_s(\sigma_r(P))) = \sigma_t\sigma_s\sigma_r(P) = \sigma(P)$$

Vimos na demonstração da proposição anterior que os pontos P , P' e P'' são colineares. Usando o mesmo raciocínio, obtemos que os pontos P , P' , P'' e P''' são, também, colineares.

Seja u a mediatriz do segmento PP''' . Assim, por definição de reflexão e pela unicidade da mediatriz, $P''' = \sigma_u(P)$.

Logo, $\sigma = \sigma_u$, ou seja, $\sigma_t\sigma_s\sigma_r$ é uma reflexão em torno da reta u .

Como as retas u e r são perpendiculares à reta determinada por PP''' , segue que u e r são paralelas. Por hipótese e por transitividade, obtemos que r , s , t e u são retas paralelas.

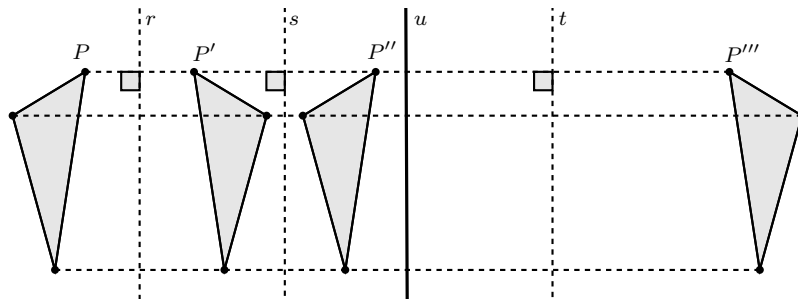


Figura 2.17: Composição de três reflexões em retas paralelas

2.4.3 Composição de duas reflexões em retas concorrentes

Proposição 2.4.3. *Sejam σ_r e σ_s duas reflexões em torno das retas r e s , respectivamente. Se r e s são retas concorrentes, então $\alpha = \sigma_s\sigma_r$ é a rotação $\rho_{O,\theta}$, onde $O = r \cap s$ e θ é igual ao dobro do ângulo orientado de r para s no sentido positivo.*

Demonstração: Considere as retas r e s concorrentes no ponto O e $P \neq O$ um ponto arbitrário. Seja $P' = \sigma_r(P)$ e $P'' = \sigma_s(P')$. Então $P'' = \sigma_s\sigma_r(P) = \alpha(P)$. Tome H o ponto de interseção da reta r com o segmento PP'' e H' o ponto de interseção da reta s com o segmento $P'P''$, conforme figura abaixo:

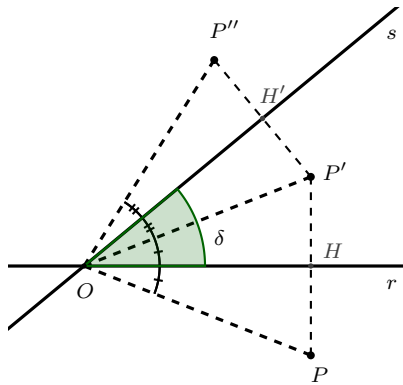


Figura 2.18: Composição de duas reflexões em retas concorrentes

Temos, assim, que:

$$\begin{aligned}
 P\hat{O}P'' &= P\hat{O}H + H\hat{O}P' + P'\hat{O}H' + H'\hat{O}P'' = \\
 &= 2(H\hat{O}P') + 2(P'\hat{O}H') = \\
 &= 2(H\hat{O}H') = \\
 &= 2\delta = \theta
 \end{aligned}$$

Logo, $P'' = \rho_{O,\theta}(P) = \alpha(P)$

Portanto, α é a rotação de centro O e ângulo θ igual ao dobro do ângulo orientado de r para s no sentido positivo.

Corolário 2.4.1. *Se r e s são retas perpendiculares, então $\alpha = \sigma_s\sigma_r$ é uma reflexão central, de centro $O = r \cap s$, ou seja, $\alpha = \sigma_s\sigma_r = \rho_{O,\pi} = \sigma_O$.*

Lema 2.4.1. *Sejam a rotação $\rho_{O,\theta}$ centrada em O com ângulo de rotação θ , e r uma reta qualquer que passe pelo ponto O . Então existem, e são únicas, as retas r_1 e r_2 tais que $\rho_{O,\theta} = \sigma_r\sigma_{r_1} = \sigma_{r_2}\sigma_r$.*

Demonstração: De fato, considere um ponto A no plano. Seja $\rho_{O,\theta}$ uma rotação como na hipótese, e seja $A' = \rho_{O,\theta}(A)$. Considere uma reta r qualquer que passa pelo ponto O . Como visto na proposição anterior, toda rotação pode ser vista como a composição de duas reflexões em torno de retas concorrentes, sendo que o centro da rotação é o ponto de intersecção dessas retas e a amplitude é o dobro da medida do ângulo entre as retas.

Assim, as retas r_1 e r_2 são as únicas retas que fazem um ângulo de $\frac{\theta}{2}$ com a reta r , de tal forma que $\rho_{O,\theta} = \sigma_r\sigma_{r_1}$ e $\rho_{O,\theta} = \sigma_{r_2}\sigma_r$. Veja que, as figuras seguintes, mostra mais claramente essa proposição.

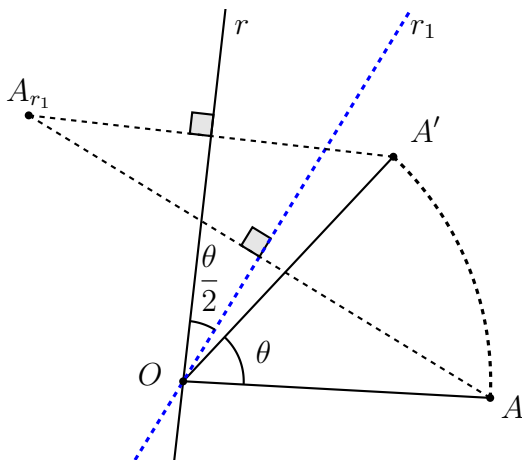


Figura 2.19: $\rho_{O,\theta} = \sigma_r\sigma_{r_1}$

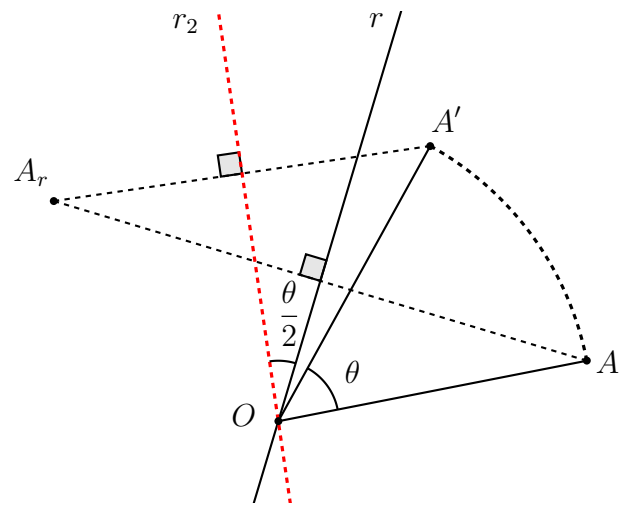


Figura 2.20: $\rho_{O,\theta} = \sigma_{r_2}\sigma_r$

2.4.4 Composição de três reflexões em retas concorrentes

Proposição 2.4.4. *Sejam σ_r , σ_s e σ_t as reflexões em torno das retas r , s e t , respectivamente. Se r , s e t são retas concorrentes num ponto P , então existe uma única reta u que passa pelo ponto P , de tal modo que $\alpha = \sigma_t\sigma_s\sigma_r$ é uma reflexão em torno da reta u .*

Demonstração: Pela proposição anterior tem-se que $\sigma_s\sigma_r$ é uma rotação de centro P e de amplitude igual ao dobro do ângulo formado entre as retas r e s . Sendo $\frac{\theta}{2}$ o ângulo formado entre as retas r e s , então $\sigma_s\sigma_r = \rho_{P,\theta}$.

Pelo Lema 1, existe uma única reta u , que passa por P e forma um ângulo de $\frac{\theta}{2}$ com a reta t , de tal forma que $\sigma_s\sigma_r = \rho_{P,\theta} = \sigma_t\sigma_u$. Então,

$$\sigma_t\sigma_s\sigma_r = \sigma_t\sigma_t\sigma_u$$

Como $\sigma_t\sigma_t = Id$, então $\sigma_t\sigma_s\sigma_r = \sigma_u$.

Veja que, pela definição de reflexão, a reta u é a mediatriz de dois pontos correspondentes, por exemplo, A e A''' da figura abaixo.

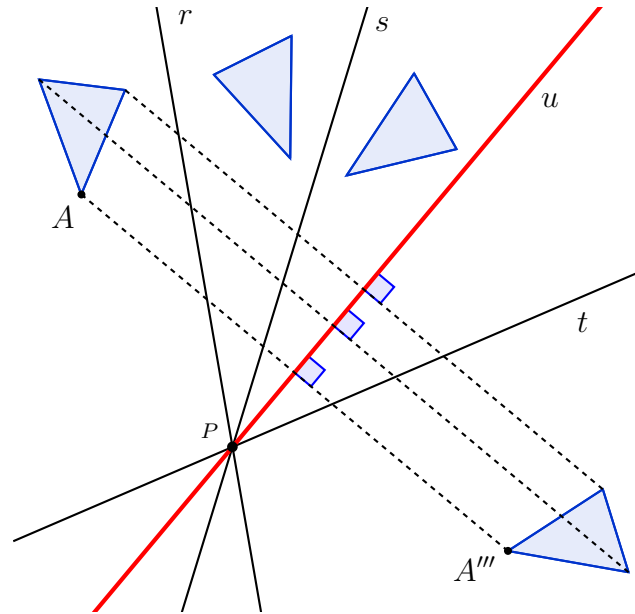


Figura 2.21: Composição de três reflexões em retas concorrentes

2.4.5 Composição de translação com reflexão

Proposição 2.4.5. *Sejam $\tau_{\vec{v}}$ uma translação e σ_r uma reflexão; então $\tau_{\vec{v}}\sigma_r$ é uma reflexão deslizante de eixo paralelo a r .*

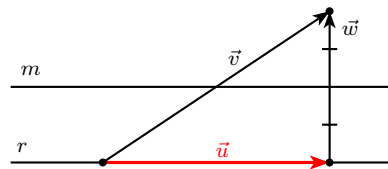


Figura 2.22: Composição de translação com reflexão

Demonstração: Seja $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, com $\vec{u} \parallel r$ e $\vec{w} \perp r$, e seja m uma reta tal que $m = \tau_{\frac{\vec{u}}{2}}(r)$. Temos que $\tau_{\vec{v}} = \sigma_m\sigma_r$. Então:

$$\tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{u}+\vec{w}} = \tau_{\vec{u}}\tau_{\vec{w}} = \tau_{\vec{u}}\sigma_m\sigma_r$$

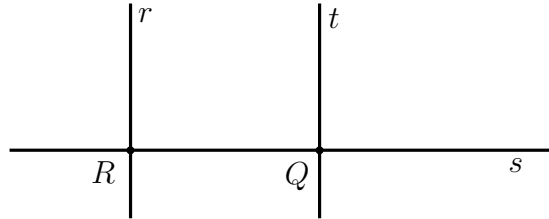
donde

$$\tau_{\vec{v}}\sigma_r = \tau_{\vec{u}}\sigma_m\sigma_r\sigma_r = \tau_{\vec{u}}\sigma_m.$$

Mostra-se assim que, a composição de uma translação com uma reflexão é uma reflexão deslizante.

2.4.6 Composição de três reflexões em retas com duas retas perpendiculares à terceira

Proposição 2.4.6. *Sejam r, s e t três retas. Se $r, t \perp s, r \neq t$, com R e Q as intersecções de s com r e t , respectivamente, então, $\alpha = \sigma_t \sigma_s \sigma_r = \tau_{(2\overrightarrow{RQ})} \sigma_s = \sigma_t \sigma_R$, onde σ_R é uma reflexão central pelo ponto R é uma reflexão deslizante de eixo s .*



Demonstração: De fato, considerando $\alpha = \sigma_t \sigma_s \sigma_r$, tem-se que pelo perpendicularismo entre r e s e entre t e s , são equivalentes as seguintes representações de α :

$$\alpha = \sigma_t \sigma_s \sigma_r = \sigma_s \sigma_t \sigma_r = \sigma_s \tau_{(2\overrightarrow{RQ})} = \tau_{(2\overrightarrow{RQ})} \sigma_s = \sigma_t \sigma_R = \sigma_Q \sigma_r$$

Essa proposição afirma que, a composição entre três reflexões em retas, onde uma dessas retas é perpendicular às outras duas, é uma composição entre uma reflexão central e uma reflexão em retas.

2.4.7 Composição de translação com rotação

Proposição 2.4.7. *Sejam $\tau_{\vec{v}}$ uma translação e $\rho_{O,\theta}$ uma rotação. Então $\tau_{\vec{v}} \rho_{O,\theta}$ é uma rotação de ângulo θ .*

Demonstração: De fato, basta tomar a reta $m \perp \vec{v}$ passando por O . Existem as retas r e n , tais que $\rho_{O,\theta} = \sigma_m \sigma_r$ e $\tau_{\vec{v}} = \sigma_n \sigma_m$.

Portanto,

$$\tau_{\vec{v}} \rho_{O,\theta} = \sigma_n \sigma_m \sigma_m \sigma_r = \sigma_n \sigma_r = \rho_{O',\theta} \quad \text{onde } O' = n \cap r$$

Veja na figura 2.23 como O' é determinado a partir de O, θ e \vec{v} .

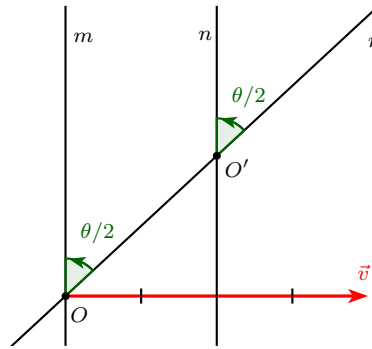


Figura 2.23: Composição de translação com rotação

2.4.8 Composição de rotações

Proposição 2.4.8. *Sejam $\rho_{O,\theta}$ e $\rho_{O',\psi}$ duas rotações de centros distintos. Temos que $\rho_{O,\theta}\rho_{O',\psi} = \rho_{O'',\theta+\psi}$ se $\theta + \psi \neq 0$ ou $\rho_{O,\theta}\rho_{O',\psi} = \tau_{\vec{v}}$ se $\theta + \psi = 0$.*

Demonstração: Sejam O e O' os centros dessas rotações e r a reta que os contém. Existe a reta m , por O , tal que $\rho_{O,\theta} = \sigma_m\sigma_r$, e uma reta n , por O' , tal que $\rho_{O',\psi} = \sigma_r\sigma_n$.

Logo,

$$\rho_{O,\theta}\rho_{O',\psi} = \sigma_m\sigma_r\sigma_r\sigma_n = \sigma_m\sigma_n$$

Agora, sabe-se que $\rho_{O,\theta}\rho_{O',\psi}$ é composição de duas reflexões em retas, ou seja, é uma rotação ou uma translação.

Se $\theta + \psi \neq 0$, então temos que as retas m e n são concorrentes num ponto O'' e $\rho_{O,\theta}\rho_{O',\psi} = \rho_{O'',\theta+\psi}$

Se $\theta + \psi = 0$, então temos que as retas m e n são paralelas e $\rho_{O,\theta}\rho_{O',\psi} = \tau_{\vec{v}}$, onde o vetor de translação \vec{v} é o dobro do vetor distância de m e n .

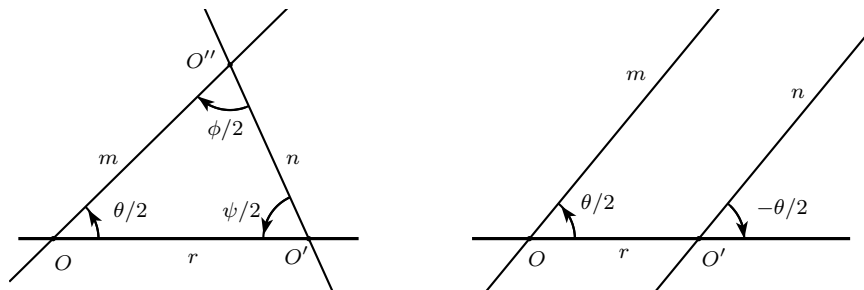
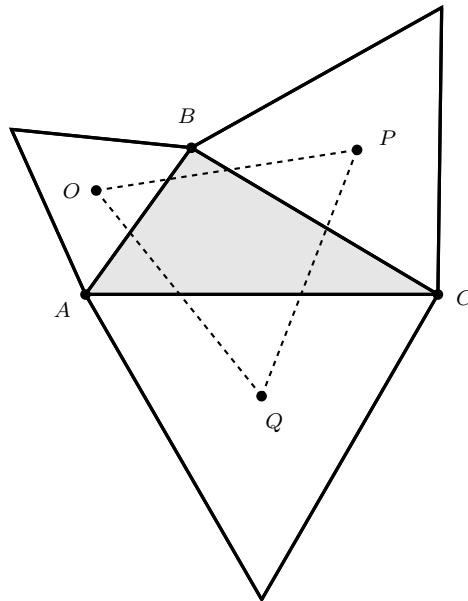


Figura 2.24: Composição de rotações

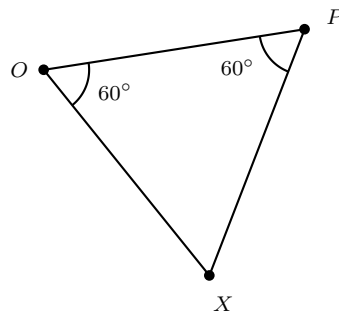
Exemplo 2.4.1. *Seja um triângulo arbitrário ABC . Sobre cada lado desse triângulo construímos um triângulo equilátero. Sendo O , P e Q os centros desses triângulos equiláteros, mostre que o triângulo OPQ é equilátero.*

Considere as rotações ρ_O , ρ_P e ρ_Q , com centros indicados, e ângulos orientados \widehat{AOB} , \widehat{BPC} e \widehat{CQA} , respectivamente, todos medindo 120° .



Assim, $\rho_O(A) = B$, $\rho_P(B) = C$ e $\rho_Q(C) = A$. Logo, a isometria $\alpha = \rho_Q\rho_P\rho_O$ deixa fixo o ponto A .

A composta $\rho_P\rho_O$ é a rotação de 240° cujo centro X é tal que os ângulos \widehat{XOP} e \widehat{OPX} medem 60° . Logo o triângulo APX é equilátero.



Como o ângulo da rotação ρ_Q mais o ângulo de $\rho_P\rho_O$ somam 360° , segue-se também que, se as rotações tirverem centros distintos, a composta $\rho_Q\rho_P\rho_O$ será uma translação. Ora, uma translação não tem ponto fixo e sabemos que $\rho_Q\rho_P\rho_O(A) = A$. Logo, o centro X da rotação $\rho_P\rho_O$ coincide com o centro Q da rotação ρ_Q .

Portanto, OPQ é um triângulo equilátero.

2.4.9 Composição de reflexão com rotação

Proposição 2.4.9. *A composição de uma reflexão σ_r com uma rotação de centro P é uma reflexão se $P \in r$ e uma reflexão deslizante se $P \notin r$.*

Demonstração: Vamos dividir a demonstração em dois casos:

1) Se $P \in r$, então $\sigma_r \rho_{P,\theta} = \sigma_g$.

De fato, sempre podemos dizer que existe uma reta g passando por P tal que o ângulo entre r e g seja $\frac{\theta}{2}$ (Figura 2.19). Assim, podemos escrever $\rho_{P,\theta} = \sigma_r \sigma_g$. Logo,

$$\sigma_r \rho_{P,\theta} = \sigma_r \sigma_r \sigma_g = \sigma_g$$

Portanto, se $P \in r$, então $\sigma_r \rho_{P,\theta} = \sigma_g$.

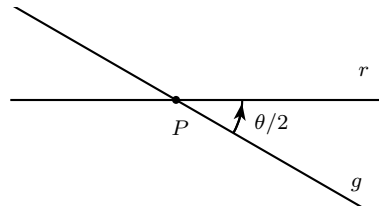


Figura 2.25: Composição de reflexão com rotação com $P \in r$

2) Se $P \notin r$, então $\sigma_r \rho_{P,\theta} = \tau_{\vec{v}} \sigma_g$.

De fato, sempre podemos dizer que existem as retas m e l , concorrentes no ponto P , tal que o ângulo entre m e l seja $\frac{\theta}{2}$. Assim, podemos escrever $\rho_{P,\theta} = \sigma_m \sigma_l$.

Sejam h , uma reta por P , perpendicular à reta r , e H o ponto de intersecção dessas duas retas.

Existe uma reta h_1 , por P , tal que

$$\rho_{P,\theta} = \sigma_m \sigma_l = \sigma_h \sigma_{h_1}$$

e, portanto,

$$\sigma_r \rho_{P,\theta} = \sigma_r \sigma_h \sigma_{h_1} = \sigma_H \sigma_{h_1} = \tau_{\vec{v}} \sigma_g$$

onde g é a reta por H , perpendicular a h_1 , cujo vetor \vec{v} é o dobro do vetor distância de h_1 para H .

Portanto, se $P \notin r$, então $\sigma_r \rho_{P,\theta} = \tau_{\vec{v}} \sigma_g$.

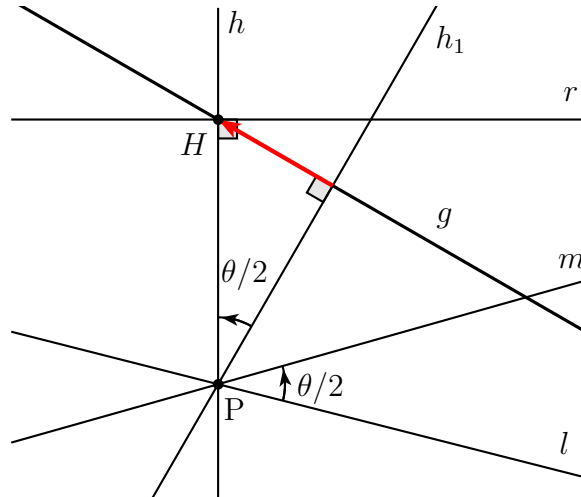


Figura 2.26: Composição de reflexão com rotação com $P \notin r$

2.4.10 Composição de três reflexões em retas

Proposição 2.4.10. *A composição $\sigma_n\sigma_m\sigma_r$ de três reflexões é uma reflexão se r , m e n são paralelas ou concorrentes em um único ponto; uma rotação se r , m e n são duas a duas concorrentes em pontos distintos e uma reflexão deslizante se exatamente duas dentre r , m e n são paralelas.*

Demonstração: A prova dessa proposição leva em consideração as proposições já expostas sobre composição de isometrias. Seja $\alpha = \sigma_n\sigma_m\sigma_r$, uma isometria dada pela composição de três reflexões. Se:

- as retas r , m e n são paralelas ou concorrentes num ponto, então pelas proposições (2.4.2 e 2.4.4), α é uma reflexão;
- as retas r , m e n são duas a duas concorrentes em pontos distintos, então pela proposição (2.4.8), α é uma rotação;
- exatamente duas dentre as retas r , m e n são paralelas, então pela proposição (2.4.6), α é uma reflexão deslizante.

Ficando, assim, bem definidas essas isometrias pelas posições relativas entre as retas r , m e n .

2.5 Classificação de isometrias

Um dos resultados mais interessantes apresentados na seção anterior é, sem dúvida, o papel fundamental que a reflexão desempenha. Isso porque, qualquer umas das outras

três isometrias do plano (translação, rotação e reflexão deslizante), podem ser obtidas por meio da composição de reflexões.

Dessa forma, será apresentado a seguir um teorema que conduzirá à classificação das isometrias.

Teorema 2.5.1. (Teorema fundamental das isometrias) *Toda isometria α é composição de no máximo três reflexões.*

Demonstração: Seja α uma isometria e PQR um triângulo não degenerado, e seja $\alpha(P) = P_1$, $\alpha(Q) = Q_1$ e $\alpha(R) = R_1$. Definimos α_1 como Id se $P = P_1$ e como reflexão pela mediatriz $\overline{PP_1}$ no caso $P \neq P_1$.

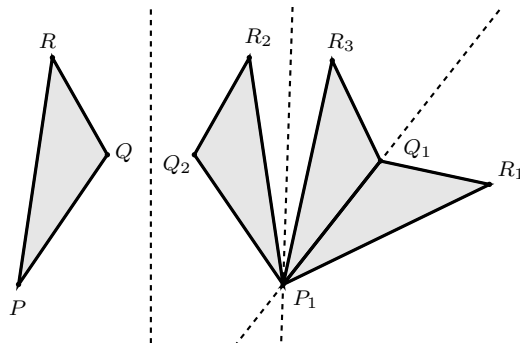


Figura 2.27: Composta de no máximo três reflexões

Sejam $\alpha_1(PQR) = P_1Q_2R_2$. Definimos α_2 da mesma forma que α_1 , com relação a Q_1 e Q_2 , e obtemos $\alpha_2(P_1Q_2R_2) = P_1Q_1R_3$. Finalmente, definimos α_3 como antes com relação a R_1 e R_3 , obtendo $\alpha_3(P_1Q_1R_3) = P_1Q_1R_1$. Logo $\alpha_3\alpha_2\alpha_1(PQR) = P_1Q_1R_1 = \alpha(PQR)$, e segue da proposição 2.2.11 que $\alpha = \alpha_3\alpha_2\alpha_1$.

Segundo Tinoco (2012), uma isometria fica completamente determinada por três pontos não colineares e as suas imagens. De fato, dado que as isometrias preservam distâncias, a distância de qualquer ponto X a P deverá ser igual à distância da sua imagem $X' = \alpha(X)$ a P_1 . Analogamente a distância de X a Q deverá ser igual à de X' a Q_1 e a distância de X a R deverá ser igual à de X' a R_1 . Veja a figura seguinte.

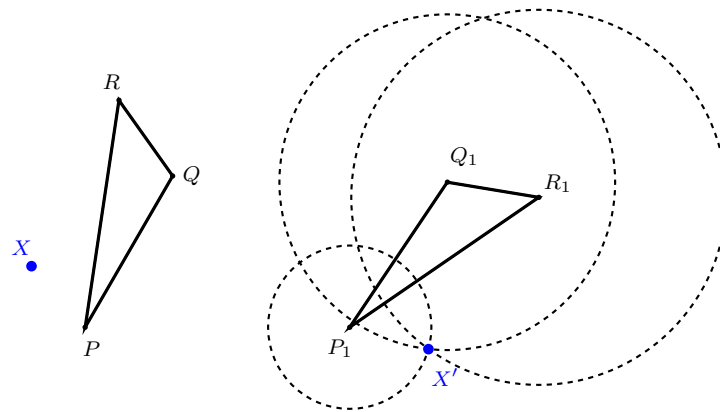


Figura 2.28: Unicidade de $\alpha = \alpha_3\alpha_2\alpha_1$

Assim, pela interseção das seguintes circunferências:

- circunferência centrada em P_1 , com raio igual à distância de X a P .
- circunferência centrada em Q_1 , com raio igual à distância de X a Q .
- circunferência centrada em R_1 , com raio igual à distância de X a R .

obtém-se um único ponto: X' que mantém essas distâncias, provado que a isometria α , que transforma $\triangle(PQR)$ em $\triangle(P_1Q_1R_1)$, é única.

Teorema 2.5.2. *Seja α uma isometria no plano. Então, além da identidade, α é uma translação, ou uma rotação, ou uma reflexão ou uma reflexão deslizante.*

Demonstração: Conforme provado no Teorema fundamental das isometrias (teorema 2.5.1), se dois triângulos são congruentes, então existe e é única a isometria α , que transforma um triângulo no outro, podendo α ser expressa pela composição de, no máximo, três reflexões: $\alpha = \sigma_n\sigma_m\sigma_r$.

Assim, conforme o número de reflexões necessárias para definir α , a isometria é de cada uma das classes referidas no teorema.

Uma reflexão: $\alpha = \sigma_r$, sendo σ_n e σ_m iguais à identidade. Tem-se, então uma reflexão;

Dois reflexões: $\alpha = \sigma_m\sigma_r$, sendo σ_n igual à identidade. De acordo com a posição relativa das retas r e m , α será:

- Retas r e m concorrentes: nesse caso, α será uma rotação, conforme proposição (2.4.3), com centro no ponto de interseção entre as duas retas e de amplitude igual ao dobro do ângulo entre as retas r e m ;

- Retas r e m paralelas: nesse caso, α será uma translação, conforme proposição (2.4.1), associada ao vetor perpendicular às retas e de comprimento igual ao dobro da distância entre elas.

Três reflexões: $\alpha = \sigma_n \sigma_m \sigma_r$. De acordo com a posição relativa das retas m , n e r , α será:

- Retas m , n e r paralelas entre si: nesse caso, de acordo com a proposição (2.4.2), α é uma reflexão;
- Retas m , n e r concorrentes num ponto: nesse caso, de acordo com a proposição (2.4.4), α é uma reflexão;
- Retas m , n e r nem concorrentes e nem paralelas: então, de acordo com a proposição (2.4.9), α é uma reflexão deslizante;

Fica provado, então que, além da identidade, uma isometria α é uma translação, ou uma rotação, ou uma reflexão ou uma reflexão deslizante.

Teorema 2.5.3. *Uma isometria α pode, também, ser classificada verificando a quantidade de pontos fixos por α . Assim,*

1. *Seja $\alpha \neq Id$ uma isometria que fixa dois pontos distintos P e Q . Então $\alpha = \sigma_r$ onde $r = PQ$;*
2. *Seja α uma isometria que fixa exatamente um ponto P . Então α é uma rotação de centro P ;*
3. *Seja α uma isometria sem pontos fixos que fixa duas retas. Então α é uma translação;*
4. *Seja α uma isometria sem pontos fixos que fixa exatamente uma reta. Então α é uma reflexão deslizante.*

Demonstração:

(1) Seja α uma isometria que fixa dois pontos distintos. Considere o ponto $X \in \mathbb{E}$. Se $X \in l$, então $\alpha(X) = X$ pela proposição (2.2.6). Se $X \notin l$, então $\alpha(X) \neq X$, pois, caso contrário, $\alpha = Id$ pela proposição (2.2.7), contrariando a hipótese. Logo, deve-se ter $\alpha(X) = X'$, onde X' é o simétrico de X com relação à l , donde $\alpha = \sigma_l$.

(2) Seja α uma isometria que fixa exatamente um ponto P . Considere $Q \neq P$ e $R = \alpha(Q)$. Por hipótese, tem-se que $Q \neq R$. Seja l a bissetriz do ângulo $Q\hat{P}R$. Então $\sigma_l \alpha$ fixa P e Q , e segue da demonstração anterior que $\sigma_l \alpha = \sigma_m$, onde m é a reta por PQ . Logo, $\alpha = \sigma_m \sigma_l$, ou seja, α é uma rotação pela proposição (2.4.3).

(3) Seja l e m as retas fixas por α , $P \in l$, $\vec{v} = \overrightarrow{P\alpha(P)}$, $Q \in m$, $\vec{u} = \overrightarrow{Q\alpha(Q)}$. Como $\alpha(P) \neq P$ e $\alpha(Q) \neq Q$ tem-se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, e como $\alpha(P) \in l$ segue-se que $\vec{v} \parallel l$, da

mesma forma que, como $\alpha(Q) \in m$ tem-se $\vec{u} \parallel m$. Como pela mesma isometria α , tem-se $\vec{v} \parallel l$ e $\vec{u} \parallel m$, conclui-se que $l \parallel m$ e os vetores \vec{v} e \vec{u} são equipolentes. Como, P , $\alpha(P)$ e Q não são colineares, temos que $P\alpha(P)Q\alpha(Q)$ é um paralelogramo. Assim, $\alpha = \tau_{\vec{w}}$, é uma translação pelo vetor \vec{w} equipolente aos vetores \vec{v} e \vec{u} .

(4) Seja l a reta fixa por α , $P \in l$ e $\vec{v} = \overrightarrow{P\alpha(P)}$. Como $\alpha(P) \neq P$ tem-se $\vec{v} \neq \vec{0}$, e como $\alpha(P) \in l$ segue-se que $\vec{v} \parallel l$. Considere, agora, $\beta = \tau_{-\vec{v}}\alpha$. Como $\beta(P) = P$ e l é fixa por β , conclui-se que β fixa l ponto a ponto, donde $\beta = Id$ ou $\beta = \sigma_l$. Se $\beta = Id$, então $\alpha = \tau_{\vec{v}}$, o que é absurdo, uma vez que $\tau_{\vec{v}}$ fixa mais de uma reta. Logo, $\beta = \sigma_l$, donde $\alpha = \tau_{\vec{v}}\sigma_l$ é uma reflexão deslizante.

Tem-se, então, duas maneiras de classificar as isometrias: pela composição de reflexões e pela natureza de seus pontos fixos.

CAPÍTULO 3

SIMETRIAS

A propriedade de simetria é apresentada aos alunos no ensino fundamental, inicialmente, a partir de imagens simples e facilmente encontradas no dia a dia. Mostra-se essa propriedade usando, por exemplo, imagens de objetos, alguns animais, partes de plantas, etc.

Nesse momento, o aluno é levado a imaginar uma linha reta que passa pelo “meio” da figura e que a partir dessa reta pode-se perceber a simetria da figura em questão. Essa linha de referência é chamada de eixo de simetria, como veremos mais adiante.

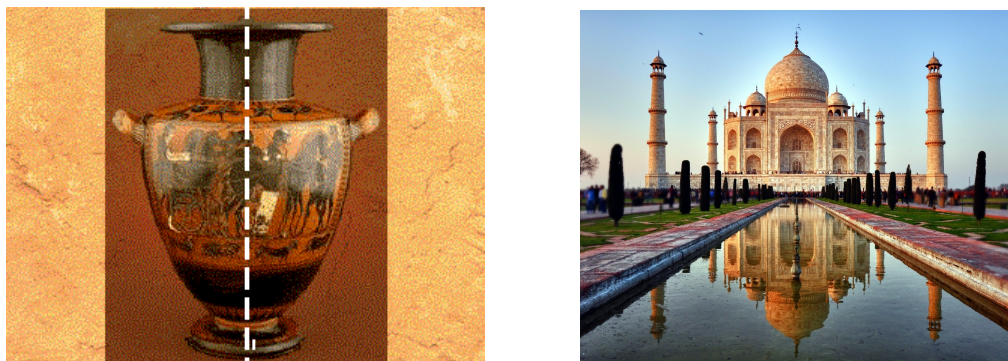


Figura 3.1: Eixos de simetria

Essa percepção da simetria normalmente é feita apenas de maneira visual, não se mostrando, por exemplo, qual a definição matemática de simetria. Para definir-se simetria, algumas definições são necessárias.

Como já foi visto, existe uma relação muito íntima entre o estudo de isometria e o estudo de figuras congruentes e de simetria de figuras. Nesse capítulo serão estudadas as simetrias de algumas figuras planas e serão apresentados os grupos discretos de simetrias do plano.

3.1 Simetrias planas

Sabe-se que uma figura é um conjunto \mathcal{F} de pontos de \mathbb{E} . No capítulo anterior, foi definido que duas figuras $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathbb{E}$ são congruentes se existe uma isometria $\alpha : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ tal que $\mathcal{F}_2 = \alpha(\mathcal{F}_1)$.

Definição 3.1.1. (Simetria de uma figura) Uma simetria de uma figura $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{E}$ é uma isometria $\alpha : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ que deixa a figura invariante, isto é $\alpha(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Dessa forma, o conjunto de todas as simetrias de uma figura \mathcal{F} constitui um grupo com a operação composição. Esse grupo é chamado de **grupo de simetrias da figura** e será denotado aqui como $Sim(\mathcal{F})$.

Tem-se que a identidade (Id) é a simetria trivial de qualquer figura e a única que preserva todas as figuras.

Definição 3.1.2. Figuras simétricas são aquelas que possuem outras simetrias além da identidade.

Veja abaixo alguns exemplos de figuras simétricas.

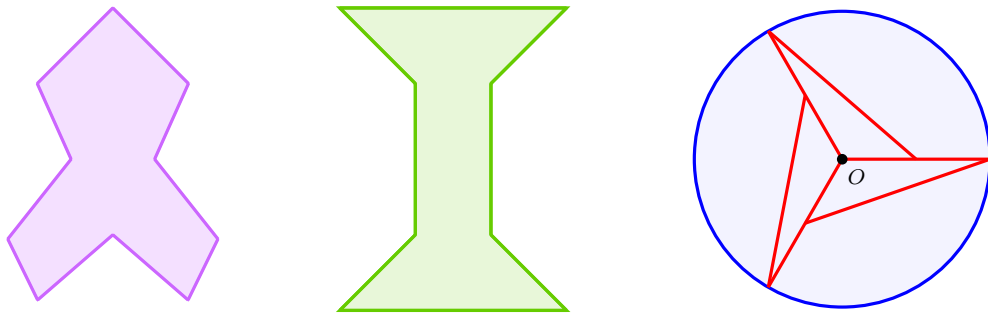
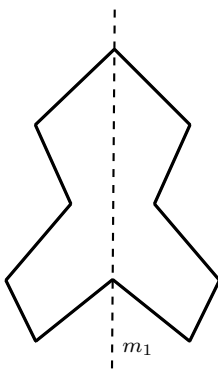
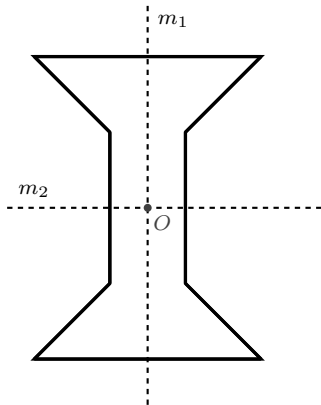


Figura 3.2: Figuras simétricas

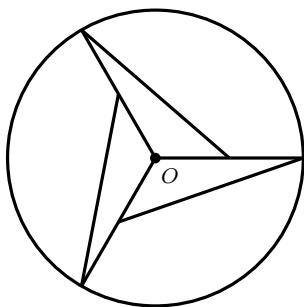
Podemos descrever as simetrias das figuras simétricas acima da seguinte maneira:



- Identidade (Id)
- Reflexão no eixo m_1



- Identidade (Id)
- Reflexão no eixo m_1
- Reflexão no eixo m_2
- Rotação de $\frac{1}{2}$ volta e centro O



- Identidade (Id)
- Rotação de $\frac{1}{3}$ volta e centro O
- Rotação de $\frac{2}{3}$ volta e centro O

Exemplo 3.1.1. (*Grupo de simetrias do triângulo equilátero*)

Considere \mathcal{T} um triângulo equilátero de vértices A , B e C . Tem-se que todas as isometrias α que sejam simetrias do triângulo \mathcal{T} , tem como imagens dos pontos A , B e C os próprios pontos A , B e C .

O incentro G , do triângulo \mathcal{T} , é o único ponto equidistante dos vértices A , B e C . Assim, é o único a ficar invariante por qualquer simetria do triângulo \mathcal{T} .

As simetrias do triângulo \mathcal{T} são reflexões em retas que passam por G ou rotações com centro em G .

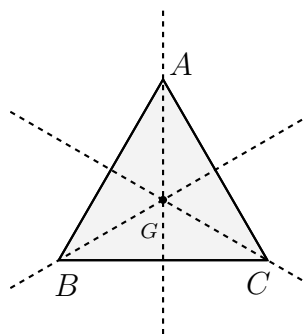


Figura 3.3: Triângulo equilátero de incentro G

As reflexões que deixam o triângulo invariante, tem como eixo as mediatrizes que passam pelos vértices A , B e C .

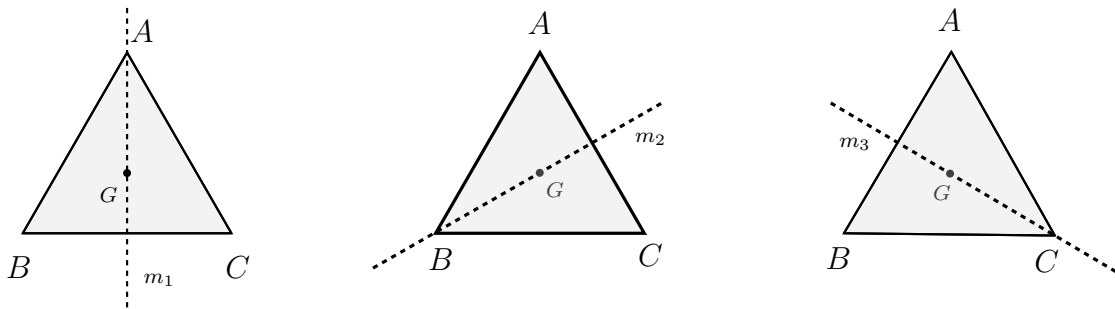


Figura 3.4: Reflexões do triângulo equilátero

As rotações que deixam o triângulo invariante tem como centro o ponto G e de amplitude $\theta_1 = 120^\circ$, $\theta_2 = 240^\circ$ e $\theta_3 = 360^\circ = Id$.

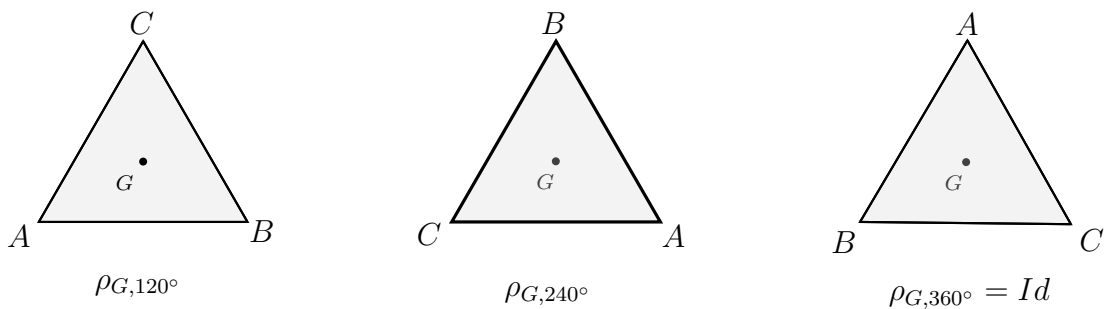


Figura 3.5: Rotações do triângulo equilátero

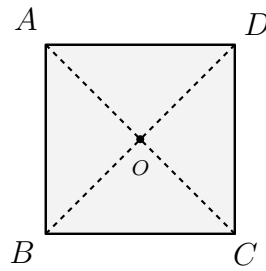
Dessa forma, o grupo de simetrias de \mathcal{T} é constituído por 6 isometrias: 3 reflexões e 3 rotações.

$$\text{Logo, } \text{Sim}(\mathcal{T}) = \{Id, \sigma_{m_1}, \sigma_{m_2}, \sigma_{m_3}, \rho_{G,120^\circ}, \rho_{G,240^\circ}\}.$$

Exemplo 3.1.2. (Grupo de simetrias do quadrado)

Considere \mathcal{Q} um quadrado de vértices A , B , C e D .

O centro do quadrado O , determinado pela intersecção das diagonais, é o ponto invariante de qualquer simetria do quadrado \mathcal{Q} .



O quadrado possui simetrias de rotaç~ao e de reflex~ao.

No caso das reflex~oes, os eixos s~ao as mediatrizes dos lados do quadrado \mathcal{Q} e as retas que passam pelas diagonais.

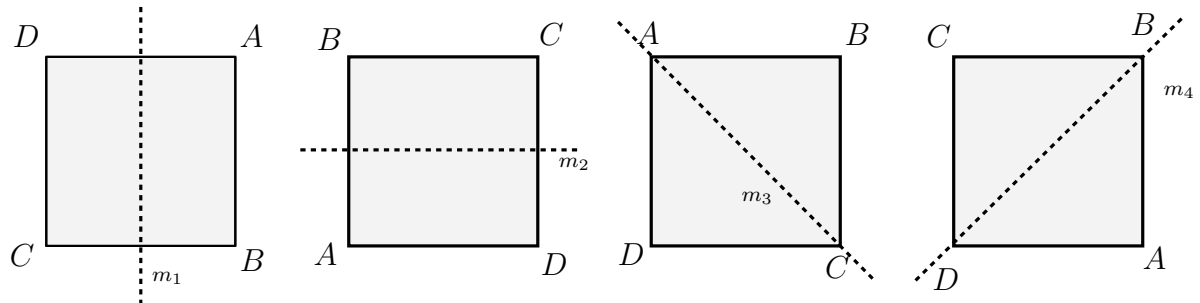


Figura 3.6: Reflexões do quadrado

As rotaç~oes do quadrado t~em como centro o ponto O e de amplitude $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 180^\circ$, $\theta_3 = 270^\circ$ e $\theta_4 = 360^\circ = Id$.

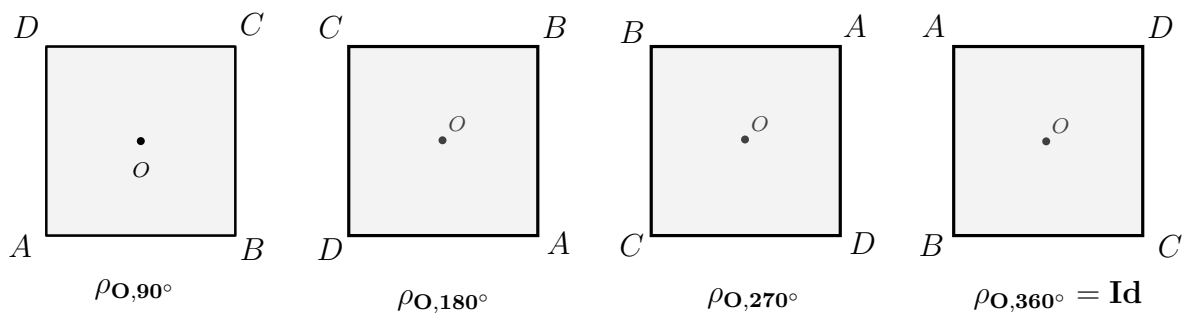


Figura 3.7: Rotações do quadrado

Tem-se, assim que, o grupo de simetrias de \mathcal{Q} é constituído por 8 isometrias: 4 reflexões e 4 rotações.

Logo, $Sim(\mathcal{Q}) = \{Id, \sigma_{m_1}, \sigma_{m_2}, \sigma_{m_3}, \sigma_{m_4}, \rho_{O,90^\circ}, \rho_{O,180^\circ}, \rho_{O,270^\circ}\}$.

De modo geral, se \mathcal{F} é um polígono regular de n lados, então \mathcal{F} tem exatamente n simetrias de rotação e n simetrias de reflexão.

3.2 Classificação das figuras simétricas

A classificação das figuras simétricas planas é feita a partir de seus grupos de simetrias. Leva-se em consideração que somente os grupos de simetrias discretos são classificados. Isso se deve ao fato que:

- se uma figura é invariante por translações numa dada direção, então, dentre essas translações, existe uma de amplitude mínima;
- se uma figura é invariante por rotações em torno de um centro, então, dentre essas rotações, existe uma de ângulo mínimo.

A forma básica que se repete mediante rotações, reflexões, translações e reflexões deslizantes é chamada de *motivo*.

Os grupos de simetrias planas podem ser agrupados em três categorias a saber: rosetas ou rosáceas, frisos e papéis de parede.

3.2.1 Rosetas ou rosáceas

Definição 3.2.1. *Diz-se que uma figura simétrica é finita quando não possui nenhuma simetria de translação não trivial.*

Nos grupos finitos, as isometrias pertencentes são as reflexões e rotações. Todas deixam fixo o mesmo ponto.

Definição 3.2.2. *As **rosetas ou rosáceas** são figuras que possuem um número finito de simetrias de rotações e reflexões.*

Tem-se que todas as simetrias de rotação que deixam a figura invariante estão centradas no mesmo ponto O e, todas as simetrias de reflexão possuem como eixo uma reta que contém o ponto O .

Exemplo 3.2.1. *As figuras abaixo são exemplos de rosetas.*



Figura 3.8: Rosetas ou rosáceas

As rosetas, ainda, podem ser agrupadas em 2 classes diferentes: grupo cíclico e grupo diedral, sendo o grupo cíclico os que possuem apenas simetria de rotação e, o grupo diedral, os que possuem pelo menos uma simetria de reflexão em reta.

3.2.2 Frisos

Definição 3.2.3. *Chama-se grupo de frisos aos grupos de simetria que apresenta uma infinidade de translações segundo uma única direção. Logo, existe um vetor \vec{v} não nulo tal que, todas as translações do grupo são da forma $\tau_{n\vec{v}}$, com $n \in \mathbb{Z}$.*

Exemplo 3.2.2. *Veja abaixo, figuras que representam frisos.*

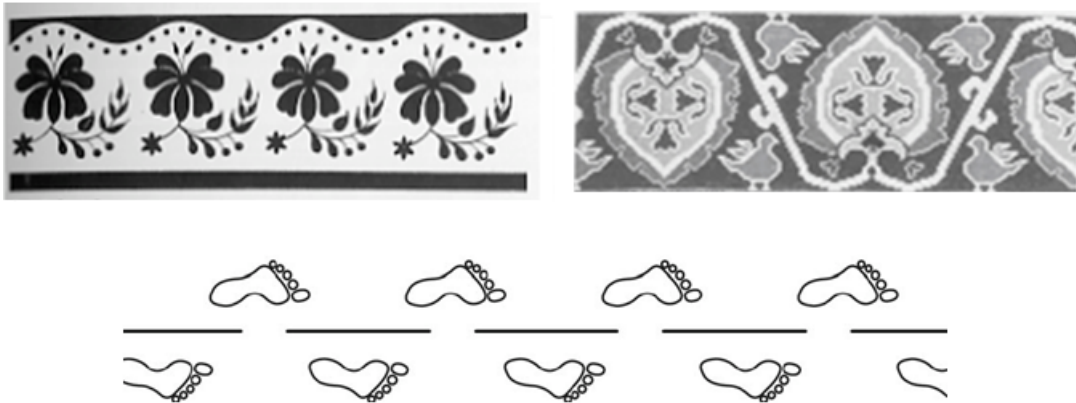


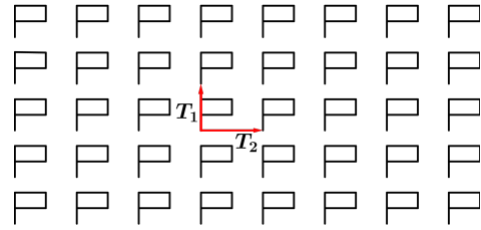
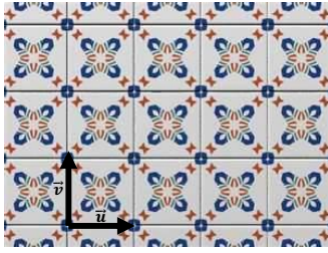
Figura 3.9: Frisos

O grupo de frisos, ainda, podem ser agrupados em 7 classes diferentes. Essas classificações são estudadas em [5], [6], [10] e [11].

3.2.3 Papéis de parede

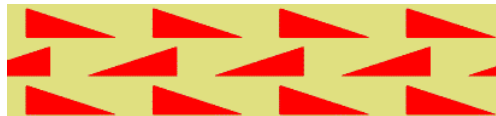
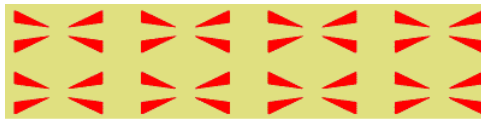
Definição 3.2.4. *Os papéis de parede são grupos de simetria que apresentam translações associadas a dois vetores linearmente independentes. Logo, existem dois vetores \vec{u} e \vec{v} não*

nulos tais que, qualquer translações do grupo é da forma $\tau_{n\vec{u}+m\vec{v}}$, com $n, m \in \mathbb{Z}$.



Além das translações, um padrão de papel de parede pode ser invariante por reflexões, rotações e reflexões deslizantes. Com isso, existem 17 classes de papéis de parede. Essas classificações são estudadas em [6], [10] e [11].

Exemplo 3.2.3. *Observe outros exemplos de padrões de papéis de parede.*



CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi escrito com o intuito de apresentar aos professores uma nova maneira de se abordar o estudo das isometrias no ensino básico. Para isso, foi realizado um estudo das isometrias mostrando sua importância, principalmente na Matemática. O tema principal é muito abrangente e aparece naturalmente em algumas das áreas da Matemática, desempenhando um papel fundamental em cada uma delas. Aqui, por exemplo, vimos sua importância na geometria e na álgebra. Dentro do possível, foi feita uma abordagem baseada na utilização de isometrias para tratar problemas de natureza teórica e prática, tanto em nível básico como em nível mais avançado.

O uso do GeoGebra na produção das figuras que compõe o trabalho, possibilitou um maior entendimento das relações e propriedades apresentadas. Com certeza, será um recurso que o professor poderá utilizar em suas aulas para trabalhar algumas atividades práticas ou conceituais do tema apresentado.

Deve-se ressaltar que o conceito de isometria, bem como o conhecimento de suas propriedades, são fundamentais e devem ser exploradas desde o início da educação básica. Destaca-se, ainda, que o uso das propriedades de isometrias para tratar problemas de geometria plana constitui uma atividade bastante interessante. Assim, foi feito, também, um estudo sobre grupos de simetrias planas que permitiram a classificação dos grupos de simetria. Os exemplos que foram utilizados vão servir de base para uma nova abordagem do grupo de simetrias e permitirá um olhar mais apurado na solução de problemas práticos, de construção e teóricos que apresentem padrões geométricos.

Para poder confirmar algumas das proposições de composição de isometrias apresentadas, mais uma vez, o GeoGebra foi de grande utilidade. Esse software possibilitou a análise e comparação das isometrias de uma maneira muito rápida, permitindo analisar uma grande quantidade de casos em pouco tempo, o que permitiu conjecturar resultados.

Sabe-se, no entanto, tornou-se necessária a demonstração formal de cada um dos fatos observados nas proposições, tendo no GeoGebra apenas um meio facilitador.

Sem dúvida alguma, a elaboração deste trabalho permitiu adquirir uma visão mais profunda e completa acerca das isometrias, contribuindo, e muito, para formação acadêmica continuada do docente. Espera-se que o mesmo sirva de apoio ou fonte de inspiração para o desenvolvimento de outros trabalhos dessa natureza, e o mais importante, que sirva de apoio aos professores que quiserem trabalhar com isometria, auxiliando-os na preparação de uma aula diversificada, onde eles possam utilizar atividades bem interessantes e até criar novas ideias para serem aplicadas em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BACALHAU, F. M. **Isometrias do plano e simetria**. Dissertação (Mestrado). Universidade de Lisboa, Departamento de Matemática. Lisboa, 2012. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/8852/1/ulfc104259_tm_Fernando_Bacalhau.pdf>. Acesso em: 28/12/2016.
- [2] BRASIL. **Base nacional comum curricular**. MEC. Brasília, 2015. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/BNCC-APRESENTACAO.pdf>>. Acesso em: 04/01/2016.
- [3] BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**. MEC. Brasília, p.174, 1998.
- [4] BROCKER, M. J. **Isometrias e congruência: Uma investigação no ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística. Porto Alegre, 2016. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/150246/001008089.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 28/12/2016.
- [5] DE MORAES, G. C. **Isometrias e grupos de friso**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do ABC. Santo André - SP, 2013. Disponível em: <http://biblioteca.ufabc.edu.br/index.php?codigo_sophia=48038>. Acesso em: 18/10/2016.
- [6] LEDERGERBER-RUOFF, E. B. **Isometrias e ornamentos do plano euclidiano**. Atual Editora, Editora da USP, São Paulo, 1982.
- [7] LIMA, E. L. **Isometrias**. SBM, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2007.
- [8] MIR, M. **Uma abordagem de isometria em sala de aula**. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Bi-

- ociências, Letras e Ciências Exatas. São José do Rio Preto - SP, 2014. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/127615>>. Acesso em: 27/06/2016.
- [9] REZENDE, E. Q., QUEIROZ, M. L. B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2 Ed. Editora da Unicamp, Campinas, 2008.
- [10] SILVA, A. M. **Isometrias planas e alguns problemas de ladrilhamento**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do ABC. Santo André - SP, 2013. Disponível em: <<http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/991>>. Acesso em: 18/10/2016.
- [11] SPIRA, M. **Grupos de isometria no plano**. Mini-curso. IMPA, XIV Escola de álgebra, Rio de Janeiro, 1996.
- [12] TINOCO, M. J. **Isometrias**. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Ciências do Porto, Departamento de Matemática. Lisboa, 2012. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/65375/2/11674.pdf>>. Acesso em: 18/10/2016.
- [13] WEYL, H. **Symmetry**. Princeton University Press. New Jersey, 1989.