UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL - PROFMAT/CCT/UEPB

O Estudo de Problemas de Otimização com a Utilização do Software Geogebra

Josenildo da Cunha Lima

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Luciana Roze de Freitas

Campina Grande - PB
Maio/2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UEPB.

L732e Lima, Josenildo da Cunha.

O Estudo de Problemas de Otimização com a Utilização do Software GeoGebra [manuscrito]/ Josenildo da Cunha Lima.- Campina Grande, 2017.

97 p.:il. color

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Ensino de geometria. 2. Problemas de otimização. 3. Desigualdade das médias. 4. GeoGebra. I. Título.

21. ed. CDD 516

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL - PROFMAT/CCT/UEPB

O ESTUDO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA

por

Josenildo da Cunha Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Josenildo da Cunha Lima

O ESTUDO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado em: 05 de maio 2017.

BANCA EXAMINADORA

Luciana R. Freitas

Profª. Drª. Luciana Roze de Freitas - Orientadora
Universidade Estadual da Paraíba

Luiz A. Medeiros.

Prof. Dr. Luiz Antonio da Silva Medeiros
Membro externo
Universidade Federal de Campina Grande

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque
Membro interno
Universidade Estadual da Paraíba

Dedicatória

*Ao meu pai **Damião**, à minha mãe **Maria Neuza**, à minha esposa **Maria Patrícia**, à minha filha **Mariana** e ao meu filho **Antunes**.*

Agradecimentos

À minha orientadora Luciana Roze de Freitas por sua competência e pelo enriquecimento deste trabalho com suas valiosas correções e sugestões;

Aos meus professores do PROFMAT UFCG e UEPB que incentivaram meus estudos neste mestrado, especialmente à professora Rosana Marques da Silva pela importante disciplina: Recursos Computacionais no Ensino de Matemática;

Ao professor Luiz Antônio da Silva Medeiros, com quem comecei a desenvolver este trabalho, pelo exemplo de profissionalismo e dedicação ao ensino da matemática;

Ao professor Francisco Sibério Bezerra Albuquerque, que aceitou fazer parte da banca avaliadora, pelas contribuições;

Ao meu pai Damião Dias de Lima e à minha mãe Maria Neuza da Cunha Lima, grandes "pequenos agricultores" pela educação que deram a mim e aos meus três irmãos e minhas seis irmãs, aos quais também agradeço pela base familiar;

À Maria Patrícia Cordeiro da Cruz, minha amada esposa, pelo apoio e companheirismo, que sofreu comigo nos momentos difíceis e que pedimos e agradecemos a Deus, juntos, com a nossa filha Mariana Cordeiro Lima e o nosso filho Antunes Cordeiro Lima pelo sucesso e conclusão desta minha importante e sonhada etapa de formação profissional;

Aos colegas companheiros de estudos nesse mestrado pelo compartilhamento e construção de conhecimento;

À secretaria municipal de educação de Areia por ter me concedido dois anos de licença para dedicação aos estudos desse mestrado;

Às escolas estaduais Antonieta C. de Menezes e Min. José A. de Almeida pelo apoio quando necessitei;

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Mestrado em Rede Nacional.

Resumo

Neste trabalho apresentamos atividades que podem ser realizadas com turmas do Ensino Médio e que tenham noções básicas de funções, área, volume e desigualdade das médias. Apresentamos uma sequência didática, composta por diversas atividades, com a utilização do *software* GeoGebra, de modo que em cada uma delas, o aluno possa conjecturar um resultado de otimização numa aplicação em sala de aula. Algumas dessas atividades têm como objetivo a elaboração de um arquivo do tipo .ggb para se descobrir um valor ótimo para determinado elemento geométrico. Em todas as atividades buscamos otimizar elementos geométricos como segmentos, ângulos, áreas e volumes. Realizando essas atividades, os estudantes aprenderão conteúdos de geometria de forma dinâmica e isso os proporcionará uma visão próxima do que concretamente ocorrre na busca por otimizar tais elementos geométricos. Este estudo tem como finalidade mostrar que problemas de otimização podem ser trabalhados no Ensino Médio e que os resultados usados nas resoluções desses problemas são demonstrados com teoremas envolvendo conteúdos matemáticos do Ensino Básico.

Palavras Chaves: Ensino de geometria. Problemas de otimização. Desigualdade das médias. GeoGebra.

Abstract

This work presents activities that can be carried out with the High School classes and that do have basic notions of the functions, area, volume and means inequality. We present a didactic sequence, composed of several activities, with the use of GeoGebra software, so that in each of them the student can conjecture an optimization result in a classroom application. In some activities aim the elaboration of a file of type .ggb to discover an optimal value for a certain geometric element. In each activities we seek to optimize geometric elements such as segments, angles, areas and volumes. By performing these activities, students will learn geometry contents dynamically and this will provide them with a view next of what actually occurs in search to optimize of elements such geometric elements. This study aims to show that optimization problems can be worked on in High School and the results found in resolutions of these problems are demonstrated with theorems involving mathematical contents of Basic Education.

Keywords: Geometry teaching. Optimization problems. Means Inequality. GeoGebra.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Desde os primórdios o homem procurou respostas para perguntas do tipo: "Qual o caminho mais curto entre tais pontos de partida e chegada?", "Como usar certa quantidade de arame para cercar a maior área possível?", "De que maneira vou construir um recipiente com volume fixado de modo a gastar a menor quantidade de material possível?" etc. Na atualidade, empresários buscam otimizar suas produções minimizando gastos e maximizando lucros. A partir dessas questões cotidianas surgiu o ramo da Matemática, que trata de problemas de máximos e mínimos, denominado de otimização.

> **otimizar** *v. td.* 1 Melhorar ao máximo as condições de; aproveitar ao máximo (meios, desempenho, processo etc.), de modo a obter os melhores resultados possíveis: *A empresa conseguiu otimizar sua produção.* 2 *Inf.* Melhorar (programa) de modo a ser mais simples e o mais rápido possível. 3 *Est.* Estabelecer valor ótimo de uma grandeza. (AULETE, 2011, p. 1007)

Os estudos de otimização e problemas de tangentes a curvas deram origem à noção de derivada que é um dos conteúdos do Cálculo que ajudam a simplificar a resolução de problemas de otimização (ver Referência [9], p. 428). Todavia, neste trabalho não usamos o Cálculo como ferramenta para a resolução desses problemas, pois no Ensino Básico, etapa para qual é proposta a aplicação deste estudo, normalmente o Cálculo ainda não é visto. Nos detemos a utilizar conteúdos como máximos e mínimos de funções, vértice da parábola e desigualdade das médias. Escolhemos o estudo de problemas de otimização para desenvolver nesta dissertação levando em consideração suas diversas áreas de aplicabilidade tais como economia, administração, saúde, transportes e as ciências de modo geral. Além disso, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio afirmam que

> Para a escolha de conteúdos, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras área do conhecimento;

> compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p. 69)

Diante de tão relevância da Matemática para cada cidadão e para o desenvolvimento científico e tecnológico faz-se necessário incentivar e auxiliar o aluno para a formação de um pensamento crítico e autônomo, conscientizando-no de que a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano de fundamental importância para a formação de todos os cidadãos e que seu estudo proporcionará capacidades que possivelmente serão exigidas ao longo da sua vida social e profissional. O estudo de problemas de otimização, preponderantemente composto de situações contextualizadas, provoca no aluno um maior interesse pelo estudo da disciplina de Matemática que corriqueiramente lhe é apresentada de maneira abstrata. Isso acaba tornando o estudo da matemática, para o aluno dessa etapa de ensino e aprendizagem, mais instigante o que acarreta numa aprendizagem significativa.

O estudo de problemas de otimização no Ensino Médio justifica-se pelo fato de está inserido num ramo da matemática bastante relevante para a prática cotidiana dos cidadãos que é a Matemática Aplicada.

Estamos atualmente, em nível nacional, refletindo sobre possíveis mudanças no currículo do Ensino Médio. Essa modalidade de ensino necessita de avanços no sentido de se enquadar melhor à era digital, a começar pela formação do integrante fundamental na promoção dessa mudança: o professor. Documentos oficiais nacionais apontam para a abertura de um diálogo sobre o currículo do Ensino Médio e uma maior integração entre as disciplinas

> Quando a LDB destaca as diretrizes curriculares específicas do Ensino Médio, ela se preocupa em apontar para um planejamento e desenvolvimento do currículo de forma orgânica, superando a organização por disciplinas estanques e revigorando a integração e articulação dos conhecimentos, num processo permanente de interdisciplinaridade e transdiciplinaridade. (BRASIL, 2006, p. 69)

Na prática esse processo ainda está aquém do que se deseja. Um sinal disto é notado através das baixas notas dos alunos do Ensino Médio nos sistemas de avaliações nacionais e internacionais.

O Novo Ensino Médio brasileiro, previsto para ser posto em prática a partir do ano de 2018 tem como uma de suas premissas a flexibilização curricular como forma de reforçar e melhorar a qualidade da educação. Essas mudanças vêm aliadas à divulgação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com a finalidade de otimizar os conteúdos abordados nesta etapa do ensino. Neste sentido,

> É preciso ensinar menos para que os alunos aprendam mais. Não é com a inundação de conteúdos que vamos formar bons estudantes. As intenções são boas, mas os resultados são péssimos. (CASTRO, 2013, p. 111)

Faz-se necessário um ensino mais contextualizado. Pesquisas apontam que a maioria dos alunos do Ensino Médio têm dificuldade de aprender a matemática mais formal, de beleza irrefutável, porém abstrata. Em tal nível de estudo, entretanto, é indispensável a formalidade das demonstrações matemáticas para alguns resultados. Mas isso não quer dizer que se deve deixar de fora a matemática que pode ser contada e medida, já que, dessa forma, o aluno compreende melhor diversos conteúdos.

A BNCC: segunda versão (texto em fase de discussão e aprovação), com respeito ao estudo de grandezas e medidas no Ensino Médio, principais objetos de estudo deste trabalho, sugere que

> Também é importante que se façam conexões entre grandezas e o estudo de funções, explorando-se as relações entre duas grandezas: área do círculo e raio, volume da esfera e raio, área da superfície do cubo e comprimento da sua aresta, velocidade e distância percorrida, entre outras.(BRASIL, 2016, p. 563)

De modo geral, através do estudo de problemas de otimização buscamos justamente isso: explorar a relação entre duas grandezas. Particularmente, por exemplo, quando resolvemos o problema "De todos os retângulos de um dado perímetro, qual é aquele que tem a maior área?", estamos procurando as dimensões comprimento e largura do retângulo para obter a área máxima, que, conforme a referência [16], p. 77, o retângulo procurado é um quadrado.

A otimização, com suas aplicações, contribui na resolução de problemas pertinentes à administração, à economia, às engenharias, à logística, às diversas áreas da ciência e, que podem ser trabalhados no Ensino Médio. Nota-se também que, de maneira elementar, problemas de otimização vêm sendo cobrados no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Como exemplo podemos citar a prova de 2015 que traz consigo duas questões de otimização: a saber, a questão 136 da prova amarela, a qual pode-se resolver usando conhecimentos de função quadrática e a questão 176 que pode ser resolvida usando-se conhecimentos de funções trigonométricas. Já a questão 166 da prova amarela de 2014 pode ser resolvida usando a desigualdade triangular (ver Apêndice A). Além disso, todas as provas, da forma como são elaboradas hoje, estruturadas em quatro matrizes e compostas por 45 questões para cada uma das áreas do conhecimento - modelo adotado desde o ano de 2009 - contêm, em média, cinco problemas elementares com as palavras *máximo* ou *mínimo*.

Uma proposta bem interessante presente neste trabalho é aliar o estudo de problemas de otimização com o uso de uma tecnologia digital, neste caso o uso do *software* matemático GeoGebra.

Documentos oficiais sugerem a utilização de alguns *softwares* nas aulas de Matemática como forma de facilitar o processo de ensino e aprendizagem e para a inserção dos estudantes na sociedade tecnológica. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio afirmam que

> O desenvolvimento científico e tecnológico acelerado impõe à escola um novo posicionamento de vivência e convivência com os conhecimentos capaz de acompanhar sua produção acelerada. A apropriação de conhecimentos científicos se efetiva por práticas experimentais, com contextualização que relacione os conhecimentos com a vida, em oposição a metodologias pouco ou nada ativas e sem significado para os estudantes. Estas metodologias estabelecem relação expositiva e transmissivista que não coloca os estudantes em situação de vida real, de fazer, de elaborar. Por outro lado, tecnologias da informação e comunicação modificaram e continuam modificando o comportamento das pessoas e essas mudanças devem ser incorporadas e processadas pela escola para evitar uma nova forma de exclusão, a digital. (BRASIL, 2013, p. 167)

Portanto, a utilização de ferramentas tecnológicas nas aulas de Matemática, como o *software* GeoGebra, vem para estreitar a relação dos estudantes com as tecnologias digitais, tornando-as mais atrativas, potencializando a eficiência da aprendizagem dos conteúdos, além de promover a inclusão digital. O exponencial crescimento tecnológico exige uma formação contínua do professor: a preparação desse profissional é condição *sine qua non* para o sucesso do uso de tecnologias digitais em sala de aula. Nesse sentido, faz-se necessária a inserção dessas ferramentas tecnológicas em nossa prática pedagógica, conforme recomendam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio

> Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. (BRASIL, 2006, p. 87)

Durante o desenvolvimento deste trabalho usamos a Matemática para entender a tecnologia quando, por exemplo, enfatizamos as limitações de *softwares* quanto a erros na n-ésima casa decimal de alguns resultados obtidos em algumas atividades. Por outro lado fizemos uso da tecnologia para entender a Matemática na medida que planejamos uma sequência didática na qual o aluno deve utilizar um *software* matemático (o GeoGebra) para que passo a passo ele resolva o problema proposto e conjecture o resultado geral para cada situação-problema trabalhada.

Numa representação de objetos matemáticos realizada apenas com lápis e papel (ou pincel ou giz e quadro), a figura por si só não é considerada válida como prova matemática de propriedades do objeto em estudo.

> Em geometria dinâmica, por outro lado, a garantia de validade das propriedades e relações matemáticas do objeto representado é incorporada concretamente no próprio processo de construção da representação. Desta forma, as próprias experiências de construir representações em geometria dinâmica já constituem, por si só, exercícios que demandam um maior nível de conhecimento matemático dos objetos. Essas experiências podem ainda fornecer pistas sobre outras propriedades e relações dos objetos construídos, além daquelas que fazem parte de suas definições ou são dadas nos enunciados dos problemas, sugerindo porque estas são válidas (ou não válidas) e indicando caminhos para sua dedução. Assim, o processo de construção pode nos levar a perceber ou a conjecturar propriedades, que, evidentemente, deverão ser confirmadas ou refutadas por argumentos matemáticos. (GIRALDO, CAETANO e MATTOS, 2012, p. 68)

Nesta dissertação, a confirmação da validade das fórmulas conjecturadas com a utilização do GeoGebra dar-se-á através de demonstrações matemáticas formais. Fazemos tais demonstrações tomando como base os conteúdos básicos de geometria e a teoria preliminar do capítulo 2 desta dissertação.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Propor uma sequência de atividades envolvendo problemas de otimização com a utilização do GeoGebra como ferramenta de apoio, e que pode ser aplicada em turmas do Ensino Médio, introduzindo assim o conceito de otimização e reforçando o estudo nos conteúdos de Geometria.

1.1.2 Objetivos específicos

- Apresentar uma sequência didática de problemas envolvendo conteúdos de Geometria;
- Elaborar as atividades a serem executadas no GeoGebra para a resolução dos problemas;

- Elaborar questões que estimulem o aluno a conjecturar resultados antes de serem apresentados formalmente;
- Utilizar conteúdos matemáticos elementares para demonstrar os resultados conjecturados;
- Estabelecer a importância de análise do erro dos *softwares* digitais, relacionando à formalização de resultados através de demonstrações matemáticas.

1.2 Organização

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: além desta Introdução (Capítulo 1), o Capítulo 2 apresenta as principais definições e teoremas utilizados como base no desenvolvimento deste trabalho. O Capítulo 3 apresenta todas as atividades que criamos ou adaptamos e o Capítulo 4 apresenta as conclusões do nosso trabalho. Para terminar temos as Referências Bibliográficas e dois apêndices: um tratando de questões do ENEM que abordam problemas de otimização e outro sobre o GeoGebra.

Estamos seguindo os princípios gerais para a elaboração de trabalhos acadêmicos (teses, dissertações e outros) conforme as referências [14] e [15].

Capítulo 2

Teoria preliminar

2.1 Introdução

Neste capítulo definimos as médias quadrática, aritmética, geomética e harmônica, bem como demonstramos algumas relações de desigualdade entre essas médias. Além disso, também definimos mínimos e máximos de funções e demonstramos um resultado de função quadrática.

As desigualdades das médias e o estudo de mínimos e máximos de funções serão úteis em demonstrações de resultados do capítulo seguinte.

2.2 Desigualdade das médias

Definição 2.1 *Considere $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ e a_n números reais positivos, com $n \geq 2$. Os números reais positivos*

$$\begin{aligned} m_q &= \sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2}{n}}, && (2.1) \\ m_a &= \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, && (2.2) \\ m_g &= \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}, && (2.3) \\ m_h &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} && (2.4) \end{aligned}$$

são denominados, respectivamente, de média quadrática, média aritmética, média geomética e média harmônica de a_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Teorema 2.1 *(Desiguadade entre as médias aritmética e quadrática)*
Dados $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos tem-se

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2}{n}},$$

ou seja, $m_a \leq m_q$. Além do mais, a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Demonstração. Observe que

$$\begin{gathered}
(a_1 - a_2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow {a_1}^2 + {a_2}^2 \geq 2a_1a_2 \\
(a_1 - a_3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow {a_1}^2 + {a_3}^2 \geq 2a_1a_3 \\
\cdots \\
(a_1 - a_n)^2 \geq 0 \Leftrightarrow {a_1}^2 + {a_n}^2 \geq 2a_1a_n \\
(a_2 - a_3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow {a_2}^2 + {a_3}^2 \geq 2a_2a_3 \\
\cdots \\
(a_2 - a_n)^2 \geq 0 \Leftrightarrow {a_2}^2 + {a_n}^2 \geq 2a_2a_n \\
\cdots \\
(a_{n-1} - a_n)^2 \geq 0 \Leftrightarrow {a_{n-1}}^2 + {a_n}^2 \geq 2a_na_{n-1}.
\end{gathered}$$

Somando membro a membro as desigualdades anteriores, temos

$$(n-1)({a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2) \geq 2a_1a_2 + ... + 2a_na_{n-1}.$$

Assim,

$$n({a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2) - ({a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2) \geq 2a_1a_2 + ... + 2a_na_{n-1}.$$

Ou seja,

$$n({a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2) \geq {a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2 + 2a_1a_2 + ... + 2a_na_{n-1},$$

consequentemente

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \leq n({a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2).$$

Dividindo por n^2 e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da última desigualdade, concluímos que

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2}{n}}.$$

Por fim, notamos que a igualdade ocorre se, e somente se, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_i - a_j)^2 = 0$, o que é verdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$. □

Há uma generalização dessa desigualdade. É a seguinte:

Teorema 2.2 *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos e $k \in \mathbb{N}$, então*

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt[k]{\frac{{a_1}^k + {a_2}^k + ... + {a_n}^k}{n}},$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Esta desigualdade é um caso particular da Desigualdade de Holder. (Ver demonstração na Referência [13], p. 66.)

Teorema 2.3 *(Desiguadade entre as médias geomética e aritmética)*
Dados $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos tem-se

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

ou seja, $m_g \leq m_a$. Além do mais, a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Demonstração. Vamos dividir esta demonstração em dois casos.

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere $A_n = \{m \in \mathbb{N} : n \leq 2^m\}$. Observe que, $A_n \neq \phi$, pois, pela Desigualdade de Bernoulli[1], $2^m = (1+1)^m \geq 1+m$. Basta tomar $m \geq n-1$ que teremos $2^m \geq n$. Assim, pelo Princípio da Boa Odenação, existe um menor elemento m_0 de A_n. Temos dois casos a considerar:

1º) $n = 2^{m_0}$;

2º) $n < 2^{m_0}$.

1º **caso**: A desigualdade vale para $n = 2^{m_0}$.

Por indução finita, para $m_0 = 1$, temos $n = 2$. Supondo que a desigualdade vale para m_0, considerando $2^{m_0} = k$. Logo, precisamos provar que a desigualdade também é válida para 2^{m_0+1}, ou seja, como $2^{m_0+1} = 2^{m_0}.2$, segue que devemos provar que para $n = 2k$ também é válida.

Note que, para $n = 2$ a desigualdade vale. De fato, uma vez que

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0,$$

segue-se que

$$a_1 - 2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} + a_2 \geq 0.$$

Portanto,

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}.$$

Como a_1 e a_2 são positivos, temos que $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} = \sqrt{a_1 a_2}$, de onde concluímos que

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2},$$

[1]A Desigualdade de Bernoulli afirma que "Em todo corpo ordenado K, se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, vale $(1+x)^n \geq 1+nx$". A demonstração dessa desigualdade pode ser feita por indução em n; podemos encontrá-la na Referência [12], p. 69.

ou seja,

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}.$$

Considerando, agora, como hipótese de indução, que a desigualdade vale para $n=k$, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{a_1+a_2+...+a_{2k}}{2k} &= \frac{\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+...+a_{2k}}{k}}{2} \\
&\geq \frac{\sqrt[k]{a_1...a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}...a_{2k}}}{2} \qquad (2.5)\\
&\geq \sqrt{\sqrt[k]{a_1...a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}...a_{2k}}} \qquad (2.6)\\
&= \sqrt[2k]{a_1...a_{2k}},
\end{aligned}$$

onde em (2.5) e (2.6) usamos, respectivamente, a validade da desigualdade para $n=k$ e para $n=2$. Portanto, como já provamos a validade para $n=2$, é claro que vale também para $n=4,8,...,2^{m_0},...$ como esperávamos.

2^{o} **caso**: Sendo m_0 um inteiro positivo, então a desigualdade vale para todo $n<2^{m_0}$. Defina

$$L=\sqrt[n]{a_1...a_n}.$$

Usando o fato de que a desigualdade vale para $n=2^{m_0}$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{a_1+...+a_n+\underbrace{L+...+L}_{(2^{m_0}-n)vezes}}{2^{m_0}} &\geq \sqrt[2^{m_0}]{a_1...a_n.L^{2^{m_0}-n}}\\
&= \sqrt[2^{m_0}]{L^n.L^{2^{m_0}-n}}=L.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{a_1+...+a_n+(2^{m_0}-n)L}{2^{m_0}} \geq L,$$

logo,

$$a_1+...+a_n \geq 2^{m_0}L-(2^{m_0}-n)L=nL.$$

De onde segue que

$$a_1+...+a_n \geq nL = n\sqrt[n]{a_1...a_n}.$$

Portanto,

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Como para todo inteiro positivo n sempre existe um inteiro positivo m_0 tal que $n<2^{m_0}$, a desigualdade fica provada para todo n.

Também, por indução, observe que a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1=...=a_n$. Para que a igualdade ocorra, devemos ter igualdade nas passagens (2.5) e (2.6). Assim,

$$\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}=\sqrt[k]{a_1a_2...a_k},$$

$$\frac{a_{k+1}+...+a_{2k}}{k}=\sqrt[k]{a_{k+1}...a_{2k}}$$

e

$$\frac{\sqrt[k]{a_1...a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}...a_{2k}}}{2}=\sqrt{\sqrt[k]{a_1...a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}...a_{2k}}}.$$

Para as duas primeiras igualdades devemos ter, por hipótese de indução, que $a_1=...=a_k$ e $a_{k+1}=...=a_{2k}$. Finalmente, a última igualdade ocorre se, e somente se, $\sqrt[k]{a_1...a_k}=\sqrt[k]{a_{k+1}...a_{2k}}$, e esta condição, juntamente com as duas anteriores, implicam que devemos ter $a_1=...=a_k=a_{k+1}=...=a_{2k}$.

Agora sendo $n=2^k$, para haver a igualdade, segue que

$$a_1=a_2=...=a_n=\underbrace{L=...=L}_{(2^{m_0}-n)vezes}.$$

Em particular, todos os $a_{i's}$, com $i=1,...,n$, são iguais. Concluímos, então, esta demonstração. $\square$

Teorema 2.4 *(Desiguadade entre as médias harmônica e geométrica)*
Dados $a_1,a_2,...,a_n$ números reais positivos, tem-se

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n},$$

ou seja, $m_h\leq m_g$. Além do mais, a igualdade vale se, e somente se, $a_1=a_2=...=a_n$.

Demonstração. Usando o teorema anterior com os números a_i substituídos por $\frac{1}{a_i}(i=1,2,...,n)$ vale que

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}}\leq\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}.$$

Invertendo, temos

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}\leq\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}}=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Observe também que a igualdade ocorre se, e somente se, $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_2}=...=\frac{1}{a_n}$, o que equivale a $a_1=a_2=...=a_n$, o que conclui a demonstração.

$\square$

Observação 2.1 *A desigualdade das médias pode ser sintetizada como segue: se $a_1,a_2,...,$ a_n são números positivos e m_q,m_a,m_g e m_h são, respectivamente, suas médias quadrática, aritmética, geométrica e harmônica, então $m_q\geq m_a\geq m_g\geq m_h$. Além do mais, duas quaisquer dessas médias são iguais se, e somente se, $a_1=a_2=...=a_n$.*

2.3 Mínimo e máximo de funções

No nosso trabalho também usamos mínimos e máximos de funções. Vejamos, então, as definições e os principais resultados utilizados.

Definição 2.2 *Sendo $D \subseteq \mathbb{R}$ o domínio de uma dada função $f : D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in D$, diz-se que a função f tem máximo absoluto em x_0 ou que x_0 é ponto de máximo absoluto de f. Além do mais, $f(x_0)$ é dito valor máximo de f em D.*

Definição 2.3 *Sendo $E \subseteq \mathbb{R}$ o domínio de uma dada função $g : E \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$ tal que $g(x) \geq g(x_0)$ para todo $x \in E$, diz-se que a função g tem mínimo absoluto em x_0 ou que x_0 é ponto de mínimo absoluto de f. Além do mais, $g(x_0)$ é dito valor mínimo de g em E.*

Definição 2.4 *Dados a e b pertencentes ao domínio $D \subseteq \mathbb{R}$ de uma função $f : D \to \mathbb{R}$, temos que*

(i) Se existe um intervalo aberto I contido no domínio D, tal que $a \in I$ e $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in I$, então f tem um máximo local em a e $f(a)$ é dito valor de máximo local;

(ii) Se existe um intervalo aberto J contido no domínio D, tal que $b \in J$ e $f(x) \geq f(b)$ para todo $x \in J$, então f tem um mínimo local em b e $f(b)$ é dito valor de mínimo local;

Definição 2.5 *Denomina-se função quadrática qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$.*

Teorema 2.5 *Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem valor máximo absoluto (ou valor mínimo absoluto) dado por $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, em $x_v = \frac{-b}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, com y_v sendo valor máximo de f em $\mathbb{R}$ quando $a < 0$ (ou valor mínimo de f em $\mathbb{R}$ quando $a > 0$).*

Demonstração. Usando o fato de que $a \neq 0$, pode-se reescrever $f(x) = ax^2 + bx + c$ na forma

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Completando quadrados, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}x\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, obtemos

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

que é a expressão da função quadrática na forma canônica $f(x) = a(x-m)^2 + k$, com $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{\Delta}{4a}$. Observe que f assume valor mínimo em $x_V = \frac{-b}{2a}$ quando $a > 0$, visto que

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0.$$

Segue que

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a},$$

ou seja,

$$f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Portanto, $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo de f em $\mathbb{R}$.

Já para $a < 0$, f assume valor máximo em $x_V = \frac{-b}{2a}$, pois

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0.$$

Logo,

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}.$$

O que acarreta

$$f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

Concluímos, que $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo de f em $\mathbb{R}$, o que encerra a demonstração.

$\square$

Capítulo 3

Atividades

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos atividades que servem como alternativa para o estudo de geometria, onde em cada uma delas, com a utilização do GeoGebra (versão 5.0.263.0), o aluno encontrará valores otimizados para elementos geométricos tais como: segmentos, ângulos, áreas e volumes.

O conhecimento geométrico básico é indispensável para a vida cotidiana: para orientar-se reflexivamente no espaço; para fazer estimativas sobre formas e distâncias; para fazer operações e cálculos relativos à ditribuição de objetos no espaço, dentre outras situações. A Geometria é componente essencial das artes e representa um aspecto importante no estudo dos elementos da natureza. Além disso, a geometria está presente em múltiplos âmbitos do sistema produtivo de nossa sociedade atual, por exemplo, na agricultura, pecuária, produção industrial, *design*, engenharia, arquitetura e topografia.

O estudo da geometria, tanto neste trabalho como de maneira geral, atrelado ao uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra vem sendo enriquecido metodologicamente. A principal vantagem com relação ao uso dessa ferramenta consiste no fato de que as figuras deixam de ser estáticas, o que ocorre quando se trabalha apenas usando recursos didáticos como: quadro negro (ou branco), lápis, régua e papel. Com o uso de um *software* de geometria dinâmica as figuras se apresentam na forma de animações, o que nos permite observá-las de diferentes pontos de vista, além de podermos interagir com elas ao modificar certas condições e analisar o que ocorre.

> Em geometria dinâmica, as construções não apenas podem ser manipuladas, como também as condições que a determinaram inicialmente são preservadas pela manipulação. O aspecto dinâmico dos ambientes pode indicar a validade matemática das construções, e especialmente sua não validade. (GIRALDO, CAETANO e MATTOS, 2012, p. 68)

Faz-se, então, necessária a comprovação ou refutação das relações e propriedades inerentes aos objetos matemáticos para as quais foram formuladas conjecturas, através de argumentos matemáticos formais.

A parte principal deste trabalho é apresentada a seguir por meio de doze atividades para o estudo de problemas de otimização com a utilização do *software* GeoGebra, sendo as seis primeiras de geometria plana e as seis últimas de geometria espacial.

3.2 Orientações metodológicas gerais

3.2.1 Aplicação

As atividades são propostas para o desenvolvimento de um projeto inovador em turmas do 2º ou do 3º ano do Ensino Médio. Caso o professor opte por executar todas as doze atividades, necessitará de aproximadamente cinquenta horas-aula (cerca de um bimestre completo), levando em consideração que serão realizadas aulas básicas para apresentação do *software* GeoGebra aos alunos, execução das atividades no GeoGebra, demonstrações formais das relações e propriedades conjecturadas, exercícios de fixação da aprendizagem, além de situações metodológicas a critério do professor, tais como: leituras complementares, atividades de verificação e investigação práticas envolvendo medições, dentre outras.

3.2.2 Limitações do *software*

Em cada uma dessas atividades são sugeridos determinados números de casas decimais para vários objetos, tais como *controles deslizantes*, *ângulos*, *áreas*, *volumes*, etc. Quando trabalhamos com máquinas de calcular ou *softwares* digitais, podem ser cometidos erros por causa das próprias limitações das máquinas onde estão instalados esses *softwares*, já que estas têm capacidade finita.

> Tais resultados são produzidos, de forma geral, por erros de arredondamento: como uma calculadora só tem capacidade para armazenar números com representação decimal finita, todos os números com representação infinita (e mesmo aqueles com representação finita, porém superior a capacidade da máquina) são aproximados por números com representação finita. Isto é, as calculadoras (pelo menos as mais simples) não operam com números com representação decimal infinita, e sim com aproximações para esses números. A imprecisão nos resultados de cálculos aproximados pode aumentar quando os erros de arredondamento são propagados, isto é, quando resultados aproximados são usados em novos cálculos, gerando aproximações sobre aproximações. Evidentemente, algumas máquinas possuem capacidade de armazenamento superior a outras, podendo produzir resultados mais precisos, porém todas têm capacidade finita. Portanto cálculos com

> decimais infinitos envolverão necessariamente imprecisões e erros de alguma ordem. (GIRALDO, CAETANO e MATTOS, 2012, p. 12)

Com base nesses possíveis erros produzidos pelas limitações dos *softwares*, faz-se necessária a comprovação matemática formal das relações e propriedades conjecturadas.

3.3 Atividades usando o GeoGebra 2D

3.3.1 Atividade 1: Desigualdade triangular

Objetivo: Compreender que em um triângulo a medida de um dos lados é sempre menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

Vamos desenvolver os seguintes passos para descobrirmos as condições de existência de um triângulo dadas as medidas dos seus seus lados.

1. Abra o GeoGebra e escolha a disposição **Geometria** (ver Figura 3.1);

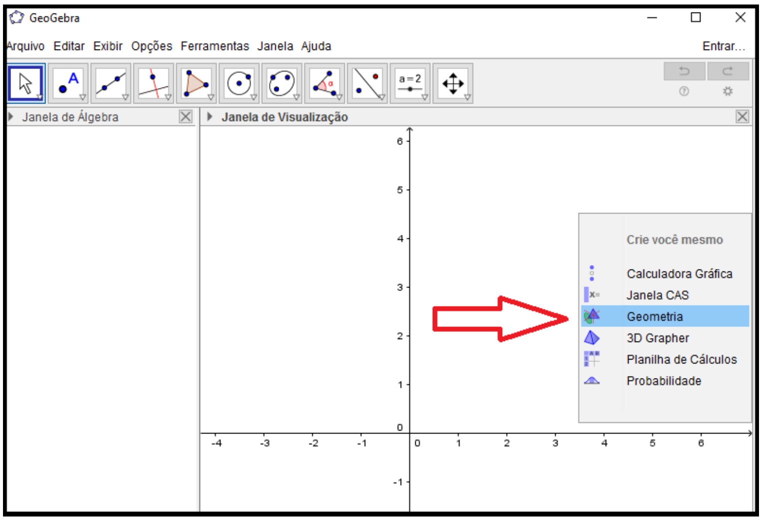


Figura 3.1: Geometria

2. Clique no botão *Controle Deslizante* (ver Figura 3.2), crie três controles deslizantes a, b e c, fazendo cada um variar de 0 a 10 e com incremento 1;

3. No terceiro botão, escolha a opção *Segmento com Comprimento Fixo* e crie os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ de comprimentos, respectivamente, a, b e c;

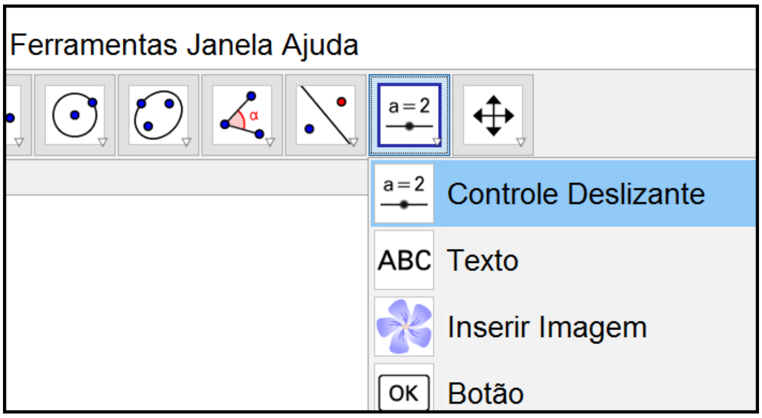


Figura 3.2: Controle deslizante

Observação 3.1 *Antes de criar o segmento* $\overline{AD}$ *mova o* Controle Deslizante *a para que os pontos C e D não coincidam a priori.*

4. Use o primeiro botão *Mover* da *Barra de Ferramentas* para movimentar as extremidades C e D de modo a tentar formar o triângulo desejado.

Orientações metodológicas

Após a realização desses passos, para que seja conjecturado o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

5. É possível formar um triângulo com essas medidas de modo que seus vértices sejam A, B e com C coincidindo com D? (Para isto, mova os *Controles Deslizantes* até obter $a = 8$, $b = 4$ e $c = 3$)

6. Repita o passo anterior para as seguintes medidas de a, b e c:

   - $a = 8$, $b = 5$ e $c = 6$;
   - $a = 3$, $b = 5$ e $c = 4$;
   - $a = 3$, $b = 5$ e $c = 1$;
   - $a = 3$, $b = 9$ e $c = 2$;
   - $a = 4$, $b = 9$ e $c = 10$;
   - $a = 4$, $b = 4$ e $c = 8$;
   - $a = 10$, $b = 5$ e $c = 5$.

7. Se $a + b > c$ sempre existe triângulo? (Mova livremente os controles deslizantes.)

8. De acordo com as observações das atividades anteriores, existe alguma condição para se formar um triângulo, dadas as medidas dos seus lados? Se sim, descreva-a.

No segundo passo sugerimos que os controles deslizantes variem de 0 a 10 com incremento 1, mas esses valores ficam a critério do professor. Pode-se trabalhar, nesta atividade, com quaisquer valores reais positivos, movendo adequadamente a *Janela de Visualização*.

Teorema 3.1 *(Teorema do ângulo externo) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração: Ver Referência [1], p.198.

Lema 3.2 Se ABC é um triângulo tal que $\widehat{B} > \widehat{C}$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$.

Demonstração. Sendo $\widehat{B} > \widehat{C}$ trace a semirreta $\overrightarrow{BQ}$,

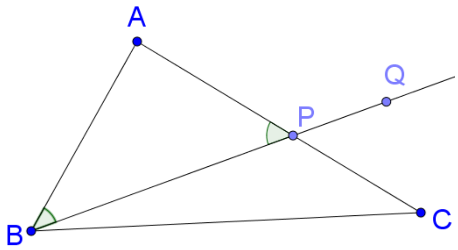


Figura 3.3: Ao maior ângulo opõe-se o maior lado

interseptando o lado AC, no ponto P, de modo que

$$C\widehat{B}Q = \frac{1}{2}(A\widehat{B}C - B\widehat{C}A).$$

Segue, do Teorema do Ângulo Externo, que

$$A\widehat{P}B = C\widehat{B}P + B\widehat{C}P = C\widehat{B}Q + B\widehat{C}A = \frac{1}{2}(A\widehat{B}C - B\widehat{C}A) + B\widehat{C}A = \frac{1}{2}(A\widehat{B}C + B\widehat{C}A).$$

Do fato de

$$A\widehat{B}P = C\widehat{B}A - \frac{1}{2}(A\widehat{B}C - B\widehat{C}A) = \frac{1}{2}(A\widehat{B}C + B\widehat{C}A),$$

segue que o triângulo ABP é isósceles de base BP. Portanto,

$$\overline{AB} = \overline{AP} < \overline{AC}.$$

□

Teorema 3.3 *(Desigualdade triangular) Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo tal que

$$\overline{AB} = c, \overline{AC} = b \text{ e } \overline{BC} = a.$$

Mostraremos que $a < b + c$. Marque o ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{CA}$ de modo que A está entre C e D e $\overline{AD} = \overline{AB}$, conforme a Figura 3.5.

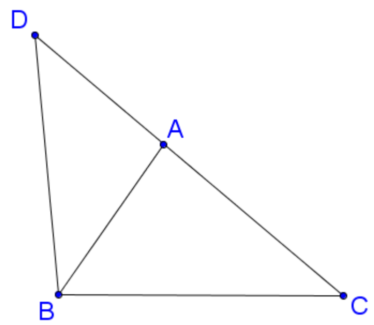


Figura 3.4: Desigualdade triangular

Note que

$$\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c.$$

Logo, basta mostrarmos que $B\widehat{D}C < D\widehat{B}C$. Mas, o triângulo ABD é isósceles de base BD, isto é, $B\widehat{D}A = D\widehat{B}A$. Portanto,

$$B\widehat{D}C = B\widehat{D}A = D\widehat{B}A < D\widehat{B}A + A\widehat{B}C = D\widehat{B}C.$$

Do Lema 3.2, temos que $a < b + c$. De modo análogo mostramos que $b < a + c$ e $c < a + b$.
□

A desigualdade triangular é a formulação matemática da ideia intuitiva de que o caminho mais curto, na Geometria Euclidiana, entre os pontos A e B é o caminho reto.

3.3.2 Atividade 2: Retângulo inscrito num círculo

Objetivo: Determinar qual retângulo tem maior área dentre todos os retângulos incritos num círculo.

Qual é o retângulo de maior área, que pode ser inscrito em um círculo de raio fixado? Para responder a essa pergunta realizemos passo a passo a seguinte sequência didática:

1. Abra o GeoGebra e torne visíveis a *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de Visualização 2*. Retire os eixos da primeira janela de visualização;

2. Na *Janela de Visualização*, crie um controle deslizante r variando de 0 a 2 com incremento 0.1;

3. No sexto botão, escolha *Círculo dados Centro e Raio* e crie um círculo com o centro em O com raio r. Clique com o botão direito do *mouse* para renomear o centro do círculo;

   Sugestão: Para melhor visualização clique no último botão *Mover Janela de Visualização* da Barra de Ferramentas e dê um zoom na figura a ser trabalhada.

4. Escolha, no terceiro botão, *Reta*; clique sobre o círculo obtendo o ponto A e em seguida sobre outro ponto B do círculo, distinto de A;

5. Obtenha duas retas perpendiculares à reta que contém os pontos A e B, intersectando-a nesses pontos, utilizando o quarto botão *Reta Perpendicular*;

6. No segundo botão em *Interseção de Dois Objetos*, obtenha os pontos de interseção entre as retas obtidas no item anterior e o círculo clicando próximo dos pontos de interseção distintos de A e B;

7. Clique no quinto Botão *Polígono* e posteriormente sobre os pontos A, B, C, D e em A novamente, obtendo, assim, o retângulo $ABCD$;

8. No último botão, clique em *Exibir/Esconder Objeto*, selecione as retas e em seguida clique em qualquer outro botão (observe que as retas desparecem ficando apenas o retângulo inscrito no círculo);

9. No oitavo botão escolha *Área* para obter a área do retângulo $ABCD$, clique sobre esse polígono;

10. Clique no décimo botão *Texto* e observe que surgirá uma caixa de diálogo. No espaço *Editar* digite *DistânciaAB=*, selecione *Fórmula LaTeX*, em seguida *Objetos*, por fim escolha a opção a se a for a medida do segmento AB. De modo análogo obtenha a medida do segmento BC. Coloque a área com três casas decimais e o comprimento dos lados com uma casa decimal;

    Sugestão: Para obter a área com três casas decimais clique com o botão direito do *mouse* sobre a área e depois em *Propriedades*→*Texto*→*Arredondamento*→*3 casas decimais*→OK; proceda de modo análogo para as medidas dos lados do retângulo.

Sugestão: Fixe a área e as distâncias obtidas nos passos anteriores clicando sobre esses textos com o botão direito do *mouse* e marque a opção *Fixar Objeto*.

11. Clique na *Janela de Visualização 2* e, em seguida, digite, na caixa de *Entrada*, $Área = (a, pol1)$, onde a é a medida do lado AB e $pol1$ representa a área do retângulo em estudo.

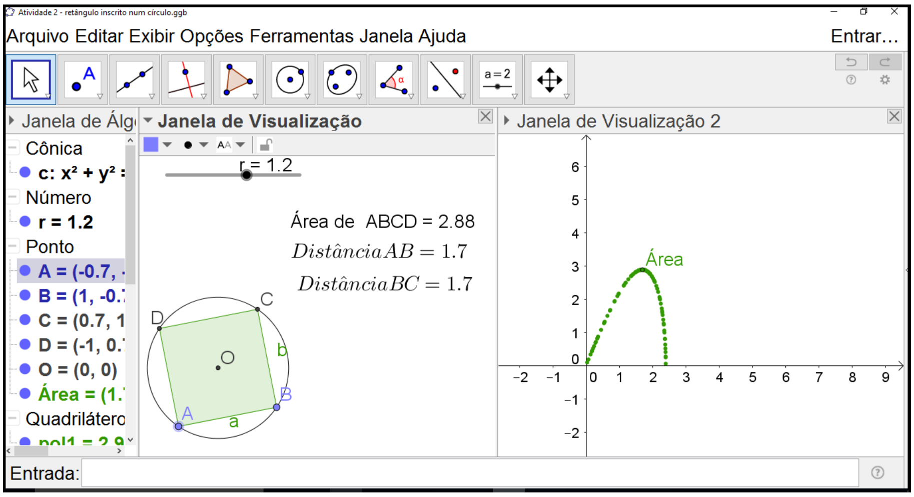


Figura 3.5: Retângulo de área máxima inscrito num círculo

Orientações metodológicas

Finalizados esses passos, para que seja conjecturado o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

12. Clicando no *Mover*, primeiro botão da barra de ferramentas, e, posteriormente, movendo o ponto A ou o ponto B, qual é o maior valor que você encontra para a área do retângulo $ABCD$? (Observe o gráfico na *Janela de Visualização 2*)

13. Encontrado esse maior valor para a área, quais são as medidas de cada lado do retângulo?

14. Dentre todos os retângulos inscritos em um círculo de raio fixo, qual é o que tem a maior área?

No segundo passo, note que o controle deslizante r representa a medida do raio do círculo e, portanto, deve ser maior do que zero. Quanto ao incremento, o professor pode escolher o valor que lhe convenha, conforme a precisão desejada. No décimo passo, sugerimos que se exibam a área com três casas decimais e o comprimento dos lados com apenas uma casa decimal com o intuito de "esconder" os erros a partir de determinadas casas decimais, erros comuns de aproximação por conta das limitações do *software*, já tratados na subseção 3.2.2 nas orientações metodológicas gerais deste capítulo.

Teorema 3.4 *O retângulo de área máxima inscrito num círculo de raio r é um quadrado.*

Demonstração. No retângulo $ABCD$ inscrito num círculo, cujo raio mede r, considere $\overline{AB} = 2x$ e $\overline{BC} = 2y$. Assim, a área S do retângulo $ABCD$ é igual a $4xy$. Como $r^2 = x^2 + y^2$, segue que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Logo,

$$S = 4x\sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow S^2 = 16x^2(r^2 - x^2).$$

Fazendo $z = x^2$, tem-se

$$S^2 = 16z(r^2 - z) \Rightarrow S^2 = -16z^2 + 16r^2 z.$$

Temos, então, a seguinte função quadrática em z:

$$f(z) = -16z^2 + 16r^2 z,$$

que tem ponto máximo quando a abscissa do vértice da parábola for $z_V = -\frac{16r^2}{2.(-16)} = \frac{r^2}{2}$. Como $z = x^2$, segue que $x_V = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$. Logo,

$$y_V = \sqrt{r^2 - x_V{}^2} \Rightarrow y_V = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} \Rightarrow y_V = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Portanto, a área máxima ocorre quando $x = y$, ou seja, o retângulo inscrito no círculo é um quadrado. $\square$

3.3.3 Atividade 3: Ângulo máximo de visão

Objetivo: Determinar o ângulo máximo de visão de um expectador em relação a um telão, numa sala de cinema, e a distância em que se encontra com relação à parede onde está o telão quando este expectador está sentado na última fila lateral do cinema.

A atividade seguinte é uma adaptação de um problema resolvido no vídeo *Resolução de problemas com a ajuda do GeoGebra*, no qual o professor Eduardo Wagner dá uma palestra para professores premiados em virtude do desempenho de seus alunos na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP - 2008 (ver Referência [19]).

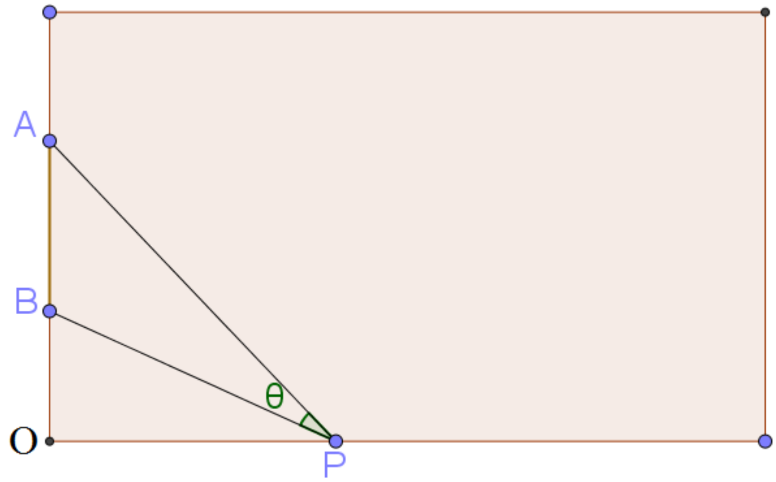


Figura 3.6: Caso particular

Para encontrarmos o valor da distância d e o ângulo máximo θ, realizemos passo a passo a seguinte sequência didática usando o GeoGebra:

1. Abra o GeoGebra e escolha a disposição **Álgebra e Gráficos**;
2. Clique no 2º botão (*Novo Ponto*) e marque o ponto $A = (0,2)$, o ponto $B = (0,6)$, o ponto C na origem do sistema cartesiano e D um ponto qualquer o eixo $\overrightarrow{OX}$. Clique com o botão direito do *mouse* sobre o ponto C e depois sobre o pondo D, dados pelo GeoGebra, renomeando-os, respectivamente, por O e P;
3. Escolha, no terceiro botão, *Segmento* e ligue os pontos A e P; B e P; e O e P. Clique com o botão direito do *mouse* sobre o segmento OP e em Proriedades $\to$ Básico $\to$ *Nome*: mude seu nome para d e clique em *Exibir Rótulo: Nome e Valor*; continuando em *Propriedades* mude a cor da linha a seu gosto; ainda em *Propriedades* $\to$ *Estilo* mude a espessura da linha para 5;
4. Obtenha o ângulo $B\widehat{P}A = \theta$ (Faça isso utilizando o 8º botão *Ângulo*). Exiba θ com 4 casas decimais: em *Opções* $\to$ *Arredondamento* $\to$ *4 casas decimais*.

   Orientações metodológicas

   Terminados esses passos, para que seja encontrado o resultado esperado, sugerimos que o professor faça algumas perguntas aos alunos, tais como:

5. Ao mover o ponto P, mantendo-o sempre à direita do ponto O, qual é o maior valor que você encontra para o ângulo θ, ou seja, o maior ângulo de visão que o expectador terá do telão?

6. Quando você encontra esse maior valor para θ, a que distância o expectador estará da parede onde está o telão, isto é, qual é a medida do segmento OP?

As coordenadas dos pontos A e B são sugeridas no segundo passo propositalmente para que sejam encontrados determinados valores de θ e d, entretanto o professor pode sugerir que os alunos movam livremente os pontos A, B e, posteriormente, P, para observarem o valor de d quando θ é máximo. Os erros de arredondamento justificam o número de casas decimais propostos no quarto passo dessa atividade. Por exemplo, com arredondamento de apenas três casas decimais, quando o ângulo θ é máximo, ocorrem diferentes valores para a medida d.

Caso particular

Qual é o ângulo máximo de visão de um expectador numa sala de cinema que está sentado numa cadeira da última fila lateral da sala, sabendo que telão do cinema tem uma largura de $4m$ e que está a $2m$ da parede lateral? Calcule a distância desse expectador com relação à parede onde está o telão do cinema quando o seu ângulo de visão for máximo.

Solução: Temos que o comprimento da tela é $4m$ e a distância entre a tela e a última fila lateral é $2m$, ou seja, considerando a Figura 3.6, temos $OA = 6m$ e $OB = 2m$. Sejam $OP = d$; $d > 0$, $A\widehat{P}O = \alpha$ e $B\widehat{P}O = \beta$. Segue que $\theta = \alpha - \beta$. Logo,

$$tg(\theta) = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha).tg(\beta)}.$$

Como $tg(\alpha) = \frac{6}{d}$ e $tg(\beta) = \frac{2}{d}$, obtemos a seguinte igualdade

$$tg(\theta) = \frac{\frac{6}{d} - \frac{2}{d}}{1 + \frac{6}{d} \cdot \frac{2}{d}} = \frac{\frac{4}{d}}{\frac{d^2+12}{d^2}} = \frac{4d}{d^2 + 12}.$$

Ao dividirmos o numerador e o denominador da fração da igualdade anterior por d, obtemos:

$$tg(\theta) = \frac{4}{d + \frac{12}{d}}.$$

Voltando ao nosso problema, para que θ seja máximo, neste caso, devemos ter $tg(\theta) = \frac{4}{d+\frac{12}{d}}$ máxima, ou seja, o denominador da fração $\frac{4}{d+\frac{12}{d}}$ deve ser mínimo. De acordo com o

Teorema 2.3, como θ é limitado $\left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ e tangente é uma função crescente e contínua, então temos que

$$d + \frac{12}{d} \geq 2\sqrt{d.\frac{12}{d}}$$

ou seja,

$$d + \frac{12}{d} \geq 4\sqrt{3}$$

e $d + \frac{12}{d}$ é mínimo se, e somente se, $d + \frac{12}{d} = 4\sqrt{3}$.

Assim, o valor máximo de $tg(\theta)$ é $\frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Como AOP é um triângulo retângulo com ângulo reto $A\widehat{O}P$ o ângulo $O\widehat{P}A$ é agudo, logo $\theta = B\widehat{P}A$ é também agudo. Donde concluímos que $\theta = 30^{\circ}$ e isto ocorre para

$$d = \frac{12}{d} \Rightarrow d^2 = 12 \Rightarrow d = 2\sqrt{3},$$

ou seja, o expectador terá o ângulo máximo quando sua distância em relação à parede onde está o telão for de, aproximadamente, $3,46m$.

Generalização

Qual é o ângulo máximo de visão de um expectador numa sala de cinema que está sentado numa cadeira da última fila lateral da sala, sabendo que a tela do cinema tem uma largura de $(a-b)$ metros? Calcule a distância desse expectador com relação à parede onde está o telão do cinema quando o seu ângulo de visão for máximo (ver a Figura 3.7).

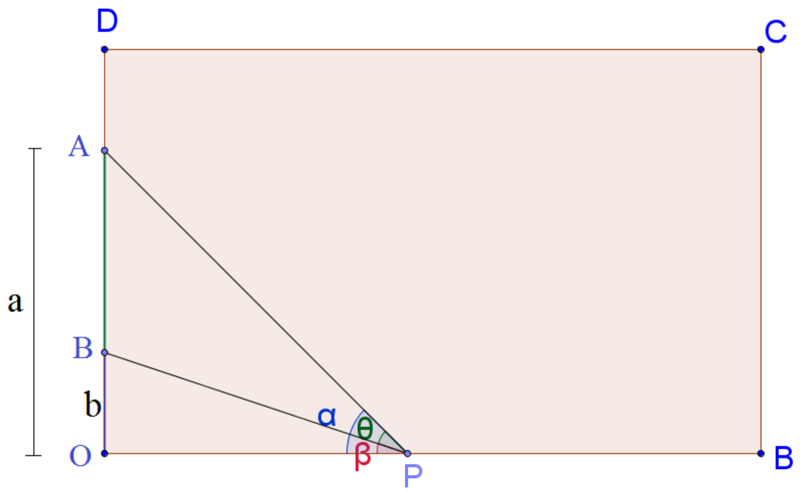


Figura 3.7: Sala de cinema

Demonstração. Considere $\overline{OP} = d$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OA} = a$, $B\widehat{P}A = \theta$, $O\widehat{P}B = \beta$ e $O\widehat{P}A = \alpha$. Segue que $\theta = \alpha - \beta$ e $\overline{AB} = a - b$. Logo,

$$tg(\theta) = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha).tg(\beta)}.$$

Como $tg(\alpha) = \frac{a}{d}$ e $tg(\beta) = \frac{b}{d}$, obtém-se a seguinte igualdade

$$tg(\theta) = \frac{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}}{1 + \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d}} = \frac{\frac{a-b}{d}}{\frac{d^2+ab}{d^2}} = \frac{(a-b)d}{d^2+ab}.$$

Como $d > 0$, dividindo o numerador e o denominador da fração da igualdade anterior por d, obtendo:

$$tg(\theta) = \frac{a-b}{d + \frac{ab}{d}}.$$

Para que θ seja máximo devemos obter o valor máximo de $tg(\theta) = \frac{a-b}{d+\frac{ab}{d}}$, equivalentemente o denominador da fração deve atingir o valor mínimo. No Teorema 2.3, temos que $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, para $x, y \in \mathbb{R}$. Fazendo $x = d$ e $y = \frac{ab}{d}$, segue que

$$d + \frac{ab}{d} \geq 2\sqrt{d.\frac{ab}{d}},$$

ou seja,

$$d + \frac{ab}{d} \geq 2\sqrt{ab}.$$

Assim, o valor máximo de $tg(\theta)$ é $\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$. Conclui-se, então, que $\theta = arctg\left(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)$ e isto ocorre quando

$$d = \frac{ab}{d} \Rightarrow d^2 = ab \Rightarrow d = \sqrt{ab}.$$

Portanto, o expectador terá o ângulo máximo quando sua distância em relação à parede onde está o telão for $d = \sqrt{ab}$. $\square$

3.3.4 Atividade 4: Retângulo inscrito num triângulo retângulo isósceles

Objetivo: Determinar qual é o retângulo de área máxima dentre todos os retângulos inscritos em um triângulo retângulo isósceles.

Dentre todos os retângulos inscritos em um triângulo retângulo isósceles, qual é o que tem a maior área?

Para resolvermos esse problema, primeiro observemos o seguinte caso particular em que os catetos do triângulo retângulo medem 5 unidades de comprimento. Aplicamos a seguinte atividade com a turma em estudo.

1. Abra o GeoGebra e torne visíveis a *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de Visualização 2*;

2. No terceiro botão, clique em *Segmento* e marque o segmento AB, onde $A(5,0)$ e $B(0,5)$;

3. Marque um ponto C no segmento AB;

4. Digite, no campo de *Entrada*, $D = (x(C), 0)$ obtendo, no eixo horizontal, um ponto com a mesma abscissa do ponto C;

5. Digite, no campo de *Entrada*, $E = (0, y(C))$ obtendo, no eixo vertical, um ponto com a mesma ordenada do ponto C;

6. Marque um ponto na origem do sistema cartesiano e renomei-o de O;

7. Clique no quinto Botão *Polígono* e posteriormente sobre os pontos O, D, C, E e em O novamente, obtendo, assim, o retângulo $ODCE$. Mude a cor e o estilo ao seu gosto, clicando no botão direito do *mouse*;

8. No oitavo botão escolha *Área* para obter a área do retângulo $ODCE$. Em seguida, no décimo botão (*Texto*), depois clique no segmento OD; em *Editar* digite *DistânciaOD*=; marque *Fórmula LaTeX* e em *Objetos*, clique em o se o for a medida de OD, para obter o comprimento do lado OD do retângulo. De modo análogo obtenha a medida do lado adjacente a OE. Coloque a área com três casas decimais e o comprimento dos lados com uma. Clique no primeiro botão do GeoGebra para, depois colocar essas medidas dos lados do retângulo num lugar mais conveniente para a sua visualização;

9. Clique na *Janela de Visualização 2* e, em seguida, digite, na caixa de *Entrada*, $\acute{A}rea = (o, o * e)$, onde o é a medida do lado OD e e é a medida do lado OE;

10. Habilite o rastro do ponto (*Área*) obtido anteriormente. Movendo o ponto C você terá em suas janelas do GeoGebra a vista da Figura 3.8.

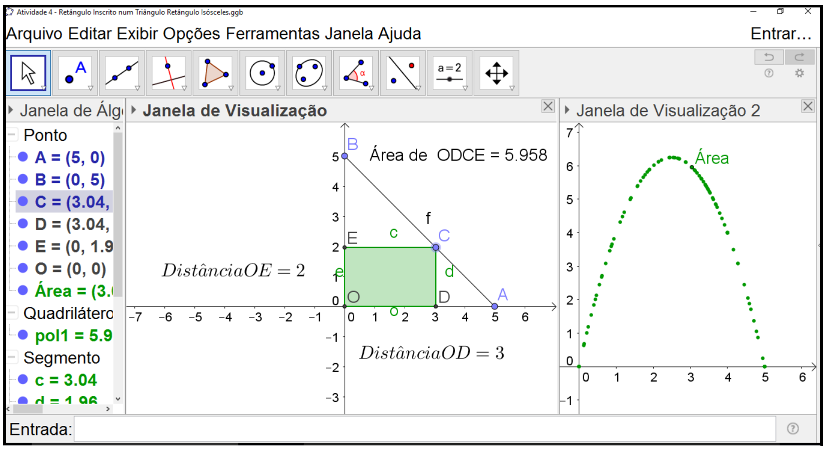


Figura 3.8: Retângulo inscrito num triângulo retângulo isósceles

Orientações metodológicas

Após a realização desses passos, para que seja conjecturado o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

11. Movendo o ponto C, qual é o maior valor que você encontra para a área do retângulo $CDFE$?

12. Encontrado esse maior valor para a área, quais são as medidas de cada lado do retângulo?

13. Quando essa maior área ocorre, como você descreve a posição do ponto "dinâmico" ($\acute{A}rea$) que destacamos no gráfico?

14. Dentre todos os retângulos inscritos em um triângulo retângulo isósceles, qual é o que tem a maior área?

As coordenadas dos pontos A e B, sugeridas no segundo passo, podem ser substituídas por outras, de modo $x(A) = y(B)$ para que o triângulo AOB permaneça sendo retângulo isósceles. Os erros de arredondamento justificam o número de casas decimais propostos no oitavo passo dessa atividade.

Caso particular

Dentre todos os retângulos inscritos em um triângulo retângulo isósceles, qual é o que tem a maior área?

Solução: Consideremos a Figura 3.9.

Temos triângulo isósceles AOB de base AB e $OA = OB = 5$. Por ser isósceles de base AB, o triângulo AOB, com ângulo $A\widehat{O}B$ reto, tem $O\widehat{A}B = A\widehat{B}O = 45^o$. Sendo $\overline{AD} = x$ e $\overline{DE} = b$, temos, no triângulo ADE:

$$tg45^o = \frac{b}{x} \Rightarrow 1 = \frac{b}{x} \Rightarrow x = b.$$

Analogamente nota-se que

$$\overline{BF} = \overline{EF} = 5 - b.$$

Do Teorema 2.3 segue que

$$A = (5 - x).b \leq \left(\frac{(5 - x) + b}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{4}.$$

Logo, a maior área possível é

$$A = 6,25,$$

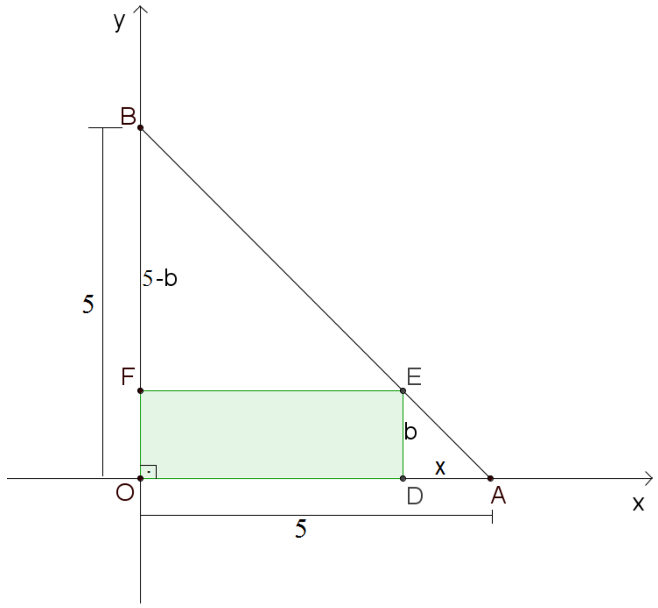


Figura 3.9: Triângulo retângulo isósceles

obtida quando

$$5 - x = b.$$

Como $x = b$,

$$b = 2,5.$$

Portanto, o retângulo $ODEF$, de área máxima, inscrito no triângulo retângulo isósceles AOB é o quadrado de lado $2,5$.

Teorema 3.5 *O retângulo de área máxima, inscrito no triângulo retângulo isósceles é o quadrado.*

Demonstração. Considere o triângulo isósceles AOB de base AB e $OA = OB = a$.

Por ser isósceles de base AB, o triângulo AOB, com ângulo $A\widehat{O}B$ reto, tem $O\widehat{A}B = A\widehat{B}O = 45^o$. Sendo $\overline{AD} = x$ e $\overline{DE} = b$, temos, no triângulo ADE:

$$tg45^o = \frac{b}{x} \Rightarrow 1 = \frac{b}{x} \Rightarrow x = b.$$

Analogamente nota-se que

$$\overline{BF} = \overline{EF} = a - b.$$

Do Teorema 2.3 (Desigualdade entre as médias geométrica e aritmética) segue que

$$A = (a-b).b \leq \left(\frac{(a-b)+b}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

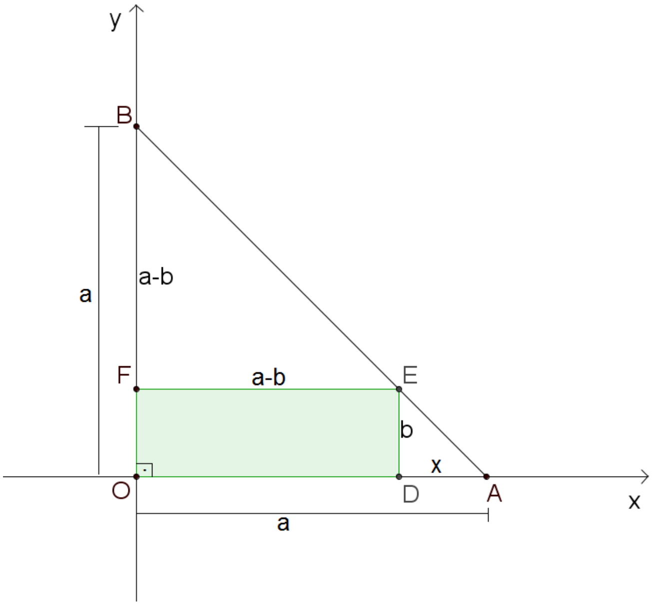


Figura 3.10: Retângulo inscrito num triângulo retângulo isósceles.

Assim, a maior área possível é

$$A = \frac{a^2}{4},$$

obtida quando

$$a - b = b.$$

Consequentemente

$$b = \frac{a}{2}.$$

Portanto, o retângulo $ODEF$, de área máxima, inscrito no triângulo retângulo isósceles AOB é o quadrado de lado $\frac{a}{2}$. $\square$

3.3.5 Atividade 5: Inscrever o triângulo de perímetro mínimo num triângulo acutângulo

Objetivo: Inscrever o triângulo de perímetro mínimo em um triângulo acutângulo[1].

Para conjecturar a solução desse problema[2] vamos desenvolver a seguinte atividade no

[1]Triângulo acutângulo é aquele que tem todos os ângulos agudos.

[2]Este célebre problema decorre de I.F. Fagnano, filho do Conde italiano C. Fagnano $(1682-1766)$, que se tornou famoso com o resultado de seus estudos notáveis de partição lemniscate. A solução dada aqui ao problema se distingue pela sua extrema simplicidade. Vem do Pe. Gabriel-Marie, autor do excelente livro *Exercices de Géométie*.

GeoGebra:

1. Abra o GeoGebra e esconda os *eixos*;

2. Clique no quinto botão da barra de ferramentas *Polígono* e trace na *Janela de Visualização* um triângulo ABC acutângulo. Esconda os rótulos dos lados;

3. Clique no segundo botão da barra de ferramentas, na opção *Ponto* e no segmento AB obtendo o ponto D. Renomeie-o de Z.

4. Obtenha os pontos simétricos de Z com relação aos lados BC e CA. Use o nono botão da barra de ferramentas *Reflexão em Relação a uma Reta*, clique no ponto Z e depois nos segmentos BC e CA (ver Figura 3.11). Renomeie-os de H e K.

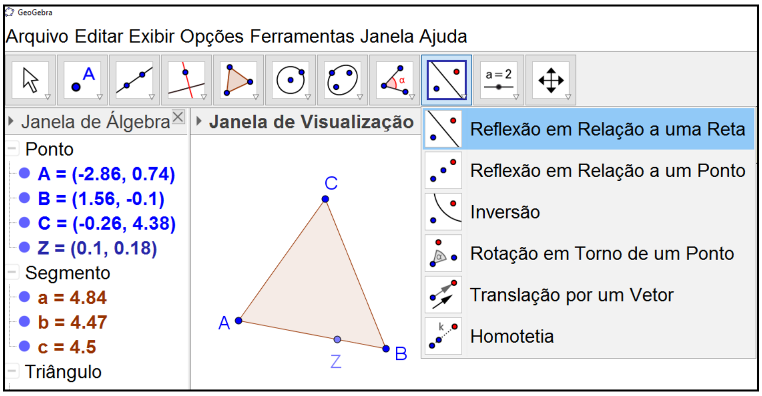


Figura 3.11: Obtenção dos simétricos de Z

5. Trace o segmento HK e obtenha as interseções desse segmento com os lados BC e CA, e renomeie-as de X e Y;

6. Trace o triângulo XYZ. Renomeie as medidas dos seus lados de a, b e c;

7. Na *Caixa de Entrada* digite $P = a + b + c$, que representará o perímetro do triângulo XYZ;

8. Obtenha os segmentos CH, CK e CZ. Esconda seus rótulos;

9. Exiba o ângulo $B\widehat{Z}C$, clicando, no oitavo botão da barra de ferramentas na opção *Ângulo* e depois em B, Z e C;

10. Clique, na barra de menus, em *Opções*, depois em *Arredondamento* e, por fim em *0 Casas Decimais*;

11. Trace os segmentos AX e BY e exiba os ângulos $A\widehat{X}B$ e $B\widehat{Y}C$;

12. No penúltimo botão da barra de ferramentas, clique em *Texto* e, em seguida, na janela de visualização; em *Editar* digite *Perímetro(XYZ)=*, marque *Fórmula LaTeX*, clique em *Objetos*, escolha P e clique em *OK*;

13. Com o botão direito do mouse, clique sobre o texto criado no item anterior, clique em *Propriedades*$\rightarrow$ *Texto*$\rightarrow$*Arredondamento*$\rightarrow$ 3 *Casas Decimais*.

Orientações metodológicas

Concluída a realização desses passos, para que seja conjecturado o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

14. Movendo o ponto Z, qual é o menor valor que você encontra para o perímetro do triângulo inscrito XYZ?

15. Quais os valores dos três ângulos exibidos?

16. Qual o resultado podemos conjecturar a partir dessas observações?

Os erros de arredondamento justificam o número de casas decimais propostos no décimo e no décimo terceiro passos dessa atividade. Por exemplo, com arredondamento de apenas duas casas decimais, encontramos o perímetro mínimo sem que os ângulos $B\widehat{Z}C$, $A\widehat{X}B$ e $B\widehat{Y}C$ sejam todos iguais a 90^{o} conforme desejamos.

Teorema 3.6 *O triângulo de perímetro mínimo dentre todos os triângulos inscritos em um triângulo acutângulo ABC é o triângulo órtico*[3] *de ABC.*

Demonstração. (Baseada na Referência [8], p. 359) Consideremos o triângulo acutângulo ABC e seja XYZ um triângulo nele inscrito, com X, Y e Z, respectivamente, nos lados BC, AC e AB. Vamos inicialmente considerar, sem perda de generalidade, que Z é um ponto qualquer do segmento AB. Obtenhamos os pontos H e K simétricos de Z respectivamente com relação aos segmentos BC e CA; determinemos os pontos de interseção X e Y do segmento HK com BC e CA. Para um ponto fixo Z o triângulo XYZ assim formado tem o menor perímetro dentre todos os triângulos inscritos. De fato, sejam X' e Y' dois outros pontos em BC e CA. Como ZX' e HX' são congruentes e também ZY' e KY' são congruentes, e naturalmente também ZX e HX, bem como ZY e KY, os perímetros dos dois triângulos inscritos podem ser escritos do seguinte modo

[3] Triângulo órtico de um triângulo ABC é aquele formado pelos pés das alturas do triângulo ABC (não retângulo).

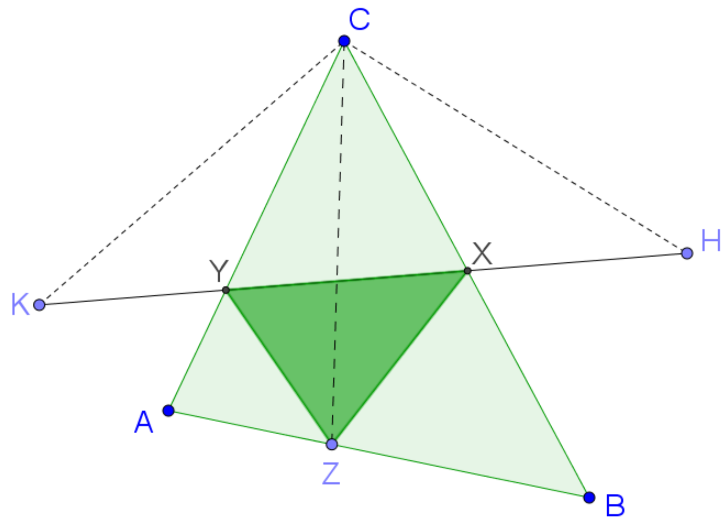


Figura 3.12: Triângulo de perímetro mínimo inscrito num triângulo acutângulo

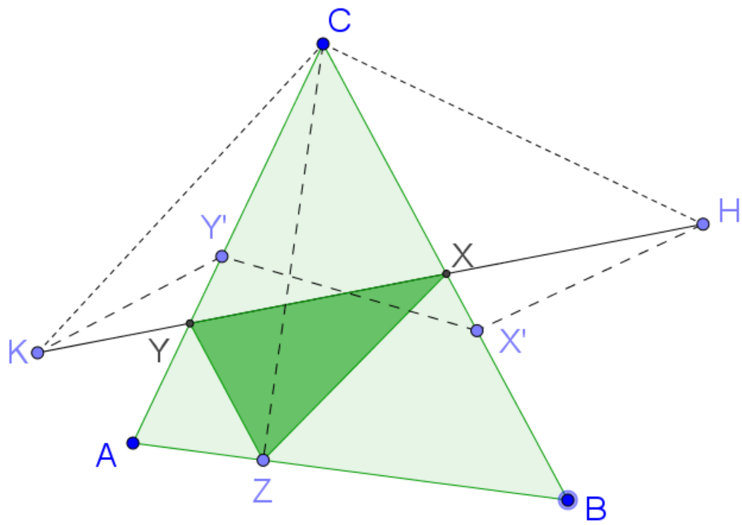


Figura 3.13: Demonstrando

$$
\begin{aligned}
P(XYZ) &= ZX + XY + YZ \\
&= HX + XY + YK, \\
P(X'Y'Z') &= HX' + X'Y' + Y'K.
\end{aligned}
$$

No entanto, uma vez que o caminho reto HK (de acordo com a Atividade 1) de H para K é o mais curto possível, segue-se que o triângulo XYZ possui um perímetro menor do que o triângulo $X'Y'Z$.

Resta agora, escolher o ponto Z de modo a obter o menor segmento possível HK (que representa o perímetro de XYZ). Agora CZ é congruente a CH e também a CK; do mesmo modo, $Z\widehat{C}B = H\widehat{C}B$ e $Z\widehat{C}A = K\widehat{C}A$ e assim, $H\widehat{C}K = 2\gamma$, onde $\gamma = A\widehat{C}B$. O segmento HK é, portanto, a base de um triângulo isósceles (HKC) de base HK com um ângulo de vértice constante 2γ e lados congruentes variáveis $s = CZ$; tais lados atingem um mínimo quando CZ é mínimo, isto é, quando CZ é perpendicular a AB. Como o ângulo é constante, o lado varia de modo proporcional a base, ou seja, menor lado acarreta menor base.

Poderíamos facilmente ter realizado a investigação com X ou Y como fizemos com Z; com uma análise semelhante demonstra-se que AX é perpendicular a BC e BY é perpendicular a CA. Os pontos X, Y e Z são os pés das alturas do triângulo ABC, ou seja, XYZ é o triângulo órtico. □

3.3.6 Atividade 6: Desigualdade isoperimétrica dos triângulos

Objetivo: Determinar qual é o triângulo que tem a área máxima dentre todos os triângulos de perímetro fixado.

Nesta atividade vamos encontrar o triângulo de maior área entre todos os triângulos de perímetro fixado, ou seja, resolveremos o problema da desigualdade isoperimétrica[4] dos triângulos.

1. Abra o GeoGebra e torne visíveis a *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de Visualização 2*;

2. Na primeira janela de visualização, marque dois pontos A e B distando entre si menos que $7.5u.m.$ (u.m.: unidades de medida);

   Observação 3.2 *Vamos fixar o perímetro do triângulo ABC a ser construído em* $15cm$.

3. Obtenha um círculo de centro B e raio 5, usando a ferramenta *Círculo dados Centro e Raio*;

4. Ligue os pontos A e B, obtendo o segmento f. Esconda o rótulo f;

5. Trace o círculo de centro A e raio $15-5-f$ (se f for realmente a medida do segmento AB);

6. Marque uma das interseções entre os dois círculos criados anteriormente, obtendo o ponto C;

[4] Isoperimétrico significa literalmente com perímetro igual. Todavia, em matemática, a isoperimetria é o estudo das figuras geométricas cujos contornos são congruentes. Em geometria plana, problemas isoperimétricos têm a finalidade de determinar uma figura de área máxima cujo perímetro é fixado.

7. Trace o triângulo ABC e mude a cor e o estilo a seu gosto;

8. Obtenha a área do triângulo e deixe-a numa posição fixa na primeira janela de visualização. Para isto, clique no oitavo botão em *Área*, depois sobre o triângulo. Note que ao mover esse texto *Área*, ele não se afasta muito do triângulo, fica preso num "círculo" no entorno do triângulo. Clique com o botão direito do *mouse* sobre o texto, em seguida, marque a opção *Posição Absoluta na Tela*, arraste esse texto até o local onde deseja fixar. Clique, novamente, com o botão direito do *mouse* sobre o texto, marque a opção *Fixar Objeto*;

9. Exiba nome e valor de cada um dos lados do triângulo ABC, clicando com o botão direto do *mouse* sobre o lado, depois em *Propriedades*, em seguida em *Básico* e por último em *Exibir Rótulo*, clicando na opção *Nome e Valor*;

   Sugestão: Para mais precisão nos resultados, coloque a área com duas casas decimais e a medida de cada lado com apenas uma casa decimal.

10. Note que o lado c_1 do triângulo ABC tem a mesma medida que f; renomeie-o de c. Esconda os círculos;

11. Clique na *Janela de Visualização 2* e, em seguida, digite, na caixa de *Entrada*, $\acute{A}rea = (b, pol1)$, onde b é a medida do lado AC e $pol1$ representa a área do triângulo em estudo;

12. Habilite o rastro do ponto (*Área*) obtido anteriormente;

13. Mude a cor e habilite o rastro desse ponto;

14. Mova o ponto A ou o B para observar a variação da área do triângulo ABC.

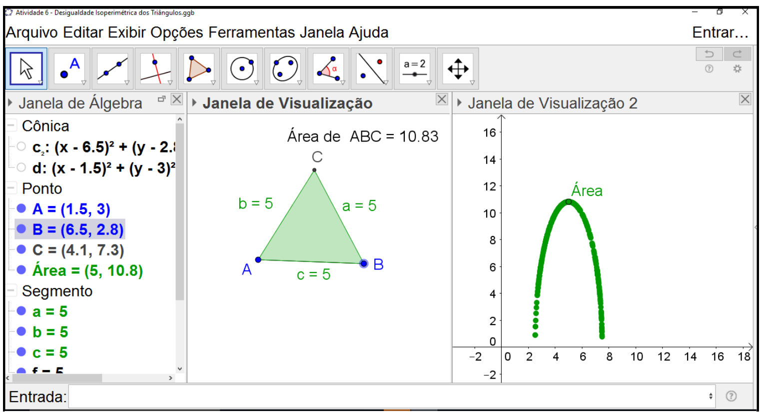


Figura 3.14: Procurando o triângulo de área máxima

Orientações metodológicas

Concluída a realização desses passos, para que seja conjecturado o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

15. Qual é a área máxima observada para este caso?

16. Quais são as medidas dos lados do triângulo quando esta área máxima ocorre?

17. Com base nessas observações, qual é o triângulo de área máxima, quando fixado seu perímetro?

Essa atividade é um caso particular, mas o professor que aplicá-la pode sugerir aos alunos que desenvolvam vários casos particulares, para que tenham a ideia de como conjecturar o caso geral da desigualdade isoperimétrica dos triângulos. Observemos, no segundo passo, a necessidade da marcação dois pontos A e B de modo que a distância entre eles seja menor do que a metade do perímetro que se deseja para o triângulo; no terceiro passo obter um círculo de centro B e raio igual a um terço desse perímetro; no quinto passo, um círculo de centro em A e raio $p-\frac{1}{3}.p-f$, se, respectivamente, p for o perímetro do triângulo ABC e f, a medida do segmento AB. No nono passo também sugerimos determinados números de casas decimais para a área e as medidas dos lados do triângulos, levando em consideração os erros de casas decimais comuns em máquinas de calcular e *softwares* digitas.

Teorema 3.7 *O triângulo equilátero é o que tem a área máxima dentre todos os triângulos de perímetro fixado.*

Demonstração. Denotando por a,b e c as medidas dos lados do triângulo, o perímetro desse triângulo é $p=a+b+c$. Pela a fórmula de Heron a área do triângulo é dada por

$$A=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}.$$

Agora, usando a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética, temos que

$$\frac{\frac{p}{2}-a+\frac{p}{2}-b+\frac{p}{2}-c}{3}\geq\sqrt[3]{\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$$

isto é,

$$\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)\leq\left(\frac{\frac{p}{2}-a+\frac{p}{2}-b+\frac{p}{2}-c}{3}\right)^3.$$

Logo,

$$A \leq \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{\frac{p}{2}-a+\frac{p}{2}-b+\frac{p}{2}-c}{3}\right)^3}.$$

Mas,

$$\frac{\frac{p}{2}-a+\frac{p}{2}-b+\frac{p}{2}-c}{3}=\frac{p}{6}.$$

Segue que

$$\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{\frac{p}{2}-a+\frac{p}{2}-b+\frac{p}{2}-c}{3}\right)^3}=\sqrt{\frac{p}{2}.\frac{p^3}{216}}=\sqrt{\frac{p^4}{432}}=\frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

Assim, a maior área a ser atingida por um triângulo de lados a, b e c é $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$, onde $p = a+b+c$. E esta área máxima ocorre, de acordo com o Teorema 2.2, quando

$$\frac{p}{2}-a=\frac{p}{2}-b=\frac{p}{2}-c,$$

ou seja, quando

$$a=b=c.$$

Portanto, o triângulo equilátero é o triângulo de maior área dentre àqueles de perímetro fixado, com área igual a

$$\frac{p^2}{12\sqrt{3}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

onde a é a medida dos lados desse triângulo. □

O seguinte teorema apresenta a desigualdade isoperimétrica clássica.

Teorema 3.8 *Qualquer curva fechada de comprimento l cerca uma área menor do que ou igual a $\frac{l^2}{4\pi}$ e este valor só é atingido se a curva for um círculo de raio $\frac{l}{2\pi}$.*

Demonstração: Ver Referência [17], p. 55.

3.4 Atividades usando o GeoGebra 3D

3.4.1 Atividade 7: Desigualdade isoperimétrica para paralelepípedos

Objetivo: Determinar qual é o paralelepípedo de área total fixada que tem o maior volume.

Nesta atividade iremos verificar qual paralelepípedo, dentre todos com área total fixada, tem maior volume. Para tentarmos conjecturar esse resultado, primeiro vamos desenvolver o caso particular em que a área total do paralelepípedo é igual a 600.

1. Abra o GeoGebra e torne visíveis a *Janela de Álgebra*, a *Janela de Visualização* e a *Janela de Visualização 3D*;

2. No penúltimo botão crie três controles deslizantes a, b e c, todos com incremento 0.2, a e c variando de 0 a 30 e b variando de 0 a $30-a$;

3. Clique com o botão direito do *mouse* no controle deslizante a, depois clique em *Propriedades* $\rightarrow$ *Programação*, na caixa *Ao Atualizar* escreva $b = (300-a*c)/(a+c)$ e depois, em *OK*. Faça o procedimento análogo para escrever, em c, $c = (300-a*b)/(a+b)$. Clique com o botão direito do *mouse* no controle deslizante c, depois clique em *Propriedades* $\rightarrow$ *Básico* e defina seu valor por $(300-a*b)/(a+b)$. Tecle *Enter* e observe que o controle deslizante c desaparecerá da *Janela de Visualização*, mas permanecerá na *Janela de Álgebra*;

4. Obtenha um segmento AB com comprimento fixo a;

5. Trace um círculo d de centro A e raio b;

6. Obtenha duas retas g e h perpendiculares ao segmento AB: uma contendo o ponto A e outra, o ponto B;

7. Marque o ponto C de interseção da reta g com o círculo d;

8. Trace a reta i paralela ao segmento AB e obtenha a interseção D entre essa reta e a reta h;

9. Trace o retângulo $ABDC$;

10. Construa o paralelepípedo de dimensões a, b e c. Isto pode ser obtido criando-se um prisma cuja base é o polígono $pol1$ e a altura é c;

11. Na *Caixa de Entrada* digite: *Área*$= 2*(a*b+a*c+b*c)$. Observe que vai aparecer, na *Janela de Álgebra*, *Área*$=$ 600. Clique e arraste-na para a *Janela de Visualização*;

12. Na *Caixa de Entrada* digite: *Volume*$= a*b*c$. Observe que vai aparecer, na *Janela de Álgebra*, o volume que varia de acordo com os valores de a, b e c. Clique e arraste-no para a *Janela de Visualização*;

13. Esconda os objetos e os rótulos que não deseja que apareçam na construção e mude cores e estilos a seu gosto.

Orientações metodológicas

Após a realização desses passos, para que seja conjecturado o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

14. Movendo os controles deslizantes a e b, qual é o maior valor que você encontra para o volume do paralelepípedo?

15. Quais são as medidas de cada aresta do paralelepípedo quando você encontra esse volume máximo?

16. Dentre todos os paralelepípedos de área fixada, qual é o que tem o maior volume?

No segundo e no terceiro passos, para que seja fixada a área, quando uma das aresta sofre alteração, é necessário que, pelo menos uma ou até as outras duas também tenham seus valores modificados. Portanto, a razão por colocarmos as medidas de umas arestas em função das outras. O professor pode sugerir que, na *Janela de Visualização 2*, seja construído o gráfico do volume do cubo em função da medida de uma das arestas.

Teorema 3.9 *O cubo é o paralelepípedo de área total fixada que tem o maior volume.*

Demonstração. Sejam a, b e c as dimensões do paralelepípedo, A_T a sua área total fixa e V o seu volume. Segue que sua área total é

$$A_T = 2(ab + ac + bc)$$

e seu volume,

$$V = abc.$$

Assim, temos que

$$V^2 = (abc)^2 = a^2.b^2.c^2 = a.a.b.b.c.c = ab.ac.bc.$$

Da desigualdade entre as médias Geométrica e Aritmética, segue que dados x, y e z números reais positivos, tem-se $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x = y = z$. Fazendo, neste caso, $x = ab$, $y = ac$ e $z = bc$, temos a seguinte desigualdade

$$V^2 = ab.ac.bc \leq \left(\frac{ab+ac+bc}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{2}.\frac{ab+ac+bc}{3}\right)^3 = \left(\frac{A_T}{6}\right)^3.$$

Logo,

$$V \leq \sqrt{\left(\frac{A_T}{6}\right)^3},$$

ocorrendo a igualdade quando

$$ab = ac = bc,$$

ou seja, quando

$$a = b = c.$$

Assim,

$$V = \sqrt{\left[\frac{2(a^2+a^2+a^2)}{6}\right]^3} = \sqrt{\frac{8(3a^2)^3}{216}} = \sqrt{\frac{216a^6}{216}} = \sqrt{(a^3)^2},$$

donde concluímos que $V = a^3$ e, com isso, o paralelepípedo é um cubo, visto que tem todas as arestas com mesma medida. □

3.4.2 Atividade 8: Caixa de volume máximo

Objetivo: Determinar o valor da medida x de modo que a caixa a ser construída tenha o volume máximo.

Você dispõe de uma cartolina quadrada cujo comprimento do lado é $40cm$ e deseja construir uma caixa. Para isso terá que cortar em cada "canto" da cartolina um quadrado de lado x. Qual deve ser a medida de x de modo que a caixa a ser construída tenha o volume máximo?

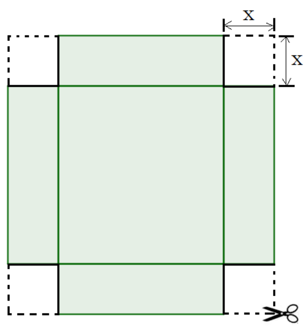


Figura 3.15: Caixa planificada 1

O passo a passo de execussão no GeoGebra, a seguir, é uma adaptação da Tarefa 13 presente na Referência [18], p. 14.

1. Abra o GeoGebra $3D$ e deixe visíveis as três janelas: *Janela de Visualização*, *Janela de Visualização 3D* e *Janela de Visualização 2*;

2. Defina os pontos $A = (0,0,0), B = (4,0,0), C = (4,4,0)$ e $D = (0,4,0)$;

3. Defina o polígono de vértices A, B, C e D;

4. Na primeira *Janela de Visualização* crie os *Controles Deslizantes* a e α variando, respectivamente, entre 0 e 2 e entre 0º e 90º, com incrementos 0.1 e 1°;

5. Nesta mesma *Janela de Visualização* construa círculos centrados em cada um dos vértices com raio a;

6. Determine os pontos de interseção dos círculos com os lados do retângulo;

7. Ligue esses pontos de interseção aos pontos do lado oposto; esconda os círculos, o retângulo e marque os pontos de interseção dos segmentos de reta obtidos;

8. Construa o polígono $RSTU$ (se R, S, T e U foram os últimos pontos de interseção obtidos) que será base da caixa;

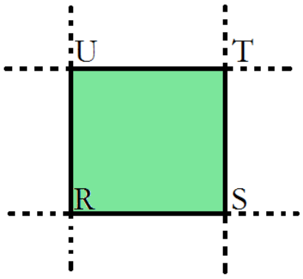


Figura 3.16: Caixa planificada 2

9. Digite na *Entrada* os pontos com as seguintes coordenadas para obter os pontos que serão vértices dos polígonos laterais da caixa:
$R_1 = (x(R), y(R) - a * cos(\alpha), a * sen(\alpha))$
$R_2 = (x(R) - a * cos(\alpha), y(R), a * sen(\alpha))$
$S_1 = (x(S) + a * cos(\alpha), y(S), z(S) + a * sen(\alpha))$
$S_2 = (x(S), y(S) - a * cos(\alpha), a * sen(\alpha))$
$T_1 = (x(T) + a * cos(\alpha), y(T), z(T) + a * sen(\alpha))$
$T_2 = (x(T), y(T) + a * cos(\alpha), a * sen(\alpha))$
$U_1 = (x(U), y(U) + a * cos(\alpha), a * sen(\alpha))$
$U_2 = (x(U) - a * cos(\alpha), y(U), a * sen(\alpha))$

10. Construa os polígonos das faces laterais da caixa;

11. Esconda os pontos;

12. Na *Janela de Visualização 2* defina o ponto $V = (a, a * pol2)$, caso o polígono $pol2$ seja a base da caixa;

13. Habilite o rastro de V para obter o traço do gráfico do volume em função da variação de a.

Orientações metodológicas

Finalizados esses passos, para que seja obtido o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

14. Movendo o controle deslizante a qual é o volume máximo que você obtém?

15. Qual é o valor da medida x (medida do lado do quadrado retirado dos cantos da cartolina) quando o volume é máximo?

No segundo passo, sugerimos determinados valores para as coordenadas de A, B, C e D, mas, numa aplicação em sala de aula, o professor pode incentivar seus alunos a atribuirem outros valores para essas coordenadas, assim como também pode atribuir outros valores para a variação máxima do controle deslizante a, no quarto passo. Já o controle deslizante α, deve sempre variar de 0 a 90º, pois é a base para a inclinação das faces laterais da caixa.

Caso geral

Numa folha de cartolina quadrada de lados $2a$ retiramos quadrados de lado $x < a$ de cada vértice, dobrando, em seguida, as abas restantes para formar uma caixa cuja base é um quadrado de lado $2a - 2x$ e altura x (ver Figura 3.17). Qual deve ser o valor de x para que o volume da caixa seja máximo?

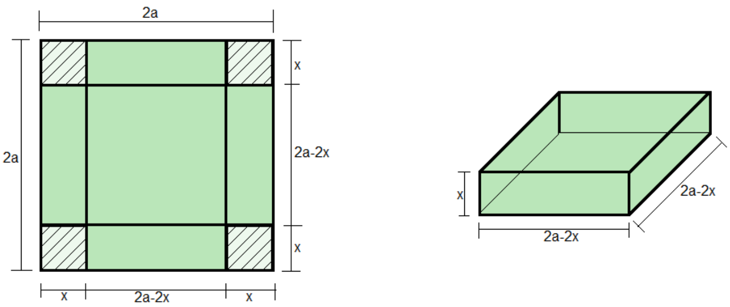


Figura 3.17: Caixa de volume máximo

Solução: Note que o volume da caixa é dado por

$$V = (2a - 2x)^2.x.$$

Usando o fato de que a média geométrica é menor do que ou igual a média aritmética, temos que

$$\sqrt[3]{4V} = \sqrt[3]{(2a-2x)(2a-2x)(4x)} \leq \frac{(2a-2x)+(2a-2x)+4x}{3} = \frac{4a}{3}.$$

Logo, pela desigualdade acima, o valor máximo para o volume da caixa ocorre quando $\sqrt[3]{4V}$ for igual a $\frac{4a}{3}$, e isso ocorre quando

$$2a - 2x = 4x,$$

ou seja, quando

$$x = \frac{a}{3}.$$

substituindo esse valor em $V = (2a - 2x)^2.x$ encontramos

$$V = \frac{16a^3}{27}.$$

3.4.3 Atividade 9: Recipiente cilíndrico de área mínima fixado o volume

Objetivo: Descobrir qual o recipiente cilíndrico de volume fixo que tem a menor área.

Para conjecturar a solução desse problema vamos desenvolver a seguinte atividade no *GeoGebra 3D*, utilizando o problema particular abaixo:

Uma indústria que fabrica chocolate pretende vender seu produto em recipiente cilíndrico de volume $V = 314,2cm^3$. Quais são as dimensões desse recipiente para que seja gasto o mínimo de material em sua fabricação?

1. Abra o GeoGebra $3D$ e coloque visíveis as janelas: *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de Visualização 3D*;

2. Crie dois controles deslizantes r e h variando, respectivamente, de 0 a 8 e de 0 a 12, ambos com incremento 0.1;

3. Fixe o volume em 314.2 clicando com o botão direito do *mouse* no controle deslizante h, depois clique em *Propriedades* $\to$ *Programação*, na caixa *Ao Atualizar* escreva $h = (314.159)/(3.14159 * r^2)$ e depois, em *OK*. Observe que, quando você tentar mover o controle deslizante h, ele desaparecerá da *Janela de Visualização*, mas continuará visível na *Janela de Álgebra*;

4. No menu principal clique em *Opções*$\to$*Arredondamento*$\to$*1 Casa Decimal*;

5. Crie um círculo c de centro $A(0,0)$ e raio r;

6. Na *Caixa de Entrada* digite: *Cilindro[c,h]* para criar um cilindro de base circular c e altura h;

7. Defina na *Caixa de Entrada* *Volume*$= \pi * r^2 * h$ e em seguida, *Área*$= 2 * \pi * r * (r + h)$, depois, *Diâmetro*$=2 * r$ e, por fim, *Altura*$=h$. Arraste esse textos criados para a janela de visualização;

8. Exiba a área com 4 casas decimais clicando sobre o texto com o botão direito do *mouse* e, em seguida em *Propriedades*$\rightarrow$ *Texto*$\rightarrow$*Arredondamento*$\rightarrow$ 4 *Casas Decimais*.

   Orientações metodológicas

   Concluídos esses passos, para que seja obtido o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

9. Movimentando o controle deslizante r, qual é o menor valor que você encontra para a área do cilindro?
10. Quais são as medidas do raio e da altura que você encontra quando a área é mínima?
11. Que relação, aproximada, você pode estabelecer entre essas duas medidas?
12. Quais são as dimensões do recipiente para que seja gasto o mínimo de material na fabricação da lata cilíndrica em questão?
13. Como você pode conjecturar um resultado envolvendo a altura em função do raio de um cilindro quando fixamos seu volume e queremos obter sua área mínima?

No terceiro passo, para que seja fixado o volume, faz-se necessário escrever h em função de r ou vice-versa. Além disso, por conta dos erros de arredondamento, sugerimos, no oitavo passo, que se arredonde a área com quatro casas decimais e os demais objetos, conforme o quarto passo, com uma casa decimal.

Teorema 3.10 *O cilindro equilátero*[5] *é o recipiente cilíndrico de volume fixado que tem a menor área.*

Demonstração. Consideremos x como sendo a medida do raio da base do recipiente cilíndrico e h a sua altura. O volume V do recipiente é dado por

$$V = \pi x^2 h. \tag{3.1}$$

Sua área total S é

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h.$$

Colocando S em função de x e V, temos que

$$S = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{3\left(2\pi x^2 + \frac{V}{x} + \frac{V}{x}\right)}{3} \geq 3\sqrt[3]{2\pi x^2 . \frac{V}{x} . \frac{V}{x}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2},$$

[5]Cilindro equilátero é aquele cuja altura é igual ao diâmetro da base.

assi, a área total do cilindro será mínima quando $2\pi x^2 = \frac{V}{x}$. Logo,

$$\frac{V}{x} = 2\pi x^2 \Rightarrow V = 2\pi x^3.$$

De acordo com a igualdade (3.1) segue que

$$h = 2x$$

conforme queríamos provar. Portanto, quando o volume é dado, o cilindro que tem área mínima é o cilindro equilátero. $\square$

3.4.4 Atividade 10: Paralelepípedo inscrito numa pirâmide

Objetivo: Determinar o paralelepípedo, de volume máximo, inscrito numa pirâmide.

Considere uma pirâmide regular de base quadrada. Diz-se que um paralelepípedo retângulo está inscrito na pirâmide se possui uma das bases sobre a base da pirâmide e os outros vértices pertencentes as arestas laterais da pirâmide.

Vamos desenvolver, no GeoGebra, os seguintes passos para descobrirmos as medidas das arestas e o volume máximo de um prisma quadrangular com uma das bases quadradas sobre a base da pirâmide e seus outros vétices nas arestas laterais da pirâmide. Vamos fazer o caso particular com uma pirâmide de base quadrangular de altura 3 e área da base 4.

1. Abra o GeoGebra 3D e coloque visíveis as janelas: *Janela de Álgebra, Janela de Visualização, Janela de Visualização 3D* e *Janela de Visualização 2*;
2. Obtenha, a partir da caixa de entrada, os pontos $A = (1,1,0)$, $B = (1,-1,0)$, $C = (-1,-1,0)$, $D = (-1,1,0)$ e $E = (0,0,3)$;
3. Trace o polígono $ABCD$, que automaticamente será nomeado pelo programa de $pol1$;
4. No campo *Entrada*, digite: Pirâmide[pol1;E] para obter a pirâmide de base $ABCD$ e altura 3;
5. Na primeira janela de visualização crie o controle deslizante h vertival variando de 0 a 3 com incremento 0.01 e coloque-o na posição vertical;
6. Clique na *Janela de Visualização 3D* e defina na caixa de *Entrada* o plano $z = 3 - h$;
7. Determine os pontos F, G, H e I de interseção do plano $z = 3 - h$ com as arestas da pirâmide. Determine também a interseção J do plano $z = 3 - h$ com o eixo z;

8. Obtenha o polígono $FGHI$ e esconda o plano z;

9. Obtenha os pontos resultantes da projeção dos pontos F, G, H e I, no plano $z = 0$:

$$F_1 = (x(F), y(F), 0)$$
$$G_1 = (x(G), y(G), 0)$$
$$H_1 = (x(H), y(H), 0)$$
$$I_1 = (x(I), y(I), 0)$$

10. Construa as faces do paralelepípedo inscrito na pirâmide com procedimento análogo ao feito nos itens 3 e 4;

11. Clique com o botão direito do *mouse* em cada segmento e em *Exibir Rótulo* para esconder o nome dos segmentos;

12. Sendo $pol3$ a base desse polígono inscrito defina, no *Campo de Entrada* seu volume como sendo *Volume=(pol3)*(3-h)*;

13. Clique na *Janela de Visualização 2* e obtenha o ponto que associa o valor de h ao seu volume fazendo *V=(h,Volume)*;

14. Habilite rastro para o ponto V.

Orientações metodológicas

Concluídos esses passos, para que seja obtido o resultado esperado, dentre outras perguntas, o professor pode direcionar aos alunos, as seguintes:

15. Quais são as dimensões do paralelepípedo de volume máximo inscrito nessa pirâmide?

16. Qual é o volume máximo desse paralelepípedo inscrito?

17. Qual é o valor de h, quando você obtém o volume máximo para o paralelepípedo inscrito?

O professor pode reelaborar esta atividade, nomeando a altura do paralelepípedo inscrito na pirâmide de h. Nesta atividade, nomeamos por h o complemento da altura do paralelepípedo com relação à altura da pirâmide.

Problema: Qual o volume máximo de um paralelepípedo inscrito numa pirâmide de altura 3 cuja base é um quadrado de lado 2?

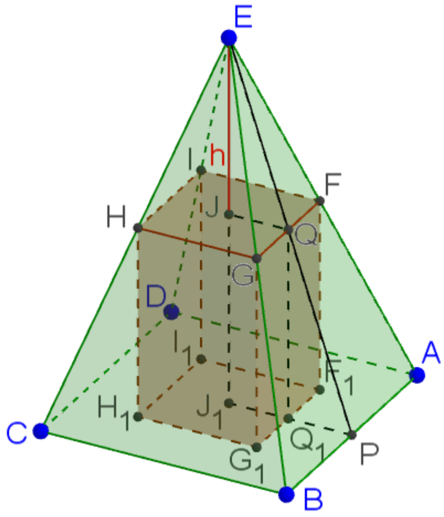


Figura 3.18: Paralelepípedo inscrito numa pirâmide

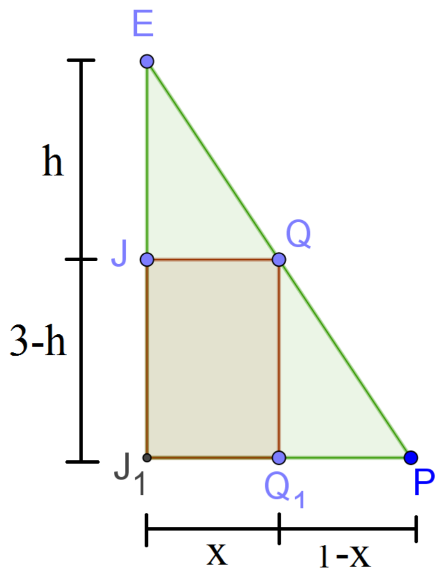


Figura 3.19: Seção que contém o vértice, o centro da base e o ponto médio de uma aresta da base da pirâmide

Solução: Consideremos a Figura 3.19 que representa uma seção da pirâmide com um prisma nela inscrito, descritos no problema.

Vemos na Figura 3.19 que os triângulos EJQ e EJ_1P são semelhantes, pois o ângulo $\widehat{E}$ é comum e $E\widehat{J}Q$ e $E\widehat{J_1}P$ são retos. Assim,

$$\frac{h}{x} = \frac{3}{1} \Rightarrow x = \frac{h}{3}.$$

Note que o volume do paralelepípedo inscrito na pirâmide é dado por

$$V = 2x.2x.(3-h),$$

ou seja,

$$V = \frac{2h}{3}.\frac{2h}{3}.(3-h).$$

Usando o fato de que a média geométrica é menor do que ou igual a média aritmética, temos que

$$\sqrt[3]{\frac{4}{3}V} = \sqrt[3]{\frac{2h}{3}.\frac{2h}{3}.\frac{4}{3}.(3-h)} \leq \frac{\frac{2h}{3}+\frac{2h}{3}+\frac{4}{3}.(3-h)}{3} = \frac{12}{9}.$$

Logo, pela desigualdade acima, o valor máximo para o volume do paralelepípedo ocorre quando

$$\frac{4}{3}V = \left(\frac{12}{9}\right)^3 \Rightarrow V = \frac{16}{9}.$$

Caso geral

Teorema 3.11 *O volume máximo de um paralelepípedo inscrito numa pirâmide de altura a cuja base é um quadrado de lado b é* $V = \frac{4ab^2}{27}$.

Demonstração. Consideremos a seguinte figura que representa seção de uma pirâmide de altura a cuja base é um quadrado de lado b, com um prisma nela inscrito. Observe que na

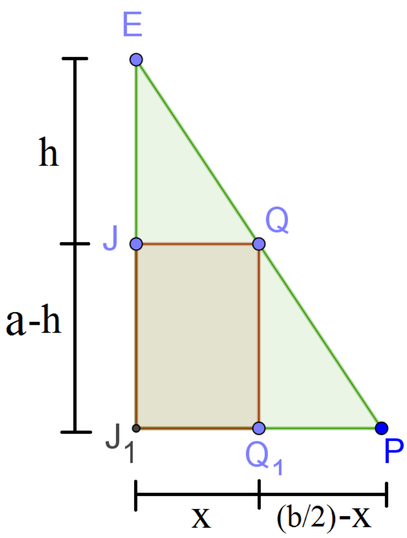


Figura 3.20: Seção vertical central

Figura 3.20 os triângulos EJQ e EJ_1P são semelhantes. Segue que

$$\frac{h}{x} = \frac{a}{\frac{b}{2}} \Rightarrow x = \frac{bh}{2a}.$$

Note que o volume do paralelepípedo inscrito na pirâmide é dado por

$$V = 2x.2x.(a-h),$$

isto é,

$$V = 2.\frac{bh}{2a}.2.\frac{bh}{2a}.(a-h) = \frac{bh}{a}.\frac{bh}{a}.(a-h).$$

Usando o fato de que a média geométrica é menor do que ou igual a média aritmética, temos que

$$\sqrt[3]{\frac{2b}{a}V} = \sqrt[3]{\frac{bh}{a}.\frac{bh}{a}.\frac{2b}{a}.(a-h)} \leq \frac{\frac{bh}{a}+\frac{bh}{a}+\frac{2b}{a}.(a-h)}{3} = \frac{2b}{3}.$$

Logo, pela desigualdade entre as médias geométrica e aritmética, o valor máximo para o volume do paralelepípedo ocorre quando

$$\frac{2b}{a}V = \left(\frac{2b}{3}\right)^3 \Rightarrow V = \frac{4ab^2}{27}.$$

□

3.4.5 Atividade 11: Cilindro inscrito num cone

Objetivo: Determinar o cilindro circular reto, de volume máximo, inscrito num cone circular reto.

Considere um cone circular reto. Diz-se que um cilindro circular reto está inscrito no cone circular reto se possui uma das bases sobre a base do cone e a circunferência da outra base pertencente à superfície lateral do cone.

Com a utilização do GeoGebra, vamos desenvolver os passos a seguir para descobrirmos o volume máximo de um cilindro circular reto inscrito num cone circular reto. Em princípio, vamos fazer o caso particular com um cone de altura 6 e raio da base 2.

1. Abra o GeoGebra $3D$ e coloque visíveis as janelas: *Janela de Álgebra, Janela de Visualização, Janela de Visualização 3D* e *Janela de Visualização 2*;

2. Obtenha um círculo de centro $O(0,0)$ e raio 2;

3. Clique na *Janela de Visualização 3D*, selecione a ferramenta *Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone* para obter um cone de altura 6, clique no círculo obtido no passo anterior e, digite na caixa de diálogo que surgirá, o número 6;
4. Crie um controle deslizante h_1 variando de 0 a 6 e incremento $0,04$;
5. Trace o plano $z = 6 - h_1$. Use a caixa de *Entrada*;
6. Obtenha o círculo de interseção entre o plano obtido no passo anterior e o cone;
7. Esconda o plano;
8. Marque o ponto A sobre o círculo;
9. Digite, na caixa de *Entrada*, $B = (0,0,z(A))$;
10. Marque o ponto C no vértice do cone;
11. Ligue o segmento BC, renomei-o de h, mude sua cor e estilo;
12. Marque o ponto $D = (x(A), y(A), 0)$;
13. Use a ferramenta *Círculo dados eixo e um de seus Pontos* para obter o círculo g que tem centro no eixo Oy e passa pelo ponto D;
14. Obtenha o cilindro que tem como base o círculo g e altura $6 - h$;
15. Clique na origem do plano cartesiano da *Janela de Visualização 2* e obtenha um segmento EF com comprimento fixo h. Mude sua cor e estilo;
16. Na *Janela de Visualização 2*, obtenha o ponto $V = (x(F), i)$, se i for o nome dado ao cilindro em estudo. Note que a abscissa de V representa a medida h, enquanto sua ordenada, o volume do cilindro. Habilite o rastro de V e mude sua cor. Mova o controle deslizante h_1 (ou ative a animação) para verificar a variação do volume;
17. Outra forma de visualizar a variação do volume é criando um botão, na *Janela de Visualização 2*, para *Iniciar/Parar* a animação do controle deslizante h_1. Para isto, primeiro, digite, na caixa de *Entrada*, $t = true$, criando o *Valor Booleano* t. Depois selecione a ferramenta *Botão*, clique na *Janela de Visualização 2* onde surgirá a caixa de diálogo da Figura 3.21.

   Em *Legenda* digite *Iniciar/Parar*. E em *Código GeoGebra* digite:
   DefinirValor[t,!t]
   DefinirLegenda[DefinirValor[t,!t],Se[t,"Parar","Iniciar"]]
   IniciarAnimação[h_1,t]

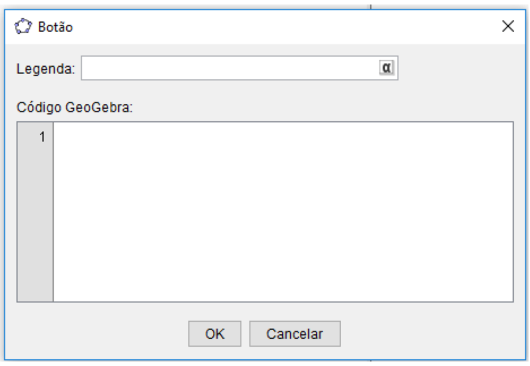


Figura 3.21: Botão Iniciar / Parar

Na Figura 3.22, vemos a atividade pronta no GeoGebra, onde aparecem a *Janela de Álgebra* com os dados algébricos, a *Janela de Visualização* com a vista superior do cilindro inscrito no cone, a *Janela de Visualização 3D* com a visão dos objetos em três dimensões e a *Janela de Visualização 2* com o gráfico que representa o volume do cilindro inscrito no cone. Para ver a animação elaborada no passo anterior basta clicar no botão *Iniciar / Parar*. Fazendo isso, surgirá também o botão com o desenho universal de pausar e reproduzir no canto inferior esquerdo da *Janela de Visualização 2*.

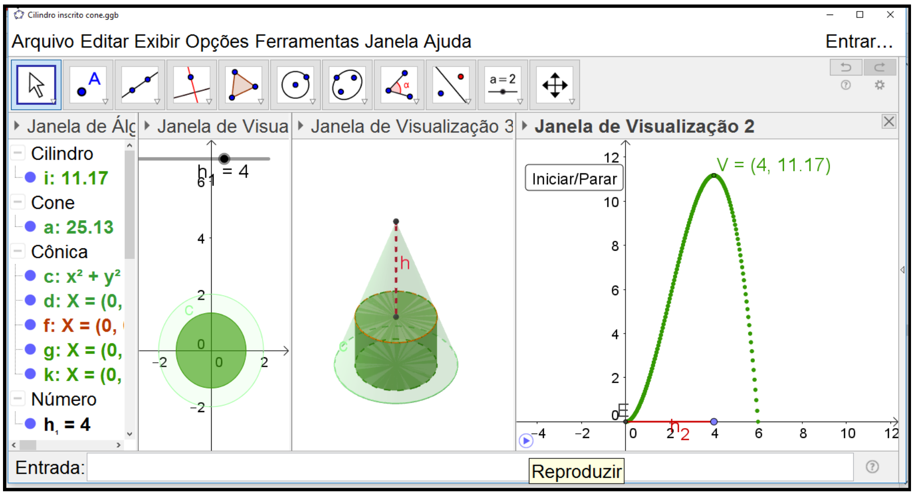


Figura 3.22: Cilindro de volume máximo inscrito num cone

Orientações metodológicas

Finalizados esses passos, para que seja obtido o resultado esperado, o professor pode direcionar aos alunos, diversas perguntas, como as seguintes:

18. Qual é o volume máximo desse cilindro inscrito?

19. Qual é o valor de h, quando você obtém o volume máximo para o cilindro inscrito?

O professor pode reelaborar esta atividade, nomeando a altura do cilindro inscrito no cone de h. Nesta atividade, nomeamos por h o complemento da altura do cilindro com relação à altura do cone.

Problema: Qual o volume máximo de um cilindro circular reto inscrito num cone circular reto de altura 6 e cujo raio da base é 2?

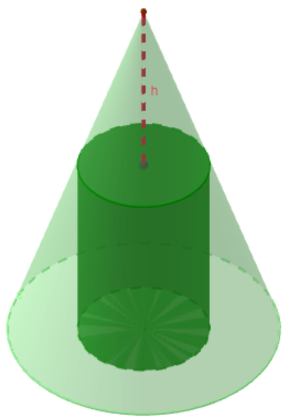


Figura 3.23: Cilindro inscrito num cone

Solução: Consideremos a Figura 3.24 que representa uma seção do cone que contém o vértice e o centro da base com um cilindro nele inscrito.

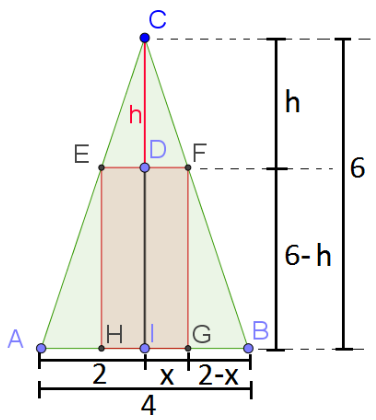


Figura 3.24: Seção do cone que contém o vértice e o centro da base

Vemos na Figura 3.24 que os triângulos CDF e CIB são semelhantes, já que o ângulo

$\widehat{C}$ é comum e os ângulos $C\widehat{D}F$ e $C\widehat{I}B$ são retos. Logo,

$$\frac{h}{6} = \frac{x}{2} \Rightarrow 6x = 2h \Rightarrow x = \frac{h}{3}.$$

Observe que o volume do cilindro inscrito na pirâmide é dado por

$$V = \pi.x^2.(6-h),$$

ou seja,

$$V = \pi.\left(\frac{h}{3}\right)^2.(6-h).$$

Usando o fato de que a média geométrica é menor do que ou igual a média aritmética, temos que

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3\pi}V} = \sqrt[3]{\frac{h}{3}.\frac{h}{3}.\frac{2}{3}.(6-h)} \leq \frac{\frac{h}{3}+\frac{h}{3}+\frac{2}{3}.(6-h)}{3} = \frac{4}{3}.$$

Assim, pela desigualdade acima, o valor máximo para o volume do cilindro ocorre quando

$$\frac{2}{3\pi}V = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Rightarrow V = \frac{32\pi}{9},$$

que ocorre quando h for igual a 4.

Caso geral

Teorema 3.12 *O volume máximo de um cilindro circular reto inscrito num cone circular reto de altura a e raio da base b é* $V = \frac{4\pi ab^2}{27}$.

Demonstração. Consideremos a seguinte figura que representa uma seção do cone circular reto que contém o vértice e o centro da base com altura a cuja raio da base é b, com um cilindro circular nele inscrito.

Consideremos a Figura 3.25. Da semelhança dos triângulos CDF e CIB segue que

$$\frac{h}{a} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \frac{bh}{a}.$$

Observe que o volume do cilindro inscrito na cone é dado por

$$V = \pi x^2.(a-h),$$

ou seja,

$$V = \pi.\left(\frac{bh}{a}\right)^2.(a-h).$$

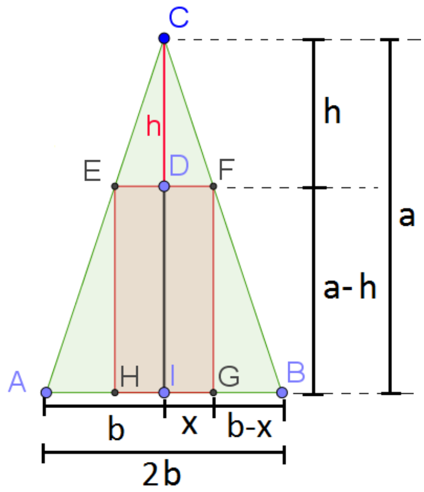


Figura 3.25: Seção central vertical

Usando o fato de que a média geométrica é menor do que ou igual a média aritmética, temos que

$$\sqrt[3]{\frac{2b}{\pi a}V} = \sqrt[3]{\frac{bh}{a}.\frac{bh}{a}.\frac{2b}{a}.(a-h)} \leq \frac{\frac{bh}{a}+\frac{bh}{a}+\frac{2b}{a}.(a-h)}{3} = \frac{2b}{3}.$$

Logo, pela desigualdade entre as médias geométrica e aritmética, o valor máximo para o volume do paralelepípedo ocorre quando

$$\frac{2b}{\pi a}V = \left(\frac{2b}{3}\right)^3 \Rightarrow V = \frac{4\pi ab^2}{27},$$

que ocorre quando $h = \frac{2}{3}a$.

$\square$

3.4.6 Atividade 12: Cilindro inscrito numa esfera

Objetivo: Determinar o cilindro circular reto, de volume máximo, inscrito numa esfera.

Considere uma esfera. Diz-se que um cilindro circular reto está inscrito numa esfera se possui as circunferências das duas bases pertencentes à casca esférica.

Com a utilização do GeoGebra, vamos desenvolver os passos a seguir para descobrirmos o volume máximo de um cilindro circular reto inscrito numa esfera.

1. Abra o GeoGebra $3D$ e coloque visíveis as janelas: *Janela de Álgebra, Janela de Visualização, Janela de Visualização 3D* e *Janela de Visualização 2*. Esconda os eixos e o plano da *Janela de Visualização 3D*;

2. Crie o controle deslizante R variando de 0 a 5 com incremento 0.01;

3. Obtenha a esfera a de centro $A = (0,0,0)$ e raio R. Mude sua cor e a transparência para 25;

4. Crie o controle deslizante d variando de 0 a R com incremento 0.01;

5. Trace o plano $z = R - d$. Use a caixa de *Entrada*;

6. Obtenha o círculo c de interseção entre o plano criado no passo anterior e a esfera;

7. Esconda o plano;

8. Marque o ponto B sobre o círculo;

9. Digite, na caixa de *Entrada*, $C = (0,0,z(B))$, para obter o centro do círculo c;

10. Trace a reta f que contém os pontos A e C;

11. Trace o plano $z = -R + d$;

12. Obtenha o círculo g de interseção entre o plano criado no passo anterior e a esfera. Esconda o plano;

13. Marque o ponto $D = (x(B), y(B), (-R + d))$ sobre o círculo g;

14. Digite, na caixa de *Entrada*, $E = (0,0,z(D))$, para obter o centro do círculo g;

15. Trace o segmento h de extremidades B e D e mude sua cor;

16. Obtenha o cilindro que contém o círculo g e altura h;

17. Obtenha os pontos F e G de interseção entre a esfera a e a reta f. Esconda a reta f;

18. Ligue os segmentos EF e CG;

19. Na *Janela de Visualização 2*, obtenha o ponto $V = (h, i)$, se i for o nome dado ao cilindro em estudo e h a sua altura. Note que a ordenada de V representa o volume do cilindro. Habilite o rastro de V e mude sua cor. Mova o controle deslizante d (ou ative a animação) para verificar a variação do volume. Quando você ativa a animação, aparece, o botão com o desenho universal de pausar e reproduzir, no canto inferior

esquerdo da *Janela de Visualização 2*. Dependendo do valor de R tomado faz-se necessário reduzir a *Janela de Visualização 2* para uma melhor visualização do rastro de V, que represenrta o traço do gráfico do volume do cilindro em função da sua altura.

Orientações metodológicas

Concluídos esses passos, para que seja obtido o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

20. Fixando o raio $R = 2$, qual é o volume máximo desse cilindro inscrito?
21. Qual é o valor de h, quando você obtém o volume máximo para o cilindro inscrito?

Teorema 3.13 *O volume máximo de um cilindro circular reto de raio da base r e altura h inscrito numa esfera de raio R é $V = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.*

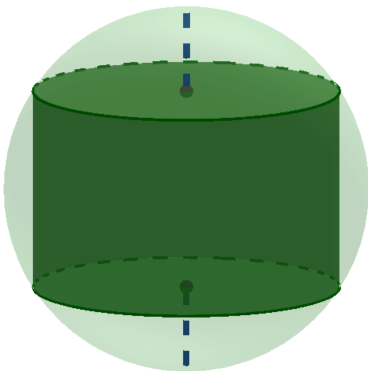


Figura 3.26: Cilindro de volume máximo inscrito numa esfera

Demonstração. Consideremos a Figura 3.27 que representa a seção que contém o centro de uma esfera circunscrita a um cilindro circular reto de altura h cuja raio da base é r, além de conter também os centros das bases do cilindro.

O volume do cilindro pode ser calculado por $V = \pi r^2 h$. Como $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$, podemos reescrever

$$V = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi h.\left(R + \frac{h}{2}\right).\left(R - \frac{h}{2}\right).$$

No entanto, pelo Teorema 2.3, a média geométrica é menor do que ou igual à média aritmética. Logo, acrescentando os números reais x e y, sem alterar essas médias, porém com o intuito de encontrar um valor constante para a média aritmética, temos:

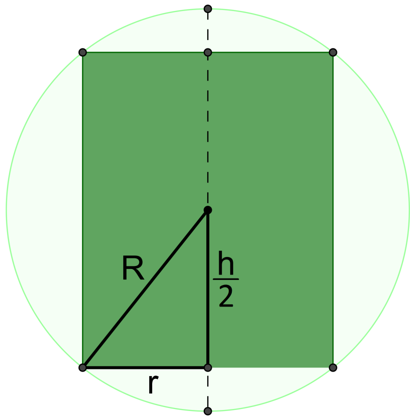


Figura 3.27: Seção vertical do cilindro inscrito numa esfera

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{xy}{xy}V} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{xy}.h.x\left(R+\frac{h}{2}\right).y\left(R-\frac{h}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{xy}}.\sqrt[3]{h.x\left(R+\frac{h}{2}\right).y\left(R-\frac{h}{2}\right)}$$

$$\leq \sqrt[3]{\frac{\pi}{xy}}.\left(\frac{h+x\left(R+\frac{h}{2}\right)+y\left(R-\frac{h}{2}\right)}{3}\right).$$

Observe que no numerador da média aritmética

$$h+xR+\frac{xh}{2}+yR-\frac{yh}{2}=\frac{h}{2}.(2+x-y)+R(x+y).$$

Todavia queremos que a média aritmética independa de h. Neste caso, basta fazer $y-x=2$. Para o valor máximo de V devemos ter a igualdade entre as médias, que apenas ocorre quando

$$h=x\left(R+\frac{h}{2}\right)=y\left(R-\frac{h}{2}\right).$$

Segue, então, que

$$x=\tfrac{2h}{2R+h} \text{ e } y=\tfrac{2h}{2R-h}.$$

Entretanto, $y-x=2$, acarreta

$$\frac{2h}{2R-h}-\frac{2h}{2R+h}=2 \Rightarrow \frac{2h(2R+h)-2h(2R-h)}{4R^2-h^2}=2 \Rightarrow 8R^2-2h^2=4h^2 \Rightarrow 6h^2=8R^2 \Rightarrow h=\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Temos, então, que

$$r^2=R^2-\frac{h^2}{4} \Rightarrow r^2=R^2-\frac{\left(\frac{4R^2}{3}\right)}{4} \Rightarrow r^2=\frac{2}{3}R^2.$$

Portanto, o cilindro pode atingir volume máximo

$$V=\pi.r^2.h \Rightarrow \pi.\frac{2}{3}R^2.\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Concluímos que

$$V=\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}.$$

$\square$

Capítulo 4

Conclusões

Experiências evidenciam à influência positiva do uso do GeoGebra no ensino e na aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos. O uso dessa ferramenta, para o ensino, proporciona aos alunos a realização de construções, manipulações, visualização de diversas formas e ângulos, formulação de conjecturas a partir da realização de uma sequência didática bem planejada e executada, facilitando a compreensão dos conceitos geométricos e até algébricos dos conteúdos estudados.

Nosso trabalho implementa a resolução de problemas de otimização ao uso da tecnologia, mais precisamente a utilização do *software* GeoGebra, como parte integrante na resolução desses tipos de problemas.

O que diferencia este trabalho dos outros existentes na literatura é o fato de que neste não é utilizada a aplicação de derivadas na resolução de problemas de otimização; aqui são utilizados os conteúdos máximos e mínimos de funções, funções quadráticas e desigualdade das médias. Além disso, inovamos na medida em que utilizamos o *software* GeoGebra para o desenvolvimento de uma sequência didática na qual o aluno possa conjecturar um resultado a ser demonstrado matematicamente fazendo o uso de teoremas envolvendo conteúdos do Ensino Médio.

Notamos a necessidade de uma formação inicial e continuada do professor do Ensino Médio voltada para o domínio da tecnologia digital e encerramos nosso trabalho enfatizando a importância da formação continuada que nos deu base para realização desta dissertação: O PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional que contribui de maneira significativa na formação do professor de matemática e com destaque especial para a disciplina Recursos Computacionais no Ensino de Matemática com conteúdo programático voltado para a utilização das tecnologias digitais de informação e comunição, onde são vistos o GeoGebra e outros *softwares* matemáticos interessantes para o estudo de todos os conteúdos matemáticos, além da aprendizagem do LaTeX - ferramenta utilizada na elaboração deste texto.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRINI, A. e VASCONCELLOS, M. J.; *Praticando matemática 8*. 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, (2015), 304 p.

[2] AULETE, C.; *Novíssimo Aulete dicionário da língua portuguesa*. Organizador: Paulo Geiger. Rio de Janeiro: Lexikon, (2011), 1488 p.

[3] BRASIL; Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*; 2ª versão revista; Proposta preliminar. Brasília : Ministério da Educação, (2016), 561 p.

[4] __________; Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, (2013), 562p.

[5] __________; Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*; Volume 2; Brasília : Ministério da Educação, (2006), 135 p.

[6] __________; INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Provas e Gabaritos*. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em 17 mar 2017.

[7] CASTRO, C. M. *Os tortuosos caminhos da educação brasileira: pontos de vista impopulares*. Porto Alegre: Penso, (2013), 232 p.

[8] DÖRRIE, H.; *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solutions*, Translated by David Antin. New York, DOVER PUBLICATIONS, INC, (1965), 393p.

[9] EVES, H.; *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, (2004), 844p.

[10] *GeoGebra*. Disponível em: < http://www.geogebra.im-uff.mat.br/index.html>. Acesso em 19 mar 2017.

[11] GIRALDO, V., CAETANO, P. e MATTOS, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. UFRJ, UFSCar, UERJ/CP2. (2012), 240p.

[12] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. v, 1. 12 ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro, RJ: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, (2009), 431p.

[13] MOREIRA, G. N. A. *Desigualdades: uma abordagem através de problemas*. Dissertação (Mestrado) - UFCG/CCT. Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio da Silva Medeiros. Campina Grande, (2016). 95p. Disponível em: < http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes?polo=UFCG&titulo=&aluno=>. Acesso em 18 mai. 2017.

[14] Normas da ABNT – NBR 6023: *Elaboração de referências*, (2000). Disponível em <http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/RegulamentoseNormas/ABNT-NBR6023.pdf>. Acesso em 19 mar 2017.

[15] Normas da ABNT – NBR 14724: *Informação e documentação – Trabalhos acadêmicos – Apresentação*, 3ª edição, (2011). Disponível em <http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/RegulamentoseNormas/ABNT-NBR14724.pdf>. Acesso em 19 mar. 2017.

[16] POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, (1995), 196p.

[17] SILVA, C. C. de A. *A Desigualdade Isoperimétrica*. Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN. Orientador: Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza. João Pessoa, (2013). 79p. Disponível em: < http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes?polo=UFPB&pag=5>. Acesso em 09 mai. 2017.

[18] TROCADO, A. E. B e DOS SANTOS, J. M. S. *Curso 1 - GeoGebra 3D*. In: MINHOMAT 2013. Arcos de Valdevez, (2013). Disponível em: < http://geogebra.ese.ipp.pt/ficheiros_on_line/pdf/geogebra3d-MinhoMat2013_pub.pdf>. Acesso em 07 mar. 2017.

[19] WAGNER, E. *Resolução de Problemas com a ajuda do GeoGebra*. Disponível em: < http://www.obmep.org.br/videos-EPP-2008.htm>. Acesso em 19 mar 2017.

Apêndice A

Questões de otimização abordadas no ENEM

Neste apêndice trataremos das questões de *máximos* e *mínimos* presentes nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O ENEM, criado em 1998 com o objetivo de avaliar a qualidade da educação básica, passou gradativamente, desde 2009, a ser critério classificatório para ingresso dos alunos na maioria das universidades públicas e particulares do Brasil. Nota-se também que, de maneira elementar, problemas de otimização vêm sendo cobrados nessa prova (ver Referência [6]). Como exemplos, a questão 166 da prova amarela de 2014 pode ser resolvida usando a desigualdade triangular; a prova de 2015 (primeira aplicação) traz consigo duas questões básicas de otimização: a saber, a questão 136 da prova amarela, a qual se pode resolver usando conhecimentos de função quadrática e a questão 176 que pode ser resolvida usando-se conhecimentos de funções trigonométricas. Além disso, todas as provas, da forma como são elaboradas hoje, estruturadas em quatro matrizes e compostas por 45 questões para cada uma das áreas do conhecimento - modelo adotado desde o ano de 2009 - contêm, em média, cinco problemas elementares com as palavras *máximo* ou *mínimo*.

As provas, aqui citadas, podem ser baixadas no *site* da Referência [6].

Temos, a seguir, as questões aqui citadas com suas respectivas soluções.

QUESTÃO 136 - Prova amarela - Primeira aplicação - 2015

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celcius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (em $°C$)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

(a) muito baixa.

(b) baixa.

(c) média.

(d) alta.

(e) muito alta.

Solução: De acordo com o Teorema 2.5, a maior temperatura possível é

$$T_V = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Como $\Delta = 22^2 - 4.(-1).(-85) = 144$, segue que

$$T_V = \frac{-144}{4.(-1)} = 36,$$

ou seja, o estudante obtém o maior número possível de bactérias no instante em que a temperatura varia entre $30°C$ e $43°C$. Portanto, o item (d) é a alternativa com a resposta correta para esta questão.

QUESTÃO 176 - Prova amarela - Primeira aplicação - 2015

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro. Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

(a) janeiro.

(b) abril.

(c) junho.

(d) julho.

(e) outubro.

Solução: Como a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cosx$ tem imagem variando de -1 a 1, segue que o valor mínimo de f é -1.

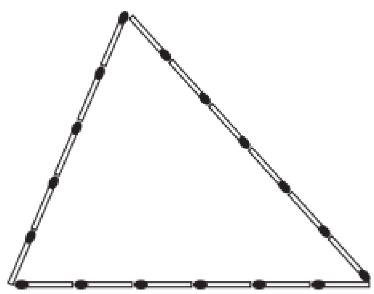
O mês de produção máxima acarreta preço mínimo, ou seja,

$$cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\pi x - \pi}{6} = \pi \Rightarrow \pi x - \pi = 6\pi \Rightarrow \pi x = 7\pi \Rightarrow x = 7,$$

o que equivale dizer que o mês de produção máxima desse produto é julho, que corresponde à alternativa (d).

QUESTÃO 166 - Prova amarela - 2014

Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características. A quantidade máxima de triângulos não congruentes



dois a dois que podem ser construídos é

(a) 3.

(b) 5.

(c) 6.

(d) 8.

(e) 10.

Solução: Primeiro é necessário compreender que os triângulos não congruentes dois a dois são aqueles que não possuem todos os seus lados com as mesmas medidas e que, consequentemente, não terão ângulos internos congruentes.

De acordo com o Teorema 3.5 (Desigualdade Triangular), a medida de um dos lados de um triângulo é sempre maior do que a soma das medidas dos outros dois lados. Como um dos lados está fixado com 6 palitos, os outros dois devem ter seus lados com soma da quantidade de palitos igual a 11. Neste caso, a menor quantidade de palitos de um lado é 3, pois, pela desiguadade triangular,não é possível formar um triângulo com 6, 2 e 9 ou 6, 1 e 10 palitos e, a maior é 8. Portanto, as possíveis combinações para a formação desses triângulos são: 6, 3 e 8; 6, 4 e 7; 6, 5 e 6. Concluímos, então, que a quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é 3 (alternativa (a)).

Problemas de otimização, como estes, já são tratados de maneira isolada na maioria dos livros didáticos do Ensino Médio do nosso país. Seria interessante que tal conteúdo compusesse um capítulo a parte em cada livro didático de Matemática do Ensino Médio, tendo em vista sua importância prática para todos os ramos da ciência.

Apêndice B

O GeoGebra

Neste Apêndice descreveremos as funções básicas do *software* GeoGebra, um *software* de matemática dinâmica que reúne recursos de álgebra, geometria, planilha eletrônica, gráficos, probabilidade e estatística em um único ambiente. Criado pelo austríaco Markus Hohenwarter, no ano de 2001, como tese de doutorado na Universidade de Salzburgo - Áustria, o GeoGebra foi desenvolvido para o ensino e a aprendizagem da matemática desde o Ensino Básico ao Ensino Superior e tem a vantagem didática de apresentar, simultaneamente, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.(ver Referência [10])

O GeoGebra permite que realizemos construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas, sólidos geométricos, além de funções que podem se modificar dinamicamente.

Ao iniciar a versão 5.0 do programa, aparece a seguinte janela:

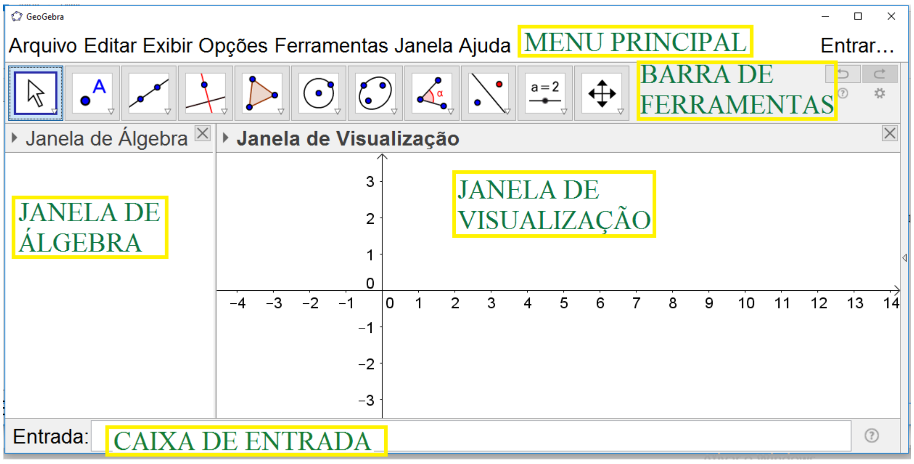


Figura B.1: Janela inicial

Também podem ser exibidas: a *Planilha*, a *Janela Cas*, a *Janela de Visualização 3D*, o *Protocolo de Construção*, a *Calculadora de Probabilidades*, além da *Janela de Visualização 2*, conforme vemos na Figura B.2.

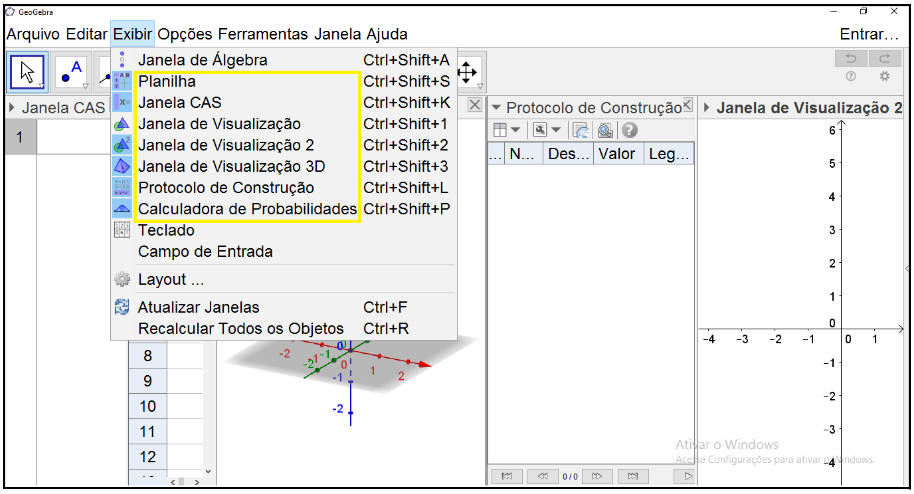


Figura B.2: Outras janelas do GeoGebra

B.1 Trabalhando com elementos de geometria plana

O *Menu de Ferramentas*, da versão 5.0, para trabalhos em duas dimensões conta com onze botões como vemos na Figura B.1. Dando dois cliques em qualquer um desses botões ou apenas um clique no triângulo do canto inferior direito aparecererá uma cortina como veremos da Figura B.3 até a Figura B.13.

No primeiro botão (ver Figura B.3), aparecem as opções: *Mover*, *Rotação em Torno de um Ponto*, *Função à mão Livre* e *Caneta*.

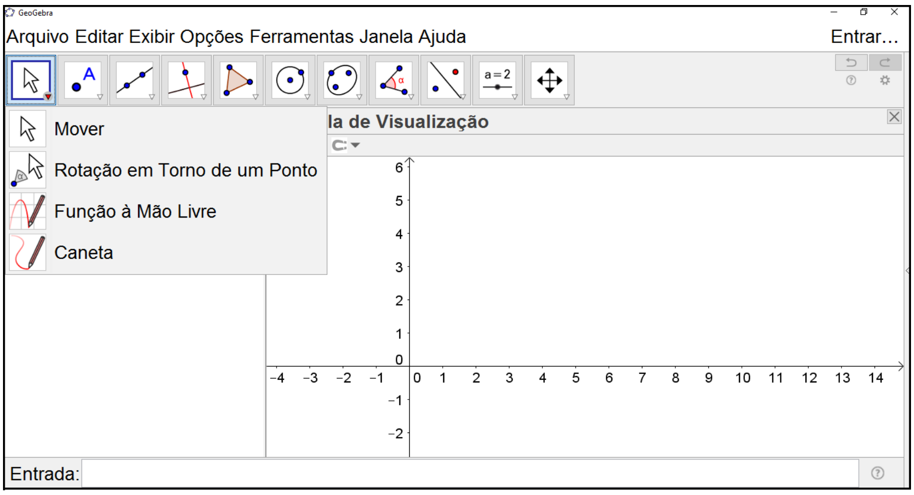


Figura B.3: Cortina do primeiro botão

Escreveremos, aqui, algumas finalidades destes botões, entretanto uns têm suas funções óbvias. Focaremos essa escrita no passo a passo de como trabalhar com tais ferramentas.

-  **Mover**: Botão que serve para arrastar e mover objetos livres com o *mouse*;
-  **Rotação em Torno de um Ponto**: Clicando neste botão, num objeto e, em seguida, em um ponto, rotaciona-se esse objeto em torno do ponto que será fixado;
-  **Função à mão Livre**: Com este botão pode-se traçar objetos à mão livre na *Janela de Visualização* e, quando o *software* reconhece seu traço ele dá uma aproximação do objeto ou define a função, no caso do traço do seu gráfico;
-  **Caneta**: Com essa ferramenta pode-se escrever livremente destacando ou detalhando suas construções.

No segundo botão (ver Figura B.4), aparecem as opções: *Ponto*, *Ponto em Objeto*, *Vincular/Desvincular Ponto*, *Interseção de Dois Objetos*, *Ponto Médio ou Centro*, *Número Complexo*, *Otimização* e *Raízes*.

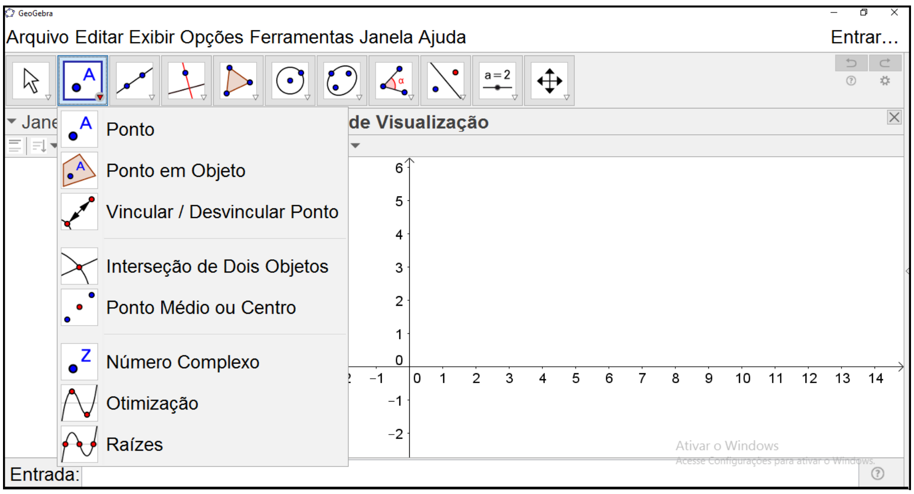
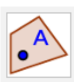
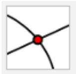


Figura B.4: Cortina do segundo botão

-  **Ponto**: Com essa ferramenta marcam-se pontos quaisquer. Para marcar pontos específicos pode-se exibir a malha clicando com o botão direito do *mouse* na *Janela de Visualização* ou para ser mais preciso digitar no campo de *Entrada* as coordenadas do ponto;
-  **Ponto em Objeto**: Ferramenta para se marcar um ponto em um objeto (segmento, reta, semirreta, polígonos, circunferência, etc...);

-  **Vincular/Desvincular Ponto**: Considerando um ponto qualquer em um objeto, ao clicar nessa ferramenta, no objeto e, depois, no ponto, vincula-se esse ponto ao objeto, ou seja, faz com que esse ponto passe a pertencer a tal objeto. Para desvinculá-lo basta executar esses mesmos passos;

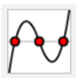
-  **Interseção de Dois Objetos**: Pode-se obter a interseção de dois objetos clicando nessa ferramenta, no primeiro objeto e no segundo ou, quando a interseção lhes é visível, aprominando-se o cursor dessa interseção, os dois objetos ficam selecionados; basta clicar que o programa nomeia a interseção;

-  **Ponto Médio ou Centro**: Botão que tem a função de dar o ponto médio de um segmento. Para isto, basta clicar nos pontos extremos do segmento;

- 

Número Complexo: Com esse botão marcam-se pontos que representam números complexos quaisquer. Para marcar precisamente o complexo desejado é necessário digitar, no campo de *Entrada*, o número na sua forma algébrica $z = a + bi$, com a e b sendo números reais;

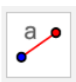
-  **Otimização**: Para obter pontos de máximos e mínimos locais ou absolutos de uma função clique nesse botão e, em seguida, no traço do gráfico da função, ou na própria lei da função apresentada na *Janela de Álgebra*;

-  **Raízes**: Para obter raízes de uma função clique nesse botão e, em seguida, no traço do gráfico da função, ou na própria lei da função apresentada na *Janela de Álgebra*.

No terceiro botão (ver Figura B.5), aparecem as opções: *Reta*, *Segmento*, *Segmento com Comprimento Fixo*, *Semirreta*, *Caminho Poligonal*, *Vetor* e *Vetor a Partir de um Ponto*.

-  **Reta**: Botão com a finalidade de se determinar uma reta passando por dois pontos, para isto basta clicar nos dois pontos pelos quais se deseja que essa reta passe;

-  **Segmento**: Acionando esse botão e clicando em dois pontos determina-se um segmento com extremidades nesses pontos;

- 

Segmento com Comprimento Fixo: Para determinar um segmento com um determinado comprimento, clica-se nesse botão, depois num ponto que será a primeira extremidade do segmento e, em seguida, aparecerá uma caixa de diálogo onde você digitará o comprimento desejado para tal segmento. Assim, o programa irá exibi-lo na posição horizontal e o nomeará;

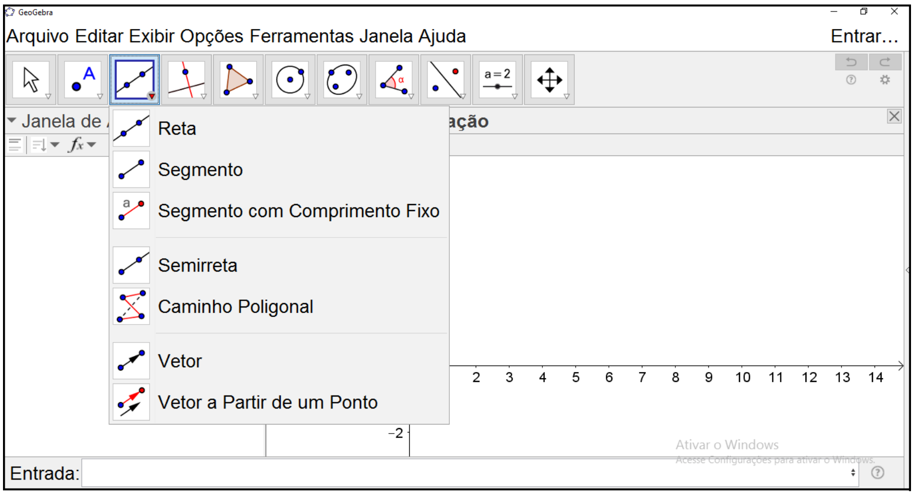
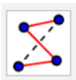
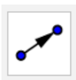
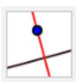
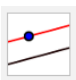
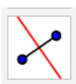


Figura B.5: Cortina do terceiro botão

-  **Semirreta**: Para obter uma semirreta clica-se primeiro no ponto que será a sua origem e, depois, em outro ponto na direção desejada;
-  **Caminho Poligonal**: Ferramenta que cria uma linha poligonal aberta. Para tal, determinar os segmentos da linha poligonal e clicar no ponto inicial;
-  **Vetor**: Botão para criar um vetor selecionando primeiro a origem e, depois, a outra extremidade;
-  **Vetor a Partir de um Ponto**: Dados um vetor e um ponto, clique primeiro no ponto e, posteriormente, no vetor.

No quarto botão (ver Figura B.6), aparecem as opções: *Reta Perpendicular*, *Reta Paralela*, *Mediatriz*, *Bissetriz*, *Reta Tangente*, *Reta Polar ou Diametral*, *Reta de Regressão Linear* e *Lugar Geométrico*.

-  **Reta Perpendicular**: Para determinar uma reta perpendicular a uma outra reta, semirreta, segmento de reta ou vetor clica-se primeiro em um ponto (no objeto ou fora dele) e, depois, em tal objeto;
-  **Reta Paralela**: Determina-se uma reta paralela a uma outra reta, semirreta, segmento de reta ou vetor clicando-se primeiro em um ponto e, depois, em tal objeto;
-  **Mediatriz**: Clica-se nos dois pontos extremos desse segmento de reta. Usando-se o campo de *Entrada* pode-se digitar a palavra *Mediatriz* e, entre colchetes, colocar o nome do segmeto ou os dois pontos (separando-os por vígula) ou os dois pontos e a direção;

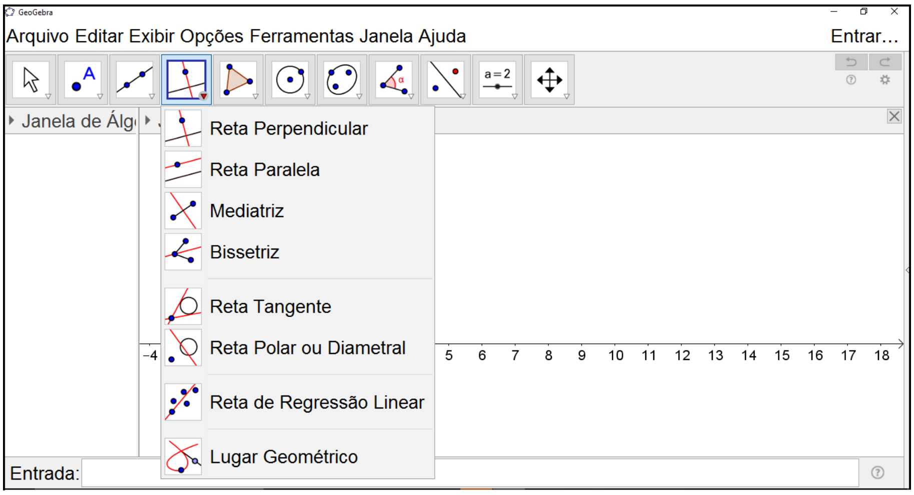
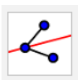
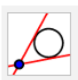
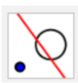
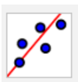
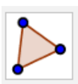
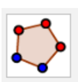
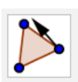
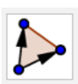


Figura B.6: Cortina do quarto botão

-  **Bissetriz**: Para obter a bissetriz clica-se em três pontos ou em duas retas que se intersectam;
-  **Reta Tangente**: Para obter uma reta tangente seleciona-se um ponto e, depois, uma circunferência, uma cônica ou uma função;
-  **Reta Polar ou Diametral**: Traça-se a reta polar ou diametral a uma cônica selecionando-se um ponto ou uma reta e, depois, um círculo ou uma cônica;
-  **Reta de Regressão Linear**: Para obter a reta de regressão linear seleciona-se os pontos usando o retângulo de seleção ou seleciona-se uma lista de pontos;
-  **Lugar Geométrico**: Seleciona-se o ponto do lugar geométrico e, em seguida, o ponto sobre o objeto ou o controle deslizante.

No quinto botão (ver Figura B.7), aparecem as opções: *Polígono*, *Polígono Regular*, *Polígono Rígido* e *Polígono Semideformável*.

-  **Polígono**: Clica-se em cada vértice e, por fim, no vértice inicial;
-  **Polígono Regular**: Clica-se em dois pontos, obtendo o primeiro lado do polígono regular desejado e, em seguida, surgirá uma caixa de diálogo onde deve-se digitar a quantidade de lados;
-  **Polígono Rígido**: Seleciona-se todos os vértice e, por fim, o vértice inicial, ou então, seleciona-se um polígono;
-  **Polígono Semideformável**: Seleciona-se todos os vértice e, por fim, o vértice inicial.

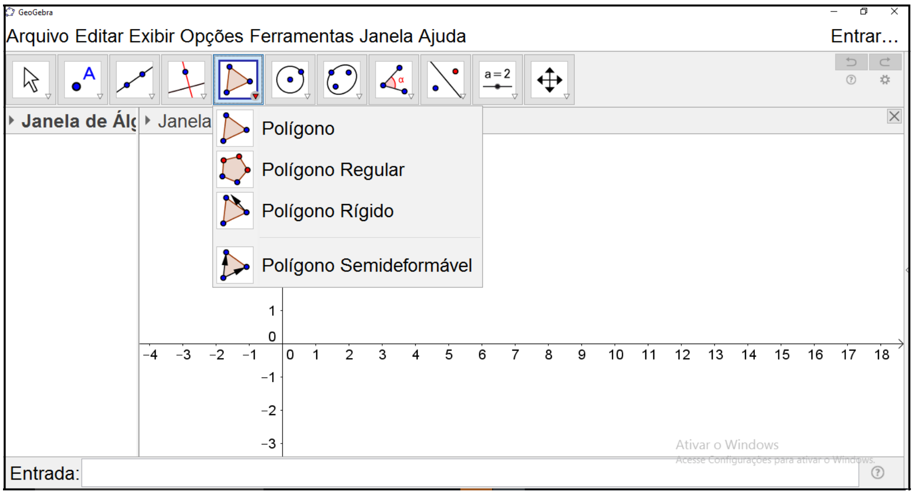


Figura B.7: Cortina do quinto botão

No sexto botão (ver Figura B.8), aparecem as opções: *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*, *Círculo dados Centro e Raio*, *Compasso*, *Círculo definido por Três Pontos*, *Semírculo Definido por Dois Pontos Pontos*, *Arco Circular*, *Arco Circuncircular*, *Setor Circular* e *Setor Circuncircular*.

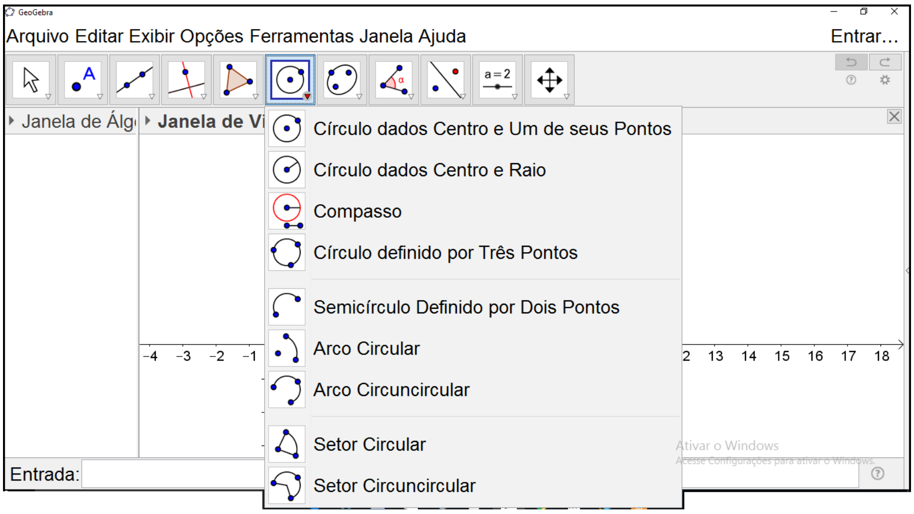
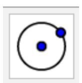
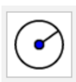
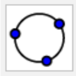


Figura B.8: Cortina do sexto botão

-  **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**: Seleciona-se o centro e, depois, um ponto do círculo;
-  **Círculo dados Centro e Raio**: Seleciona-se o centro e, em seguida, digita-se a medida do raio;

-  **Compasso**: Seleciona-se dois pontos ou um segmento para definir o raio e, depois, o centro;

-  **Círculo definido por Três Pontos**: Clica-se nos três pontos do círculo;

No sétimo botão (ver Figura B.9), aparecem as opções: *Elipse*, *Hipérbole*, *Parábola*, e *Cônica por Cinco Pontos*.

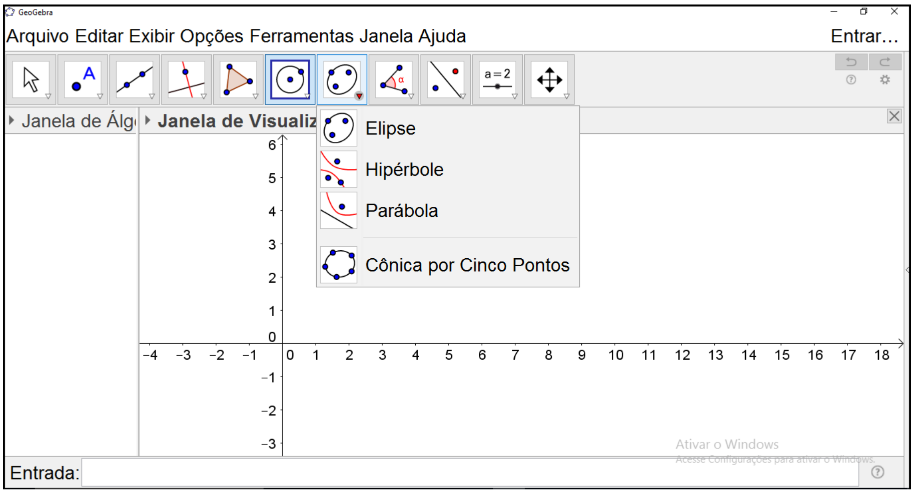
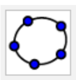


Figura B.9: Cortina do sétimo botão

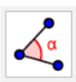
-  **Elipse**: Escolhe-se os dois focos e, depois, um ponto da elipse;

-  **Hipérbole**: Seleciona-se os dois focos e, depois, um ponto da hipérbole;

-  **Parábola**: Clica-se primeiro no foco e, em seguida, na diretriz;

-  **Cônica por Cinco Pontos**: Clica-se nos cinco pontos da cônica;

No oitavo botão (ver Figura B.10), aparecem as opções: *Ângulo*, *Ângulo com Amplitude Fixa*, *Distância, Comprimento ou Perímetro*, *Área*, *Inclinação*, *Lista*, *Relação* e *Inspetor de Funções*.

-  **Ângulo**: Seleciona-se três pontos ou duas retas ou dois segmentos de reta ou duas semirretas;

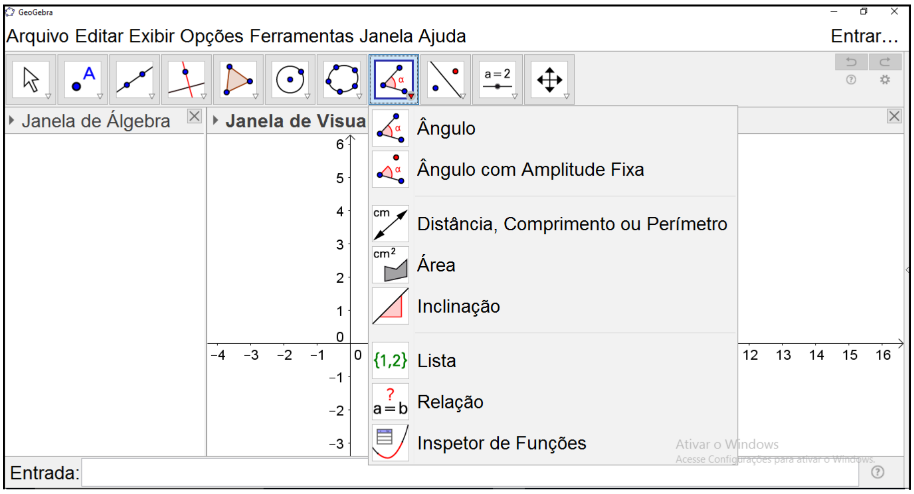
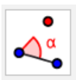
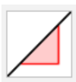


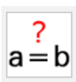
Figura B.10: Cortina do oitavo botão

-  **Ângulo com Amplitude Fixa**: Escolhe-se um ponto, um vértice e uma amplitude para o ângulo;
-  **Distância, Comprimento ou Perímetro**: Seleciona-se dois pontos, um segmento, um polígono ou um círculo;
-  **Área**: Seleciona-se um polígono, um círculo ou uma elipse;
-  **Inclinação**: Clica-se em uma reta (ou segmento ou semirreta);
-  **Lista**: Cria-se uma lista digitando-se, no campo de *Entrada*, o nome da lista, o símbolo = e a lista de objetos entre chaves separados por vírgula(s). Ficando, então, assim:

Nome_da_Lista={elemento_1, elemento_2, elemento_3, ..., elemento_n}.

Para acessar cada elemento da lista, digita-se, no campo de *Entrada*, a palavra *Elemento* e, entre colchetes, escreva o nome da lista e a sua posição separados por uma vírgula.

Elemento={Nome_da_Lista, posição};

-  **Relação**: Clica-se em dois objetos;
-  **Inspetor de Funções**: Seleciona-se uma função. A parecerá uma janela contendo informações como: pontos de máximo, pontos de mínimo, raízes, integral, área, média e comprimento para um determinado intervalo.

No nono botão (ver Figura B.11), aparecem as opções: *Reflexão em Relação a uma Reta*, *Reflexão em Relação a um Ponto*, *Inversão*, *Rotação em Torno de um Ponto*, *Translação por um Vetor* e *Homotetia*.

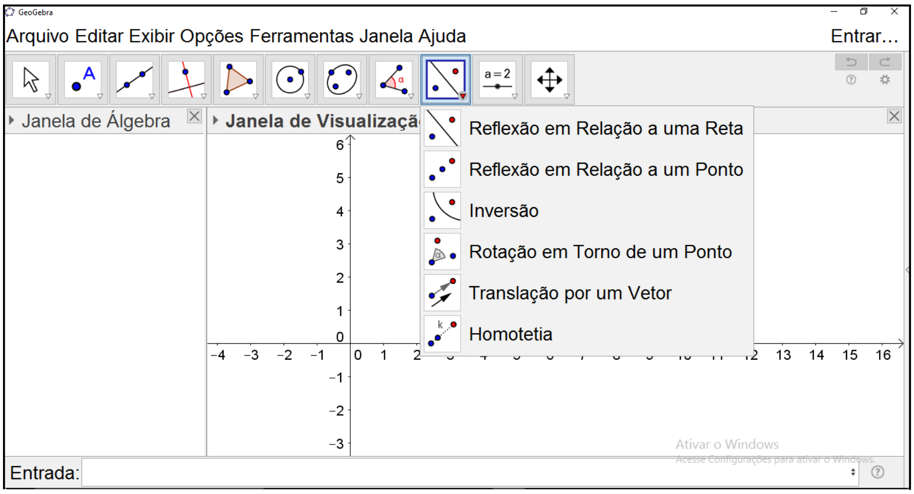
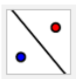
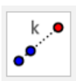


Figura B.11: Cortina do nono botão

-  **Reflexão em Relação a uma Reta**: Seleciona-se o objeto que se quer refletir e, em seguida, a reta de reflexão;
-  **Reflexão em Relação a um Ponto**: Seleciona-se o objeto que se quer refletir e, em seguida, o ponto que será o centro da reflexão;
-  **Inversão**: Seleciona-se primeiro o objeto e, depois, o círculo;
-  **Rotação em Torno de um Ponto**: Seleciona-se primeiro objeto que se quer rotacionar, depois o centro e, por fim, o ângulo de rotação;
-  **Translação por um Vetor**: Clica-se primeiro no objeto que se quer transladar e, depois, no vetor;
-  **Homotetia**: Clica-se primeiro no objeto, depois no centro e, por fim, digita-se a razão da homotetia.

No décimo botão (ver Figura B.12), aparecem as opções: *Controle Deslizante*, *Texto*, *Inserir Imagem*, *Botão*, *Caixa para Exibir / Esconder Objetos* e *Campo de Entrada*.

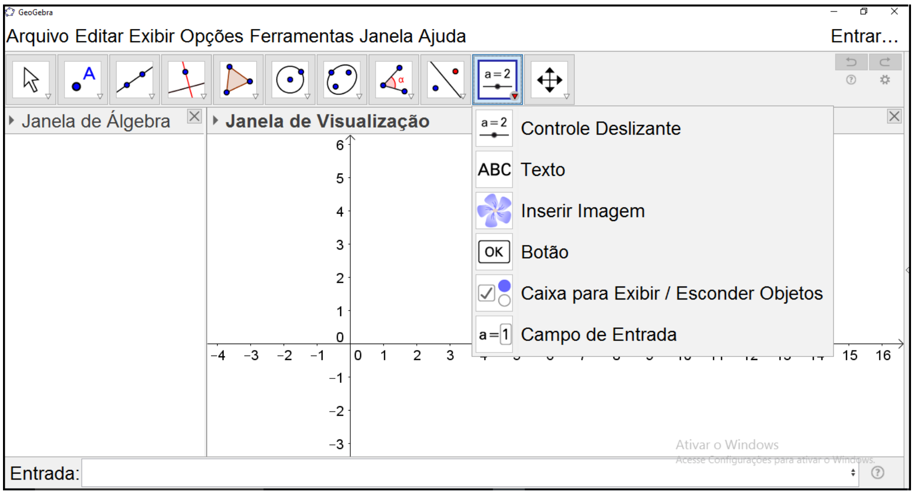


Figura B.12: Cortina do décimo botão

- **Controle Deslizante**: Para criar um controle deslizante (em algumas versões do GeoGebra, chamado de *seletor*), com essa ferramenta selecionada, clica-se na *Janela de Visualização* e, em seguida, surgirá uma caixa de diálogo onde digita-se o nome, o tipo: se é número ou ângulo, os valores mínimo e máximo, o incremento e o sentido: horizontal ou vertical;

- **Texto**: Para criar um texto clica-se na *Janela de Visualização* ou em um ponto;

- **Inserir Imagem**: Clica-se no botão *Inserir Imagem* e, em segida, surgirá uma janela para se escolher, no seu computador, a imagem a ser inserida;

- **Botão**: Para criar um *Botão* clica-se na *Janela de Visualização*; aparecerá uma caixa de diálogo onde deve-se nomear o botão e digitar o Código GeoGebra;

- **Caixa para Exibir / Esconder Objetos**: Clica-se na *Janela de Visualização* onde ficará a caixa que, quando marcada, mostrará os objetos e, quando desmarcada, esconderá os objetos. Ao clicar na *Janela de Visualização* surgirá uma janela na qual escolhe-se um nome para a caixa e o(s) objeto(s) que se quer *Exibir/Esconder*;

- **Campo de Entrada**: Clica-se na *Janela de Visualização* para inserir um campo de texto.

No décimo primeiro botão (ver Figura B.13), aparecem as opções: *Mover Janela de Visualização*, *Ampliar*, *Reduzir*, *Exibir / Esconder Objeto*, *Exibir / Esconder Rótulo*, *Copiar Estilo Visual* e *Apagar*.

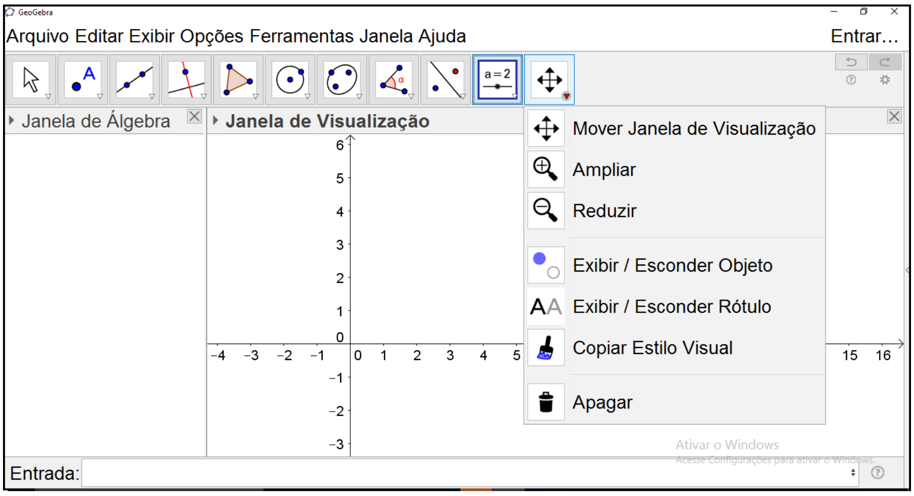
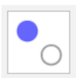


Figura B.13: Cortina do décimo primeiro botão

-  **Mover Janela de Visualização**: Botão que serve para arrastar a *Janela de Visualização* ou para mudar a escala dos eixos;
-  **Ampliar**: Clica-se na *Janela de Visualização* para ampliá-la (ou no *scroll* do *mouse*);
-  **Reduzir**: Clica-se na *Janela de Visualização* para reduzi-la (ou no *scroll* do *mouse*);
-  **Exibir / Esconder Objeto**: Seleciona-se o(s) objeto(s) que se deseja esconder e, depois, clica-se em outra ferramenta qualquer. Para que o(s) objeto(s) reapareça(m), basta clicar novamente no botão *Exibir / Esconder Objeto*. Outra forma de se esconder um objeto é clicando com o botão direito do *mouse* sobre esse objeto e marcar a opção *Exibir Objeto*;
-  **Exibir / Esconder Rótulo**: Seleciona-se o objeto que se deseja exibir ou esconder o rótulo. Outra forma de se exibir ou esconder o rótulo é clicando com o botão direito do *mouse* sobre esse objeto e marcar a opção *Exibir Rótulo*;
-  **Copiar Estilo Visual**: Seleciona-se primeiro o objeto modelo e, depois, aquele(s) cujo estilo se pretende copiar.
-  **Apagar**: Clica-se no objeto que se deseja apagar. Outra maneira de apagar um objeto é clicando com o botão direito do *mouse* sobre esse objeto e marcar a opção *Apagar*.

B.2 Trabalhando com a Janela de Visualização 3D

Ao abrir o GeoGebra, clicando-se no menu principal em *Exibir* e escolhendo-se *Janela de Visualização 3D* surgirá uma janela para se trabalhar com objetos tridimensionais. A barra de ferramentas, quando se abre a *Janela de Visualização 3D*, é composta por quatorze botões e, destes, em dez se abrirá uma cortina, quando neles se clica (Ver Figura B.14).

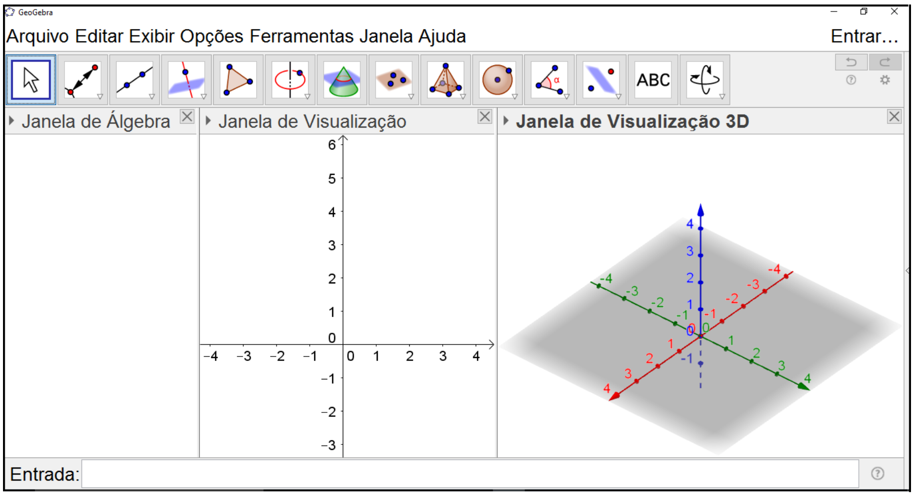


Figura B.14: Janela 3D

O primeiro botão conta apenas com a opção *Mover*, que funciona identicamente para trabalhos com geometria plana e geometria espacial.

Do segundo botão surge uma cortina com as opções: *Ponto*, *Ponto em Objeto*, *Interseção de Dois Objetos*, *Ponto Médio ou Centro* e *Vincular / Desvincular Ponto*, conforme ver-se na Figura B.15.

Os botões dessa cortina são idênticos aos da janela 2*D* e, portanto, têm mesma finalidade.

No terceiro botão aparece uma cortina com as opções: *Reta*, *Segmento*, *Segmento com Comprimento Fixo*, *Semirreta Vetor* e *Vetor a Partir de um Ponto*, conforme ver-se na Figura B.16.

Todos os botões dessa cortina aparecem na janela 2*D* com as mesmas funções.

No quarto botão aparece uma cortina com as opções: *Reta Perpendicular*, *Reta Paralela*, *Bissetriz*, *Reta Tangente Reta Polar ou Diametral* e *Lugar Geométrico*, conforme ver-se na Figura B.17.

Com exceção do primeiro botão *Reta Perpendicular*, os botões dessa cortina aparecem na janela 2D com as mesmas funções. No caso da *Reta Perpendicular* surge um novo objeto

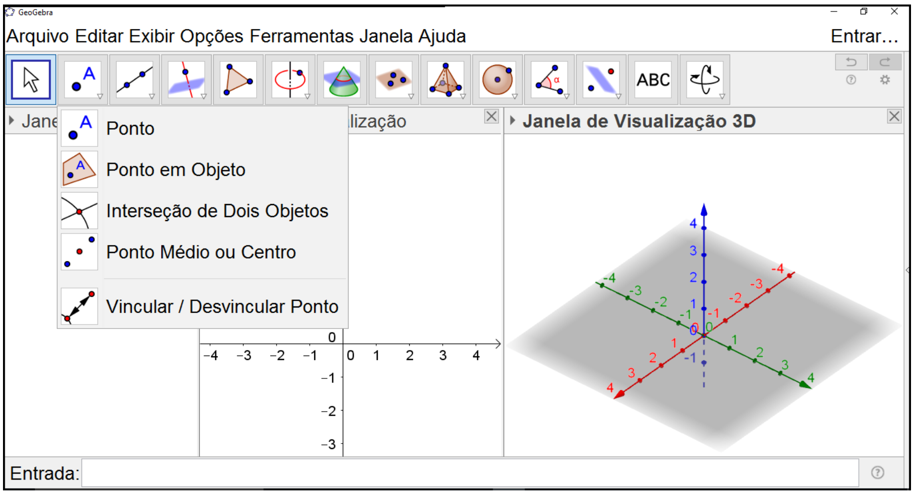


Figura B.15: Primeira cortina

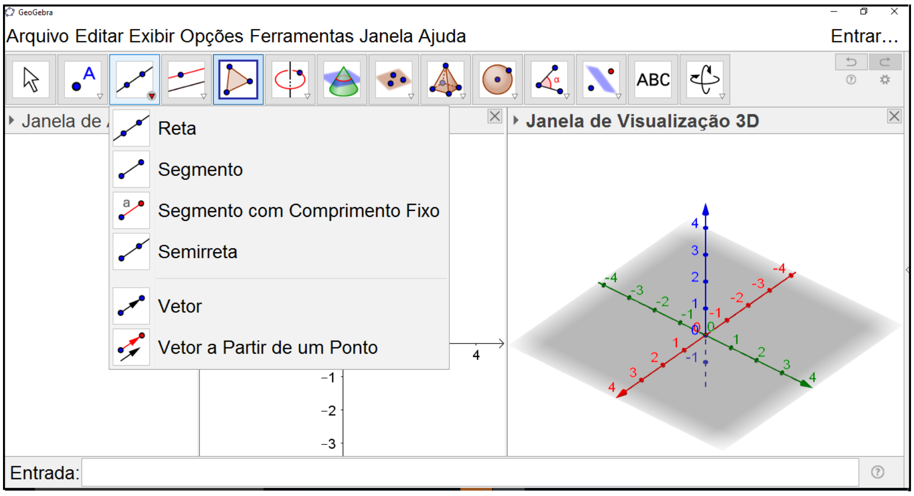
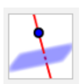


Figura B.16: Segunda cortina

para o qual ela também pode ser perpendicular, o plano.

-  **Reta Perpendicular**: Para determinar uma reta perpendicular a uma outra reta, semirreta, segmento de reta, vetor ou a um plano clica-se primeiro em um ponto (no objeto ou fora dele) e, depois, em tal objeto.

O quinto botão conta apenas com a opção *Polígono*, que funciona de maneira idêntica para trabalhos 2D e 3D.

No sexto botão aparece uma cortina com as opções: *Círculo dados Eixo e Um de seus Pontos*, *Círculo (Centro - Raio + Direção)*, *Círculo definido por Três Pontos*, *Arco Circular Arco Circuncircular*, *Setor Circular*, *Setor Circuncircular*, *Elipse*, *Hipérbole Parábola* e *Cônica por Cinco Pontos*, conforme ver-se na Figura B.18.

São duas as ferramentas novas dessa cortina com relação à Janela 2D:

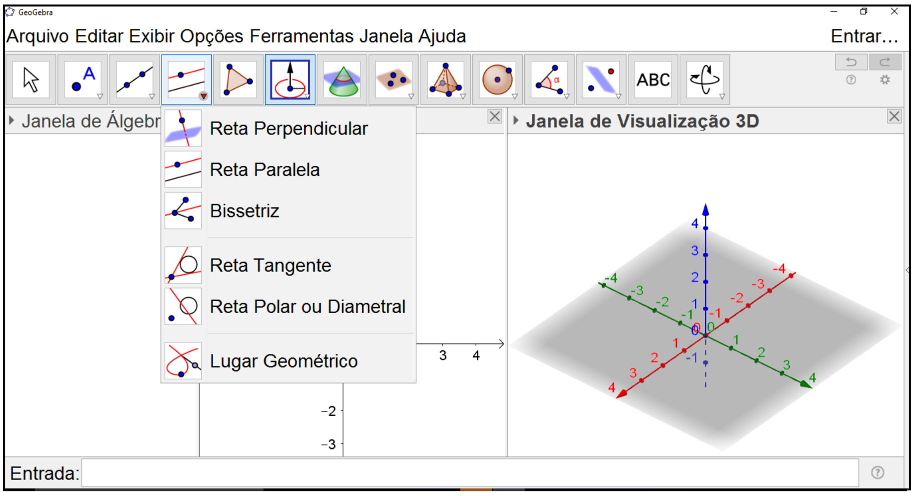


Figura B.17: Terceira cortina

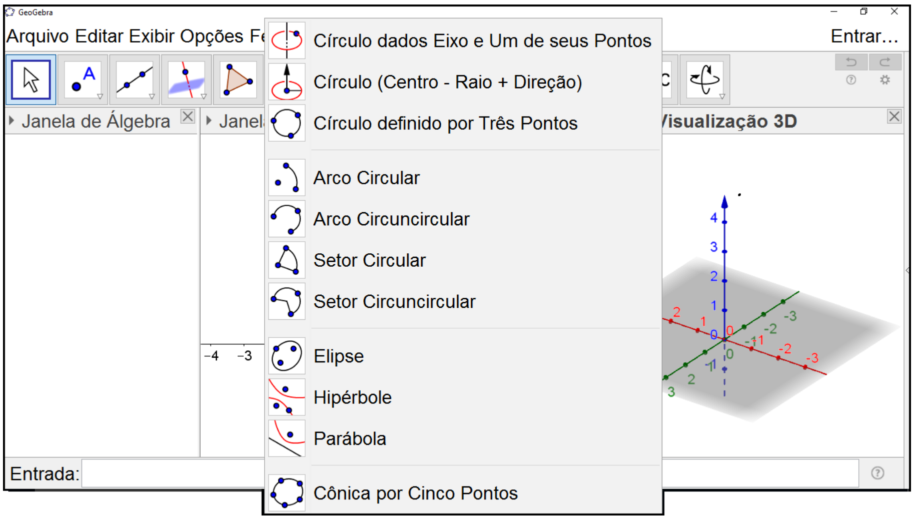
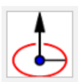


Figura B.18: Quarta cortina

-  **Círculo dados Eixo e Um de seus Pontos**: Seleciona-se primeiro o eixo (que pode ser uma reta, um segmento ou uma semirreta) e, depois, um ponto do círculo;

-  **Círculo (Centro - Raio + Direção)**: Clica-se primeiro no ponto que será o centro, depois no vetor que dará a direção e, por fim surgirá uma caixa de diálogo onde digita-se o comprimento do raio.

O sétimo botão tem apenas a seguinte ferramenta:

-  **Interseção de Duas Superfícies**: Para obter a interseção entre duas superfícies clica-se na primeira e, depois, na segunda superfície.

No oitavo botão aparece uma cortina com as opções: *Plano por três pontos*, *Plano*, *Plano Perpendicular* e *Plano Paralelo*, conforme ver-se na Figura B.19.

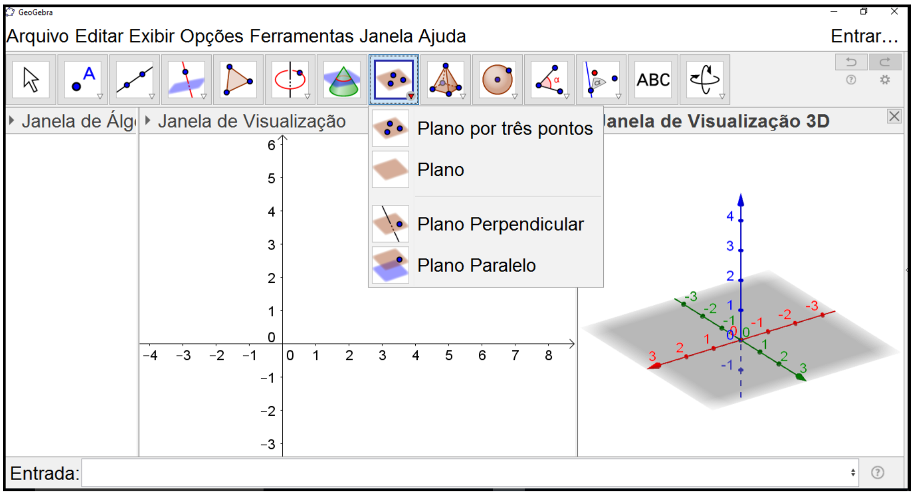
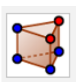


Figura B.19: Quinta cortina

-  **Plano por três pontos**: Selecionam-se os três pontos;
-  **Plano**: Clicam-se em três pontos, ou em um ponto e uma reta, ou em duas retas, ou em um polígono;
-  **Plano Perpendicular**: Seleciona-se um ponto e uma reta;
-  **Plano Paralelo**: Clica-se em um ponto e, depois, em um plano.

No nono botão aparece uma cortina com as opções: *Pirâmide*, *Prisma*, *Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone*, *Extrusão para Prisma ou Cilindro*, *Cone*, *Cilindro*, *Tetraedro*, *Cubo* e *Planificação* conforme ver-se na Figura B.20.

-  **Pirâmide**: Seleciona-se ou cria-se um polígono para a base da pirâmide e, depois, seleciona-se ou cria-se um vértice, não pertencente ao plano da base;
-  **Prisma**: Seleciona-se ou cria-se um polígono para a base do prisma e, depois, seleciona-se ou cria-se um ponto da base oposta;
-  **Fazer Extrusão para Pirâmide ou Cone**: Arrasta-se um polígono/círculo, ou clica-se em um polígono/círculo e entra-se com a altura;

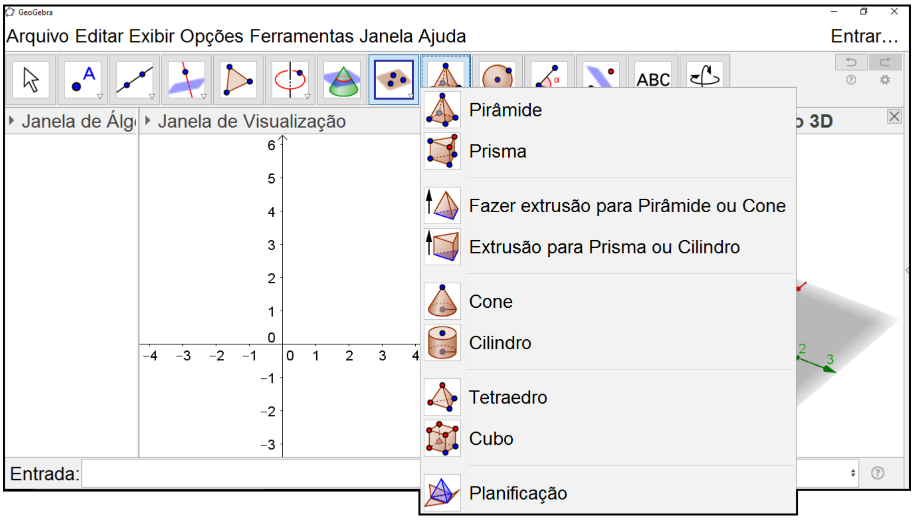
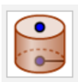
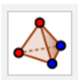
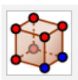
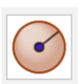


Figura B.20: Sexta cortina

-  **Extrusão para Prisma ou Cilindro**: Arrasta-se um polígono/círculo, ou seleciona-se em um polígono/círculo e entra-se com a altura;
-  **Cone**: Seleciona-se o ponto central da base e o vértice e, depois, digita-se o comprimento do raio da base;
-  **Cilindro**: Selecionam-se dois pontos do eixo central e especifica-se o raio;
-  **Tetraedro**: Selecionam-se dois pontos;
-  **Cubo**: Clica-se em um ponto e, depois, em outro ponto, cuja distância entre ele é o comprimento da aresta do cubo;
-  **Planificação**: Clica-se em um poliedro. Após clicar-se no poliedro é criado um controle deslizante para se mover a planificação.

No décimo botão aparece uma cortina com as opções: *Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos* e *Esfera dados Centro e Raio* conforme ver-se na Figura B.21.

-  **Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos**: Clica-se primeiro no centro e, depois, em um ponto da esfera;
-  **Esfera dados Centro e Raio**: Seleciona-se o cento e, em seguida, surgirá uma caixa de diálogo onde digita-se o comprimento do raio da esfera.

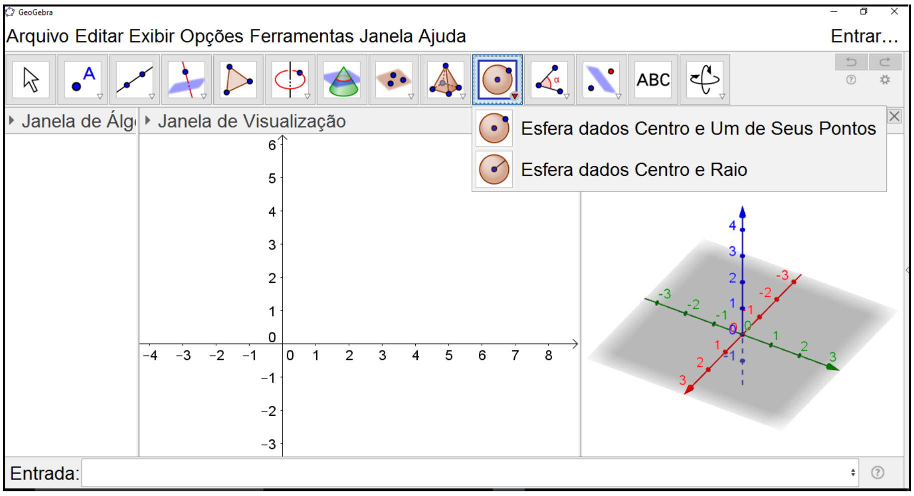


Figura B.21: Sétima cortina

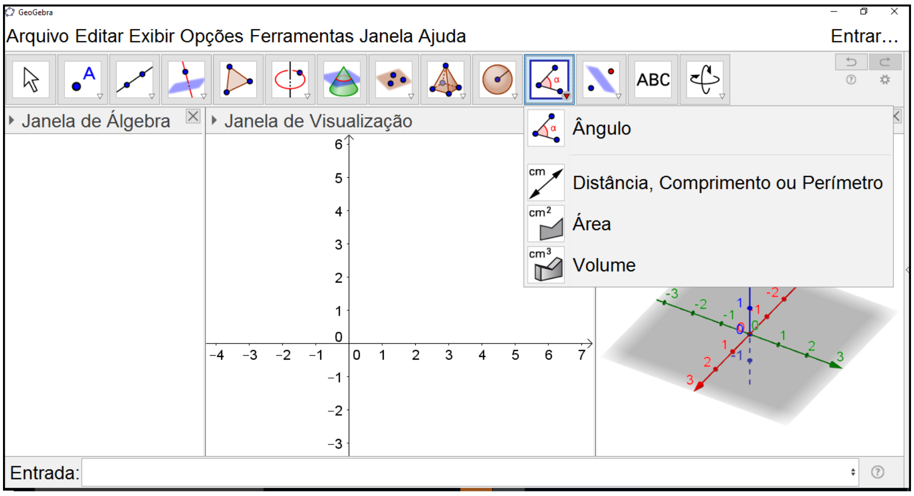


Figura B.22: Oitava cortina

No décimo primeiro botão aparece uma cortina com as opções: *Ângulo*, *Distância, Comprimento ou Perímetro*, *Área* e *Volume* conforme ver-se na Figura B.23.

A única novidade, com relação aos botões já vistos na subseção anterior, é a ferramenta volume.

-  **Volume**: Clica-se no sólido geométrico que se deseja obter o volume.

No décimo segundo botão aparece uma cortina com as opções: *Reflexão por Um Plano*, *Reflexão em Relação a uma Reta*, *Reflexão em Relação a um Ponto*, *Girar em torno de uma Reta*, *Translação por um Vetor* e *Homotetia* conforme ver-se na Figura B.23.

Desta janela, os dois botões que não fazem parte do GeoGebra 2D são:

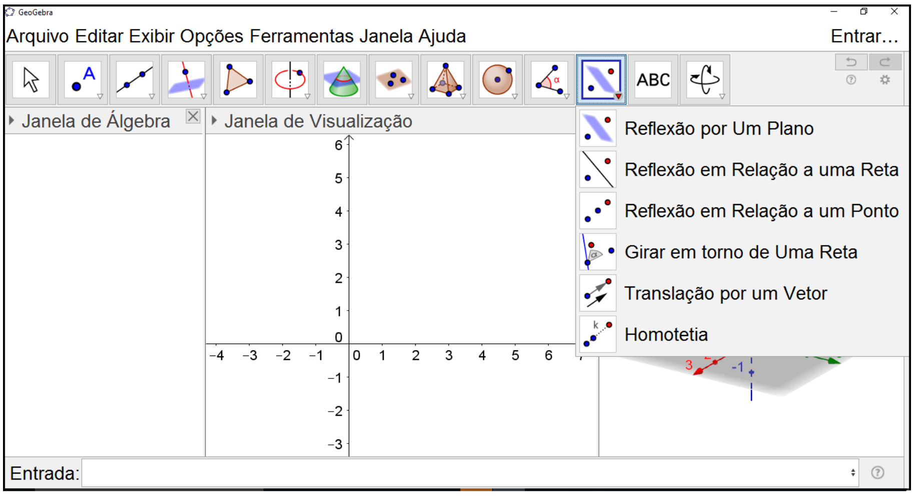


Figura B.23: Oitava cortina

-  **Reflexão por Um Plano**: Clica-se no objeto e, depois, no plano;

-  **Girar em torno de uma Reta**: Seleciona-se o objeto a ser girado, a reta e, por fim, surgirá uma caixa de diálogo onde especifica-se o ângulo.

O décimo terceiro botão possui apenas o botão *Texto* já detalhado na subseção anterior.

No décimo quarto botão aparece uma cortina com as opções: *Girar Janela de Visualização 3D*, *Mover Janela de Visualização*, *Ampliar*, *Reduzir*, *Exibir / Esconder Objeto*, *Exibir / Esconder Rótulo*, *Copiar Estilo Visual*, *Apagar* e *Vista para frente de* conforme ver-se na Figura B.24.

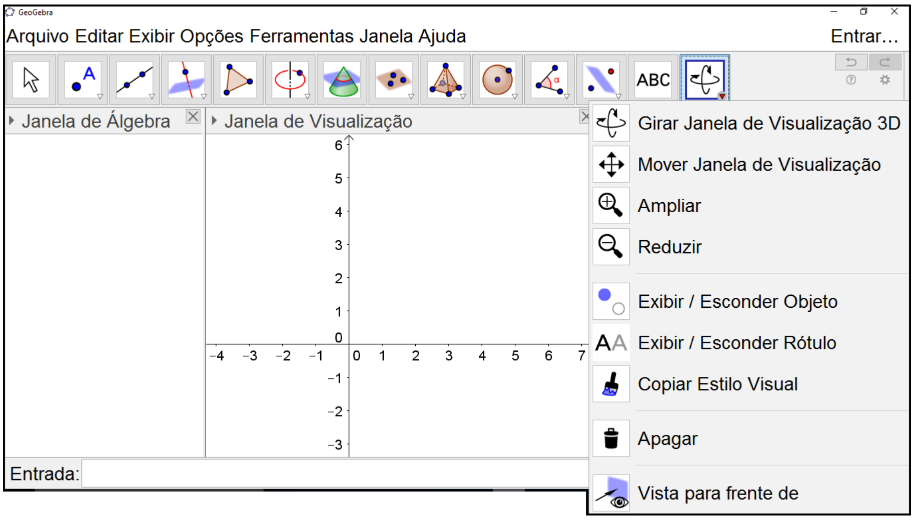


Figura B.24: Décima cortina

Desta janela, os dois botões que não fazem parte do GeoGebra 2D são:

-  **Girar Janela de Visualização 3D**: Arrasta-se a *Janela de Visualização 3D*;

-  **Vista para frente de**: Clicando-se no objeto, muda-se sua vista para a parte frontal.

Todos os objetos, tanto da geometria plana como da geometria espacial, podem ser obtidos através da caixa de *Entrada*, para isto é necessário que se digite o nome do objeto desejado e, então, se abrirá uma cortina onde constam os elementos a serem digitados entre colchetes precedidos do nome do objeto.