2013: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei – UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática – SBM

Uma Proposta para o Ensino de Geometria Espacial de Posição na EJA

Ana Lucia Camarano Resende[1]
Francinildo Nobre Ferreira[2]

Resumo: Este artigo apresenta uma proposta para o ensino de Geometria Espacial de Posição para o segundo ano do ensino médio modalidade EJA[3]. Neste trabalho foram consideradas as especificidades dos alunos da EJA, e o mesmo foi elaborado por meio de uma sequência de atividades que buscam suprir as deficiências de tempo e embasamento teórico provenientes do afastamento escolar. O trabalho é composto por dez atividades que acontecem sob a orientação do professor. Estas atividades são desenvolvidas a partir dos sólidos construídos utilizando planificações. A partir daí os alunos são levados a formalizar os principais postulados e teoremas. Os sólidos construídos são utilizados para auxiliar a compreensão dos conceitos e propriedades que serão desenvolvidas em cada atividade. Concluímos o trabalho propondo problemas visando fixar o conteúdo estudado.

Palavras-chave: EJA. Geometria Espacial de Posição. Sequência de atividades.

1 Introdução

O estudo de Geometria Espacial no Ensino Médio possibilita o desenvolvimento da capacidade de abstração, auxilia na resolução de problemas práticos e permite reconhecer propriedades das formas geométricas.

[1] Aluna de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2011
Instituição: Universidade Federal de São João del Rei- UFSJ
E-mail: anacamarano@oi.com.br

[2] Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: francinildonobre@gmail.com

[3] Educação de Jovens e Adultos

A busca por entender o espaço em que vivemos, identificar a existência de objetos e figuras e as relações entre essas formas no espaço real faz da geometria um objeto de conhecimento particularmente relevante e motivador, assim é necessário tratá-la com importância, através de planejamentos que proporcionem uma aprendizagem significativa deste conteúdo,

A escolha pelo desenvolvimento deste tema, sobre a Geometria Espacial de Posição, se deu por causa de uma experiência em uma escola da rede pública estadual com alunos do curso noturno EJA que apresentaram dificuldades na compreensão ou realização de atividades que envolviam a noção de forma e espaço e foi reforçada após o contato com LIMA (1997), ao cursar a disciplina Geometria I do PROFMAT.

Normalmente a EJA é constituída por jovens e adultos trabalhadores que há muitos anos não frequentam uma escola e que necessitam lutar para modificar suas condições de vida. Uma característica desses alunos é sua baixa auto-estima, muitas vezes reforçada pelas situações de fracasso escolar.

É comum que esse aluno chegue cansado à escola, mas, sendo o trabalho uma necessidade, torna-se necessário motivá-lo a perseverar nos estudos.

O caderno de Orientações Pedagógicas para as classes de EJA, criado pelo Ministério da Educação (MEC) em 2001, intitulado “Trabalhando com Educação de Jovens e Adultos: Alunos e Alunas de EJA" ressalta que:

> *O papel do(a) professor(a) de EJA é determinante para evitar situações de novo fracasso escolar. Um caminho seguro para diminuir esses sentimentos de insegurança é valorizar os saberes que os alunos e alunas trazem para a sala de aula. O reconhecimento da existência de uma sabedoria no sujeito, proveniente de sua experiência de vida, de sua bagagem cultural, de suas habilidades profissionais, certamente, contribui para que ele resgate uma auto-imagem positiva, ampliando sua auto-estima e fortalecendo sua autoconfiança (BRASIL, 2001, p. 18-19)*

Apesar de todas as dificuldades, é gratificante perceber que ao retornarem à escola esses alunos acreditam na promoção de seu desenvolvimento e esta atitude nos dá a oportunidade de levantar sua auto-estima. Percebe-se um “encantamento" extremamente positivo com o conhecimento, que precisa ser cultivada e valorizada pelo professor.

A Geometria Espacial se adapta muito bem ao conhecimento de mundo do aluno adulto. No Ensino Médio ela é apresentada em dois momentos: na introdução onde se fala de alguns conceitos primitivos como pontos, retas e planos; e apresenta os axiomas ou postulados sobre; pontos e retas, posições relativas de duas retas, determinação de um plano, posições relativas de reta e plano, posições relativas de dois planos, perpendicularismo entre reta e plano, perpendicularismo entre planos, projeção ortogonal, distâncias, ângulos, alguns exercícios de fixação, e somente após esta apresentação é que se trata os sólidos geométricos como: prisma, paralelepípedo, cilindro, pirâmides e cones e por fim a esfera.

Segundo Proença (2008), no momento em que o professor trabalha Geometria, ocorre uma valorização na aplicação de fórmulas prontas nos cálculos de áreas e volumes, e não no estudo dos elementos principais das figuras geométricas, “as quais realmente caracterizam essas formas e que contribuem para uma melhor formação conceitual e aplicação em solução de problemas" (PROENÇA, 2008, p. 29);e o resultado são discentes que ficam presos a essas fórmulas e em sua maioria não conseguem relacionar conceitos, identificar os elementos do sólido ou ainda estabelecer relação entre eles.

S. Filho & Brito (2006) confirmam que na atualidade o ensino de Geometria é feito de forma mecânica, fazendo com que o aluno perca o interesse pelo conhecimento, pois ele não encontra um significado para a compreensão do conteúdo.

Um aluno do ensino médio sem reprovação e que nunca se afastou da escola, pode não ter dificuldade em acompanhar uma sequência como a citada anteriormente, pois, ele traz o contato recente com a geometria plana e a álgebra. Isto não ocorre com um aluno da EJA, por isso se faz necessário pensar em uma estratégia que possibilite esse aluno acompanhar as aulas de Geometria Espacial de tal forma que deficiências tenham espaço para serem sanadas.

LIMA (1997) trata de maneira diferenciada a geometria de posição. Os capítulos 7, 8 e 9 abordam o assunto com suas definições, axiomas, teoremas e várias demonstrações e incluem a apresentação dos sólidos neste processo. Ao final, antes de iniciar o estudo de Poliedros, Áreas, Volumes e Sólidos de Revolução, o leitor já tem conhecimento das características e elementos de cada sólido. Isto é um facilitador para um aluno com as características da EJA.

Sendo assim, este trabalho tem como objetivo propor para o ensino de Geometria Espacial de Posição uma sequência de atividades onde a construção e a manipulação direta dos sólidos torne a aprendizagem mais significativa para esses alunos.

2 Proposta de ensino

A seguir são desenvolvidas várias atividades a partir dos sólidos construídos e nelas vamos explorar suas características e propriedades para desenvolvermos a proposta de ensino de Geometria Espacial de Posição.

Atividade 1- Do plano para o espaço

Esta atividade permitirá ao aluno reconhecer propriedades geométricas simples de figuras e sólidos relativas a faces, vértices e arestas e desenvolver a linguagem geométrica.

Uma sugestão para a realização desta atividade é dividir a turma em grupos de cinco alunos. Distribuir aos grupos de alunos as planificações anexadas, de maneira que os mesmos possam ter contato com suas montagens. Durante o processo de construção dos sólidos, os alunos devem ser estimulados a compará-los com formas conhecidas do cotidiano. Deverão observar que alguns sólidos rolam e outros não, e ainda, distinguir superfície plana de não plana. Destacar a partir dos sólidos com superfícies planas, aresta, vértice e face. Identificar e reconhecer paralelepípedos, cubos, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. No conjunto de planificações que se encontram no anexo 2, não consta a esfera pois ela não pode ser planificada em virtude de suas propriedades. Não trataremos dessas propriedades neste trabalho.

Figura 1 - Sólidos

Exercício:

Coloque sobre a carteira o conjunto dos sólidos geométricos, como da figura 1 e faça o que se pede em cada item:

a) Separe os sólidos que rolam em alguma posição. Escreva os nomes desses sólidos.

b) Escreva o nome dos sólidos geométricos que não rolam em nenhuma posição.

c) Complete o quadro com os sólidos do item b.

Nome do sólido	Nº de faces(F)	Nº de arestas(A)	Nº de vértices(V)	*V* + *F* - *A*

d) No quadro anterior, calcule, para cada sólido o valor de $V+F-A$. O que você encontrou?

Observação: É interessante o professor comentar que a relação $V+F-A=2$, conhecida hoje como relação de Euler, desperta a curiosidade dos estudiosos desde a Antiguidade. Acredita-se que Arquimedes já conhecia essa importante relação, por volta de 225 a.C., e que René Descartes, no ano de 1653, chegou bem próximo dela. Contudo foi Leonhard Euler quem, por volta de 1750, apresentou uma demonstração a respeito. Não trataremos desta propriedade neste trabalho. Para maiores informações veja por exemplo LIMA (1997)

Atividade 2 - Noções primitivas e axiomas

Esta atividade permitirá ao professor introduzir entidades fundamentais (ponto, reta, plano e espaço) como noções primitivas, enunciar os principais postulados que relacionam os conceitos primitivos da geometria e identificar partes da reta, do plano e do espaço.

Dispor uma folha de papel sobre a mesa e imaginar o plano como essa folha de papel que se estende infinitamente em todas as direções. A noção primitiva "ponto" pode ser pensada como a marca deixada pela ponta do lápis ao tocar a folha. O desenho da parte de uma reta é feito com o auxílio de uma régua. Lembre-se que a reta é ilimitada nos dois sentidos.

Utilizando o paralelepípedo construído, peça ao aluno que escolha uma face do mesmo, nomeando os vértices como A, B, C e D. Sobre esta face considere a aresta AB; ele deve marcar os pontos E e F entre A e B , assim pode-se identificar A, B, E e F como colineares ou alinhados e A, B, C e D como coplanares .

Reflita sobre as seguintes perguntas: "Numa reta, bem como fora dela existem quantos pontos?", "Por dois pontos distintos passam quantas retas?", "Num plano bem como fora deles existem quantos pontos?", "Por três pontos distintos passam quantos planos?" e após o aluno se convencer das respostas para tais perguntas, o professor deve deixar claro que essas respostas são formalizadas como postulados ou axiomas:

P1- Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos;

P2- Por dois pontos distintos, passa uma única reta;

P3- Num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos;

P4- Por dois pontos distintos (ou pela reta que eles determinam), passam infinitos planos;

P5- Por três pontos distintos não colineares, passa um único plano;

P6- Se dois pontos distintos pertencem a um plano, então, a reta que eles determinam está contida no plano.

Exercícios

I) Considerando a superfície de uma folha de papel como um plano, faça duas dobras que se cruzam. Agora responda:

A qual dos conceitos primitivos podemos associar cada uma das duas dobras? E o cruzamento das duas dobras?

II)Observe a figura e responda às questões abaixo.

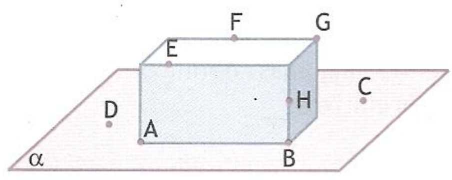


Figura 2 - paralelepípedo

-Existe uma reta que passe por G e C da figura?

-Sob que condições dois pontos são colineares?

-Três pontos são sempre colineares?

-Os pontos A, B, E e H são coplanares? E os pontos A, B e G? E os pontos E, F, G e H?

-Sob que condições três pontos distintos são coplanares?

-Quatro pontos distintos são sempre coplanares?

Atividade 3 - Posições relativas

Esta atividade tem como objetivos rever conceitos de retas concorrentes e paralelas e apresentar o conceito de retas reversas utilizando alguns dos sólidos construídos (cubo, paralelepípedos, prismas e pirâmides); distinguir as posições relativas de duas retas, com base nos critérios de coplanaridade e do número de pontos de interseção; distinguir as posições relativas de reta e plano; distinguir as posições relativas de dois planos.

Figura 3 – Prismas e pirâmides

Considere o paralelepípedo construído e responda a seguinte pergunta: que posições relativas podem ter duas retas no plano e no espaço? O professor deve conduzir a discussão de modo a levar o aluno a concluir que duas retas *r* e *s*, distintas do espaço, estão em um dos casos dados no quadro:

Posição relativa de *r* e *s*	Interseção de *r* e *s*	*r* e *s* são coplanares?
Concorrentes	Exatamente um ponto	Sim
Paralelas	Vazia	Sim
Reversas	Vazia	Não

Responda à seguinte pergunta: "quais as posições relativas entre uma reta e um plano?" O professor deve conduzir a discussão de modo a levar o aluno a concluir que : uma reta *r* e um plano α podem ser:

Posição relativa de *r* e α	Interseção de *r* e *α*
r contida em α	A própria reta *r*
r secante a α	Um único ponto
r paralela a α	Vazia

Responda à seguinte pergunta: "como pode ser a interseção de dois planos distintos?" O professor deve conduzir a discussão de modo a levar o aluno a concluir que: seja α e β dois planos distintos.

Posição relativa de α e β	Interseção de α e β
secantes	uma reta r
paralelos	vazia

Exercícios

I) Uma cadeira de quatro pés, colocada em um piso plano, costuma mancar. Isso ocorre com um banquinho de três pés? Justifique essas questões utilizando os postulados vistos.

II) No cubo construído (figura 4), nomeie cada vértice com uma letra do nosso alfabeto e a seguir identifique:

a) pontos não coplanares

b) pares de retas paralelas

c) pares de retas reversas

d) pares de planos paralelos

e) retas paralelas a planos

f) interseção de dois planos

g) interseção de retas e planos

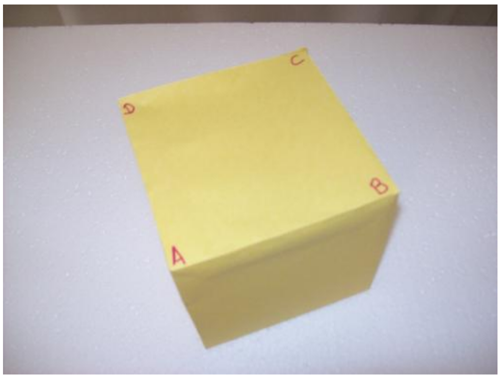


Figura 4 - Cubo

Atividade 4 - Conhecendo os sólidos

Esta atividade se propõe a identificar os elementos (vértices, arestas, geratrizes, caso existam) dos sólidos construídos; identificar paralelepípedos e cubos como prismas particulares, visto que não é possível definir a base.

Pedir aos alunos que coloquem as pirâmides e o cone sobre a folha de isopor (figura 5). Identificar as bases das pirâmides e do cone. Definir o vértice como um ponto fora do plano considerado e a partir daí definir arestas laterais e faces laterais para as pirâmides e geratriz para cone. O professor deve destacar que pirâmides triangulares – ou tetraedros – apresentam a particularidade de qualquer de suas faces pode ser considerada a base da pirâmide. O professor deve destacar também que as pirâmides são casos particulares de cones. Pode-se aproveitar e rever com os alunos as principais características de triângulos e circunferência.

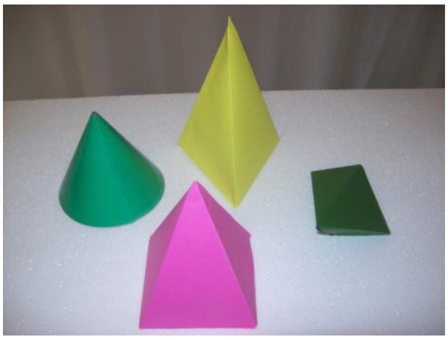


Figura 5 – Pirâmides e cone

Pedir aos alunos que coloquem os prismas construídos e o cilindro sobre a folha de isopor (figura 6). Identifica-se uma base de cada sólido como a face desse sólido que se apóia na folha. É importante mostrar que todos os prismas e o cilindro possuem duas bases paralelas e congruentes (figuras 6, 7 e 8) e que nos prismas todas as faces laterais são paralelogramos.Cubos e paralelepípedos são casos particulares de prismas.

Figura 6- Prismas e cilindro

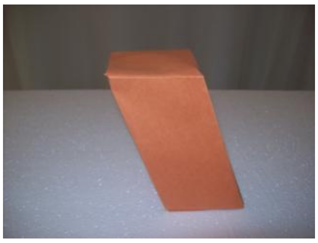


Figura 7- Prisma Oblíquo

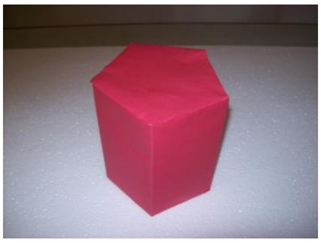


Figura 8- Prisma pentagonal

Este é um bom momento para rever as características dos paralelogramos. Utilizam-se os moldes nº3 (figura 7) e nº 4(figura 8) para comparar as faces laterais.

Figura 9- Cilindro

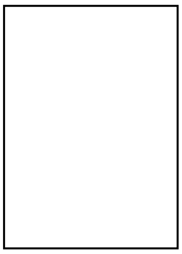
Atividade 5 - Perpendicularismo

Esta atividade tem como objetivo enunciar o critério mínimo para identificação da perpendicularidade de reta em relação a plano e identificar dentre os sólidos construídos aqueles que são retos e os regulares

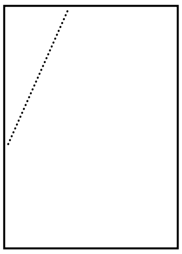
Observação: Na atividade 3 os alunos estudaram as posições relativas entre reta, entre reta e plano e entre planos. Neste item o foco é o conceito de perpendicularismo.

A proposta da atividade abaixo é rever os conceitos de retas concorrentes e retas perpendiculares.

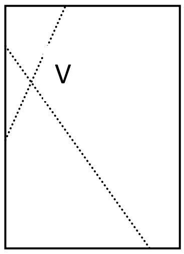
Retas concorrentes:



Posição inicial da folha



Após a 1ª dobra

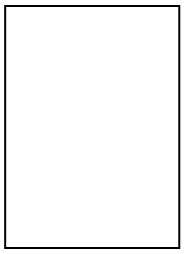


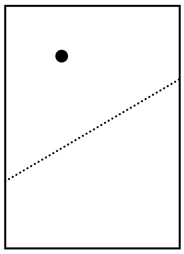
Após a 2ª dobra

Resultado: duas retas concorrentes no ponto V

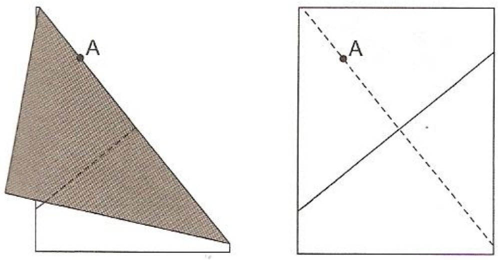
Retas perpendiculares:

Posição inicial da folha   Após a 1º dobra e com a marcação de um ponto





Faça uma dobradura que passa pelo ponto e que leve a reta (formada pela primeira dobra) sobre si mesma (figura abaixo).



Destaca-se o 1º vinco de cor azul e o 2º de cor vermelha. O 2º é perpendicular ao primeiro.

Disponível em http://crv.educacao.mg.gov.br[4]. Acesso em:7 jan.2013.

Observação: Definir retas perpendiculares como um caso particular de retas ortogonais.

Considere a figura abaixo (figura 10).

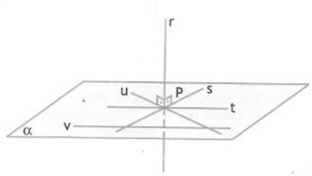


Figura 10 – Reta perpendicular ao plano

Qual a posição relativa entre *r* e α? Qual a posição entre r e as retas *s, t, u* e *v*? A resposta esperada é que *r* é secante ao plano, é ortogonal e perpendicular a *s, t* e *u*, ortogonal, mas não perpendicular a *v*. O professor deve chamar a atenção de que

[4] Centro de Referência Virtual do Professor

“uma reta *r* é perpendicular a um plano α quando *r* é ortogonal a todas as retas contidas em α”.

Utilizando o paralelepípedo construído e a folha de isopor como o plano que contém uma das faces, podemos construir a figura abaixo;

Figura 11 - Paralelepípedo

A partir da observação da mesma, pedir aos alunos que respondam às questões: “qual a posição relativa entre a reta que passa por *BD* e cada uma das arestas contidas no plano da folha de isopor?”, “qual a posição relativa entre a reta que passa por *BD* e o plano da folha?”

Considerando as respostas e fazendo as intervenções necessárias, o professor pode enunciar a condição mínima para que se comprove que uma reta é perpendicular a um plano. “Se uma reta *r*, secante a um plano, é perpendicular a duas retas do plano, concorrentes entre si, então *r* é perpendicular ao plano”.

Com a definição de reta perpendicular a um plano, pode-se definir o que é um sólido reto e um sólido regular e, ainda, identificá-los dentre os sólidos construídos.

Exercício:

Identifique, na sala de aula, elementos concretos que representam parte de retas:

a) paralelas

b) concorrentes oblíquas

c) concorrentes perpendiculares

d) ortogonais

e) reversas ortogonais

Atividade 6 - Projeções

O objetivo desta atividade é identificar projeções de figuras geométricas plano.

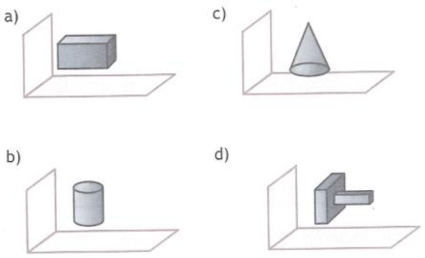
Inicialmente enuncia-se o teorema: “Por um ponto do espaço, pertencente ou não a um plano α, pode-se traçar uma única reta perpendicular a α” e logo após define-se projeção ortogonal. É interessante fazer perguntas do tipo: A projeção de uma figura em um plano depende de sua posição, em relação ao plano? Por quê? Há alguma figura cuja projeção em um plano independa de sua posição em relação a ele?

Ressaltar que uma ou mais projeções ortogonais são frequentemente utilizadas como forma de representar figuras espaciais no plano.

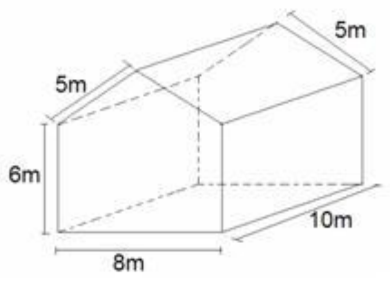
Exercícios

O problema proposto a seguir encontra-se em RUBIÓ (2012,p.39)

I) Nas figuras a seguir, alguns sólidos estão em frente a uma parede e acima do piso de uma sala. As partes planas dos sólidos são paralelas ou perpendiculares à parede e ao piso? Desenhe, em cada caso, as projeções dos sólidos na parede e no piso.

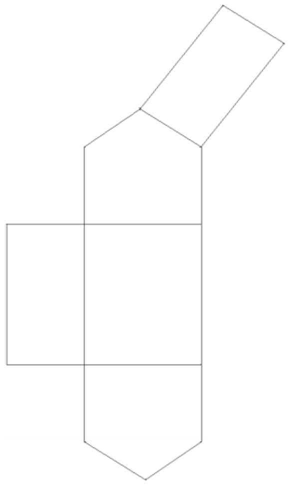


II) O galpão de uma fábrica pode ser representado por um prisma reto pentagonal, conforme a figura a seguir.



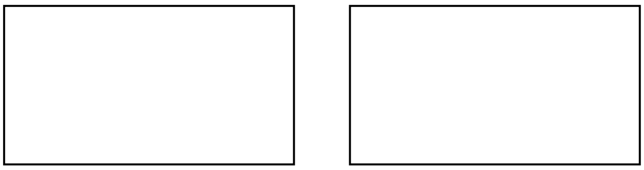
Planificar a superfície desse prisma significa representá-la em um mesmo plano, de modo que cada face tenha pelo menos um lado em comum com alguma outra face.

A figura ao lado é parte dessa planificação. COMPLETE- A, indicando as medidas dos lados das faces em metros.



O problema proposto a seguir encontra-se em LIMA (2007,p.205)

III) A figura abaixo representa as vistas frontal e superior de um sólido. Que sólidos vocês conseguem imaginar que tenham essas vistas? Para cada caso, forneça a vista de perfil



Atividade 7 - Planos perpendiculares

Nesta atividade deve-se distinguir as posições relativas entre dois planos; identificar o critério mínimo para identificação da perpendicularidade entre dois planos e enunciar o teorema “Dois planos secantes são perpendiculares, se, e somente se, existir uma reta contida em um deles que seja perpendicular ao outro”.

Inicialmente reveja o que foi aprendido na atividade 3, sobre posições relativas entre planos. O objetivo desta atividade é focar em planos perpendiculares. Os sólidos da figura 14 poderão ser usados para a identificação de planos paralelos e secantes.

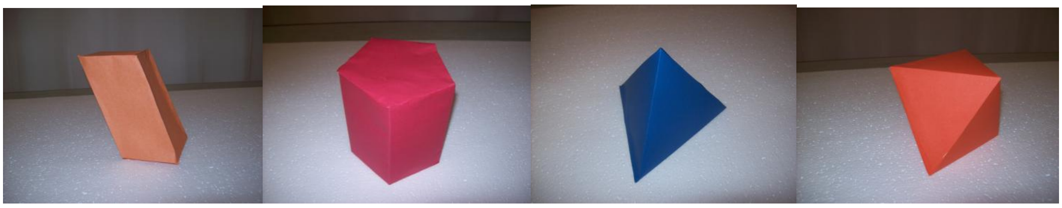


Figura 12 - Posições relativas entre planos

Na figura 15, pedir aos alunos que identifiquem todos os pares de planos paralelos e todos os pares de planos secantes. A partir de perguntas do tipo “qual a interseção entre os planos *ADHE* e *ADCB*?”, “qual a posição relativa entre a reta *AE*, contida no plano *ADHE* e o plano *ADCB*?” concluir que “dois planos secantes são perpendiculares, se, e somente se, existir uma reta contida em um deles que seja perpendicular ao outro”.

Mostrar que os planos ABFE e *EFJI* são secantes, mas não são perpendiculares.

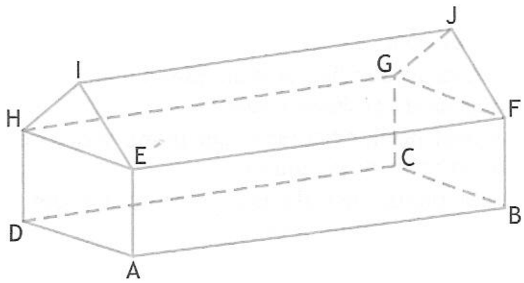


Figura 13 - Sólido

Atividade 8 - Distâncias

Esta atividade tem como objetivo colocar em prática os conceitos desenvolvidos nas seções anteriores para estudar problemas métricos no espaço, envolvendo cálculo de distâncias.

Inicialmente deve-se estabelecer três princípios básicos, relativos ao conceito de distância no espaço:

- A distância entre dois pontos *P* e *Q* é, por definição, a medida do segmento $\overline{PQ}$.

- Quando duas figuras geométricas têm pelo menos um ponto comum, a distância entre elas é igual a zero.

- Quando duas figuras geométricas não têm ponto comum, a distância entre elas é a medida do menor segmento cujos extremos são um ponto de uma e um ponto de outra.

Estabelecidos os princípios acima, pode-se partir para o cálculo das distâncias. É necessário rever com os alunos o Teorema de Pitágoras.

Para a distância entre dois pontos podemos usar como exemplo o cálculo da diagonal do paralelepípedo e da diagonal do cubo.

Para a distância entre ponto e plano, pode ser usado como exemplo o cálculo de uma altura de um sólido reto como pirâmide ou cone ou ainda, calcular a distância entre um vértice e uma aresta de um paralelepípedo.

Exercícios:

I)Pegue a folha de isopor, os palitos e os canudinhos. Quadricule a folha com uma medida de 2 cm de lado. Revista cada palito com um canudinho. É interessante que se tenha pelo menos 4 palitos revestidos da mesma cor. Adote cada lado do quadriculado como 1 unidade.
Construa utilizando o plano quadriculado como uma base, um cubo de lado 5 unidades. Obtenha as possíveis medidas da distância entre dois vértices distintos quaisquer do cubo.

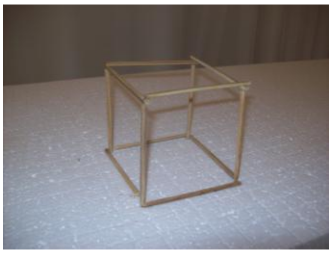


Figura 14 - Aresta

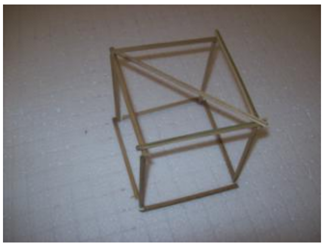


Figura 15 - Diagonal da face

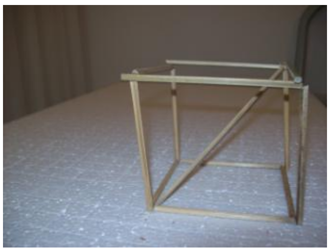


Figura 16 - Diagonal do cubo

II) Em um tetraedro regular *ABCD* de aresta 4 cm, qual é distância do vértice *A* ao plano *BCD*?

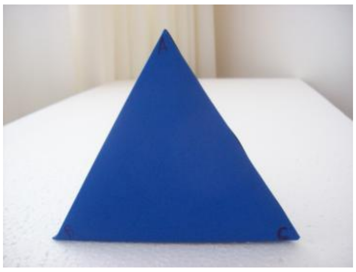


Figura 17-Tetraedro

Observação: Questões que envolvem pirâmides regulares podem gerar dificuldades devido à necessidade do conhecimento do raio da circunferência que circunscreve a base desta figura. Acredito que esse assunto pode ser tratado mais tarde, junto com cálculo de áreas e volumes, porém, dependendo do desenvolvimento da turma, exercícios como o que será apresentado abaixo podem enriquecer a aula.

III) Um triângulo equilátero de lado 6 cm está inscrito em uma circunferência. Encontre o raio da circunferência.

Atividade 9 - Ângulos

O objetivo desta atividade é identificar ângulos entre retas, entre planos entre retas e planos.

Pedir aos alunos identificarem no cubo construído, os vértices como indicado na figura abaixo.

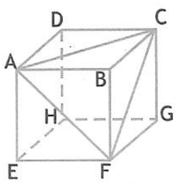


Figura 18 - Cubo

A partir daí encontre o ângulo formado pelos pares de retas indicados.

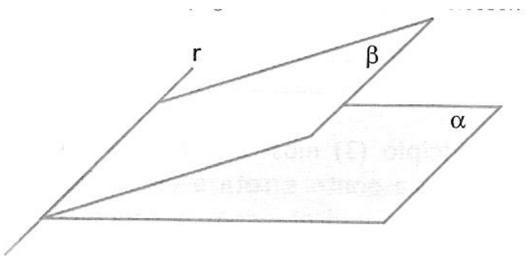
- $\overleftrightarrow{AB}\, e\, \overleftrightarrow{BF}$
- $\overleftrightarrow{AB}\, e\, \overleftrightarrow{AF}$

- $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AF}$
- $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AF}$
- $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{EF}$
- $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{CG}$

Identifique, ainda, os casos em que as retas são perpendiculares ou ortogonais.

O problema proposto a seguir encontra-se em RUBIÓ (2012,p.42)

II) Na figura a seguir, o plano α representa uma superfície horizontal. O plano β representa uma ladeira. Ela começa na reta *r* e forma, com α, ângulo de 25°. Essa é a inclinação da rampa.

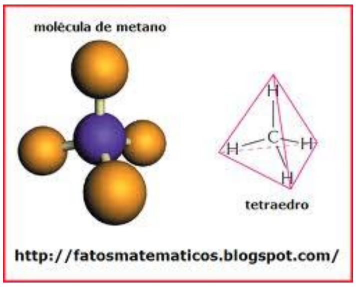


Uma pessoa parte da reta *r* e faz um percurso retilíneo sobre a rampa. O ângulo entre a linha que representa esse percurso e o plano α é o declive desse percurso.

- Em que tipo de percurso esse declive é maior?
- Quanto mede o declive, nesse caso?
- Que tipo de percurso é mais cansativo quando uma pessoa sobe uma rampa?
- Estradas que levam ao alto de uma montanha são construídas em ziguezague. Uma boiada, quando sobe um morro, o faz em ziguezague. Relacione esses dois fatos com o item anterior.

O problema proposto a seguir encontra-se LIMA(2007,p.228)

IV) As moléculas de metano (CH_4) têm formato de um tetraedro regular, com um átomo de hidrogênio em cada vértice, cada um deles ligado ao átomo de carbono no centro do tetraedro. Calcule o ângulo formado por duas dessas ligações.



Atividade 10 - A esfera

A esfera de centro O e raio R é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a O é igual a R. Até aqui ela não foi tratada nem apresentada como as outras figuras sólidas, porém, com o cálculo de distâncias, podemos introduzi-la utilizando algumas situações. São elas:

- Os alunos podem calcular as 4 diagonais do cubo e concluir que elas se cortam no centro do mesmo. Esta é uma oportunidade para comentar sobre esferas circunscritas ao cubo(o centro equidista de todos os vértice) e inscritas (o centro equidista de todas as faces) no cubo.
- Utilizando o paralelepípedo e as suas diagonais podemos verificar a existência da esfera circunscrita (cujo raio é a metade da diagonal) e questionar a existência da esfera inscrita.
- No cilindro de base circular verificar que a existência da esfera inscrita só ocorre quando sua altura è igual ao diâmetro da base, ou seja, quando ele é equilátero.
- O cone reto de base circular sempre possui esferas inscritas e circunscritas.

3 Considerações finais

Ao final da sequência de atividades apresentada, o aluno está preparado para a continuidade do estudo da geometria espacial: estudo dos poliedros, cálculo de áreas e volumes dos sólidos.

Ele terá ainda desenvolvido as seguintes habilidades citadas no CBC de Matemática :

- Identificar os vértices, as arestas e as faces de um prisma

-Resolver problemas que envolvam o cálculo da diagonal de um paralelepípedo retângulo.
-Identificar os elementos de uma pirâmide e de um cone.
-Identificar os elementos de uma esfera e de uma bola.
-Reconhecer a planificação de figuras tridimensionais usuais: cubo, paralelepípedo retangular, prismas retos, pirâmide, cilindro e cone.
-Reconhecer posições relativas entre retas: paralelas, concorrentes, perpendiculares e reversas.
-Reconhecer posições relativas entre retas e planos: concorrentes, perpendiculares e paralelos.
-Reconhecer posições relativas entre planos: paralelos, perpendiculares e concorrentes.

Além disso, vale lembrar que os próprios professores devem se voltar para o contexto do aluno ao prepararem suas aulas de geometria, visando a promoção de um aprendizado interligado tanto as diversas áreas do conhecimento humano como a própria matemática; pois, a falta deste contexto impossibilita o desenvolvimento total da sua intelectualidade matemática.

Afinal

> *(...) numa sociedade cada vez mais complexa e dinâmica e que depende tão completamente da Matemática e da Ciência, acredita-se que o professor é uma figura central. Logo, ele precisa refletir sobre a concepção de escola, como instituição que transmite o conhecimento e como local que ajuda o aluno a desenvolver seu potencial, ensinando-o a pensar e a descobrir caminhos para transformar o mundo em que vive*
> *(TEIXEIRA FILHO, 2002, p. 23).}*

4 Referências

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

Lima, Elon Lages et al. **A Matemática do ensino médio** . Rio de janeiro: SBM, 1997. V.2

PROENÇA, M. C. de. **Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Bauru-SP, 2008. 202p

RUBIÓ, Angel Panadés. **Matemática: 2ª. série – Ensino Médio**. Belo Horizonte: Editora Educacional, 2012.

S. FILHO, J. B. de; BRITO, K. L. V. de. **O aprendizado da geometria contextualizada no ensino médio**. Monografia de Especialização em Educação Matemática. Instituto de Ensino Superior de Goiás. Formosa, 2006. 86 p.

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS. **Conteúdo Básico Comum** – Matemática (2007). Educação Básica

TEIXEIRA FILHO, D. M. **O aprendizado da geometria no ensino médio origens de dificuldades e propostas alternativas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2002. 159p.

5 Agradecimento

A DEUS, por me iluminar nos momentos difíceis.

Especialmente ao professor Francinildo pela orientação competente, por sua dedicação e, acima de tudo, por acreditar na conclusão deste trabalho.

Ao professor Raposo pela atenção nos momentos de dificuldades.

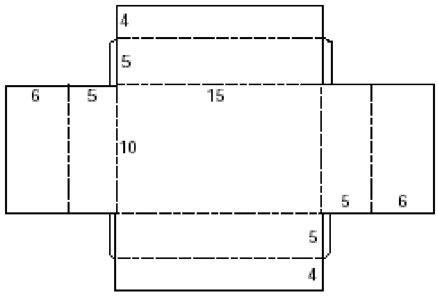
Aos colegas de mestrado pelo convívio, amizade e ajuda. Em especial aos amigos Alcione pela parceria, dedicação e empenho sobretudo no momento de confecção deste trabalho e Diogo pela parceria e cumplicidade nos momentos de estudo.

À minha família pela confiança, amor e incentivo.

Por fim, à CAPES, pelo fornecimento da bolsa de estudos que garantiu o sustento necessário à realização do curso.

6 Anexo 1 - Exercícios

1) (ENEM) Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.

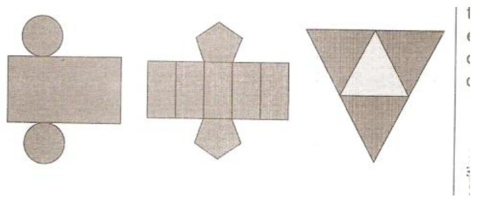


Os sólidos são fabricados nas formas de

I. Um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5cm.
II. Um cubo de aresta 2 cm.
III. Uma esfera de raio 1,5cm.
IV. Um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3cm e 4cm.
V. Um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1cm. O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos

A) I, II e III. B) I, II e V. C) I, II, IV e V. D) II, III, IV e V. E) III, IV e V.

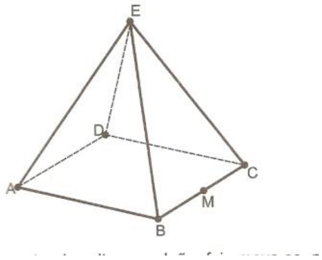
2) (ENEM) Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



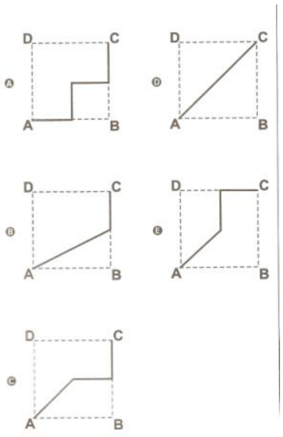
Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?
a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
c) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.

e) Cilindro, prisma e tronco de cone

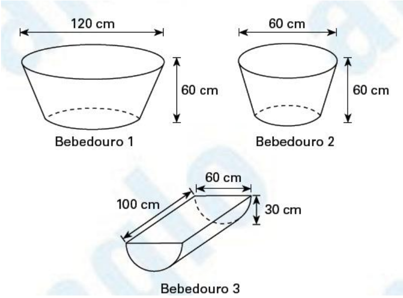
3) (ENEM) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



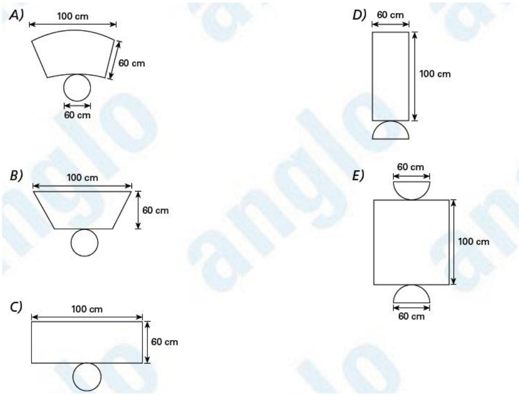
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha RETA, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, depois de M a C. O desenho que Bruno deverá fazer é



4) (ENEM) Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.



Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?



5) (ENEM) Para confeccionar, em madeira, um cesto de lixo que comporá o ambiente decorativo de uma sala de aula, um marceneiro utilizará, para as faces laterais, retângulos e trapézios isósceles e, para o fundo, um quadrilátero, com os lados de mesma medida e ângulos retos. Qual das figuras representa o formato de um cesto que possui as características estabelecidas?

a) 

b) 

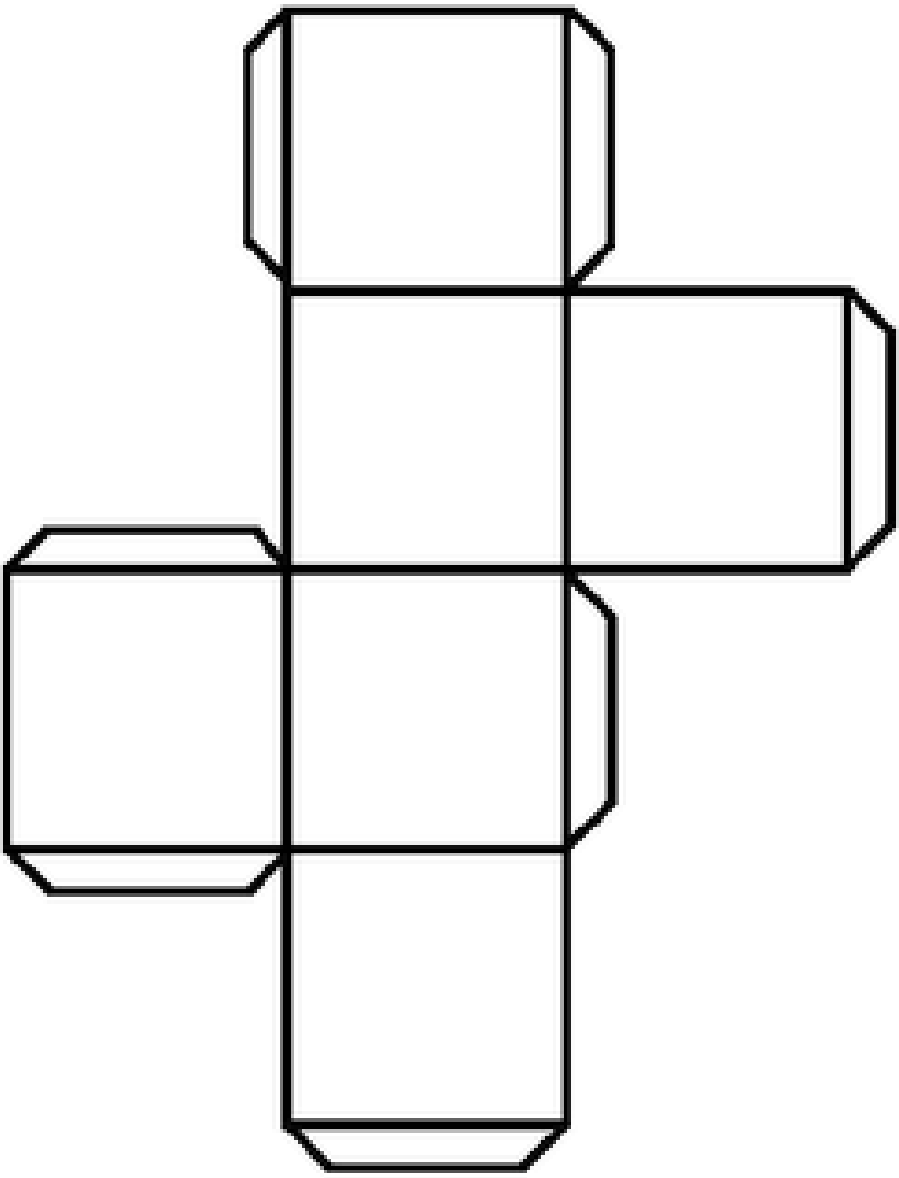
c) 

d) 

e) 

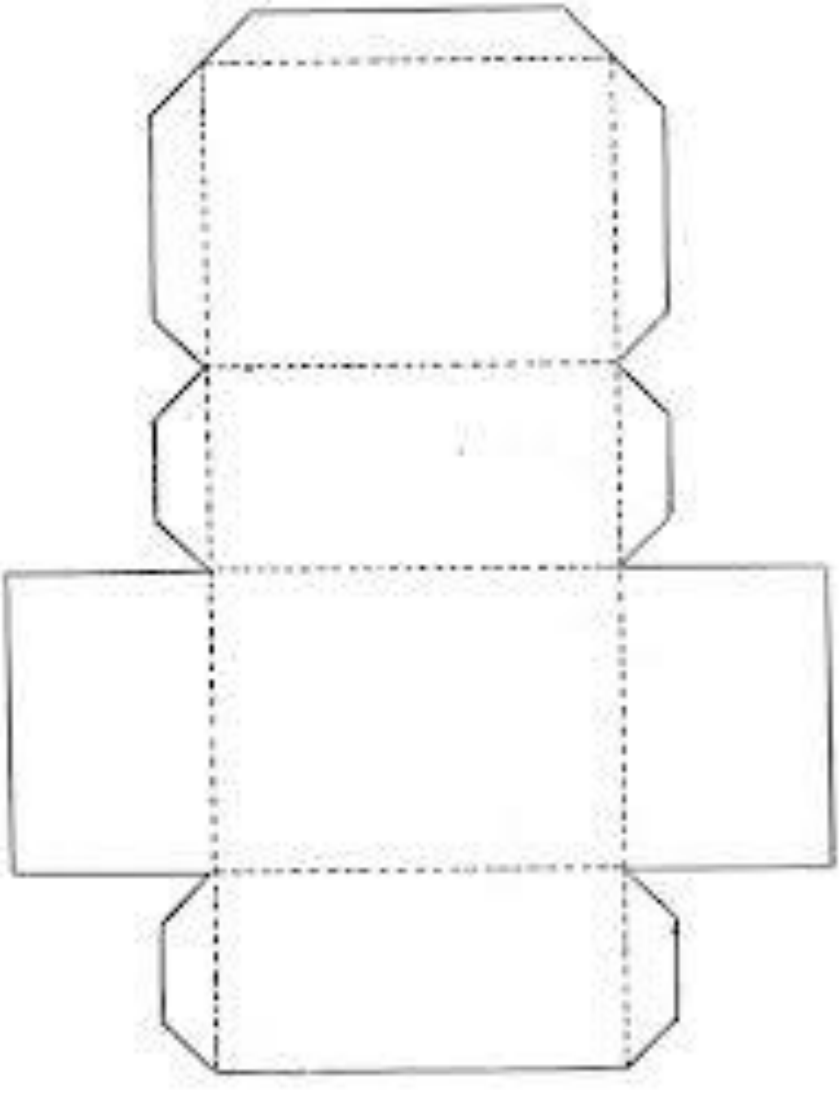
7 Anexo 2 - Planificações

Cubo



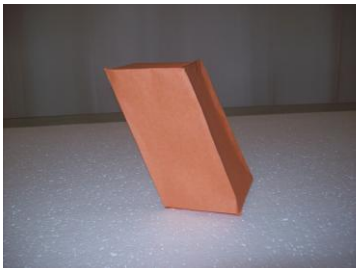
Molde nº 1

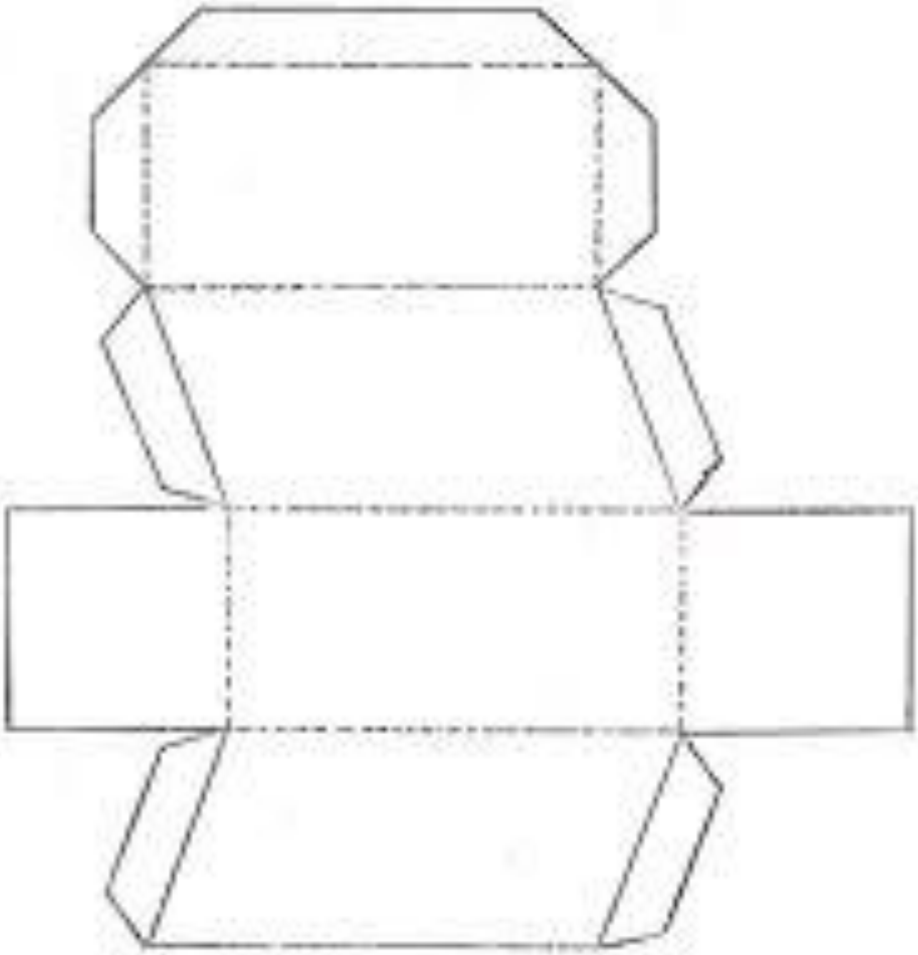
Paralelepípedo reto retângulo



Molde nº 2

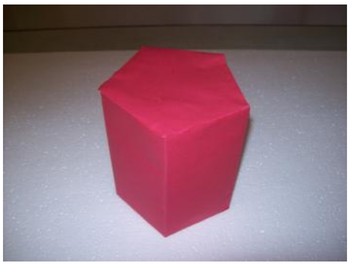
Prisma oblíquo de base quadrada

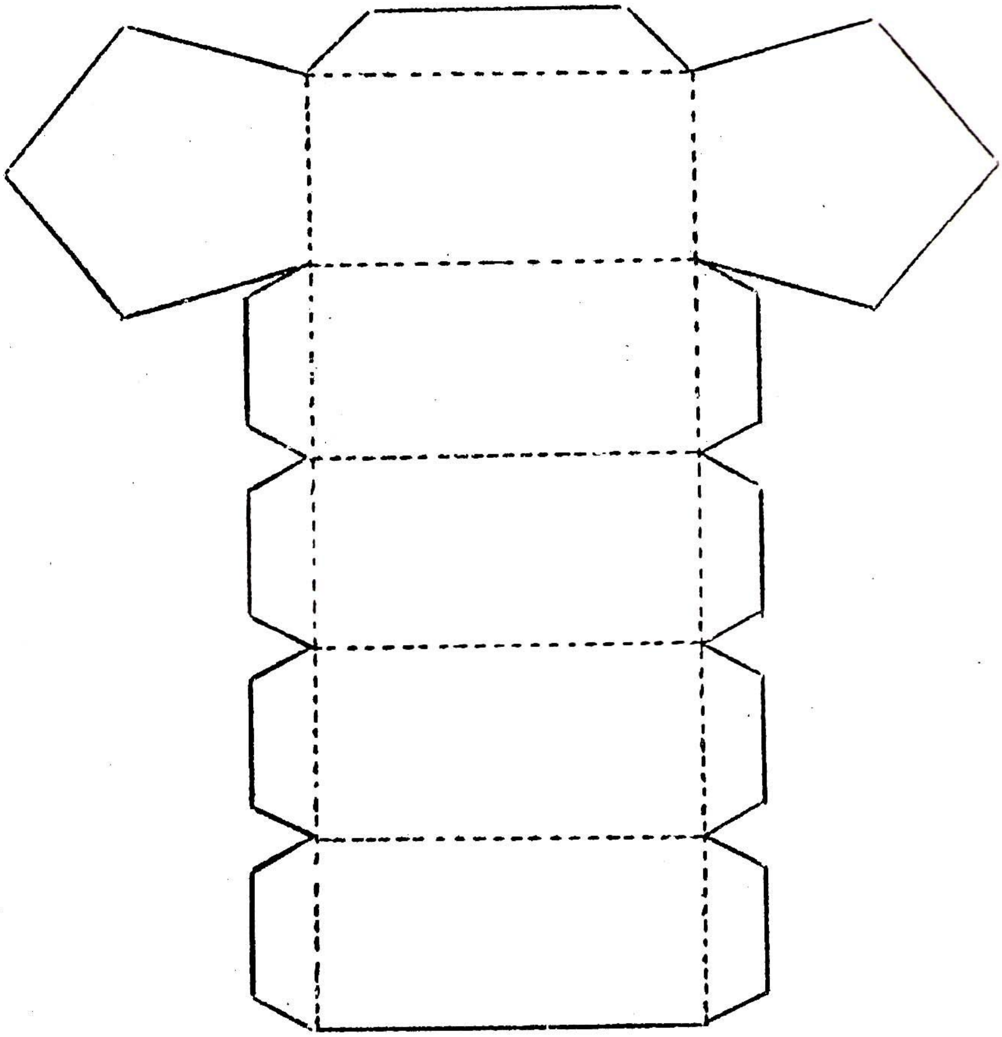




Molde nº 3

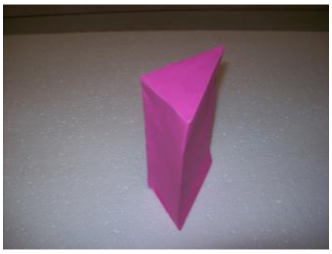
Prisma reto regular de base pentagonal

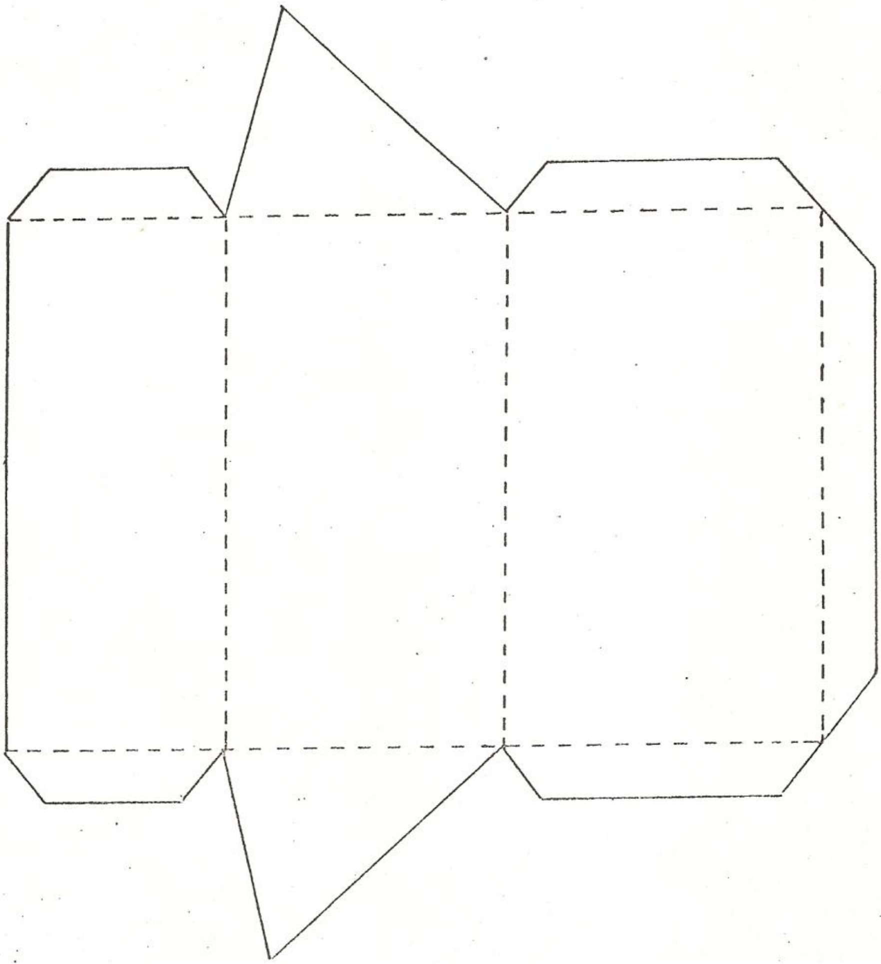




Molde nº 4

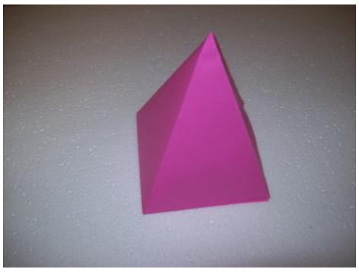
Prisma reto de base triangular

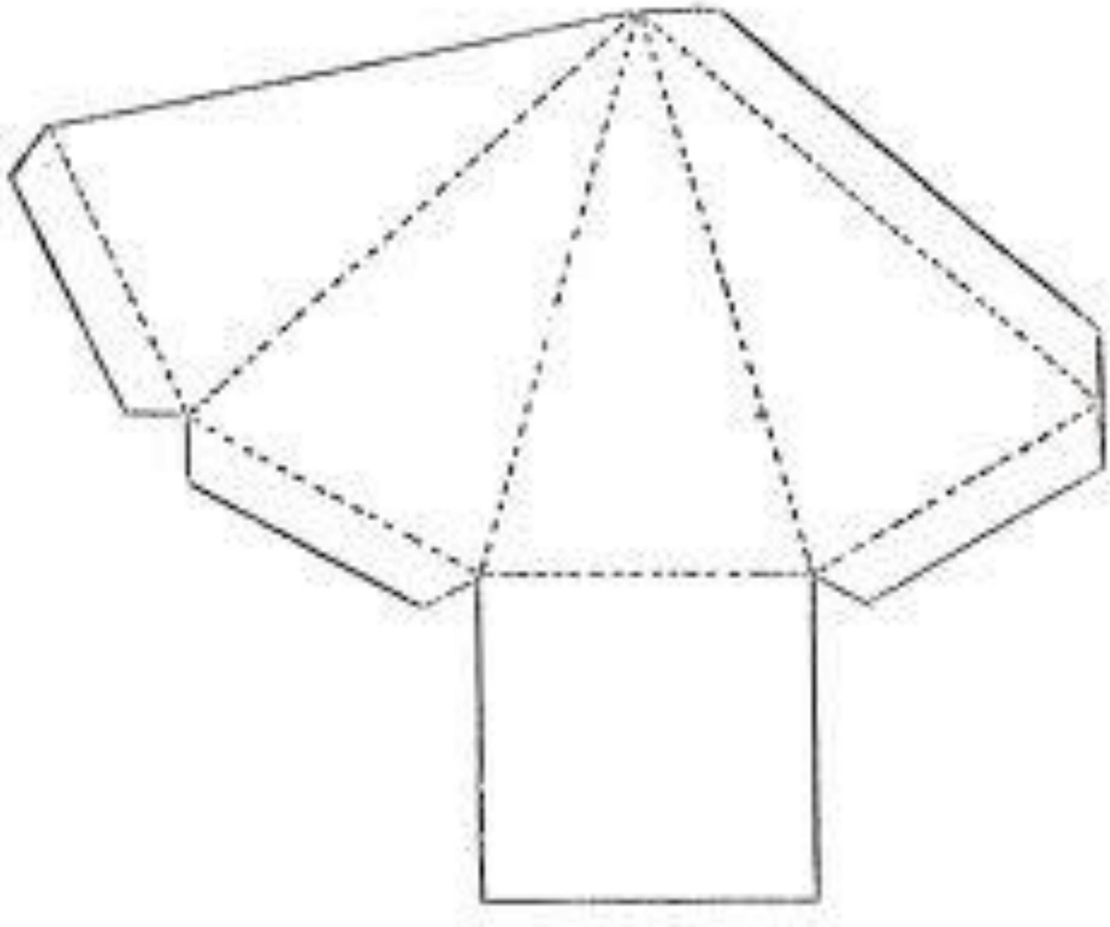




Molde nº 5

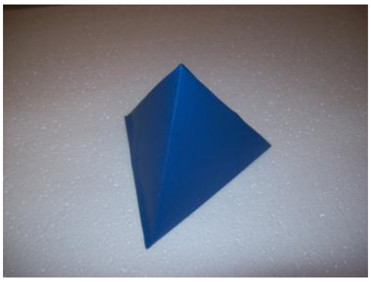
Pirâmide regular quadrangular

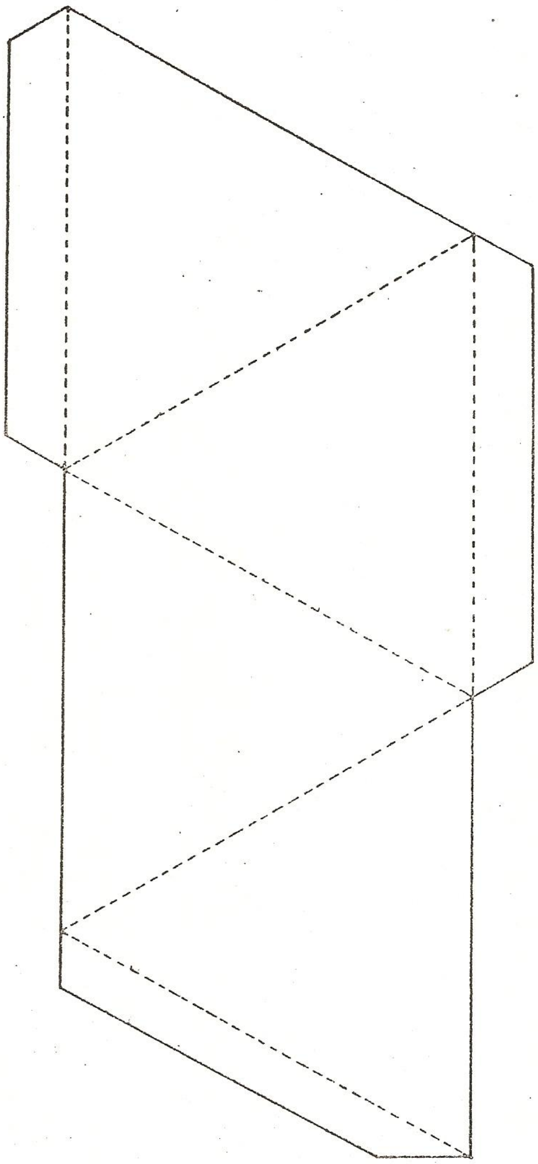




Molde nº 6

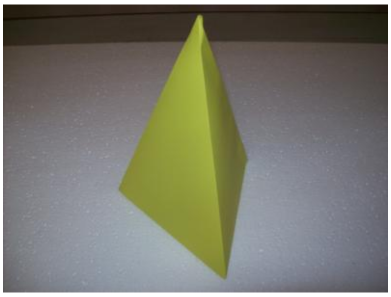
Tetraedro regular

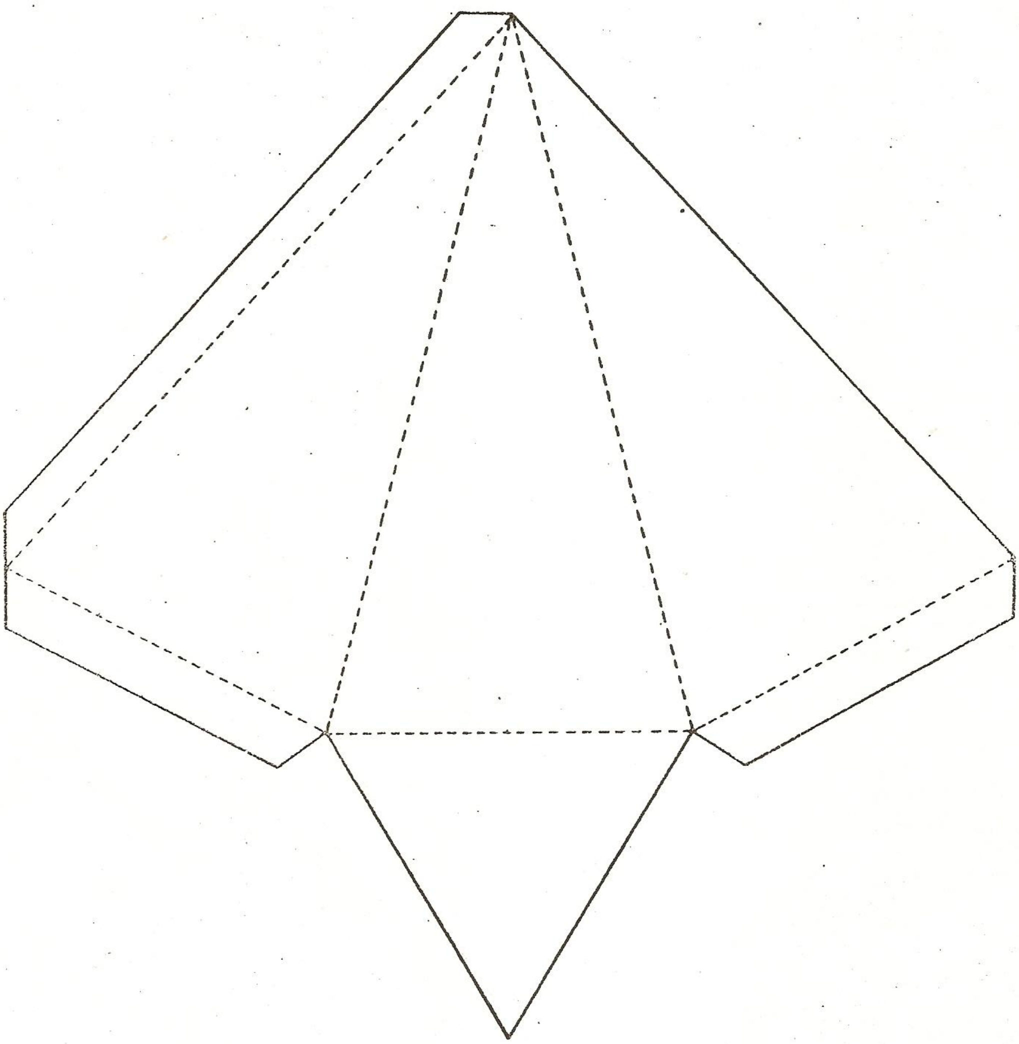




Molde nº 7

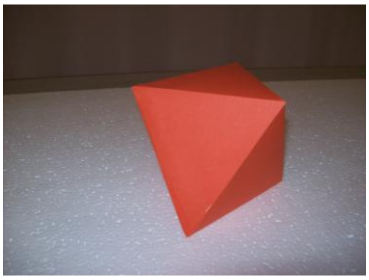
Pirâmide reta regular de base triangular

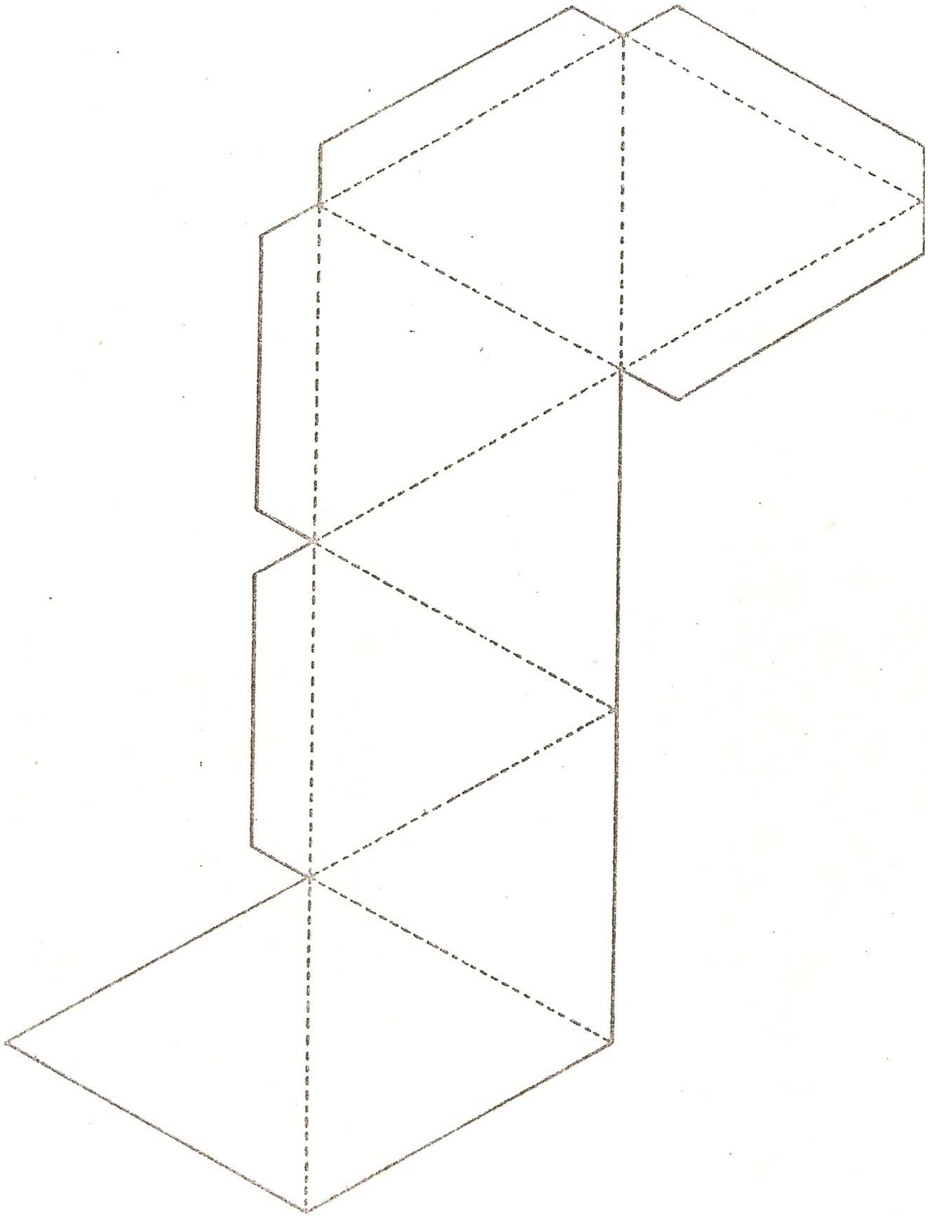




Molde nº 8

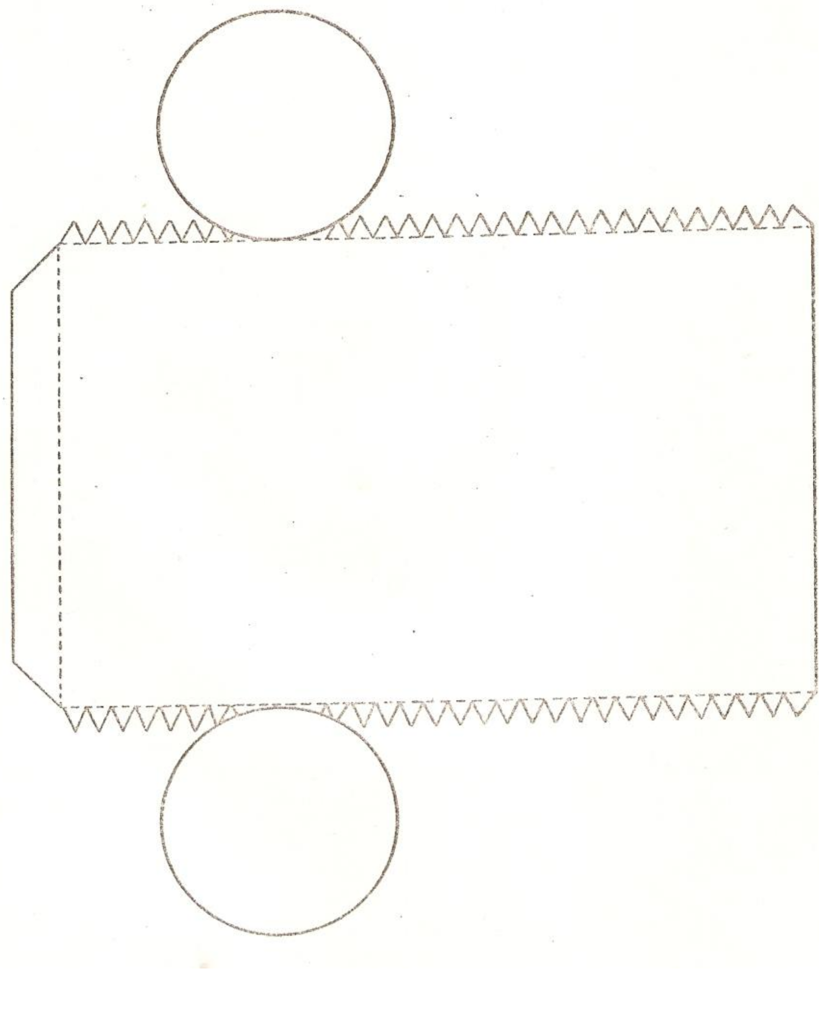
Octaedro regular





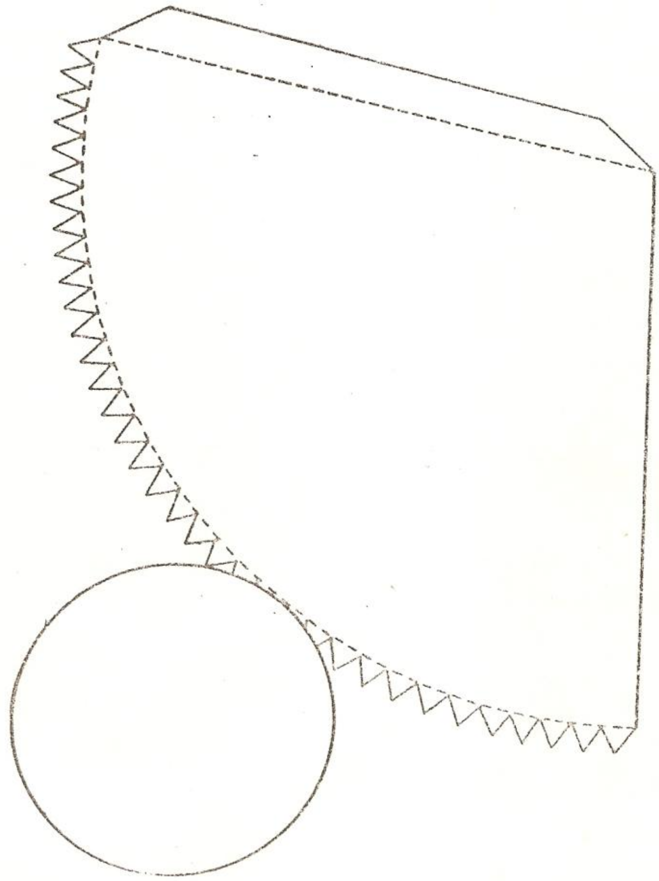
Molde nº 9

Cilindro



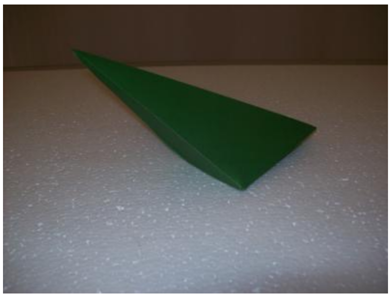
Molde nº 10

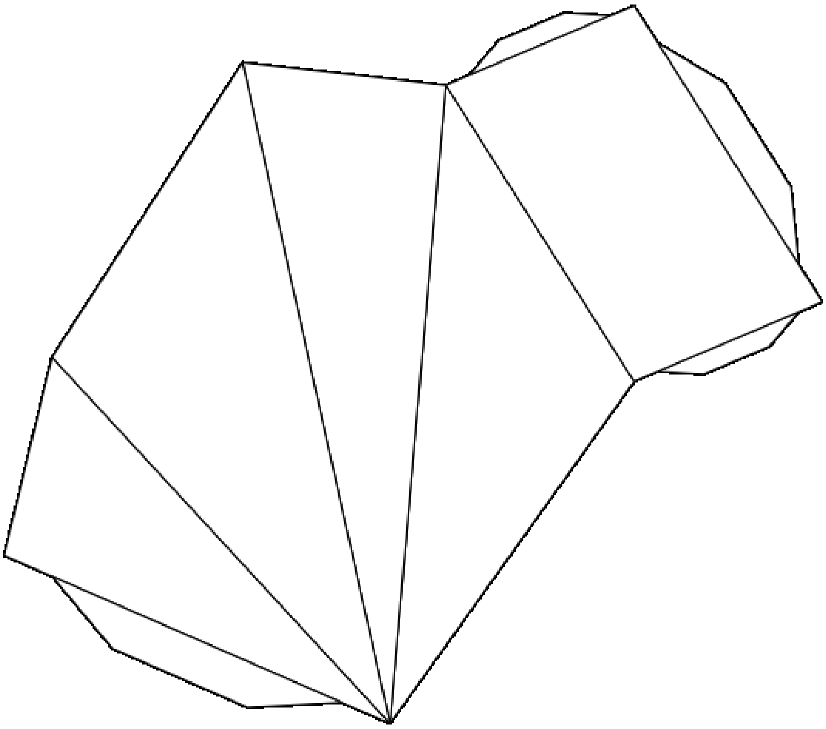
Cone



Molde nº 11

Pirâmide oblíqua





Molde nº 12