UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS - REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL EM MATEMÁTICA

JOSÉ FÁBIO XAVIER

ANÁLISE DA FUNÇÃO QUADRÁTICA, COM ÊNFASE EM SEUS COEFICIENTES, VIA GEOGEBRA

CATALÃO - GO, 2016

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: [x] Dissertação [ ] Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: JOSÉ FÁBIO XAVIER

Título do trabalho: ANÁLISE DA FUNÇÃO QUADRÁTICA, COM ÊNFASE EM SEUS COEFICIENTES, VIA GEOGEBRA

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 07 / 04 / 2017

JOSÉ FÁBIO XAVIER

ANÁLISE DA FUNÇÃO QUADRÁTICA, COM ÊNFASE EM SEUS COEFICIENTES, VIA GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre Matemática.

Orientador:
PAULO ROBERTO BERGAMASCHI

CATALÃO - GO

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Xavier, José Fábio
ANÁLISE DA FUNÇÃO QUADRÁTICA, COM ÊNFASE EM SEUS COEFICIENTES, VIA GEOGEBRA [manuscrito] / José Fábio Xavier. - 2016.
0 64 f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Catalão, 2016.
Bibliografia.

1. Educação Básica. 2. Função Quadrática. 3. Geogebra. I. Bergamaschi, Paulo Roberto, orient. II. Título.

CDU 51

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno José Fábio Xavier. Aos trinta e um dias do mês de outubro do ano de dois mil e dezesseis, (31/10/2016), às 14h00min, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, **Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi – Orientador, Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro e Prof. Dr. Manoel Moraes Junqueira** para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada na Sala de Reuniões - Centro Integrado de Pesquisa, do Câmpus I, da Regional Catalão, procederem a avaliação da defesa do trabalho intitulado: **"Análise da Função Quadrática, com Ênfase em seus Coeficientes, Via Geogebra"**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de José Fábio Xavier, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da banca, Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em quarenta minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi APROVADO por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. Cumpridas as formalidades de pauta, às 15h50min a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu Elizângela Maria Marques Nahas, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

Prof. Dr. Manoel Moraes Junqueira
Departamento de Matemática/UEG/Morrinhos/GO

***JOSÉ FÁBIO XAVIER**, Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás - UEG, especialista em Matemática, é também Bacharel e Mestre em Administração pela Fundação Pedro Leopoldo. Professor a 18 anos e cruzeirense apaixonado.*

Aos meus familiares, especialmente à minha mãe Maria Neibe (minha super-heroína), à minha irmã Luana e ao meu sobrinho Ítalo , que sempre me deram força, coragem e constante apoio para seguir em busca de meus objetivos, e aos meus filhos de santo, que sempre esteviveram ao meu lado me incentivando.

Agradecimentos

A Deus, causa primaria de tudo. À Osum, senhora de minha vida. À Airá, a justiça que nunca me desampara. Ao senhor Tiriri Lonan, por sempre me mostrar onde pisar.

À minha mãe, Maria Neibe Xavier de Souza, pelo amor incondicional e pela paciência. Por ter feito o possível e o impossível para me oferecer a oportunidade de estudar, acreditando e respeitando as minhas decisões e nunca deixando que as dificuldades acabassem com os meus sonhos. Serei imensamente grato;

À minha irmã Luana, que mesmo inconscientemente me incentivou, sendo além de irmã, amiga, a correr atrás dos meus objetivos. Agradeço de coração;

Ao meu sobrinho Ítalo, que me fez entender que conseguimos amar alguém mais que tudo nesse mundo. Minha vida não teria sentido se você não existisse;

Ao meu orientador, Prof. Paulo Roberto Bergamaschi, o Paulinho, pelo empenho, paciência e credibilidade. Obrigado por tudo;

À CAPES pela ajuda financeira, que muito contribui para o desenvolvimento da pesquisa no país.

À todos os meus familiares, tios, tias e primos que torceram e acreditaram na conclusão deste curso. Fico muito grato;

Ao meu companheiro de viagem Davi, que com o passar do tempo tornou-se amigo e afilhado. Sou um grande fã de sua inteligência.

Claudinha e Gil vocês serão sempre inesquecíveis. Amo-os muito.

Aos amigos da turma pelas agradáveis lembranças que serão eternamente guardadas no meu coração. Muito obrigado.

“Acredito que todos nascemos para sermos super-herois, mas muita gente ainda insiste em ficar com a kriptonita no bolso. Meus pais, meus super-herois favoritos, me ensinaram o que era a kriptonita e como lidar com ela, não deixando-a tão perto a ponto de roubar energia e nem tão longe a ponto de eu esquecê-la.”

Leila Navarro

RESUMO

XAVIER, J. F. *ANÁLISE DA FUNÇÃO QUADRÁTICA, COM ÊNFASE EM SEUS COEFICIENTES, VIA GEOGEBRA*. 2016. 62 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, Catalão - GO.

O Ensino Médio é a fase final dos jovens na Educação Básica, e nesta idade os mesmos estão passando por transformações em suas vidas que serão enormes. Vivem numa sociedade altamente tecnológica e estudam numa escola com formato do século passado. Neste trabalho o foco foi em, ao abordar o tema de Funções Quadráticas, visto na primeira série do Ensino Médio, usar a tecnologia como elemento motivador do processo de ensino/aprendizagem. Durante a leitura do texto, é possível notar a Educação como processo contínuo e formativo. Passa-se pela História da equação do segundo grau, e seus métodos de resolução. É abordado o contexto do uso das tecnologias como recurso computacional para o ensino de funções. Descreve-se e demonstra-se os teoremas e proposições referentes à parábola, que é o gráfico da função quadrática. A abordagem ocorre também dentro do GeoGebra, um ambiente de Geometria Dinâmica. É possível verificar e analisar alguns aspectos que constituem o gráfico da função quadrática já aplicadas ao uso do software. Conclui-se entre outras coisas, que o software por si só não resolve todos os problemas, mas faz com que a aproximação das verdades torne-se mais "visualizáveis", contudo reforça-se a necessidade das demonstrações para confirmação das expectativas geradas.

Palavras-chaves: Educação Básica, Função quadrática, GeoGebra.

ABSTRACT

XAVIER, J. F. *ANÁLISE DA FUNÇÃO QUADRÁTICA, COM ÊNFASE EM SEUS COEFICIENTES, VIA GEOGEBRA*. 2016. 62 f. Master Thesis in Mathematics – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, Catalão - GO.

The high school is the final phase of young people in basic education, and at this age are going through the same changes in their lives that will be huge. They live in a highly technological society and study in a school in the last century format. In this work the focus was on when addressing the issue of Quadratic Functions, seen in the first year of high school, to use technology as a motivating element of the teaching and learning process. In the lecture of this text, it is possible to see education as continuous and formative process. Pass by the history of the quadratic equation, and its resolution methods. It addressed the context of the use of technologies such as computational resource for teaching functions. It describes and demonstrates the theorems and proposals concerning the parabola, which is the graph of the quadratic function. In the last chapter the approach occurs within the dynamic geometry environment, GeoGebra. In this chapter you can check the analysis of all the points that make up the quadratic function graphic already applied to the use of the software. It was concluded among other things, the software itself will not solve all problems, but it makes the approach of the truths become more "viewable", however, it reinforces the need for confirmation of statements from expectations.

Keywords: High School, Quadratic Function, GeoGebra.

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

Com o advento do uso das novas tecnologias no contexto educacional problemas matemáticos que antes apresentavam soluções bem difíceis passam a ter soluções rápidas e diretas, com uma facilidade tal que qualquer criança apenas manipulando corretamente o uso dos comandos pode conhecer as soluções com uma rapidez surpreendente. Isso, contudo, não pode ser, em nenhum momento, fato para garantir que a criança domina aqueles conceitos matemáticos propostos.

Giraldo, Caetano e Matos (2013, p. 15) afirmam que o "uso das novas tecnologias para o ensino da matemática tem alterado, nos últimos tempos seu foco", deixam de analisar somente os efeitos benéficos para a aprendizagem e passam para uma análise de como usar as tecnologias para que os efeitos benéficos sejam potencializados. Deve-se pensar que ao concluir uma etapa de estudos o objeto de pesquisa tenha uma relação direta com o trabalho e as expectativas propostas pelo pesquisador.

Um dos tópicos que devem ser estudados no ensino básico, são as funções polinomiais, das quais este trabalho dará um foco nas funções quadráticas, em suas raízes, seus gráficos e também na importância dos coeficientes que compõem a equação na sua forma mais completa.

Surge daí a pergunta que se busca resolver neste trabalho: como usar o GeoGebra para trabalhar o tópico de Função Quadrática com ênfase na análise de seus coeficientes?

Assim o objetivo deste trabalho é fazer uma análise da função quadrática, num primeiro momento de maneira analítica e em um segundo momento usando o software GeoGebra para visualizar os gráficos desta função.

O foco deste trabalho foi pensado no sentido de organizar ao máximo as propostas do programa oferecido em Rede, a melhoria da Educação Básica, e neste caso específico, a matemática. Para isso o trabalho foi estruturado da seguinte maneira:

i. No primeiro capítulo a Introdução, mostra a justificativa, a pergunta norteadora e a estrutura do trabalho;

ii. No segundo capítulo o tema abordado é a Educação para inserir o contexto educacional vigente e mostrar as principais definições referentes ao tema com foco no ensino médio;

iii. O terceiro capítulo contém o histórico da equação do segundo grau, suas raízes, a transposição para as funções do segundo grau e sua caracterização.

iv. O capítulo quatro discorre acerca da utilização e importância do uso das tecnologias para o ensino de matemática.

v. O capítulo cinco mostra a parábola, sua construção, suas propriedades e suas proposições.

vi. O sexto capítulo contém todos os tópicos a serem abordados sobre função Quadrática e como o fazer usando o software GeoGebra.

vii. E ainda tem as considerações finais.

Capítulo 2

Educação

A educação sempre fez e vai fazer parte da vida do ser humano. Um termo de significação ampla, mas que tem como função fim, ser um processo constante de formação do educando. Neste sentido :

> A educação se revela como fator de transformação social, também, em seu caráter intrínseco da apropriação do saber historicamente acumulado, na medida em que, através dela, a classe revolucionária se apodera da ciência, da tecnologia, da filosofia, da arte, enfim, de todas as conquistas culturais realizadas pela humanidade em seu desenvolvimento histórico, que hoje estão nas mãos da minoria dominante. Esse saber, ao ser apropriado pela classe dominada, serve como elemento de sua afirmação e emancipação cultural na luta pela desarticulação do poder capitalista e pela organização de uma nova ordem social (PARO, 1998, p. 105).

Percebe-se pelo posicionamento deste autor que a educação possibilita ao homem a oportunidade da socialização, da transformação e da libertação. Através da convivência social dentro do ambiente escolar em que todos têm a possibilidade de interação, promovendo um processo de endoculturação. Promove a transformação da maneira de pensar e agir em decorrência da acumulação de informações e conhecimentos, o que acaba por possibilitar a emancipação do ser de suas amarras sociais.

A atual organização da educação escolar está amparada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional –LDB- (Lei 9394/96, p.3), conforme seu artigo 4° "é dever do Estado com educação escolar pública e será efetivado mediante a garantia de: educação básica obrigatória e gratuita dos 4 (quatro) aos 17 (dezessete) anos de idade, organizada da seguinte forma: pré-escola; ensino fundamental e ensino médio".

Analisando especificamente o ensino médio, verifica-se na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei 9394/96, p.9) em seu artigo 35 que este nível tem como finalidade "o aprimoramento do educando como ser humano, sua formação ética, desenvolvimento de sua autonomia intelectual e de seu pensamento crítico, além de sua preparação para o mundo do trabalho e o desenvolvimento de competências para continuar seu aprendizado".

Verifica-se que o legislador buscou dar a este nível da educação uma dupla função: preparar o educando para a continuidade dos estudos bem como a sua qualificação para o mundo do trabalho. Esta dualidade tem sido constantemente motivo de discussão da comunidade acadêmica. Neste sentido,

> É esta dupla função: preparar para continuidade de estudos e ao mesmo tempo para o mundo do trabalho, que lhe confere ambiguidade, uma vez que esta não é apenas uma função pedagógica, mas política, determinada pelas mudanças nas bases materiais de produção, a partir do que se define a cada época, uma relação peculiar entre trabalho e educação. (KUENZER, 1997, p. 9).

Neste sentido, Leite (2014, p.67) faz uma análise social do ensino médio na atualidade, esclarecendo que apesar das mudanças na legislação e nomenclatura e dos avanços na oferta de vagas, a estrutura central desse ensino permanece ancorada sobre uma profunda divisão entre a educação que se oferta às camadas abastadas e aos mais pobres. Nota-se assim que existe um problema grave no Ensino Médio, ele é pouco atraente ao jovem. O número de evasões é elevado e elas não são causadas pela falta de escolas na proximidade da residência e nem pela necessidade de trabalho, mas simplesmente pelo desinteresse.

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) propõe para o Ensino Médio, a formação geral em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidade de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização. As novas proposições do governo federal para o ensino médio buscam alternativas com objetivo de elevar o índice de conclusão do ensino médio regular para o patamar de países mais desenvolvidos.

Nota-se que uma das principais dúvidas da educação moderna é aquela que gira em torno da permanência dos alunos do ciclo médio nos bancos escolares. Atraídos pelo número de possibilidades e pela velocidade da sociedade, a escola lhes parece monótona.

No entanto, muito do que lhes parece fora de propósito nessa fase, as experiências, os relacionamentos, conhecimentos, somente mais tarde irá adquirir sentido para os mesmos. Muitas vezes acaba por não fazer-lhes nenhum sentido, por esse e diversos outros motivos, que os dicentes, acabam abandonando a escola.

De acordo com Ferreira (2011, p. 02), "são diversas e variadas as causas da evasão escolar ou infrequência do aluno. Estas são formadas por um conjunto de atores: o aluno (desinteressado, indisciplinado, com problemas de saúde ou gravidez); a escola (autoritária, professores despreparados, desatualizada); pais (não acompanhamento dos filhos, não exercício do pátrio poder); social (horário de trabalho incompatível com horários de estudos, violência entre alunos, etc.)".

Todo esse clima de desinteresse dos adolescentes pela vida escolar tem gerado muitas meditações da sociedade sobre as possíveis possibilidades de fazer com que o ensino médio venha ter significado para os jovens.

Nessa busca, o desafio dos sistemas de ensino nos últimos anos resulta em conseguir organizar um programa curricular que consiga formar os jovens para continuar os estudos no ensino superior e , ao mesmo tempo, prepará-los para o mercado de trabalho. Sendo assim, ampliar os investimentos, melhorar o fluxo escolar, mudar a organização e o currículo são alguns dos desafios que o ensino médio deve enfrentar para mudar o atual cenário de exclusão que persiste, de forma a garantir o direito à conclusão da educação básica para todos os brasileiros.

Capítulo 3

Histórico da equação de segundo grau

A matemática sempre está presente na história do ser humano e essa foi se desenvolvendo à medida que o homem necessitava dela. Neste contexto, a matemática deve ser vista como uma construção do ser humano ao longo de seu caminho pela história, não podendo jamais ser pensada como um conhecimento pronto e acabado. Com isso a abordagem por meio da História da Matemática é importante para contribuir na motivação dos alunos a observarem o modo como se deu a evolução das ideias matemáticas e procurar reproduzir nas aulas como ocorrem as passagens dessa evolução. E, nesse processo de evolução surgiu o interesse pelas equações de segundo grau que, segundo Bosquilha, Corrêa e Viveiro, (2003, p 106) data de cerca de 2000 a.C.

Boyer (2003, p.124) mostra que antigamente as soluções das equações do segundo grau eram tratadas como problemas do produto e da soma, "a solução de uma equação quadrática com três termos (...) tinha sido tratada eficientemente pelos babilônios em alguns dos mais antigos textos e problemas, que remontam ao segundo milênio a.C".

Ainda segundo Boyer (2003, p.126), até recentemente não se sabia resolver uma equação do segundo grau na sua forma completa, conforme é possível verificar em uma série de textos, $x^2 + px + q = 0, p, q > 0$, pois isso implicaria em pelo menos uma raiz negativa. Com isso, só se conheciam as soluções para três tipos de equações quadráticas, todas elas encontradas em textos babilônios antigos, de uns 4000 anos atrás . São elas:

$$x^2 + px = q$$

$$x^2 = px + q$$

$$x^2 + p = px.$$

Na obra de Boyer, observa-se a utilização das letras p e q, contudo neste trabalho sempre que se for falar de coeficientes para uma equação, ou função quadrática serão utilizadas as letras a, b e c para os coeficientes.

A técnica de completar quadrados era a forma utilizada pelos indianos para resolver essas equações. Essa forma de resolução foi apresentada pelo matemático árabe Al-Khowarizmi, no século IX, em que se descartavam raízes negativas por não serem adequadas e se aceitavam raízes irracionais (MELO e SILVA, 2011, p.46).

Na China, a resolução das equações de segundo grau era conseguida com o uso do método fan-fan introduzido por Zhu Shijie, no século XIII.

> Esse método foi redescoberto no século XIX, pelos ingleses William George Horner e Theophilus Holdred e o italiano Paolo Ruffini. O método fan-fan ficou conhecido na Europa como método de Horner, mas já havia sido antecipado por Isaac Newton em 1669 (MELO e SILVA, 2011, p.79).

É interessante ressaltar que foi o matemático hindu Bhaskara (1114 - 1185 d.C.) que encontrou a resolução da equação do 2º grau relacionando apenas aos coeficientes da mesma, sem recorrer a figuras geométricas ou reduções de termos. Somente no século XVI, quando o matemático François Viète começou a usar letras simbolizando coeficientes e incógnitas, a fórmula de Bhaskara adquiriu o formato que é conhecido hoje (MELO e SILVA, 2011, p.48).

3.1 Determinando as raízes da equação de segundo grau

Existem nas literaturas pesquisadas, como : Lima (2012), Machado (1987), Silva (2013), entre outros, muitas maneiras para encontrar as raízes das equações de segundo grau. Neste texto será usada a técnica que consiste em completar os quadrados. Todos os resultados que são demonstrados ao longo deste trabalho usam o Corpo dos Reais. Segue abaixo a demonstração: Considere a equação

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{3.1.0.1}$$

Multiplique todos os termos de [3.1.0.1] por $4a$, assim:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0. \tag{3.1.0.2}$$

Agora some b^2 aos dois termos de [3.1.0.2] para que se tenha um produto notável no primeiro termo

$$(2ax)^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2. \tag{3.1.0.3}$$

Fatorando e somando $-4ac$ em ambos os membros de [3.1.0.3] resulta em

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \tag{3.1.0.4}$$

Resolvendo a equação [3.1.0.4] obtém-se:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}. \tag{3.1.0.5}$$

Somando-se $-b$ em ambos os membros de [3.1.0.5], e dividindo por $2a$, tem-se

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.1.0.6}$$

E assim determina-se as raízes da equação [3.1.0.1].

3.2 Função quadrática

Lima (2012, p.135), afirma que "uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$".

Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Diz-se que um número α é raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$ se $f(\alpha) = 0$. Como a função se anula em $x = \alpha$, diz-se também que α é um dos zeros da função $f(x)$.

A primeira observação que se faz é: os coeficientes a,b e c da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume, e esta observação permite que se identifique uma função quadrática com um trinômio do segundo grau. A partir de agora a função do segundo grau será identificada com o trinômio do segundo grau associada a ela e permite falar da função

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3.2.0.1}$$

sempre que não houver perigo de confudí-la com o número real $f(x)$, que é o valor por ela assumido no ponto x.

3.2.1 Forma canônica

Segundo Silva (2013, p.30), outra maneira de expressar uma função quadrática é a sua forma canônica, e baseia-se numa técnica conhecida como "completar quadrados". Tal técnica tem por fim criar um quadrado perfeito, fazendo os devidos ajustes na expressão da função. Seja, f como na eq. [3.1.0.1]. Como $a \neq 0$, é possivel colocá-lo em evidência:

$$f(x) = a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}).$$

Assim, basta que se complete os quadrados:

$$f(x) = a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a})$$

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Chamando $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, obtém-se a relação

$$f(x) = a(x - m)^2 + k.$$

A expressão acima é chamada forma canônica de $f(x)$. Ainda seguindo o que diz Silva (2013, p.143), "para o aluno, pode parecer complicado e até mesmo inútil num primeiro momento representar uma função quadrática na sua forma canônica". Porém, com uma observação mais detalhada da mesma, vê-se que ela fornece o valor mínimo (no caso de $a > 0$) ou máximo (no caso de $a < 0$) de $f(x)$ e o valor de x para o qual um desses dois casos ocorre. De fato, supondo, sem perda de generalidade, $a > 0$, como o termo entre parênteses está elevado ao quadrado, ele será mínimo quando o binômio for igual a zero, ou seja: $x - m = 0 \Leftrightarrow x = m = -\dfrac{b}{2a}$.

Consequentemente, o valor mínimo da função, que aparece explicitado na expressão canônica de$f(x)$, é $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Na expressão matemática acima, o termo dentro do radicando recebe uma denominação especial. Representado pela letra grega Δ, tal termo chama-se discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Este nome naturalmente não é dado à toa. Dependendo da natureza do discriminante, é possível concluir se uma equação de 2º grau possui ou não raízes reais. E, possuindo, saber se são duas raízes distintas ou não. De fato, há três casos possíveis:

1° Caso: $\Delta < 0$

Neste caso, a equação não possui raízes reais, já que no corpo dos reais não existe raiz quadrada de número negativo. Por exemplo, sendo $f(x) = x^2 + 10$, tem-se:

$$x = \left(-0 \pm \frac{\sqrt{0^2 - 4.1.10}}{2.1}\right) \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{-40}}{2}.$$

Logo, não existe x real tal que $f(x) = 0$.

2° Caso $\Delta = 0$

Quando o discriminante se anula tem-se apenas uma raiz da equação (ou duas raízes iguais), a saber:

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$$

então

$$x_1 = \frac{-b}{2a} \qquad e \qquad x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

3° Caso $\Delta > 0$

Enfim, o caso em que, sendo Δ positivo temos duas raízes reais distintas:

$$\Delta > 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Capítulo 4

Utilização das tecnologias no ensino da matemática

O mundo mudou. O mundo atual é altamente acelerado, tecnológico, digital e interconectado, vive-se numa aldeia global. O acesso à informação é imediato tornando-se um bem de grande valor e exercendo enorme influência na sociedade mundial.

Os atuais discentes do Ensino Médio nasceram e cresceram nesse ambiente digital. São jovens que conseguem realizar variadas tarefas simultaneamente, que querem demonstrar o seu ponto de vista, estão constantemente conectados, bem informados, críticos. Neste sentido, assevera-se que:

> Os avanços tecnológicos estão sendo utilizados praticamente por todos os ramos do conhecimento. As descobertas são extremamente rápidas e estão a nossa disposição com uma velocidade nunca antes imaginada. A internet, os canais de televisão a cabo e aberta, os recursos de multimídia, estão presentes e disponíveis na sociedade. Estamos sempre a um passo de qualquer novidade. Em contrapartida, a realidade mundial faz com que nossos alunos estejam cada vez mais informados, atualizados e participantes deste mundo globalizado (KALINKE, 1999, p. 15).

Por isso, as escolas têm enfrentado dificuldades em lidar com esta nova classe de jovens. São comuns as reclamações de que o ambiente escolar não está em conformidade com esta nova geração. Percebe-se claramente que a concepção de nosso sistema educacional foi planejada para um determinado tipo de aluno que atualmente não se encontra nos bancos escolares.

Esclarecem Marques e Caetano (2002, p. 138) que "o uso da informática nas escolas é uma forma de torná-las atuais, permitindo ao aluno desenvolver habilidades com leitura, pesquisa, comunicação, trabalho, além, de possibilitar o conhecimento de novas realidades por meio da internet". O professor que adota as novas tecnologias perde o posto de dono do saber, mas ganha um novo e importante posto, o de mediador da aprendizagem.

Diante desta nova realidade mundial, a educação não pode ficar à margem desta nova configuração social. Faz-se necessário, então, que o ambiente escolar esteja em conformidade com esta nova exigência, ou seja, a utilização das tecnologias integradas ao projeto pedagógico da escola.

A inclusão das tecnologias no dia-a-dia dentro da sala de aula torna-se assim, uma necessidade para adequação da mesma ao modelo de alunos que estão ingressando nestes estabelecimentos. Sobre esta dicotomia, comenta-se que:

> No dia a dia escolar alguns alunos mostram comportamentos hiperativos e intermitentes, preocupando pais e professores. Querem estar no controle daquilo que se envolve e não paciência para ouvir um professor explicar um mundo que ele já conhece com suas próprias convicções. É como se o aluno fosse digital e a escola analógica (FONSECA e ALQUÉRES, 2009, p.178).

Verifica-se assim, conforme esses autores, que existe uma lacuna entre o atual modelo de escola existente e a clientela que está chegando à mesma. Faz-se necessário, desta forma, que o ambiente educacional reveja seu projeto pedagógico de maneira a atender esta nova exigência social.

Constantemente ouvem-se docentes ressaltando a importância da utilização das tecnologias no desenvolvimento de suas atividades em sala de aula, fazendo associação deste termo ao uso de computadores com os discentes.

Deve-se notar, porém, que o termo “tecnologias educacionais” é muito mais amplo que a simples utilização de computadores. Verifica-se que a informática no campo educacional é uma preciosa ferramenta para superação de problemas relativo à aprendizagem. Neste sentido, tem-se que:

> O conceito de tecnologia educacional pode ser enunciado como o conjunto de procedimentos (técnicas) que visam “facilitar” os processos de ensino e aprendizagem com a utilização de meios (instrumentais, simbólicos ou organizadores) e suas consequentes transformações culturais (REIS, 2010, p.78).

Percebe-se assim que existe um equívoco ao dizer que tecnologias educacionais é a utilização do computador na sala de aula. Conforme esclarecimento, desse autor trata-se de algo muito mais amplo. Trata-se de um conjunto de ferramentas, técnicas, instrumentos, que usados corretamente, possibilitam melhores resultados no processo ensino aprendizagem.

Quando a análise parte para o campo específico do ensino da matemática, percebe-se que a sintonia entre didática e tecnologia é mais acentuada.

> Ao longo da evolução da humanidade, Matemática e tecnologia se desenvolveram em íntima associação, numa relação que poderíamos dizer simbió-

> tica. A tecnologia entendida como convergência do saber (ciência) e do fazer (técnica), e a matemática são intrínsecas à busca solidária do sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto, ser dissociada da tecnologia disponível (D'AMBRÓSIO, 1993, p.94).

Um software educacional para o ensino da matemática , como ferramenta pedagógica, auxilia o docente em suas atividades didáticas, uma vez que a matemática lida sempre com a abstração. Conforme Machado (1987, p.145) "a dificuldade do ensino desta disciplina pode estar no fato de que a ciência é tida como o ambiente das abstrações que enfoca os aspectos formais e se afasta da realidade".

Já para Gravina e Santarosa (1998, p.154) o conceito de software educacional é mais complexo, envolvendo variadas ações que utilizadas em conjunto proporcionam aos discentes variadas formas de percepção do conhecimento da matemática:

> No contexto da matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o "fazer matemática"; experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento(GRAVINA e SANTAROSA, 1998, p.156).

Capítulo 5

Parábola

Quando é utilizado um recurso computacional para a manipulação de gráficos, em detrimento do uso de lápis e papel, permite-se que o aluno analise um número maior de relações existentes entre a lei de formação de uma função e sua representação gráfica.

Toda função quadrática é representada graficamente por uma parábola. O que segue, neste capítulo, foi desenvolvido tendo como base o trabalho de Silva (2013).

Definição 1. Sejam d uma reta e F um ponto não pertencente a esta reta. A parábola P de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos Q que equidistam de d e F.

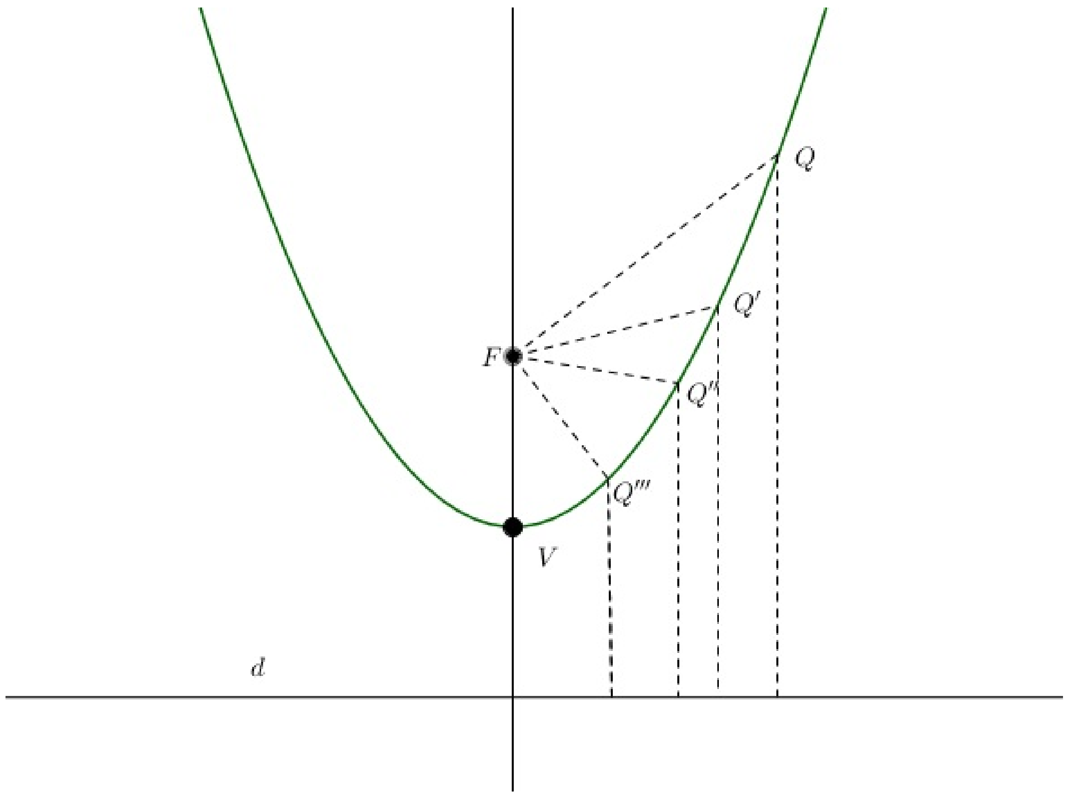

Figura 5.1 – Parábola de foco F e diretriz d

Definição 2. A reta r que passa pelo foco F e é perpendicular à diretriz d é chamada de reta focal e também conhecida como eixo focal da parábola P.

Considere $A = r \cap d$. Como pela Definição 1, um ponto qualquer Q pertence à parábola se, e somente se, equidista da diretriz d e do foco F, conclui-se que o ponto médio V do segmento $\overline{AF}$ pertence à parábola. Este ponto V é o único ponto do eixo r que pertence à parábola e é denominado de vértice da parábola, como exibido na figura 5.1.

A Proposição 3, a seguir, apresenta uma característica da parábola, que é útil ao se traçar o seu gráfico.

Proposição 3. Toda parábola é simétrica em relação ao seu eixo focal.

Demonstração. Considere uma parábola cujo foco é o ponto F, o eixo focal é a reta r e d é a diretriz. Seja A um ponto qualquer dessa parábola. Marque seu simétrico D em relação ao eixo focal r. Considerando C como a interseção do eixo r com o segmento $\overline{AD}$, tem-se que C é ponto médio de $\overline{AD}$, ou seja $\overline{AD} = \overline{DC}$. Além disso, os ângulos $\widehat{ACF}$ e $\widehat{DCF}$ são retos e $\overline{CF}$ é lado comum considerando os triângulos $\triangle ACF$ e $\triangle DCF$, como pode ser observado na Figura 5.2. Pelo caso LAL, conclui-se que os triângulos $\triangle ACF$ e $\triangle DCF$ são congruentes.

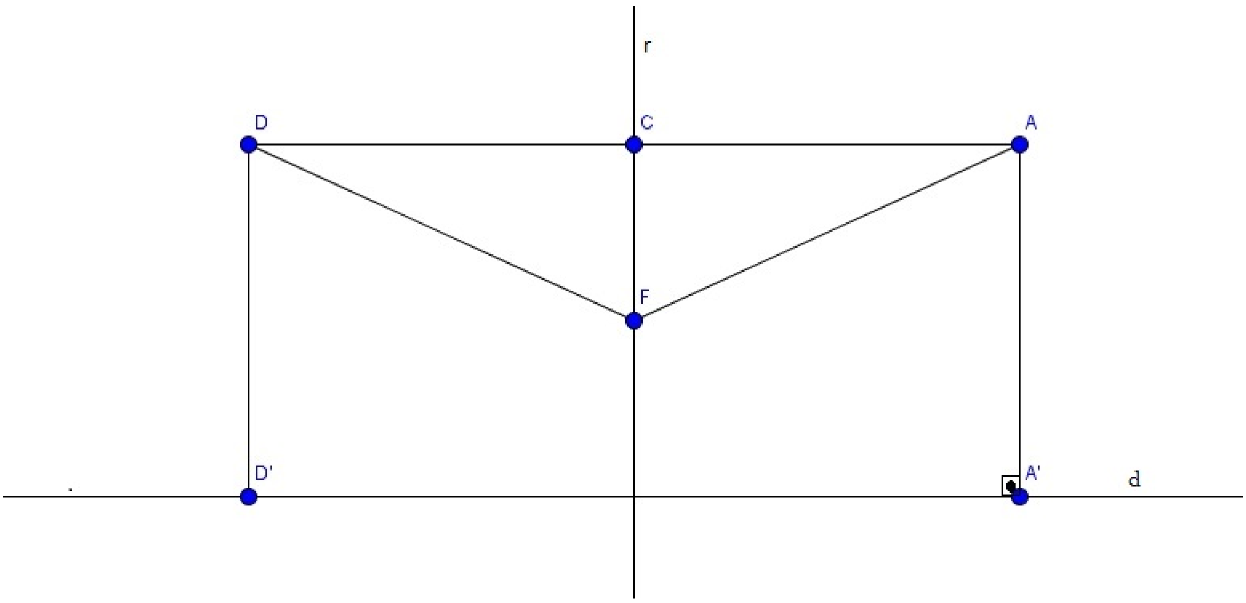

Figura 5.2 – Simetria da parábola em relação ao eixo focal. Adaptada de Silva (2013, p. 26)

Assim sendo, os lados $\overline{AF}$ e $\overline{DF}$ são congruentes, pois são hipotenusas dos triângulos $\triangle ACF$ e $\triangle DCF$, respectivamente ou seja,

$$\overline{AF} \equiv \overline{DF}. \tag{5.0.0.1}$$

Mais ainda, como A e D são simétricos, ao se considerar os pontos A' e D',como os respectivos pés das perpendiculares baixadas dos pontos A e D na diretriz d, tem-se que

$AA'D'D$ é um retângulo. E com isso, os lados

$$\overline{AA'}e\overline{DD'}. \tag{5.0.0.2}$$

são conguentes.

Uma vez que A é um ponto da parábola, tem-se $\overline{AF} = \overline{AA'}$. Assim, usando [5.0.0.1], chega-se que $\overline{DF} = \overline{AA'}$. Disso juntamente com [5.0.0.2], pode-se observar que $\overline{DF} = \overline{DD'}$, o que implica que D é um ponto da parábola. Ou seja, o simétrico de um ponto qualquer da parábola é também ponto da parábola, concluindo-se assim a demonstração. □

É possível então determinar a equação da parábola a partir de sua definição. Para isso, faz-se coincidir o vértice V da parábola com a origem do plano cartesiano xy e coincidir ainda a reta focal r com o eixo y. Feito isso, tem-se que a diretriz d será paralela ao eixo Ox e que o foco da parábola é o ponto $F = (0, p)$. Seja $A = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola, de modo que projetando-o sobre a reta diretriz d obtém-se o ponto $A' = (x, -p)$, como exibido na Figura 5.3. Assim, a distância do ponto A até a diretriz d é dada por $d(A, A')$. Logo,

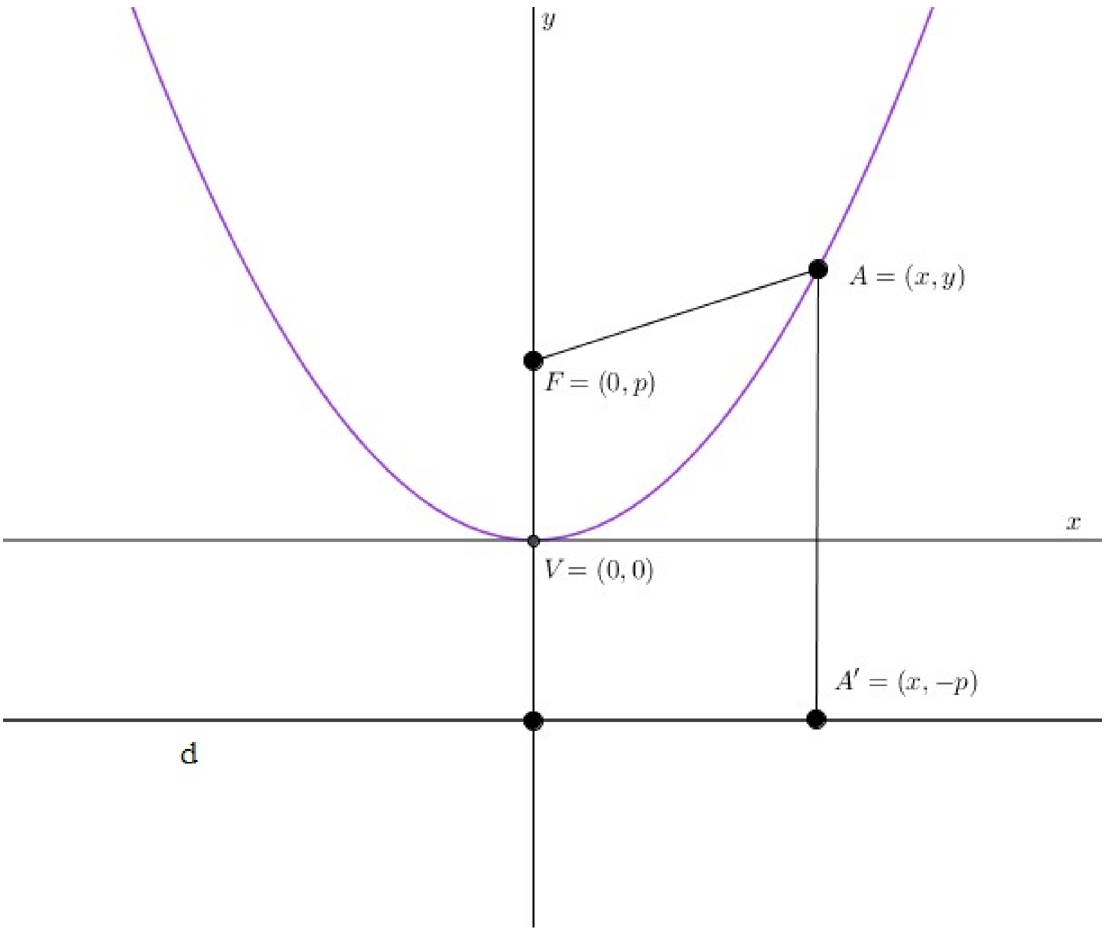

Figura 5.3 – Parábola cujo vértice coincide com a origem do sistema cartesiano xy e cujo eixo focal coincide com o eixo Oy, de modo que o foco F tem ordenada positiva.

$$d(A,F) = d(A,A')$$
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2}$$
$$\sqrt{x^2+y^2-2py+p^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$
$$x^2+y^2-2py+p^2 = (y+p)^2$$
$$x^2-2py = 2py$$

E conclui-se que:

$$x^2 = 4py.$$

A expressão acima mostra, de maneira explícita, uma função quadrática. Substituindo-se y por $f(x)$, verifica-se que

$$f(x) = \frac{x^2}{4p}.$$

Ao girar em 90°, no sentido horário, a parábola da figura acima, em torno da origem do sistema cartesiano, obtém-se a situação exibida na Figura 5.3 e refazendo os cálculos, obtém-se novamente a expressão da função quadrática, só que em função de y (e não de x).

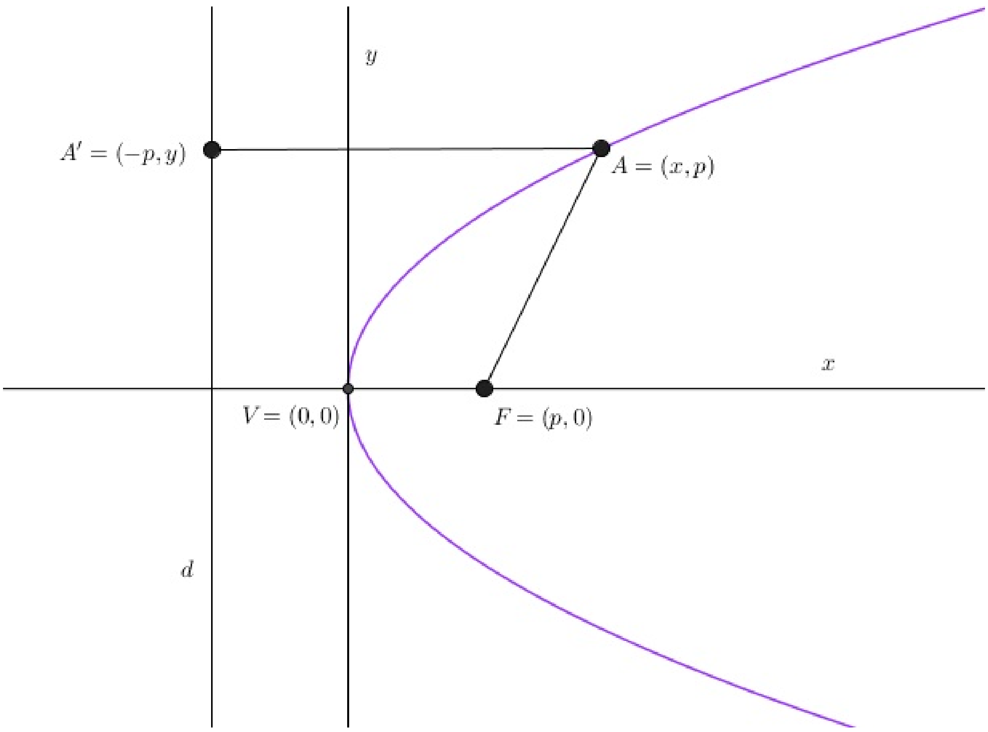

Figura 5.4 – . Parábola cujo vértice coincide com a origem do sistema cartesiano xy e cujo eixo focal coincide com o eixo Ox, de modo que o foco F tem abscissa positiva.

$$d(A,F) = d(A,A')$$
$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-(-p))^2+(y-y)^2}$$
$$x^2-2px+p^2+y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2.$$

Segue-se que:

$$y^2 = -4px.$$

Agora, chamando $x = f(y)$ vê-se que

$$f(y) = -\frac{y^2}{4p}.$$

Na verdade, girando a parábola (e consequentemente a reta diretriz), em torno da origem do sistema cartesiano, em qualquer ângulo múltiplo de um ângulo reto e refazendo os cálculos, obter-se-á a expressão de uma função quadrática, ora em função de x, ora em função de y.

Considerando o fato da função quadrática possuir como gráfico a parábola, a Proposição 3 pode ser deduzida apartir do fato que que um número x_n é raiz da equação de segundo grau se $f(x_n) = 0$.

Considere o fato de:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$
$$\Leftrightarrow x_1 + \frac{b}{2a} = \pm\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right).$$

Com isto, $x_1 = x_2$ ou x_1 e x_2 certamente são equidistantes de $-\frac{b}{2a}$. Para todos os efeitos, neste texto, x_1 e x_2 serão chamadas de raízes reais da função quadrática. Outra maneira de ver este resultado é escrever

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

A realizar a soma das raízes de $f(x)$ tem-se que $-\frac{b}{a}$ é a , pode-se dizer, de um modo geral, que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 + x_2 = s$.

O vértice V de uma parábola, mostra o ponto de máximo ou mínimo de uma função quadrática. Quando obtém-se o valor máximo da função é possivel observar que $a > 0$ e em contrapartida o valor mínimo ocorrerá quando $a < 0$. Para este vértice V, daqui para frente, será chamado de y_v a coordenada de y e naturalmente será considerado como x_v a coordenada de x. Como a parábola é simétrica em relação ao seu eixo focal, pode-se afirmar que a coordenada x_v é a média aritmética de suas raízes:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

A relação acima ainda é verdade mesmo que as raízes da função quadrática sejam imaginárias. Reescrevendo-a com os coeficientes de $f(x)$, tem-se:

$$x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Para maior clareza, $f(x)$ será expressado na sua forma canônica. Para todas elas considera-se um ponto P cujas coordenadas são $P = (x, f(x))$.

Na sequência apresentam-se algumas proposições que identificam o gráfico de uma função quadrática, desde a sua forma mais simples até a completa, como sendo uma parábola. Em todas as demonstrações, um ponto genérico do gráfico de f será representado por $A = (x, f(x))$ e a distância dele até a diretriz d da parábola será dada por $d(A, A')$ em que o ponto A' é o pé da perpendicular baixada de A até a diretriz d.

Proposição 4. Seja $f(x) = x^2$. O gráfico de $f(x)$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $d : y = -\dfrac{1}{4}$.

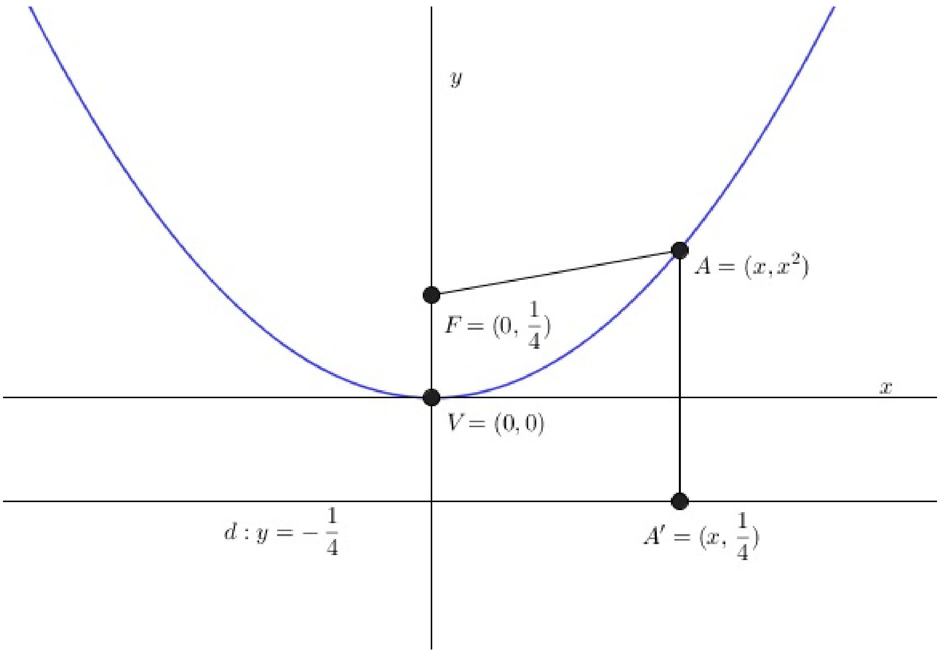

Figura 5.5 – Parábola $f(x) = x^2$

Demonstração. Utilizando a Definição 1 tem-se:

$$d(A, F) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 + x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}} =$$

$$= \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = \left|x^2 + \frac{1}{4}\right|.$$

Por outro lado

$$d(A,A') = \sqrt{(x-x^2)^2 + \left(x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = \left|x^2 + \frac{1}{4}\right|.$$

E assim, $d(A,F) = d(A,A')$ como é possível demonstrar □

Proposição 5. Seja $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$. O gráfico de $f(x)$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ e diretriz $d: y = -\dfrac{1}{4a}$.

Demonstração. procedendo da mesma forma como fez-se na Proposição 4, tem-se:

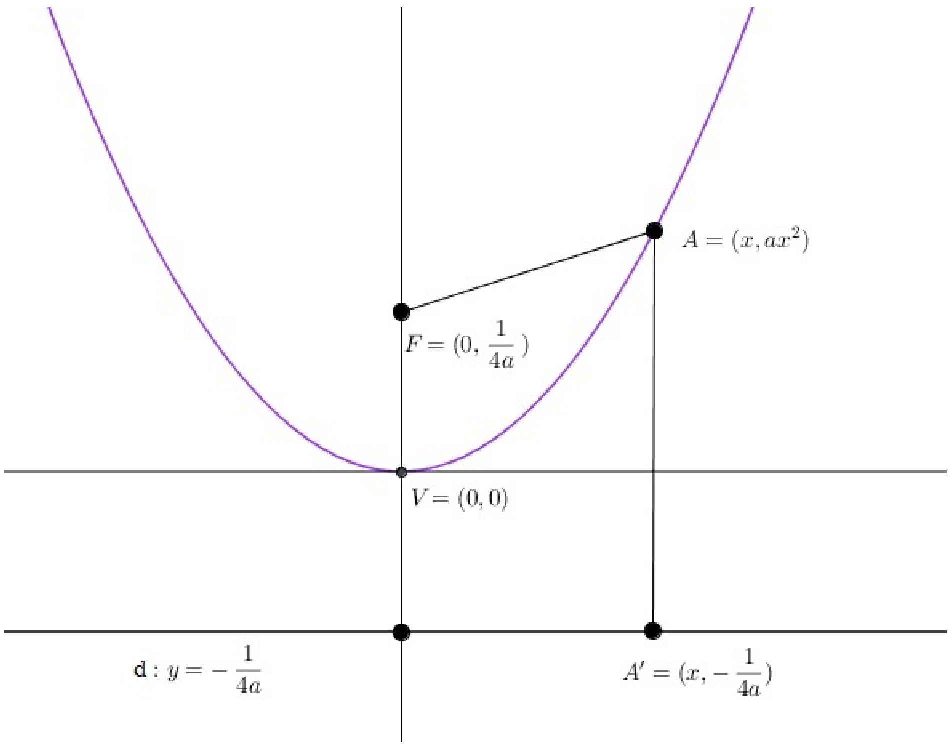

Figura 5.6 – Parábola $f(x) = ax^2$, com $a > 0$

$$d(A,F) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} = \sqrt{x^2 + a^2x^4 - 2ax^2\frac{1}{4a} + \frac{1}{(4a)^2}} =$$

$$= \sqrt{a^2x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2} = \left|ax^2 + \frac{1}{4a}\right|$$

$$d(A,A') = \sqrt{(x-x^2)^2 + \left(ax^2 - \left(-\frac{1}{4a}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2} = \left|ax^2 + \frac{1}{4a}\right|.$$

□

Logo, $d(A,F) = d(A,A')$, de modo que se conclui que o gráfico de $f(x)$ é a parábola de foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz $d: y = -\dfrac{1}{4a}$.

Na Proposição 5, se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima como exibido na Figura 5.6 . Se, ao contrário, $a < 0$, a mesma está voltada para baixo.

Proposição 6. Para todo $m \in \mathbb{R}$, o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, \frac{1}{4}\right)$ e a diretriz é a reta $d : y = -\frac{1}{4a}$.

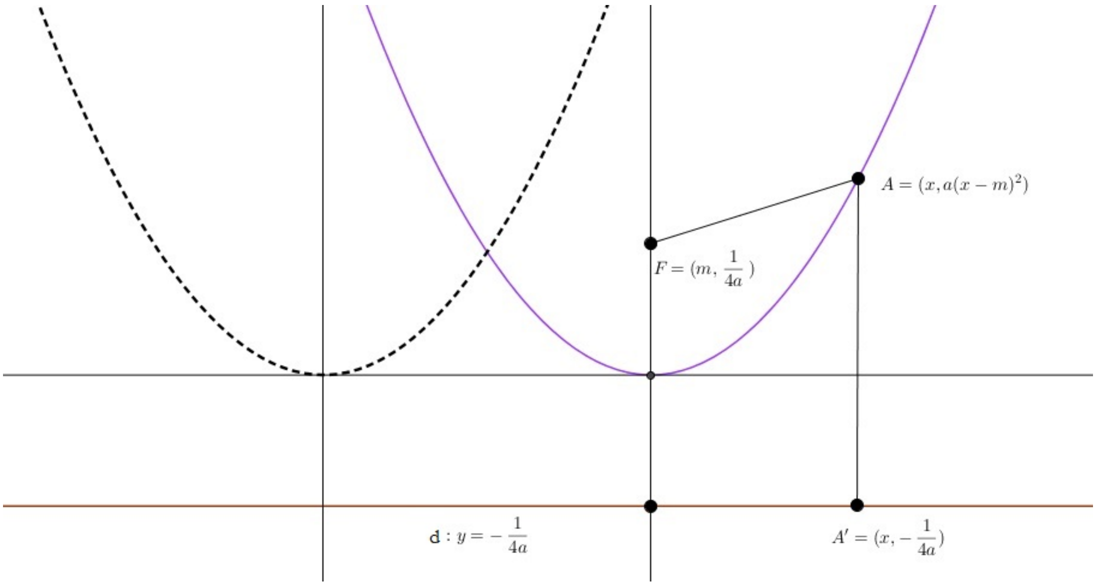

Figura 5.7 – Gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$, com $a > 0$ e m qualquer.

Demonstração. Calculando as distâncias:

$$d(A,F) = \sqrt{(x-m)^2 + \left(a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} = \sqrt{(x-m)^2 + a^2(x-m)^4 - 2a(x-m)^2\frac{1}{4a} + \frac{1}{(4a)^2}} =$$

$$= \sqrt{a^2(x-m)^4 + (x-m)^2 - \frac{(x-m)^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{a^2(x-m)^4 + \frac{(x-m)^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2} = \left|a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right|.$$

Por outro lado:

$$d(A,A') = \sqrt{(x-x)^2 + \left(a(x-m)^2 - \left(-\frac{1}{4a}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$= \left|a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right|.$$

□

Já que $d(A,F) = d(A,A')$ conclui-se que o gráfico de $f(x)$ é a parábola de foco $F = \left(m, \frac{1}{4}\right)$ e diretriz $d : y = -\frac{1}{4a}$.

Observa-se que ocorre uma translação horizontal do gráfico de $f(x) = ax^2$ de forma que o eixo focal, que era a reta $x = 0$ passa a ser a reta $x = m$, como exibido na Figura 5.7.

Proposição 7. Dados $a, m, k \in \mathbb{R}$ o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, k + \frac{1}{4}\right)$ e a diretriz é a reta $d : y = k - \frac{1}{4a}$.

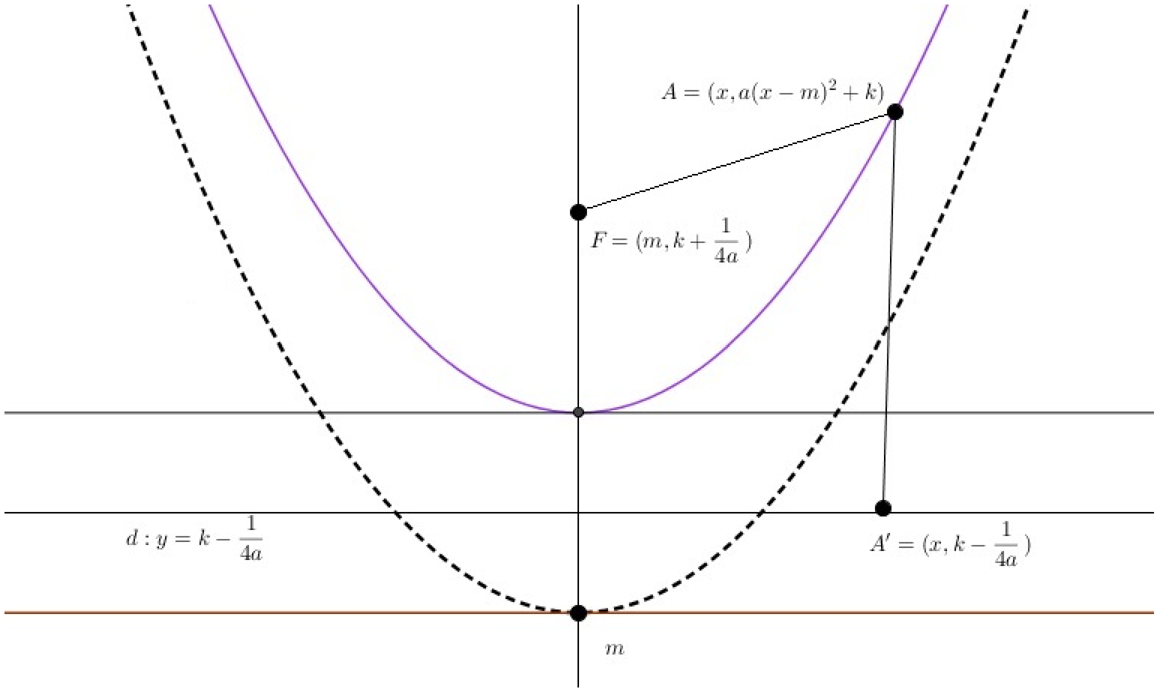

Figura 5.8 – Gráfico de $f(x) = a(x-m)^2 + k$, com $a > 0$ e $m > 0$.

Demonstração. Calculando as distâncias, tem-se:

$$d(A,F) = \sqrt{(x-m)^2 + \left(a(x-m)^2 + k - \left(k + \frac{1}{4a}\right)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(x-m)^2 + a^2(x-m)^4 - 2a(x-m)^2\frac{1}{4a} + \frac{1}{(4a)^2}} =$$

$$= \sqrt{a^2(x-m)^4 + (x-m)^2 - \frac{(x-m)^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{a^2(x-m)^4 + \frac{(x-m)^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2} = \left|a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right|.$$

Por outro lado:

$$d(A,A') = \sqrt{(x-x)^2 + \left(a(x-m)^2 + k - \left(k - \frac{1}{4a}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$= \left|a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right|.$$

□

Portanto, $d(A,F) = d(A,A')$ e, assim, o gráfico de $f(x)$ é a parábola de foco$F = \left(m, k + \frac{1}{4}\right)$ e diretriz $d: y = k - \frac{1}{4a}$. Observa-se que ocorre uma translação vertical do gráfico de $f(x) = a(x-m)^2 + k$, ou seja, o gráfico desloca-se pelo eixo focal $|k|$ unidades, como exibido na Figura 5.8.

Capítulo 6

Explorando o GeoGebra para o ensino de funções quadráticas

A seguir serão apresentados os passos necessários para a representação gráfica, de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, usando o GeoGebra.

i Insira os coeficientes a, b e c no controle deslizante. Escolha o intervalo desejado, para a função, em particular o intervalo escolhido foi (-5, 5).

ii Inserir no campo de entrada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Para o exemplo da Figura 6.1, os coeficientes foram tomados com valor $a = 1$, $b = 3$ e $c = -4$ assim obtém-se a função $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

6.1 Analisando os pontos notáveis

Nesta seção, analisar-se-á alguns pontos, chamados notáveis, em uma função do segundo grau, os quais são: suas raízes, estudo do sinal do discriminante (Δ), o ponto de encontro da função quadrática com o eixo, o crescimento e decrescimento da função, o vértice da parábola, e por consequência seu ponto de máximo ou mínimo e ainda estudar-se-á o deslocamento do vértice da função, de acordo com a variação de seus coeficientes.

6.1.1 Raízes da função quadrática

No ensino médio, aprende-se a resolver as equações do segundo grau por três métodos diferentes: método do discriminante, completando os quadrados ou as relações de Girard. No entanto, é unanime entre os educandos a utilização do método do discriminante, o qual os mesmos o denominam erroneamente como o Método de Bhaskara.

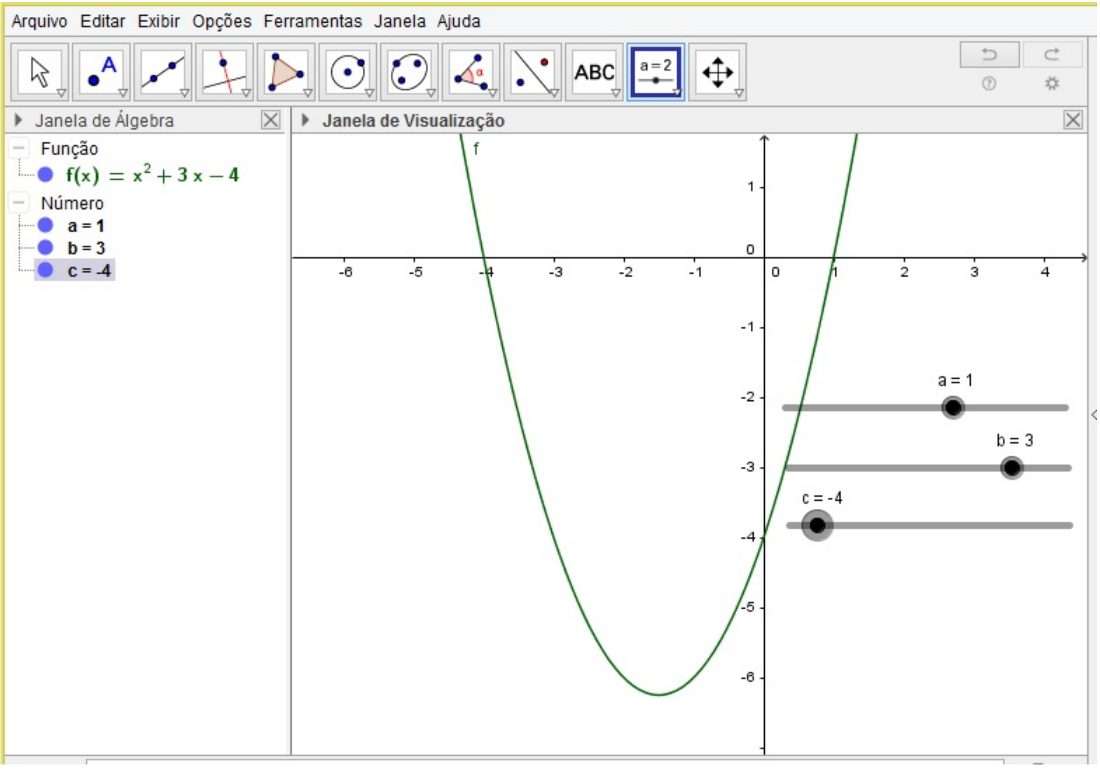

Figura 6.1 – Gráfico da função $f(x) = x^2 + 3x - 4$

As raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ são as soluções da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais, como visto no Capítulo 3, da seguinte forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$, utilizando o GeoGebra, basta inserir no campo de entrada os seguintes comandos:

$R = ((-b + (b \wedge 2 - 4ac) \wedge (1/2))/(2a), 0)$ e $S = ((-b - (b \wedge 2 - 4ac) \wedge (1/2))/(2a), 0)$ e assim obtém-se as raízes R e S da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Na Figura 6.2, ilusta-se o procedimento descrito acima, utilizando a função $f(x) = 0,2x^2 + 1,6x - 1,4$.

6.1.2 Estudo do sinal do discriminante (Δ)

Como já foi dito, denomina-se discriminante (Δ), o resultado da expressão $b^2 - 4ac$, sendo a, b, c os coeficientes reais de uma equação polinomial do segundo grau.

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o discriminante (Δ), os quais serão analisados nos itens I, II e III. Neste trabalho não tem-se o intuito de demonstrar estas situações, uma vez que segundo observações os alunos não

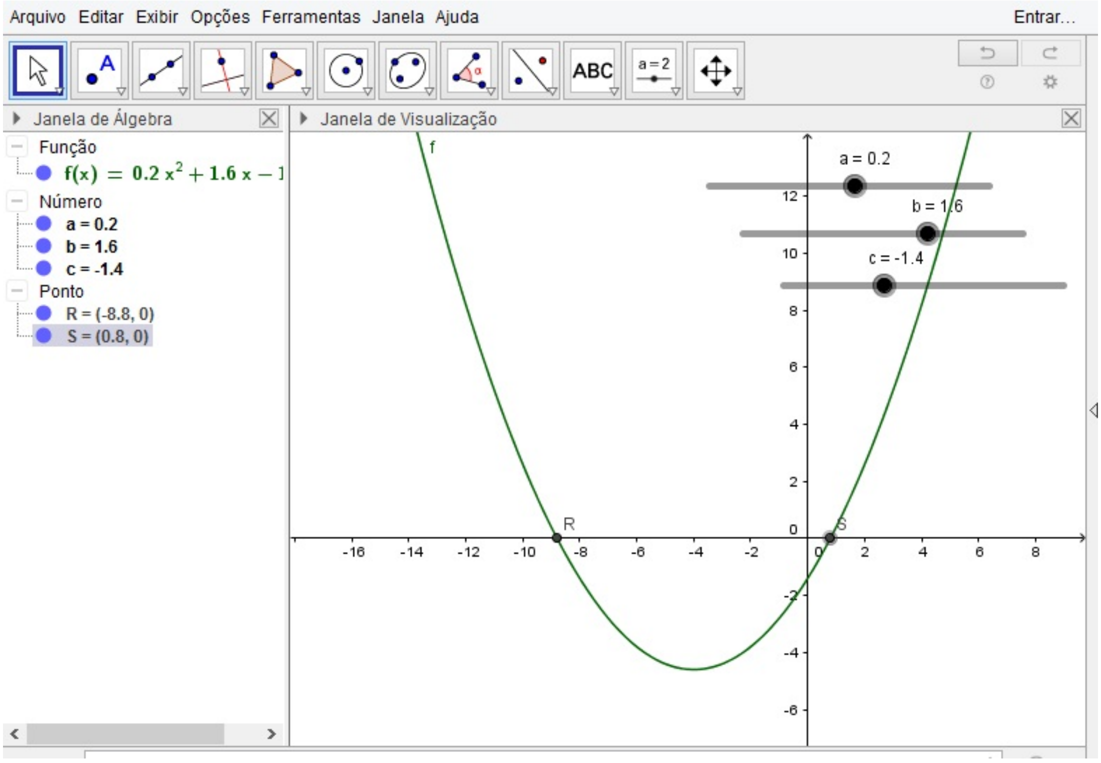

Figura 6.2 – Gráfico da função $f(x) = 0,2x^2 + 1,6x - 1,4$

tem tantas dificuldades neste aspecto, apenas trará-se uma breve revisão com o intuito de relembrar.

I. Discriminante positivo ($\Delta > 0$) Sempre que uma função do segundo grau possuir discriminante positivo, a mesma terá duas raízes reais distintas, pois $\pm\sqrt{\Delta}$ produz dois valores reais distintos . Este fato pode ser observado no gráfico que é apresentado na Figura 6.3.

   A Figura 6.3 apresenta as duas raízes reais da função $f(x) = 0,2x^2 + 1,6x - 1,4$.

II. Discriminante negativo ($\Delta < 0$) Quando este fato acontece, a função não possuirá raízes no conjunto dos números reais. De fato $\sqrt{\Delta}$ com $\Delta < 0$, não possui valor real, conforme pode-se observar geometricamente na Figura 6.4.

   Neste caso utiliza-se a função $f(x) = 2,4x^2 + 4,8x + 2,8$ e assim obtém-se:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4,8^2 - 4(2,4)(2,8)$$

$$\Delta = -3,84$$

   e portanto $\Delta < 0$. Logo a função $f(x) = 2,4x^2+4,8x+2,8$ não possui raiz real, conforme observado na Figura 6.4.

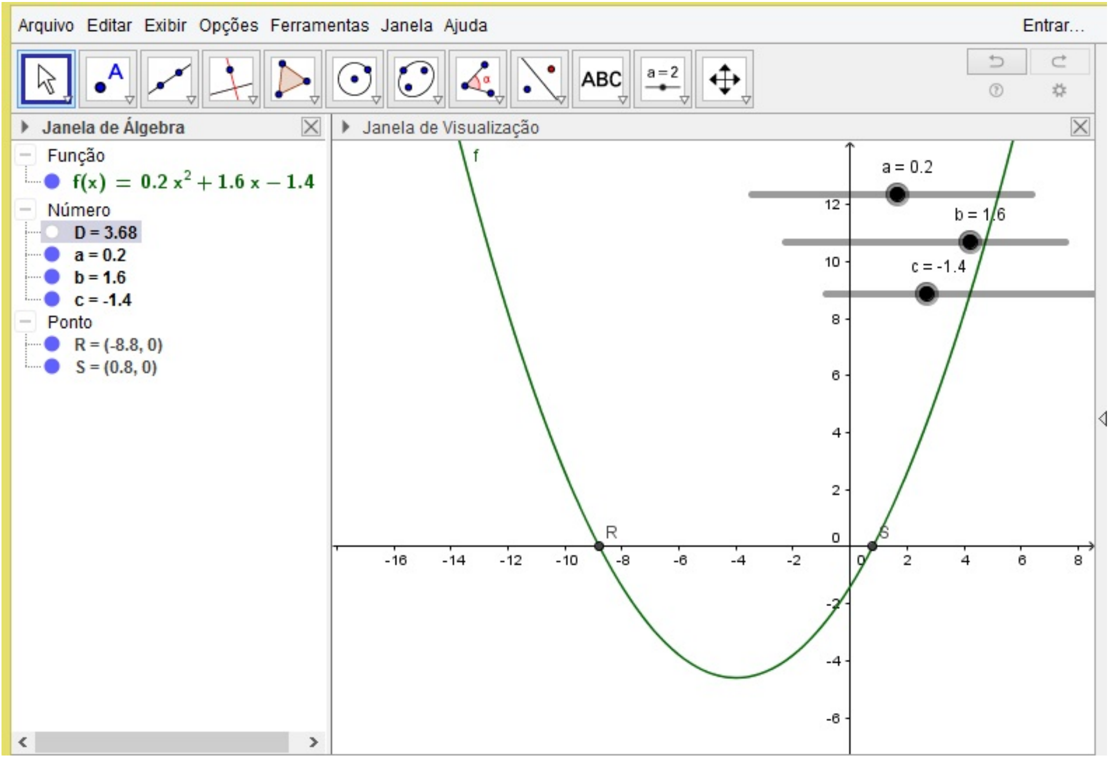

Figura 6.3 – Observação das raízes em relação ao discriminante positivo $\Delta > 0$

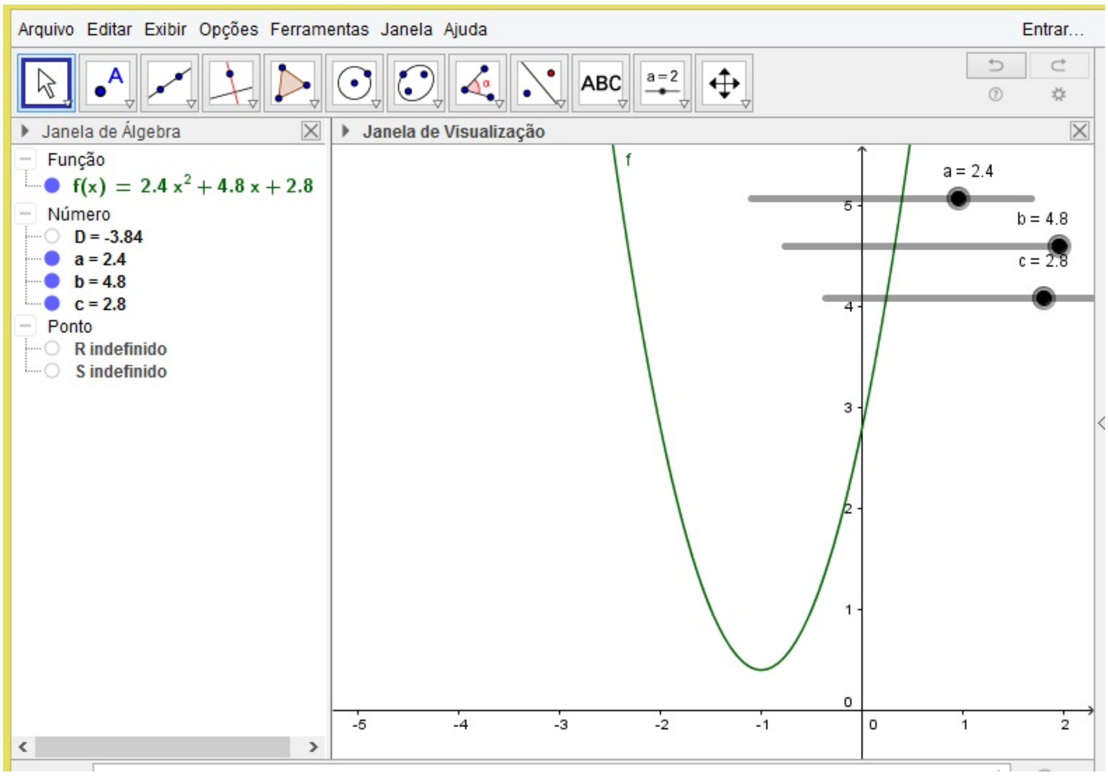

Figura 6.4 – Observação das raízes em relação ao discriminante negativo $\Delta < 0$

III. Discriminante nulo ($\Delta = 0$) Quando o discriminante é nulo, o valor de $\sqrt{\Delta}$ é nulo e a função polinomial do segundo grau tem duas raízes reais idênticas, assim representadas:

$R = S = \dfrac{-b}{2a}$, ou seja, seu próprio vértice. Este fato pode ser observado geometricamente na Figura 6.5, no caso exemplificado em que a função é $f(x) = 2,4x^2+4,8x+2,4$.

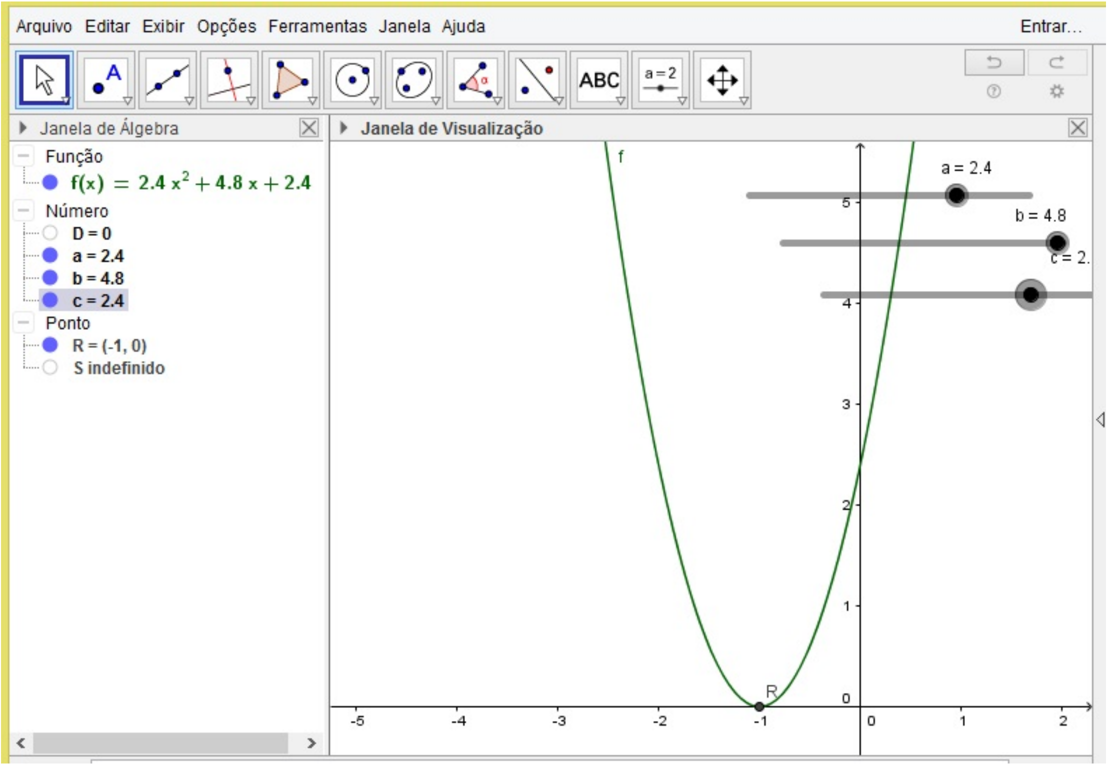

Figura 6.5 – Observação das raízes em relação ao discriminante nulo $\Delta = 0$)

6.1.3 Ponto de intersecção da função com o eixo das coordenadas

Nesta seção, serão apresentadas as características específicas das intercecções com os eixos das abscissas e o eixo das ordenadas

I. Pontos de intersecção com o eixo das abcissas.

   Podem ou não existir. Pode-se verificar estes resultados através das Figuras 6.3, 6.4 e 6.5.

II. Ponto de intersecção com o eixo das ordenadas

   Sabe-se que o domínio da função quadrática é o conjunto dos números reais e, portanto seu gráfico no plano cartesiano obrigatoriamente interceptará o eixo das ordenadas no ponto em que $x = 0$. Desta forma, o ponto de intersecção da função quadrática com o eixo $0y$, de uma forma geral, será $(0, f(0))$. Efetuando os cálculos temse:$f(0) = a0^2 + b0 + c \Rightarrow f(0) = c$.

   Desta forma, o ponto de interseção com o eixo Oy é o ponto $C = (0, c)$. Para verificar este fato, será utilizado o GeoGebra e considerar-se-á a função $f(x) = 0,5x^2-2,9x+1,4$

. No GeoGebra insira a função $f(x) = 0,5x^2 - 2,9x + 1,4$ no campo de entrada e atribua ao ponto C o ponto $(0, f(0))$.

Na Figura 6.6 apresentar-se-á o gráfico de $f(x) = 0,5x^2 - 2,9x + 1,4$ e o ponto C de intersecção com o eixo das ordenadas.

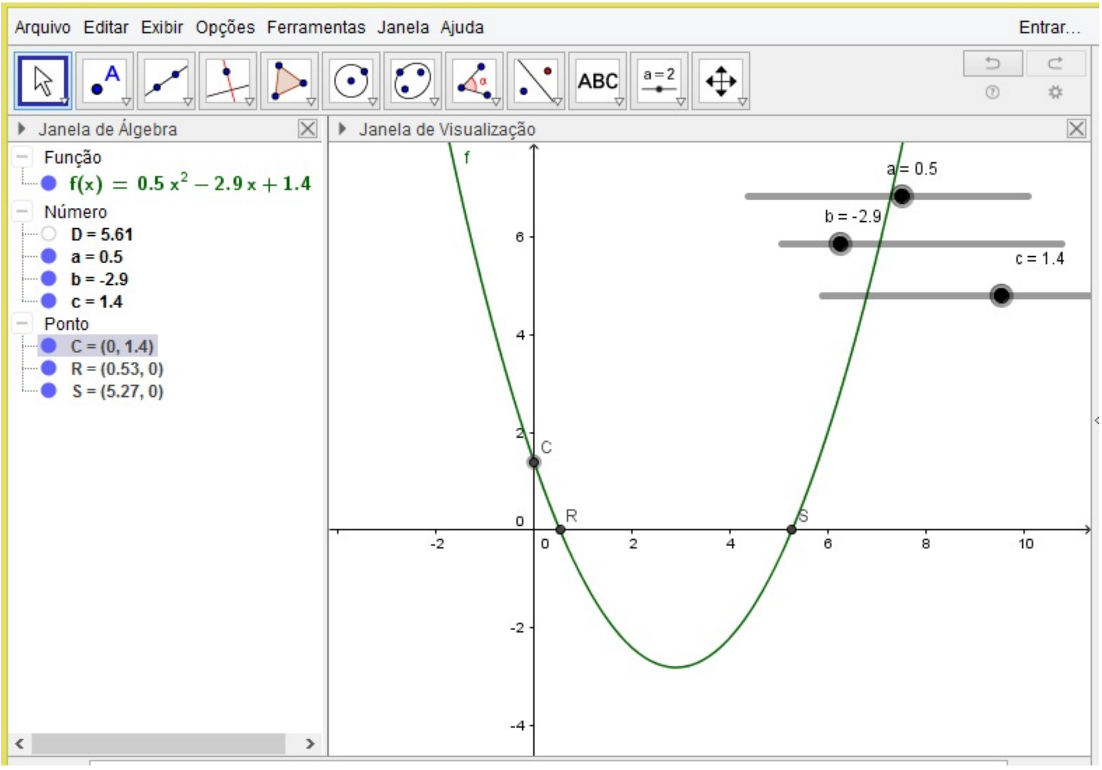

Figura 6.6 – Gráfico de função polinomial do segundo grau destacando o ponto onde a função toca o eixo das ordenadas

6.1.4 Vértice da parábola

O vértice de uma parábola é o ponto exato que a função muda seu comportamento, deixando de ser crescente e passando a ser decrescente ou deixando de ser decrescente e passando a ser crescente. Este ponto é descrito da forma

$$V = (x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right).$$

Para construir o gráfico contendo estas informações no GeoGebra conforme a Figura 6.7, serão seguidos os seguintes passos:

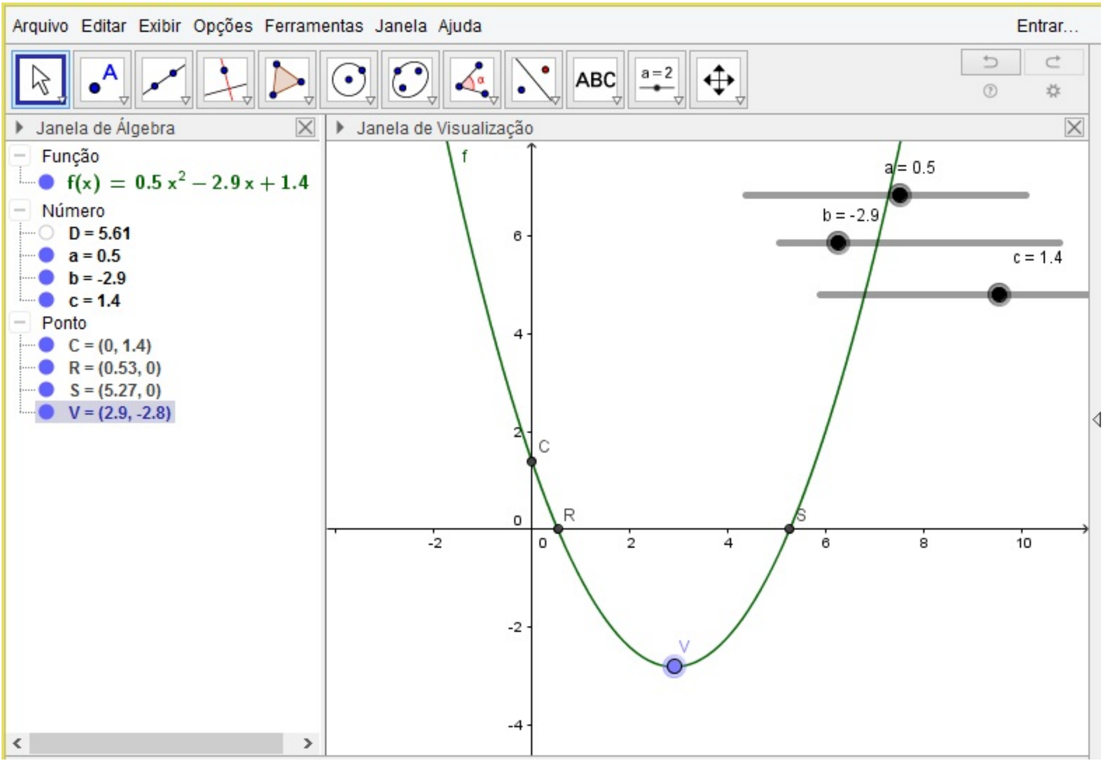

Figura 6.7 – Gráfico de função polinomial do segundo grau destacando seu vértice

- Inserir a função quadrática desejada. Para este exemplo, considerar-se-á a função $f(x) = 0,5x^2 - 2,9x + 1,4$.

- Inserir no campo de entrada o ponto $C = (0, f(0))$.

- Inserir no campo de entrada do GeoGebra o ponto $V = ((-b)/(2a), f((-b)/(2a)$.

- Outro modo seria apenas inserir o comando no campo de entrada $V = ((-b)/(2a), (-\Delta)/(4a))$.

  A partir da análise gráfica da Figura 6.7 verifica-se as seguintes propriedades

i. Todo gráfico de uma função polinomial do segundo grau é uma parábola.

ii. A função polinomial do segundo grau toca o eixo das ordenadas exatamente no ponto $C = (0, f(0))$.

iii. Se $a > 0$, obtém-se uma parábola com concavidade voltada para cima; se $a < 0$ a concavidade será voltada para baixo.

iv. Se a concavidade for voltada para cima, tem-se um ponto mínimo absoluto exatamente no vértice; se a concavidade for voltada para baixo, temos um máximo absoluto no vértice.

Com a análise gráfica, todas estas propriedades para o caso $a > 0$ ficam verificadas. Fica a cargo do leitor a verificação para o caso $a < 0$.

6.2 Análise do crescimento e decrescimento da função quadrática

Nesta seção, será analisado o crescimento ou decrescimento das funções polinomiais de segundo grau.

De acordo com Flemming (2001, p.57), uma função é crescente se para todo $d < x$, $f(d) < f(x)$ ou para todo $d > x$, $f(d) > f(x)$ e decrescente se para todo $d < x$, $f(d) > f(x)$ ou para todo $d > x$, $f(d) < f(x)$.

Como dito anteriormente, a função quadrática tem como gráfico uma parábola, e para sua caracterização, é fundamental determinar os intervalos em que a função seja crescente ou decrescente. Para isto, deve-se analisar os casos em que o coeficiente a seja positivo ou negativo.

I. Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$.

Sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer, tais que $x_1 < x_2 < x_v$. Logo,

$$\begin{cases} x_1 & < & \frac{-b}{2a} \\ x_2 & < & \frac{-b}{2a} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b}{a}.$$

Portanto $x_1 + x_2 < \dfrac{-b}{a}$.

Multiplicando esta última desigualdade por $a > 0$, obtém-se $a(x_1 + x_2) < -b$.

Multiplicando esta por $(x_1 - x_2) < 0$, tem-se:

$$a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > -b(x_1 - x_2)$$

$$a(x_1^2 - x_2^2) > -b(x_1 - x_2)$$

$$ax_1^2 - ax_2^2 > -bx_1 + bx_2 \Leftrightarrow ax_1^2 + bx_1 > ax_2^2 + bx_2.$$

Somando c a ambos os lados da última desigualdade, chega-se em:

$ax_1^2 + bx_1 + c > ax_2^2 + bx_2 + c$,ou seja, $f(x_1) > f(x_2)$.

Assim, a função é decrescente no intervalo $]-\infty, x_v]$.

Sejam agora x_3 e x_4 dois pontos quaisquer, tais que $x_v < x_3 < x_4$. Logo,

$$\begin{cases} x_3 & > & \frac{-b}{2a} \\ x_4 & > & \frac{-b}{2a} \end{cases} \Rightarrow x_3 + x_4 > \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b}{a}.$$

Procedendo de maneira análoga ao caso anterior, obtém-se $f(x_3) < f(x_4)$.

Assim, a função é decrescente no intervalo $[x_v, \infty[$.

Ao trabalhar com o GeoGebra, de acordo com a Figura 6.8, adotar-se-ão as seguintes nomenclaturas $f(x_1) = f_1, f(x_2) = f_2, f(x_3) = f_3, f(x_4) = f_4$.

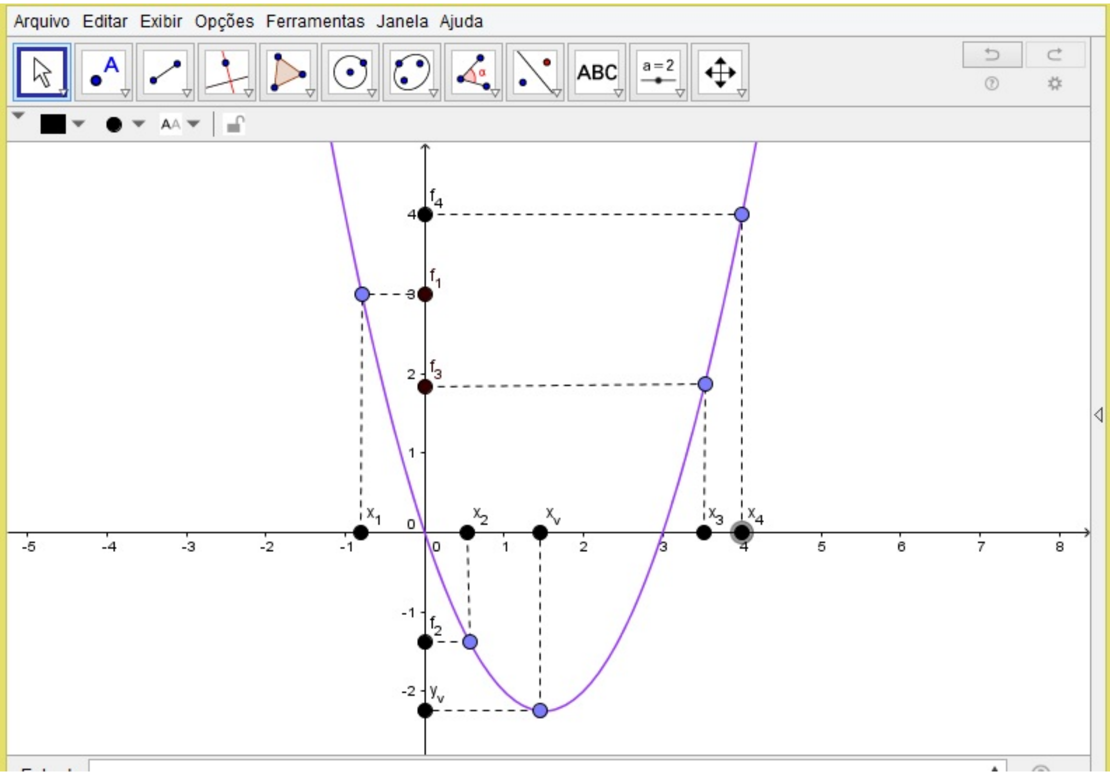

Figura 6.8 – Crescimento ou decrescimento da parábola, quando $a > 0$

Pode-se perceber, via Figura 6.8 que o gráfico tem a concavidade voltada para cimae, desta forma, o vértice da parábola é o ponto mínimo da função.

II. Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$. Sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer, tais que $x_1 < x_2 < x_v$. Logo,

$$\begin{cases} x_1 & < & \frac{-b}{2a} \\ x_2 & < & \frac{-b}{2a} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b}{a}.$$

Portanto $x_1 + x_2 < \dfrac{-b}{a}$.

Multiplicando esta última desigualdade por $a < 0$, obtém-se $a(x_1 + x_2) > -b$.

Multiplicando esta por $(x_1 - x_2) < 0$, tem-se:

$$a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < -b(x_1 - x_2)$$

$$a(x_1^2 - x_2^2) < -b(x_1 - x_2)$$

$$ax_1^2 - ax_2^2 < bx_1 + bx_2 \Leftrightarrow ax_1^2 + bx_1 < ax_2^2 + bx_2.$$

Somando c a ambos os lados da última desigualdade, chega-se em:

$ax_1^2 + bx_1 + c < ax_2^2 + bx_2 + c$ ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$.

Assim, a função é crescente no intervalo $]-\infty, x_v]$

Procedendo de maneira análoga com x_3 e x_4 dois pontos quaisquer, tais que $x_v < x_3 < x_4$, obtém-se

$$f(x_3) < f(x_4).$$

Assim, a função é decrescente no intervalo $[x_v, \infty[$. Ao trabalhar com o GeoGebra, de acordo com a Figura 6.9, adotar-se-á as seguintes nomenclaturas $f(x_1) = f_1, f(x_2) = f_2, f(x_3) = f_3, f(x_4) = f_4$.

Concluí-se que para $a < 0$, a função quadrática descreve um gráfico que contém o vértice com a concavidade voltada para baixo. Observa-se ainda que para este caso o vértice é o ponto de máximo da função.

Para uma melhor visualização geométrica destes resultados, far-se-á o uso do GeoGebra, utilizando os seguintes passos:

i. Inserir os seletores a, b, c e d.

ii. Construir a função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

iii. Marcar seu vértice (x_v, y_v).

iv. Para que o programa possa distinguir e dizer quando uma função é crescente e quando ela é decrescente, deve-se inserir os comandos compatíveis. Para isto no campo de entrada, insere-se os seguintes comandos: $f(x) = ax^2 + bx + c$; $x_v = (-b)/(2a)$; $y_v = (-(b^2 - 4ac))/(4a)$; crescente = Se$[(d > x_v) \wedge (f(d) > y_v), (d, f(d))]$; crescente1 = Se$[(d \leq x_v) \wedge (f(d) \leq y_v), (d, f(d))]$; decrescente = Se$[(d < x_v) \wedge (f(d) > y_v), (d, f(d))]$; decrescente1 = Se$[(d > x_v) \wedge (f(d) < y_v), (d, f(d))]$.

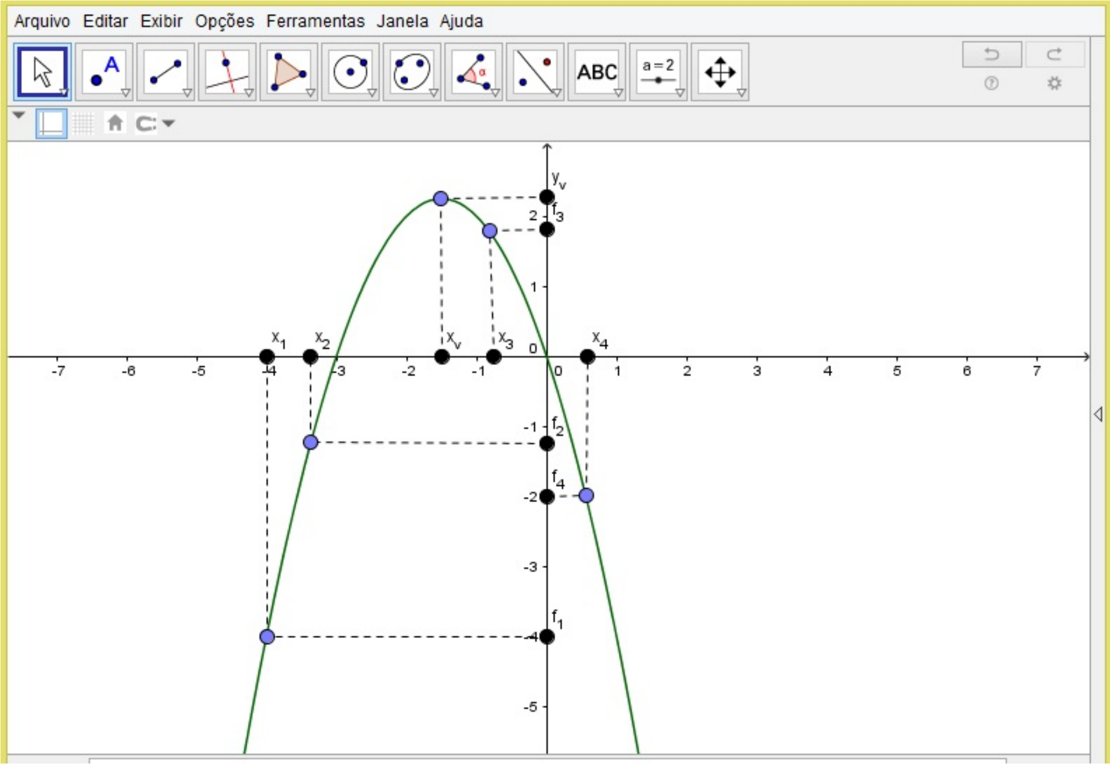

Figura 6.9 – Crescimento ou decrescimento da parábola, quando $a < 0$

v. Habilitar o rastro do vértice e utilizando o botão direito do mouse, formatar as cores dos pontos, de forma que para estes exemplos serão usadas as cores vermelha, para crescente e crescente1, e a cor azul para decrescente e decrescente1.

Para uma melhor análise gráfica, varia-se o seletor d para valores menores que $x_v = -5$, para o exemplo particular da função $f(x) = -0,5x^2 + 5x - 0,6$; obtendo resultados da forma $f(d) > y_v = -13,1$; tal fato esta apresentado na Figura 6.10.

Para facilitar o entendimento, o programa escreveu decrescente neste intervalo, de acordo como o comando iv.

Concluí-se assim que a função $f(x) = -0,5x^2 + 5x - 0,6$ é decrescente para todo $x < -5$.

Com a analise geométrica da Figura 6.11, pode-se concluir que a função $f(x) = -0,5x^2 + 5x - 0,6$ é crescente para todo $x > -5$.

Varia-se o seletor para valores negativos, obtendo a função $f(x) = -1,2x^2 + 5x - 2$. Faz-se variações no seletor d , para valores maiores que 2,08, e obtém-se a representação gráfica, que está apresentada na Figura 6.12.

Já na Figura 6.13, faz-se as variações no seletor d , para valores menores que $2,08$ para a mesma função $f(x) = -1,2x^2 + 5x - 2$. Geometricamente, pode-se observar nas Figuras 6.12 e 6.13, que para este exemplo em particular dado, para todo $d > x_v = 2,08$ a função é decrescente, para todo $d < x_v = 2,08$, a função é decrescente.

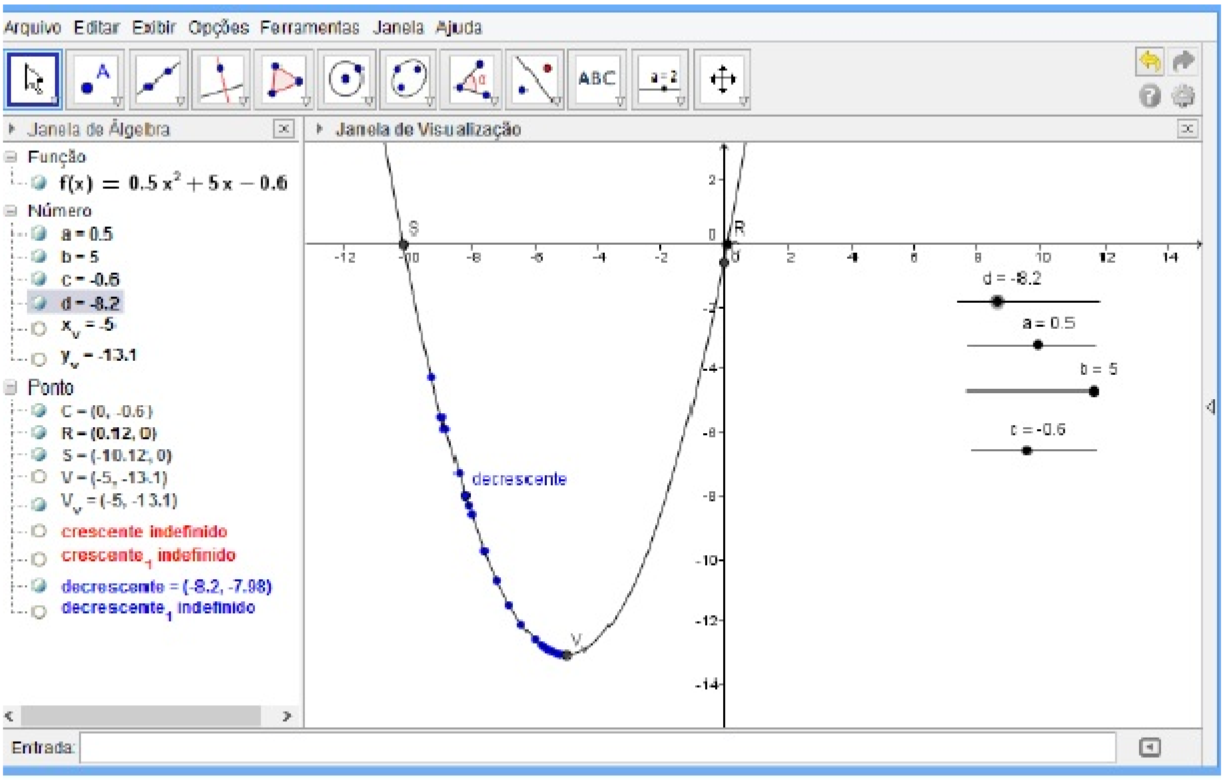

Figura 6.10 – Estudo do decrescimento de uma função polinomial do segundo grau com concavidade para cima

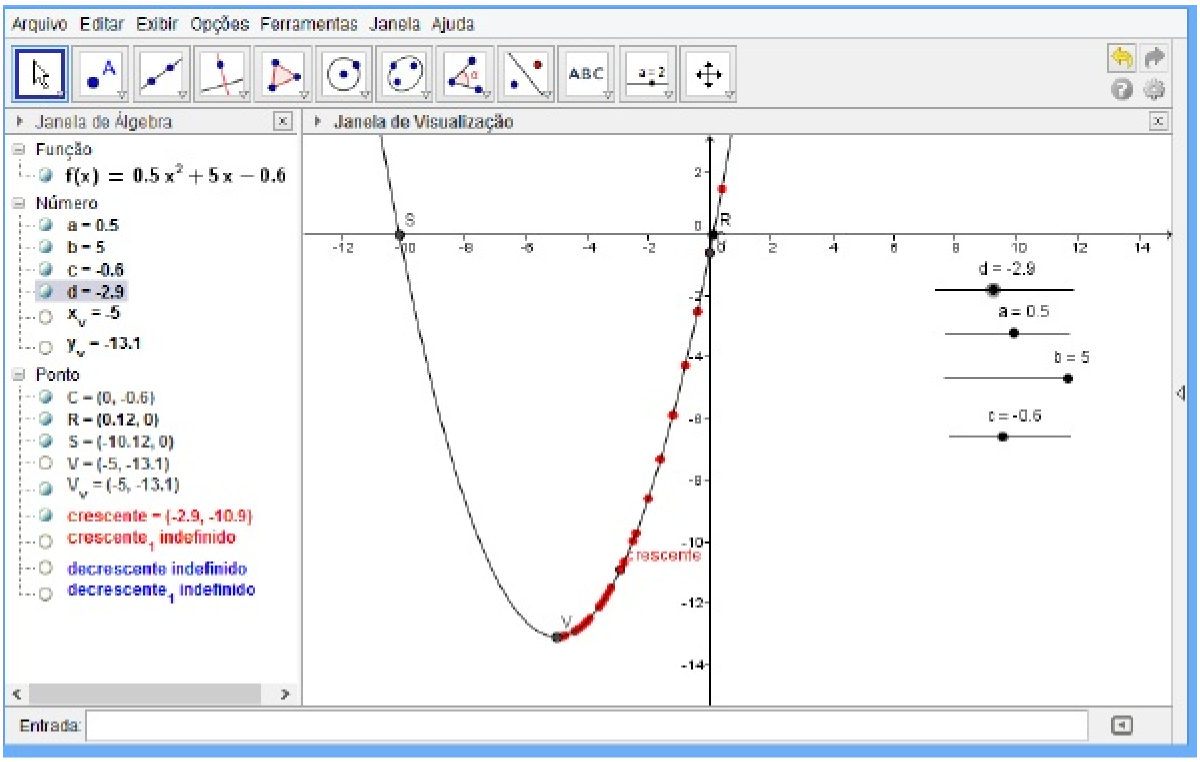

Figura 6.11 – Estudo do crescimento de uma função polinomial do segundo grau com concavidade para cima

Usa-se nesta seção o seletor d que está representando para todo $x \in \mathbb{R}$. A substituição se fez necessária, uma vez que no aplicativo não se coloca seletor x . Tal procedimento deve

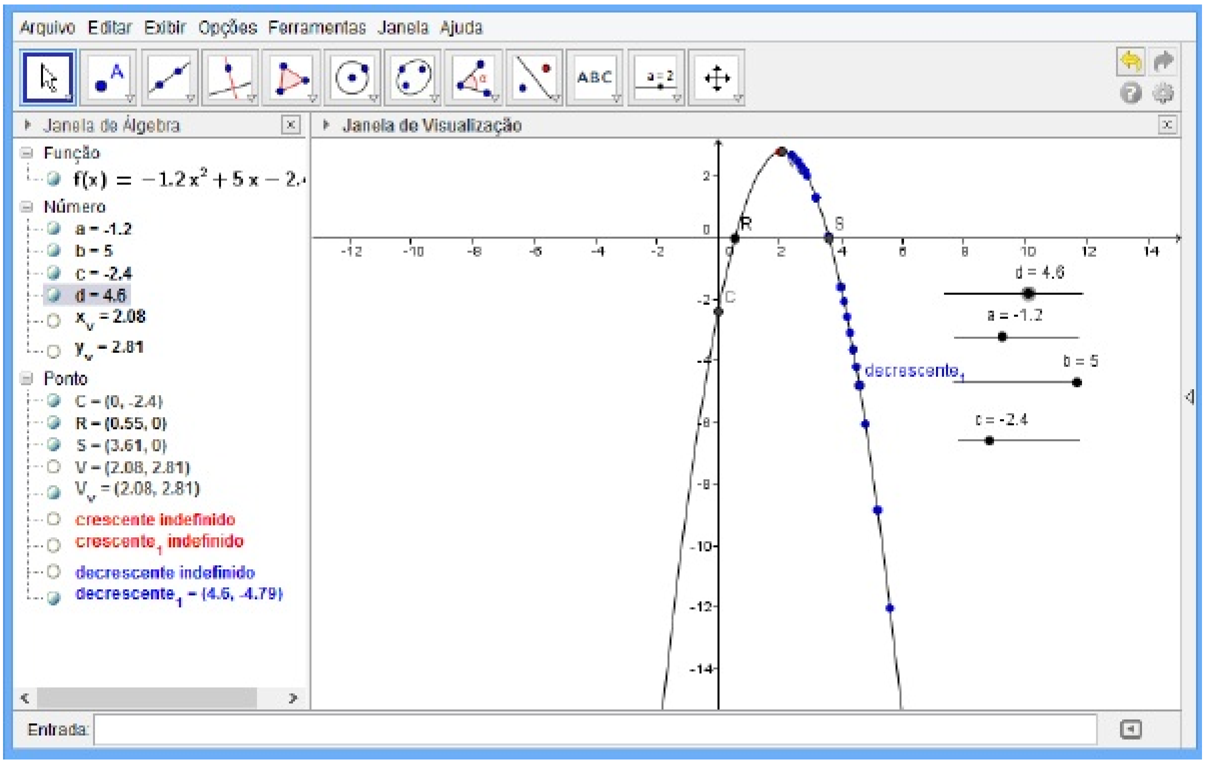

Figura 6.12 – Estudo do decrescimento de uma função polinomial do segundo grau com concavidade para baixo

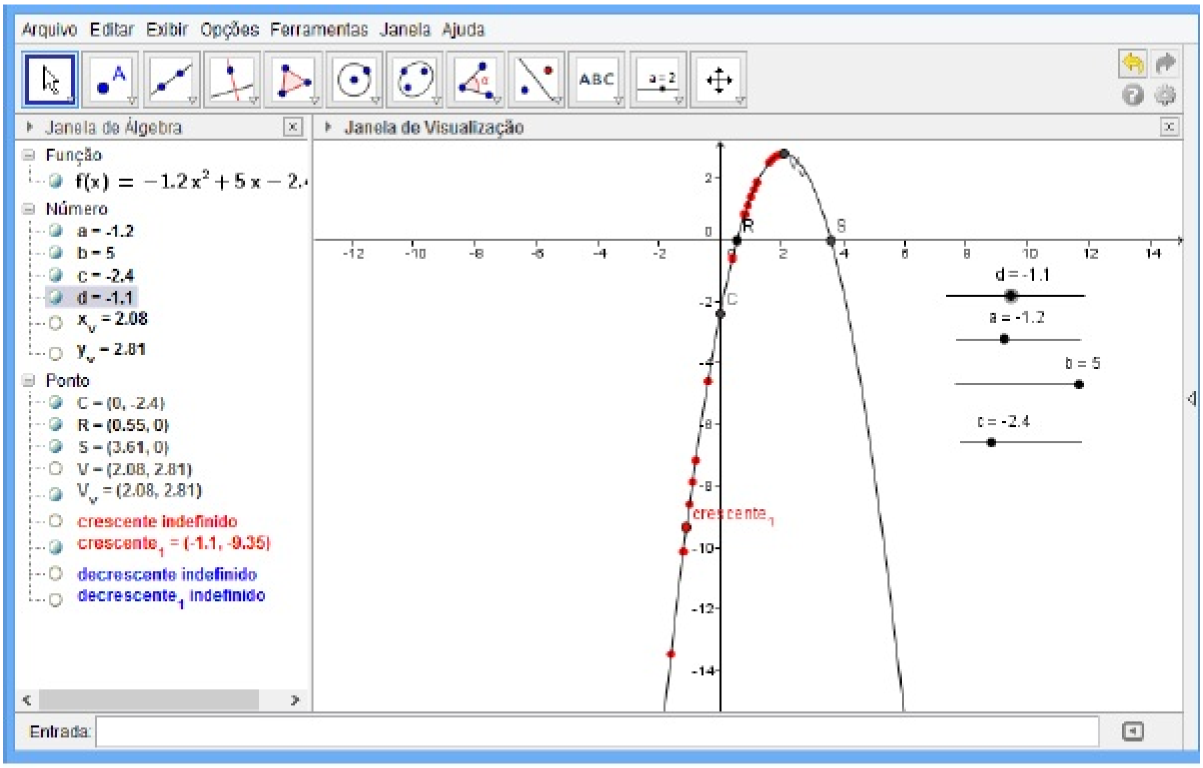

Figura 6.13 – Estudo do crescimento de uma função polinomial do segundo grau com concavidade para baixo

ser analisado pelo leitor com cuidado.

A grande vantagem do uso do GeoGebra nesta seção foi proporcionar facilidade ao estudo do crescimento ou decrescimento das funções polinomiais do segundo grau. Pode-se observar dos exemplos anteriores que trabalho tornou-se bem simples, pois apenas varia-se os seletores e o próprio software informa o comportamento da função.

6.3 Estudo do deslocamento do vértice da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ de acordo com a variação de seus coeficientes

Nesta seção, analisou-se o comportamento do vértice de uma parábola, levando em consideração a variação de cada coeficiente. Ou seja, verificou-se como o vértice da parábola se deslocava conforme a variação de cada um de seus coeficientes.

Para a realização de tal análise, seguiu-se os seguintes passos, utilizando o GeoGebra, conforme Figura 6.14.

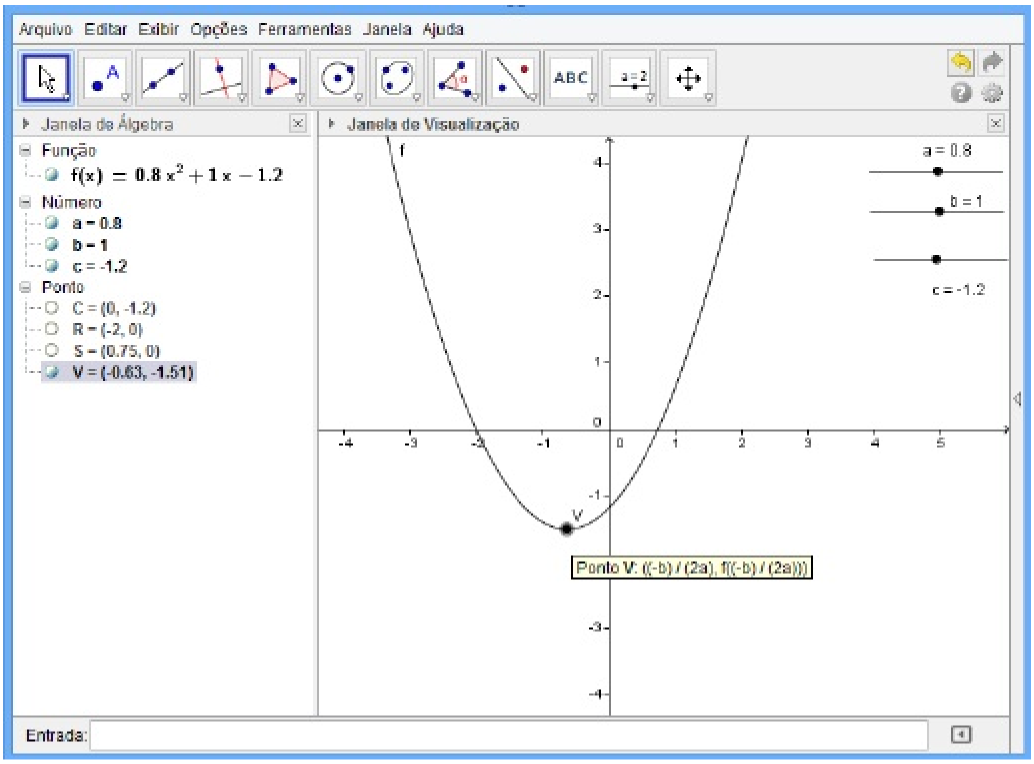

Figura 6.14 – Gráfico de uma função polinomial do segundo grau destacando o seu vértice

i. Construiu-se o gráfico de uma função polinomial do segundo grau.

ii. Destacou-se o vértice da parábola, inserindo no campo de entrada o comando $V = (x_v, y_v) = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

iii. Habilitou-se o rastro do vértice.

Para verificar o que ocorreu com o vértice (consequentemente ao seu gráfico), esta seção foi dividida em três partes I, II, III. Em cada parte, fixou-se dois dos coeficientes, variou o outro e verificou-se os resultados. fez-se um estudo algébrico e um estudo gráfico usando o GeoGebra sobre o deslocamento de alguns pontos específicos.

I. Variação do coeficiente c

Nesta seção, os coeficientes a e b foram fixados e o coeficiente c sofreu variações. Após realizada variações com o coeficiente c , fez-se um estudo gráfico de acordo com a Figura 6.15, e posteriormente finalizou-se com uma analise dos resultados através de um estudo analítico.

A Figura 6.15, representa como se deslocou o vértice da função do tipo $f(x) = 0,8x^2 + x + c$ à medida que o coeficiente c variou. O vértice se deslocou-se paralelamente

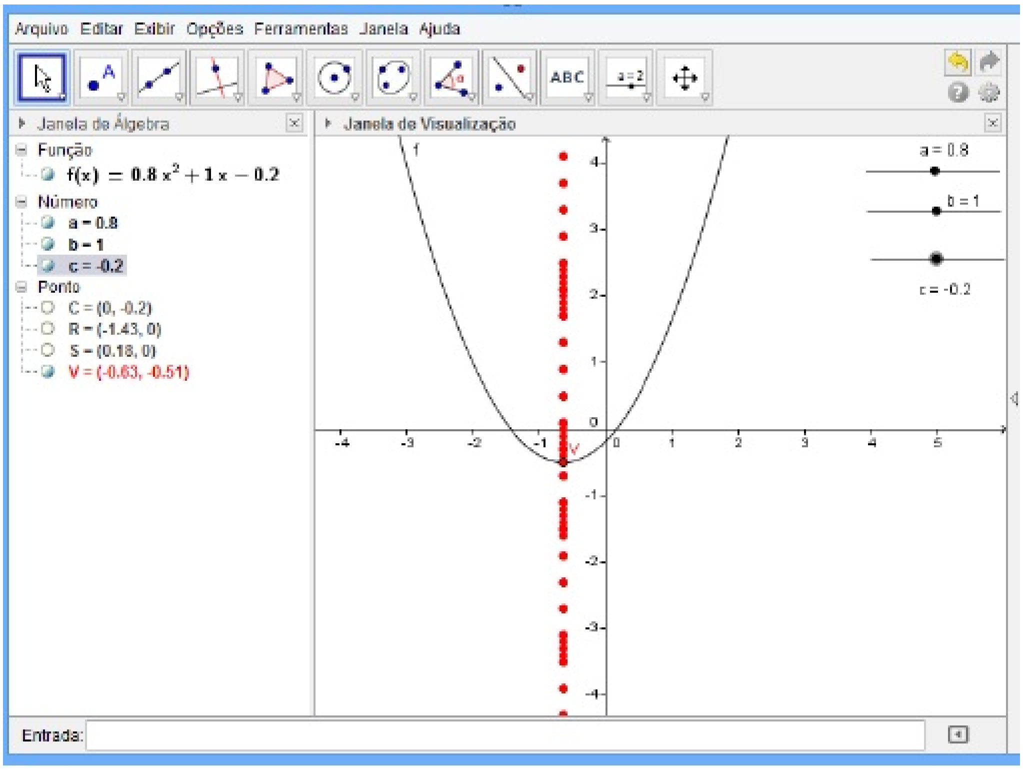

Figura 6.15 – Posições do vértice quando fixamos os coeficientes a e b e variamos o coeficiente c

ao eixo das ordenadas, conforme indica o rastro do vértice (em vermelho). Quando aumentou-se os valores do seletor c, aumentou-se o valor do y_v, transladando o gráfico no sentido positivo do eixo. Quando diminuiu-se os valores do seletor c diminuiu-se o valor do y_v, transladando assim o gráfico no sentido negativo do eixo.

Sejam a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $k \in \mathbb{R}$. Então, se variar o coeficiente c em k unidades tem-se , $f_1(x) = ax^2 + bx + c_1$ com $c_1 = c + k$. Sabe-se que a função f tem vértice no ponto $V = (x_v, y_v) = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$. Logo pode-se observar que f_1 tem a mesma abcissa

x_{v_1} do vértice V, pois ela não depende do coeficiente c. Porém, sua ordenada é:

$$y_{v_1} = \frac{-b^2+4ac_1}{4a} = \frac{-b^2+4a(c+k)}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a} + \frac{4ak}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a} + k.$$

Logo, $y_{v_1} = y_v + k$. Deste modo observa-se que o vértice V da função f sofre um deslocamento de $|k|$ unidades na direção vertical, pois $V_1(x_v, y_v + k)$. Observando também que a parábola sofre um movimento vertical quando o coeficiente c é variado, este movimento pode ser para cima ou para baixo, ou seja, se $k > 0$ a parábola se desloca para cima, e se $k < 0$ se deslocará para baixo. O deslocamento do vértice se dará ao longo da reta $x = \frac{-b}{2a}$, e todas as demais características da parábola se mantém.

II. Variação do coeficiente b

Nesta seção, os coeficientes a e c foram fixados e o coeficiente b sofrerá variações. Após realizada variações com o coeficiente b, fez-se um estudo gráfico de acordo com a Figura 6.16, e posteriormente finalizou-se com uma analise dos resultados através de um estudo analítico.

A Figura 6.16, representa a variação da posição do vértice V em que se considerou a função $y = 0{,}8x^2 + bx + 1{,}6$. Pode-se observar geometricamente, que o vértice se des-

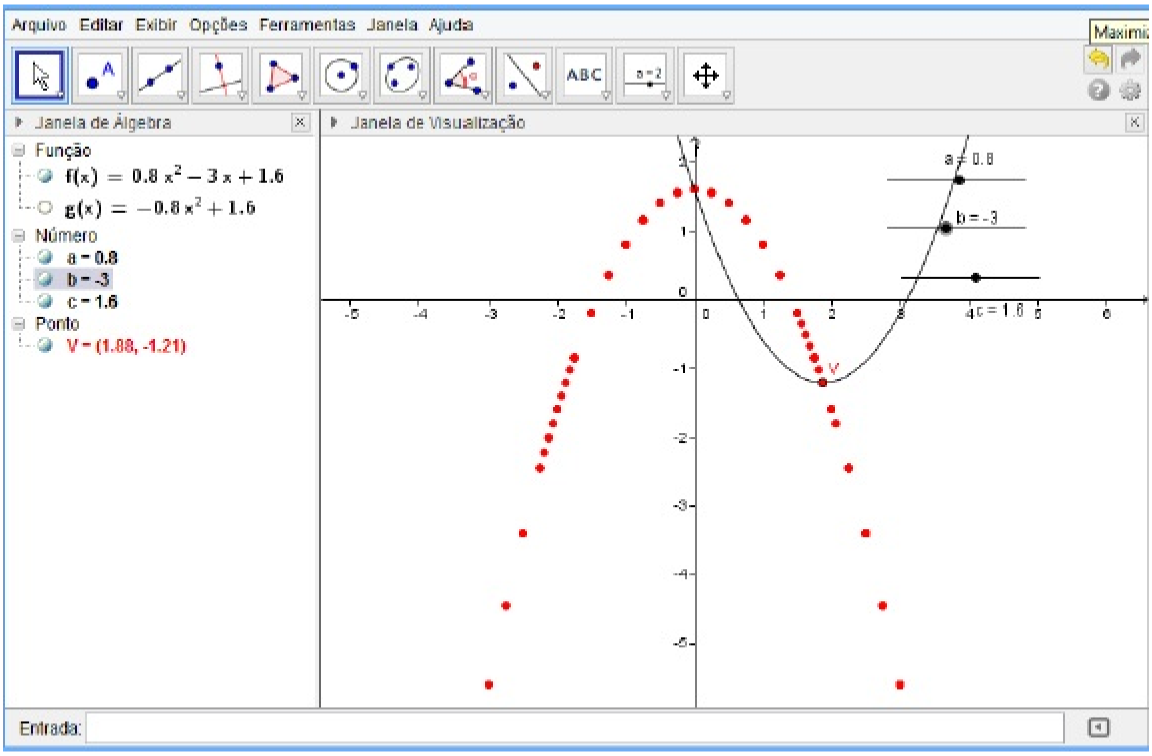

Figura 6.16 – Posições do vértice quando fixamos os coeficientes a e c e variamos o coeficiente b

loca sobre uma função auxiliar de equação $g(x) = -0{,}8x^2 + 1{,}6$, como é apresentado na Figura 6.17. Resultado: Variando o coeficiente b e mantendo a e c fixos em uma

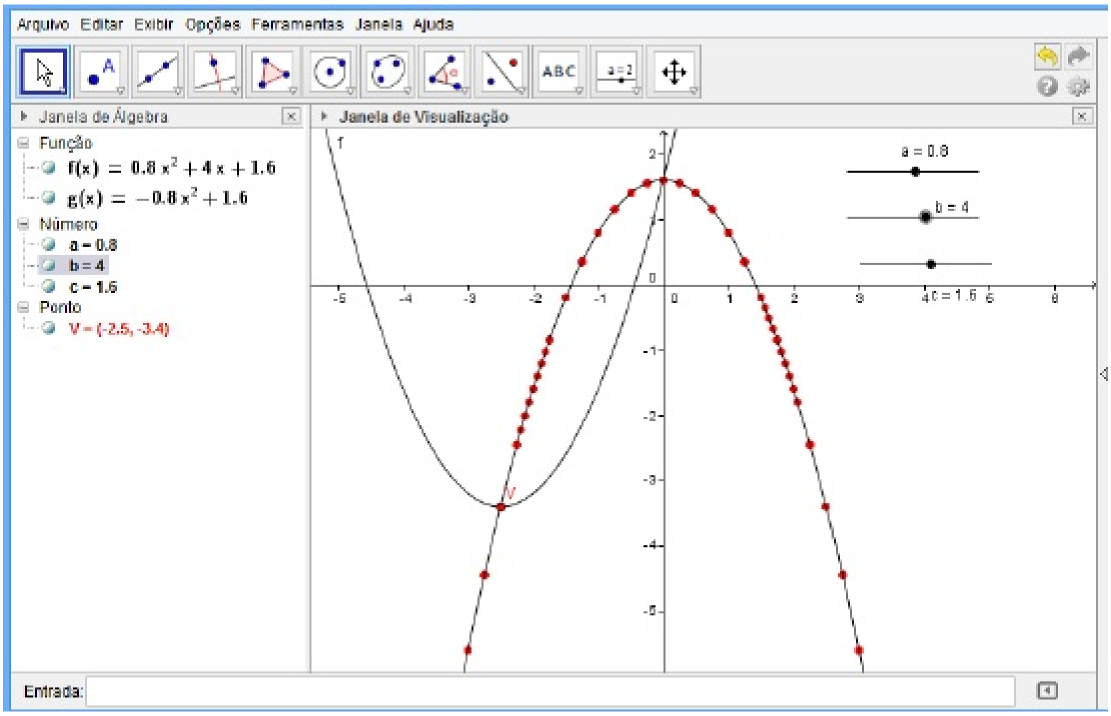

Figura 6.17 – Posições do vértice quando fixamos os coeficientes a e c e variamos o coeficiente b

função quadrática, o vértice desta função se desloca sobre uma função auxiliar semelhante à função original, porém com a concavidade invertida.No GeoGebra, tal função foi denominada $g(x)$ e é do tipo $g(x) = -ax^2 + c$.

Sejam a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $k \in \mathbb{R}$. Ao variar o coeficiente b em k unidades tem-se $f_1(x) = ax^2 + b_1x + c$, com $b_1 = b + k$.

A verificação da não variação do coeficiente c, confirmou-se que as duas funções $f(x)$ e $f_1(x)$, interceptam o eixo das ordenadas no ponto $B(0, c)$.

Sabe-se que a função f tem vértice no ponto $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Determinando a abscissa x_{v_1} do vértice V_1 de $f_1(x)$, tem-se:

$$x_{v_1} = \frac{-b_1}{2a} = \frac{-b-k}{2a} = \frac{-b}{2a} - \frac{k}{2a} = x_v - \frac{k}{2a}$$

A ordenada de V_1 é

$$y_{v_1} = \frac{-b_1^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b+k)^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 - 2bk - k^2 + 4ac}{4a}$$

ou seja,

$$y_{v_1} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} + \frac{-2bk - k^2}{4a} = y_v - \frac{k^2 + 2bk}{4a}$$

Assim tem-se o vértice $V_1 = \left(x_v - \frac{k}{2a}, y_v - \frac{k^2+2bk}{4a}\right)$ para $f_1(x)$.

Pode-se observar que tanto a abscissa quanto a ordenada depende do valor de k. Considerando a e c constantes e k como uma variação de b, k é um parâmetro para x_{v_1} e

y_{v_1}, ou seja, estão em função de k.

$$\begin{cases} i) & x_{v_1} = x_v - \frac{k}{2a} \\ ii) & y_{v_1} = y_v - \frac{k^2+2bk}{4a} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro k obtém-se y_{v_1} em função de x_{v_1}. Então, isolando k na equação $i)$ tem-se:

$$2ax_{v_1} = 2ax_v - k \Rightarrow k = 2ax_v - 2ax_{v_1} = 2a\frac{-b}{2a} - 2ax_{v_1}$$

Substituindo o valor k na equação $ii)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} y_{v_1} &= \frac{-(b^2-4ac)}{4a} - \frac{\left[(-b-2ax_{v_1})^2 + 2b(-b-2ax_{v_1})\right]}{4a} \\ &= \frac{-b^2+4ac-b^2-4abx_{v_1}-4a^2x_{v_1}^2+2b^2+4abx_{v_1}}{4a}. \\ &= \frac{4ac-4a^2x_{v_1}^2}{4a} = -ax_{v_1}^2 + c \end{aligned}$$

Portanto, a função auxiliar que descreve o movimento do vértice da parábola, quando variado o coeficiente b é fixado os coeficientes a e c será $f_v(x) = -ax_{v_1}^2 + c$.

III. Variação do coeficiente a e mantendo b e c fixos

Utilizando o GeoGebra, construiu-se os rastros do vértice V, obtidos com a variação da co foeficiente a na função tipo $y = ax^2 - 3,2x + 1,6$; à medida que variou-se o coeficiente a. A Figura 6.18, representa o deslocamento obtido da posição do vértice V.

Verificou-se via análise gráfica da Figura 6.18, que o vértice se deslocou sobre a reta auxiliar de equação $g(x) = -1,6x + 1,6$ como está apresentado na Figura 6.19. Concluiu-se que variando o coeficiente a e mantendo b e c fixos em uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, o vértice da parábola descrita por esta função desloca-se sobre uma reta, de equação $g(x) = \dfrac{bx}{2} + c$.

Sejam a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $k \in \mathbb{R} - \{a\}$. Ao variar o coeficiente a em k unidades tem-se $f_1(x) = a_1x^2 + bx + c$, com $a_1 = a + k$.

Sabe-se que a função f tem vértice no ponto $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Determinando a abscissa x_{v_1} do vértice v_1 de $f_1(x)$, tem-se:

$$x_{v_1} = \frac{-b}{2a_1} = \frac{-b}{2(a+k)} = \frac{-b}{2a+2k}.$$

A ordenada de v_1 é

$$y_{v_1} = \frac{-(b^2-4a_1c)}{4a_1} = \frac{-b^2+4(a+k)c}{4(a+k)} = \frac{-b^2+4ac+4kc}{4a+4k}$$

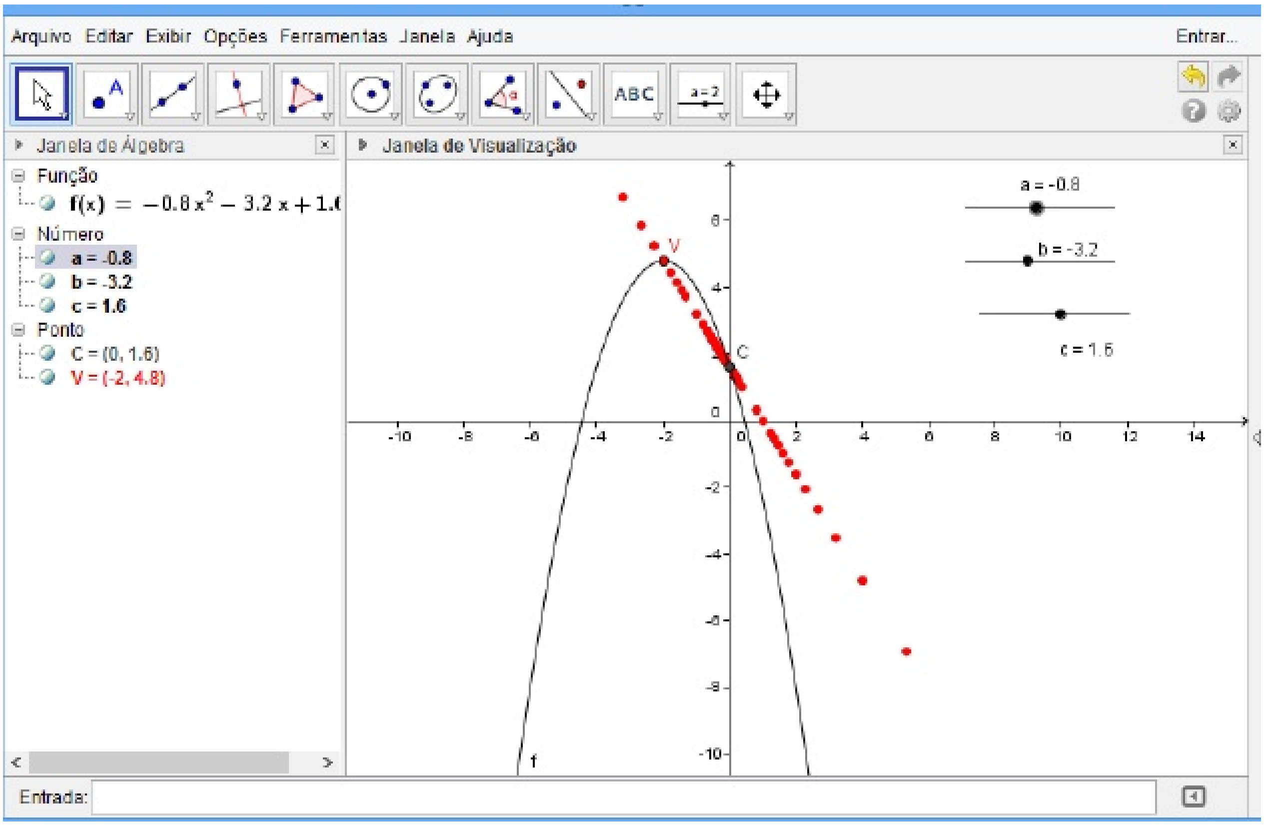

Figura 6.18 – Posições do vértice quando fixamos os coeficientes b e c e variamos o coeficiente a

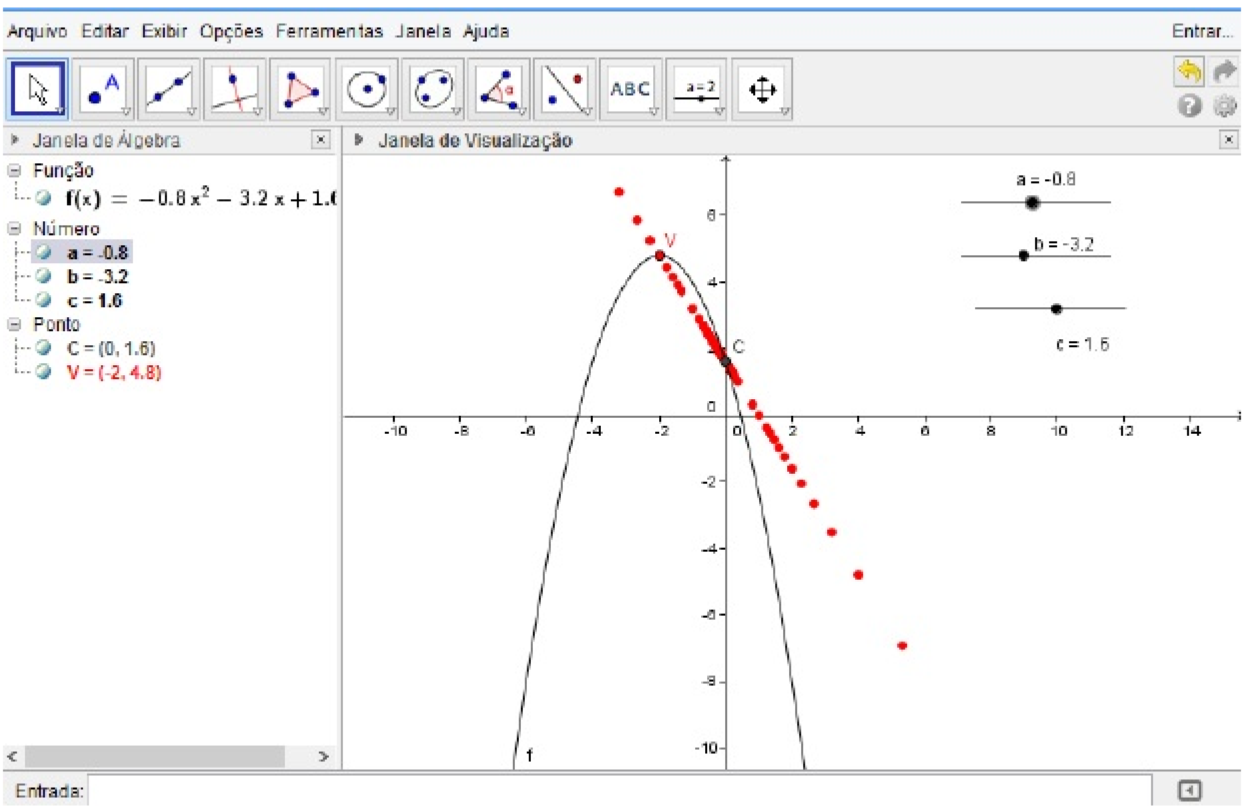

Figura 6.19 – Gráfico da função polinomial do segundo grau e da reta auxiliar onde se desloca o vértice quando variamos os coeficientes b e c e variamos o coeficiente a

Assim tem-se o vértice $V_1 = \left(\dfrac{-b}{2a+2k}, \dfrac{-b^2+4ac+4kc}{4a+4k}\right)$ para $f_1(x)$.

Pode-se observar que tanto a abscissa quanto a ordenada depende do valor de k. Considerando a, b e c constantes e k como uma variação de b, k é um parâmetro para x_{v_1} e y_{v_1}, ou seja, estão em função de k.

$$\begin{cases} i) \quad x_{v_1} & = \dfrac{-b}{2a+2k} \\[2ex] ii) \quad y_{v_1} & = \dfrac{-b^2+4ac+4kc}{4a+4k} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro k obtém-se y_{v_1} em função de x_{v_1}. Isolando k na equação $i)$, tem-se:

$$2ax_{v_1} + 2kx_{v_1} = -b \Rightarrow k = \frac{-b-2ax_{v_1}}{2x_{v_1}}.$$

Substituindo na equação $ii)$, obtém-se:

$$y_{v_1} = \frac{-b^2+4ac+4\left(\dfrac{-b-2ax_{v_1}}{2x_{v_1}}\right)c}{4a+4\left(\dfrac{-b-2ax_{v_1}}{2x_{v_1}}\right)} = \frac{-b^2+4ac+\left(\dfrac{-4b-8ax_{v_1}}{2x_{v_1}}\right)c}{4a+\left(\dfrac{-4b-8ax_{v_1}}{2x_{v_1}}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{-2b^2x_{v_1}+8acx_{v_1}-4bc-8acx_{v_1}}{2x_{v_1}}}{\dfrac{8ax_{v_1}-4b-8ax_{v_1}}{2x_{v_1}}} = \frac{-2b^2x_{v_1}-4bc}{-4b} = \frac{bx_{v_1}}{2}+c$$

Portanto, $f_v(x) = \dfrac{bx_{v_1}}{2} + c$.

Pode-se observar que $f_v(x)$ é uma função polinomial do primeiro grau, cujo gráfico é uma reta que intersecta o eixo $0y$ no ponto $(0, c)$. Logo, ao variar o coeficiente da função $f(x)$ em k unidades, o vértice se desloca sobre uma reta.

Capítulo 7

Considerações Finais

Ao concluir este estudo foi possível verificar que o assunto de funções quadráticas é muito extenso, e que com o uso de novas metodologias o processo de ensino e aprendizagem pode se tonar mais eficaz. Mais ainda, com este estudo tornou-se claro que a inserção de um software matemático, como o GeoGebra, pode-se configurar como um ótimo recurso didático para as aulas de matemática.

Neste contexto, ao utilizar geometria dinâmica, o professor propicia aos seus alunos resultados muito mais satisfatórios, o qual não obteria sem o uso das ferramentas computacionais disponíveis. Portanto, o uso de novas tecnologias e ferramentas voltadas para a educação não é meramente um "luxo", pois além de exigir uma melhor qualidade do professor para o domínio correto da tecnologia, de forma a aproveitar ao máximo suas potencialidades, também pode favorecer o aprendizado dos alunos.

Além disto, verificou-se que o uso do software GeoGebra pode facilitar ao aluno ou ao usuário o aprendizado dos conteúdos matemáticos, em particular, com a aplicação dos recursos do aplicativo torna-se possível comprovar algumas propriedades das funções quadráticas através de gráficos. O uso do software GeoGebra, pode possibilitar ao aluno, uma melhor visão das demonstrações geométricas de conceitos algébricos e desta forma pode possibilitar um melhor entendimento das funções polinomiais como um todo, tais como: uma construção gráfica com maior rigor e facilidade, a visualização das raízes reais de uma função, a análise dos vértices da parábola e dos pontos de máximo e mínimo, dentre outros.

Um trabalho eficiente, utilizando recursos do GeoGebra, pode garantir aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos, contudo o software sozinho não é capaz de garantir as respostas ao aluno, uma vez que os conceitos algébrico/analíticos mostram-se sempre necessários para fundamentar as conclusões.

Não é apenas ver o gráfico produzido e crer que é assim que funciona. É preciso, além do uso do software, um conhecimento amplo sobre o assunto e é isso que esse trabalho buscou mostrar.

Quanto ao uso dos coeficientes nas funções quadráticas, pode-se observar como influenciam no comportamento do gráfico, e é óbvio, que sem o auxílio de um software, estas visualizações tornar-se-iam muito difíceis de serem alcançadas.

A partir deste estudo é possível abrir a mente para uma série de novas possibilidades, de outras perspectivas, e de novos estudos a serem feitos.

Capítulo 8

Referências

AZEVEDO, Ricardo Santos de. *Resolução de Problemas no ensino de Função Afim.* Dissertação de mestrado. Rio de Janeiro; IMPA, 2013.

BRASIL.Ministério da Educação. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996.* Brasília: MEC, 1996

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).* Brasília: MEC, 2000.

BOSQUILHA, A.; CORRÊA, M.; VIVEIRO, T. *Minimanual Compacto de Matemática: Ensino Médio – Teoria e Prática.* 2. ed. São Paulo, SP: Rideel, 2003.

BOYER, C. B. *História da Matemática* 2. ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher LTDA., 2003.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer.* 2.ed.São Paulo: Editora Ática, 1993.

FERREIRA, Luiz Antonio Miguel.*Evasão Escolar.* Disponível em: http://www.abmp.org.br /textos/159.htm. Acesso em 13/05/2016.

FONSECA, Artur Filho e ALQUERÉS Hubert. *Um novo olhar.*Revista Educação. Editora Segmento. Ano 12 – nº 143, 2009.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários para a prática educativa.* Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1998.

GIRALDO, V.; CAETANO, P,; MATTOS, F.. *Recursos computacionais no ensino de Matemática.* 1ª. Ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2013.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria Costi.*A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. Informática na Educação: Teoria e Prática,* vol. 1, n. 1. Porto Alegre: UFRGS – Curso de Pós-Graduação em Informática na Educação, 1998.

KALINKE, Marco Aurélio. *Para não ser um professor do século passado.* Curitiba: Gráfica Expoente, 1999.

KUENZER, Acácia. *Ensino Médio e Profissional: as políticas do Estado neoliberal.* São Paulo: Cortez, 1997.

LEITE. Ana Carolina dos Santos Martins. *Ensino Médio Integrado? A questão da dualidade histórica no ensino secundário.* Revista Saberes em Perspectiva. Vol. 4, n. 9, 2014. Presente in: http://www.saberesemperspectiva.com.br/index.php/saberesemperspectiva/article/ view/102. Acesso 20/06/2016.

LIMA, E. L. et al. *Temas e Problemas Elementares.* 12. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção do Professor de Matemática)

LIMA, E. L. et al.*A Matemática do Ensino Médio. 9. ed. Rio de Janeiro*: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Volume 1. (Coleção do Professor de Matemática)

LIMA E. L. et al.*Meu professor de Matemática.* 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção do Professor de Matemática)

MACHADO, Nilson José. *Matemática e Realidade.* São Paulo: Cortez, 1987.

MARQUES, Adriana Cavalcanti; CAETANO, Josineide da Silva. *Utilização da informática na escola. In: Novas Tecnologias na Educação: reflexões sobre a prática.* Luiz Paulo Mercado (Org.). Maceió: EDUFAL, 2002.

MELO, A. L. C. D. & SILVA, G. S. C., *Utilização do Software GeoGebra como ferramenta auxiliar ao estudo das funções quadráticas no ensino fundamental e médio.* GT5 - Educação, Comunicação e Tecnologias. SE: Instituto Federal de Sergipe, 2011.

PARO, Vitor H. *Gestão democrática da escola pública.* Ática, 2002

REIS, Ernesto Macedo. *Ensino de Ciências com Tecnologias – Seer* UFGRS –2010, p. 4 e 5

SILVA, R. A; *Funções Quadráticas e suas Aplicações no Ensino Médio.* Dissertação de Mestrado - IMPA. RJ. 2013

SOUZA, R, M; *O uso do geogebra no ensino da função quadrática.* Dissertação de Mestrado Santarém, 2014.