Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Quando a soma e o produto entre números naturais coincide?

Juliana Cássia Reis

Orientador: Prof. Dr. Ângelo Calil Bianchi

São José dos Campos
Abril, 2017

PROFMAT

Título: *Quando a soma e o produto entre números naturais coincide?*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Abril, 2017

Reis, Juliana Cássia

Quando a soma e o produto entre números naturais coincide? , Juliana Cássia Reis – São José dos Campos, 2017.

viii, 40f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Natural numbers: sum equal to the product?

1. Problema da soma igual ao produto. 2. Soma. 3. Produto. 4. Partições.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe do Departamento:
Prof. Dr. Carlos Marcelo Gurjão de Godoy

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

Juliana Cássia Reis

QUANDO A SOMA E O PRODUTO ENTRE NÚMEROS NATURAIS COINCIDE?

Presidente da banca: Prof. Dr. Ângelo Calil Bianchi

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Prof. Dr. Michael Macedo Diniz

Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello

Data da Defesa: 20 de abril de 2017

A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas, também, suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.

Bertrand Russell

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela vida, uma experiência única, onde passamos por vitórias e derrotas, compartilhando alegrias e tristezas.

À minha mãe, aos meus irmãos, aos meus filhos e ao meu esposo, pelo amor, incentivo e apoio.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ângelo Calil Bianchi, pela paciência, dedicação, competência e atenção nas revisões e sugestões.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos de Mestrado.

Ao corpo docente, por todos os conhecimentos e experiência que compartilhamos durante estes dois anos.

Aos colegas, especialmente Gilvânia e Fausto, pelos momentos, angústias e sentimentos que partilhamos.

À meus tios Irene e Roberto, pelo carinho que me acolheram e pelo apoio.

Enfim, todos aqueles que estiveram ao meu lado e contribuíram, direta ou indiretamente, para esta conquista.

RESUMO

Este trabalho aborda a questão da igualdade entre o produto e a soma de uma quantidade finita de números naturais. A abordagem é bastante natural, intuitiva e construtiva, estabelecida utilizando as operações de adição e multiplicação de números naturais, juntamente das suas propriedades, para explorar e comparar expressões algébricas. São apresentados resultados quantitativos e qualitativos sobre o conjunto de soluções deste problema. Além disto, uma proposta didática é apresentada para trabalhar este problema no Ensino Fundamental e Médio.

Palavras-chave: Problema da soma igual ao produto, Soma, Produto, Partições.

ABSTRACT

This work addresses the question of equality between the product and the sum of a finite number of natural numbers. The approach is quite natural, intuitive and constructive, established using the operations of adding and multiplying natural numbers together with their properties to explore and compare algebraic expressions. Quantitative and qualitative results are presented on the solution set of this problem. In addition, a didactic proposal is presented to work on this problem in Elementary and Middle School.

Keywords: Sum equal to the product, Sum, Product, Partitions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Um dos objetivos centrais da Matemática escolar é fazer com que o aluno compreenda o conceito de número e as operações realizadas com estes, utilizando-as de maneira flexível e estratégica para resolver situações do dia-a-dia. Sendo assim, as investigações numéricas contribuem, decisivamente, para desenvolver a compreensão dos números e operações, permitindo a formulação, teste de conjecturas e a procura de generalizações.

Neste sentido, desenvolvemos um trabalho que explorará diversos aspectos de uma questão que pode ser estabelecida com o simples conhecimento das duas operações elementares entre números naturais: *"Quando a soma e o produto de números naturais coincidem?"*. A qual, por outro lado, pode ser modelada e abordada de diversas maneiras, com questionamentos desde imediatos até perguntas ainda em aberto. A origem desta questão é incerta, pois pode ser considerada no âmbito dos números naturais – o qual veremos aqui–, mas, também, no dos Números Racionais e, mais geralmente, no dos Números Reais, onde não é difícil procurar exemplos (por exemplo, $4 \cdot 4/3 = 4 + 4/3 = 16/3$). Parcialmente, esta origem é inspirada numa conhecida propriedade dos triângulos[1] :

- Num triângulo ABC, a soma e o produto das tangentes coincide, isto é,

$$\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C = \text{tg}A \cdot \text{tg}B \cdot \text{tg}C,$$

a qual é verificada de forma direta. Além de se relacionar com uma questão, também geométrica, recentemente abordada e estabelecida[2] em [2]:

- Existe um triângulo ABC, a menos de semelhança, cujas três tangentes dos seus ângulos internos são números inteiros: os ângulos internos satisfazem $\text{tg}A = 1$, $\text{tg}B = 2$ e $\text{tg}C = 3$.

No primeiro capítulo, apresentaremos os conceitos fundamentais para o desenvolvimento e a comprovação dos resultados utilizados no decorrer do trabalho, tais como a *Prova por Indução Matemática* e o *Teorema Fundamental da Aritmética.* Além disso, apresentaremos o conceito de *partição.*

[1] [2] desconhecemos uma referência histórica destas questões

O segundo capítulo é destinado à apresentação e formulação da questão acima, a qual chamaremos de *"Problema da Soma igual ao Produto"*. Consta, ainda as questões norteadoras, que buscam sedimentar a pertinência do problema e a existência de soluções. Ainda no segundo capítulo, são delineadas algumas propriedades qualitativas e quantitativas das soluções. Para finalizar, apresentamos um algorítimo que permite construir soluções específicas deste problema e um extenso exemplo que ilustra o processo de solução.

Por fim, no terceiro capítulo, sugerimos uma proposta didática relacionada ao problema estudado, no padrão de uma aula expositiva, que busca ser interativa, investigativa e com inclusão digital. Para isto, utilizamos ferramentas tecnológicas, além de um processo com questionamentos que instiga os alunos a manifestarem criticamente, trocando ideias com os colegas e com o professor.

A referência básica utilizada para a parte de Teoria dos Números é [7] e para toda a parte específica do problema abordado é [2, 3, 6].

1

PRELIMINARES

Neste Capítulo apresentaremos o Princípio da Indução Matemática, o conceito de partições de números inteiros positivos e o Teorema Fundamental da Aritmética. Estes três itens são ferramentas amplamente utilizadas nas demonstrações deste trabalho e o alicerce teórico que apoia a questão central a ser discutida.

1.1 PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Esta seção é dedicada ao Princípio de Indução Matemática ou Princípio de Indução Finita. A prova por Indução Matemática é utilizada para a validação de resultados que envolvem certos subconjuntos infinitos do conjunto dos números naturais.

Veremos a seguir uma propriedade particular dos números naturais: o Axioma de Indução.

(Axioma de Indução) Seja $S \subset \mathbb{N}$ tal que $0 \in S$ e vale a implicação

$$\forall\, n, n \in S \Rightarrow n+1 \in S.$$

Então, $S = \mathbb{N}$.

Solidificado no Axioma de Indução, temos:

Teorema 1.1. *(Princípio de Indução Matemática) Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $p(n)$ uma sentença aberta em n. Suponha*

1. *$p(a)$ é verdadeira;*
2. *$\forall n \geq a$, $p(n)$ verdadeira $\Rightarrow p(n+1)$ é verdadeira.*

Então, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Demonstração. Seja $V = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ é verdadeira }\}$, ou seja, V é um subconjunto dos elementos de $\mathbb{N}$ para os quais $p(n)$ é verdadeira. Considere o conjunto

$$S = \{m \in \mathbb{N} \mid a+m \in V\}.$$

Note que $a + S \subseteq V$.

Pela condição (1), temos $a + 0 = a \in V$, de onde segue que $0 \in S$. Por outro lado, se $m \in S$, então $a + m \in V$ e, pela condição (2), temos $a + m + 1 \in V$. Logo, $m + 1 \in S$. Logo, pelo Axioma de Indução, $S = \mathbb{N}$. Portanto,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq a\} \subseteq V,$$

o que demonstra o resultado. □

O processo de verificação de que $p(a)$ é verdadeira é o passo base da indução matemática e a prova de que a validade de $p(n)$ implica na validade $p(n+1)$ é o passo indutivo. Note que o passo indutivo não exige que $p(n)$ seja verdadeira para todo n, mas que, se $p(n)$ é verdadeira para algum n, então $p(n+1)$ também será verdadeira.

Exemplo 1.2. *Vamos demonstrar, por indução, que:*

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração Considere a sentença aberta:

$$p(n) : 1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$$

Passo base*: $p(1)$ é verdadeira, pois*

$$1.1! = 1 = (1+1)! - 1.$$

Passo indutivo *: Supondo que $p(n)$ é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é,*

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1,$$

queremos provar que $p(n+1)$ é verdadeira. Vejamos:

$$\begin{aligned} & 1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! + (n+1).(n+1)! \\ = {} & (n+1)! - 1 + (n+1).(n+1)! = (n+1)!(n+2) - 1 \\ = {} & (n+2)! - 1 = ((n+1)+1)! - 1, \end{aligned}$$

sendo a primeira igualdade decorrente da Hipótese de Indução.

Isto mostra que $p(n+1)$ é verdadeira toda vez que $p(n)$ é verdadeira. Portanto, pelo Princípio de Indução $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

A Indução Matemática é empregada, essencialmente, para estabelecer propriedades matemáticas válidas em subconjuntos de $\mathbb{N}$, sem a verificação explícita para todos os casos em questão. No entanto, não se trata de uma indução empírica a partir da observação de uma quantidade finita de casos.

Uma outra versão equivalente ao teorema anterior, também apoiada no Axioma de Indução, é a seguinte:

Teorema 1.3. *(Princípio de Indução Matemática, versão forte) Seja $p(n)$ uma sentença aberta tal que*

1. *$p(a)$ é verdadeira, e que*
2. *$\forall n$, $p(a)$, $p(a+1)$, $\ldots$, $p(n)$ verdadeira $\Rightarrow p(n+1)$ é verdadeira.*

Então, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

A prova por indução na versão forte permite que no segundo passo nós não apenas assumamos que o enunciado vale para $n = a$, mas, também, para todo $a \leq n$. Esta versão será utilizada na próxima seção para demonstrar o Teorema Fundamental da Aritmética.

1.2 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Iniciaremos esta seção com o conceito de divisibilidade, a seguir apresentaremos o conceito de número primo e o Teorema Fundamental da Aritmética, o alicerce da Teoria dos Números. A teoria que envolve os números primos é um dos conceitos mais relevantes da Matemática. Estes números ainda intrigam cientistas, especialmente matemáticos, tanto na resolução de famosos problemas que atravessam gerações, como em alguns desafios tecnológicos modernos, tal como a criptografia RSA.

Definição 1.4. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que m divide n e denotamos por $m \mid n$, quando existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = qm$. Também são utilizadas as expressões m é um divisor (ou fator) de n, n é um múltiplo de m ou n é divisível por m.*

As propriedades sobre divisibilidade são apresentadas a seguir:

Proposição 1.5.

1. *Todo número natural é divisível por 1, ou seja, $1 \mid n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.*
2. *Todo número natural é divisível por ele mesmo, ou seja, $n \mid n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*
3. *Todo número natural divide zero, ou seja, $n \mid 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

4. *O único número que tem o zero como divisor é o próprio zero, ou seja,* $0 \mid n \Leftrightarrow n = 0$.

5. *Se* $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n_1 \mid n_2$ *e* $n_2 \mid n_3$, *então* $n_1 \mid n_3$.

6. *Se* $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n_1 \mid n_2$ *e* $n_1 \mid n_3$, *então* $n_1 \mid n_2 + n_3$.

Demonstração. Os itens 1., 2. e 3. decorrem diretamente das igualdades

$$n = n \cdot 1, \qquad n = 1 \cdot n \qquad \text{e} \qquad 0 = 0 \cdot n.$$

4. Partiremos do princípio que $0 \mid n$. Temos com isso que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = q \cdot 0$, o que implica $n = 0$. Para a recíproca basta observar que $0 \mid 0$, o que foi provado no item anterior.

5. Se $n_1 \mid n_2$ e $n_2 \mid n_3$, existem $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, tais que $n_2 = q_1 n_1$ e $n_3 = q_2 n_2$. Substituindo o valor de n_2 da primeira equação na outra, obtemos

$$n_3 = q_2 n_2 = q_2(q_1 n_1) = (q_2 q_1) n_1 = q n_1, \text{onde } q = q_1 q_2 \in \mathbb{N}.$$

   o que nos mostra que $n_1 \mid n_3$.

6. Se $n_1 \mid n_2$ e $n_1 \mid n_3$ logo existem $q_2, q_3 \in \mathbb{N}$, tais que $n_2 = q_2 n_1$ e $n_3 = q_3 n_1$. Então,

$$n_2 + n_3 = q_2 n_1 + q_3 n_1 = (q_2 + q_3) n_1 = q n_1, \text{ onde } q = (q_1 + q_2) \in \mathbb{N},$$

   o que mostra que $n_1 \mid n_2 + n_3$.

□

O estudo da divisibilidade entre números naturais leva ao conceito de números primos:

Definição 1.6. *Um número natural maior do que* 1 *é chamado de número primo se possui exatamente dois divisores positivos: o número* 1 *e ele próprio. Caso contrário, é dito um número composto.*

Tendo por base a estrutura multiplicativa dos naturais, os números primos são suficientes para construir $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Teorema 1.7. *(Teorema Fundamental da Aritmética) Todo número natural maior que* 1 *ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem de fatores) como produto de números primos.*

Demonstração. Utilizaremos a versão forte do Princípio de Indução. Se $n = 2$, existe uma decomposição trivial em números primos, já que 2 é um número primo.

Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para todo número natural menor do que n e verificaremos que o resultado também vale para n. Se o número n é primo nada temos a demostrar, visto que ele admite a decomposição trivial. Suponhamos, então, que n seja composto. Logo, existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1, n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1, \ldots, p_r$ e $q_1, \ldots, q_s$ tais que $n_1 = p_1 ... p_r$ e $n_2 = q_1 ... q_s$. Portanto, $n = p_1 ... p_r q_1 ... q_s$.

Provaremos, agora, a unicidade da escrita. Suponha que tenhamos

$$n = p_1 \ldots p_r = q_1 \ldots q_s,$$

onde os p_r e os q_s são número primos. Como $p_1 \mid q_1 \ldots q_s$, segue que $p_1 = q_s$ para algum s e, após reordenamento de $q_1 \ldots q_s$, podemos supor que seja q_1. Portanto,

$$p_2 \ldots p_r = q_2 \ldots q_s.$$

Como $p_2 \ldots p_r < n$, a hipótese de indução nos fornece $r = s$ e os p_r e q_s são iguais aos pares. $\square$

Quando consideramos a decomposição enunciada no Teorema 1.7, ao agruparmos todos os primos repetidos e ordená-los em ordem crescente, obtemos:

Corolário 1.8. *Dado um número natural $n \neq 0, 1$, existem primos $p_1 < \cdots < p_r$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, univocamente determinados, tais que $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$.*

Ainda utilizando a decomposição em fatores primos, podemos determinar os divisores de um número.

Corolário 1.9. *Seja $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ um número natural, com $p_1 < \cdots < p_r$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$. Se n' é um divisor positivo de n, então $n' = p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r}$, com $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, para $i = 1, \ldots, r$.*

Demonstração. Seja n' um divisor positivo de n e seja p^β uma potência de um primo p que figura na decomposição de n' em fatores primos. Como $p^\beta \mid n$, segue que p^β divide algum $p_i^{\alpha_i}$, por ser primo com os demais $p_i^{\alpha_i}$. Logo, $p = p_i$ e $0 \leq \beta \leq \alpha_i$. $\square$

1.3 PARTIÇÕES DE NÚMEROS NATURAIS

Apresentaremos nesta seção dois tipos de partições de números naturais, sendo uma decorrente da sua estrutura aditiva e a outra da sua estrutura multiplicativa.

1.3.1 *Partições Aditivas de Números Naturais*

Inicialmente exibiremos algumas considerações sobre o conceito de partição aditiva de números naturais.

Definição 1.10. *Dado $n \in \mathbb{N}$, uma partição aditiva de n é uma sequência não-decrescente de números naturais $(x_1, x_2, \ldots, x_j)$ tais que $\sum_{i=1}^{j} x_i = n$. Cada x_i é chamado de uma parte da partição. Denota-se por $a(n)$ o número de partições aditivas do número n.*

A partição aditiva (n), para $n \in \mathbb{N}$, é chamada de *partição aditiva trivial.*

Exemplo 1.11. *As partições aditivas do número 4 são*

$$\{(4), (1,3), (2,2), (1,1,2), (1,1,1,1)\}.$$

Portanto, $a(4) = 5$.

A existência de uma partição aditiva não trivial de um número natural $n > 1$ é fácil e intuitivamente verificada, pois

$$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}},$$

ou seja, todo número natural é construído aditivamente com cópias do número 1, e, então, podemos substituir somas parciais $1+1$ por 2, $1+1+1$ por 3, $1+1+2$ por 4 e assim por diante (sempre que estas somas fizerem sentido).

No entanto, uma questão bastante difícil é entender o comportamento da sequência $a(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Existem fórmulas de recorrência e de aproximação assintótica, por exemplo a famosa fórmula desenvolvida por Godfrey Harold Hardy e Srinivasa Ramanujan, em 1918, e de forma independente por James Victor Uspensky, em 1920 (detalhes e ampla exposição em [4, Capítulos 6 e 8]):

$$a(n) \approx \frac{exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4n\sqrt{3}} \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

1.3.2 *Partições Multiplicativas de Números Naturais*

Similarmente ao introduzido na seção anterior, podemos considerar o conceito de partição multiplicativa de números naturais.

Definição 1.12. *Dado $n \in \mathbb{N}$, uma partição multiplicativa de n é uma sequência não-decrescente de números naturais $(x_1, x_2, \ldots, x_j)$ tais que $x_1, \ldots, x_j > 1$ e $\prod_{i=1}^{j} x_i = n$. Cada x_i é chamado de uma parte da partição. Denota-se por $m(n)$ o número de partições do número n.*

A partição multiplicativa (n), para $n \in \mathbb{N}$, é chamada de *partição multiplicativa trivial.*

Exemplo 1.13. *As partições multiplicativas do número 4 são $\{(4), (2, 2)\}$. Portanto, $m(4) = 2$.*

A existência de partições multiplicativas de um número natural $n > 1$ em partes menores que n não é mais uma tarefa simples, na verdade é infactível para os números primos. Por outro lado, por definição, se um número não é primo, ele admite uma partição multiplicativa não trivial. O problema se torna determinar os divisores deste número, uma tarefa bastante complicada, até com apelo computacional.

Claro que, se conhecemos a decomposição garantida pelo Teorema Fundamental da Aritmética para um certo número $n \in \mathbb{N}$, então suas partições multiplicativas são obtidas a partir de agrupamentos dos seus fatores primos (com possível repetição) e, neste caso, encontrar $m(n)$ se torna apenas um simples problema de combinatória. Por outro lado, dado $n \in \mathbb{N}$, é extremamente difícil determinar $m(n)$.

Exemplo 1.14. *A decomposição em fatores primos do número 24 é $2^3 \cdot 3$. Os possíveis números naturais obtidos como produtos envolvendo os números $\{2, 2, 2, 3\}$, são $\{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Logo, as possíveis partições multiplicativas de 24 são*

$$\{(24), (2, 12), (2, 2, 6), (2, 2, 2, 3), (2, 3, 4), (4, 6)\}.$$

Portanto, $m(24) = 6$.

1.3.3 *Partições Aditivas versus Partições Multiplicativas*

Na definição de partição aditiva não permitimos partes iguais a 0, pois isto poderia acrescentar tantas partes quanto quiséssemos. Similarmente, na definição de partição multiplicativa não permitimos partes iguais a 1, pois também poderíamos ter qualquer quantidade destas partes numa partição multiplicativa.

Uma questão natural é saber *se existem números que possuem uma partição aditiva e uma partição multiplicativa não triviais com exatamente as mesmas partes.*

Exemplo 1.15. *O número 4 possui uma partição aditiva e uma partição multiplicativa com exatamente as mesmas partes: $4 = 2 + 2 = 2 \cdot 2$. Veremos que este é o* *único caso de igualdade entre partições com duas partes e que isto não acontece com outro número com partições com três ou mais partes.*

No próximo capítulo o conceito de partições aditivas e partições multiplicativas *"com a permissão de partes iguais a um"* estará implícito no contexto da análise da equação-objeto a ser estudada e a última afirmação do exemplo acima será justificada.

2

O PROBLEMA DA SOMA IGUAL AO PRODUTO

Através do Teorema Fundamental da Aritmética e da noção de partição, concluímos que cada número natural pode ser decomposto através de um produto e de uma soma de números naturais. Veremos neste Capítulo que existem casos em que estas duas decomposições podem ser feitas utilizando exatamente os mesmos números, ou seja, buscaremos responder à seguinte questão:

É possível que a soma e o produto de n números naturais sejam iguais?

De modo mais específico, podemos modelar este problema com a linguagem de equações:

Dado $n \in \mathbb{N}$, a equação nas variáveis independentes $x_1, \dots, x_n$ dada por

$$x_1 + \cdots + x_n = x_1 \dots x_n.$$

admite solução no conjunto dos números naturais?

Chamaremos este problema de **"Problema da Soma igual ao Produto"**, abreviado por **Problema SIP**.

Uma vez encontrada uma n-upla satisfazendo o Problema SIP, é claro que todas as suas permutações também são soluções. Desse modo, por simplicidade, consideraremos apenas soluções ordenadas

$$x_1 \leq \cdots \leq x_n.$$

Além disto, utilizaremos a expressão de que uma upla (ou sequência) é solução do Problema SIP quando for solução para o Problema SIP para algum valor específico de n na formulação acima.

As questões que nortearão as seções a seguir são:

1. O Problema SIP possui solução para cada $n \in \mathbb{N}$?

2. O conjunto das soluções do Problema SIP é finito para cada $n \in \mathbb{N}$?

3. Existe uma estratégia para encontrar uma solução para o Problema SIP para cada $n \in \mathbb{N}$?

Usaremos as seguintes notações:

$$A(n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = x_1 \dots x_n\}$$

e

$$\#A(n) = \text{a cardinalidade do conjunto } A(n).$$

Ao longo deste capítulo responderemos às questões 1), 2) e 3) acima e apresentaremos algumas propriedades qualitativas e quantitativas das soluções do Problema SIP.

2.1 PERTINÊNCIA

O Problema SIP está bem formulado por ser o modelo para uma pergunta plausível do ponto de vista da Teoria dos Números, sem inconsistências e com exemplos facilmente encontrados. Além disso, ele pode ser visto como um caso extremo relacionado a uma inequação, o que será apresentado a seguir.

Teorema 2.1. *Dados $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}$ com $x_1, x_2 > 1$, temos $x_1x_2 \geq x_1 + x_2$. A igualdade só acontece para $x_1 = x_2 = 2$.*

Demonstração. Observe que $x_1x_2 - (x_1 + x_2) = (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1$. Pela hipótese $x_1, x_2 > 1$, ou seja, $x_1, x_2 \geq 2$, temos

$$\underbrace{(x_1 - 1)}_{\geq 1}\underbrace{(x_2 - 1)}_{\geq 1} - 1 \geq 0.$$

Logo, $x_1x_2 \geq x_1 + x_2$.

Para a última parte, se $x_1x_2 = x_1 + x_2$, então $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1$. Logo, $x_1 - 1 = x_2 - 1 = 1$, de onde temos $x_1 = x_2 = 2$.

□

Teorema 2.2. *Sejam $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$ e $x_1, \dots, x_n > 1$, então $x_1x_2 \dots x_n > x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.*

Demonstração. Demonstraremos por Indução em $n \geq 3$. Para $n = 3$, aplicando o Teorema 2.1, temos:

$$x_1x_2x_3 = (x_1x_2)x_3 > (x_1 + x_2)x_3 = x_1x_3 + x_2x_3 > x_1 + x_3 + x_2 + x_3 > x_1 + x_2 + x_3.$$

Supondo que o resultado seja válido para algum $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$, verificaremos para $n+1$:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} = (x_1 x_2 \dots x_n) x_{n+1} &\overbrace{>}^{H.I} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) x_{n+1} \\ &= x_1 x_{n+1} + x_2 x_{n+1} + \cdots + x_n x_{n+1} \\ &\geq x_1 + x_{n+1} + x_2 + x_{n+1} + \cdots + x_n + x_{n+1} \\ &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n x_{n+1} \\ &> x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

2.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Diante de um problema como o que está sendo considerado, torna-se fundamental garantir, primeiramente, a existência de solução para depois discutir suas características. Esta seção será dedicada a isto.

A existência de solução para o Problema SIP será apresentada de forma direta, ou seja, exibindo uma solução para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma n-upla que é solução do Problema SIP.*

Demonstração. O caso $n = 1$ é trivial, tendo claramente todos os números naturais como solução. Para $n \geq 2$, basta considerar a n-upla $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-2}, 2, n)$, pois

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-2} + 2 + n = (n-2) \cdot 1 + 2 + n = 2n = \underbrace{1 \cdot 1 \dots 1}_{n-2} \cdot 2 \cdot n.$$

□

A solução apresentada na demonstração deste Teorema recebe um nome especial:

Definição 2.4. *A solução apresentada no Teorema 2.3 para $n \geq 2$ é chamada solução básica.*

Uma simples inspeção para pequenos valores de n já nos mostra que existem casos em que não temos apenas a solução básica:

Exemplo 2.5.

1. *Para $n = 2, 3$ e 4 o Problema SIP possui apenas solução básica: $A(2) = \{(2, 2)\}$, $A(3) = \{(1, 2, 3)\}$ e $A(4) = \{(1, 1, 2, 4)\}$.*

2. *Para* $n = 5$ *temos* $A(5) = \{(1,1,1,2,5),(1,1,1,3,3),(1,1,2,2,2)\}$.

Justificativa:

1. No caso $n = 2$, estamos investigando a equação $x_1 + x_2 = x_1x_2$, cuja única solução é $(2,2)$. Para $n = 3$ devemos ter $x_1 + x_2 + x_3 = x_1x_2x_3 < 3x_3$, pois não temos solução satisfazendo $x_1 = x_2 = x_3$. Logo, $x_1x_2 < 3$ e os possíveis valores para (x_1, x_2) são $(1,1)$ e $(1,2)$. Substituindo os possíveis valores de x_1 e x_2 e determinando x_3 na igualdade $x_1 + x_2 + x_3 = x_1x_2x_3$, apenas a terna $(1,2,3)$ é solução. Já para $n = 4$ temos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1x_2x_3x_4 < 4x_4$, pois não temos solução com $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, então devemos ter $x_1x_2x_3 \leq 3$. Os possíveis valores para (x_1, x_2, x_3) são $(1,1,1)$, $(1,1,2)$ e $(1,1,3)$. Substituindo-os na equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1x_2x_3x_4$ e determinando x_4, tem-se que apenas a quádrupla $(1,1,2,4)$ é solução.

2. Para $n = 5$, primeiro observamos que $x_1x_2x_3x_4 \leq 4$, implicando que os possíveis valores para (x_1, x_2, x_3, x_4) são $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(1,1,1,3)$, $(1,1,1,4)$ ou $(1,1,2,2)$. Para $(1,1,1,1)$ e $(1,1,1,4)$ não é possível determinar valor para x_5 que seja solução do problema. Das quádruplas restantes obtemos $A(5)$.

2.2.1 *Sobre a finitude do conjunto das soluções*

Vimos que o Problema SIP possui solução para $n \geq 1$, ou seja, $A(n) \neq \emptyset$, $n \geq 1$. Além disto, também vimos que $A(1) = \mathbb{N}$. Para $n \geq 2$ temos uma situação simplificada:

Teorema 2.6. *O conjunto* $A(n)$ *é finito para* $n \geq 2$.

Demonstração. Seja $(x_1, \dots, x_n) \in A(n)$ uma n-upla arbitrária. Então,

$$x_ix_n \leq x_1x_2 \dots x_n = x_1 + \dots + x_n \leq x_n + x_n + \dots + x_n = nx_n$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Assim, $x_i \leq n$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Por outro lado, uma vez conhecidos $x_1, \dots, x_{n-1}$, então x_n fica unicamente determinado a partir da igualdade

$$x_1 + \dots + x_n = x_1 \dots x_n.$$

Portanto, temos uma quantidade finita de escolhas em $A(n)$. □

Embora cada conjunto $A(n)$ seja finito, não há uma limitação para o número de elementos de $A(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ simultaneamente, ou seja:

Teorema 2.7. *Dado $s \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\#A(n) > s$.*

Demonstração. Considere $n = 2^{2s} + 1$ e $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1$. Para cada $t \in \{0, 1, 2, \ldots, s\}$, definimos

$$x_{n-1} = 2^t + 1 \text{ e } x_n = 2^{2s-t} + 1.$$

Toda n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definida desta forma pertence a $A(n)$, pois

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{2^{2s}-1} + 2^t + 1 + 2^{2s-t} + 1 = 2^{2s} + 2^t + 2^{2s-t} + 1 = \underbrace{1 \ldots 1}_{2^{2s}-1} \cdot (2^t + 1) \cdot (2^{2s-t} + 1)$$

e como temos $s + 1$ valores possíveis para t, $\#A(n) \geq s + 1$. □

2.3 PROPRIEDADES DAS SOLUÇÕES

Vimos que o Problema SIP possui solução para todo $n \in \mathbb{N}$ e discutimos propriedade quantitativas. Discutiremos a partir de agora algumas propriedades qualitativas que estas soluções possuem.

Proposição 2.8. *O Problema SIP admite uma solução $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com $x_1 < \cdots < x_n$ apenas para $n = 1$ e $n = 3$.*

Demonstração. O caso $n = 1$ tem como solução todos os naturais. Supondo $n > 1$, se $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma solução para o problema SIP satisfazendo as hipóteses do teorema, então $x_1 + \cdots + x_n < nx_n$ e $x_1 \ldots x_n \geq (n-1)!x_n$. Com isto, devemos ter $nx_n > (n-1)!x_n$, o que implica $n > (n-1)!$, ou seja, $n = 2$ ou $n = 3$.

No Exemplo 2.5 vimos que a única solução para $n = 2$ não satisfaz a hipótese da proposição e para $n = 3$ a única solução a satisfaz, o que conclui a demonstração. □

Proposição 2.9. *Se $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma solução do Problema SIP, com $n \geq 3$, então existe ao menos um $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_i = 1$.*

Demonstração. Suponha $n \geq 3$ e $2 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Veremos que

$$x_1 + \cdots + x_n < x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Procederemos por indução em $n \geq 3$. Para $n = 3$ o resultado é válido, pois conhecemos a solução. Suponha $n > 3$ e que o resultado é válido para $n - 1$. Então, pela hipótese indutiva e novamente o resultado da Seção 2.1,

$$x_1 + \cdots + x_n < x_1 \ldots x_{n-1} + x_n \leq x_1 \ldots x_{n-1} x_n,$$

o que completa a demonstração. □

2.3.1 *Propriedades Limitantes*

Nesta subseção apresentaremos algumas propriedades limitantes sobre as coordenadas de um elemento pertencente conjunto solução do Problema SIP. Estas propriedades auxiliam quando buscamos soluções para o Problema SIP em casos particulares (isto é, quando o parâmetro n do Problema SIP é especificado).

Os dois próximos Teoremas relacionam o produto (e a soma) das coordenadas de uma n-upla com o número n.

Teorema 2.10. *Se $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A(n)$, com $n \geq 3$, então*

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \leq n - 1.$$

Demonstração. Observemos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ não podem ser todos iguais, pois, caso contrário, supondo todos iguais a x, teríamos $\underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ parcelas}} = \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ parcelas}}$, logo $nx = x^n$, daí temos $x = \sqrt[n-1]{n}$. Mas, $1 < \sqrt[n-1]{n} < 2$ para $n \geq 3$ temos uma contradição com $n \in \mathbb{N}$. Portanto, tomando x_n como o maior dos termos da n-ulpa $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, teremos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n < n x_n$$

e, consequentemente, $x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \leq n - 1$. □

Antes de passarmos ao próximo resultado, precisaremos de um resultado auxiliar:

Lema 2.11. *Sejam $n \geq 2$ e $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \geq 1$. Então,*

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) \ldots (x_n + 1) \geq 2(x_1 + x_1 + \cdots + x_n).$$

Demonstração. Procederemos por indução em n. Se $n = 2$, então já vimos que

$$(x_1 + 1)(x_2 + 2) - 2(x_1 + x_2) = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0.$$

Supondo que $(x_1+1)(x_2+1)\dots(x_n+1) \geq 2(x_1+x_1+\cdots+x_n)$, para algum $n \geq 2$. Multiplicaremos cada lado por $(x_{n+1}+1)$, obtendo

$$\begin{aligned}(x_1+1)(x_2+1)\dots(x_n+1)(x_{n+1}+1) &\geq 2(x_1+x_1+\cdots+x_n)+\\ &\quad + 2x_{n+1}(x_1+x_1+\cdots+x_n))\\ &> 2(x_1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1})\end{aligned}$$

pois $x_1+x_1+\cdots+x_n > 1$. □

Note, através de uma verificação direta, que a igualdade do Lema acima não é possível para $n \geq 3$.

Teorema 2.12. *Se $(x_1,\dots,x_n) \in A(n)$, com $n \geq 2$, então*

$$x_1+\cdots+x_n = x_1x_2\dots x_n \leq 2n.$$

A igualdade apenas ocorre quando $(x_1,\dots,x_n) = (1,1,\dots,1,2,n)$.

Demonstração. Denotemos por γ o número de entradas iguais a 1 e por j o número de entradas diferentes de 1 na n-upla $(x_1,\dots,x_n)$. Assim, $\gamma+j=n$ e $x_1=x_2=\cdots=x_\gamma=1$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=\gamma+1}^{n} x_i = \prod_{i=\gamma+1}^{n}((x_i-1)+1) = \prod_{k=1}^{j}((x_{\gamma+k}-1)+1),$$

onde apenas reindexamos o último somatório com $i=\gamma+k$. Pelo Lemma 2.11,

$$\prod_{k=1}^{j}((x_{\gamma+j}-1)+1) \geq 2\sum_{k=1}^{j}((x_{\gamma+j}-1)) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i - 2j - 2\gamma = 2\sum_{i=1}^{n} x_i - 2n.$$

Daí segue

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2n.$$

Finalmente, também pelo Lema anterior, esta última desigualdade é estrita para $n > 2$. A partir disto, segue que

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i = 2n$$

apenas para a solução básica. □

Diante disto, temos algumas consequências sobre limitações da quantidade de termos iguais a 1 e diferentes de 1 numa sequência que é solução do Problema SIP:

Corolário 2.13. *Seja* $(x_1, \ldots, x_n) \in A(n)$*, com* $n \geq 2$*. Se* j *é o número de termos maiores que* 1 *em* $(x_1, \ldots, x_n)$ *e* $j > 2$*, então* $2^{j-1} < n$*.*

Demonstração. Como $x_i \geq 2$ para todo $i = 1, \ldots, j$, pelo Teorema 2.12 teremos

$$2^j \leq \prod_{i=1}^{n} x_i < 2n.$$

□

Corolário 2.14. *Seja* $(x_1, \ldots, x_n) \in A(n)$*, com* $n \geq 2$*. Se* γ *é o número de termos iguais a* 1 *em* $(x_1, \ldots, x_n)$*, então* $\gamma \geq n - 1 - \lfloor log_2(n) \rfloor$*.*

Demonstração. O Teorema 2.12 implica que

$$2^{n-\gamma} \leq x_1 \ldots x_n = x_1 + \cdots + x_n \leq 2n.$$

Logo, $n - \gamma \leq log_2(2n) = 1 + log_2(n)$. Portanto, $\gamma \geq n - 1 - \lfloor log_2(n) \rfloor$. □

2.3.2 *Propriedades Aritméticas*

Uma vez que as soluções do Problema SIP são dadas por sequências de números naturais, algumas propriedades de divisibilidade/primalidade aparecem como ferramenta para determinar ou testar soluções.

Proposição 2.15. *Se* n *é par e* $(x_1, \ldots, x_n) \in A(n)$*, então* $x_1 + \cdots + x_n$ *é divisível por 4.*

Demonstração. Supondo que todos os números $x_1, \ldots, x_n$ são ímpares, então teremos uma quantidade par de números ímpares. Logo, a soma $x_1 + \cdots + x_n$ será um número par e o produto $x_1 \ldots x_n$ será impar, o que é uma contradição. Se tivermos apenas um dos x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, sendo par, então o produto certamente será par, mas a soma será ímpar, outra contradição. Portanto, devemos ter, no mínimo, dois números pares. Isto mostra que $x_1 \ldots x_n$ é divisível por 4 e, consequentemente, $x_1 + \cdots + x_n$ também o é. □

Teorema 2.16. *Se* $n > 2$ *e* $\#A(n) = 1$*, então* $n - 1$ *é primo.*

Demonstração. Se $n - 1$ não é primo, então $n = ab + 1$ para certos $a, b \in \mathbb{N}$, com $2 \leq a \leq b$. Então, as n-uplas

$$(1,1,\ldots,1,2,n) \text{ e } (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{ab-1},a+1,b+1)$$

são diferentes e pertencem a $A(n)$, de onde temos $\#A(n) > 1$. □

Como algumas das consequências deste teorema, temos:

Corolário 2.17. *Se $n \geq 5$ e $\#A(n) = 1$, então $6 \mid n$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.16, se $\#A(n) = 1$ então $n-1$ é primo, logo n é um número par e, portanto, divisível por 2. Ainda pelo Teorema 2.16, temos que n não pode ser escrito da forma $3k+1$, pois $n \geq 5$ implica $k \geq 2$ e, daí, $n-1$ não é primo. Se $n = 3k+2$ então o conjunto $A(n)$ possui duas n-uplas distintas: $(1,\ldots,1,2,n)$ e $(1,1,\ldots,1,2,2,k+1)$ o que é uma contradição, pois $\#A(n) = 1$. Com isto, $n = 3k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Portanto, como $2|n$ e $3|n$, segue que $6|n$. □

Teorema 2.18. *Supondo $\#A(n) = 1$ e $n > 100$, então*

1. *n é de uma das formas: $7k$, $7k+2$, $7k+3$ ou $7k+6$, com $k \in \mathbb{N}$.*

2. *n é de uma das formas: $30k$ ou $30k+24$, com $k \in \mathbb{N}$.*

Em particular, n possui uma das formas

$$210k,\ 210k+24,\ 210k+30,\ 210k+84,\ 210k+90,$$

$$210k+114,\ 210k+150 \quad \text{ou} \quad 210k+174.$$

Demonstração.

1. O conjunto $A(n)$ sempre contém a n-upla $(1,\ldots,1,2,n)$. Se $n = 7k+1$ ou $7k+4$ ou $7k+5$, o conjunto $A(n)$, conterá também as n-uplas

$$(1,1,\ldots,1,8,k+1), \quad (1,1,\ldots,1,2,4,k+1) \text{ e } (1,1,\ldots,1,2,2,2,k+1),$$

respectivamente. Agora o resultado é imediado, pois as formas do enunciado e as excluídas acima compreendem todas as classes módulo 7.

2. Pelo Corolário 2.17, $6 \mid n$. Logo, o número n pode ser escrito através de uma das formas $30k, 30k+6, 30k+12, 30k+18$ ou $30k+24$, aqui estamos considerando classes módulo 30.

   Se $n = 30k+6$, então $n-1$ não é primo, uma contradição com o Teorema 2.16. Nos casos em que $n = 30k+12$ ou $n = 30k+18$, o conjunto $A(n)$ conterá $(1,\ldots,1,2,n)$ e também conterá as n-uplas

$$(1,1,\ldots,1,2,2,2,2,2k+1) \text{ e } (1,1,\ldots,1,2,3,6k+4),$$

respectivamente. Logo, $n = 30k$ ou $n = 30k + 24$.

Para a parte final, basta observar que $mdc(30, 7) = 1$ e utilizar os itens 1) e 2). □

2.3.3 *Comentários sobre o estado da arte*

Nesta subseção apresentaremos alguns comentários sobre refinamentos do Teorema 2.18.

Este teorema fornece condições necessárias para os valores de $n > 100$ tais que $\#A(n) = 1$. Porém, ainda fica remanescente a (difícil) questão sobre a existência de uma quantidade finita de tais n satisfazendo $\#A(n) = 1$, pois os resultados dependem de um parâmetro $k \in \mathbb{N}$. No entanto, o Teorema 2.16 "simplifica" a busca ao garantir que $n - 1$ deve ser primo.

Através de simulação computacional para $100 < n < 10.000.000.000$, tornou-se conhecido através de Harry J. Smith e Alan Zimmermann (conforme indicado em [2]) que $n \in \{114, 174, 444\}$.

Por outro lado, para cada $n \leq 100$, através de simulação caso-a-caso, utilizando os resultados aqui demonstrados, conclui-se que, se $\#A(n) = 1$ e $n \leq 100$, então $n \in \{2, 3, 4, 6, 24\}$.

Isto tudo leva à **Conjectura**:

$$\#A(n) = 1 \implies n \in \{2, 3, 4, 6, 24, 114, 174, 444\}.$$

2.4 SOMA E PRODUTO IGUAIS A UM DADO $k \in \mathbb{N}$

Nas seções anteriores analisamos as n-uplas $(x_1, \ldots, x_n)$ que são soluções do Problema SIP. Agora, dado $k \in \mathbb{N}$, vamos determinar $n \in \mathbb{N}$ e $(x_1, \ldots, x_n)$ que verificam

$$x_1 + \cdots + x_n = x_1 \ldots x_n = k.$$

Convenientemente definiremos

$$A(n; k) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = x_1 \ldots x_n = k\}.$$

Se $k = x_1 + \cdots + x_n = x_1 \ldots x_n$, pelo Teorema 2.12, temos

$$k \leq 2n.$$

Observe que a igualdade só será possível quando a solução for básica, para soluções não-básicas temos $k < 2n$.

Proposição 2.19. *Para qualquer* $k \in \mathbb{N}$*, se* $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A(n;k)$*, com* $n \geq 2$*, então* $x_i < k$*, para* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$*.*

Demonstração. Se $x_i > k$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos $x_1 \dots x_n > k$. Logo, $x_i \leq k$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Veremos a seguir que $x_i \neq k$, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Supondo, sem perda de generalidade, $x_n = k$, para a condição da soma

$$x_1 + \dots + x_{n-1} + k = k$$

ser verdadeira, teríamos $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$. Entretanto, estes valores de $x_1, \dots, x_{n-1}$ não verificam a condição $x_1 \dots x_n = k$. Por outro lado, se considerarmos

$$x_1 \dots x_{n-1} k = k,$$

devemos ter $x_1 = \dots = x_{n-1} = 1$ e estes valores não verificam $x_1 + \dots + x_n = k$ com $n \geq 2$.

Portanto, concluímos que $x_i < k$, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. □

Observe que para $k \in \mathbb{N}$ primo e $n > 1$ teremos $A(n;k) = \emptyset$. Mas isto é diferente se k for composto:

Proposição 2.20. *Para qualquer* $k \in \mathbb{N}$ *composto existem* $n \in \mathbb{N}$ *e* $(x_1, \dots, x_n) \in A(n;k)$ *tais que*

$$x_1 + \dots + x_n = x_1 \dots x_n = k.$$

Demonstração. Se k é composto, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, podemos escrever $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, com $p_1, \dots, p_s$ primos e $\alpha_1, \dots, \alpha_s \geq 1$. Se $s > 1$, tomando $m = p_1^{\alpha_1} + p_2^{\alpha_2} + \dots + p_s^{\alpha_s}$, obtemos

$$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-m}, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_s^{\alpha_s}) \in A(k - m + s; k).$$

Se $s = 1$, digamos, $k = p^\alpha$, com $\alpha > 1$, primeiro encontramos $\beta_1, \dots, \beta_t \in \mathbb{N}$ tais que

$$p^{\beta_1} \cdots p^{\beta_t} = p^\alpha$$

e, então, tomando $m = p^{\beta_1} + \dots + p^{\beta_t}$ aplicamos o procedimento anterior. □

Assim, ao construir uma n-upla que pertence ao conjunto $A(n;k)$ teremos por referência a decomposição em fatores primos de k, considerando que podemos reagrupar estes fatores primos originando novos produtos iguais a k.

Ilustraremos esta proposição a seguir.

Exemplo 2.21. *Seja $k = 8$. Encontraremos $n \in \mathbb{N}$ e $(x_1, \ldots, x_n) \in A(n;8)$ tais que $x_1 + \cdots + x_n = x_1 \ldots x_n = 8$.*

Procedemos da seguinte maneira: observamos que a decomposição do número 8 em fatores primos é 2.2.2 reagrupando estes fatores obtemos os seguintes produtos:

$$8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Utilizando a Proposição 2.19, para $8 = 2 \cdot 4$, fazemos $m = 2 + 4$ e basta acrescentar $k - m = 8 - 6 = 2$ coordenadas iguais a 1 para obter $(1, 1, 2, 4) \in A(4;8)$. Similarmente, considerando a fatoração $2 \cdot 2 \cdot 2$ obtemos $(1, 1, 2, 2, 2) \in A(5;8)$.

2.5 CONSTRUINDO CERTAS SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA SIP

Partindo do fato de que a soma de três ou mais inteiros positivos maiores que 1 é sempre menor que o produto destes inteiros, apresentaremos um algoritmo para encontrar $n \in \mathbb{N}$ e construir um elemento do conjunto $A(n)$ a partir de uma j-upla $(x_1, \ldots, x_j)$ dada, com $x_1, \ldots, x_j > 1$ e $j < n$.

Algoritmo. Dada uma j-upla $(x_1, \ldots, x_j)$, com $x_1, \ldots, x_j > 1$, denotando

$$\alpha = x_1 x_2 \ldots x_j \quad \beta = x_1 + x_2 + \cdots + x_j \quad \text{e} \quad \gamma = \alpha - \beta,$$

então

$$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{\gamma \text{ vezes}}, x_1, x_2, \ldots, x_j) \in A(n), \text{ com } n = j + \gamma.$$

□

Definição 2.22. *Dados os inteiros $n \geq j \geq 2$, denotaremos $(x_1, x_2, \ldots, x_j; \gamma)_n$ como uma n-upla que possui j elementos maiores que 1, os demais $\gamma = n - j$ elementos iguais a 1 e satisfaz o Problema SIP. Denotaremos também*

$$A_j(n) = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_j; \gamma)_n \in \mathbb{N}^n : \prod_{i=1}^{j} x_i = \sum_{i=1}^{j} x_i + \gamma\right\}.$$

Exemplo 2.23.

1. $A_2(5) = \{(2,5;3)_5, (3,3;3)_5\}$, *pois, para que uma* 5*-upla pertença a* $A_2(5)$ *ela deve ser da forma* $(1,1,1,x_4,x_5)$*, onde* $1 < x_4 \leq x_5$*. Desta forma,* $x_4x_5 = x_4 + x_5 + 3 \Rightarrow (x_4-1)(x_5-1) = 4$*. Logo,* $x_4 = 2$ *e* $x_5 = 5$ *ou* $x_4 = x_5 = 3$*. Portanto,* $A_2(5) = \{(2,5;3)_5, (3,3;3)_5\}$*.*

2. $(2,n;n-2)_n \in A_2(n)$*, para todo* $n \geq 2$*, pois trata-se da solução básica.*

Apresentaremos, a seguir, uma caracterização do conjunto $A_2(n)$, onde seus termos são encontrados através dos divisores de $n-1$.

Proposição 2.24. *Dado um inteiro* $n \geq 2$*, o conjunto* $A_2(n)$ *apresenta a seguinte forma:*

$$A_2(n) = \left\{ \left(d+1, \frac{n-1}{d} + 1; n-2 \right)_n \ : \ d \mid (n-1), d \leq \sqrt{n-1} \right\}.$$

Demonstração. Supondo que $(x_1, x_2; n-2) \in A_2(n)$. Então, $x_1 + x_2 + n - 2 = x_1x_2$. Logo, $n-1 = (x_1-1)(x_2-1)$. Assumindo $x_1 \leq x_2$, para um divisor d de $n-1$, com $d \leq \sqrt{n-1}$, podemos considerar $x_1 - 1 = d$ e $(x_2-1) = (n-1)/d$. Com isto, $A_2(n)$ será da forma

$$\left\{ (d+1, \frac{n-1}{d} + 1; n-2)_n \ : \ d \mid (n-1), d \leq \sqrt{n-1} \right\}.$$

□

Proposição 2.25. *Seja* $n \in \mathbb{N}$*, com* $n \geq 2$*. Se* $j > log_2(n) + 1$*, então* $\#A_j(n) = 0$*.*

Demonstração. Supondo que $\#A_j(n) \neq 0$, para algum $n \geq 2$, segue do Teorema 2.12 que

$$2^j \leq \prod_{i=1}^{j} x_i = x_1 + \cdots + x_j + n - j \leq 2n,$$

de onde deduzimos que $2^{j-1} \leq n$. Logo, $j \leq log_2(n) + 1$. □

Tendo em vista o que foi discutido nesta seção, algumas observações finais:

- Para cada elemento $(x_1, x_2, \ldots, x_j; \gamma)_n \in A(n)$, $j \geq 2$, sabemos que $x_i \geq 2$, para todo $i = 1, \ldots, j$. Se x_j é o maior destes elementos, então temos

$$2x_j \leq \prod_{i=1}^{j} x_i \leq 2n.$$

  Logo, $x_j \leq n$ e, consequentemente, $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j \leq n$.

- O conjunto $A(n)$ é formado pela união dos conjuntos $A_j(n)$, com $2 \leq j \leq log_2(n) + 1$.

2.6 UM EXEMPLO NÃO TRIVIAL PARA ILUSTRAR RESULTADOS

Exemplo 2.26. *O conjunto $A(50)$ tem exatamente 4 elementos e cada elemento $(x_1, \ldots, x_{50}) \in A(50)$ possui a seguinte composição: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{47} = 1$ e (x_{48}, x_{49}, x_{50}) sendo uma das ternas $(1, 2, 50)$, $(1, 8, 8)$, $(2, 2, 17)$ e $(2, 5, 6)$.*

Justificativa do exemplo.

Pelo Teorema 2.12 e Lema 2.25 temos: $x_1 + x_2 + \cdots + x_{50} = x_1 x_2 \ldots x_{50} \leq 100$ e o número de elementos maiores que 1, denotado por j, deve ser menor ou igual a 6, pois $6 \leq log_2 50 + 1 < 7$. Desta forma uma 50-upla que é solução do Problema SIP possui, no máximo, seis termos maiores que 1, digamos que estes sejam $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_6$.

- Para $j = 1$ facilmente vemos que não temos solução.

- Para $j = 2$: $y_1 y_2 = y_1 + y_2 + 48 \Rightarrow (y_1 - 1)(y_2 - 1) = 49$. Logo, as soluções são $A_2(50) = \{(2, 50; 48)_{50}, (8, 8; 48)_{50}\}$ por uma análise na fatoração prima de 49.

- Para $j = 3$ devemos encontrar valores que verifiquem as condições

$$y_1 y_2 y_3 = y_1 + y_2 + y_3 + 47 \quad \text{e} \quad y_1 y_2 y_3 < 100.$$

Analisando cada uma das possibilidades:

$\diamond$ $\underline{y_1 = 2 \Rightarrow y_2 y_3 < 50 \text{ e } 2 \leq y_2 \leq y_3}$, daí temos, novamente, as seguintes possibilidades:

$y_1 = y_2 = 2 \Rightarrow 4y_3 = 51 + y_3$, logo $y_3 = 17$ e $(2, 2, 17; 47)_{50} \in A_3(50)$;

$y_1 = 2$ e $y_2 = 3 \Rightarrow 6y_3 = 52 + y_3$, não existe $y_3 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = 2$ e $y_2 = 4 \Rightarrow 8y_3 = 53 + y_3$, não existe $y_3 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = 2$ e $y_2 = 5 \Rightarrow 10y_3 = 54 + y_3$, logo $y_3 = 9$ e $(2, 5, 9; 47)_{50} \in A_3(50)$;

$y_1 = 2$ e $y_2 = 6 \Rightarrow 12y_3 = 55 + y_3$, logo $y_3 = 5$, mas não satifaz $y_3 \geq y_2$;

$y_1 = 2$ e $y_2 = 7 \Rightarrow 14y_3 = 56 + y_3$, não existe $y_3 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = 2$ e $y_2 \geq 8 \Rightarrow y_3 \leq 6$, pois $y_2 y_3 < 50$, mas estes não satisfazem $y_3 \geq y_2$.

$\diamond$ $\underline{y_1 = 3 \Rightarrow y_2 y_3 \leq 34 \text{ e } 3 \leq y_2 \leq y_3}$ temos as seguintes possibilidades:

$y_1 = y_2 = 3 \Rightarrow 9y_3 = 53 + y_3$, não existe $y_3 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = 3$ e $y_2 = 4 \Rightarrow 12y_3 = 54 + y_3$, não existe $y_3 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = 3$ e $y_2 = 5 \Rightarrow 15y_3 = 55 + y_3$, não existe $y_3 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = 3$ e $y_2 \geq 6 \Rightarrow y_3 < 6$, pois $y_2y_3 \leq 34$ e este valor de y_3 não satisfaz $y_3 \geq y_2$;

$\diamond$ $\underline{y_1 = 4 \Rightarrow y_2y_3 < 25 \text{ e } 4 \leq y_2 \leq y_3}$ e temos as seguintes possibilidades:

$y_1 = y_2 = 4 \Rightarrow 16y_3 = 55 + y_3$, não existe $y_3 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = 4$ e $y_2 = 5 \Rightarrow 20y_3 = 56 + y_3$, não existe $y_3 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = 4$ e $y_2 > 6 \Rightarrow y_3 \leq 4$, pois $y_2y_3 < 25$, e este valor de y_3 não satisfaz $y_3 \geq y_2$;

$\diamond$ $\underline{y_1 > 4 \Rightarrow y_1y_2y_3 \geq 125}$ e não é possível encontrar valores para y_2 e y_3 que verifiquem as condições almejadas.

- Para $j = 4$, devemos encontrar valores que verifiquem as condições

$$y_1y_2y_3y_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 46 \quad \text{e} \quad y_1y_2y_3y_4 < 100.$$

Procedendo como antes, temos:

$\diamond$ $\underline{y_1 = 2 \Rightarrow y_2y_3y_4 < 50 \text{ e } 2 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4}$, daí temos:

$y_1 = y_2 = y_3 = 2 \Rightarrow 8y_4 = 52 + y_4$, não existe $y_4 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = y_2 = 2$ e $y_3 = 3 \Rightarrow 12y_4 = 53 + y_4$, não existe $y_4 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = y_2 = 2$ e $y_3 = 4 \Rightarrow 16y_4 = 54 + y_4$, não existe $y_4 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = y_2 = 2$ e $y_3 = 5 \Rightarrow 20y_4 = 55 + y_4$, não existe $y_4 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = y_2 = 2$ e $y_3 \geq 6 \Rightarrow y_4 < 5$, pois $y_2y_3y_4 < 50$, e este valor de y_4 não satisfaz $y_4 \geq y_3$;

$y_1 = 2$ e $y_2 = y_3 = 3 \Rightarrow 18y_4 = 54 + y_4$, não existe $y_4 \in \mathbb{N}$ que é solução;

$y_1 = 2$, $y_2 = 3$ e $y_3 \geq 4 \Rightarrow y_4 \leq 4$, pois $y_2y_3y_4 < 50$, mas estes valores de y_4 não satisfazem $y_3 \leq y_4$;

$y_1 = 2$ e $y_2, y_3 \geq 4 \Rightarrow y_4 \leq 3$, pois $y_2y_3y_4 < 50$, mas estes valores de y_4 não satisfazem $y_3 \leq y_4$;

$\diamond$ $\underline{y_1 = 3 \Rightarrow y_2y_3y_4 < 34}$, assim temos uma única possibilidade de valores para y_2 e y_3

$y_1 = y_2 = y_3 = 3 \Rightarrow 27y_4 = 55 + y_4$ logo não existe $y_4 \in \mathbb{N}$ que é solução.

$\diamond$ $\underline{y_1 \geq 4}$ não existe possibilidade de respostas que obedecem as condições pois teremos $y_1y_2y_3y_4 \geq 264$.

- Para $j = 5$, devemos encontrar valores que verifiquem as condições

$$y_1y_2y_3y_4y_5 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + 45 \quad \text{e} \quad y_1y_2y_3y_4y_5 < 100.$$

Porém, $\underline{y_1 = 2 \Rightarrow y_2y_3y_4y_5 < 50 \text{ e } 2 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4 \leq y_5}$. Como $y_1y_2y_3y_4 \geq 16$, devemos ter $y_5 \leq 3$. Testando $y_5 = 3$, $y_5 = 2$ e $y_5 = 1$, não encontramos soluções.

- Para $j = 6$, devemos encontrar valores que verifiquem as condições

$$y_1y_2y_3y_4y_5y_6 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + 44 \text{ e } y_1y_2y_3y_4y_5y_6 < 100.$$

No entanto, $\underline{y_1 \geq 2 \Rightarrow y_2y_3y_4y_5y_6 < 50 \text{ e } 2 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4 \leq y_5 \leq y_6}$. Porém, $y_2y_3y_4y_5 \geq 16$. Logo, $y_6 \leq 3$. Testando $y_6 = 1$, $y_6 = 2$ e $y_6 = 3$, não obtemos soluções para o problema.

Desta forma, concluimos que

$$A_2(50) = \{(2, 50; 48)_{50}, (8, 8; 48)_{50}\}$$

e

$$A_3(50) = \{(2, 2, 17; 47)_{50}, (2, 5, 6; 47)_{50}\}.$$

3 PROPOSTA DIDÁTICA

Vivemos em uma sociedade tecnológica passando por contínuas transformações. Assim, como professores, temos o compromisso de formar cidadãos atuantes e que saibam lidar com a mobilidade do pensamento. A matemática contribui fornecendo ferramentas que possibilitam desenvolver estratégias, enfrentar desafios, comprovar e justificar resultados, entre outras possibilidades.

A fim de alcançar nossos objetivos, utilizamos diferentes tendências metodológicas, para fazer uma transposição didática, propondo situações nas quais valorizamos os conhecimentos prévios dos alunos e, simultaneamente, confrontamos tais conhecimentos para que sejam construídos novos.

Baseado nisto, propomos uma atividade investigativa com o objetivo de provocar estratégias de resolução por parte do aluno, ao passo que desenvolve a atitude de enfrentamento de situações novas. O problema requererá a prática das duas operações aritméticas elementares e das suas propriedades.

Em um primeiro momento, os alunos realizarão uma atividade investigativa procurando responder o Problema SIP para pequenos valores de n. A seguir, com a utilização de ferramentas eletrônicas verificarão os resultados encontrados e construirão possíveis padrões. Para finalizar, serão convidados à analisar se as soluções deste problema possuem outras propriedades aritméticas relevantes.

Ao elaborar esta proposta didática, consideramos os conteúdos e atitudes sugeridos nos PCNs, onde afirma-se que um dos aspectos importantes desta fase de aprendizagem é instruir para que o aluno saiba selecionar e utilizar procedimentos de cálculo mais adequados à situação-problema proposta, utilizando-se da calculadora como um instrumento para produzir resultados e para construir estratégias de verificação destes.

A utilização de uma situação-problema permite que o aluno reconheça as diferentes aplicabilidades da Álgebra ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, ou, até mesmo, para estabelecer relações entre grandezas. Outro ponto importante ressaltado pelos PCNs, refere-se ao fato de que quando trabalhamos com a Álgebra é fundamental conduzirmos os alunos a compreenderem conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação.

3.1 MINICURSO: O PROBLEMA SIP

Conteúdo:

- Adição e Multiplicação de números naturais e suas propriedades.
- Interpretação e resolução de equações e inequações polinomiais.

Objetivos

- Compreender e aplicar as propriedades associativa, comutativa e dos elementos neutros da adição e da multiplicação.
- Decompor números como somas e produtos de outros números.
- Modelar um problema por meio de uma expressão algébrica.
- Majorar expressões polinomiais.

Público alvo: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.

Tempo estimado: 4 aulas de 2h de duração cada uma.

Planejamento

Aula 1

Objetivo específico:

- Revisar as propriedades da adição e da multiplicação.
- Apresentar o conceito de Partição Aditiva e Multiplicativa.
- Utilizar recursos tecnológicos para promover a aprendizagem.

Desenvolvimento

Em um ambiente dotado de computadores com acesso a internet, solicite aos alunos que pesquisem sobre as propriedades da adição e da multiplicação, anotando o pontos principais. Neste momento é importante alertá-los sobre a necessidade de analisar as informações que aparecem e utilizar somente as que estejam relacionadas a pesquisa que estão realizando.

Promova um debate sobre estas propriedades, exemplificando-as e enfatizando a importância da sua compreensão. Para isto, questione-os:

- Qual o significado de associatividade, comutatividade e distributividade?
- Quais as propriedades comum entre a adição e a multiplicação?
- Por que o elemento neutro da adição é diferente do elemento neutro da multiplicação?

Conclua apresentando algumas atividades em que a utilização das propriedades da adição e da multiplicação, durante a resolução dos exercícios, facilita e agiliza os cálculos, principalmente, o cálculo mental. Por exemplo:

Exemplo 3.1. *1. A adição entre 107 e 108 resulta em quanto? Aumentando-se a* 1^a *parcela em* 40 *e a* 2^a *parcela em* 90*, qual será o valor da soma?;*

2. $\left(5+\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{3}=5+\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)$*;*

3. $\left(\frac{4}{7}\times\frac{6}{5}\right)\times\frac{2}{6}=\frac{4}{7}\times\left(\frac{6}{5}\times\frac{2}{6}\right)$.

Apresente a palavra “Partição”, pergunte o significado desta palavra, qual ideia que ela transmite. Espera-se que os alunos relacionem a palavra partição com a ideia de divisão de algo em partes. Em seguida, questione-os sobre como podemos particionar um número natural e se isto pode ser feito de um único modo.

Para finalizar a aula, apresente a funções Partição Aditiva e a Multiplicativa. É fundamental, que esta apresentação seja feita utilizando-se da linguagem algébrica de forma clara, organizada e correta, na direção do que foi apresentado na Seção 1.3, a fim de facilitar a manipulação e a compreensão de conceitos que serão apresentados posteriormente. Como tarefa, peça que particionem alguns números utilizando as funções Aditiva e Multiplicativa, ressalte que todos os números devem ser particionados dos dois modos.

Aula 2

Objetivo específico:

- Comparar números naturais.

- Escrever uma situação-problema utilizando linguagem algébrica.

Desenvolvimento

Inicie a aula fazendo uma revisão dos conceitos apresentados na aula anterior, sugira que alguns alunos escrevam no quadro as respostas da tarefa. Após a exposição e discussão das repostas, proponha aos alunos o processo inverso, ou seja, que escolham alguns números e calculem o produto e a soma deles. Solicite que comparem o resultado da soma e do produtos de uma n-upla de números naturais, aproveite para relembrá-los dos sinais que utilizamos para comparar valores.

É esperado que eles cheguem a conclusão de que, na maioria dos casos, a soma é sempre menor do que o produto. Instigui-os a procurar casos em que esses valores são iguais. Em seguida, faça a representação algébrica e demonstre que, para três ou mais números maiores que 1, o produto é sempre maior que a soma, conforme foi apresentado na Seção 2.1. Para melhor assimilação, seria interessante que fizessem uma breve pesquisa sobre Indução Matemática e alguns modelos lúdicos, o que pode ser feito, por exemplo, no laboratório de informática da escola.

Para finalizar, questione-os sobre quais ferramentas eles podem utilizar para igualar os resultado entre a soma e o produto. Se necessário, sugira que tendo por referência as propriedades da adição e multiplicação devem procurar um elemento que vai agregar valor a soma mas não alterará o produto.

Ao final da aula espera-se que os alunos tenham concluido que o elemento necessário para igualar soma e produto é o algarismo 1.

Aula 3

Objetivos específicos:

- Apresentar o Problema SIP.
- Utilizar dos conhecimentos algébricos para modelar o Problema SIP.

Desenvolvimento

Apresente o Problema SIP. Proponha que, em equipe, busquem as soluções por meio de tentativas, podendo utilizar da calculadora para facilitar e agilizar o processo. A seguir, cada equipe deverá apresentar uma solução encontrada, neste momento, espera-se que cheguem a conclusão de que uma vez encontrada uma n-upla satisfazendo este problema, é claro que todas as suas permutações também são soluções do mesmo problema. Assim sugira que considerem apenas soluções ordenadas.

Estimule-os a analisar como fizeram para determinar as soluções e incentive-os a descobrir uma modelo mais rápido e prático para encontrá-las. Para isto apresente a equação norteadora do problema $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n$ explicando cada notação. Relembre-os da aula anterior, do artifício que utilizaram para igualar soma e produto. Proponha que encontrem a soluções conhecendo alguns valores de x_i, ou seja, dada uma m-upla eles devem encontrar uma n-upla que seja solução do problema.

Caso existam muitas dificuldades na construção do modelo, e provavelmente existirão muitas, interrompa a resolução em equipe, e tente uma construção coletiva para clarificar o que se pretende e dar pistas sobre a construção do modelo. Neste sentido, o professor deve questioná-los

- Para resolver o Problema SIP, trabalhamos com a soma e o produto de números naturais. Se nos for dada uma sequência de números naturais, podemos encontrar uma solução que a contenha?
- Para que uma n-ulpa seja solução do Problema SIP é necessário igualar soma e produto. Já sabemos, pela aula anterior, que devemos acrescentar vários algarismos 1, como faremos para determinar a quantidade de algarismos iguais a 1 que devem ser acrescentados?
- Como indicaremos a soma e o produto destes termos? E o que utilizaremos para representar a diferença entre o produto e a soma?
- Como representaremos um modelo que permita visualizar a solução encontrada?

Espera-se que, no final, tenham chegado ao modelo $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{\gamma}, x_1, x_2, \ldots, x_j)$, onde $\gamma = x_1 x_2 \ldots x_n$ - $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

Aula 4

Objetivos específicos:

- Compreender e utilizar desigualdades para representar e analisar situações.
- Resolver equações e inequações polinomiais.
- Reconhecer e generalizar padrões e regularidades.

Desenvolvimento

Em um primeiro momento, relembre o conceito de inequação e a busca de soluções por meio de tentativas, inicie com equações com apenas uma incógnita, em seguida, para desafiá-los apresente com duas ou até três incógnitas.

Retome a atenção deles para o Problema SIP, para isto questione

- Encontre uma solução do nosso problema que possua:
  - dois termos.
  - três termos.
  - cinco termos.
- Existem algumas características em comum entre essas soluções? Algum padrão ou número que aparece em muitas soluções?

Após deixá-los refletirem, construa, junto com os alunos, soluções para pequenos valores de n. Utilizando para isto os conceitos apresentados no Exemplo 2.5. Fazendo a análise detalhada de cada caso, substituindo os possíveis valores, comparando os resultados e verficando quais são ou não soluções. Logo após, questione-os se todos os números podem assumir os mesmos valores, sugira que analisem esta possibilidade utilizando a linguagem de equação. Consequentemente, leve-os a concluir qual será o valor máximo do $\sum_{i=1}^{n} x_i$. Induza a procurarem por mais propriedades das soluções e, no final da aula, apresente algumas encontradas na Seção 2.3.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF (1998), 148 p.

`portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf`

[2] M. Ecker, *When Does a Sum of Positive Integers Equal Their Product?*, Mathematics Magazine **75** (2002), 41–47.

`www.jstor.org/stable/3219187`

[3] C. Evans e M. Nyblom, *An Algorithm to Solve the Equal-Sum-Product Problem*, não publicado.

`www.arxiv.org/abs/1311.3874`

[4] G. H. Hardy, *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work*, 3rd ed., New York: Chelsea, (1999).

[5] A. Hefez, *Aritmética*, 1rd ed., Rio de Janeiro: SBM, (2014).

[6] L. Kurlandchik e A. Nowicki, *When the Sum Equals the Product?*, The Mathematical Gazette **84** (2000), 91–94.

`www.jstor.org/stable/3621488`

[7] W. Sierpíński, Elementary Theory of Numbers, Polish Scientific Publishers, PWN **31**, Warszawa (1988).