Universidade Federal de Goiás

Campus Avançado de Jataí

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

O MÉTODO SIMPLEX E O MÉTODO GRÁFICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Adriana Batista da Silva

Jataí - GO

2016

Adriana Batista da Silva

O MÉTODO SIMPLEX E O MÉTODO GRÁFICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática do ensino básico.
Orientador: Prof. Dr. Claudiney Goulart.

Jataí
2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Silva, Adriana Batista da
O Método Simplex e o Método Gráfico na resolução de problemas de otimização [manuscrito] / Adriana Batista da Silva. - 2016.
LXXXVI, 86 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Claudiney Goulart.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Jataí , Jataí, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - Profissional), Jataí, 2016.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Programação Linear. 2. Método Gráfico. 3. Método Simplex. 4. Problemas de otimização. I. Goulart, Claudiney, orient. II. Título.

Adriana Batista da Silva

O MÉTODO SIMPLEX E O MÉTODO GRÁFICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, Pólo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 29 de abril de 2016, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Claudiney Goulart
Coordenação de Matemática-UFG/Reg. Jataí
Presidente da Banca

Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa
Membro - Coordenação de Matemática-UFG/Reg. Jataí

Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Godim Inocêncio
Membro – Coordenação de Ciências da Computação-UFG/Reg. Jataí

"A Matemática é a honra do espírito humano". (Leibniz)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por conceder condições de nunca desistir, mesmo diante de tantas adversidades.

Agradeço a minha família, em especial minha querida mãe Marilena e meu filho Carlos Eduardo, por todo o amor e apoio recebido durante esses dois anos de muito aprendizado.

Agradeço ao meu amor Rodrigo Morais Silva por me proporcionar carinho, atenção e incentivo durante esse período de estudos e desafios.

Agradeço ao meu professor e orientador, Claudiney Goulart, pela paciência, auxílio e orientação neste trabalho.

Agradeço aos professores membros da banca examinadora, Esdras Teixeira Costa e Ana Carolina Gondim Inocêncio pelas valiosas contribuições.

Agradeço todos os professores que participaram desse programa de mestrado, em especial a Prof. Luciana Elias, quem eu tenho grande estima e admiração.

Agradeço aos amigos Joana D'arc Silva Assis, Renato Rodrigues Lima e Thiago Oliveira Lima, pelo precioso auxílio.

Agradeço a gestora do Colégio Estadual Alcântara de Carvalho, Maria Aparecida Nunes Souza, por todo o apoio, força e incentivo.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro durante todo o período de estudo.

Resumo

A Programação Linear é uma ferramenta da Pesquisa Operacional aplicada à solução de problemas que objetivam a otimização de um sistema de estudo. O presente trabalho busca mostrar algumas aplicações da Programação Linear e como ela pode ser utilizada como elemento motivador no ensino da Matemática no Ensino Médio. Abordaremos dois métodos de resolução de problemas de Programação Linear, o método de Resolução Gráfica e a forma algébrica de solução que é o Método Simplex. Vamos solucionar com auxílio desses dois métodos citados, problemas de otimização com duas e três variáveis, já que problemas com várias variáveis não se adequam a matriz curricular de Matemática para o Ensino Médio. Sugerimos a utilização de dois aplicativos gratuitos para celulares, que solucionam problemas de otimização com várias variáveis como forma de contribuir com uma abordagem diferente, visando despertar no aluno, o interesse pelo estudo da Matemática.

Palavras chave: Programação Linear; Método Gráfico; Problemas de otimização; Método Simplex.

Abstract

Linear Programming is an operational search tool applied to problem solving aimed at the optimization of a study system. This study aims to show some applications of linear programming and how it can be used as a motivating teaching skills of Mathematics in High school. We will cover two methods of linear programming problems resolution, Graphics resolution method and the algebraic solution way, which is the Simple Method. We so decided to solve under the assistance of these two methods quoted, optimization problems with two or three variables, since the problems with multiple variables do not match the curriculum of mathematics for high school. We suggest the use of two free applications for mobile phones, to solve optimization problems with several variables, in order to contribute in a different approach, seeking to boost in students, interest in the study of mathematics.

Keywords: Linear Programming; Graphics Method; Optimization Problems; Simple Method.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho é parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre em Matemática concedido pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. O objetivo geral é utilizar conceitos de Programação Linear para auxiliar no estudo de problemas de otimização com duas ou mais variáveis em turmas do Ensino Médio.

A metodologia adotada consiste na resolução de problemas de otimização, utilizando técnicas em Programação Linear, especificamente, o Método Simplex e o Método Gráfico. Essas técnicas podem ser utilizadas pelo professor como ferramentas que auxiliam no ensino de conteúdos matemáticos abordados no Ensino Médio.

Segundo RECH [14], o uso de problemas de otimização no Ensino Médio, além de estimular o estudo e aprofundamento dos conhecimentos em matemática, pode contribuir significativamente para a formação do educando, possibilitando uma postura mais crítica frente a muitos problemas que enfrentará em sua vida adulta, independentemente do ramo de atividade que venha a seguir.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio [4], sugerem que ao aluno do Ensino Médio deve ser possibilitado, de forma combinada, o desenvolvimento de práticas em que o conhecimento venha contextualizado. Assim, um dos ramos da Pesquisa Operacional, a Programação Linear se encarrega de resolver problemas de grande aplicabilidade em situações concretas, além de propiciar a análise de situações matemáticas compatíveis com nível de complexidade admissível para o Ensino Médio.

Atualmente, o ensino de Matemática no Ensino Médio é comumente realizado metodicamente, ou seja, o professor apresenta a definição, resolve exemplos e solicita aos alunos que solucionem exercícios de fixação. E nesse contexto, onde o aluno de hoje possui total acesso à informação, tornar a aula de Matemática interessante é um grande desafio. Desse modo, utilizar problemas estimulantes, que desafiem a curiosidade e a capacidade de raciocínio pode ser uma forma de aumentar o interesse pela aprendizagem em Matemática. E os problemas de otimização despertam a curiosidade e desafiam os jovens a buscar soluções para situações de relevante importância para a sociedade.

Segundo SOUZA [17] é evidente a insatisfação dos alunos em relação a aulas ditas "tradicionais", ou seja, aulas expositivas nas quais são utilizados apenas o quadro-negro e o giz. O aprender por aprender já não existe: hoje, os alunos precisam saber para quê e por quê precisam saber determinado assunto. Então, a escola precisa modernizar-se a fim de acompanhar o ritmo da sociedade e não se tornar uma instituição fora de moda, ultrapassada e desinteressante. Aulas modernizadas pelo uso de recursos tecnológicos têm vida longa e podem ser adaptadas para vários tipos de alunos, para diferentes faixas etárias e diversos níveis de aprendizado.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio [4], a tecnologia impacta no ensino da matemática exigindo habilidades e procedimentos adequados por parte do professor. Por esse motivo, é preciso que o professor busque suporte para o seu trabalho em sala de aula e a utilização de aplicativos para facilitar o ensino da Matemática, proporciona uma aproximação entre o tradicional e o novo, modificando o processo de ensino.

Segundo NETO[11], ao se deparar com as modificações pensadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, o professor deve ajustar a sua metodologia de forma a viabilizar a utilização das tecnologias, pois possibilita ao aluno melhorar a lógica do desenvolvimento matemático.

No ano de 2013, a Unesco [12] publicou um guia com 10 recomendações e 13 motivos para os governos implantarem políticas públicas que utilizem celulares como recurso de ensino nas salas de aula. Um dos motivos citados para tornar o celular uma ferramenta pedagógica é que ele permite que o aprendizado formal se aproxime do informal, além de otimizar o tempo em sala de aula.

Com base nessas ideias, iremos sugerir a utilização de dois aplicativos para celulares na resolução de problemas de otimização. Tais aplicativos podem ser usados como ferramentas que irão auxiliar o aluno a validar as soluções encontradas e auxiliará o professor na otimização do tempo em sala de aula, principalmente quando o aluno se deparar com problemas com muitas variáveis, que exigem um tempo extenso para o cálculo manual da solução.

O presente trabalho se divide em cinco capítulos, incluindo esta introdução. O segundo capítulo trata os conceitos importantes para se compreender a temática, como a ideia de modelagem e sua relevância no processo de ensino da Matemática. Neste capítulo abordaremos também, o conceito de Pesquisa Operacional e um pouco da história da Programação Linear e suas aplicações.

No terceiro capítulo, trataremos de duas técnicas utilizadas para encontrar a solução de modelos de Programação Linear. A primeira delas, será o Método de Resolução Gráfica para problemas de otimização com duas variáveis. A segunda técnica abordada, será o Método Simplex, que determina numericamente a solução de um problema de Programação Linear, podendo este método ser utilizado para resolver problemas de mais de duas variáveis.

No quarto capítulo denominado Aplicações, propomos a solução de dois problemas de Programação Linear. O primeiro problema é de maximização com duas variáveis e o resolveremos utilizando o Método da Resolução Gráfica. O segundo problema também é de maximização, porém, de três variáveis e aplicaremos o Método Simplex para solucioná-lo.

No quinto e último capítulo, deixamos como sugestão uma abordagem de resolução de problemas de Programação Linear em turmas do Ensino Médio. Faremos primeiramente, uma breve exposição dos conteúdos básicos tratados no Ensino Médio e que são requisitos para o estudo dos métodos abordados no presente trabalho. Neste capítulo também, iremos sugerir a utilização de dois aplicativos para celulares, gratuitos e de fácil acesso na internet, que solucionam problemas de Programação Linear com duas ou mais variáveis, como uma alternativa que irá auxiliar o aluno na resolução de problemas com muitas variáveis. Esperamos que essa estratégia possa estimular o interesse pelo estudo do tema proposto.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Neste trabalho, nosso objetivo é resolver problemas de otimização utilizando técnicas em Programação Linear em turmas do Ensino Médio. E para que o aluno consiga solucionar esse tipo de problema, primeiramente, é preciso que ele consiga construir um modelo matemático que descreva o problema proposto. A seguir, abordaremos o processo de Modelagem e seu uso no ensino de Matemática.

2.1 O que é Modelagem Matemática?

Segundo CARMINATI [6], a Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo que tenta descrever matematicamente um fenômeno da nossa realidade para tentar compreendê-lo e estudá-lo, criando hipóteses e reflexões sobre tais fenômenos.

Um modelo matemático tem por finalidade descrever situações, permitir análises dos aspectos relevantes da situação, responder as perguntas formuladas sobre a situação-problema a ser investigada e até mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo. Conforme CARMO [7], o modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente.

Conforme CARMINATI [6], a Modelagem Matemática é uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática que pode ser utilizada tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. A partir de conceitos gerais, procura-se mostrar a importância da Matemática para o conhecimento e compreensão da realidade onde se vive.

De acordo com BIEMBENGUT [3] , a obtenção do modelo matemático através de um problema real é composto de: reconhecimento do problema, em que ocorre a interação e o conhecimento do problema; formulação do problema, em que ocorre a modelagem e a resolução do modelo; e a validação do modelo matemático, em que se verifica o quanto o modelo se aproxima da situação real.

Já LYRA [10] defende que uma abordagem a ser seguida pelo professor consiste em apresentar o problema, caracterizando-o em um contexto simples e objetivo para o aluno. É interessante sempre começar por problemas que envolvam modelos com duas variáveis para, então, abordar problemas com três ou mais variáveis. Deve-se deixar claro que o modelo resultante impactará no resultado, de forma que muita atenção deve ser tomada no passo de modelagem.

2.2 Pesquisa Operacional (PO)

A Pesquisa Operacional (PO) é uma ciência que tem como objetivo fornecer ferramentas quantitativas ao processo de tomada de decisões. Resumidamente, consiste na descrição de um sistema organizado com o auxílio de um modelo, e através da experimentação com o modelo, na descoberta da melhor forma de operar o sistema (SILVA[16]).

O termo Pesquisa Operacional (em inglês: Operations Research) foi empregado pela primeira vez em 1939 como uma tentativa de englobar, sob uma única denominação, todas as técnicas existentes ou que viriam a ser desenvolvidas e que tinham o mesmo objetivo citado. De uma maneira geral, todas as disciplinas que constituem a PO se apoiam em quatro ciências fundamentais: Economia, Matemática, Estatística e Informática.

Como pode ser visto, por exemplo, em SILVA [16], um estudo em Pesquisa Operacional costuma envolver seis fases:

- Formulação do problema: Nesta fase há a definição dos objetivos a serem alcançados e quais os possíveis modos para que isso ocorra.
- Construção do Modelo do Sistema: São modelos matemáticos formados por um conjunto de equações ou inequações. Uma das equações desse conjunto que serve para medir a eficiência do sistema é chamada de função objetivo. As demais inequações geralmente descrevem as limitações ou restrições técnicas do sistema.
- Cálculo da solução através do modelo: É realizado através de técnicas matemáticas específicas.

- Teste do modelo e da solução: É realizado com dados empíricos do sistema. Se houver dados históricos, eles serão aplicados no modelo, gerando um desempenho que pode ser comparado ao desempenho observado no sistema.

- Estabelecimento de controle da solução: A construção e experimentação com o modelo identificam parâmetros fundamentais para a solução do problema. Qualquer alteração nesses parâmetros deverá ser controlada para garantir a validade da solução adotada.

- Implementação e acompanhamento: Nesta fase, a solução será apresentada ao administrador, evitando-se o uso da linguagem técnica do modelo.

Uma das vantagens do uso da Pesquisa Operacional, por exemplo, é o seu uso na Programação Linear, onde o objetivo é encontrar o lucro máximo ou o custo mínimo em situações reais.

2.2.1 Programação Linear

A Programação Linear, uma das técnicas utilizadas na Pesquisa Operacional, é um método que busca a otimização de um determinado problema que possui muitas soluções possíveis, através da maximização ou minimização de uma função linear.

Segundo SILVA[16], esta técnica foi criada em 1946 e tem sido aplicada nas áreas mais diversas. Algumas aplicações se tornaram clássicas, tais como: formulação de alimentos, rações e adubos; blindagem de ligas metálicas e petróleo; transporte; localização industrial; carteira de ações (Investimentos); alocação de recursos em fábricas, fazendas, escritórios, etc; designação de pessoas e tarefas (composição de tabelas de horários); corte de barras e chapas.

A aplicação da Programação Linear em apoio à decisão ocorre na condição que se decide para atingir um objetivo. Este, por sua vez, é resultante da determinação ótima dos recursos. Segundo GOLDBARG [8], os modelos de Programação Linear constituem um tipo especial de modelo de otimização. Para que um determinado sistema possa ser representado por meio de um modelo de Programação Linear, ele deve possuir as seguintes características:

- Proporcionalidade: A quantidade de recurso consumido por uma dada atividade deve ser proporcional ao nível dessa atividade na solução final do problema. Além disso, o custo de cada atividade é proporcional ao nível de operação da atividade.
- Não-negatividade: Deve ser sempre possível desenvolver dada atividade em qualquer nível não-negativo e qualquer proporção de um dado recurso deve sempre poder ser utilizado.
- Aditividade: O custo total é a soma das parcelas associadas a cada atividade.
- Separabilidade: Pode-se identificar de forma separada o custo (ou consumo de recursos) específico das operações de cada atividade.

O problema geral em Programação Linear é utilizado para otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear de variáveis, chamada de função objetivo, sujeita a uma série de equações (ou inequações) lineares, chamadas restrições. A formulação do problema a ser resolvido segue o roteiro abaixo, sugerido por SILVA[16]:

- Definição das variáveis de decisão envolvidas:

Aqui o trabalho consiste em explicitar as decisões que devem ser tomadas e representar as possíveis decisões através de variáveis chamadas variáveis de decisão.

- Definição do objetivo do problema:

Devemos identificar o objetivo da tomada de decisão. Nessa etapa definimos a função objetivo que é a expressão que calcula o valor do objetivo em função das variáveis de decisão.

- Conhecimento das restrições a que está sujeito o problema:

Cada restrição imposta na descrição do sistema deve ser expressa como uma relação linear (igualdade ou desigualdade), montadas com as variáveis de decisão.

Forma padrão de um problema em Programação Linear

De acordo com ARENALES *et al* [2], um problema em Programação Linear pode ser representado por meio do seguinte modelo:

Otimizar: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (i)$

Sujeito a:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases} \qquad (ii)$$

Nesse caso, Z é chamada de função objetivo e (ii) são as restrições impostas pelo problema. O termo otimizar significa maximizar ou minimizar.

Segundo ARENALES *et al* [2], a resolução da formulação em (ii) ocorre observando a região de soluções formada pelo conjunto de restrições, incluindo o domínio das variáveis. Uma solução é chamada de viável quando se faz uma escolha para os valores das variáveis que atendam a todas as restrições do modelo. A solução viável é ótima, quando atinge o critério da função objetivo comparada a todas as outras soluções viáveis, isto é, a solução traz o máximo ou o mínimo para a função objetivo. O interesse está sempre na solução ótima.

Exemplo de um problema de maximização do lucro:

Função objetivo a ser maximizada: Lucro $Z = 2x_1 + 3x_2$

Restrições técnicas: $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 6x_1 + x_2 \leq 20 \end{cases}$

Restrições de não-negatividade: $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

As variáveis controladas ou variáveis de decisão são x_1 e x_2. A função objetivo Z mede o desempenho do sistema, no caso a capacidade de gerar lucro, para cada solução apresentada. O objetivo é maximizar o lucro. As restrições garantem que essas soluções estão de acordo com as limitações técnicas impostas pelo sistema. As restrições de não-negatividade devem acontecer sempre que a técnica de abordagem for a de Programação Linear. Uma vez obtido o modelo linear (ou modelo do problema), que é constituído pela função objetivo e pelas restrições, a Programação Linear se encarrega de encontrar a solução ótima, que pode ser tanto a maximização de um lucro, quanto a minimização de custos, utilizando alguns métodos de resolução de problemas de otimização, que veremos durante o decorrer do trabalho.

A seguir, apresentaremos duas técnicas de resolução de problemas de otimização. Como aqui a intenção é abordar tópicos de Programação Linear tendo como público alvo alunos do Ensino Médio, então os conceitos matemáticos aqui envolvidos não serão tratados com muito rigor. Na maioria das vezes, os temas serão abordados e explicados a partir de exemplos triviais. Para o leitor interessado em um maior aprofundamento no tema, no caso a Programação Linear, sugerimos como bibliografias GOLDBARG [8] e ARENALES *et al* [2].

Capítulo 3

Resolução Gráfica e o Método Simplex

Neste capítulo, iremos abordar duas técnicas de resolução de problemas em Programação Linear. A primeira técnica abordada é o Método da Resolução Gráfica para problemas de otimização com duas variáveis. A segunda técnica é o Método Simplex, que determina algebricamente a solução de um problema de otimização com duas ou mais variáveis.

3.1 Método Gráfico

Uma das técnicas utilizadas para encontrar a solução de Modelos de Programação Linear com duas variáveis é o Método Gráfico. Essa técnica consiste em representar em um sistema de eixos ortogonais o conjunto das possíveis soluções do problema, isto é, o conjunto de pontos que obedecem ao grupo de restrições impostas pelo sistema em estudo. Vamos seguir os passos sugeridos por SILVA [16]. (Os gráficos aqui obtidos foram construídos com o auxílio do software Winplot, disponível no site www.microsofttranslator.com.)

3.1.1 Gráfico do conjunto de soluções

A representação gráfica de uma equação linear com duas variáveis é uma reta. E a representação gráfica de uma inequação linear com duas variáveis é um dos semiplanos definidos pela reta correspondente à equação. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 1: Representar graficamente a inequação: $x + 2y \geq 10$

a) Construir a reta correspondente à equação: $x + 2y = 10$

Note que esta equação pode ser escrita em sua forma reduzida $y = -\frac{x}{2} + 5$, cujo o coeficiente angular é $m = -\frac{1}{2}$. Como sabemos, para determinarmos o gráfico, basta considerarmos dois pontos. Aqui consideramos:

$x = 0$, obtendo $2y = 10 \Rightarrow y = 5$ e $y = 0$, obtendo $x = 10$

b) Testar a inequação:

Tomamos um ponto qualquer de uma das regiões limitadas pela reta, por exemplo, o ponto $(x = 10,\ y = 5)$.

Substituindo na inequação:

$x + 2y = 10 + 2.5 = 20 \geq 10$, o que é verdadeiro, portanto, a região das soluções da inequação é aquela que contém o ponto testado. De uma maneira mais formal temos que a região desejada é a que está acima da reta $x + 2y = 10$. Isto pode ser observado no gráfico a seguir:

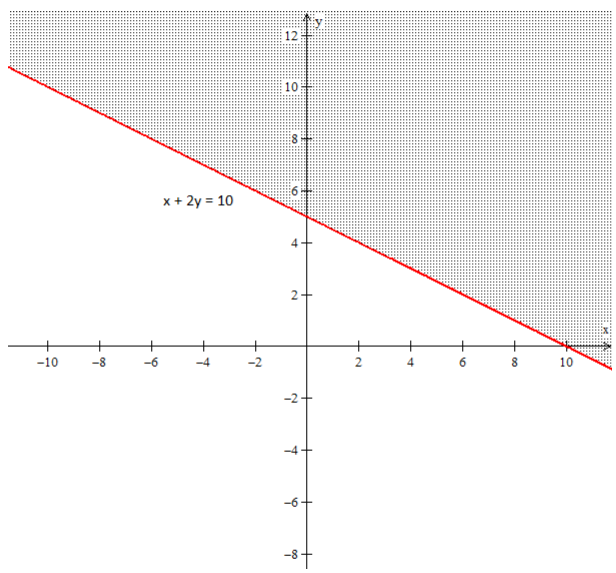


Figura 3.1: Região de soluções da inequação $x + 2y \geq 10$

Quando se representa uma inequação no sistema de eixos ortogonais, tem-se uma região de soluções, como na figura acima. Se por outro lado, há duas ou mais inequações representadas num mesmo sistema, deseja-se a região de interseção, chamada de região viável. Considere o exemplo seguinte:

Exemplo 2: Representar graficamente a solução do sistema:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ 2x + y \geq 16 \end{cases}$$

Solução:

O procedimento é análogo ao exemplo anterior. Vamos representar cada uma das retas correspondentes:

1) Construir a reta correspondente à equação: $x + 3y = 12$

Essa equação pode ser escrita em sua forma reduzida $y = -\frac{x}{3} + 4$. Para determinarmos o gráfico, basta considerarmos dois pontos. Assim:

Se $x = 0$, obtemos, $y = 4$ e $y = 0$, obtemos, $x = 12$

Agora, tomamos um ponto qualquer de uma das regiões limitadas pela reta, por exemplo, o ponto $(x = 4,\ y = 7)$.

Substituindo na inequação:

$x+3y = 4+3.7 = 25 \leq 12$, o que é falso, portanto, a região das soluções da inequação é aquela que não contém o ponto testado. De uma maneira mais formal temos que a região desejada é a que está abaixo da reta $x + 3y = 12$. Isto pode ser observado no gráfico abaixo:

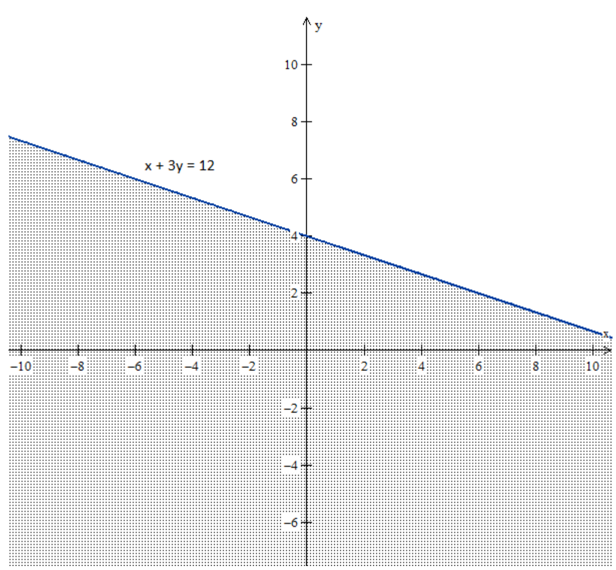


Figura 3.2: Região de soluções da inequação $x + 3y \leq 12$

2) Construir a reta correspondente à equação: $2x + y = 16$

Como no caso anterior, vamos considerar dois pontos. Temos:

Se $x = 0$, então $2.0 + y = 16$. Portanto, $y = 16$
Se $x = 0$, então $2x + 0 = 16$. Portanto, $x = 8$

Considerando agora um ponto qualquer de uma das regiões limitadas pela reta, por exemplo, o ponto $(x = 10,\ y = 10)$.

Substituindo na inequação:

$2x + y = 2.10 + 10 = 30 \geq 16$, o que é verdadeiro, portanto a região das soluções da inequação é aquela que contém o ponto testado. Desse modo temos que a região desejada é a que está acima da reta $2x + y = 16$. Como mostra o gráfico abaixo:

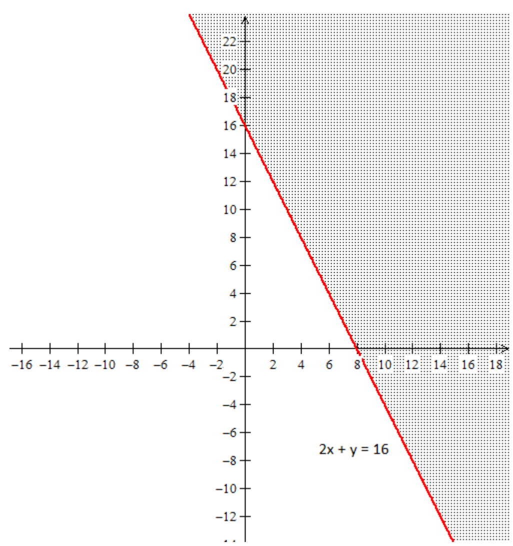


Figura 3.3: Região de soluções da inequação $2x + y \geq 16$

Por fim, temos que a solução do sistema de inequações é a interseção das duas regiões de solução das inequações do sistema. Se considerarmos apenas o primeiro quadrante, a região de soluções aparece sombreada no gráfico.

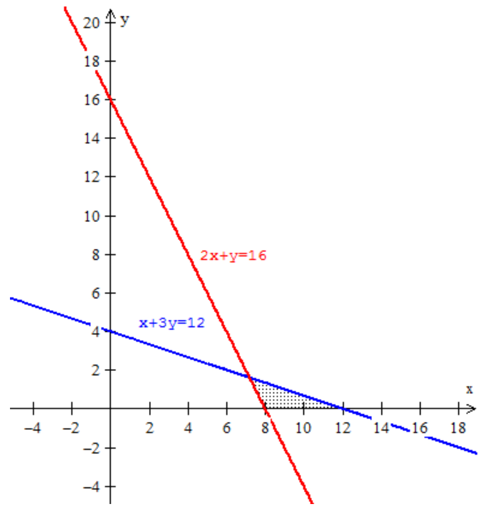


Figura 3.4: Região da solução do sistema de inequações

Observando o gráfico anterior e tomando o domínio das variáveis, que devem assumir valores não-negativos, considera-se apenas o primeiro quadrante como parte válida da região viável. A região delimitada, que é um polígono, possui os vértices chamados de pontos extremos.

Segundo ARENALES [2], na resolução de um problema de Programação Linear existe a garantia de que a solução está em um dos vértices quando a região viável é delimitada. Com isso, é preciso encontrar as coordenadas dos vértices da região poligonal, que são obtidas transformando as inequações em equações e em seguida, calcula-se a interseção entre as equações para obter os vértices de interesse. Portanto, se a região viável de um problema de Programação Linear é não vazia, a função objetivo atinge o valor de máximo ou de mínimo nos pontos extremos desta região.

Baseado nesse conceito, a função objetivo Z (definida em (i)) deve atingir valores extremos na região do sistema cartesiano formada pela interseção das inequações que são as restrições do problema. Para cada valor que a função Z assumir, tem-se uma reta paralela a anterior, de forma que se pode "fatiar" a região poligonal em diversas retas paralelas, ou seja, desenhar curvas de nível da função objetivo. Se a região é fechada e limitada, é possivel obter uma curva de nível que atinge um dos pontos extremos. No exemplo a seguir, os conceitos citados acima ficarão mais claros.

3.1.2 Avaliação da função objetivo

Vamos resolver agora um modelo de problema de Programação Linear de maximização da função objetivo utilizando o Método Gráfico. Observe o exemplo a seguir:

Maximizar: $Z = 2x + 5y$

Sujeito à:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ 3x + 4y \leq 24 \end{cases}$$

Restrições de não-negatividade: $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

Primeiramente, vamos solucionar o sistema de inequações, que como já vimos anteriormente, é a interseção das duas regiões de solução das inequações do sistema. Considerando as restrições de não-negatividade, temos que a região de soluções é a que aparece sombreada no gráfico abaixo:

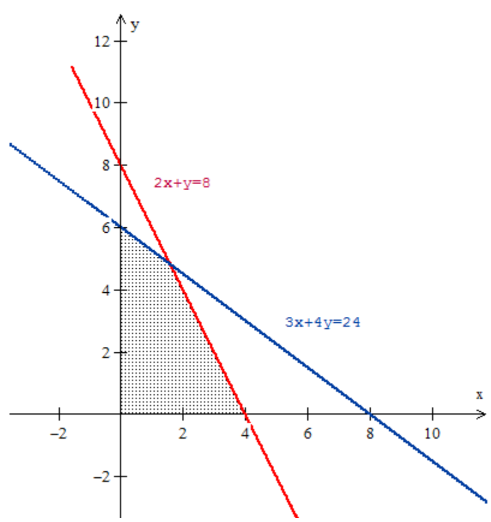


Figura 3.5: Região da solução do sistema de inequações

O objetivo agora é maximizar a função Z na região viável. O Método Gráfico consiste em desenhar curvas de níveis [1] dessa função para alguns valores de Z. Como a finalidade é encontrar as variáveis que pertencem a região de viabilidade e que maximizam Z, basta então, determinar o valor de Z para o qual a curva de nível intercepta a região viável no vértice do polígono. No gráfico abaixo, estão desenhadas curvas de níveis para a função objetivo $Z = 2x + 5y$, que foram encontradas lançando-se valores arbitrários para Z.

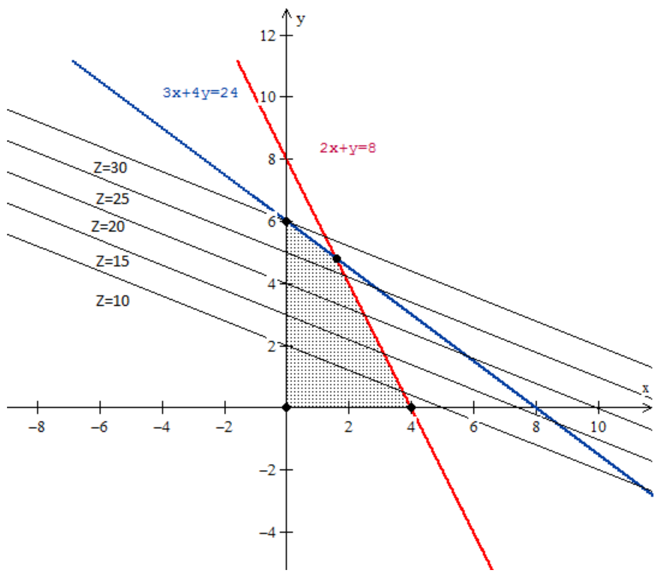


Figura 3.6: Curvas de níveis da função objetivo $Z = 2x + 5y$

De acordo com as ideias de TAHA [19], uma característica importante da solução ótima de um problema de Programação Linear é que ela sempre está relacionada com um ponto extremo da região de soluções, ou seja, os vértices do polígono. Portanto, basta substituir as coordenadas dos pontos extremos na função objetivo, e o maior valor será então, a solução ótima. Substituindo os pontos extremos da região de soluções na função $Z = 2x + 5y$, temos:

Pontos extremos	Função objetivo Z	Valor de Z
$(0, 0)$	$Z = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0$	$Z = 0$
$(0, 6)$	$Z = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 6$	$Z = 30$
$\left(\frac{8}{5}, \frac{24}{5}\right)$	$Z = 2 \cdot \frac{8}{5} + 5 \cdot \frac{24}{5}$	$Z = 27,2$
$(4, 0)$	$Z = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 0$	$Z = 8$

[1] Para conceitos sobre curvas de níveis sugerimos, por exemplo, SWOKOWSKI [18]

Podemos perceber na tabela acima, que o maior valor encontrado foi $Z = 30$. E esse é o valor arbitrário de Z na reta $2x + 5y = 30$, que intercepta o ponto $(0, 6)$ na figura 3.6 e que não possui região de possíveis valores acima dela. Ou seja, a solução que maximiza Z é $x = 0$ e $y = 6$.

A seguir, vamos descrever o método algébrico de resolução de problemas em Programação Linear com mais de duas variáveis, o Método Simplex.

3.2 Método Simplex

Antes de descrever o Método Simplex, que é o objetivo dessa seção, vamos definir alguns conceitos em Álgebra Linear, que são utilizados durante a descrição e aplicação do método.

3.2.1 Noções sobre Álgebra Linear

Vamos explicitar agora algumas noções sobre Álgebra Linear. Iremos nos basear nas idéias de SILVA [16] e LIMA [9].

Espaço Vetorial e Combinação linear entre vetores

Faremos agora, uma breve revisão sobre Espaços Vetoriais. Para um aprofundamento no assunto, sugerimos LIMA [9].

Vamos considerar os seguintes conjuntos:

- $\mathbb{R}$: Conjunto dos números reais;

- $\mathbb{R}^2$: Conjunto dos pares ordenados de números reais;

- $\mathbb{R}^3$: Conjunto das ternas ordenadas de números reais;

$\vdots$

- $\mathbb{R}^n$: Conjunto das n-úplas ordenadas de números reais $(x_1, x_{2,\cdots}, x_n)$ onde x_i é um número real qualquer.

Podemos definir nesses conjuntos duas operações:

a) Adição:

$(x_1, x_{2,\cdots}, x_n) + (y_1, y_{2,\cdots}, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

b) Multiplicação:
$k \cdot (x_1, x_{2,\ldots}, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$

Essas operações devem satisfazer, para quaisquer α, $\beta \in \mathbb{R}$, as propriedades abaixo:

- Comutatividade: $x_1 + y_1 = y_1 + x_1$;
- Associatividade: $(x_1 + y_1) + z_1 = x_1 + (y_1 + z_1)$ e $(\alpha \cdot \beta)\, x_1 = \alpha\, (\beta x_1)$;
- Vetor nulo: existe um vetor 0 chamado de vetor nulo, tal que $x_1 + 0 = 0 + x_1 = x_1$;
- Inverso aditivo: para cada vetor x_1 existe um vetor $-x_1$ chamado de inverso aditivo de x_1, tal que $-x_1 + x_1 = x_1 + (-x_1) = 0$;
- Distributividade: $(\alpha + \beta)\, x_1 = \alpha x_1 + \beta x_1$ e $\alpha\, (x_1 + y_1) = \alpha x_1 + \alpha y_1$;
- Multiplicação por 1: $1 \cdot x_1 = x_1$

Cada um desses conjuntos, munidos dessas duas operações e satisfazendo as propriedades acima, compõe uma estrutura matemática chamada de Espaço Vetorial. Os elementos são chamados vetores, e podem ser escritos na forma de linhas ou colunas. Observe os exemplos:

$(3, 5)$ $-$Vetor do $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$- Vetor do $\mathbb{R}^3$

Dado um grupo de vetores de um Espaço Vetorial, podemos multiplicar cada um deles por um número real qualquer e em seguida somá-los. O vetor obtido nessa operação é uma combinação linear dos vetores dados.

Exemplo:

Dados os vetores $(3, 2, 1)$ e $(6, 4, 9)$

$4 \cdot (3, 2, 1) + 5 \cdot (6, 4, 9) = (12, 8, 4) + (30, 20, 45) = (42, 28, 49)$ é uma combinação linear dos vetores dados.

Base de um Espaço Vetorial

Se um vetor não pode ser escrito como combinação linear de um grupo de vetores, dizemos que ele é linearmente independente dos vetores do grupo. Quando dizemos que um conjunto de vetores é linearmente independente, estamos afirmando que cada um dos vetores é linearmente independente dos outros (Veja em LIMA [9]). Podemos definir agora, o conceito de Base de um Espaço Vetorial.

Definição: Base do espaço $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de n vetores do $\mathbb{R}^n$, que são linearmente independentes.

A base de um espaço vetorial é um gerador do espaço, isto é, qualquer vetor do espaço pode ser obtido como combinação linear dos vetores da base.

A combinação linear para gerar um vetor a partir da base resulta num sistema de equações que tem sempre solução única.

Solução Básica de um Sistema de Equações Lineares

Para compreender o que é uma solução básica de um sistema de equações lineares, vamos partir de um exemplo. Observe o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

Podemos escrever o sistema acima da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Observamos que os vetores que aparecem nas colunas são vetores do $\mathbb{R}^2$. Uma base do $\mathbb{R}^2$ é constituída de dois vetores linearmente independentes. Assim, uma solução básica do sistema pode ser obtida zerando-se 2 variáveis, por exemplo, x_3 e x_4, reduzindo o sistema a uma base de 2 vetores: $(1, 2)$ e $(3, 1)$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtido, teremos:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \implies x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 3 \ .$$

Assim, temos uma solução básica para o sistema inicial:

$x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$.

Podemos encontrar outras soluções básicas para o sistema fazendo, por exemplo, $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$. O exemplo apresenta no total, seis soluções básicas.

Problema Fundamental da Programação Linear

A partir de um modelo em Programação Linear com duas variáveis de decisão, vamos construir a região de soluções do modelo, transformando o sistema de inequações em um sistema de equações com variáveis não-negativas e mostraremos que as soluções básicas desse sistema de equações obtido são os vértices da região de soluções do modelo.

Considere o exemplo:

Maximizar $Z = 2x_1 + 3x_2$

Sujeito as restrições:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases}$$

Restrições de não-negatividade: $\left\{ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \right.$

1) Construir a região de soluções do modelo:

Vamos representar graficamente a solução do sistema de inequações do modelo. Como já vimos anteriormente, a região de solução é a interseção das duas regiões de solução das inequações do sistema. Considerando as restrições de não-negatividade, a região de soluções aparece sombreada no gráfico:

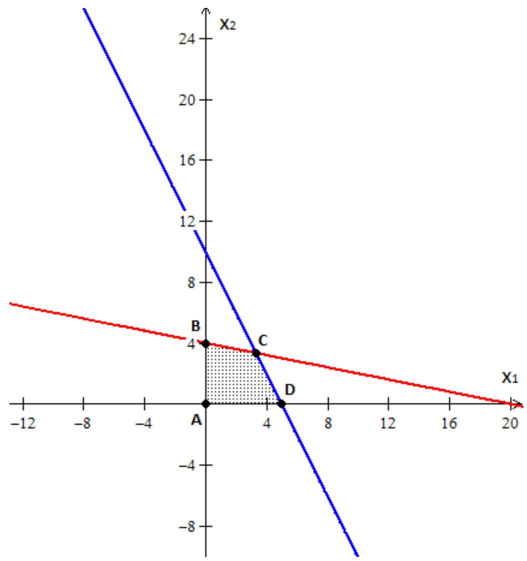


Figura 3.7: Região da solução do sistema de inequações

2) Transformar o sistema de inequações em um sistema de equações com variáveis não-negativas

Para transformar o sistema de inequações em um sistema de equações equivalente, precisamos introduzir em cada uma das inequações as variáveis xF_1 e xF_2, que representam as folgas das inequações, isto é, a diferença entre o segundo e o primeiro membro dessas inequações. Veja abaixo:

a) $x_1 + 5x_2 \leq 20$. Então: $xF_1 = 20$ - $(x_1 + 5x_2)$, ou $x_1 + 5x_2 + xF_1 = 20$.
b) $2x_1 + x_2 \leq 10$. Então: $xF_2 = 10$ - $(2x_1 + x_2)$, ou $2x_1 + x_2 + xF_2 = 10$.

As variáveis xF_1 e xF_2 não podem ser negativas, pois são calculadas por uma diferença em que o primeiro termo nunca é menor que o segundo termo da equação.

Isso resulta em um sistema de equações com variáveis não-negativas:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + xF_1 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + xF_2 = 10 \end{cases}$$

Restrições de não-negatividade: $\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, xF_1 \geq 0, xF_2 \geq 0 \end{cases}$

3) Mostrar que as soluções básicas do sistema de equações com variáveis não-negativas, obtidas acima, são vértices do polígono de soluções.

O sistema $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + xF_1 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + xF_2 = 10 \end{cases}$

Restrições de não-negatividade: $\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, xF_1 \geq 0, xF_2 \geq 0 \end{cases}$

Pode ser escrito assim:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} xF_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} xF_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Os vetores que compõem o sistema são do $\mathbb{R}^2$. Uma base do $\mathbb{R}^2$, tem 2 vetores linearmente independentes. Uma solução básica pode ser obtida zerando duas variáveis. Iremos zerar as variáveis na ordem da esquerda para a direita.

- $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Base $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Resulta o sistema: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} xF_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} xF_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$, onde $xF_1 = 20$ e $xF_2 = 10$.

Solução básica: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $xF_1 = 20$ e $xF_2 = 10$.

Nessa solução $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, que corresponde ao vértice A do gráfico de soluções (Figura 3.7).

- $x_1 = 0$ e $xF_1 = 0$. Base $(5, 1)$ e $(0, 1)$.

Sistema: $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} xF_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$, onde $x_2 = \frac{20}{5} = 4$ e $xF_2 = 10 - 4 = 6$.

Solução básica: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $xF_1 = 0$ e $xF_2 = 6$.

Nessa solução $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, que corresponde ao vértice B do gráfico de soluções.

- $x_1 = 0$ e $xF_2 = 0$. Base $(5, 1)$ e $(1, 0)$.

Sistema: $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} xF_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$, onde $x_2 = 10$ e $xF_1 = 20 - 50$ ou $xF_1 = -30$.

Solução básica: $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $xF_1 = -30$ e $xF_2 = 0$.

Essa solução possui uma variável negativa. Isso indica um ponto fora do polígono de soluções do modelo. Ponto (0,10). (Veja Figura 3.7).

- $x_2 = 0$ e xF_1 =0 . Base $(1, 2)$ e $(0, 1)$

Sistema: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} xF_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$, onde $x_1 = 20$ e $xF_2 = 10 - 40$ ou $xF_2 = -30$.

Solução básica: $x_1 = 20$, $x_2 = 0$, $xF_1 = 0$ e $xF_2 = -30$

Como no caso anterior, essa solução possui uma variável negativa que também indica um ponto fora do polígono de soluções do modelo. Ponto (20,0). (Veja Figura 3.7).

- $x_2 = 0$ e $xF_2 = 0$. Base $(1, 2)$ e $(1, 0)$.

Resulta o sistema: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} xF_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$, onde $x_1 = 5$ e $xF_1 = 15$.

Solução básica: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $xF_1 = 15$ e $xF_2 = 0$.

Nessa solução $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, que corresponde ao vértice C do polígono de soluções do modelo (Figura 3.7).

- $xF_1 = 0$ e $xF_2 = 0$. Base $(1, 2)$ e $(5, 1)$.

Resulta o sistema: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$, onde $x_1 = \frac{30}{9}$ e $x_2 = \frac{30}{9}$.

Solução básica: $x_1 = \frac{30}{9}$, $x_2 = \frac{30}{9}$, $xF_1 = 0$ e $xF_2 = 0$.

A solução que corresponde ao vértice D do polígono de soluções (Figura 3.7).

Com base no que vimos acima, podemos traçar algumas observações acerca da resolução de um problema em Programação Linear:

1ª) O exame da figura obtida na solução gráfica indica que o valor ótimo procurado só pode ocorrer nos vértices do polígono de soluções do modelo;

2ª) Podemos calcular os vértices do polígono de soluções através das soluções básicas do sistemas de equações com variáveis não-negativas;

3ª) Testar a função objetivo em cada uma das soluções básicas e escolher o ponto mais favorável. Esse ponto será, portanto, a solução ótima do modelo;

Podemos estender esse raciocínio para modelos com mais de duas variáveis, onde não é mais possível a solução gráfica. Os candidatos a pontos ótimos do modelo são dados pelas soluções básicas do sistema de equações.

Desse modo, para um problema com muitas variáveis, o cálculo de todas as soluções básicas requer um grande esforço computacional. Isso pode ser evitado com o auxílio de um método que, a partir de uma solução básica inicial, escolha outras soluções para teste, formando um caminho "mais curto" até a solução ótima. Esse método é chamado Simplex.

O Método Simplex é uma técnica utilizada para se determinar, numericamente, a solução de um modelo em Programação Linear. O uso mais comum do Simplex é para se maximizar um resultado, ou seja, encontrar o maior valor possível para um total. Em sua forma padrão, as seguintes características para o sistema linear de equações são consideradas:

- Todas as variáveis são não-negativas;
- O problema em Programação Linear deve apresentar uma solução básica inicial;
- Todas as inequações iniciais do sistema são do tipo (<=), que tem a solução básica formada pelas variáveis de folga.

Se uma dessas características não ocorrer, então, casos especiais devem ser considerados, sendo esses casos não abordados no presente trabalho, por ser este uma proposta de ensino de resolução de problemas para alunos do Ensino Médio.

O Método Simplex é constituído por um grupo de fatores para a escolha de soluções básicas que melhorem o funcionamento do modelo. Para isso, precisamos de uma solução básica inicial. As soluções básicas decorrentes são calculadas com a troca de variáveis básicas por não básicas, gerando novas soluções.

A seguir, vamos descrever o passos do Método Simplex, baseados nas ideias de SILVA [16].

3.2.2 Descrição do Método para Maximização

1ª Parte: Teste da otimalidade para a solução.

Consiste em avaliar o efeito da permuta de uma variável básica por outra não básica, com a consequente formação da nova solução. Se a entrada de uma variável não básica puder melhorar o desempenho do sistema, a solução testada não é ótima.

Essa avaliação é possivel quando a função objetivo está escrita somente em termos das variáveis não básicas. Vejamos como isto funciona a partir de um exemplo:

Maximizar $\quad Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ 6x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 - x_2 \leq 30 \end{cases}$$

Restrições de não-negatividade: $\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Acrescentando as variáveis de folga nas restrições:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + xF_1 = 10 \\ 6x_1 + x_2 + xF_2 = 20 \\ x_1 - x_2 + xF_3 = 30 \end{cases}$$

Restrições de não-negatividade: $\begin{cases} x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ xF_1 \geq 0,\ xF_2 \geq 0,\ xF_3 \geq 0 \end{cases}$

Podemos visualizar uma solução formada pelas variáveis de folga. Basta fazer $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e teremos: $xF_1 = 10$, $xF_2 = 20$, $xF_3 = 30$.

Ou escrevendo na forma de vetores:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} xF_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} xF_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} xF_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Observemos que os vetores do primeiro membro constituem uma base do $\mathbb{R}^3$,e a solução $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $xF_1 = 10$, $xF_2 = 20$, $xF_3 = 30$ neste caso é uma solução básica inicial. Desse modo, as variáveis básicas são xF_1, xF_2 e xF_3, e as não básicas x_1 e x_2.

Assim, a função objetivo está escrita com as variáveis não básicas.

Examinando a função objetivo e a solução inicial, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $Z = 0$, com $Z = 3x_1 + 5x_2$, temos:

Se x_1 entra na base com valor 1, o valor de Z passa de $Z = 0$ para $Z = 3$, aumentando 3 unidades, exatamente o valor do coeficiente de x_1. Por outro lado, se x_2 entra na base com valor 1, o valor de Z passa de $Z = 0$ para $Z = 5$, aumentando 5 unidades, exatamente o valor do coeficiente de x_2. Porém, se o coeficiente de x_1 ou x_2 fosse negativo, a entrada dessa variável diminuiria o valor de Z, de acordo com o seu coeficiente. Podemos concluir que enquanto a função objetivo apresentar variáveis não básicas com coeficientes positivos, ela poderá ser aumentada, não sendo portanto a solução ótima.

Vamos reescrever agora, a função objetivo com todas as variáveis à esquerda:

$$Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Os coeficientes positivos à direita são negativos à esquerda, portanto, coeficientes negativos à esquerda indicam que o valor de Z pode ser aumentada com a entrada da variável na base, e na proporção de seu coeficiente. Escrito dessa forma, a solução testada só será ótima quando as variáveis não básicas não apresentarem coeficientes negativos.

2ª Parte: Cálculo da nova solução básica

a) Variável que entra na base: entra na base a variável com coeficiente negativo de maior valor absoluto. A ideia é melhorar rapidamente o valor de Z. Examinando a função objetivo do exemplo anterior, $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$, entra a variável x_2, pois cada unidade a mais em x_2 aumenta Z em 5 unidades.

b) Variável que sai: sai a variável que primeiro se anula com a entrada da variável escolhida no item anterior, no caso x_2, que entra com maior valor possível.

Ela pode ser descoberta dividindo-se os termos da direita das restrições pelos coeficientes positivos da variável que entra. O menor valor indica que a variável básica dessa linha é a que primeiro se anula e sairá da base.

No exemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + xF_1 = 10 & \rightarrow 10 \div 4 = 2,5 \\ 6x_1 + x_2 + xF_2 = 20 & \rightarrow 20 \div 1 = 20 \\ x_1 - x_2 + xF_3 = 30 & \rightarrow 30 \div (-1) = -30 \end{cases}$$

A última divisão não pode ser considerada, pois daria valor negativo para a variável na próxima base, o que não é possível. Portanto, sai a variável da primeira linha (no caso xF_1), pois foi a de resultado de menor valor.

c) Elemento Pivô: A coluna da variável que entra e a linha da variável que sai identificam um elemento comum chamado pivô.

A linha da variável que sai é também linha pivô. No caso, a primeira linha é a pivô e o coeficiente 4 de x_2 é o elemento pivô.

d) Calculando a nova solução:

d1) Vamos organizar a função objetivo e restrições numa tabela com colunas formadas pelos coeficientes de cada variável e outra dos termos independentes.

Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	xF_3	b	
1	-3	-5	0	0	0	0	
0	2	4	1	0	0	10	$\rightarrow$ sai (linha pivô)
0	6	1	0	1	0	20	
0	1	-1	0	0	1	30	

d2) Dividimos a linha pivô pelo valor do elemento pivô, obtendo uma nova linha com pivô unitário.

linha pivô:	0	2	4	1	0	0	10	
dividindo por 4:	0	0,5	1	0,25	0	0	2,5	$\nearrow$Nova linha pivô

d3) Vamos reescrever cada uma das outras linhas da seguinte maneira:

$1^{\underline{o}}$: Multiplicar os elementos da nova linha pivô pelo coeficiente da variável que entra na outra linha, com sinal trocado.

$2^{\underline{o}}$: Somar termo a termo com os elementos da outra linha.

Exemplo: Coeficiente da variável que entra x_2 na primeira linha é -5. Então:

nova linha pivô:	0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
$\times 5$:	0	2,5	5	1,25	0	0	12,5
+ primeira linha:	1	-3	-5	0	0	0	0
soma = nova primeira linha:	1	-0,5	0	1,25	0	0	12,5

O coeficiente da variável que entra x_2 na terceira linha é 1. Então:

nova linha pivô:	0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
$\times(-1)$:	0	-0,5	-1	-0,25	0	0	-2,5
+ terceira linha:	0	6	1	0	1	0	20
soma = nova terceira linha:	0	5,5	0	-0,25	1	0	17,5

O coeficiente a variável que entra na quarta linha é -1. Então:

nova linha pivô:	0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
$\times 1$:	0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
+ quarta linha:	0	1	-1	0	0	1	30
soma = nova quarta linha:	0	1,5	0	0,25	0	1	32,5

Reescrevendo a nova tabela com os resultados obtidos teremos:

Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	xF_3	b
1	-0,5	0	1,25	0	0	12,5
0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
0	5,5	0	-0,25	1	0	17,5
0	1,5	0	0,25	0	1	32,5

De onde concluímos a nova solução:

Variáveis não básicas	Variáveis básicas	Valor de Z
$x_1 = 0$	$x_2 = 2,5$	$Z = 12,5$
$xF_1 = 0$	$xF_2 = 17,5$	
	$xF_3 = 32,5$	

A função objetivo na nova solução está escrita em termos das variáveis não básicas x_1 e xF_1. As variáveis básicas têm coeficientes nulos.

A solução obtida tem $Z = 12,5$, contra $Z = 0$ da solução inicial. É melhor, mas ainda não é ótima, pois o coeficiente de x_1 na função objetivo é negativo.

Cálculo da nova solução:

- variável que entra: x_1 (coeficiente negativo de maior valor absoluto na função objetivo)
- variável que sai: Vamos dividir os termos independentes pelos coeficientes positivos de x_1:

$2,5 \div 0,5 = 5$
$17,5 \div 5,5 = 3,18 \rightarrow$ menor valor: sai a variável dessa linha no caso xF_2
$32,5 \div 1,5 = 21,67$

- Nova linha pivô: terceira linha.
- Elemento pivô: 5,5
- Cálculo da nova linha pivô:

linha pivô:	0	5,5	0	-0,25	1	0	17,5
$\div 5,5$:	0	1	0	-0,045	0,18	0	3,18

- Cálculo da nova primeira linha:

O coeficiente da variável que entra x_1 na primeira linha é -0,5. Então:

nova linha pivô:	0	1	0	-0,045	0,18	0	3,18
$\times 0,5$:	0	0,5	0	-0,022	0,09	0	1,59
+ primeira linha:	1	-0,5	0	1,25	0	0	12,5
soma = nova primeira linha:	1	0	0	1,227	0,09	0	14,09

- Cálculo da nova segunda linha:

O coeficiente da variável que entra x_1 na segunda linha é 0,5. Então:

nova linha pivô:	0	1	0	-0,045	0,18	0	3,18
$\times(-0,5)$:	0	-0,5	0	0,022	-0,09	0	-1,59
+ segunda linha:	0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
soma = nova segunda linha:	0	0	1	0,272	-0,09	0	0,91

- Cálculo da quarta linha:

O coeficiente da variável que entra x_1 na quarta linha é 1,5. Então:

nova linha pivô:	0	1	0	-0,045	0,18	0	3,18
$\times(-1,5)$:	0	-1,5	0	0,067	-0,27	0	-4,77
+ quarta linha:	0	1,5	0	0,25	0	1	32,5
soma = nova quarta linha:	0	0	0	0,317	-0,27	1	27,73

- Reescrevendo a nova tabela com os resultados obtidos teremos:

Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	xF_3	b
1	0	0	1,227	0,09	0	14,09
0	0	1	0,272	-0,09	0	0,91
0	1	0	-0,045	0,18	0	3,18
0	0	0	0,317	-0,27	1	27,73

A nova solução será portanto:

Variáveis não básicas	Variáveis básicas	Valor de Z
$xF_1 = 0$	$x_1 = 3,18$	$Z = 14,09$
$xF_2 = 0$	$x_2 = 0,91$	
	$xF_3 = 27,73$	

A função objetivo está escrita em termos das variáveis não básicas xF_1 e xF_2, pois os coeficientes das variáveis básicas são nulos. O valor de Z passou de $Z = 12,5$ para $Z = 14,09$. Essa solução é ótima, pois os coeficientes das variáveis não básicas na função objetivo são positivos. Se xF_1 ou xF_2 entrar na base, o valor de Z diminui, contrariando o objetivo.

Neste capítulo vimos a descrição dos dois métodos de resolução de problemas em Programação Linear abordados pelo presente trabalho. No capítulo seguinte, iremos solucionar dois exemplos de problemas de otimização utilizando esses métodos.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo serão apresentadas as resoluções de dois problemas em Programação Linear. Como o enfoque deste trabalho é contribuir para o ensino de problemas em Programação Linear no Ensino Médio, restringimos os problemas para o caso de duas e três variáveis de decisão. O primeiro problema será de maximização com duas variáveis e o resolveremos utilizando o Método Gráfico. O segundo problema também será de maximização, porém, com três variáveis e neste caso utilizaremos o Método Simplex para solucioná-lo. Os problemas aqui descritos foram retirados da obra de SILVA [16].

4.1 Problema: Produção de cintos de couro

Uma empresa fabrica dois modelos de cintos de couro. O modelo M1, de melhor qualidade, requer o dobro do tempo de fabricação em relação ao modelo M2. Se todos os cintos fossem do modelo M2, a empresa poderia produzir 1.000 unidades por dia. A disponibilidade de couro permite fabricar 800 cintos de ambos os modelos por dia. Os cintos empregam fivelas diferentes, cuja a disponibilidade diária é de 400 para M1 e 700 para M2. Os lucros unitários são de $ 4,00 para M1 e $ 3,00 para M2. Qual o programa ótimo de produção que maximiza o lucro total diário da empresa?

Para solucionarmos o problema vamos, inicialmente, modelar o problema seguindo o modelo proposto por SILVA [16]:

a) Quais são as variáveis de decisão?

O que deve ser encontrado são as quantidades diárias que devem ser produzidas dos modelos de cinto M1 e M2 que darão o melhor lucro possível para a empresa. Portanto, as variáveis de decisão serão:

$x \rightarrow$ Quantidade diária produzida do modelo de cinto M1
$y \rightarrow$ Quantidade diária produzida do modelo de cinto M2

b) Qual o objetivo?

O objetivo é maximizar o lucro, que pode ser calculado:

Lucro devido ao modelo M1: $4 \cdot x$ (Lucro por unidade de M1 vezes a quantidade produzida de M1)
Lucro devido ao modelo M2: $3 \cdot y$ (Lucro por unidade de M2 vezes a quantidade produzida de M2)

Lucro total: $Z = 4x + 3y$

Objetivo: Maximizar $Z = 4x + 3y$

c) Quais as restrições?

As restrições impostas pelo problema são:

1ª) Disponibilidade de couro para a produção de M1 e M2: $x + y \leq 800$
2ª) Disponibilidade de fivelas para a produção do modelo M1: $x \leq 400$
3ª) Disponibilidade de fivelas para a produção do modelo M2: $y \leq 700$
4ª) Disponibilidade de tempo de produção dos modelos M1 e M2: $2x + y \leq 1000$

Portanto, o modelo que temos que otimizar é o seguinte:
Maximizar $Z = 4x + 3y$

Sujeito a:

$$\begin{cases} x + y \leq 800 \\ x \leq 400 \\ y \leq 700 \\ 2x + y \leq 1000 \end{cases}$$

Restrições de não-negatividade: $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$

Diante do modelo de Programação Linear do problema proposto, vamos agora solucioná-lo utlizando o Método Gráfico.

a) Construir a região de soluções das restrições:

Vamos representar cada uma das retas correspondentes. As regiões de não-negatividade ($x \geq 0$ e $y \geq 0$), representam o primeiro quadrante do gráfico de soluções. Como já visto no capítulo 3, a representação gráfica de uma equação linear com duas variáveis é uma reta. E a representação gráfica de uma inequação linear com duas variáveis é um dos semiplanos definidos pela reta correspondente à equação. Considere agora a inequação $2x + y \leq 1000$:

Vamos construir a reta correspondente à equação: $2x + y = 1000$;

Como sabemos, para determinarmos o gráfico, basta considerarmos dois pontos. Aqui consideramos:

$x = 0$, obtendo $y = 1000$ e $y = 0$, obtendo $x = 500$. Desse modo, temos que a região desejada é a que está abaixo da reta $2x + y = 1000$. Como mostra o gráfico:

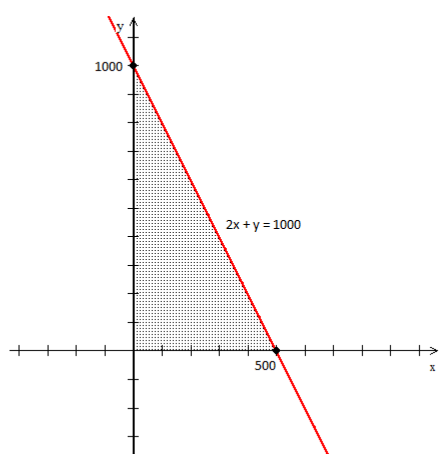


Figura 4.1: Região de solução da restrição $2x + y \leq 1000$

Considere agora a inequação: $x + y \leq 800$

Construindo de maneira análoga a reta correspondente à equação: $x + y = 800$, temos:

$x = 0$, obtendo $y = 800$ e $y = 0$, obtendo $x = 800$. A região desejada é a que está abaixo da reta $x + y = 800$.

Abaixo temos a representação gráfica da solução da inequação:

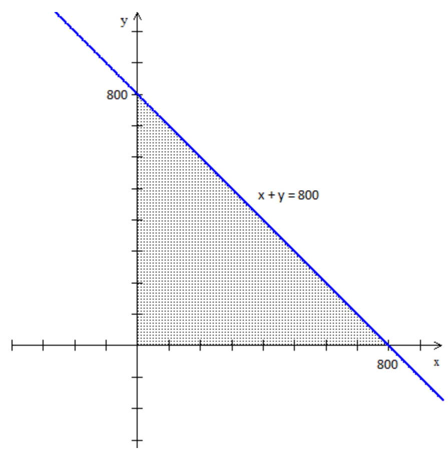


Figura 4.2: Região de solução da restrição $x + y \leq 800$

Considere a inequação $x \leq 400$

O gráfico da reta correspondente à equação: $x = 400$ será uma reta paralela ao eixo y que passa por $x = 400$.

A seguir, temos a representação da região de solução da inequação $x \leq 400$.

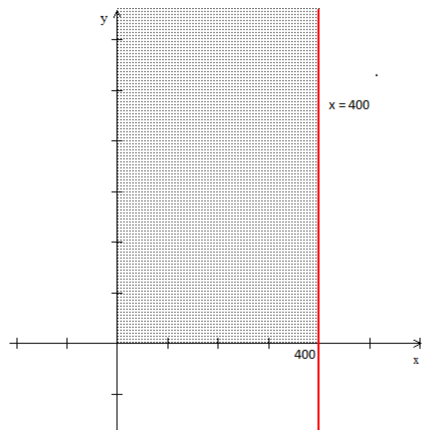


Figura 4.3: Região da solução da restrição: $x \leq 400$

Agora considere a inequação: $y \leq 700$

O gráfico da reta correspondente à equação $y = 700$ será uma reta paralela ao eixo x que passa por $y = 700$.

Abaixo, temos a representação da região da solução da inequação $y \leq 700$.

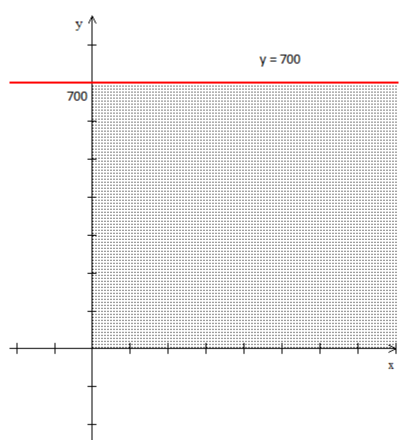


Figura 4.4: Região da solução da restrição $y \leq 700$

Para encontrar a região de soluções das restrições acima, escolhemos um ponto fora das retas das equações, por exemplo, o ponto E(100,100). Analisando o ponto e sua localização, temos:

1. $2x + y \leq 1000$; substituindo $x = 100$ e $y = 100$, obtém-se:

$2x + y = 2.100 + 100 = 300 \leq 1000$, a desigualdade é verdadeira. O que mostra que a solução é a região do ponto testado.

2. $x + y \leq 800$; substituindo $x = 100$ e $y = 100$, obtém-se:

$x + y = 100 + 100 = 200 \leq 800$, a desigualdade é verdadeira. Novamente, a solução é a região do ponto testado.

3. $x \leq 400$; substituindo $x = 100$ e $y = 100$, obtém-se:

$100 \leq 400$, desigualdade verdadeira. A solução é a região do ponto testado. Analogamente, teremos a mesma conclusão para a restrição $y \leq 700$.

Como já visto, a interseção das regiões de solução das inequações do sistema é a solução do sistema de inequações. Considerando as restrições de não-negatividade $x \geq 0$ e $y \geq 0$, a região de soluções aparece sombreada no gráfico:

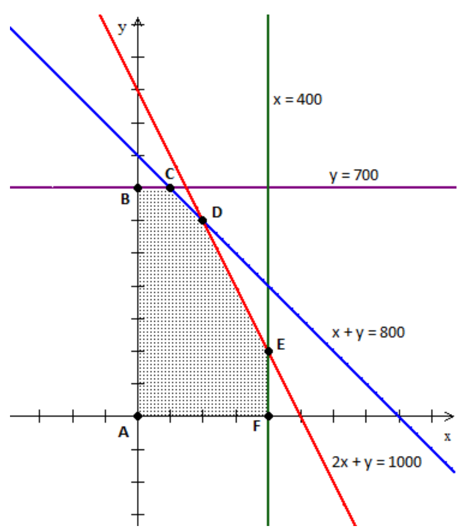


Figura 4.5: Região da solução do sistema de inequações do problema

b) Avaliar o desempenho da função objetivo:

Agora, vamos avaliar o desempenho da função objetivo: $Z = 4x + 3y$, na região de soluções das restrições do modelo do problema proposto. Para isso, vamos escolher valores arbitrários para Z e com isso, obter retas paralelas (curvas de níveis) que irão interceptar a região de soluções. Observe o gráfico:

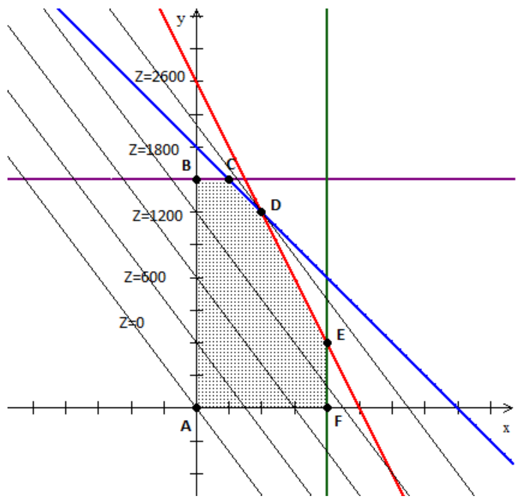


Figura 4.6: Curvas de níveis da função objetivo $Z = 4x + 3y$

Verificamos acima que pelo ponto D (200,600) do gráfico teremos a paralela de maior valor para Z ($Z = 2600$) que ainda é um ponto que pertence a região de soluções. Portanto, o ponto D (200,600) é a solução que maximiza Z na região de soluções dadas. Assim, substituindo $x = 200$ e $y = 600$ na função objetivo $Z = 4x + 3y$ teremos:

$Z = 4 \cdot 200 + 3 \cdot 600$ ou $Z_{máximo} = 2600$.

Substituindo agora os pontos extremos da região de soluções na função $Z = 4x + 3y$, temos:

Pontos extremos	Função objetivo Z	Valor de Z
$A\,(0,0)$	$Z = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0$	$Z = 0$
$B\,(0,700)$	$Z = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 700$	$Z = 2100$
$C\,(100,700)$	$Z = 4 \cdot 100 + 3 \cdot 700$	$Z = 2500$
$D\,(200,600)$	$Z = 4 \cdot 200 + 3 \cdot 600$	$Z = 2600$
$E\,(400,200)$	$Z = 4 \cdot 400 + 3 \cdot 200$	$Z = 2200$
$F\,(400,0)$	$Z = 4 \cdot 400 + 3 \cdot 0$	$Z = 1600$

Podemos perceber na tabela acima, que o maior valor encontrado para o lucro foi $Z = 2600$. Ou seja, a solução que maximiza $Z = 4x + 3y$ é $x = 200$ e $y = 600$. Assim, devemos ter uma produção diária de 200 unidades de cintos do modelo M1 e 600 unidades do modelo M2 para a empresa obter um lucro máximo de \$ 2600,00.

4.2 Problema: Divisão de uma propriedade

Um fazendeiro está estudando a divisão de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas:

A (Arrendamento) - Destinar certa quantidade de alqueires para a plantação de cana-de-açúcar, a uma usina local, que se encarrega da atividade e paga pelo aluguel da terra \$ 300,00 por alqueire por ano.

P (Pecuária) - Usar outra parte para a criação de gado de corte. A recuperação das pastagens requer adubação (100 kg/Alq.) e irrigação (100.000 litros de água/alq.) por ano. O lucro estimado nessa atividade é de \$ 400,00 por alqueire por ano.

S (Plantio de Soja) - Usar uma terceira parte para o plantio de soja. Essa cultura requer 200 kg por alqueire de adubos e 200.000 litros de água/Alq. para irrigação por ano. O lucro estimado nessa atividade é de \$500,00 por alqueire por ano.

Disponibilidade de recursos por ano:

12.750.000 litros de água.

14.000 kg de adubo.

100 alqueires de terra.

Quantos alqueires deverá destinar a cada atividade para proporcionar o melhor retorno?

Solução:

Construindo o modelo de Programação Linear para o problema proposto, temos:

a) Quais são as variáveis de decisão?

Devemos encontrar as quantidades de alqueires a serem destinadas a cada atividade produtiva para proporcionar o melhor retorno. Portanto, as variáveis de decisão serão:

$x_1 \rightarrow$ Quantidade de alqueires destinado para o arrendamento (atividade A)
$x_2 \rightarrow$ Quantidade de alqueires destinado para a pecuária (atividade P)
$x_3 \rightarrow$ Quantidade de alqueires destinado para o plantio de soja (atividade S)

b) Qual o objetivo?

O objetivo é maximizar o lucro (proporcionar o melhor retorno com a divisão da propriedade para as atividades produtivas), que pode ser calculado:

Lucro devido a atividade produtiva A: $300 \cdot x_1$ (Lucro de \$ 300,00 por alqueire por ano)

Lucro devido a atividade produtiva P: $400 \cdot x_2$ (Lucro de \$ 400,00 por alqueire por ano)

Lucro devido a atividade produtiva S: $500 \cdot x_3$ (Lucro de \$ 500,00 por alqueire por ano)

Lucro total: $L = 300x_1 + 400x_2 + 500x_3$

Objetivo: Maximizar $L = 300x_1 + 400x_2 + 500x_3$

c) Quais as restrições?

As restrições impostas pelo problema são:

1ª) Disponibilidade de água (litros por alqueire por ano):

$$100000x_2 + 200000x_3 \leq 12750000$$

2ª) Disponibilidade de adubos (kg por alqueire por ano):

$$100x_2 + 200x_3 \leq 14000$$

3ª) Disponibilidade de alqueires de terra:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$$

Resumo do Modelo:

Maximizar $L = 300x_1 + 400x_2 + 500x_3$

Sujeito a:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ 100x_2 + 200x_3 \leq 14000 \\ 100000x_2 + 200000x_3 \leq 12750000 \end{cases}$$

Restrições de não-negatividade: $\begin{cases} x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Vamos solucionar o problema utilizando o Método Simplex. Seguindo os passos do algoritmo, temos:

1º) Colocar as variáveis de folga e as variáveis da função objetivo à esquerda:

Maximizar: $L - 300x_1 - 400x_2 - 500x_3 = 0$

Sujeito a:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + xF_1 = 100 \\ 100x_2 + 200x_3 + xF_2 = 14000 \\ 100000x_2 + 200000x_3 + xF_3 = 12750000 \end{cases}$$

Restrições de não-negatividade:
$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \; xF_1 \geq 0, \; xF_2 \geq 0, \; xF_3 \geq 0 \end{cases}$

2º) Calcular a solução básica inicial:

Organizando a função objetivo e as restrições numa tabela com colunas formadas pelos coeficientes de cada variável e outra dos termos independentes, teremos:

L	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	xF_3	b
1	-300	-400	-500	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	100
0	0	100	200	0	1	0	14000
0	0	100000	200000	0	0	1	12750000

A variável que entra na base é a de coeficiente negativo de maior valor absoluto, no caso, será x_3.

A variável que sai é a primeira que se anula com a entrada da variável que entra. Para descobri-la, basta dividir os termos da direita das restrições pelos coeficientes positivos da variável que entra. Assim:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + xF_1 = 100 & 100 \div 1 = 100 \\ 100x_2 + 200x_3 + xF_2 = 14000 & 14000 \div 200 = 70 \\ 100000x_2 + 200000x_3 + xF_3 = 12750000 & 12750000 \div 200000 = 63,75 \end{cases}$$

Portanto, sai a variável da 4ª linha, no caso, xF_3.

Desse modo, temos que a linha pivô é a 4ª linha, pois é a linha da variável que sai. E o elemento pivô é o coeficiente 200000 da variável que entra x_3.

Calculando agora a nova linha pivô:

linha pivô:	0	0	100000	200000	0	0	1	12750000	
÷200000	0	0	0,5	1	0	0	0,000005	63,75	→nova linha pivô

Reescrevendo cada uma das outras linhas:

- Nova 1ª linha:

nova linha pivô:	0	0	0,5	1	0	0	0,000005	63,75
×500:	0	0	250	500	0	0	0,0025	31875
+ primeira linha:	1	-300	-400	-500	0	0	0	0
soma = nova 1ª linha:	1	-300	-150	0	0	0	0,0025	31875

- Nova 2ª linha:

nova linha pivô:	0	0	0,5	1	0	0	0,000005	63,75
$\times(-1)$:	0	0	-0,5	-1	0	0	-0,000005	-63,75
+ segunda linha:	0	1	1	1	1	0	0	100
soma = nova 2ª linha:	0	1	0,5	0	1	0	-0,000005	36,25

- Nova 3ª linha:

nova linha pivô:	0	0	0,5	1	0	0	0,000005	63,75
$\times(-200)$:	0	0	-100	-200	0	0	-0,001	-12750
+ terceira linha:	0	0	100	200	0	1	0	14000
soma = nova 3ª linha:	0	0	0	0	0	1	-0,001	1250

Reescrevendo a nova tabela com os resultados obtidos teremos:

L	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	xF_3	b
1	-300	-150	0	0	0	0,0025	31875
0	1	0,5	0	1	0	-0,000005	36,25
0	0	0	0	0	1	-0,001	1250
0	0	0,5	1	0	0	0,000005	63,75

Solução básica inicial:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de L
$x_3 = 63,75$	$x_1 = 0$	$L = 31875$
$xF_1 = 36,25$	$x_2 = 0$	
$xF_2 = 1250$	$xF_3 = 0$	

3º) Teste da solução:

A solução encontrada não é ótima, pois, os coeficientes de x_1 e x_2 na função objetivo são negativos. Assim, precisamos recalcular e encontrar uma nova solução.

4º) Cálculo da nova solução:

Considere a tabela encontrada na solução anterior.

L	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	xF_3	b
1	-300	-150	0	0	0	0,0025	31875
0	1	0,5	0	1	0	-0,000005	36,25
0	0	0	0	0	1	-0,001	1250
0	0	0,5	1	0	0	0,000005	63,75

Dessa vez, a variável que entra na base (coeficiente negativo de maior valor absoluto), será x_1. E sai a variável da 2ª linha, no caso, xF_1.

Portanto, temos que a linha pivô é a 2ª linha e o elemento pivô é o coeficiente 1 da variável que entra x_1.

Calculando a nova linha pivô:

linha pivô:	0	1	0,5	0	1	0	-0,000005	36,25	
÷1	0	1	0,5	0	1	0	-0,000005	36,25	→nova linha pivô

Reescrevendo cada uma das outras linhas:

- Nova 1ª linha:

nova linha pivô:	0	1	0,5	0	1	0	-0,000005	36,25
×300:	0	300	150	0	300	0	-0,0015	10875
+ primeira linha:	1	-300	-150	0	0	0	0,0025	31875
soma = nova 1ª linha:	1	0	0	0	300	0	0,001	42750

- Nova 3ª linha:

nova linha pivô:	0	1	0,5	0	1	0	-0,000005	36,25
×0:	0	0	0	0	0	0	0	0
+ terceira linha:	0	0	0	0	0	1	-0,001	1250
soma = nova 3ª linha:	0	0	0	0	0	1	-0,001	1250

- Nova 4ª linha:

nova linha pivô:	0	1	0,5	0	1	0	-0,000005	36,25
×0:	0	0	0	0	0	0	0	0
+ quarta linha:	0	0	0,5	1	0	0	0,000005	63,75
soma = nova 4ª linha:	0	0	0,5	1	0	0	0,000005	63,75

Reescrevendo a nova tabela com os resultados obtidos teremos:

L	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	xF_3	b
1	0	0	0	300	0	0,001	42750
0	1	0,5	0	1	0	-0,000005	36,25
0	0	0	0	0	1	-0,001	1250
0	0	0,5	1	0	0	0,000005	63,75

Solução básica inicial:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de L
$x_1 = 36,25$	$x_2 = 0$	$L = 42750$
$x_3 = 63,75$	$xF_1 = 0$	
$xF_2 = 1250$	$xF_3 = 0$	

A solução encontrada é ótima, pois, os coeficientes das variáveis não básicas na função objetivo são positivos. Encontramos então, a solução do problema.

Solução:

Quantidade de alqueires destinada à atividade A (Arrendamento): $x_1 = 36,25$.
Quantidade de alqueires destinada à atividade P (Pecuária): $x_2 = 0$.
Quantidade de alqueires destinada à atividade S (Plantio de Soja): $x_3 = 63,75$.
Lucro máximo obtido (melhor retorno): $42750,00.

Para finalizarmos nosso trabalho, no próximo capítulo elaboramos uma sugestão de ensino que pode ser aplicada em turmas do Ensino Médio. A proposta não foi testada em sala de aula devido ao prazo de finalização do curso de mestrado. Como professora de matemática do Ensino Médio acredito que esta proposta seja totalmente viável. Sugerimos o uso de software desenvolvido para smartphones (android). Acreditamos que a utilização desse recurso em sala irá despertar o interesse dos alunos pelo tema aqui proposto.

Capítulo 5

Uma proposta para o Ensino Médio

Neste capítulo, o nosso objetivo é tornar viável o ensino de sistemas de equações e inequações lineares utilizando a Programação Linear em turmas do Ensino Médio. Para isso, primeiramente, faremos uma breve abordagem dos conteúdos tratados no Ensino Médio, que são básicos para o estudo dos métodos abordados pelo presente trabalho. Logo após, vamos sugerir a utilização de dois aplicativos para celulares usados para resolver problemas em Programação Linear, solucionando exemplos e explicitando passo a passo a função dos mesmos.

5.1 Uma breve revisão sobre conteúdos abordados no Ensino Médio

Abordaremos aqui, alguns tópicos que são objetos de estudo durante alguns anos do Ensino Médio. Começaremos com o estudo da resolução gráfica de Sistemas de Equações Lineares com duas variáveis. Trataremos também das Inequações Lineares e dos Sistemas de Inequações que são o foco principal do tema do presente trabalho.

5.1.1 Sistemas de equações lineares

Quando afirmamos que

"Os alunos e alunas da turma de matemática básica somam 120 pessoas,"

estamos relacionando duas quantidades: o número de homens e o número de mulheres da turma. Como nenhuma das quantidades é conhecida, associamos a elas as incógnitas

$x =$ número de alunos
$y =$ número de alunas

Assim, podemos converter a frase acima na equação

$$x + y = 120$$

A equação acima possui duas variáveis, embora ainda seja linear. Abaixo faremos uma definição mais formal desse tipo de equação.

Definição:

Uma equação nas variáveis x e y é dita linear se é equivalente a .

$$ax + by = c,$$

em que a, b e c são constantes reais, com a $\neq 0$ ou b $\neq 0$

Outros exemplos de equações lineares em duas variáveis são dados abaixo:

a) $x = 2 + 3y$
b) $35 - 7y = 10x$
c) $\frac{x}{2} - \frac{5y}{3} = 4$

Voltando aos alunos e alunas da turma de matemática, observamos que, sozinha a equação $x + y = 120$ não nos permite determinar os valores de x e y, uma vez que a turma poderia ter 100 alunos e 20 alunas, ou 60 alunos e 60 alunas, ou qualquer outra combinação e números inteiros não-negativos cuja a soma resulte em 120.

Para que x e y tenham valores únicos, é necessário definir outra relação entre essas quantidades. Por exemplo, se soubermos que a diferença entre o número de alunos e alunas da turma é igual a 8, então também podemos escrever:

$$x - y = 8$$

de modo que, agora, temos o sistema de duas equações lineares

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

A solução de um sistema como esse é o par de valores reais x e y, que satisfaz as duas equações. Para o sistema acima, a solução é dada por $x = 64$ e $y = 56$, o que pode ser comprovado substituindo-se esses valores nas equações:

$$\begin{cases} x + y = 64 + 56 = 120 \\ x - y = 64 - 56 = 8 \end{cases}$$

Classificação dos sistemas lineares quanto à solução

1) Quando um sistema admite uma única solução dizemos que ele é um Sistema Possível e Determinado.

2) Quando um sistema admite uma infinidade de soluções dizemos que ele é um Sistema Possível e Indeterminado.

3) Quando o sistema não admite solução, ele é um Sistema Impossível.

Resolução gráfica de sistemas

Existem várias formas de se obter a solução de um sistema de equações lineares. A seguir, apresentaremos o método gráfico de resolução de um sistema de equações lineares com duas variáveis.

Para isso, vamos representar num referencial cartesiano cada uma das equações que formam um sistema, de modo a poder resolvê-lo graficamente. A resolução gráfica permite de imediato identificar se o sistema é impossível, indeterminado ou possível determinado.

Para resolver graficamente um sistema linear vamos seguir os passos abaixo:

1º) Represetam-se as retas associadas a cada uma das equações que formam o sistema dado, no mesmo referencial cartesiano.

2º) Procura-se no gráfico, se existirem, pontos comuns às duas retas.

Exemplo 1:

Vamos resolver graficamente o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Cada uma das equações do sistema corresponde a uma reta no Plano Cartesiano. Temos, então, de representá-las graficamente. Para isso, vamos encontrar pelo menos três pontos para cada uma delas.

1ª Equação

$x + y = 3 \Leftrightarrow y = -x + 3$

x	0	1	-1
$y = -x + 3$	3	2	4

2ª Equação

$x - y = 1 \Leftrightarrow -y = 1 - x \Leftrightarrow y = x - 1$

x	0	1	2
$y = x - 1$	-1	0	1

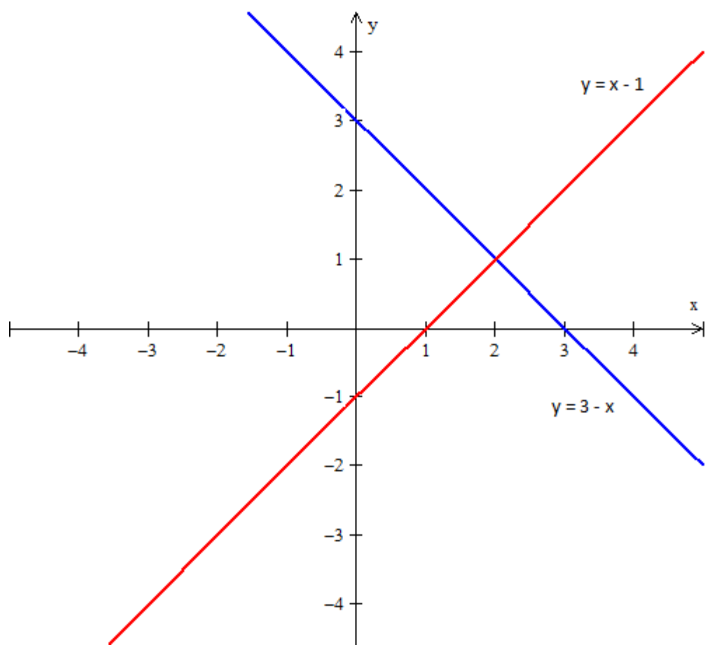


Figura 5.1: Solução do sistema do exemplo 1

As retas $y = x - 1$ e $y = 3 - x$ são concorrentes no ponto (2,1).
Desse modo, o sistema tem uma única solução - é um Sistema Possível e Determinado.

A solução do sistema é (2,1).

Exemplo 2:

Vamos resolver graficamente o sistema:

$$\begin{cases} x - 2 = -y \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Encontraremos agora, pelo menos três pontos para cada uma das retas do sistema

Equação 1

$x - 2 = -y \Leftrightarrow y = -x + 2$

x	0	1	-1
$y = -x + 2$	2	1	3

Equação 2

$x + y = 4 \Leftrightarrow y = -x + 4$

x	1	0	-1
$y = -x + 4$	3	4	5

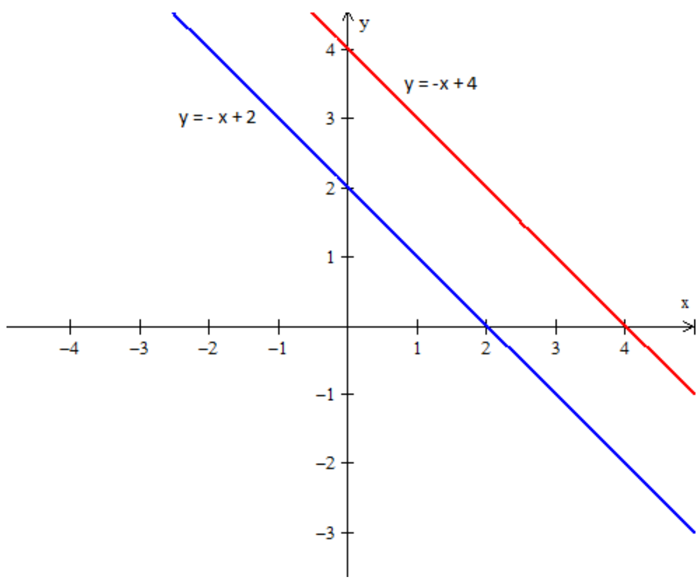


Figura 5.2: Solução do sistema do exemplo 2

As retas $y = -x + 2$ e $y = -x + 4$ têm o mesmo coeficiente angular, logo, elas são paralelas, ou seja, não possuem pontos em comum. Nesse caso, dizemos que o sistema é Impossível. Portanto, o sistema não possui solução.

Exemplo 3:

Resolver graficamente o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x = 4 - 2y \end{cases}$$

Encontrando agora, pelo menos três pontos que pertencem a cada reta do sistema:

Equação 1

$x + y = 2 \Leftrightarrow y = -x + 2$

x	0	-2	1
$y = -x + 2$	2	4	1

Equação 2

$2x = 4 - 2y \Leftrightarrow y = -x + 2$

x	0	-2	1
$y = -x + 2$	2	4	1

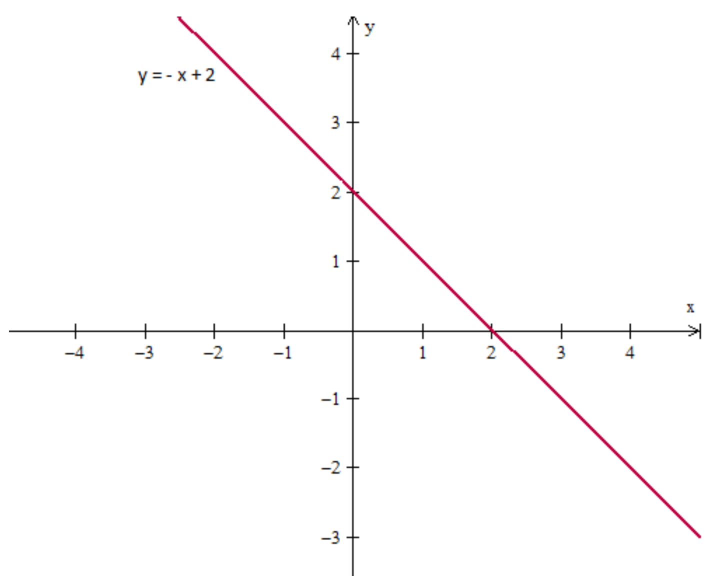


Figura 5.3: Solução do sistema do exemplo 3

As retas $x+y=2$ e $2x=4-2y$ são coincidentes, pois possuem o mesmo coeficiente angular. Desse modo, o sistema dado tem uma infinidade de soluções. É um sistema Possível e Indeterminado.

Nos casos acima utilizamos o software Winplot para resolvermos graficamente os sistemas. Porém, nesses casos mais simples, ainda seria possível resolvê-lo sem auxílio de ferramentas computacionais, apenas utilizando conhecimentos já obtidos anteriormente pelos alunos sobre construção de gráficos para uma equação linear.

5.1.2 Inequações lineares

Inequação é uma sentença matemática, com uma ou mais incógnitas, expressas por uma desigualdade. Uma inequação é dita linear ou de primeiro grau com duas incógnitas se é equivalente a

$ax+by \leq c$ ou $ax+by < c$ ou $ax+by \geq c$ ou $ax+by > c$

em que a, b e c são constantes reais, com a $\neq 0$ e b $\neq 0$.

Representação gráfica de uma inequação linear com duas incógnitas.

Para representar graficamente a solução de uma inequação linear com duas incógnitas, devemos seguir os seguintes passos:

1º) Substituímos a desigualdade por uma igualdade;

2º) Traçamos a reta no Plano Cartesiano.

3º) Escolhemos um ponto auxiliar, de preferência o ponto (0,0) e verificamos se o mesmo satisfaz ou não a desigualdade inicial. Em caso positivo, a solução da inequação corresponde ao semiplano ao qual pertence o ponto auxiliar. Em caso negativo, a solução da inequação corresponde ao semiplano oposto aquele ao qual pertence o ponto auxiliar.

Exemplos:

a) Representar graficamente a inequação: $2x+y \leq 4$

Resolvendo a inequação para y, obtemos:

$2x+y \leq 4 \Rightarrow y \leq 4-2x \Rightarrow y \leq -2x+4$

Comparando a última desigualdade com a equação $y = -2x + 4$, que representa uma reta com coeficiente angular -2 que passa pelos pontos explicitados na tabela abaixo:

x	$2x + y = 4$	y	(x,y)
0	$2 \cdot 0 + y = 4 \Rightarrow y = 4$	4	(0,4)
2	$2 \cdot 2 + y = 4 \Rightarrow y = 0$	0	(2,0)

Substituindo o ponto auxiliar (0,0) na inequação $2x + y \leq 4$. Verificamos:

$2 \cdot 0 + 0 = 0 \leq 4$ (Afirmativa positiva, o ponto auxiliar satisfaz a inequação)

Assim, a solução da inequação corresponde ao semiplano ao qual pertence o ponto auxiliar (0,0).

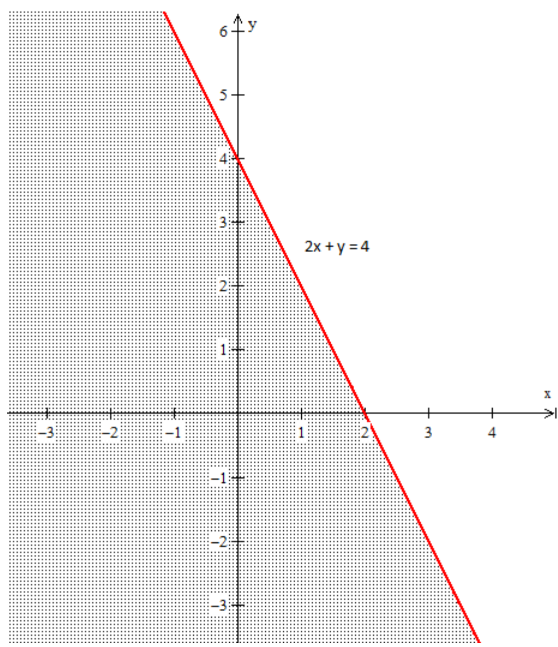


Figura 5.4: Solução da inequação $2x + y \leq 4$

De uma maneira mais formal, dizemos que a solução de inequação é a região que está abaixo da reta $y = 4 - 2x$

b) Representar graficamente a inequação: $x + 2y > 5$

Resolvendo a inequação para y, obtemos:
$x + 2y > 5 \Rightarrow 2y > 5 - x \Rightarrow y > \frac{5}{2} - \frac{x}{2}$

Comparando a última desigualdade com a equação $y = \frac{5}{2} - \frac{x}{2}$ que representa uma reta com declividade $\frac{-1}{2}$ e interseção no eixo y no ponto $\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

Substituindo o ponto auxiliar (0,0) na inequação $x + 2y > 5$. Verificamos:

$0 + 2 \cdot 0 = 0 > 5$ (Afirmativa falsa, o ponto auxiliar não satisfaz a inequação)

Assim, a solução da inequação corresponde ao semiplano oposto ao qual pertence o ponto auxiliar (0,0). E o gráfico da desigualdade é o conjunto de todos os pontos cuja coordenada y é maior que a dos pontos que estão sobre a reta. Observe no gráfico abaixo que os pontos da reta não pertencem ao gráfico da região pedida.

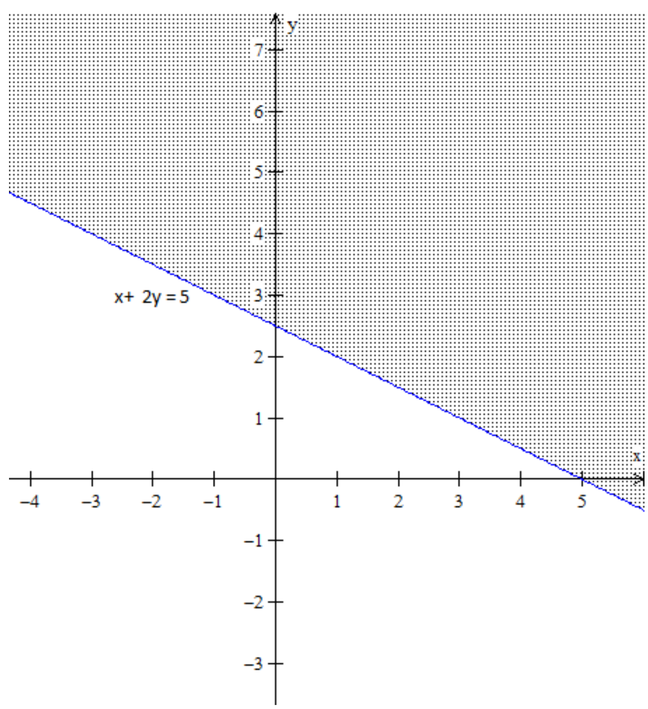


Figura 5.5: Solução da inequação $x + 2y > 5$

Sistemas de Inequações Lineares

Um sistema de inequações lineares com duas incógnitas é um conjunto de duas ou mais desigualdades dos tipos Ax + By + C < 0, Ax + By + C > 0, Ax + By + C $\leq$ 0 ou Ax + By + C $\geq$ 0. A solução de um sistema desse tipo é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano que satisfazem, simultaneamente, a todas as desigualdades dadas. Em geral, para encontrarmos a solução de um sistema de inequações com duas incógnitas, devemos, primeiro, encontrar os semiplanos que são as soluções de cada uma das inequações separadamente e, depois, achar a interseção desses semiplanos. Esta interseção pode ser vazia e, nesse caso, o sistema é dito incompatível. O exemplo a seguir ilustra estas idéias.

Exemplo 1:

Descreva e esboce a região definida por

$$\begin{cases} x - 3y + 2 > 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \\ x + 2y + 4 > 0 \end{cases}$$

Cada uma das desigualdades dadas determina um semiplano cuja fronteira é a reta correspondente. Desse modo, para resolver este sistema, devemos, inicialmente, traçar as retas associadas a cada uma das desigualdades dadas e, a seguir, sombrear o semiplano determinado pela respectiva desigualdade. A interseção das regiões sombreadas será a solução do sistema, como mostra o gráfico. Note que, neste exemplo, as retas não fazem parte da região de solução do sistema.

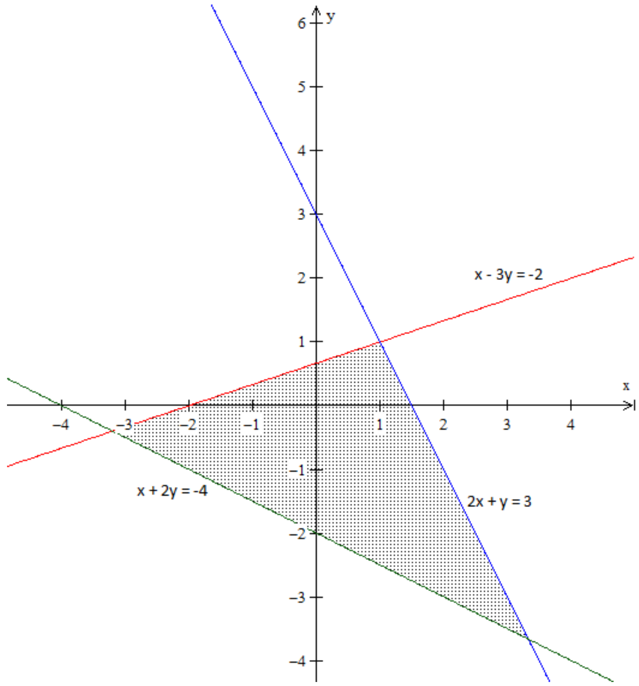


Figura 5.6: Gráfico da solução do sistema de inequações

Na seção seguinte, vamos resolver dois problemas de otimização, utilizando aplicativos para celular gratuitos.

5.2 Resolução de problemas com a utilização de aplicativos

O objetivo dessa seção é sugerir a utilização, em sala de aula, de dois aplicativos para celulares (com Android) usados para a resolução de problemas de otimização. Acreditamos que essa pequena intervenção possa vir a contribuir positivamente no ensino de resolução de problemas em Programação Linear no Ensino Médio.

5.2.1 Aplicativo Operational Research Commented

O aplicativo Operational Research Commented (ORC) permite resolver problemas de Programação Linear usando o Método Simplex e Problemas de Transporte, além de solucionar problemas de maximização/minimização com duas variáveis graficamente. Esse aplicativo está disponível gratuitamente no Google Play.

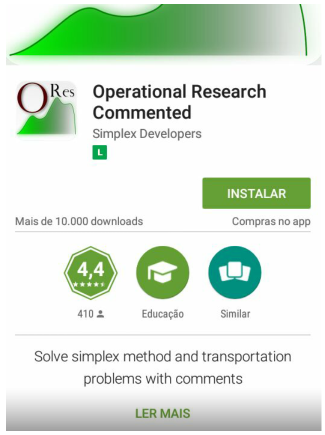


Figura 5.7: Aplicativo Operational Research Commented

O professor pode propor a utilização do aplicativo Operational Research Commented, para solucionar problemas de duas variáveis utilizando o Método Gráfico. O referido aplicativo, em sua versão gratuíta, nos dá a solução gráfica de problemas com duas variáveis. O aluno pode validar a sua solução e compreender alguns conceitos como inclinação da reta e a determinação dos pontos extremos, que correspondem as interseções dos sistemas formados pelas retas oriundas das inequações/ restrições do problema.

Vamos agora descrever passo a passo a resolução de um problema de otimização com duas variáveis utilizando o aplicativo Operational Research Commented. O problema a seguir foi retirado da obra de SILVA [16].

- **Problema das fantasias:**

Um fabricante de fantasias tem em estoque 32 metros de brim, 22 metros de seda e 30 metros de cetim e pretende fabricar dois modelos de fantasias. O primeiro modelo (M1) consome 4 metros de brim, 2 metros de seda e dois metros de cetim. O segundo modelo (M2) consome 2 metros de brim, 4 metros de seda e 6 metros de cetim. Se o modelo M1 é vendido a 6000 unidades monetárias e o modelo M2 a 10000 unidades monetárias, quantas peças de cada tipo o fabricante deve fazer para obter a receita máxima?

Solução:

Vamos inicialmente construir o modelo para o problema:

a) Variáveis de decisão:

$x_1 \rightarrow$ Quantidade de fantasias do modelo M1
$x_2 \rightarrow$ Quantidade de fantasias do modelo M2

b) Função objetivo:

O objetivo do problema é obter a receita máxima, que pode ser calculada:

Modelo M1: $6000 \cdot x_1$ (Lucro por unidade de fantasias do modelo M1 vezes a quantidade produzida de M1)
Modelo M2: $10000 \cdot x_2$ (Lucro por unidade de fantasias do modelo M2 vezes a quantidade produzida de M2)

Lucro total: $Z = 6000x_1 + 10000x_2$
Objetivo: Maximizar $Z = 6000x_1 + 10000x_2$

c) Restrições:

As restrições impostas pelo problema são:

1ª) Disponibilidade de brim: $4x_1 + 2x_2 \leq 32$
2ª) Disponibilidade de seda: $2x_1 + 4x_2 \leq 22$
3ª) Disponibilidade de cetim: $2x_1 + 6x_2 \leq 30$

Resumo do Modelo:

Maximizar $Z = 6000x_1 + 10000x_2$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 32 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 22 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 30 \end{cases}$$

Restrições de não-negatividade: $\begin{cases} x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$

Diante do modelo de Programação Linear do problema proposto, vamos agora solucioná-lo utilizando o aplicativo Operational Research Commented (ORC).

A primeira tela que aparece no aplicativo lhe dá a opção de escolher o método a ser utilizado para a resolução do problema de otimização. As opções são Simplex Method e Transportation problem. Além de oferecer um link de explicações sobre os métodos abordados pelo aplicativo (Math explanation).

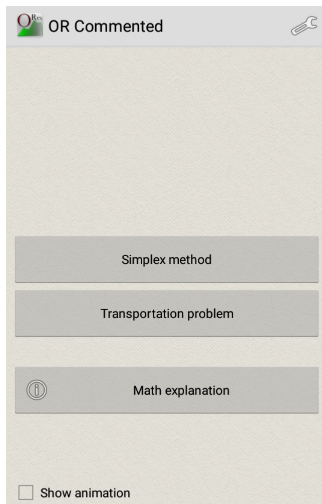


Figura 5.8: Primeira tela do aplicativo Operational Research Commented

Para solucionarmos o problema, vamos escolher a primeira opção "Simplex method". Logo após a escolha, aparece uma segunda tela, onde estão os espaços para a digitalização das variáveis da função objetivo e das restrições do problema. O aplicativo na sua versão gratuita, disponibiliza somente espaço para duas variáveis de decisão.

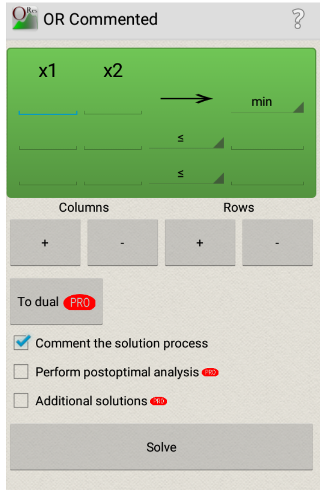


Figura 5.9: Segunda tela do aplicativo Operational Research Commented

Digitalizando as variáveis da função objetivo e as restrições do problema proposto, temos a seguinte tela:

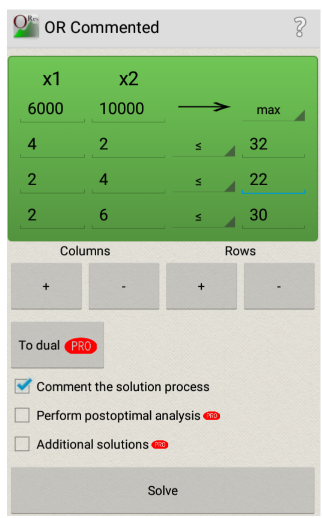


Figura 5.10: Segunda tela do aplicativo com as variáveis e restrições do problema

Apertando a tecla "solve" temos a solução do problema pelo Método Gráfico, que aparece logo após, na terceira tela do aplicativo. A solução do problema proposto acima é $x_1 = 7$ e $x_2 = 2$, ou seja, 7 unidades da fantasia modelo M1 e 2 unidades da fantasia modelo M2, o que nos dá um lucro máximo de 62 000 unidades monetárias.

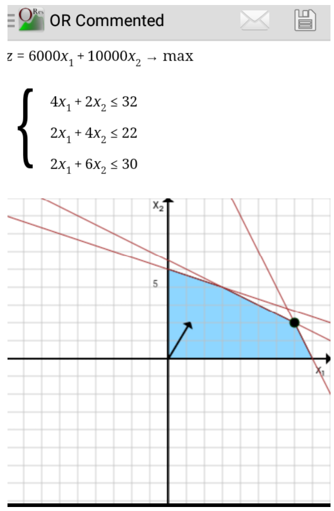
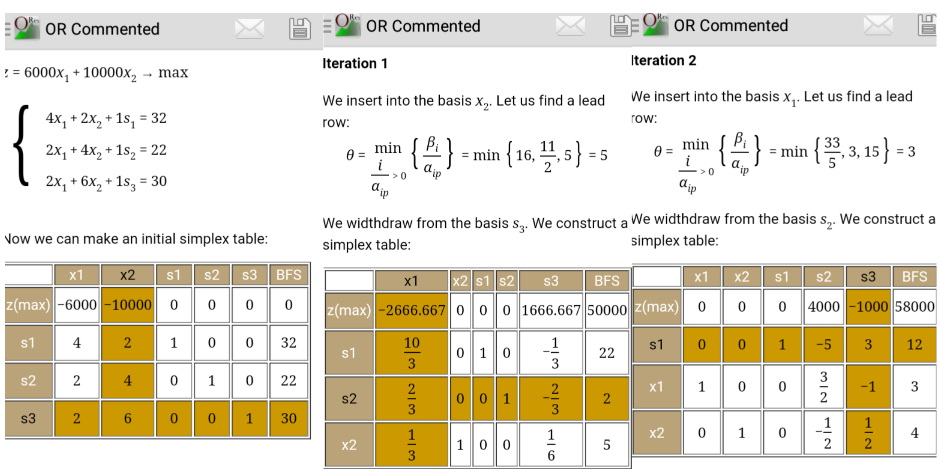


Figura 5.11: Terceira tela do aplicativo com a solução do problema pelo Método Gráfico

O aplicativo também nos dá a solução do problema pelo Método Simplex, explicitando cada etapa através das tabelas de cálculo e recálculo das soluções, conforme as figuras a seguir.

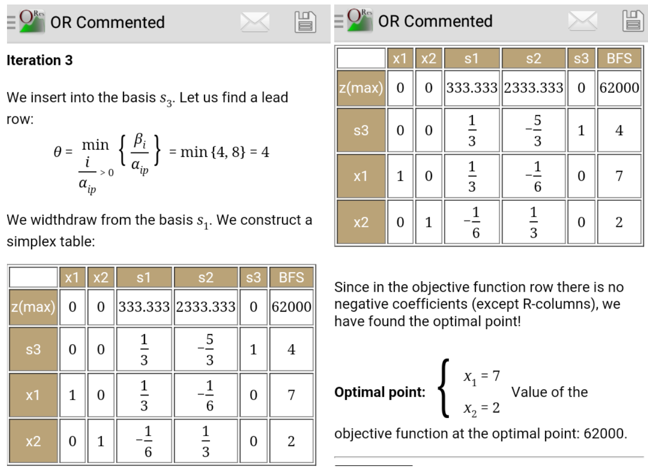


	x1	x2	s1	s2	s3	BFS
z(max)	-6000	-10000	0	0	0	0
s1	4	2	1	0	0	32
s2	2	4	0	1	0	22
s3	2	6	0	0	1	30

	x1	x2	s1	s2	s3	BFS
z(max)	-2666.667	0	0	0	1666.667	50000
s1	$\frac{10}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	22
s2	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	2
x2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	5

	x1	x2	s1	s2	s3	BFS
z(max)	0	0	0	4000	-1000	58000
s1	0	0	1	-5	3	12
x1	1	0	0	$\frac{3}{2}$	-1	3
x2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4

Figura 5.12: Tabelas de resolução do problema pelo Método Simplex utilizando o aplicativo Operational Research Commented



OR Commented

Iteration 3

We insert into the basis s_3. Let us find a lead row:

$$\theta = \min_{\substack{i \\ \alpha_{ip} > 0}} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ip}} \right\} = \min\{4, 8\} = 4$$

We widthdraw from the basis s_1. We construct a simplex table:

	x1	x2	s1	s2	s3	BFS
z(max)	0	0	333.333	2333.333	0	62000
s3	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	4
x1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	7
x2	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	2

OR Commented

	x1	x2	s1	s2	s3	BFS
z(max)	0	0	333.333	2333.333	0	62000
s3	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	4
x1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	7
x2	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	2

Since in the objective function row there is no negative coefficients (except R-columns), we have found the optimal point!

Optimal point: $\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ Value of the objective function at the optimal point: 62000.

Figura 5.13: Tabelas de resolução do problema pelo Método Simplex utilizando o aplicativo Operational Research Commented

Como o aplicativo Operational Research Commented nos dá a opção de solucionar somente problemas de duas variáveis na sua versão gratuita, vamos sugerir agora, o uso de outro aplicativo para a resolução de problemas em Programação Linear, o aplicativo Didactic Linear Programming, também gratuito e de fácil acesso.

5.2.2 Aplicativo Didactic Linear Programming

O objetivo do aplicativo para celular Didactic Linear Programming é explicar detalhadamente a resolução de todo o tipo de problema de Programação Linear. Este aplicativo resolve os problemas de otimização utilizando o método primal simplex e o método dual simplex. Não há limite para o número de variáveis e nem de restrições. Ele resolve problemas de minimização/maximização com qualquer tipo de desigualdade (<= />=), mostrando os detalhes, através de tabelas dinâmicas, dos cálculos das soluções básicas até encontrar a solução ótima.

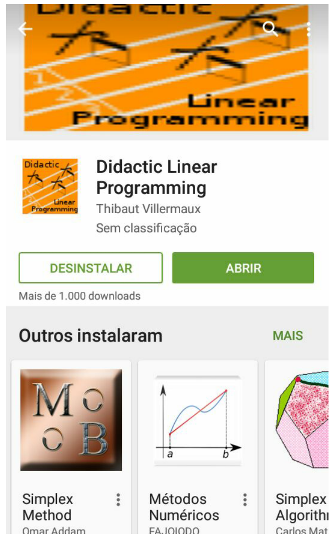


Figura 5.14: Aplicativo Didactic Linear Programming

Como já foi explicitado anteriormente, o aplicativo Didactic Linear Programming resolve problemas de otimização de várias variáveis de decisão. O professor pode sugerir a resolução de um problema de otimização com muitas variáveis e solicitar aos alunos que construam o modelo matemático e encontrem a solução utilizando o aplicativo acima citado. Desse modo, o professor estará otimizando o tempo em sala de aula e poupando os alunos do esforço de se efetuar cálculos extensos e repetitivos, que contrariam o foco principal da proposta, que é aumentar o interesse do aluno pelo estudo em Matemática.

A seguir, vamos resolver um problema de minimização com quatro variáveis e com todas as restrições do tipo "$\geq$", utilizando o aplicativo Didactic Linear Programming, descrevendo passo a passo o uso do mesmo. O problema proposto a seguir foi retirado do artigo de SILVA [15].

- **Problema da dieta:**

Glaucia deseja saber quanto gastar para fazer uma dieta alimentar que forneça diariamente toda a energia, proteína e cálcio que ela necessita. O valor nutritivo e o preço (por porção) de cada alimento que ela esta considerando comprar é dado na tabela abaixo.

Alimento	Tamanho	energia (Kcal)	Proteína (g)	Cálcio (mg)	Preço por porção
Arroz	100g	205	32	12	14 centavos
Ovos	2 unidades	160	13	54	13 centavos
Leite	237 ml	160	8	285	9 centavos
Feijão	260g	260	14	80	19 centavos

Seu médico recomendou que ela se alimente de forma a obter diriamente no mínimo 2000 kcal de energia, 65g de proteína e 800 mg de cálcio. Quanto de cada alimento Glaucia deve consumir?

Solução:

Vamos inicialmente, construir o modelo para o problema. Neste caso temos:

- elementos conhecidos: valor nutritivo dos alimentos, custo dos alimentos, quantidade mínima de nutrientes a serem obtidos com a dieta;
- elementos desconhecidos: quanto consumir de cada alimento;
- objetivo a ser alcançado: obter uma dieta de baixo custo;
- restrições: a dieta deve fornecer uma quantidade mínima de nutrientes.

a) Variáveis de decisão:

$x_1 \rightarrow$ Quantidade de gramas de arroz;

$x_2 \rightarrow$ Quantidade de unidades de ovos;

$x_3 \rightarrow$ Quantidade de mililitros de leite;

$x_4 \rightarrow$ Quantidade de gramas de feijão.

b) Função objetivo:

O objetivo do problema é obter a dieta de menor custo possível. Como o preço de cada alimento é conhecido, assim, se comprarmos 1 porção de arroz iremos gastar 14 centavos, se comprarmos 2 porções de arroz iremos gastar 28 centavos, ou seja, de uma maneira geral, se comprarmos x_1 porções de arroz, iremos gastar $14x_1$ centavos. De maneira análoga, obtemos o gasto associado a compra de ovos ($13x_2$), de leite ($9x_3$) e de feijão ($19x_4$).

Assim, temos que o custo total da dieta é dado por:

Custo total: $Z = 14x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 19x_4$

Como queremos obter a dieta de menor custo possível, temos a seguinte função objetivo:

Min: $Z = 14x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 19x_4$

c) Restrições:

Considerando cada um dos nutrientes:

- Energia: Se ela consumir 1 porção de arroz, ela obtém 205 kcal de energia, 1 porção de ovos 160 kcal, 1 porção de leite 160 kcal e uma porção de feijão 260 kcal. Desse modo, temos que a quantidade total de energia obtida com o consumo destes 4 alimentos é:

$205x_1 + 160x_2 + 160x_3 + 260x_4$

Que deve ser maior que à quantidade mínima necessária. Temos então a seguinte restrição:

$205x_1 + 160x_2 + 160x_3 + 260x_4 \geq 2000$

Usando raciocínio similar, formulamos as restrições associadas à quantidade mínima de:

- Proteína: $32x_1 + 13x_2 + 8x_3 + 14x_4 \geq 65$

- Cálcio: $12x_1 + 54x_2 + 285x_3 + 80x_4 \geq 800$

O modelo que representa o problema proposto é:

Min: $Z = 14x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 19x_4$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 205x_1 + 160x_2 + 160x_3 + 260x_4 \geq 2000 \\ 32x_1 + 13x_2 + 8x_3 + 14x_4 \geq 65 \\ 12x_1 + 54x_2 + 285x_3 + 80x_4 \geq 800 \end{cases}$$

Restrições de não-negatividade: $\{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

Vamos agora solucionar o problema utlizando o aplicativo Didactic Linear Programming.

A tela incial que aparece no aplicativo contém dois campos a serem preenchidos. O primeiro diz respeito ao número de variáveis do problema e o segundo campo é sobre o número de restrições presentes no modelo de Programação Linear, como podemos perceber na figura a seguir:

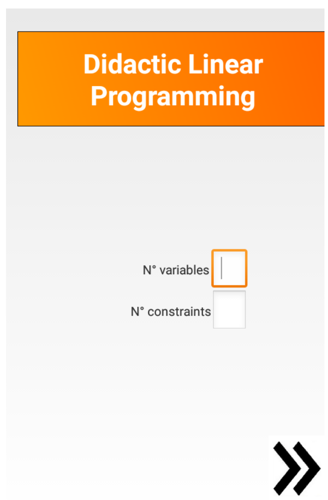


Figura 5.15: Tela inicial do aplicativo Didactic Linear Programming

Para solucionarmos o problema proposto, vamos preencher os campos da tela incial. No referido caso, o número de variáveis do problema são 4 e a quantidade de restrições são 3.

Figura 5.16: Tela inicial com os dados do problema.

A próxima tela do aplicativo nos dá a opção de preenchimento da função objetivo e das restrições do problema, para o posterior cálculo das tabelas de soluções do Método Simplex. Observe a figura:

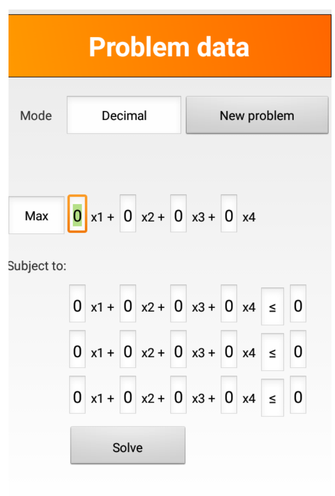


Figura 5.17: Segunda tela do aplicativo Didactic Linear Programming

Digitando as variáveis da função objetivo e as restrições do problema, temos a seguinte tela:

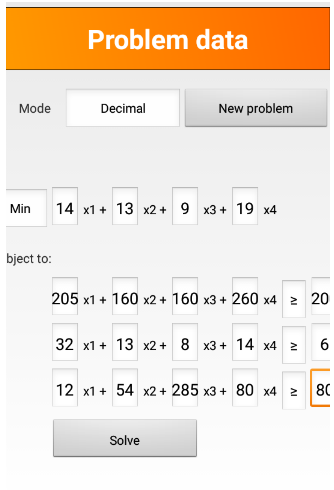


Figura 5.18: Segunda tela do aplicativo com as variáveis e restrições do problema

Agora, clicando na opção "Solve", aparece uma tela com as opções de métodos de resolução do problema que o aplicativo oferece. Escolhemos a opção "Linear programming". Logo após, aparece uma nova tela que oferece o modo como a solução do problema será apresentada, se podemos optar pela resolução "step by step" (passo a passo), ou se preferimos a opção "Final solution" que mostra a tabela final da solução do problema pelo Método Simplex escolhido no início.

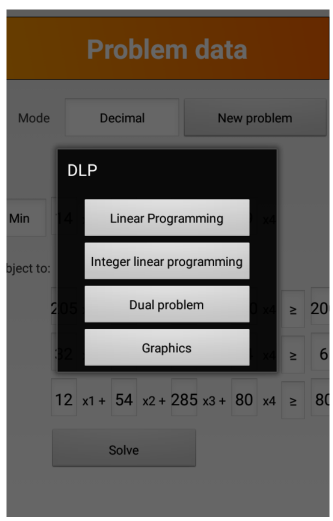


Figura 5.19: Tela do aplicativo que mostra as opções de modos de resolução.

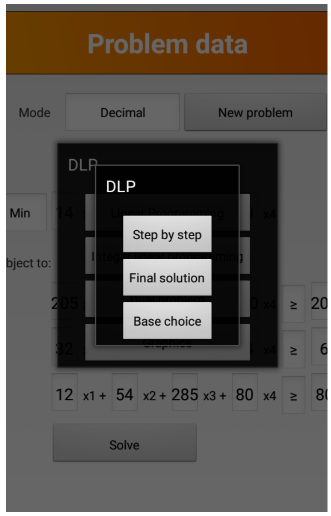
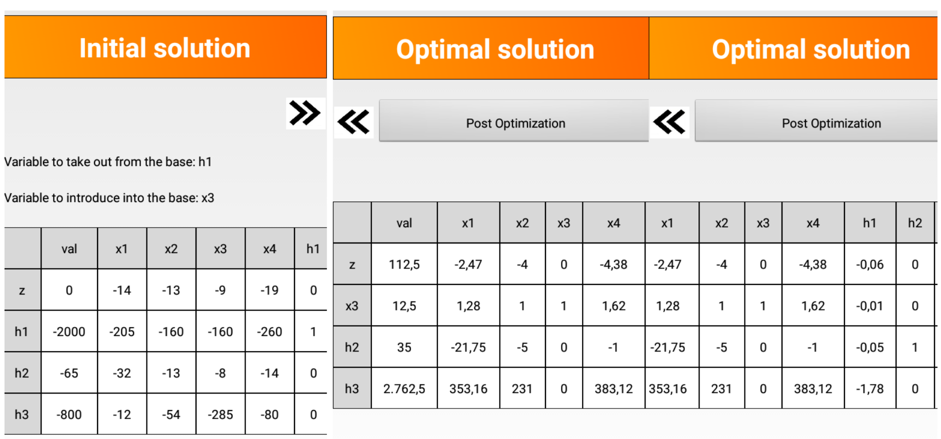


Figura 5.20: Tela do aplicativo que mostra as opções de solução do problema.

Escolhemos a opção "step by step", que nos dá a solução do problema detalhadamente, mostrando todas as tabelas de cálculos que o Método Simplex utiliza até chegar a tabela final que é a solução ótima. A seguir, temos as tabelas geradas para a solução do problema proposto.



	val	x1	x2	x3	x4	h1
z	0	-14	-13	-9	-19	0
h1	-2000	-205	-160	-160	-260	1
h2	-65	-32	-13	-8	-14	0
h3	-800	-12	-54	-285	-80	0

	val	x1	x2	x3	x4
z	112,5	-2,47	-4	0	-4,38
x3	12,5	1,28	1	1	1,62
h2	35	-21,75	-5	0	-1
h3	2.762,5	353,16	231	0	383,12

x1	x2	x3	x4	h1	h2
-2,47	-4	0	-4,38	-0,06	0
1,28	1	1	1,62	-0,01	0
-21,75	-5	0	-1	-0,05	1
353,16	231	0	383,12	-1,78	0

Figura 5.21: Tabelas geradas pelo aplicativo para a solução do problema.

A solução ótima encontrada pelo aplicativo foi:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	valor de Z
$x_3 = 12,5$	$x_1 = 0$	$Z = 112,5$
$h_2 = 35$	$x_2 = 0$	
	$x_4 = 0$	
	$h_1 = 0$	

Analisando a solução encontrada, temos que Gláucia terá que consumir 12,5 porções de leite, ou seja, 12,5 vezes 237 ml = 2,9625 litros de leite e irá gastar com a dieta, 112,5 centavos. Mas será que essa solução é aceitável? Consumir quase 3 litros de leite e nenhum outro alimento? Vamos tentar outra solução para o problema, porém, vamos limitar o consumo dos alimentos, como o leite e os ovos, por exemplo.

- **Novo modelo para o problema da dieta**

Solução:

Se limitarmos a quantidade de leite e ovo na dieta:

1. No máximo 2 porções de leite;
2. No mínimo 1/2 porção para ovos.

Novo modelo:

Min: $Z = 14x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 19x_4$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 205x_1 + 160x_2 + 160x_3 + 260x_4 \geq 2000 \\ 32x_1 + 13x_2 + 8x_3 + 14x_4 \geq 65 \\ 12x_1 + 54x_2 + 285x_3 + 80x_4 \geq 800 \\ x_2 \geq \frac{1}{2} \\ x_3 \leq 2 \end{cases}$$

Restrições de não-negatividade: $\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$

Solução:

Novamente, vamos solucionar o problema com a utilização do aplicativo Didactic Linear Programming. As figuras abaixo mostram todos os passos tomados para encontrar a solução do problema com as novas restrições impostas.

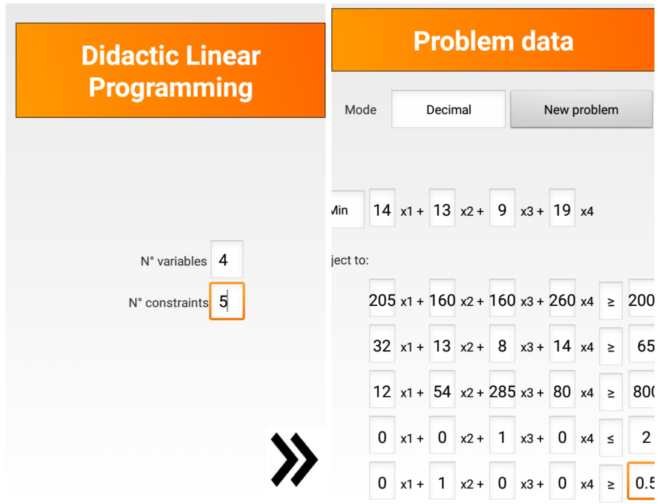


Figura 5.22: Telas do aplicativo Didactic linear programming

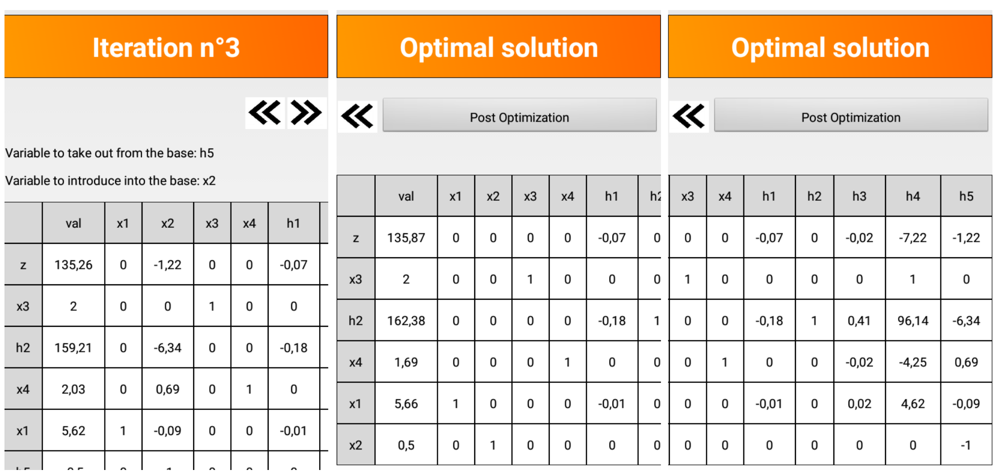


Figura 5.23: Solução ótima encontrada.

A solução ótima encontrada pelo aplicativo foi:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Variáveis básicas} & \text{Variáveis não básicas} & \text{valor de Z} \\
x_1 = 5,66 & h_1 = 0 & Z = 135,87 \\
x_2 = 0,5 & h_3 = 0 & \\
x_3 = 2 & h_4 = 0 & \\
x_4 = 1,69 & h_5 = 0 & \\
h_2 = 162,38 & &
\end{array}
$$

Isto corresponde a consumir:

5,66 x 100 g = 566 g de arroz;

0,5 unidade de ovo;

2 x 237 ml = 474 ml de leite;

1,69 x 260 = 439,4 g de feijão;

E gastar 135,87 centavos.

Temos então uma solução ótima aceitável.

Observamos que podemos modelar um problema em Programação Linear de acordo com as necessidades cotidianas e as restrições podem ser reformuladas até que encontremos uma solução realmente ótima para a situação de estudo exigida. De acordo com as ideias de SILVA [15], a utilização de artifícios na construção de modelos exige uma grande capacidade de interagir as conexões dos dados oferecidos pelos problemas. E isso é algo que realmente instiga o conhecimento matemático.

Capítulo 6

Considerações Finais

Este trabalho apresentou uma possibilidade de aplicação de problemas de otimização como uma sugestão de ensino de Matemática para alunos do Ensino Médio. Por serem tão diversificados e contextualizados, os problemas em Programação Linear podem oferecer aos professores uma grande oportunidade de trabalhar a interdisciplinaridade, tão cobrada na atualidade em exames como o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

A resolução de problemas em Programação Linear utilizando o Método Gráfico possibilita explorar importantes conceitos básicos da Matemática do Ensino Médio. Conteúdos como desigualdades, função do primeiro grau, representação gráfica de equações e inequações são assuntos abordados no primeiro ano do Ensino Médio, porém, na maioria das vezes de forma descontextualizada. A aplicação desse método permite destacar a importância da análise do gráfico para a obtenção da melhor solução possível, de acordo com as condições impostas pelo problema.

O Método Simplex possibilita uma abordagem significativa de alguns conceitos relativos a vetores e sistemas lineares a partir da contextualização do problema. Como o nome sugere, este método simplifica bastante a solução de problemas de otimização, porém, quando o problema abordado apresenta um número excessivo de variáveis, a quantidade de cálculos pode tornar-se muito grande para ser realizada de forma manual. Por esse motivo, sugerimos a utilização de ferramentas, os aplicativos para celulares, que permitem que os alunos solucionem mais rapidamente esse tipo de problema.

Acreditamos que devido a natureza dos problemas de otimização, em que inúmeras soluções são possíveis, o seu uso em sala de aula despertará o interesse do aluno e contribuirá para uma participação mais ativa nas aulas de Matemática, pois ele poderá identificar o potencial de aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos estudados.

Esperamos que esse trabalho possa ser utilizado como referência para os professores do Ensino Médio que queiram diversificar e contextualizar alguns conteúdos importantes estudados em Matemática. Como professora de Matemática há 13 anos, acredito que essa estratégia possa realmente estimular os alunos e interessá-los a aprender Matemática. No segundo semestre desse ano de 2016, aplicaremos essa proposta em turmas do 2º ano do Ensino Médio de uma escola de rede pública de ensino e acreditamos que os resultados serão satisfatórios.

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, Pedro Felippe da Silva. **Programação Linear e suas aplicações. Definições e Métodos de soluções**. 2013. Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática. UFG - Goiânia.

[2] ARENALES, M. N.; ARMETANO, V.; MORABITO, R. YANASSE, H. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

[3] BIEMBENGUT, M. S, HAIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto. 2000

[4] BRASIL. MEC. **PCN + Ensino Médio**: **Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC, 2006.

[5] CAMARGO, Ramina Samoa Silva. **Introdução a Programação Linear no Ensino Médio utilizando a Resolução Gráfica**. 2014. Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal do Amazonas. Manaus.

[6] CARMINATI, Nézio Luiz. **Modelagem Matemática: Uma proposta de ensino possível na escola pública**.Campina Grande. 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/975-4.pdf. Acesso em 25 jan. 2016.

[7] CARMO, Josemir do. **Modelagem como alternativa metodológica para o ensino de matemática.** 2014. Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática. UFG - Jataí.

[8] GOLDBARG, Marco César; LUNA, Henrique Pacca Loureiro. **Otimização, Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algorítmos**. 1 ed. Editora Campus, 2000.

[9] LIMA, Elon Lages. **Algebra Linear**. 4ª Edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. (Coleção Matemática Universitária). Rio de Janeiro, 2000.

[10] LYRA, Marcelo Simplício de. **Uma proposta do ensino de Programação Linear no Ensino Médio**. 2014. Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática. UFG - Catalão.

[11] NETO, André Luís de Souza. **Programação Linear e Geometria Analítica**. 2014. Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática. UFG - Catalão.

[12] PORVIR. **Unesco recomenda o uso de celulares como ferramenta de aprendizado**. Disponível em: http://ultimosegundo.ig.com.br/educacao/2013-03-03. Acesso em 18 Mar. 2016.

[13] Pré calculo 2. **Equações e Inequações**. Disponível em http://www.ime.unicamp.br. Acesso em 07 fev. 2016.

[14] RECH, Roberto. **Resolvendo problemas de otimização no ensino médio**. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/705-4.pdf . Acesso em 7 dez. 2015.

[15] SILVA, Alexandro de Castro da; ZANINI, Daniel Lujan; ROBIATTI, Evandro. MATOS, Oscar Alessandro de. **Resolução de três problemas reais de programação linear, variando-se o sinal das inequações nas restrições**. Disponível em: http://periodicos.uems.br. Acesso em 24 Nov. 2015.

[16] SILVA, Ermes Medeiros da; SILVA, Elio Medeiros da; GONÇALVES, Valter; MUROLO, Afrânio Carlos. **Pesquisa Operacional.** 3 ed. São Paulo: Atlas, 1998.

[17] SOUZA. Renata Beduschi de. **O uso das tecnologias na educação**. Disponível em: http://www.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/5945. Acesso em 18 Mar. 2016.

[18] SWOKOWSKI, Earl William. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2 edição. Editora Makron Books, 1994.

[19] TAHA, Handy A. **Pesquisa Operacional**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

[20] VASCONCELOS, Eduardo Silva. **Contribuições dos Métodos Simplex e das Resoluções gráficas a aprendizagem da Algebra Linear no Ensino Médio**. 2013. 44 f. Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática. UFG - Goiânia.