UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL - PROFMAT

JOSÉ SINVAL SOARES GONÇALVES

MÉTODO DE COMPARAÇÕES VISUAIS ENTRE MEDIDAS DE SEGMENTOS COMO FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS

PONTA GROSSA
2017

JOSÉ SINVAL SOARES GONÇALVES

MÉTODO DE COMPARAÇÕES VISUAIS ENTRE MEDIDAS DE SEGMENTOS COMO FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT - UEPG como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira

PONTA GROSSA
2017

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Gonçalves, José Sinval Soares
G635 Método de comparações visuais entre medidas de segmentos como facilitador da aprendizagem de conceitos trigonométricos/ José Sinval Soares Gonçalves. Ponta Grossa, 2017.
179f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira.

1.Trigonometria. 2.Semelhança. 3.PI. 4.Comparações entre medidas. I.Pereira, Marciano. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 516.24

TERMO DE APROVAÇÃO

José Sinval Soares Gonçalves

"MÉTODO DE COMPARAÇÕES VISUAIS ENTRE MEDIDAS DE SEGMENTOS COMO FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

Prof. Dr. Guataçara dos Santos Junior
Pós-Graduaçao em Ensino de Ciência e Tecnologia, UTFPR/PR

Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

Ponta Grossa, 23 de Fevereiro de 2017.

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a minha amada esposa Andréia, à memória de meu Pai Cilau e a minha amada Mãe Adelair.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Andréia Trevisan Gonçalves pelo incentivo, pela paciência e compreensão da necessidade de abdicar do tempo com a família para as viagens e muitas horas de estudo dedicadas a esta empreitada.

Aos meus filhos Diego, Lucas, Catarina e Igor pelo carinho e por serem uma maravilhosa inspiração.

Aos meus pais, José Sigwalt Gonçalves (Cilau, em memória) e Adelair Soares Gonçalves, pois sempre me incentivaram aos estudos e foram ótimos exemplos para mim.

Aos meus professores e professoras, em especial aos professores do PROFMAT por serem grandes motivadores e fontes de conhecimento no decorrer deste Curso.

A minha querida tia Elenir Terezinha Paluch Soares por ser, junto com minha esposa, grande incentivadora para os meus estudos de Mestrado, por me fazer acreditar.

Aos meus colegas de turma do PROFMAT por serem ótimos parceiros em todas as horas, estudando muito, trocando informações em rede, lanchando, almoçando e até sendo parados em BLITZ de trânsito.

Aos meus colegas de trabalho e meus estimados alunos do Colégio Estadual Padre Chagas, por me proporcionarem um ambiente de trabalho saudável e inspirador.

Aos professores Giuliano Gadioli La Guardia e Guataçara dos Santos Junior pela disposição em fazer parte da banca examinadora, dando sua inestimável contribuição à conclusão desta dissertação.

Ao professor Marciano Pereira, pela paciência, e por toda a dedicação tanto nas disciplinas que ministrou quanto na elaboração deste trabalho, com grandes e preciosas intervenções, por ter sido um verdadeiro mentor e um valioso amigo.

À Deus por me permitir encontrar as pessoas certas a cada momento de minha vida, pois sem elas eu não chegaria onde cheguei.

“Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor assim, não morre jamais...”

Rubem Alves

RESUMO

Sabendo das grandes dificuldades apresentadas pelos alunos com relação à trigonometria, entendemos que toda ferramenta que possa auxiliar no ensino deste conteúdo sempre será bem vinda. O objetivo desse trabalho é apresentar uma proposta pedagógica que consiste na utilização de um método aparentemente simples que denominamos Método de Comparações Visuais. Este método consiste em obter valores gerados por razões entre medidas de figuras semelhantes ou mesmo o valor do número PI sem a necessidade de medir e dividir usando unidades padronizadas de medição. Basta observar os comprimentos dos segmentos que representam os lados de triângulos, uma circunferência retificada e seu diâmetro, entre outros e comparar. Esta comparação começa em verificar se a medida de um comprimento é maior, menor ou igual que a medida de outro comprimento e vai até uma comparação mais refinada, com o fracionamento de um dos segmentos. A idéia principal é tentar estimar um valor, se as medidas são iguais, se a medida menor vale metade ou talvez setenta e cinco por cento (três quartos) da maior, ou se a maior vale duas, três, ou quem sabe uma vez e meia a medida menor, apenas com o olhar, sem dividir valores numéricos. Acreditamos ser válida a mensuração, comparação, desenhar em escala e medir na escala desenhada para fazer estimativas, pois estas atividades e procedimentos auxiliam na compreensão dos resultados que serão demonstrados posteriormente.

Palavras-chave: Trigonometria, semelhança, PI, comparações entre medidas.

ABSTRACT

It is well the great difficulty presented by the students with respect to the trigonometry. Base on this fact, we understand that any tool that can help in the teaching of this content will always be welcome. The aim of this work is to present a pedagogical proposal that consists of applying a apparently simple method to call a Method of Visual Comparisons. This method consists of obtaining values generated by ratios between measurements of similar figures or even the value of the PI number without having the necessity of measuring and divide using standardized measurement units. Look at the lengths of the segments that represent the sides of triangles, a rectified circumference and your diameter, among others and compare. This comparison starts to check if the measure of a length is greater than, less than or equal to the measure of another length and a more refined, comparison with the fractionation of one of the segments. The main idea is to try to estimate a value, if the measures are equal, if the smaller measure is worth half or perhaps seventy-five percent (three quarters) of the larger, or if the larger is worth two, three, or who knows once and half the smaller measure, only with the look, without dividing numerical values. We believe it's worth measuring, comparing, drawing in scale and measure the scale designed to estimate, because these activities and procedures help in a better understanding of the results that will be demonstrated later.

Key words: trigonometry, similarity, PI, comparisons between measurements.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Estava eu em uma reunião escolar, num momento de intervalo entre leituras e discussões sobre assuntos referentes ao ano letivo, quando alguns colegas me perguntaram sobre meus estudos de mestrado e, olhando para os pilares de sustentação do telhado de uma varanda da escola pedi a eles que os comparassem para mim, sendo que a primeira resposta que recebi foi: "são iguais".

Não era esta a resposta que esperava ouvir, mas pensei em quantas ocasiões recebemos a resposta errada de nossos alunos por não ter feito a pergunta de forma correta. Como posso dizer que a resposta está errada sem avaliar o quanto ela é eficiente em "responder" ao que foi perguntado?

Voltando aos pilares do telhado, outra resposta que recebi foi que um era mais alto que o outro, e interpelei sobre o quão mais alto, recebendo uma resposta bem simples: "um pouco". Esta resposta foi suficiente, era o que eu esperava ouvir, pois o intuito de meus estudos eram as comparações, mas não pude desprezar a primeira resposta, visto que realmente os pilares tinham muito mais semelhanças que diferenças, mesma espessura distribuída em uma secção quadrangular, mesmas cores e acabamentos metálicos nas bordas, para proteger contra esbarrões.

Posso concluir que nem tanto a pergunta foi elaborada de forma errada bem como as respostas estavam certas. Poderiam talvez me fornecer outras respostas, posso até imaginar algumas como: "um está mais bonito que o outro" ou "estão muito próximos", por exemplo. Não fugiria o fato de que eu esperava apenas uma comparação e, dentre as respostas obtidas estava lá a que eu desejava ouvir, um é mais alto, apenas um pouco, que o outro. Isso me daria oportunidade de perguntar qual era a diferença, a razão entre um e outro, talvez medi-los com uma trena e depois calcular a razão entre os dois, entretanto me lembrei que em minhas aulas lanço mão de um recurso ao qual chamo "Método de Comparações Visuais", método este que consiste em comparar grandezas sem medi-las utilizando unidades padronizadas, apenas comparar pelas medidas uma da outra, olhando para elas, as dividindo de forma que possam ser comparadas pelas medidas de suas partes (metades, quartos, oitavos). Posso dizer que por este método é possível obter resultados muito próximos daqueles obtidos por medições seguidas de divisões, como por exemplo $\frac{\sqrt{3}}{2}$, que é o resultado obtido quando comparamos a medida de uma altura de um triângulo equilátero com a medida de um de seus lados. É fácil observar, num desenho bem feito, que o segmento determinado pela altura, quando colocado sobre o segmento determinado pelo lado, ocupa "praticamente" $\frac{7}{8}$ de seu comprimento.

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{7}{8} = 0{,}875 = 87{,}5\% \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}866 \cong 86{,}7\% \end{array}}$$

Optamos por não fazer revisão de conceitos dos conteúdos tratados nesta dissertação, os quais podem ser facilmente encontrados na literatura, como por exemplo, nos livros da Coleção PROFMAT: Números e Funções Reais de Elon Lages Lima e Geometria de Antonio Caminha Muniz Neto e no livro Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo.

Resolvemos, portanto, apresentar neste trabalho somente o que consideramos ser nossa contribuição para o ensino da trigonometria, mediante a descrição do Método de Comparações Visuais e de atividades a este relacionadas. Esperamos que aqueles que se interessarem em aplicar o método estejam bastante a vontade para incorporar à sua prática cotidiana como mais uma ferramenta para favorecer o aprendizado desse conteúdo.

1.1 OBJETIVO

Conversando com alguns colegas que lecionam Matemática na mesma Escola que eu, percebi a angústia criada com a dificuldade que os alunos encontram em entender os conceitos, a linguagem, os procedimentos, as resoluções matemáticas em geral.

Uma dificuldade é percebida em relação ao conteúdo estudado em trigonometria que, segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica é englobada pelo Conteúdo Estruturante Grandezas Medidas para o Ensino

Fundamental como relações métricas no triângulo retângulo e relações trigonométricas nos triângulos e para o Ensino Médio como relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo e a trigonometria na circunferência.

O objetivo desta dissertação é compartilhar com meus colegas uma proposta metodológica que tenho vivenciado ao longo de minha carreira como professor, que começa com instrutor técnico em um Colégio Agrícola. Tive a oportunidade de lecionar disciplinas na área de horticultura e mecanização agrícola nas quais pude experimentar, juntos aos meus alunos, a prática de comparar, medir, com equipamentos graduados em unidades padronizadas, bem como usar passos, palmos, pés, cordas, hastes de vegetais, com o intuito de realizar plantios, tratamentos fitossanitários ou confecção de cercas de arame ou madeira para contenção de animais. Lembro também do uso de razões e proporções na composição de rações, diluição de fertilizantes e defensivos agrícolas e mistura de componentes de argamassa e concreto para construção de instalações rurais das mais diversas.

Minha experiência profissional passa também pela Universidade, em cursos de Engenharia Civil e Elétrica, oportunidade na qual ministrei aulas de Geometria Analítica, Álgebra Linear, Geometria Descritiva e Estatística, mas guardo na lembrança uma aula em particular, na qual utilizei cordas para visualização do comprimento de vetores e de suas projeções em eixos tridimensionais.

Posso dizer que a maior parte do tempo tenho dedicado ao ensino da Matemática no Ensino de Nível Médio e, creio que posso, por meio da sugestão de algumas atividades, dar uma singela colaboração aos meus parceiros nessa empreitada suada que é o ensino da trigonometria.

1.2 MOTIVAÇÃO

Creio que muitos de minha geração tenham experimentado essa noção das comparações já na infância, quando das brincadeiras de rua, como jogos com bolas de gude, "peladas" nos campinhos de terra, soltar pipas, brincadeiras nas quais era necessário medir distâncias, comprimentos, repartir espaços, desenhar figuras geométricas, etc.

Imagino que com o avanço tecnológico muito dessa experiência se perdeu, quer seja no lúdico dos jogos infantis, na aplicabilidade de uma matemática profundamente empírica a um curso profissionalizante referente a atividades agropecuárias e em muitas outras atividades necessárias ao crescimento sustentável de uma sociedade organizada. Haja vista que hoje em dia a infância de muitas de nossas crianças se resume à interatividade globalizada da rede mundial de computadores e a jogos eletrônicos.

É claro que a matemática sempre pareceu difícil para grande parte dos estudantes, a maioria sobreviveu a ela. Porém parece-me que as facilidades trazidas pelo rápido desenvolvimento da tecnologia somada com as aprovações em massa está deixando nossas crianças, e adultos também, com mentes mais "preguiçosas". O pensar matemático é uma grande ferramenta para o desenvolvimento e manutenção das atividades mentais.

Comparar é um ato natural, semelhanças e diferenças, maior e menor, pequeno e grande são rotineiros no cotidiano das pessoas; um bom exemplo deste fato é citado no livro publicado pelo MEC, Explorando o Ensino da Matemática - Atividades volume II. "A Matemática e o Caipira" por Luiz Márcio Imenes e José Jakubovic. Essa história narra a compra de um sítio por um advogado, com o intuito de repousar nos finais de semana. Como no sítio não havia nascentes o advogado procura um vizinho, um caipira que a muito mora por ali, por saber que ele tinha em sua propriedade uma nascente com água de boa qualidade e em fartura, e faz uma proposta:

— Eu instalo um cano de uma polegada de diâmetro na sua nascente, conduzo a água para o meu sítio e lhe pago uma quantia x por mês.

A proposta foi aceita de imediato.

Com o passar do tempo o advogado sente necessidade de mais água e volta a falar com o caipira fazendo uma nova proposta:

— Posso substituir o cano de 1 polegada por um de duas polegadas de diâmetro e pagar para isso $2x$, o dobro da quantia inicial?

O caipira fica pensativo, analisa por alguns instantes a proposta e responde que não aceita.

O advogado fica intrigado com a recusa e argumenta que tem água sobrando e que se vender mais vai ganhar mais.

— É que num tá certo, retruca o caipira, e explica com um gesto.

A água que ocê me
paga passa por aqui:

Figura 1: 1 tubo de 1 polegada
Fonte: http://softeduque.blogspot.com.br

e vosmecê qué me
pagá o dobro.

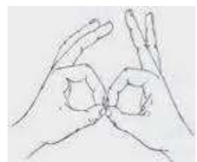


Figura 2: 2 tubos de 1 polegada
Fonte: http://softeduque.blogspot.com.br

Acontece que o cano que ocê vai ponhá é assim:

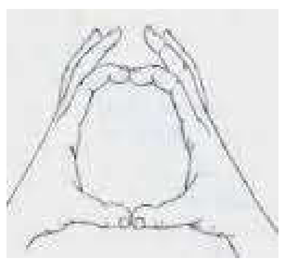


Figura 3: 1 tubo de 2 polegada
Fonte: http://softeduque.blogspot.com.br

Pois é, quem me paga pela água que passa por aqui?

Figura 4: comparados os tubos - espaço que sobra abaixo
Fonte: http://softeduque.blogspot.com.br

E a que passa por aqui?

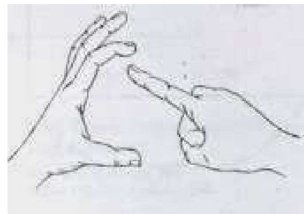


Figura 5: comparados os tubos - espaço que sobra acima
Fonte: http://softeduque.blogspot.com.br

Com linguagem geométrica a questão fica assim: um círculo de diâmetro 1 cabe 2 vezes num círculo de diâmetro 2 e ainda fica sobrando espaço.

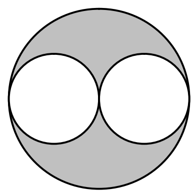


Figura 6: comparados os tubos - espaço que sobra
Fonte: o autor

Dobrando o diâmetro de um circulo a sua área será mais do que o dobro da área inicial (4 vezes para ser exato) e a água que passa pela secção do cano (vazão) aumenta mais do quatro vezes pois diminuem os atritos, mas isso deixemos para as aulas de Física, o que nos interessa no momento são as comparações, sem necessidade de medidas formais, apenas visuais.

1.3 RECURSOS E MATERIAIS RECOMENDADOS

A princípio, seria necessário e suficiente ter excelência em desenho geométrico. Faz parte da minha formação técnica de nível médio as disciplinas de desenho geométrico e desenho técnico e topográfico e sou graduado em Matemática, Desenho Geométrico e Física pela Faculdade De Filosofia Ciências e Letras de Guarapuava - FAFIG (atual Unicentro - Universidade Estadual do Centroeste - Guarapuava - Paraná). Contudo, não sei se faz parte do currículo de todo professor de matemática o desenho técnico e, desenhar com precisão na lousa demanda um tempo que muitas vezes não temos.

Além de desenhos feitos na lousa podemos lançar mão de desenhos e recortes feitos pelos próprios alunos, usando a técnica da homotetia. Também pode-se preparar imagens em materiais diversos, como, por exemplo, cartolina, EVA, madeira, acrílico, polímeros, etc.) para que os alunos possam manipular e perceber a semelhança entre figuras geométricas e comparar medidas por sobreposição.

Por fim o uso do software livre GeoGebra para obtenção de imagens e para visualização de resultados obtidos pela comparação de medidas: comprimentos de lados correspondentes de triângulos semelhantes, comprimentos dos lados de um mesmo triângulo retângulo; circunferência, diâmetro e raio de um mesmo círculo sem necessidade de medi-las de forma padronizada, apenas pela observação de seus comprimentos de forma visual. Também pelo o uso de medidas obtidas nos desenhos feitos no aplicativo do software usado, algo que já foi utilizado em alguns trabalhos encontrados na revisão bibliográfica. O uso do GeoGebra depende da disponibilidade de recursos tecnológicos disponibilizados pela instituição de ensino: se os alunos têm acesso a um laboratório de informática tudo fica mais rápido, porém, pode-se gerar imagens e imprimir, para simples visualização, ou mostrar em aparelhos reprodutores de imagens (data shows, televisores, monitores, álbuns seriados, etc.).

O GeoGebra é um software livre que pode ser usado por qualquer pessoa, quer seja para fins didático-pedagógicos ou por simples curiosidade. Pode ser obtido no site https://www.geogebra.org/. Tendo instalado o GeoGebra no computador pode-se utilizá-lo como um instrumento facilitador no estudo das semelhanças de triângulos e suas consequências na trigonometria.

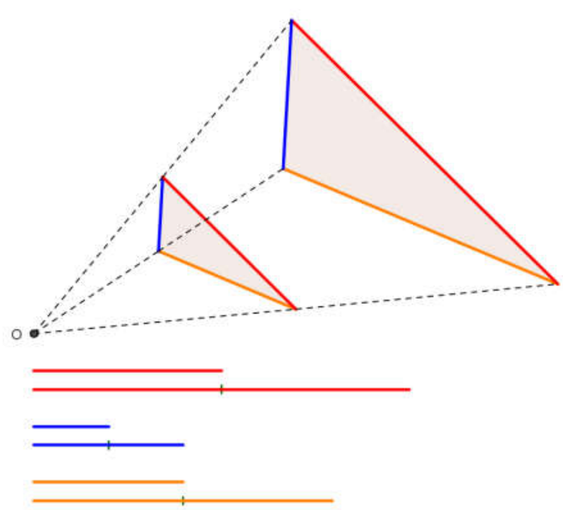
CAPÍTULO 2

IMAGENS BÁSICAS

É muito importante para a funcionalidade do Método de Comparações Visuais que as figuras (como as que serão mostradas na 1ª seção deste capítulo) que ilustram as situações a serem vivenciadas ou os materiais concretos que serão alvo de manipulação, tenham uma construção bem elaborada com medidas corretas tanto de seus ângulos quantos dos comprimentos de suas linhas. Sem isto as comparações ficam distorcidas gerando dúvidas e incertezas sobre os resultados desejados e discrepâncias entre os resultados visualizados e aqueles que são calculados segundo as informações fornecidas pelos dados geradores das figuras.

Outro elemento necessário é o fracionamento das medidas de comprimentos a serem comparados, em partes iguais. Um recurso para tal é o uso de fios (cordas, barbantes) dobrando-os. Para figuras obtidas no GeoGebra pode-se usar uma ferramenta para divisão de distâncias em partes iguais, cuja criação é apresentada na Seção 2.

2.1 IMAGENS BÁSICAS, OBTIDAS DE CONSTRUÇÕES FEITAS NO GEOGEBRA, PARA ILUSTRAR A FUNCIONALIDADE DO MÉTODO PROPOSTO

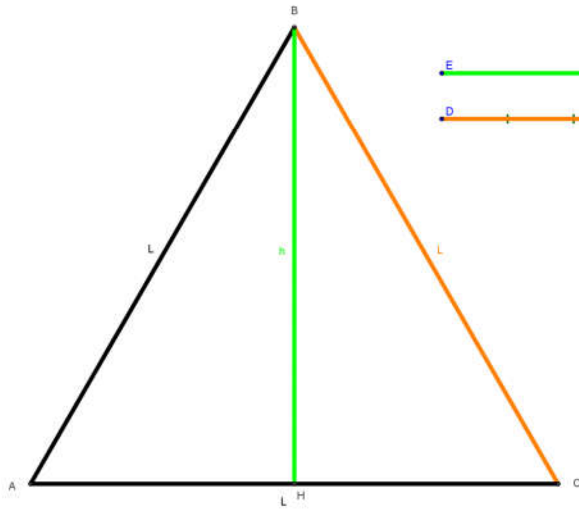


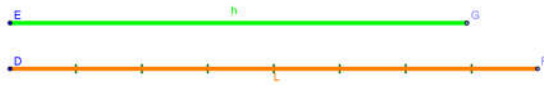
Triângulos semelhantes obtidos através da técnica de homotetia para ampliações e reduções de imagens.

Comparação visual simples entre os lados correspondentes representados por segmentos de mesma cor.

É fácil observar que as medidas dos lados do triângulo menor têm exatamente a metade das medidas dos lados correspondentes do triângulo maior.

Figura 7: semelhança de triângulos - 1
Fonte: o autor





Triângulo equilátero.

Comparação entre as medidas dos comprimentos da altura, na cor verde, e de um dos lados do triângulo, na cor laranja.

Observa-se que a altura ocupa perto de sete oitavos do comprimento do lado do triângulo.

Figura 8: triângulo equilátero - 1
Fonte: o autor

Circunferência de um pneu traseiro de um trator agrícola

Comparação entre o comprimento de uma circunferência, retificada em vermelho e o de seu diâmetro repetido quatro vezes em sequência retilínea.

Verifica-se que uma circunferência mede o equivalente a aproximadamente vinte e dois sétimos de seus diâmetro

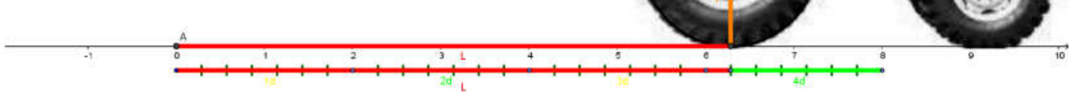


Figura 9: o trator e a circunferência - 1
Fonte: o autor

As figuras acima foram construídas no GeoGebra e podem ser manipuladas e ou animadas para visualizar variações das medidas dos comprimentos das linhas sem perda da proporcionalidade constante entre as suas razões.

2.2 CRIAÇÃO DA FERRAMENTA PARA DIVIDIR DISTÂNCIAS NO GEOGEBRA

Para as construções gráficas necessárias às atividades de comparação de medidas, é preciso criar uma ferramenta para dividir distâncias (segmentos) em partes iguais e, para isso, pode-se lançar mão da vídeo-aula que pode ser acessada pelo link https://www.youtube.com/watch?v=fOO5iDya_ek do vídeo com as seguintes informações: publicado em 7 de junho de 2014 - vídeo-aula de como criar novas ferramentas no GeoGebra e integrá-las ao comando sequência e a planilha. site: http://ogeogebra.com.br/site/materialescrito: http://ogeogebra.com.br/site/?page_id...

Contudo, como é necessário parar e voltar a imagem muitas vezes para realizar a criação da ferramenta de dividir distâncias seguindo o vídeo, fizemos questão de apresentar nesta seção o passo a passo para auxiliar o professor que irá utilizar esta ferramenta, imprescindível ao Método de Comparações Visuais.

Tendo o software GeoGebra devidamente instalado em seu computador, pode-se seguir o seguinte roteiro para a criação da ferramenta:

i. Selecionar a ferramenta Ponto e definir dois pontos A e B

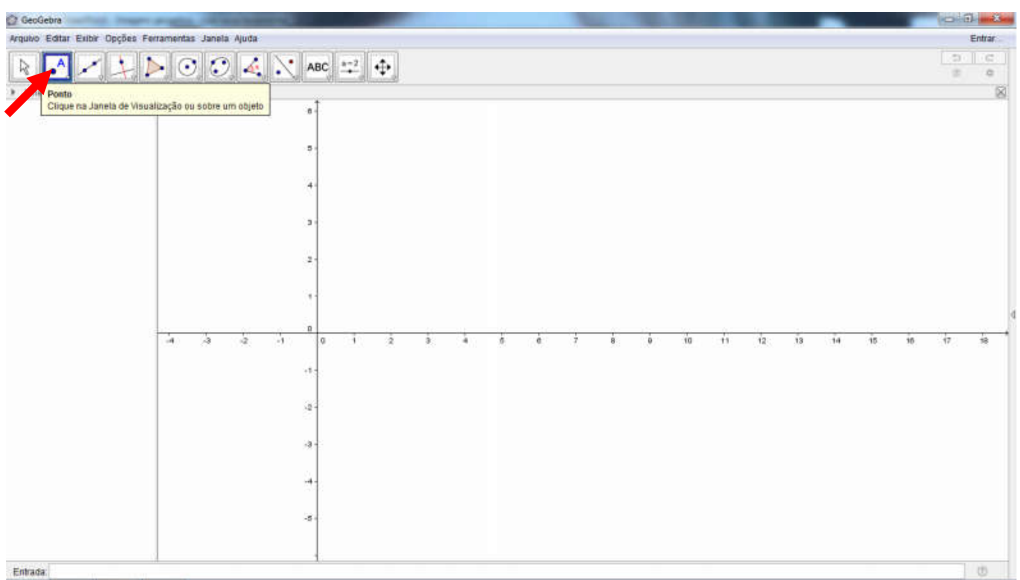


Figura 10: Ferramenta Divisão de Distâncias - 1
Fonte: o autor

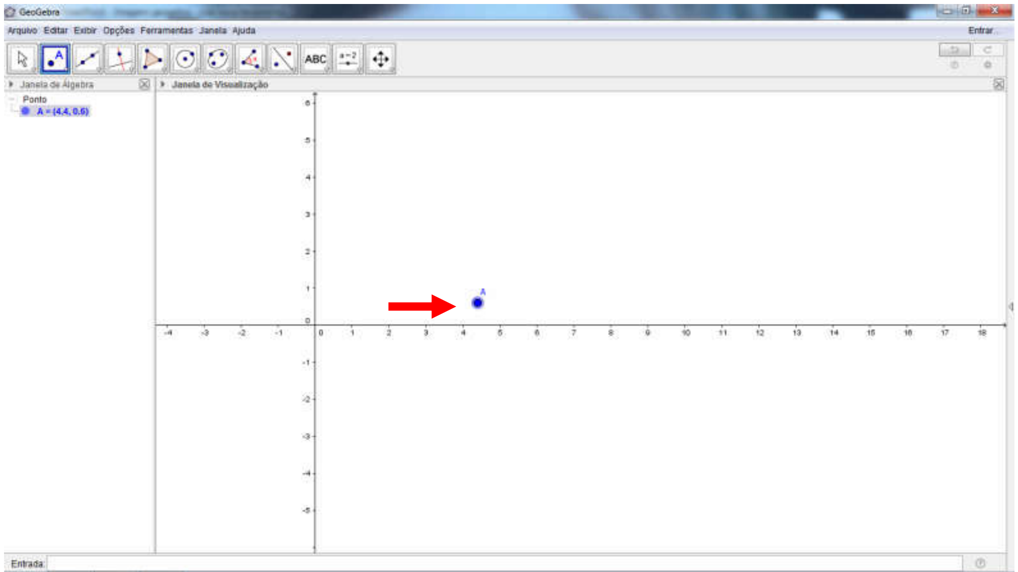


Figura 11: Ferramenta Divisão de Distâncias - 2
Fonte: o autor

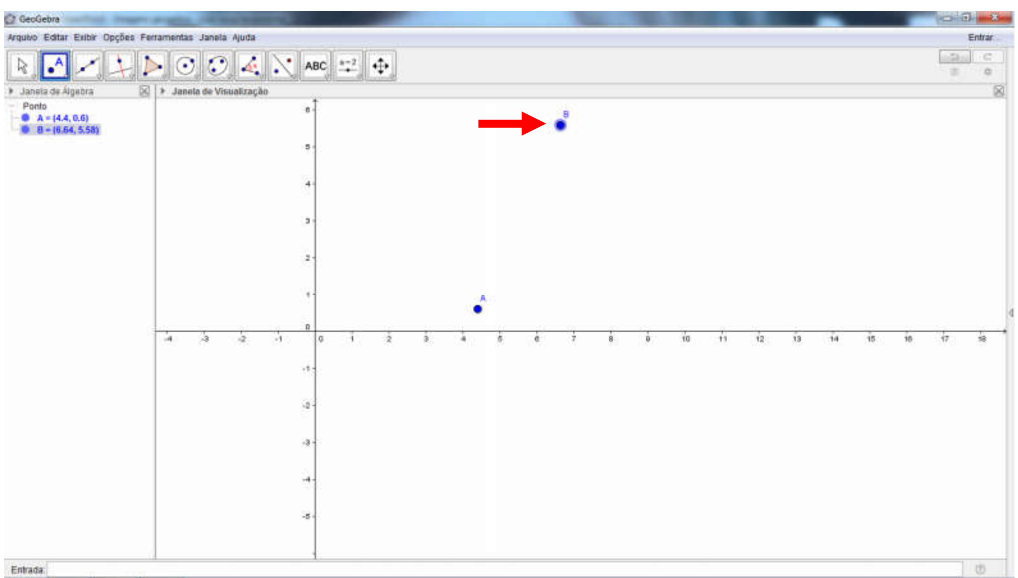


Figura 12: Ferramenta Divisão de Distâncias - 3
Fonte: o autor

ii. Clicar na ferramenta controle deslizante para obter um comando que indicará em quantas partes o segmento AB deverá ser dividido. Criar o controle deslizante, renomeá-lo de n, definir valor mínimo em 1, máximo maior (por exemplo 30) e incremento 1.

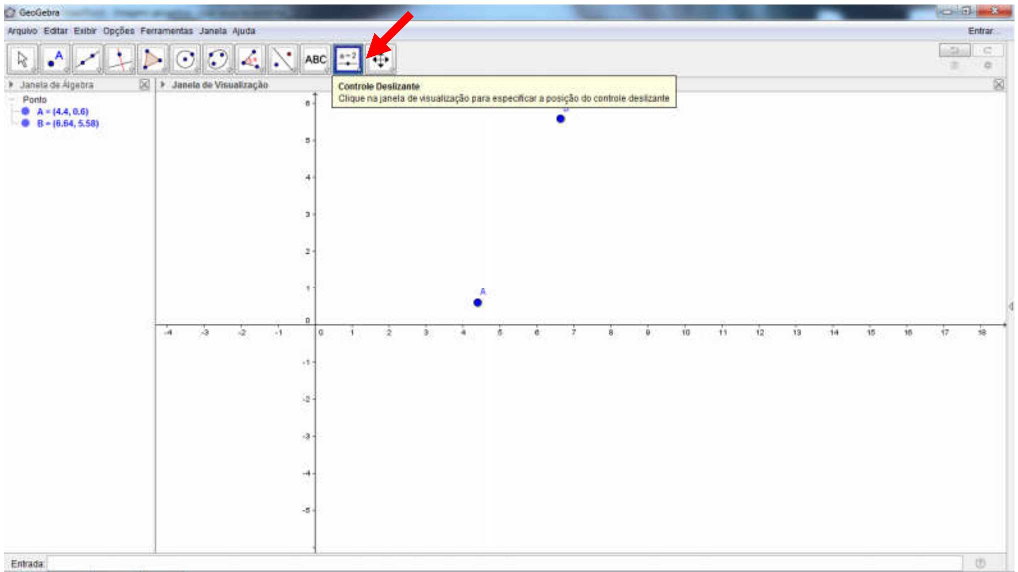


Figura 13: Ferramenta Divisão de Distâncias - 4
Fonte: o autor

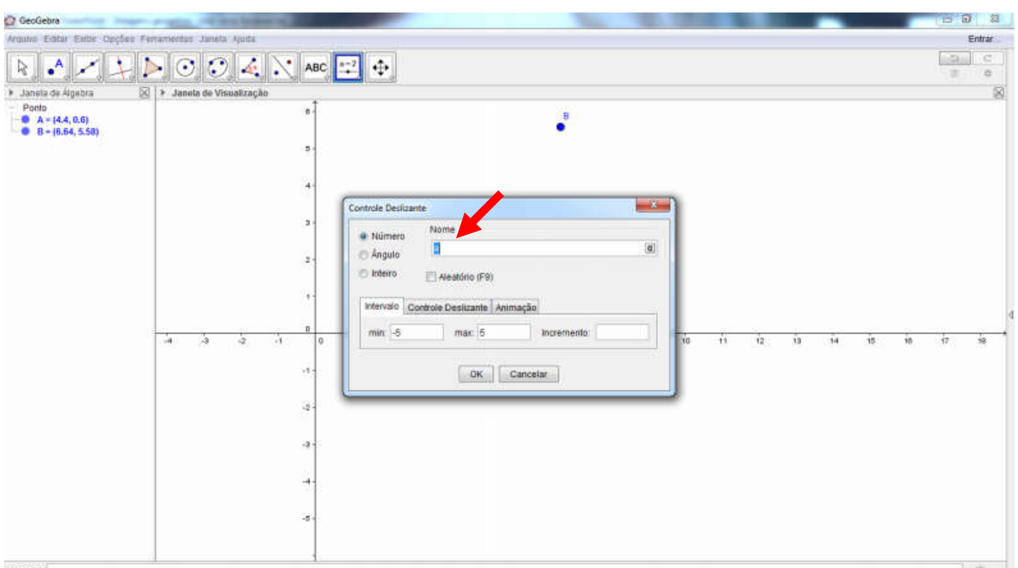


Figura 14: Ferramenta Divisão de Distâncias - 5
Fonte: o autor

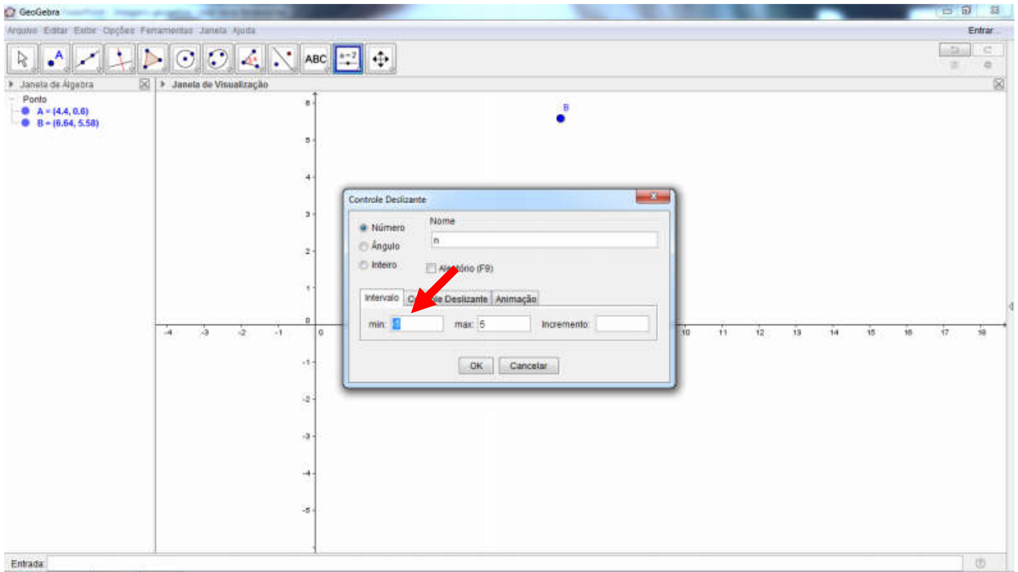


Figura 15: Ferramenta Divisão de Distâncias - 6
Fonte: o autor

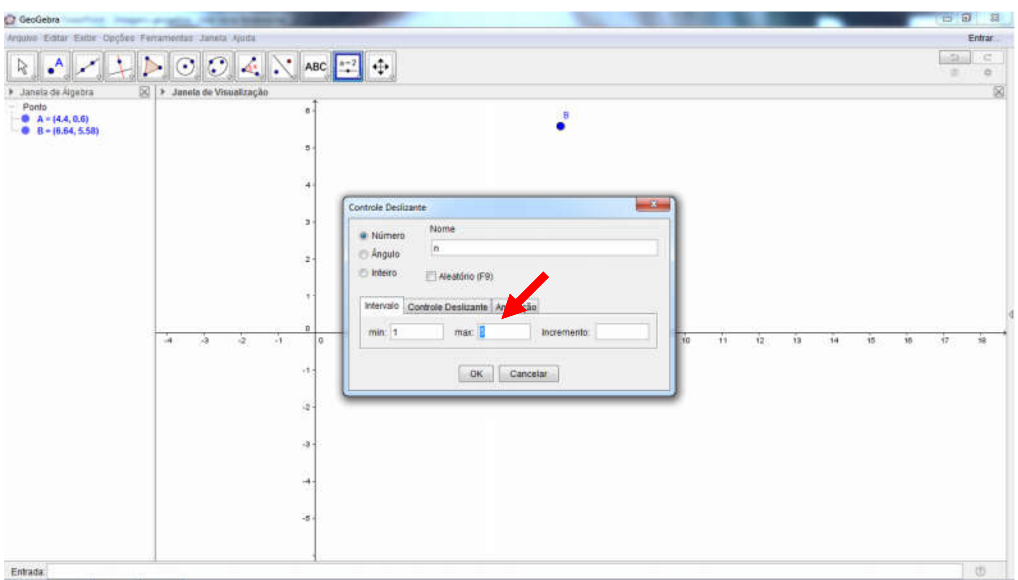


Figura 16: Ferramenta Divisão de Distâncias - 7
Fonte: o autor

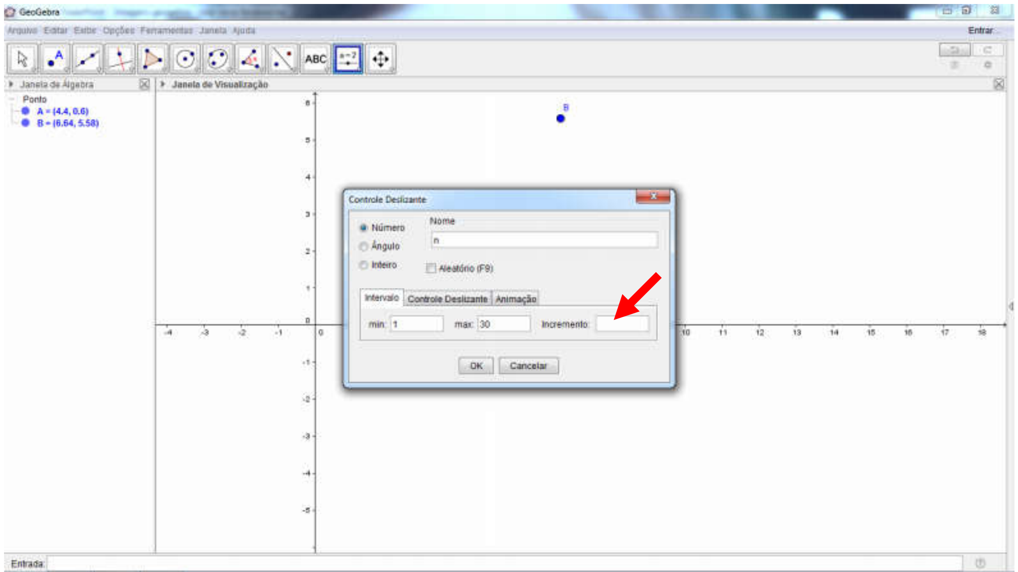


Figura 17: Ferramenta Divisão de Distâncias - 8
Fonte: o autor

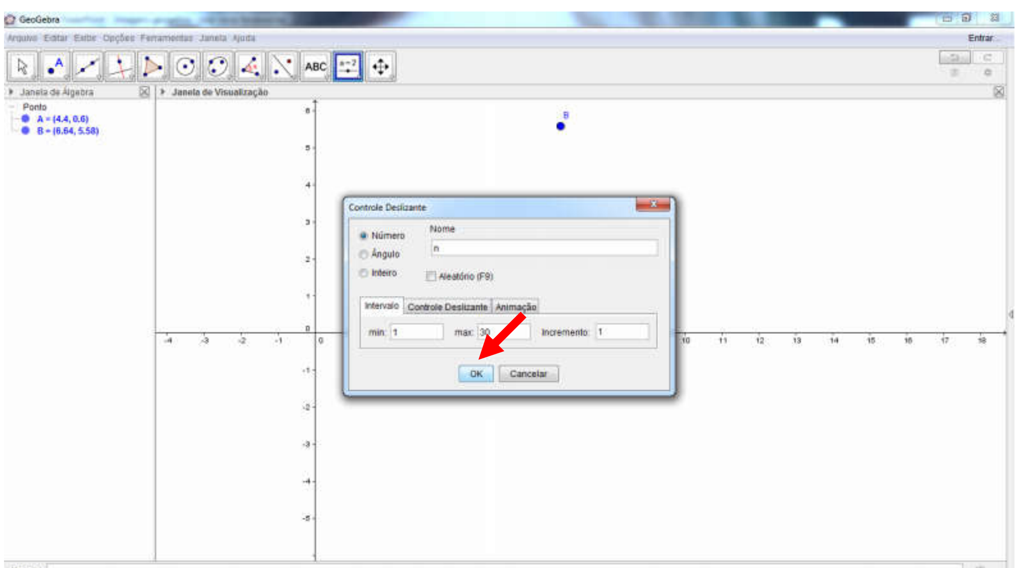


Figura 18: Ferramenta Divisão de Distâncias - 9
Fonte: o autor

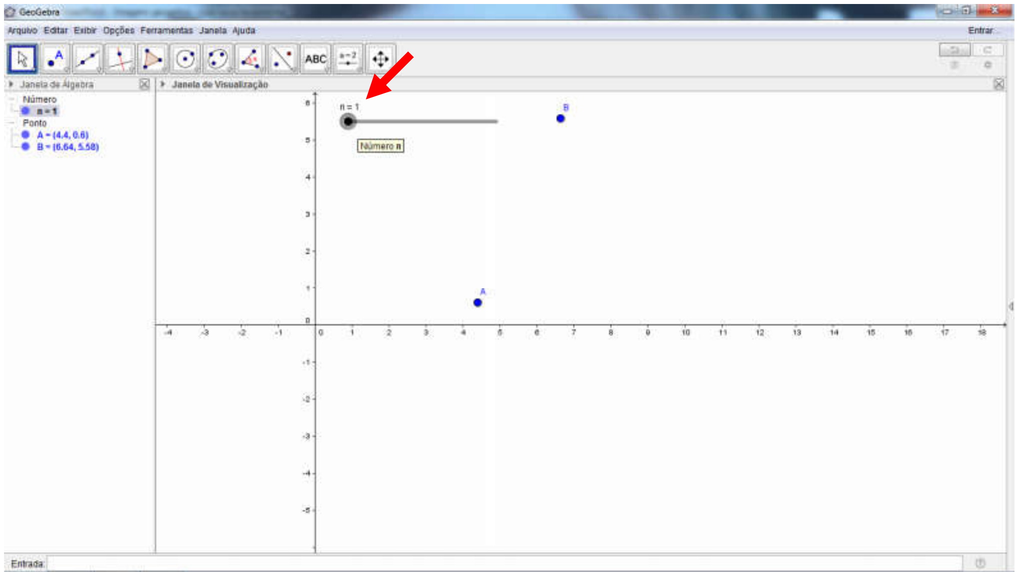


Figura 19: Ferramenta Divisão de Distâncias - 10
Fonte: o autor

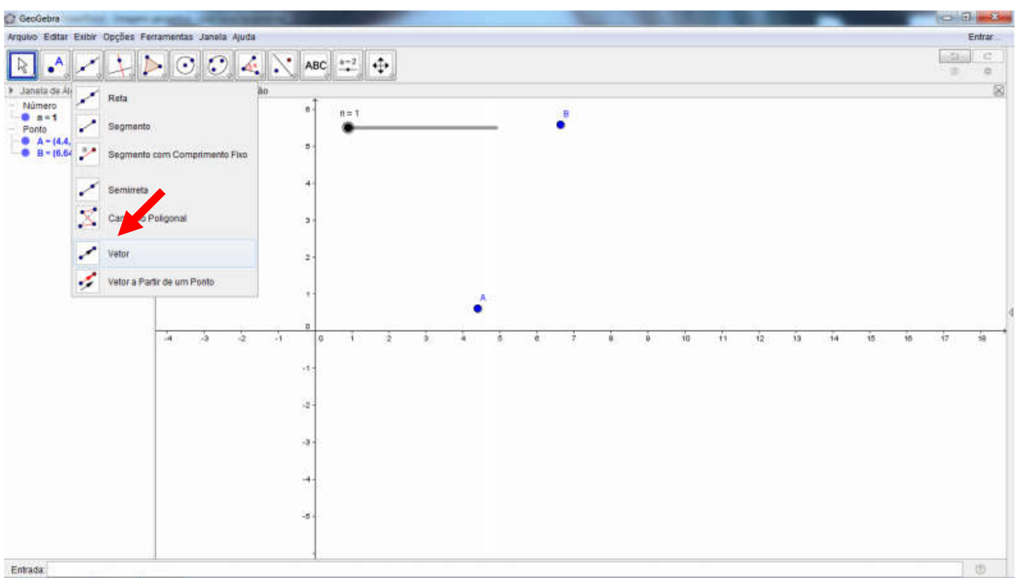


Figura 20: Ferramenta Divisão de Distâncias - 11
Fonte: o autor

iii. Clicar na ferramenta vetor para construir um vetor que será a base para a ferramenta de divisão de distâncias. Construir um vetor clicando em A e depois em B e depois editar o vetor dando dois cliques sobre o mesmo fazendo abrir a ferramenta redefinir, aparecendo vetor [A, B]. Clicar na sequência do vetor e dividir por "n" (Vetor [A, B]/n) e clicar no comando ok. o vetor se deslocará para a origem dos eixos coordenados.

Verificar se ao mudar o valor de n (clicando na ferramenta mover e arrastando o controle deslizante ou selecionando e movendo através dos cursores do teclado) o comprimento do vetor se altera.

Para n = 1 o vetor deverá se manter com o mesmo comprimento do segmento AB.

Para n = 2 o vetor deverá se reduzir a metade do comprimento do segmento AB.

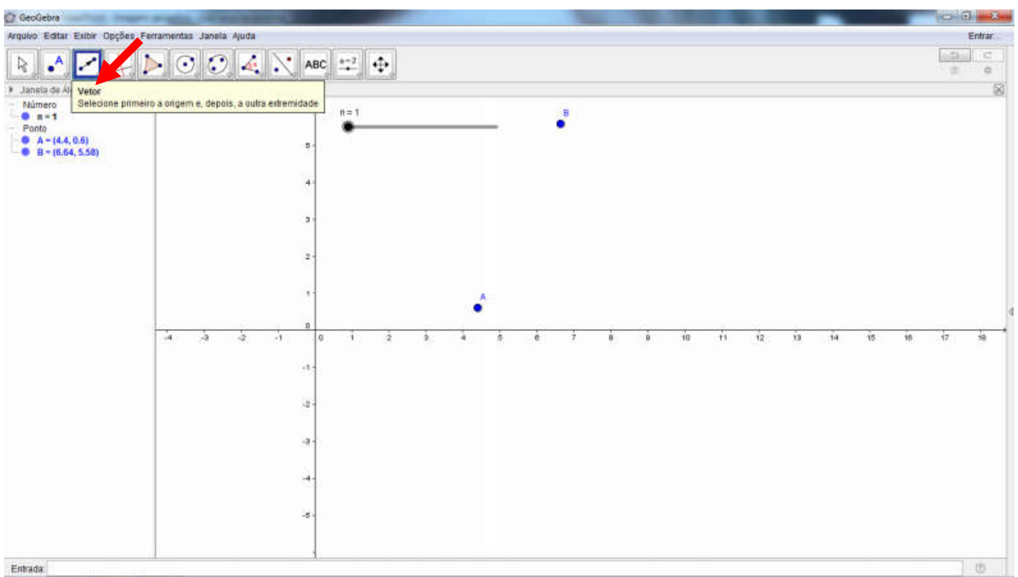


Figura 21: Ferramenta Divisão de Distâncias - 12
Fonte: o autor

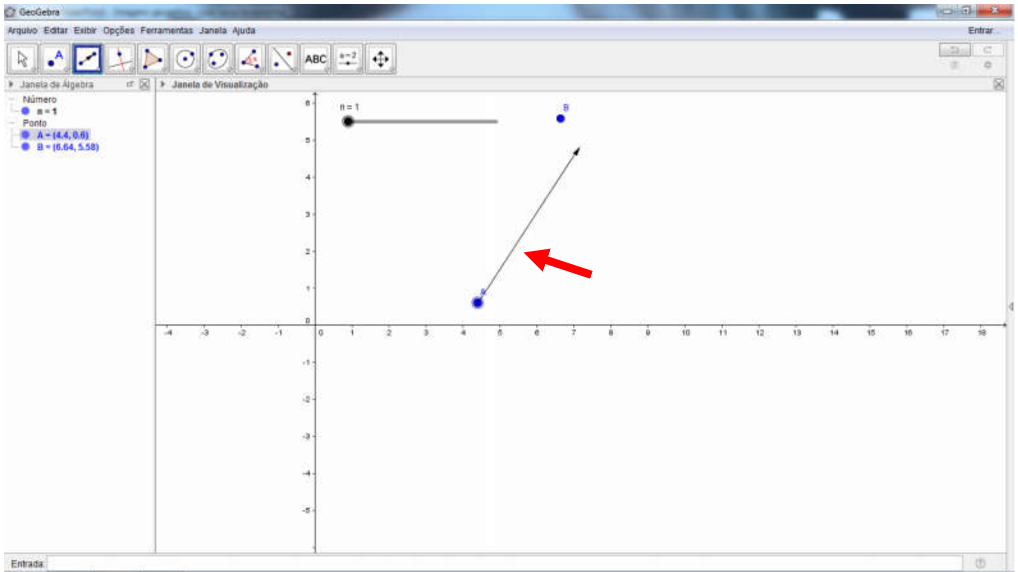


Figura 22: Ferramenta Divisão de Distâncias - 13
Fonte: o autor

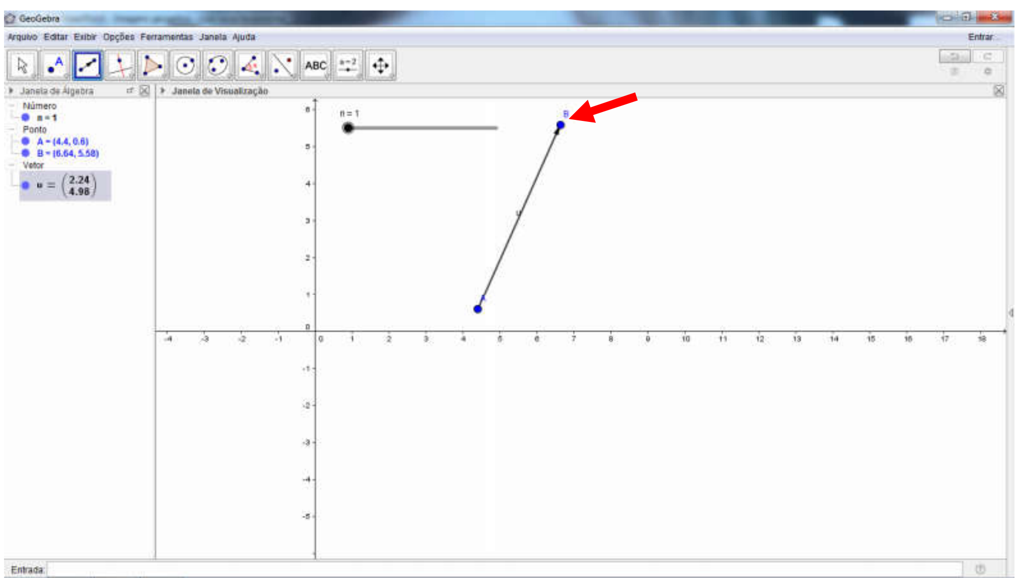


Figura 23: Ferramenta Divisão de Distâncias - 14
Fonte: o autor

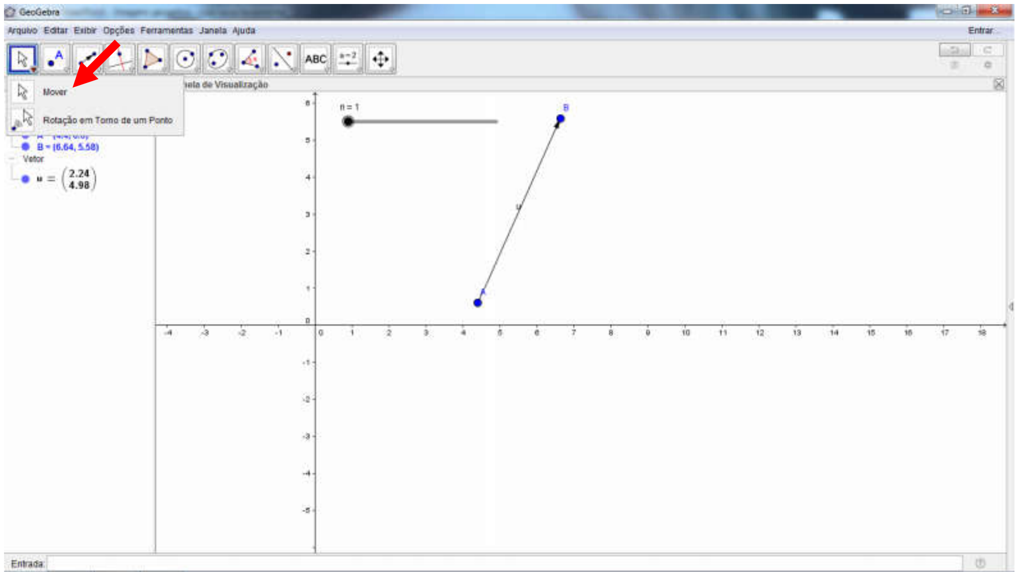


Figura 24: Ferramenta Divisão de Distâncias - 15
Fonte: o autor

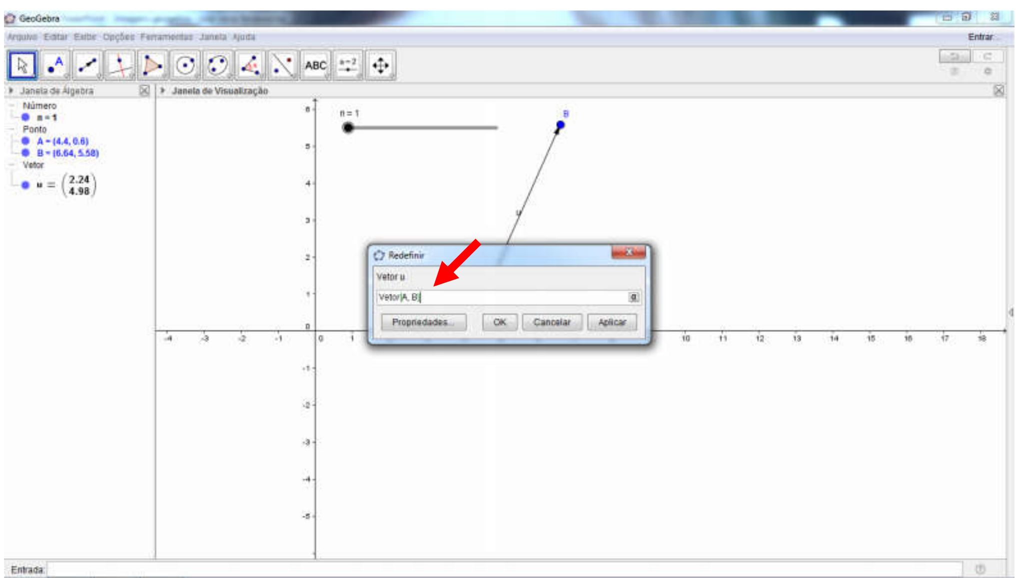


Figura 25: Ferramenta Divisão de Distâncias - 16
Fonte: o autor

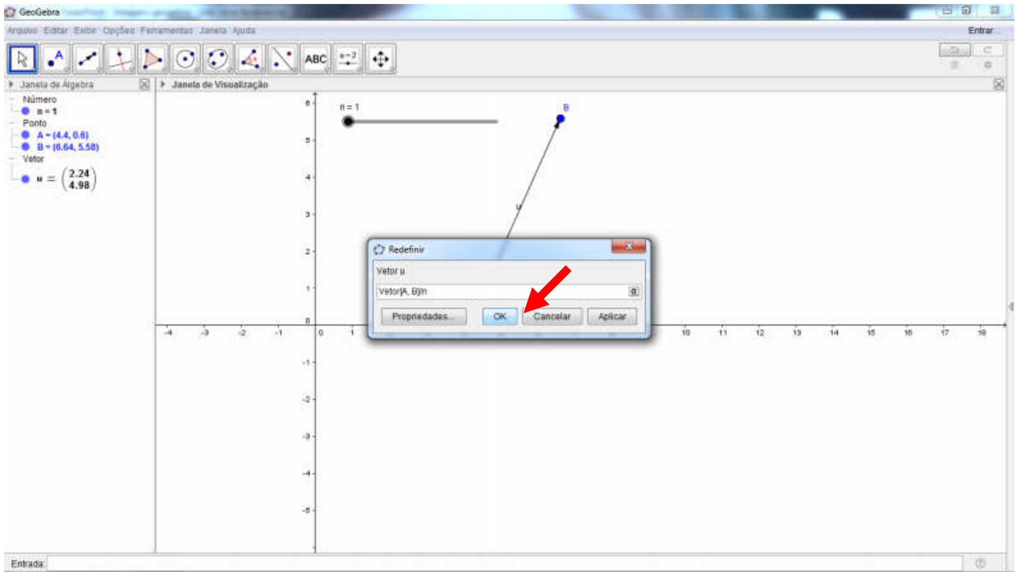


Figura 26: Ferramenta Divisão de Distâncias - 17
Fonte: o autor

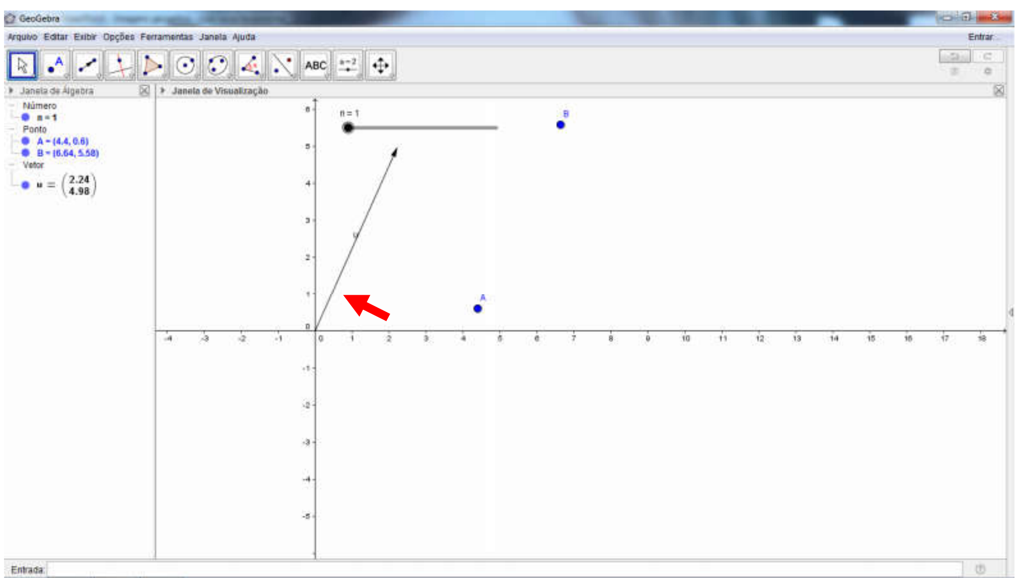


Figura 27: Ferramenta Divisão de Distâncias - 18
Fonte: o autor

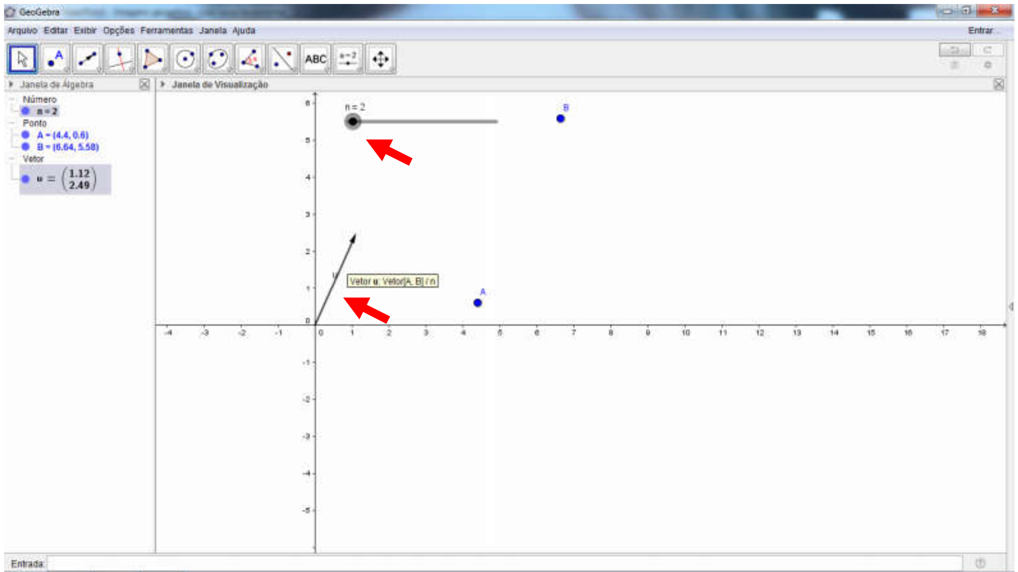


Figura 28: Ferramenta Divisão de Distâncias - 19
Fonte: o autor

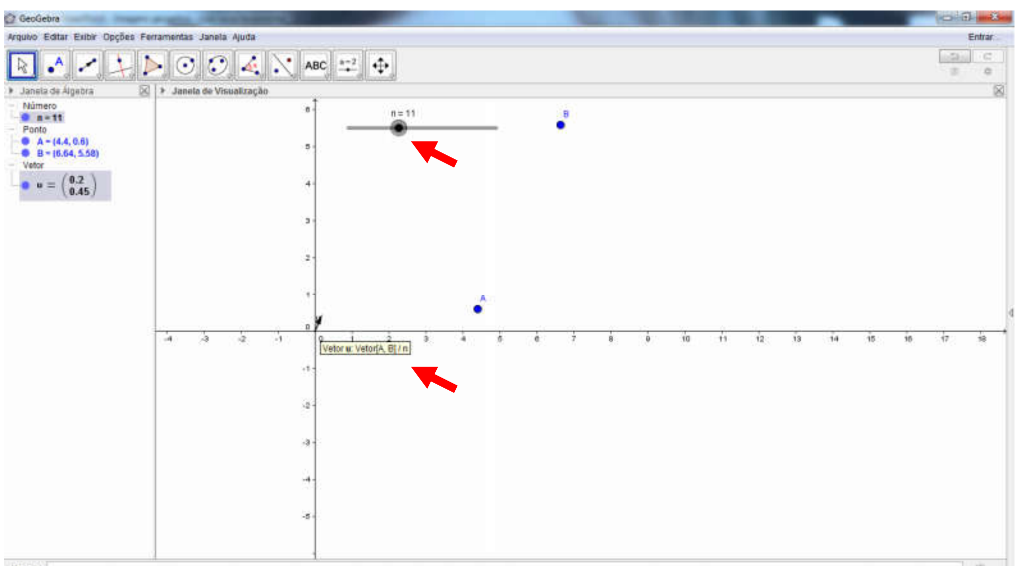


Figura 29: Ferramenta Divisão de Distâncias - 20
Fonte: o autor

iv. Construir uma sequência de pontos a ser inserida entre A e B. Na caixa de entrada digitar: Sequência[transladar[A, vetor[u*i]], i, 1, n-1], (transladar o ponto A por um múltiplo do vetor u, sendo u multiplicado pela variável i que vai variar de 1 a n-1).

Surgirá automaticamente um lista 1 correspondente aos pontos que serão inseridos para dividir o segmento em n partes quando variar o comprimento do vetor u alterando o controle deslizante n.

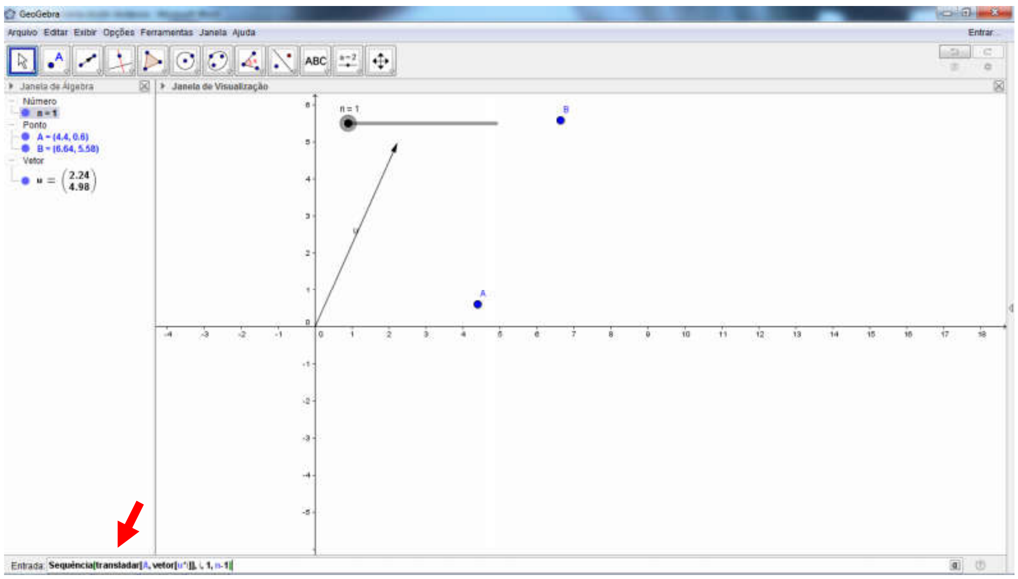


Figura 30: Ferramenta Divisão de Distâncias - 21
Fonte: o autor

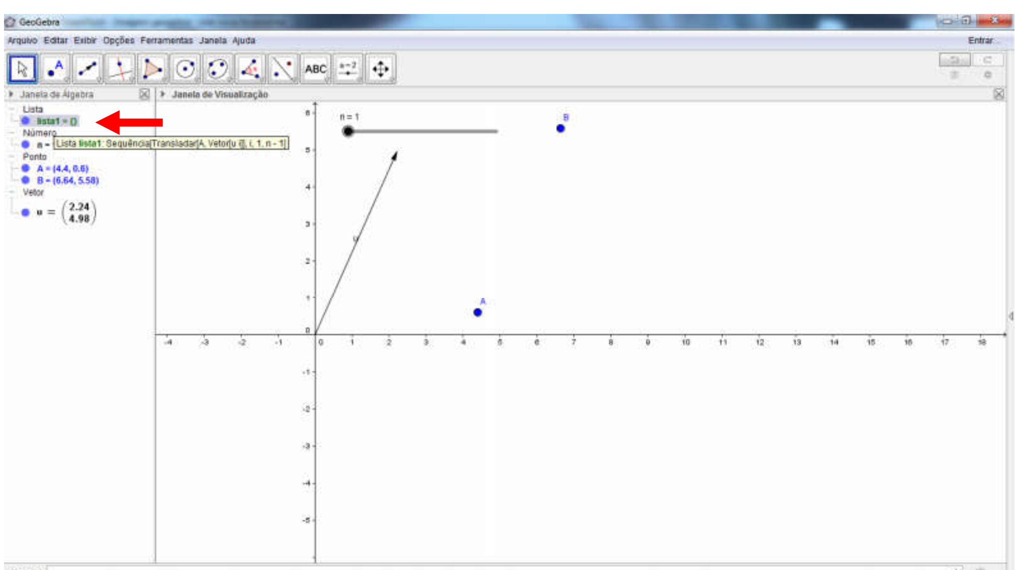


Figura 31: Ferramenta Divisão de Distâncias - 22
Fonte: o autor

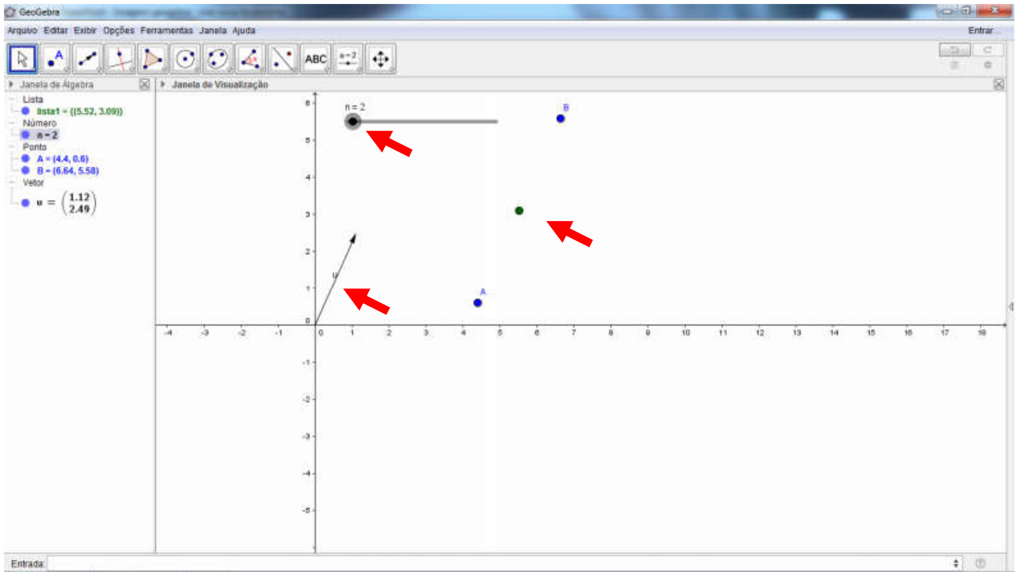


Figura 32: Ferramenta Divisão de Distâncias - 23
Fonte: o autor

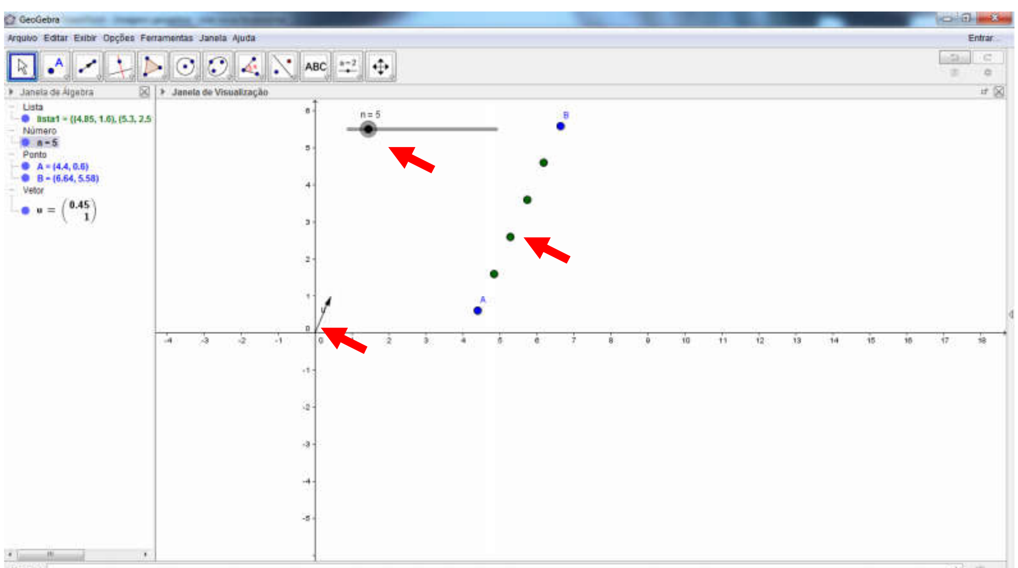


Figura 33: Ferramenta Divisão de Distâncias - 24
Fonte: o autor

v. Clicar em ferramentas, criar uma nova ferramenta; abre um caixa de comando com Objetos Finais, Objetos Inicias e Nome e Ícone.

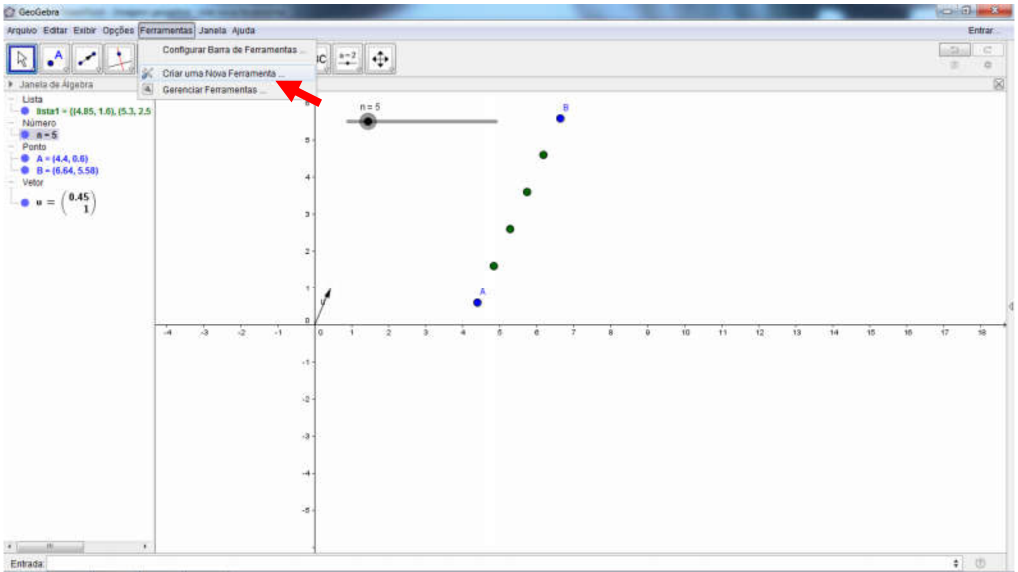


Figura 34: Ferramenta Divisão de Distâncias - 25
Fonte: o autor

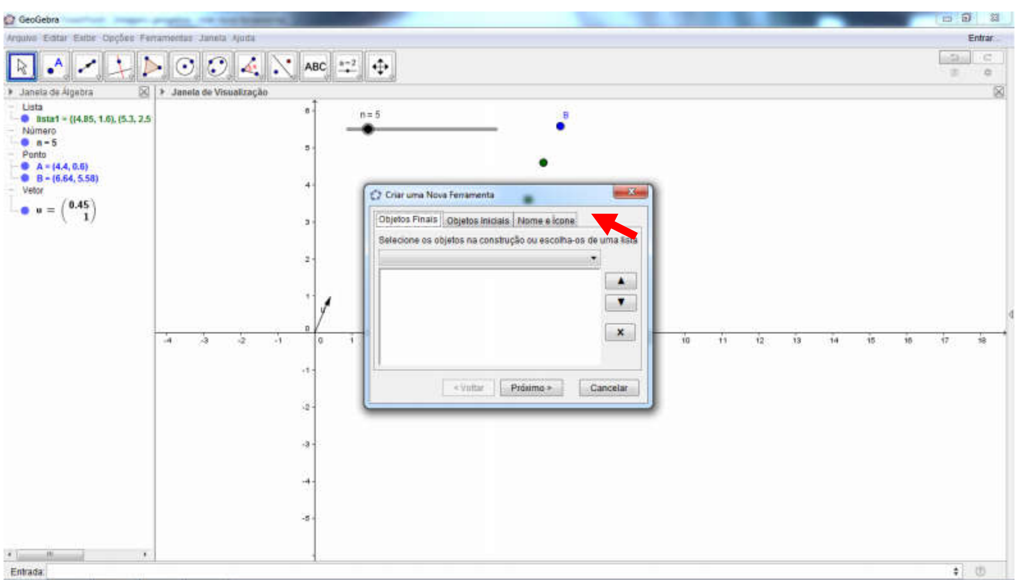


Figura 35: Ferramenta Divisão de Distâncias - 26
Fonte: o autor

Em objetos finais selecionar o objeto resultado que é a Lista 1

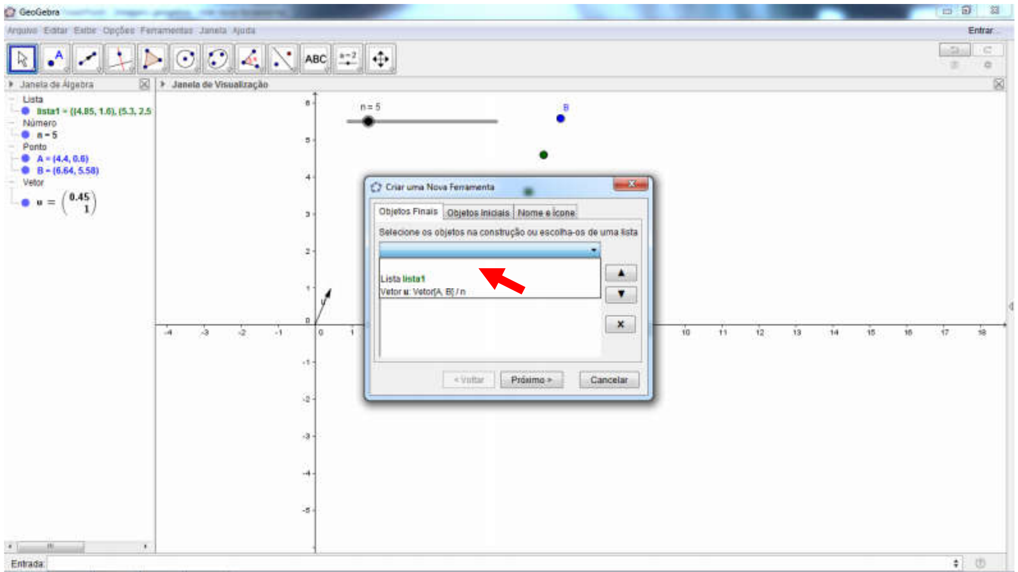


Figura 36: Ferramenta Divisão de Distâncias - 27
Fonte: o autor

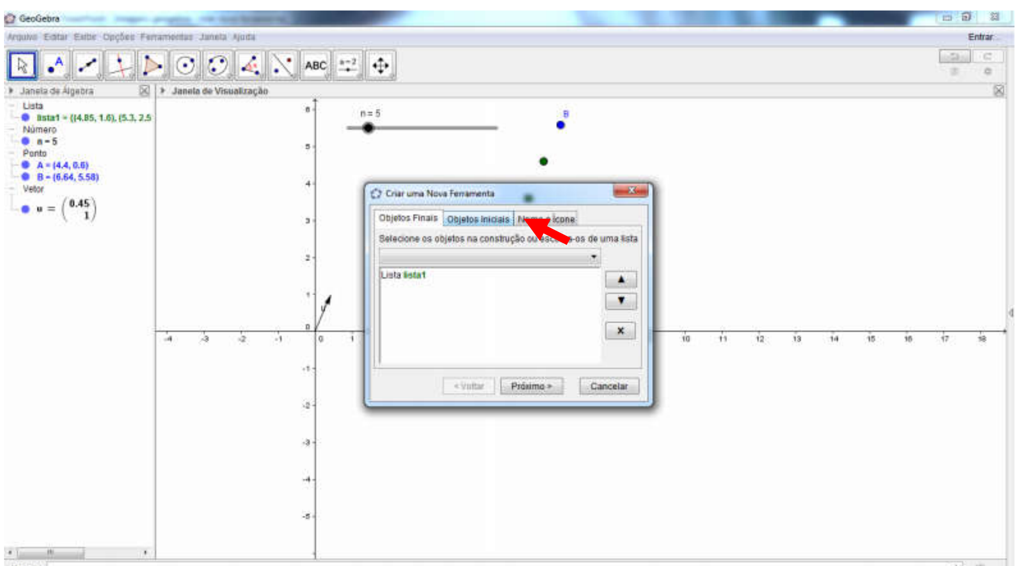


Figura 37: Ferramenta Divisão de Distâncias - 28
Fonte: o autor

Em objetos iniciais o GeoGebra sugere que, para iniciar são necessários dois pontos (A e B) e o valor numérico n; deixar desta forma.

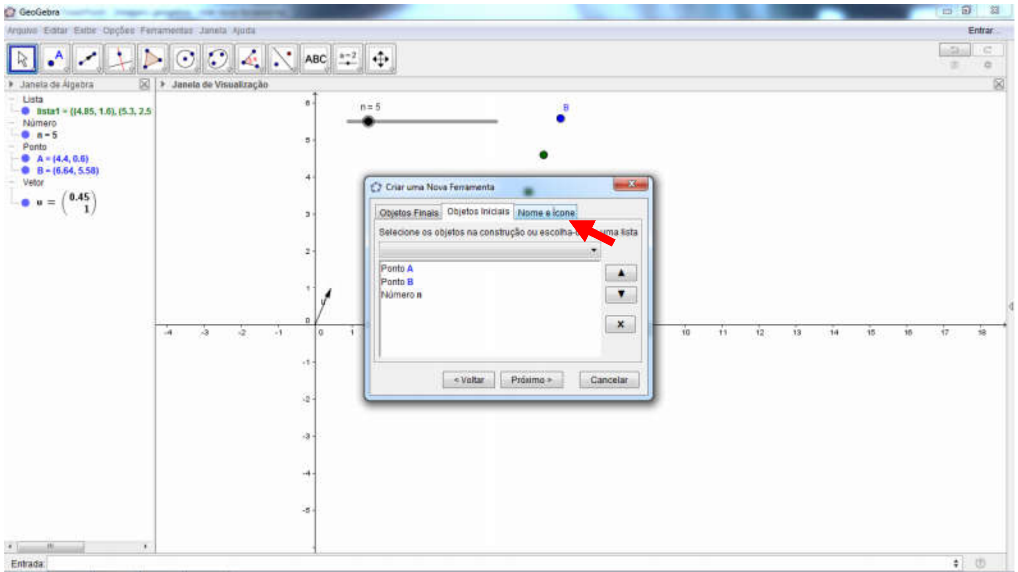


Figura 38: Ferramenta Divisão de Distâncias - 29
Fonte: o autor

Em nome e ícone nomear a ferramenta; dividir distâncias, o nome do comando surge automaticamente; na ajuda da ferramenta digitar Clique em dois pontos e, depois, determine um valor.

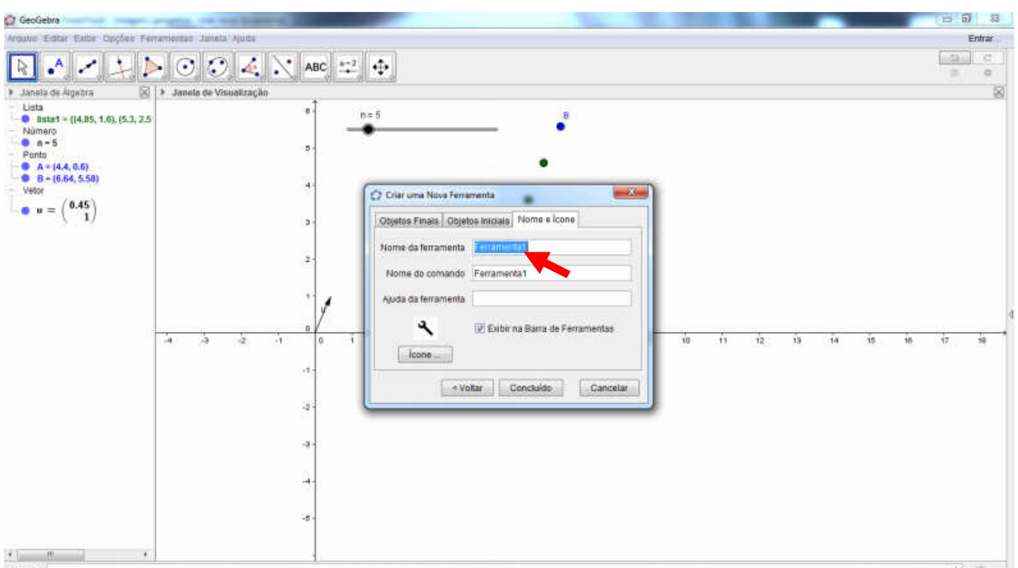


Figura 39: Ferramenta Divisão de Distâncias - 30
Fonte: o autor

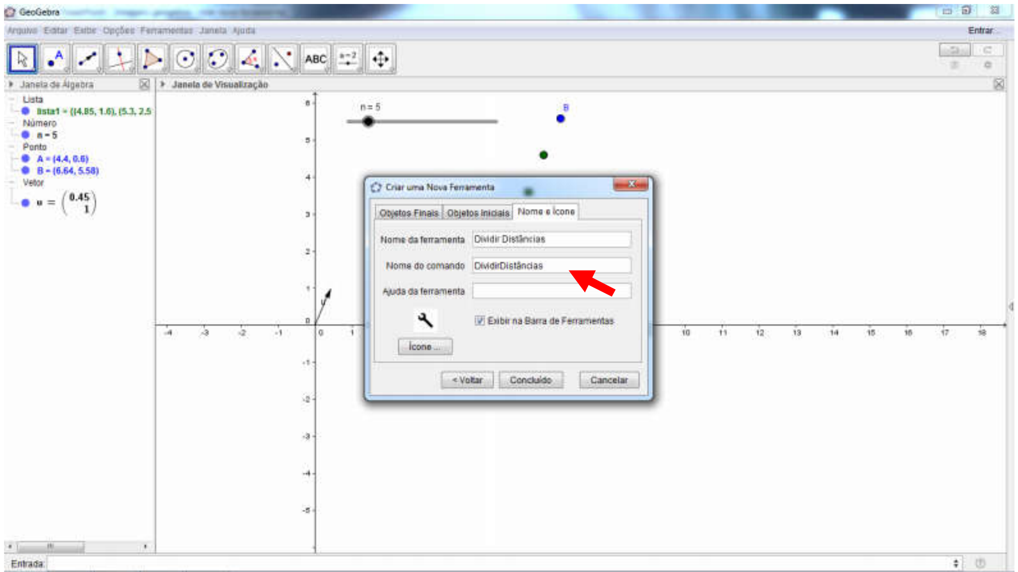


Figura 40: Ferramenta Divisão de Distâncias - 31
Fonte: o autor

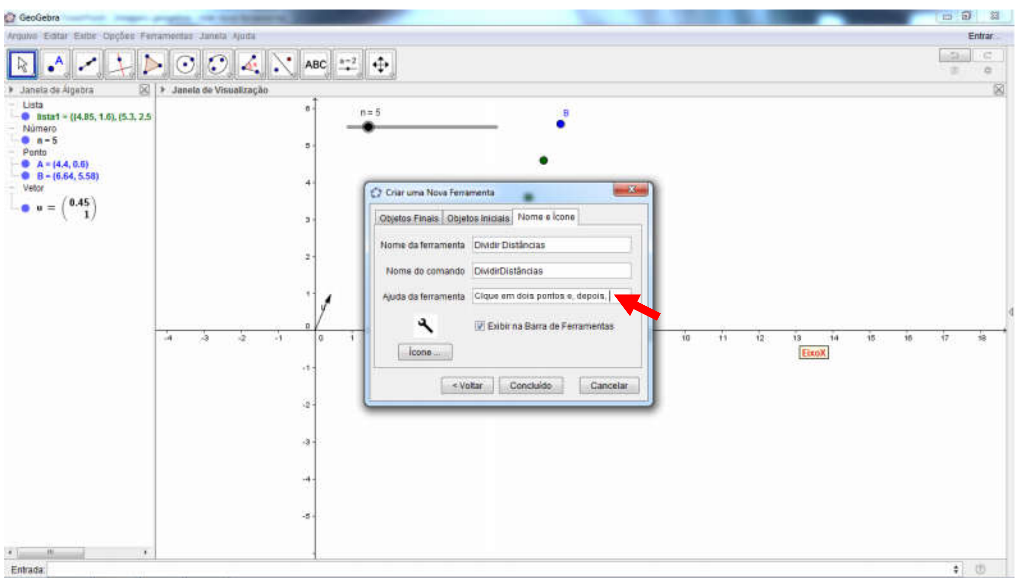


Figura 41: Ferramenta Divisão de Distâncias - 32
Fonte: o autor

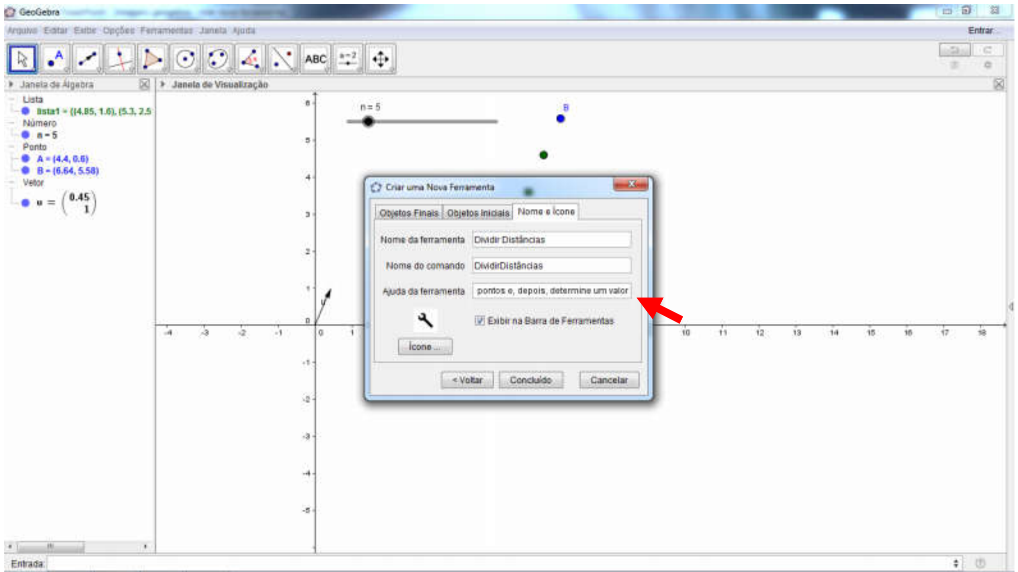


Figura 42: Ferramenta Divisão de Distâncias - 33
Fonte: o autor

Clicar em CONCLUÍDO e aparecerá a mensagem nova ferramenta criada com sucesso! Surgirá na barra de ferramentas a ferramenta criada com uma imagem padrão para novas ferramentas do GeoGebra.

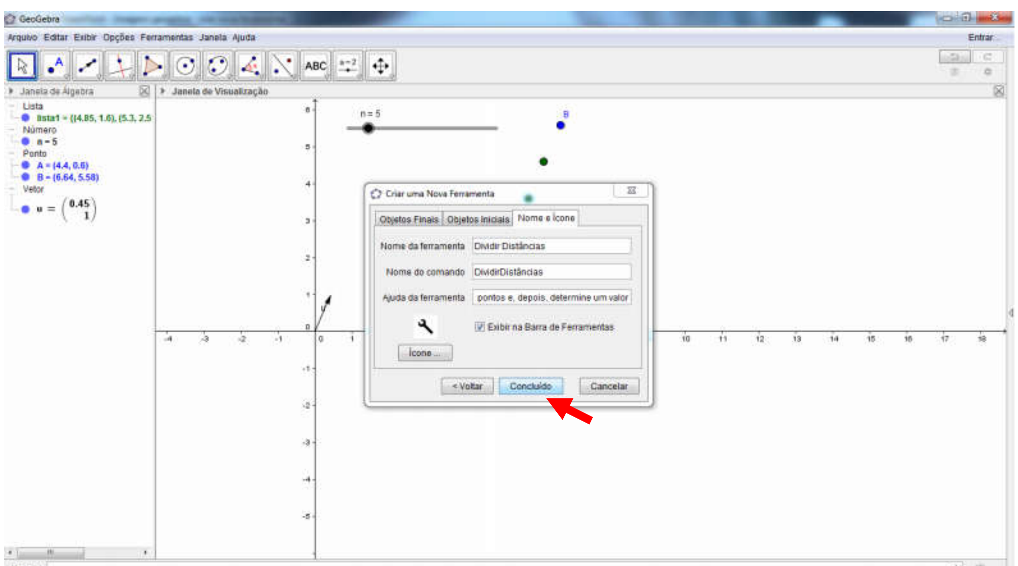


Figura 43: Ferramenta Divisão de Distâncias - 34
Fonte: o autor

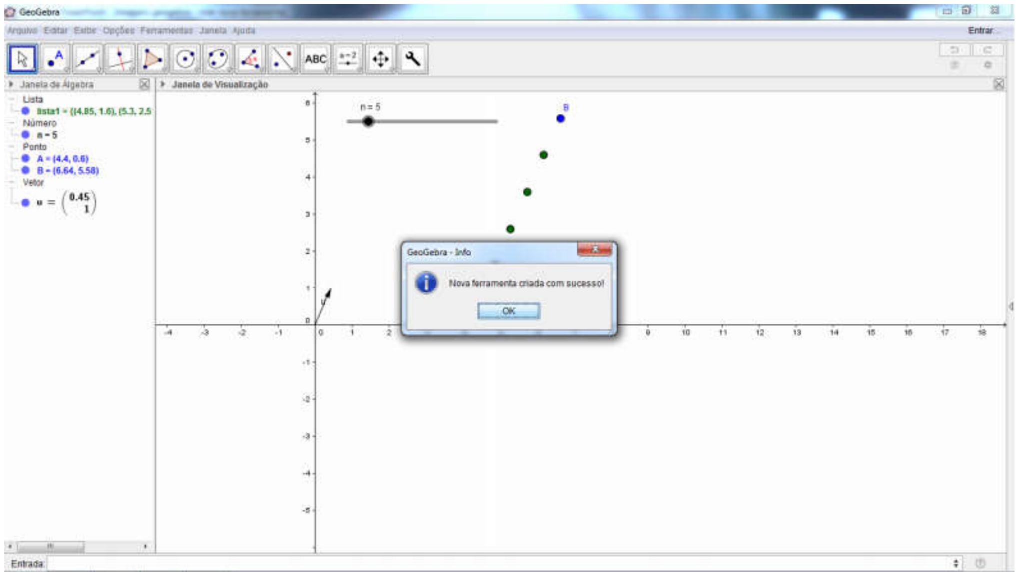


Figura 44: Ferramenta Divisão de Distâncias - 35
Fonte: o autor

vi. Clicar sobre o ícone da nova ferramenta e teclar ESC, selecionar na janela de álgebra o vetor u e apagar.

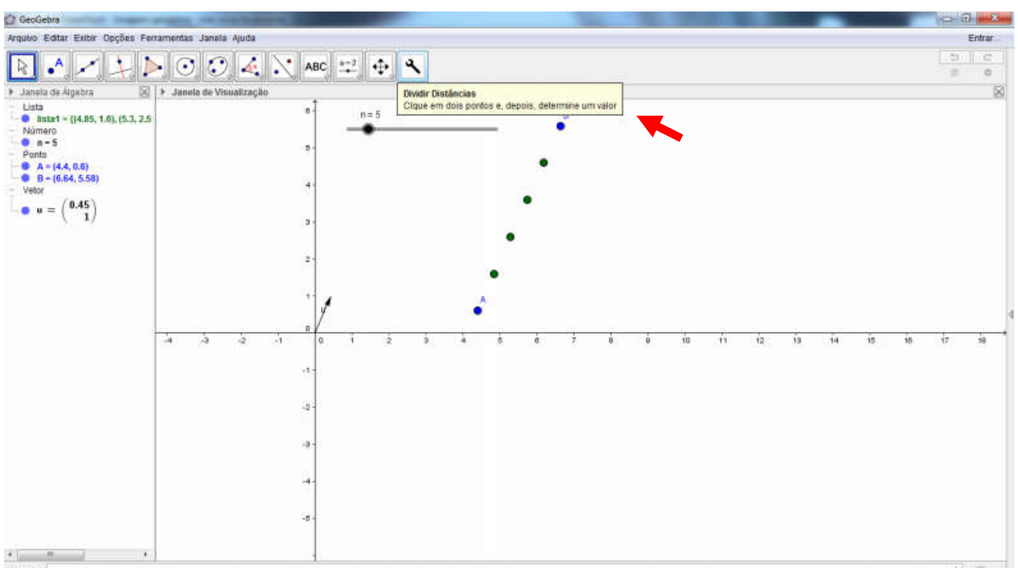


Figura 45: Ferramenta Divisão de Distâncias - 36
Fonte: o autor

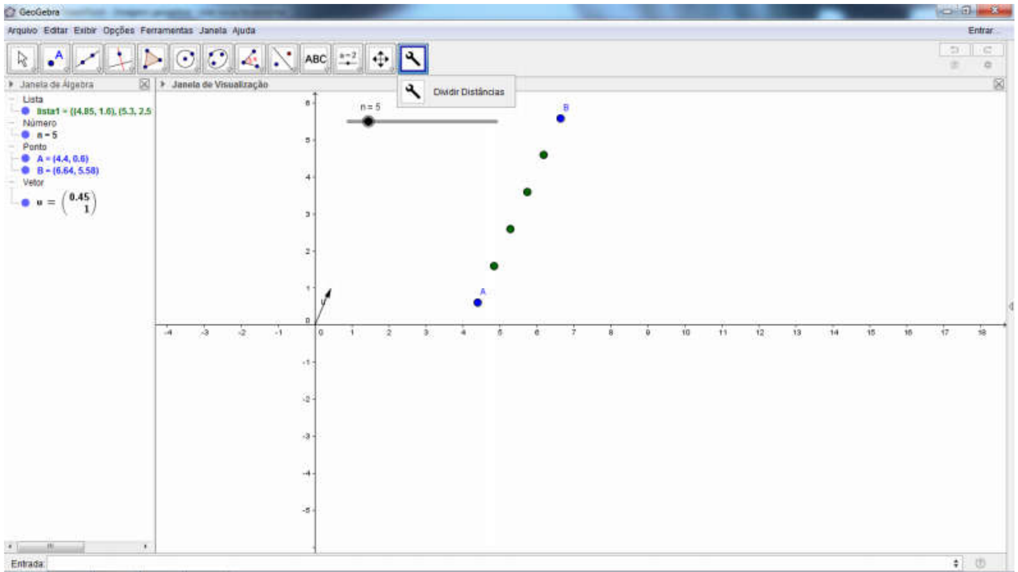


Figura 46: Ferramenta Divisão de Distâncias - 37
Fonte: o autor

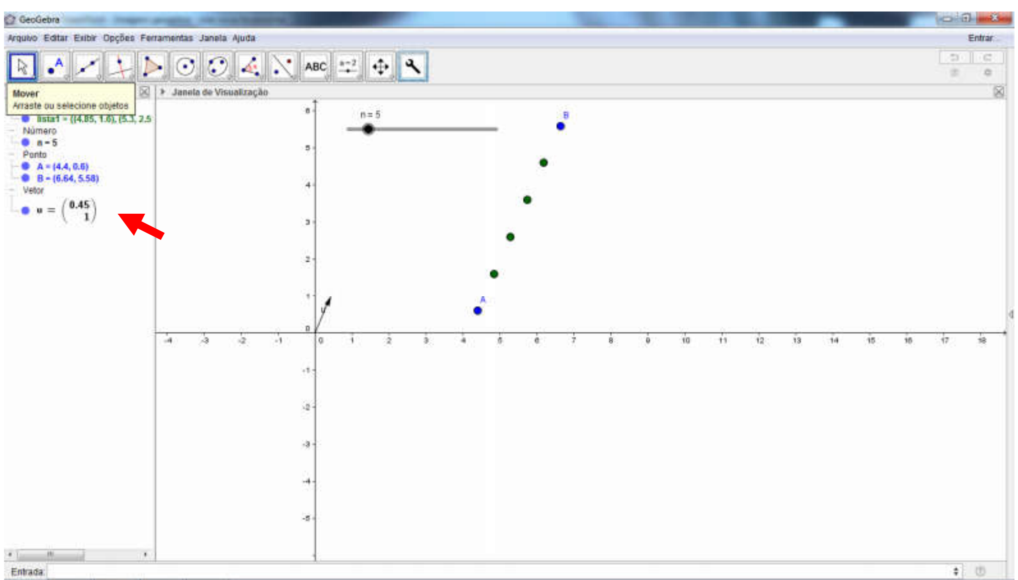


Figura 47: Ferramenta Divisão de Distâncias - 38
Fonte: o autor

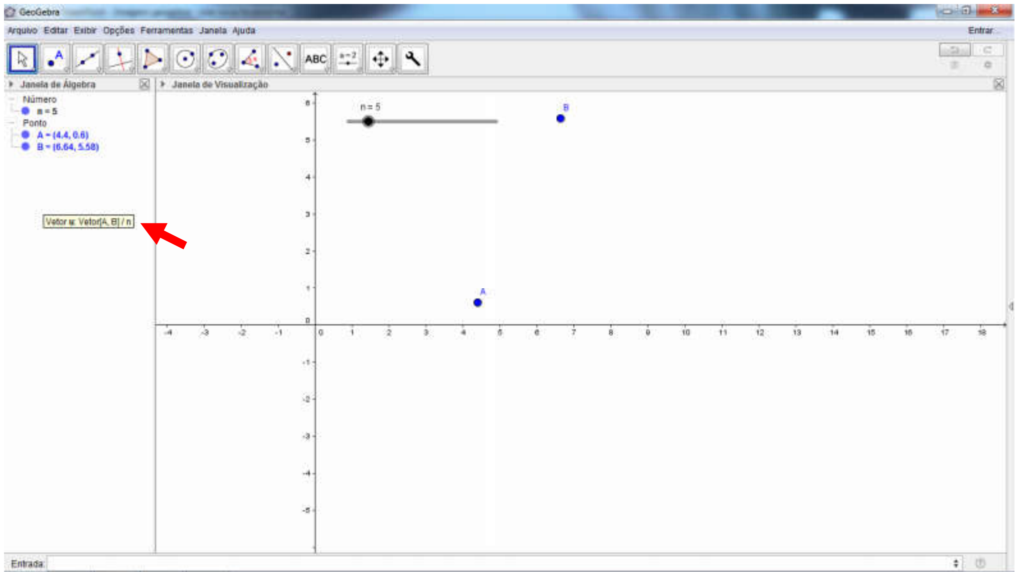


Figura 48: Ferramenta Divisão de Distâncias - 39
Fonte: o autor

vii. A ferramenta está pronta para ser usada. Os pontos A e B e o controle deslizante n ainda permanecem, porém sem nenhum vínculo com a ferramenta (o vetor u que era o elo entre os pontos inicias e a criação da ferramenta foi apagado).

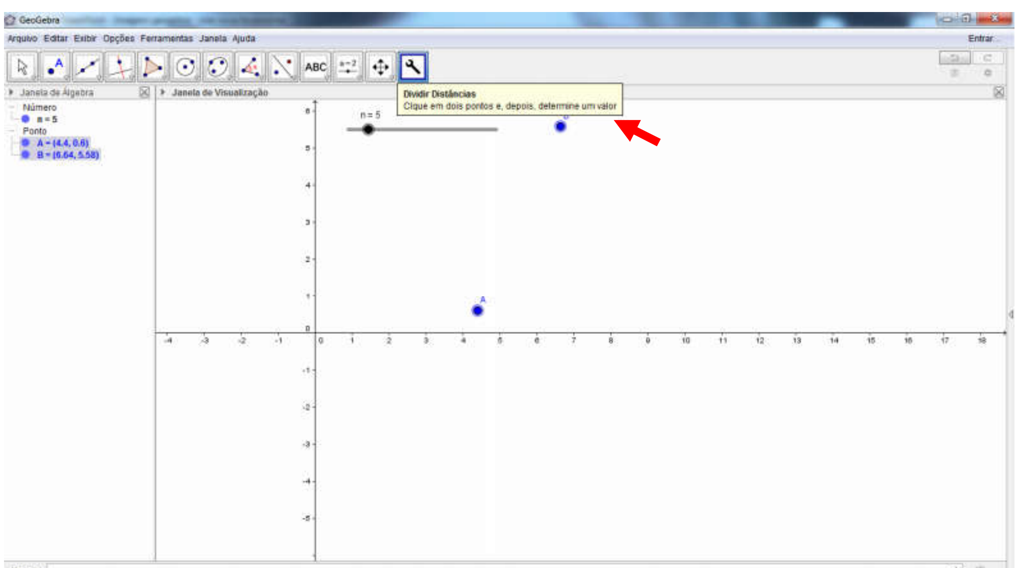


Figura 49: Ferramenta Divisão de Distâncias - 40
Fonte: o autor

viii. Testar a ferramenta. Selecionar a nova ferramenta e seguir o comando de ajuda (clique em dois pontos e determine um valor). Clicar em A e B, fará abrir uma caixa para digitar um valor, que poderá ser n (que é o controle deslizante) ou um valor numérico qualquer para definir em quantas partes a distância deverá ser dividida.

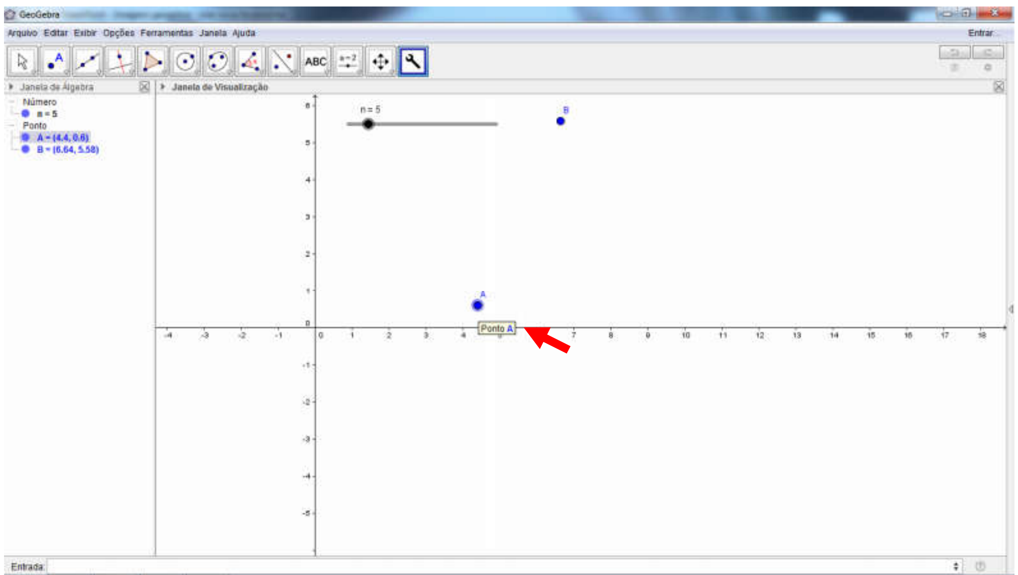


Figura 50: Ferramenta Divisão de Distâncias - 41
Fonte: o autor

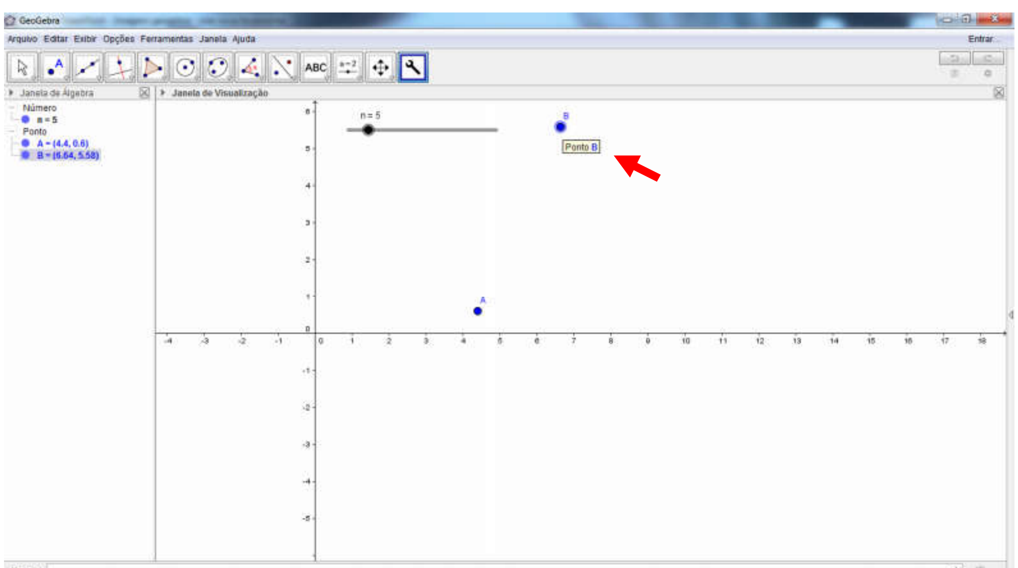


Figura 51: Ferramenta Divisão de Distâncias - 42
Fonte: o autor

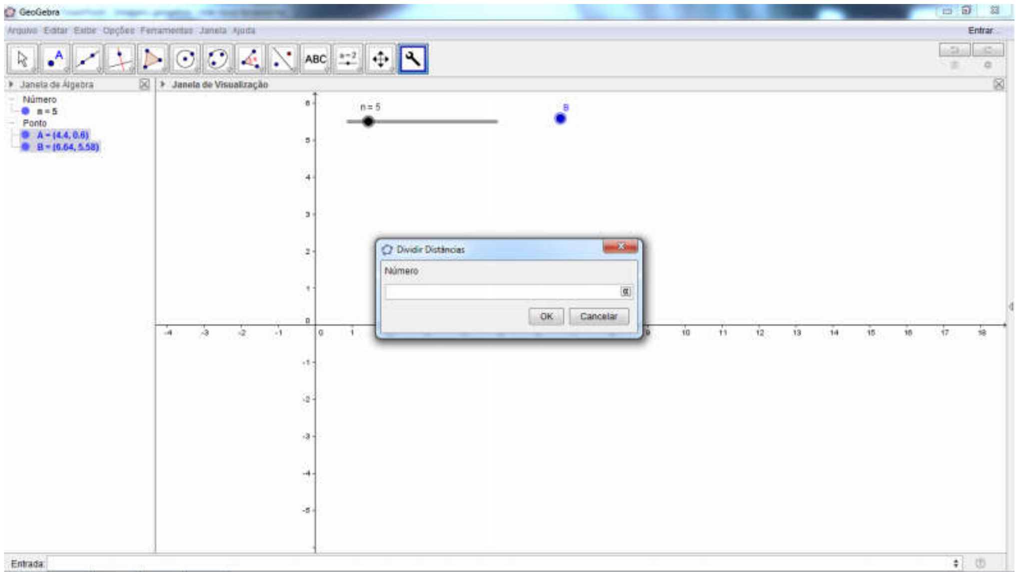


Figura 52: Ferramenta Divisão de Distâncias - 43
Fonte: o autor

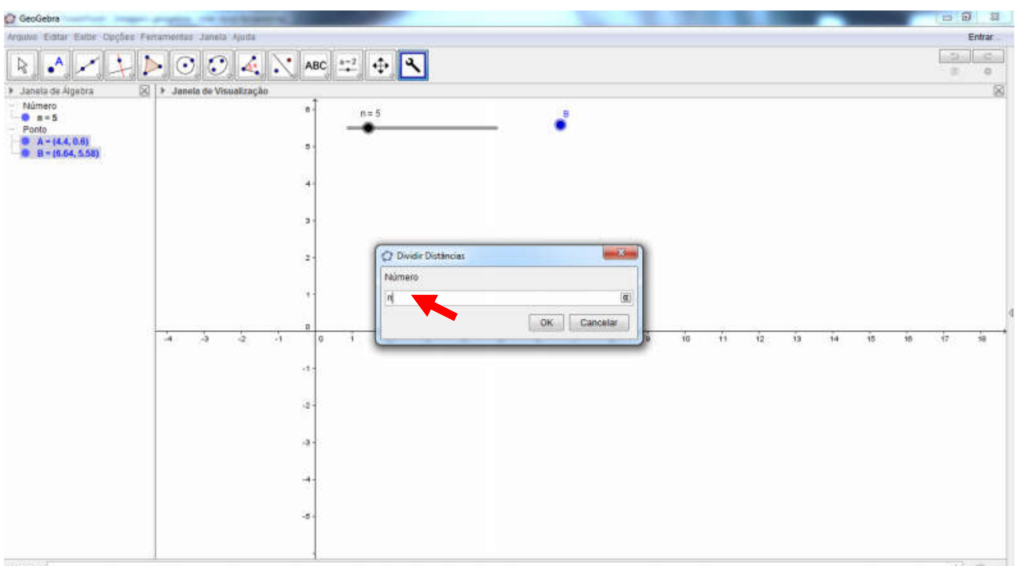


Figura 53: Ferramenta Divisão de Distâncias - 44
Fonte: o autor

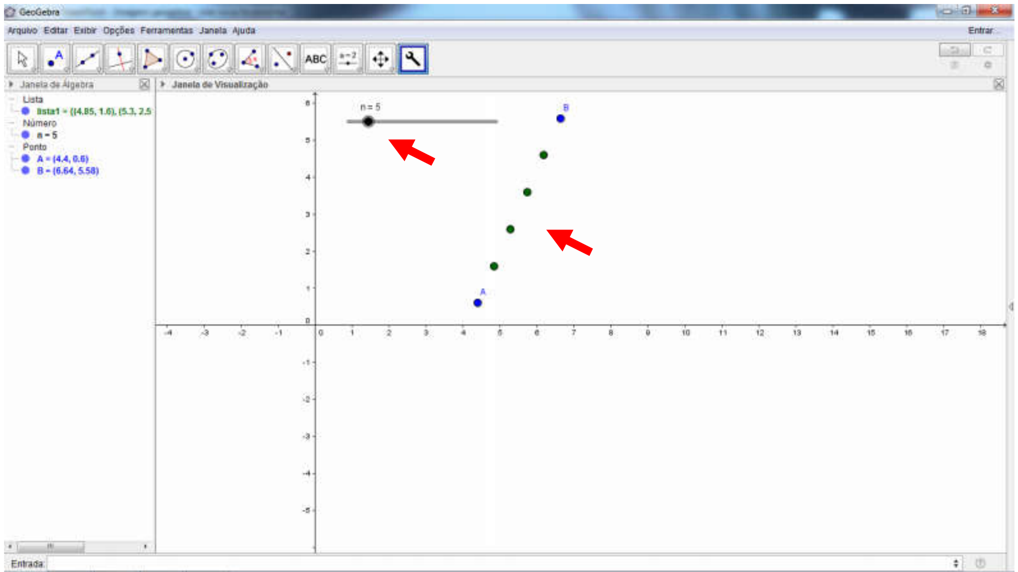


Figura 54: Ferramenta Divisão de Distâncias - 45
Fonte: o autor

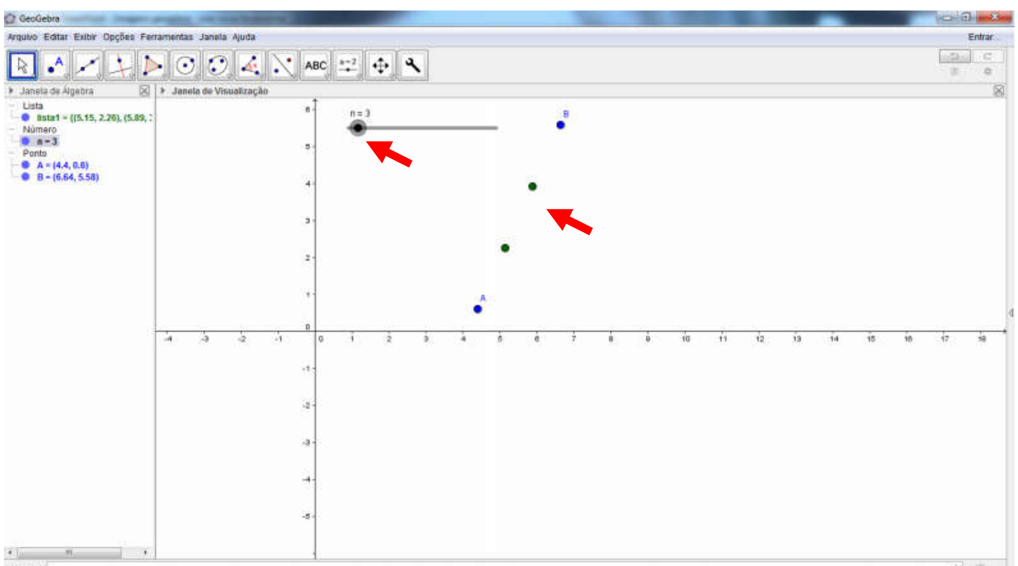


Figura 55: Ferramenta Divisão de Distâncias - 46
Fonte: o autor

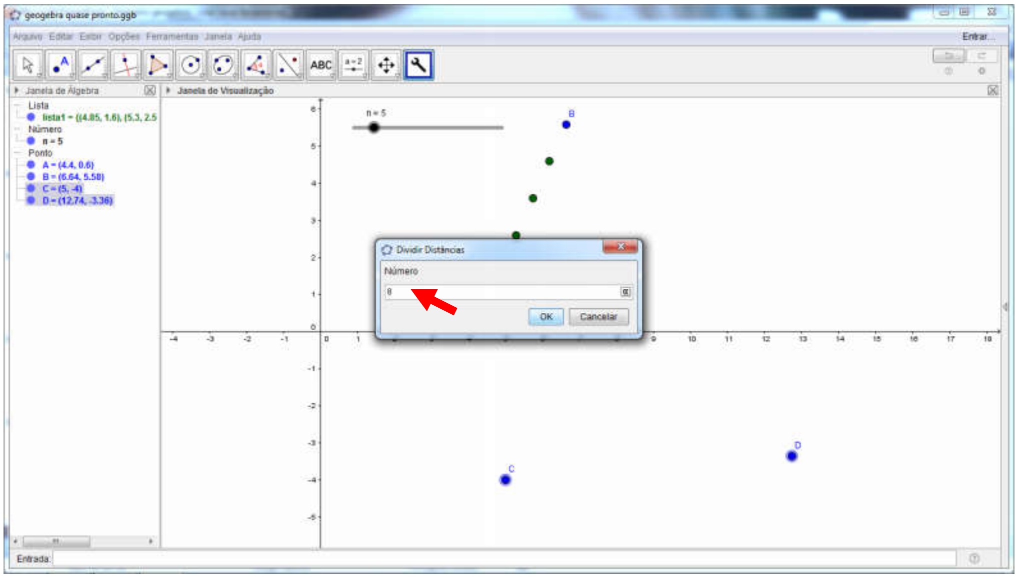


Figura 56: Ferramenta Divisão de Distâncias - 47
Fonte: o autor

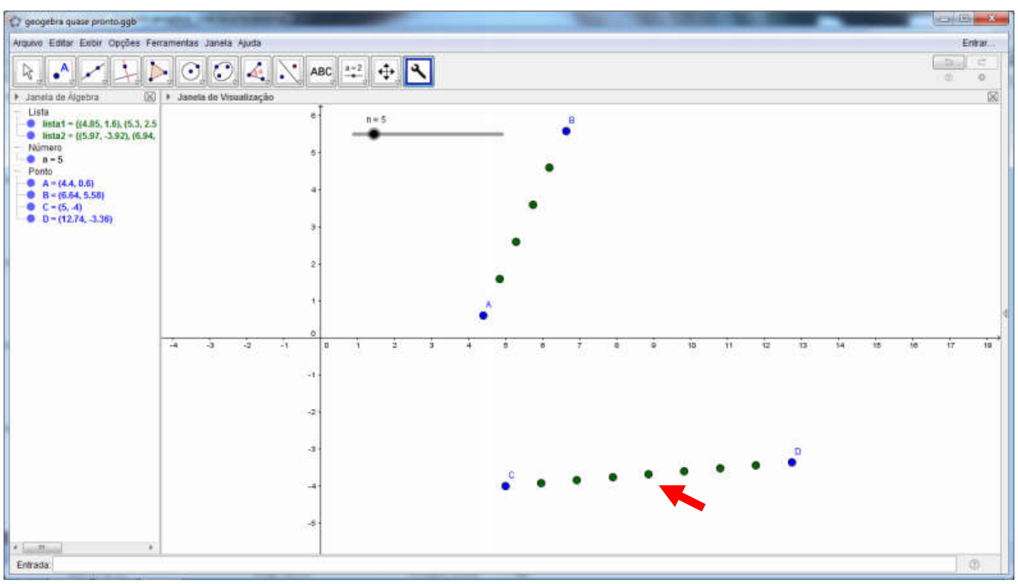


Figura 57: Ferramenta Divisão de Distâncias - 48
Fonte: o autor

ix. Apague todos os objetos remanescentes e terá em mãos o GeoGebra com uma nova ferramenta que será muito interessante para as atividades de comparações de medidas sugeridas nesta dissertação necessárias para os estudo de trigonometria.

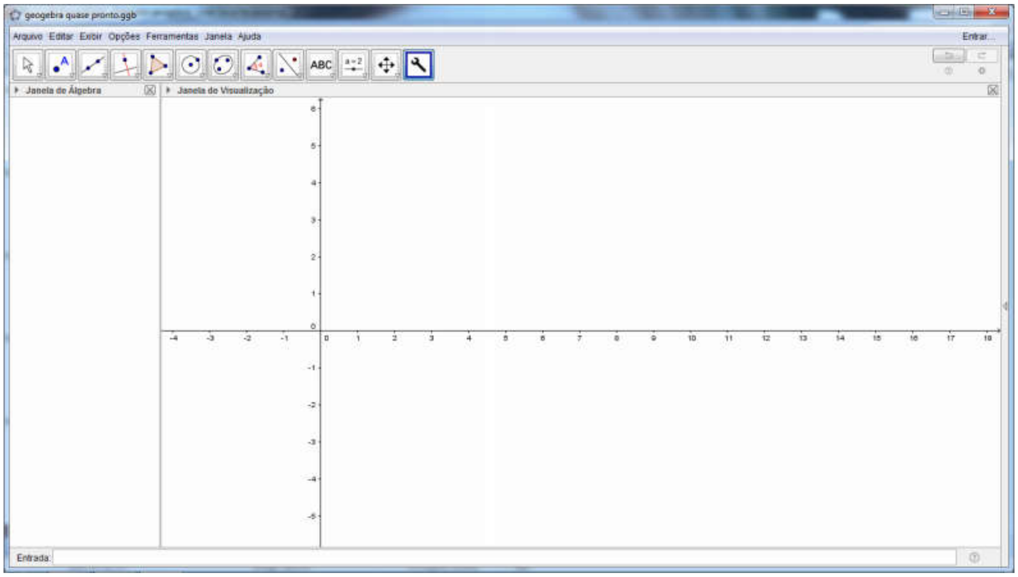


Figura 58: Ferramenta Divisão de Distâncias - 49
Fonte: o autor

x. Salve o arquivo para usar em construções que envolvam divisão de segmentos e comparações de medidas.

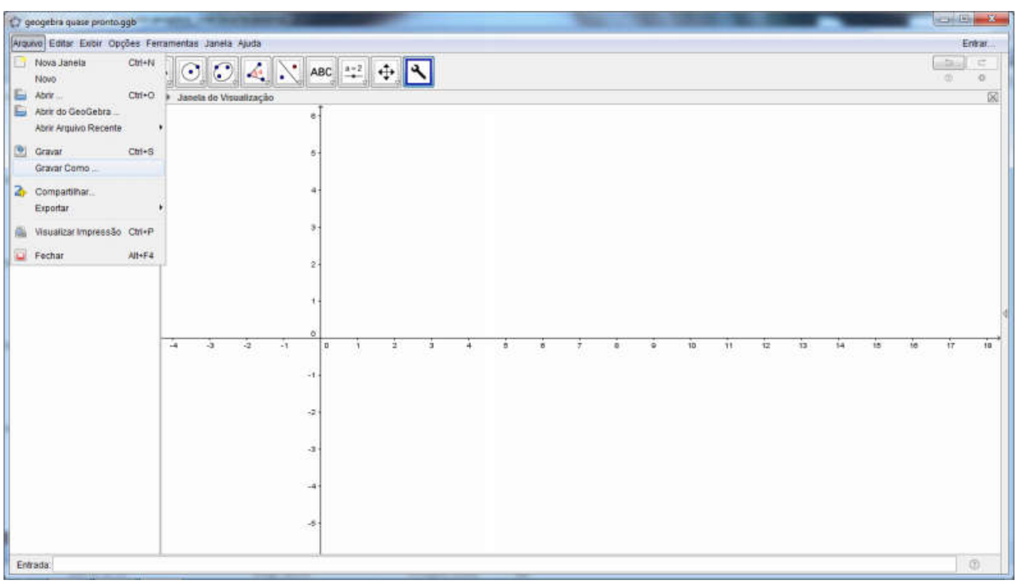


Figura 59: Ferramenta Divisão de Distâncias - 50
Fonte: o autor

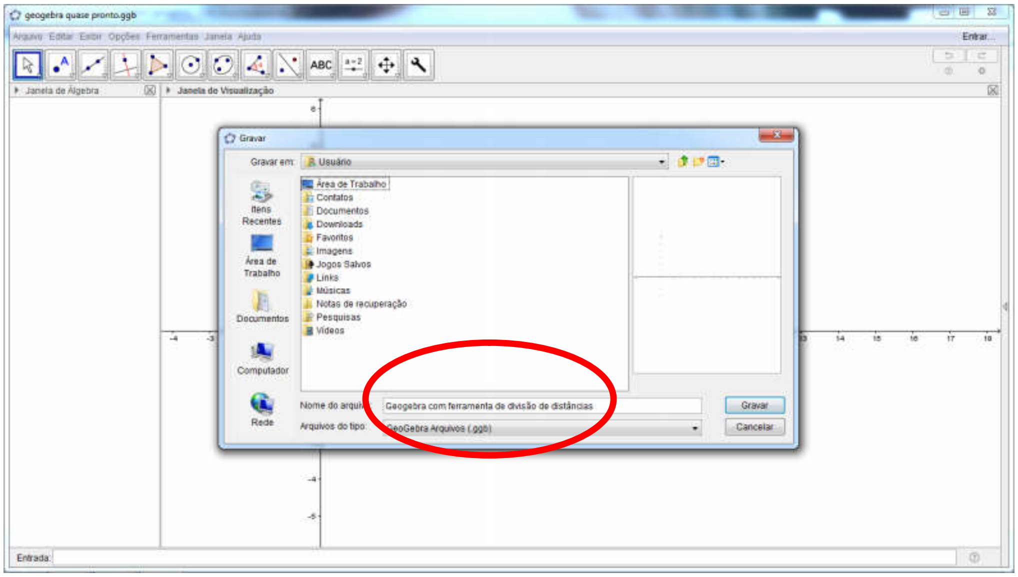


Figura 60: Ferramenta Divisão de Distâncias - 51
Fonte: o autor

CAPÍTULO 3

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Os estudos da trigonometria são, em muitos casos, norteados pelos conhecimentos sobre razões e proporções e suas consequências sobre as relações métricas geradas pela semelhança de triângulos. Este capítulo traz sugestões de atividades para relembrar sobre semelhança de triângulos e construções de figuras para visualização da proporcionalidade obtida através das figuras semelhantes.

3.1 VERIFICAÇÃO DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS DE TAMANHOS DIFERENTES POR MEIO DA SOBREPOSIÇÃO DE FIGURAS.

É necessário construir triângulos semelhantes para que estes possam ser sobrepostos, facilitando a verificação da congruência dos ângulos e a visualização da existência de semelhança, sendo bastante interessante dispor de algumas peças previamente construídas em materiais diversos como madeira, EVA, papel cartão, etc..

A primeira atividade sugerida é a construção individualizada ou em duplas, através de processos geométricos simples e práticos de ampliação/redução, como quadriculação e homotetia, recomendando aos alunos a despreocupação com os possíveis valores das medidas dos comprimentos dos lados dos triângulos, apenas desenhar o primeiro triângulo, definir o centro de homotetia e gerar a ampliação, iniciando com uma duplicação das medidas.

Feito isso, realizar a observação das medidas dos comprimentos dos lados dos dois triângulos, verificando que existe a semelhança e, para essa verificação pode-se recortar os triângulos e sobrepor o menor sobre o maior, centralizando, justapondo os ângulos correspondentes para que realmente se perceba a semelhança entre as figuras.

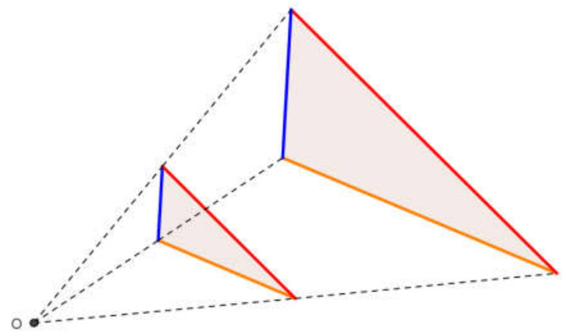


Figura 61: Semelhança de Triângulos - 2
Fonte: o autor

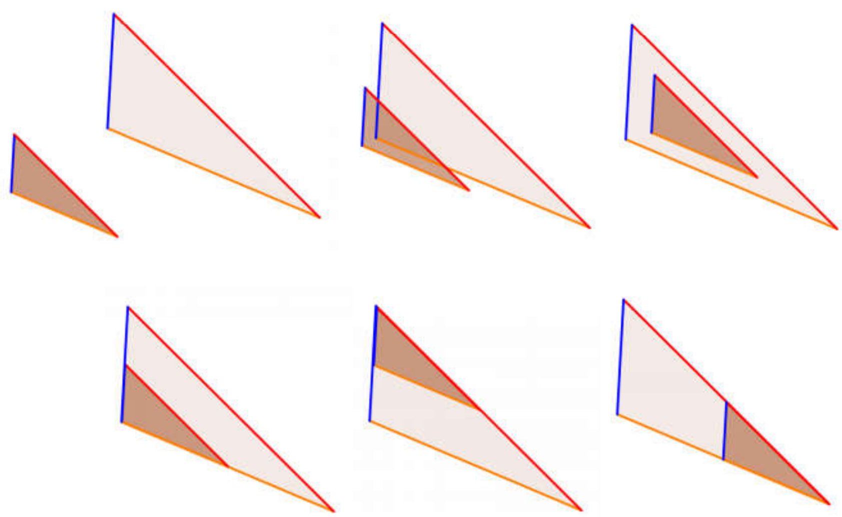


Figura 62: Semelhança de Triângulos - 3
Fonte: o autor

3.2 VERIFICAÇÃO DA RAZÃO DE PROPORCIONALIDADE ENTRE OS TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Após a verificação da semelhança, segue-se a comparação entre as medidas dos lados correspondentes dos triângulos, verificando facilmente que, como as medidas do triângulo original correspondem à metade das medidas dos lados correspondentes do triângulo obtido com o processo de duplicação.

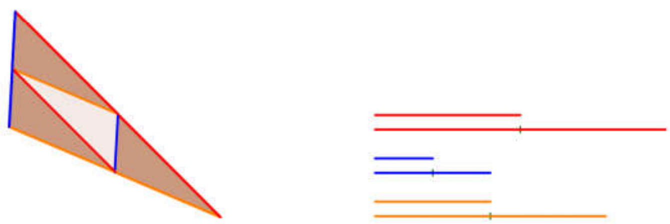


Figura 63: Semelhança de Triângulos - 4
Fonte: o autor

Feitas as devidas comparações, fica a sugestão de lançar medidas para que os alunos respondam mentalmente, por exemplo: se o lado azul do menor triângulo é x então o lado azul do maior triângulo é ...., e por fim pedir que tomem a medida utilizando a régua graduada, calculando a medida correspondente do outro triângulo e conferindo com a régua.

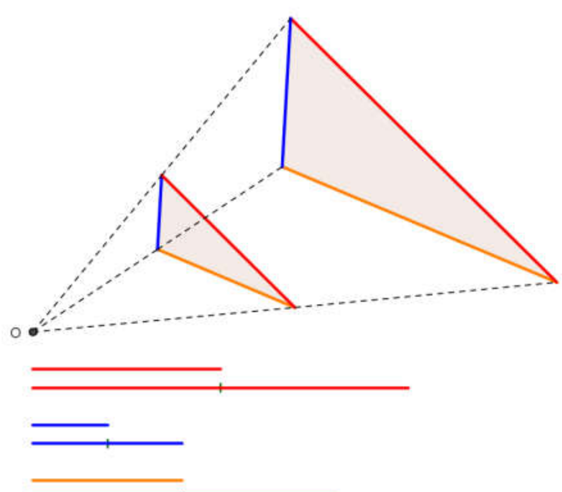


Figura 64: Semelhança de Triângulos - 5
Fonte: o autor

Fica fácil observar que as medidas dos segmentos menores cabem duas vezes sobre as medidas dos segmentos maiores, gerando a razão 1:2 ou 2:1., e pode-se repetir o processo com outras razões, triplicando por exemplo.

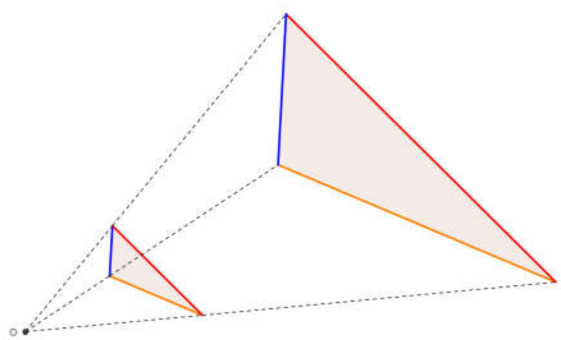


Figura 65: Semelhança de Triângulos - 6
Fonte: o autor

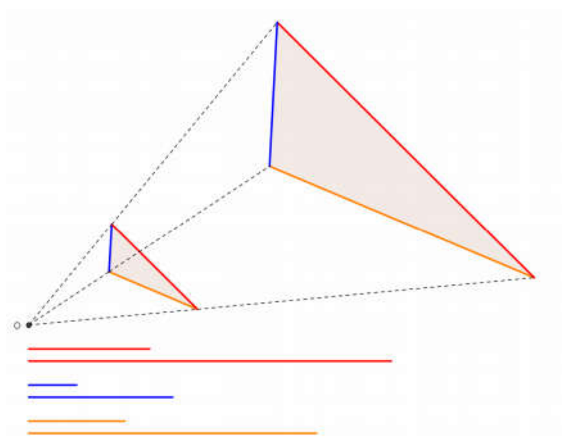


Figura 66: Semelhança de Triângulos - 7
Fonte: o autor

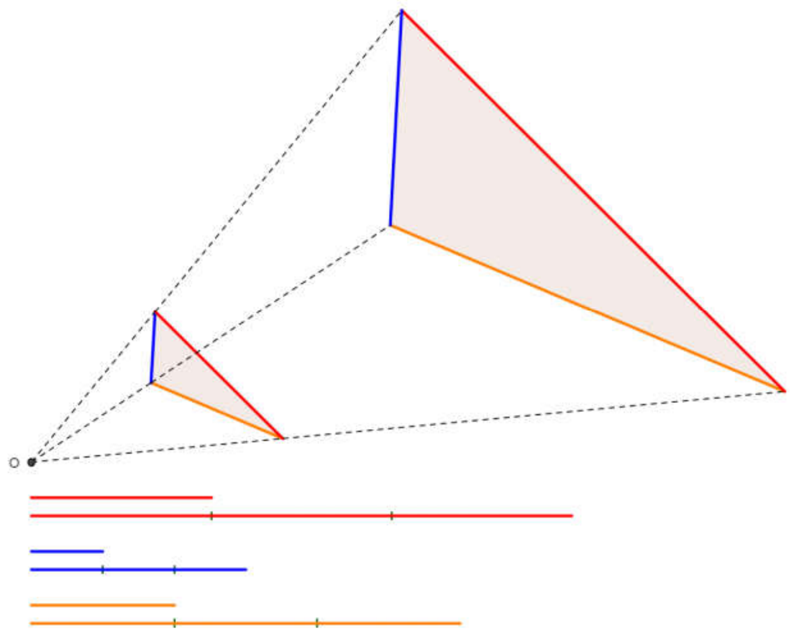


Figura 67: Semelhança de Triângulos - 8
Fonte: o autor

Percebe-se que os segmentos menores estão na razão de 1 para 3 em relação aos segmentos maiores.

Propor, depois destas verificações, atividades envolvendo valores numéricos para serem calculados mentalmente e atividades com cálculos mais apurados, utilizando algoritmos algébricos de razões e proporções.

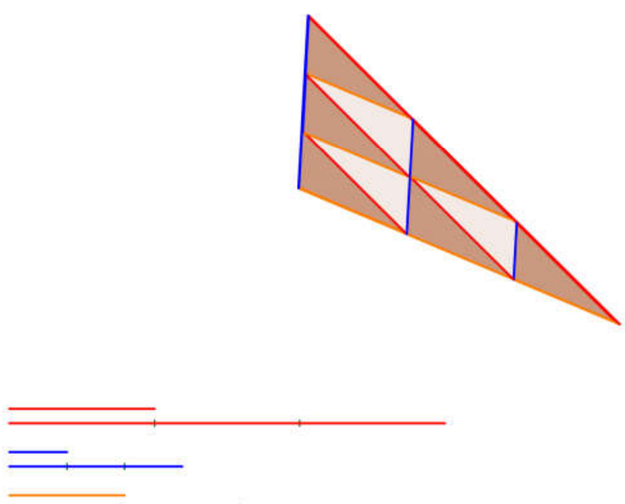


Figura 68: Semelhança de Triângulos - 9
Fonte: o autor

Na mesma atividade, dentre os diversos materiais sugeridos temos a madeira, porém fica mais difícil confeccionar em sala de aula. Se for possível o professor pode dispor de triângulos em madeira para levar para a sala de aula permitindo que os alunos manipulem um material de densidade maior, sólido (na verdade cortando os triângulos teremos prismas de base triangular e, o contato com as arestas permite aos alunos sentir a congruência dos ângulos através do tato).

As fotos ilustram a confecção de triângulos semelhantes em madeira tipo eucatex.

Figura 69: Semelhança de Triângulos - 10
Fonte: o autor

i. Cortar um triângulo qualquer.

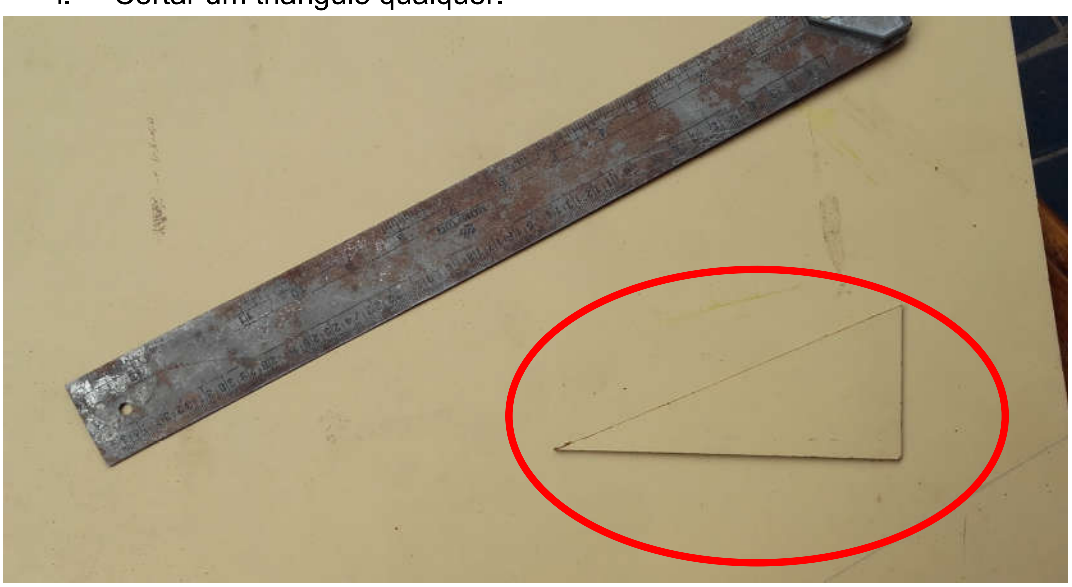


Figura 70: Semelhança de Triângulos - 11
Fonte: o autor

Aproveitamos o canto da peça de madeira obtendo um triângulo retângulo.

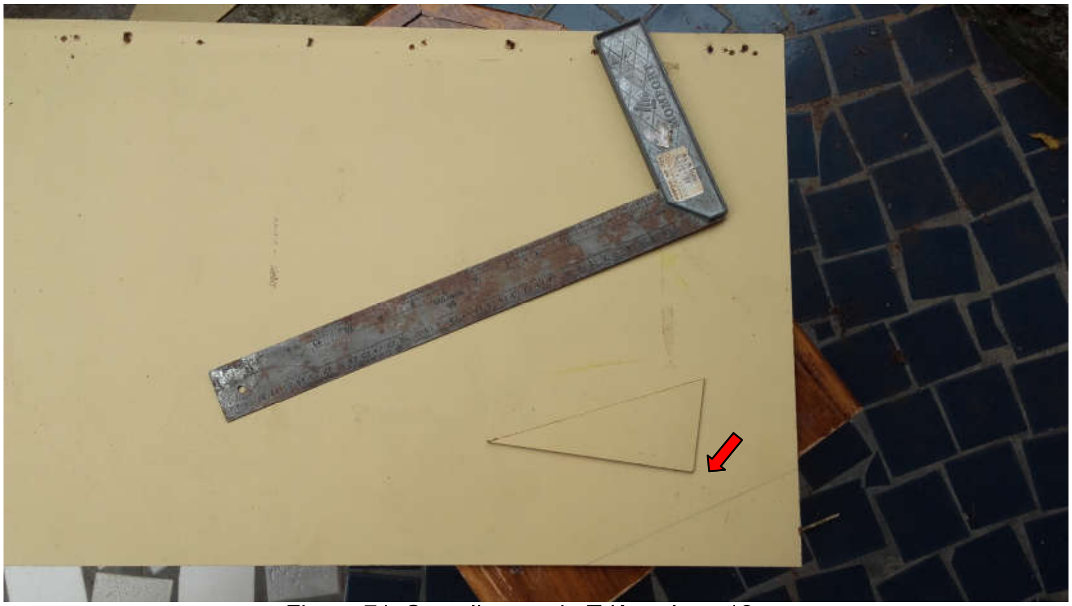


Figura 71: Semelhança de Triângulos - 12
Fonte: o autor

ii. Para obtermos um segundo triângulo devemos duplicar um dos lados do primeiro triângulo cuidando que os lados coincidam para que os ângulos tenham as mesmas medidas.

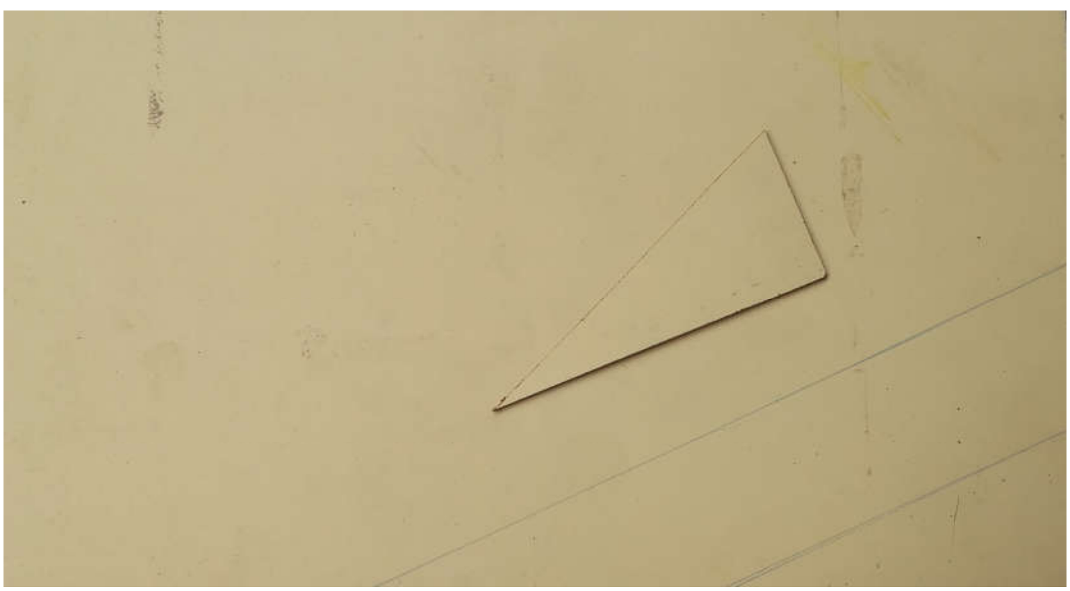


Figura 72: Semelhança de Triângulos - 13
Fonte: o autor

iii. Recortar o segundo triângulo, maior que o primeiro, com os ângulos congruentes, o que garante a semelhança que será verificada pelos alunos posteriormente.

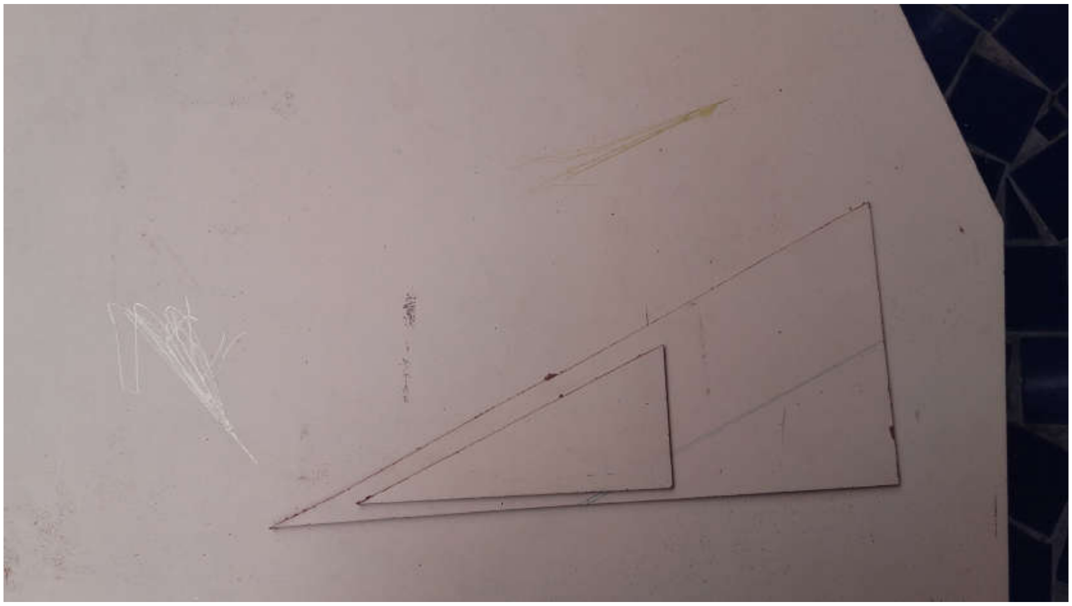


Figura 73: Semelhança de Triângulos - 14
Fonte: o autor

Já temos em mão triângulos semelhantes, com razão de semelhança de 2 para 1, ou 1 para 2, que poderão ser usados para manipulação dos alunos favorecendo assim a fixação dos conceitos envolvidos.

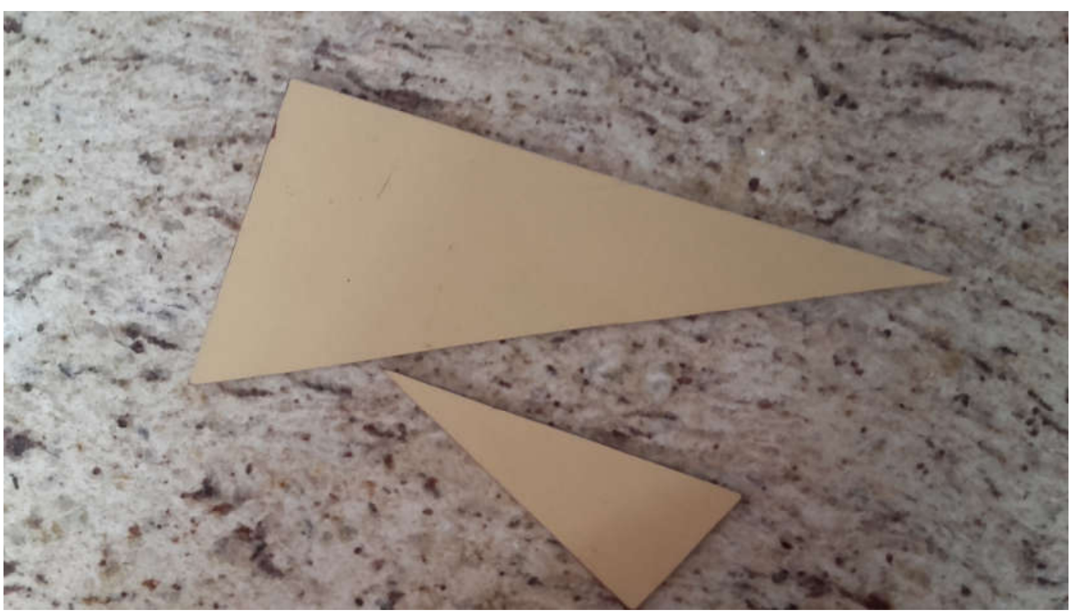


Figura 74: Semelhança de Triângulos - 15
Fonte: o autor

Nas fotos a seguir ilustramos uma sequência lógica para a manipulação visando facilitar a visualização da semelhança e a conclusão que o triângulo maior tem as medidas dos comprimentos de seus lados iguais ao dobro das medidas dos comprimentos dos lados correspondentes do triângulos menor.

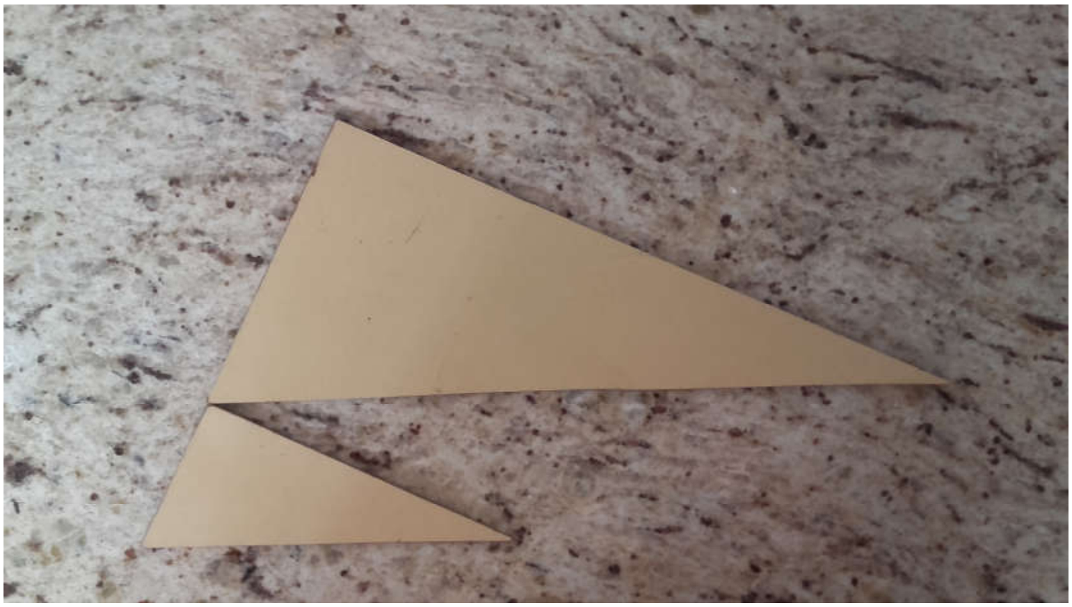


Figura 75: Semelhança de Triângulos - 16
Fonte: o autor

Figura 76: Semelhança de Triângulos - 17
Fonte: o autor

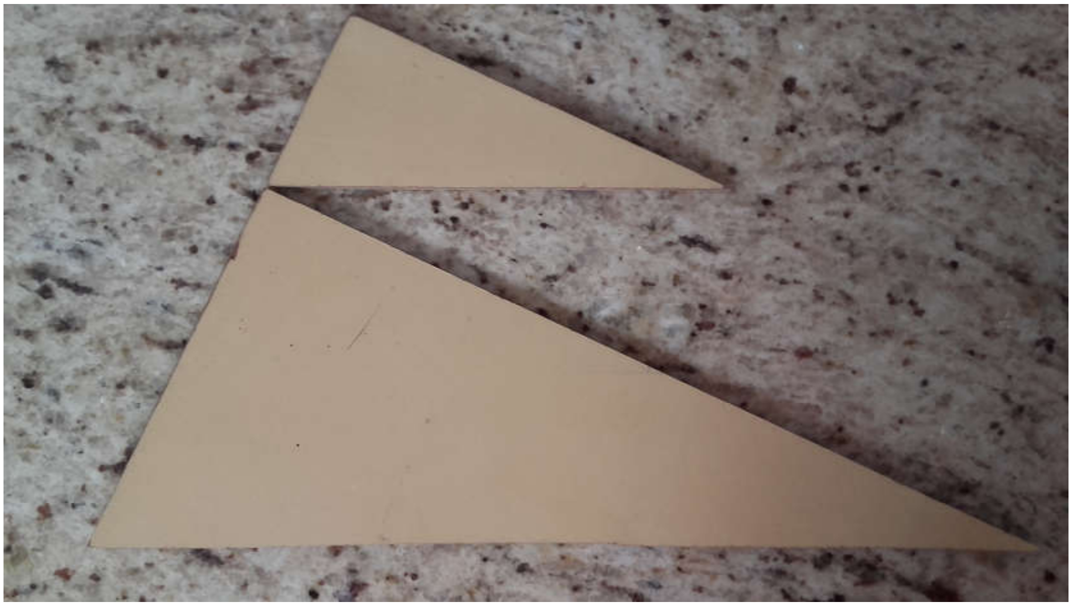


Figura 77: Semelhança de Triângulos - 18
Fonte: o autor

Figura 78: Semelhança de Triângulos - 19
Fonte: o autor

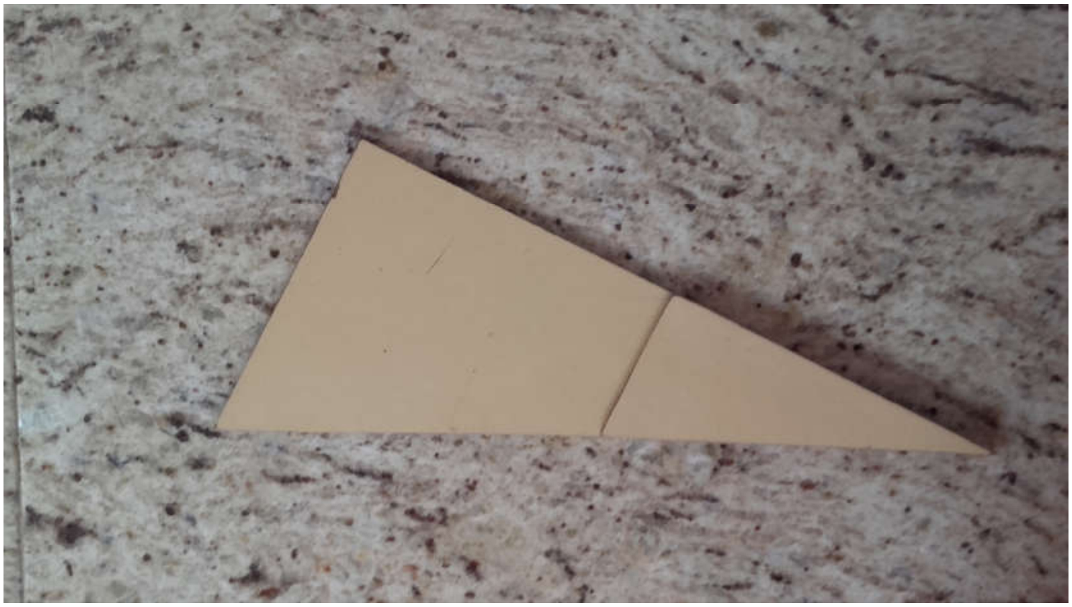


Figura 79: Semelhança de Triângulos - 20
Fonte: o autor

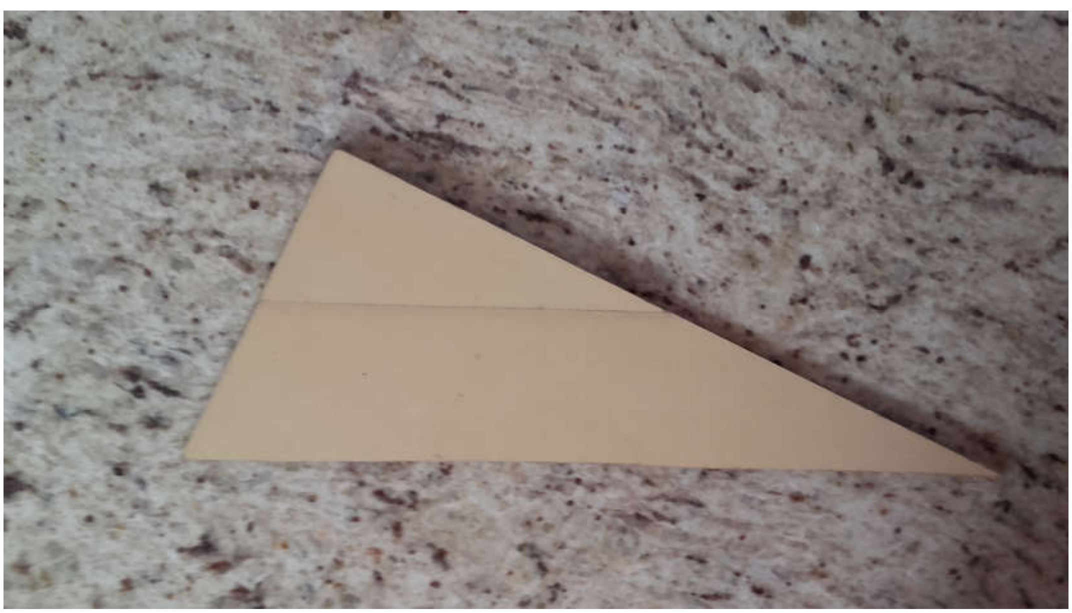


Figura 80: Semelhança de Triângulos - 21
Fonte: o autor

Figura 81: Semelhança de Triângulos - 22
Fonte: o autor

Figura 82: Semelhança de Triângulos - 23
Fonte: o autor

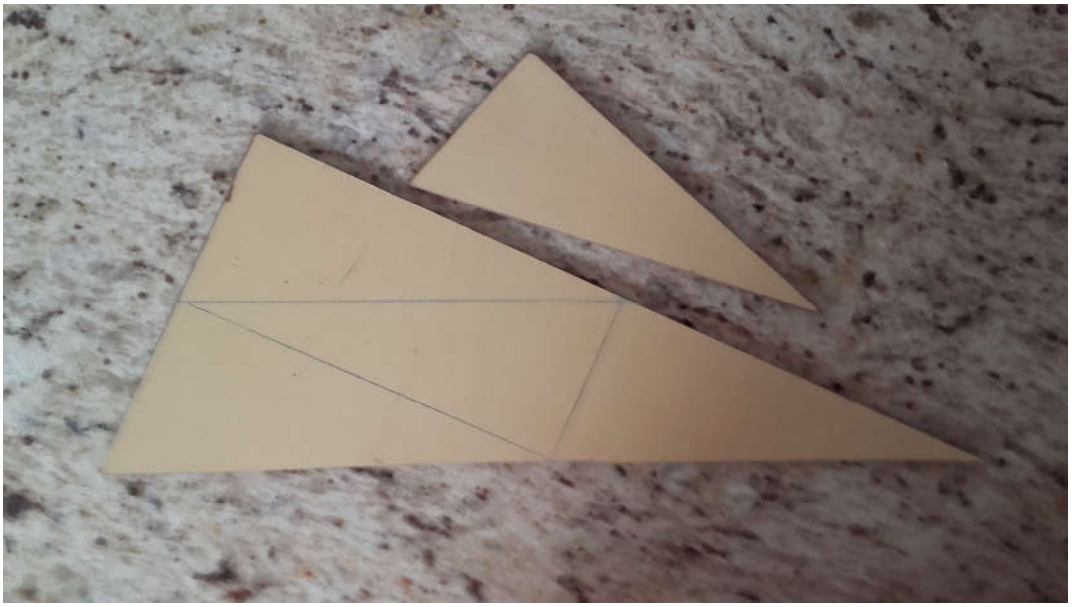


Figura 83: Semelhança de Triângulos - 24
Fonte: o autor

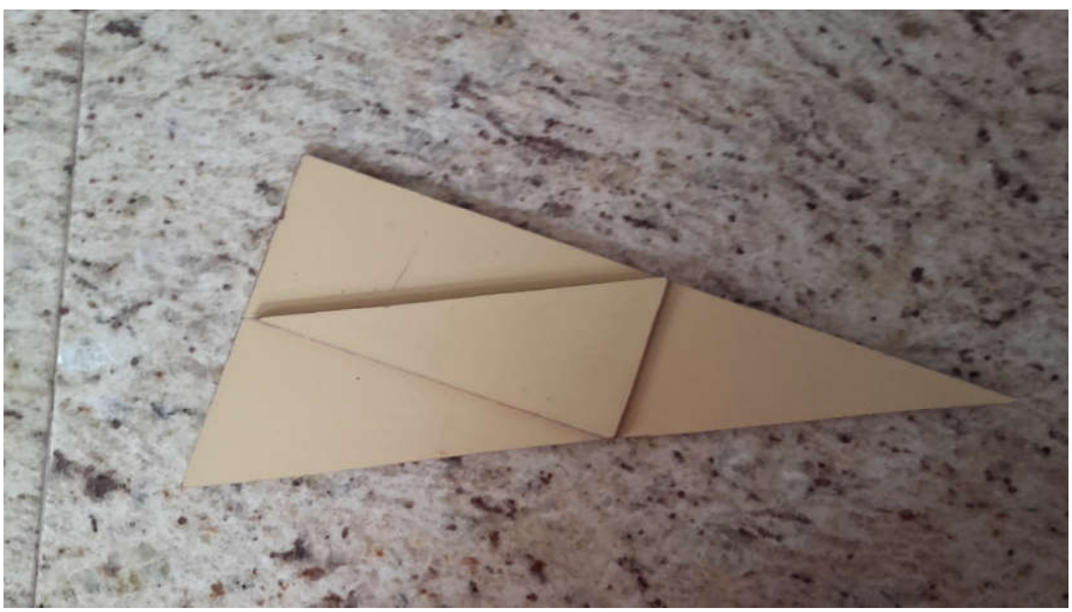


Figura 84: Semelhança de Triângulos - 25
Fonte: o autor

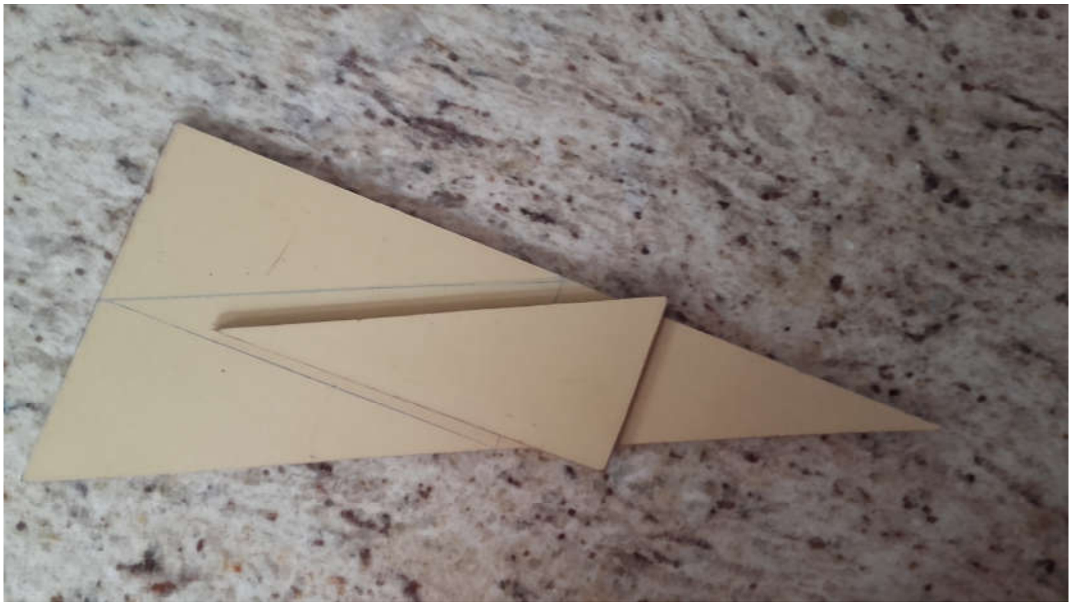


Figura 85: Semelhança de Triângulos - 26
Fonte: o autor

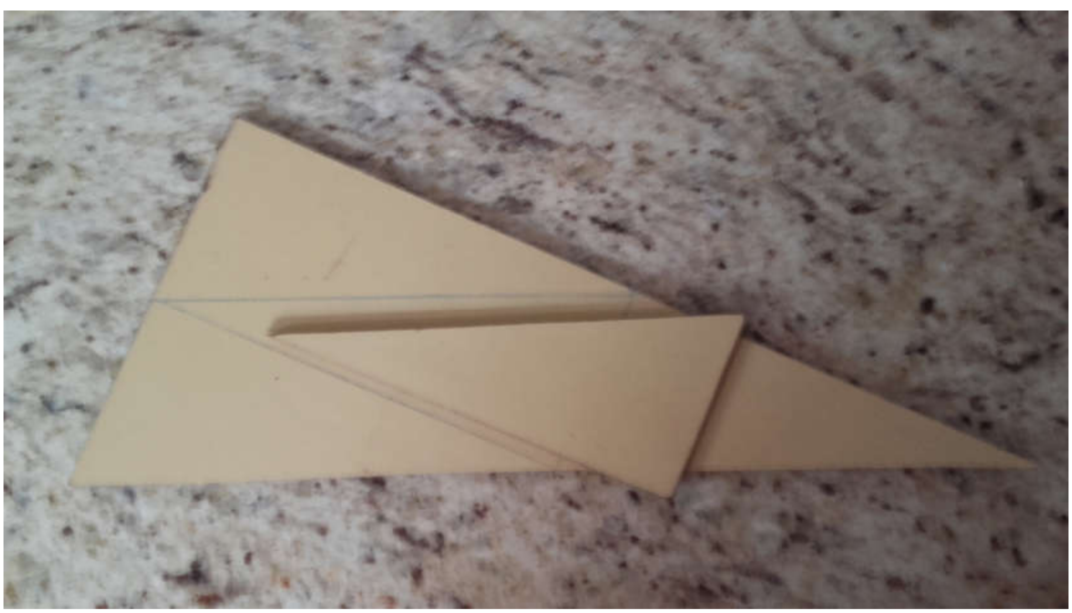


Figura 86: Semelhança de Triângulos - 27
Fonte: o autor

3.3 CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES UTILIZANDO O GEOGEBRA

Para melhor compreensão e fixação uma sugestão é que sejam desenvolvidos pelos alunos desenhos com homotetia utilizando o software GeoGebra.

Segue roteiro com imagens para a construção de triângulos semelhantes utilizando o GeoGebra.

A imagem a seguir mostra a construção já finalizada, com o triângulo ABC de lados a, b e c fixos e o triângulo A'B'C' de lados a', b' e c' semelhante ao primeiro e variável em função do valor gerado pelo controle deslizante k, e os segmentos horizontais f, h e j que têm o mesmo comprimento de a, b e c, respectivamente, mais os segmentos g, i e l que variam igualmente aos segmentos a', b' e c' e podem ser divididos em partes iguais em função do valor do controle deslizante n para facilitar as comparações visuais das razões de semelhança definidas pela variação do valor de k.

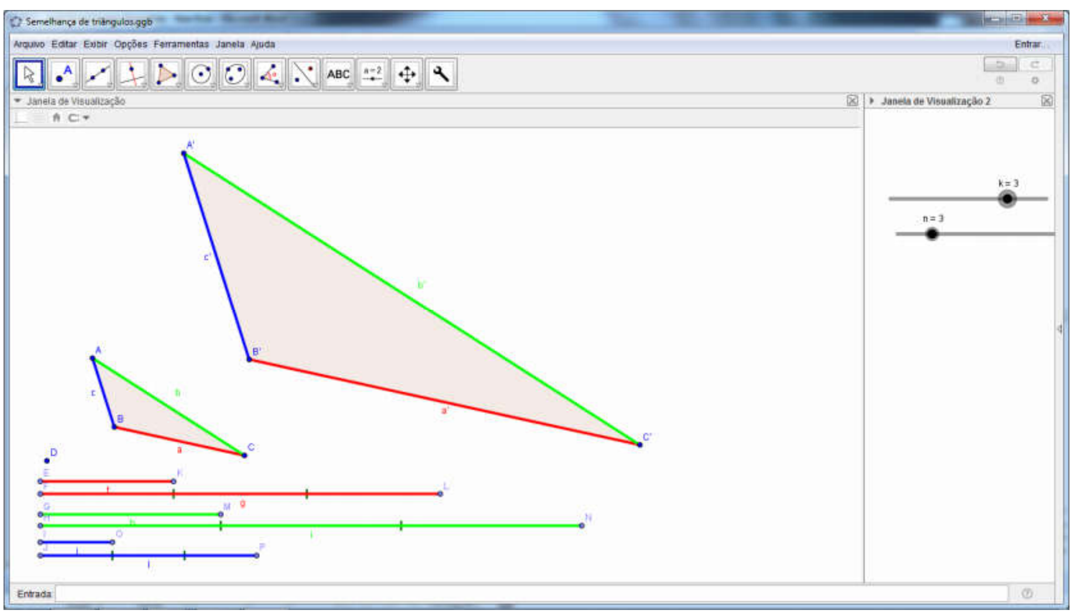


Figura 87: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 1
Fonte: o autor

i. Construir um triângulo ABC qualquer usando a ferramenta polígonos.

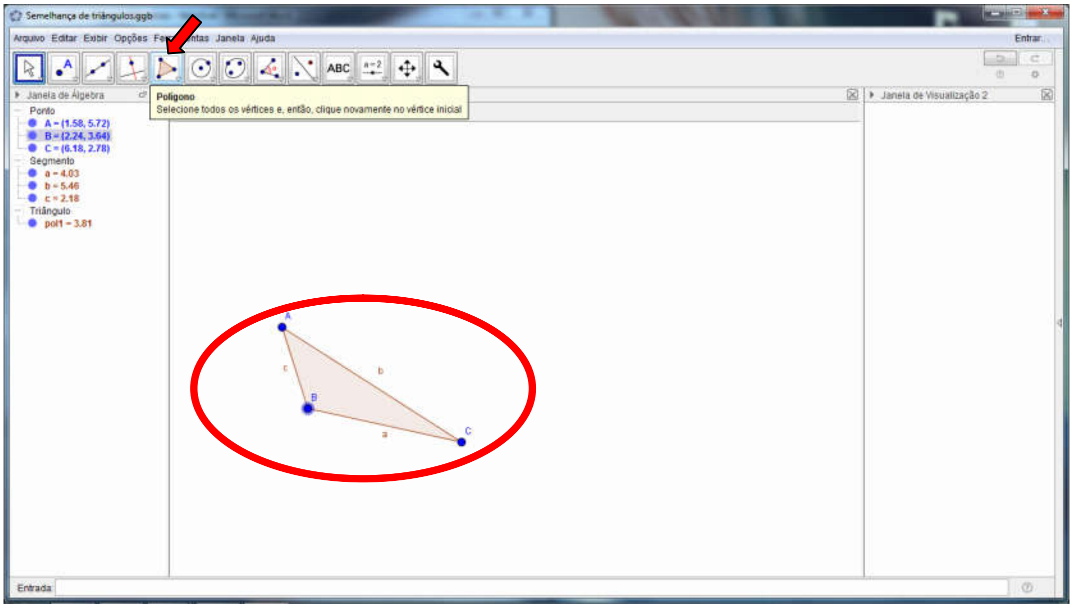


Figura 88: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 2
Fonte: o autor

ii. Determinar um controle deslizante k, variando de 0 até 4 de 0,25 e 0,25.

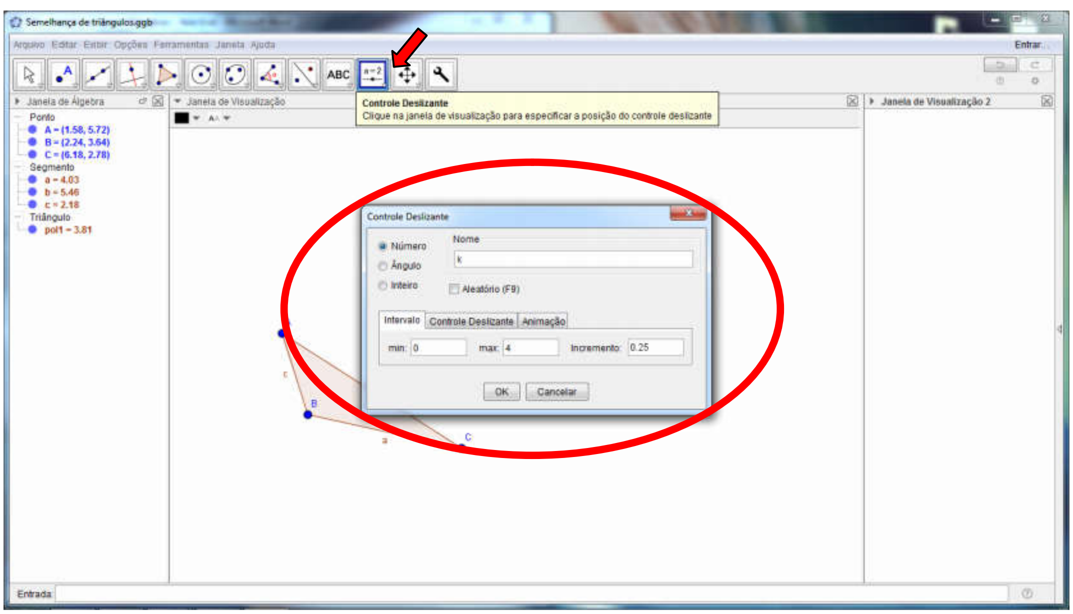


Figura 89: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 3
Fonte: o autor

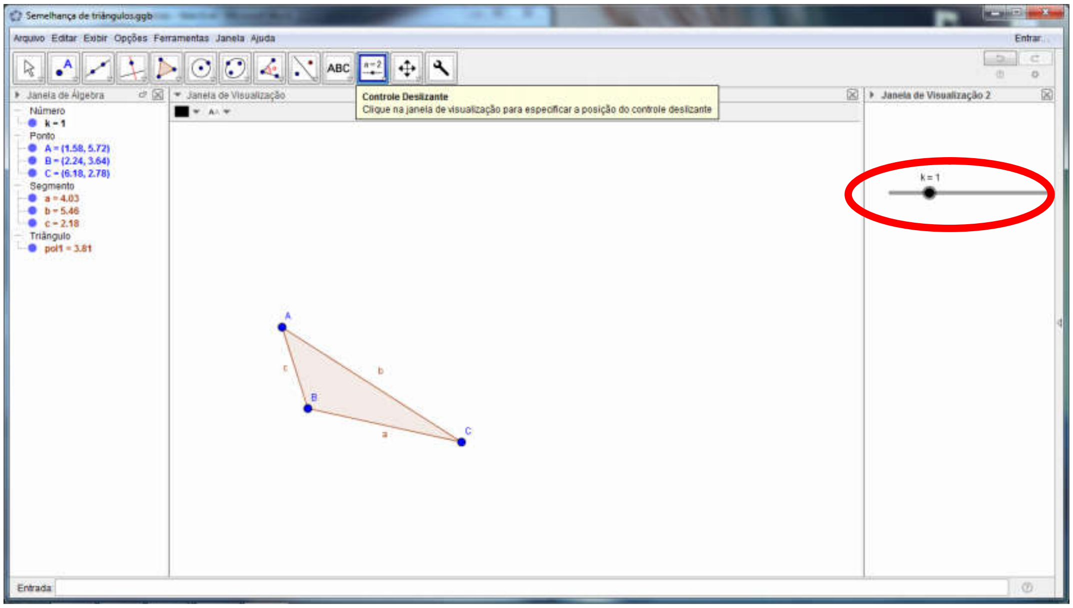


Figura 90: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 4
Fonte: o autor

iii. Marcar um ponto D para o foco de homotetia.

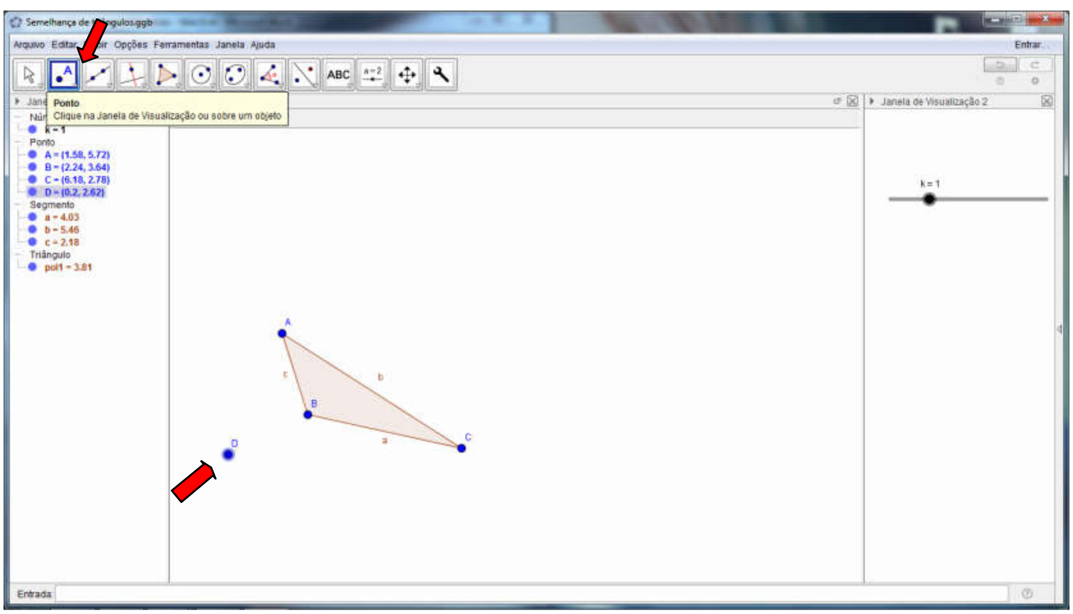


Figura 91: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 5
Fonte: o autor

iv. Com a ferramenta homotetia criar o triângulo A'B'C', semelhante ao triângulo ABC, segundo uma razão de homotetia (Fator) k.

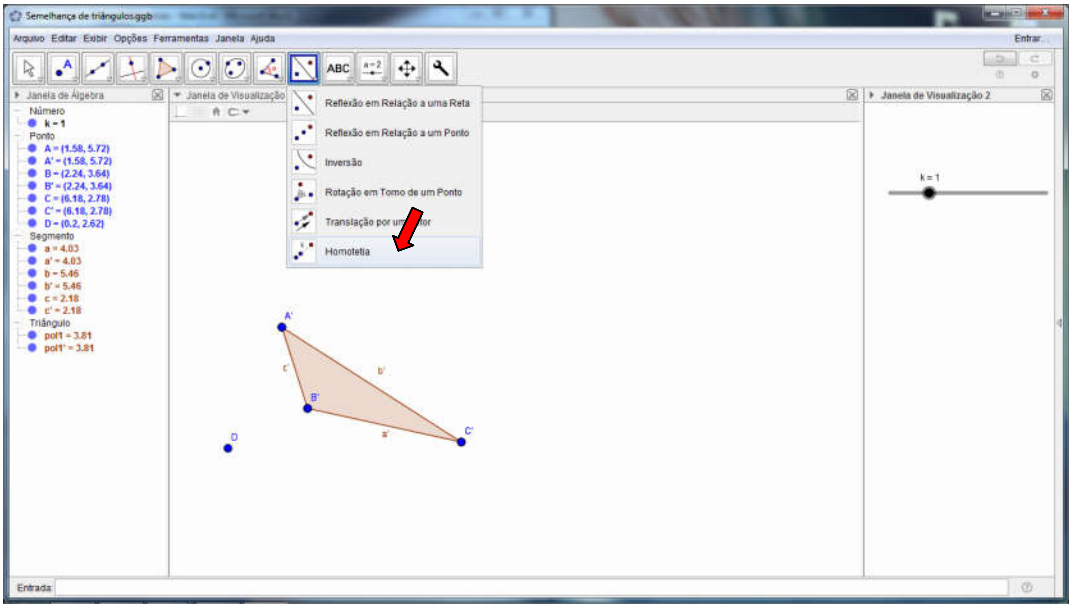


Figura 92: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 6
Fonte: o autor

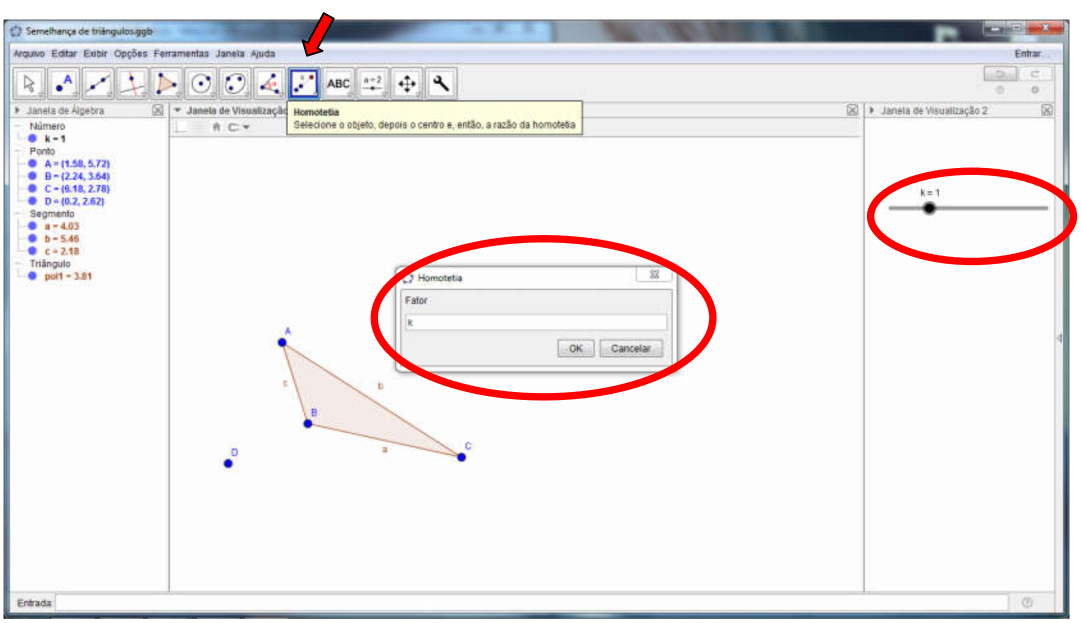


Figura 93: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 7
Fonte: o autor

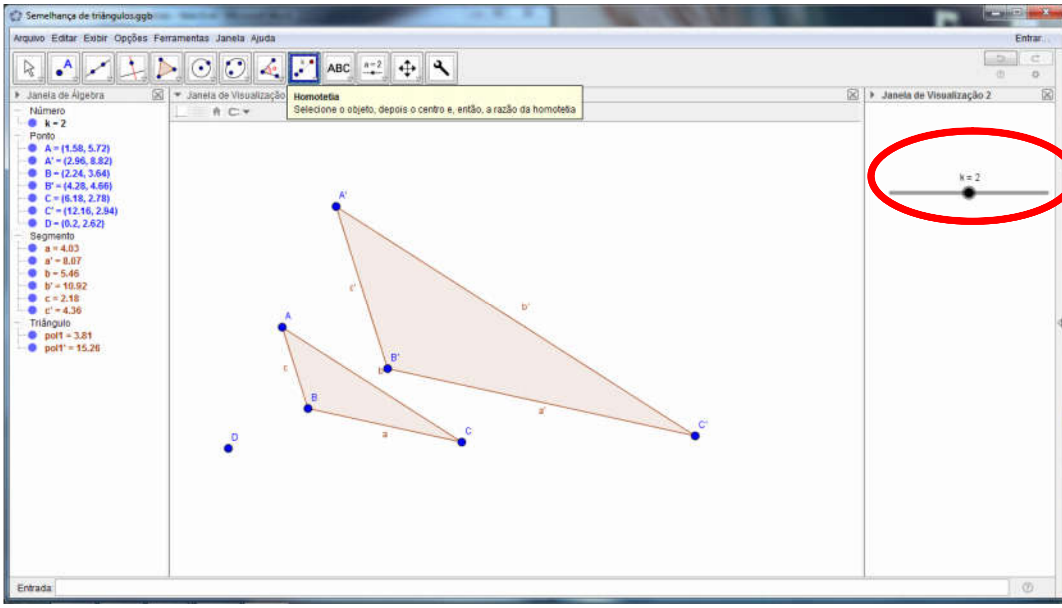


Figura 94: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 8
Fonte: o autor

v. Para verificar que a razão de proporção k se transfere a cada um dos lados da figura, determinar um controle deslizante n, variando de 1 a 10 com 1 de incremento que será usado para dividir os segmentos facilitando a comparação visual sem necessidade de dividir as medidas com valores numéricos.

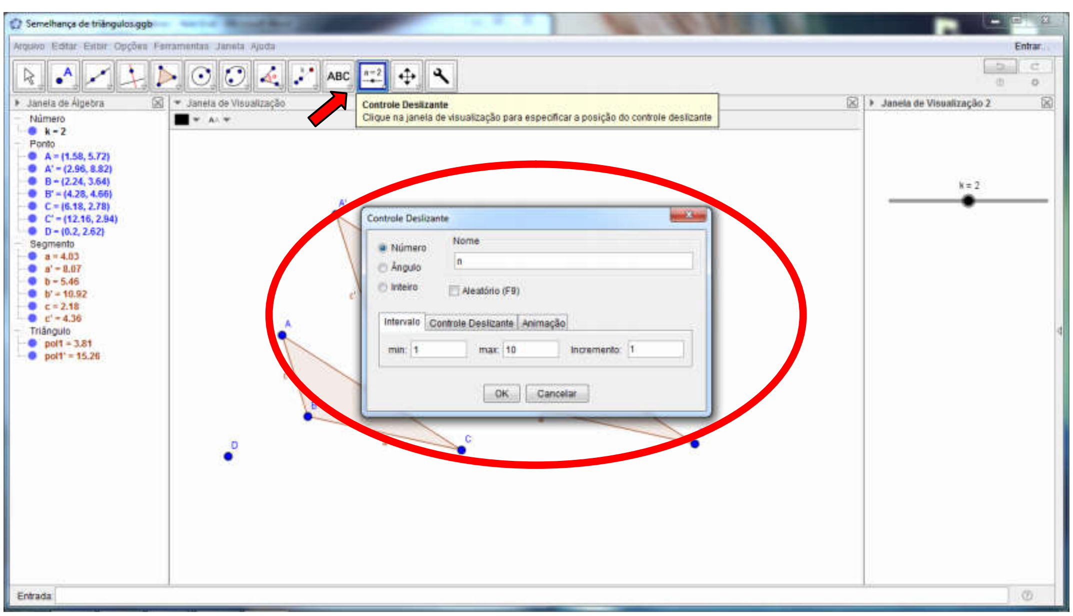


Figura 95: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 9
Fonte: o autor

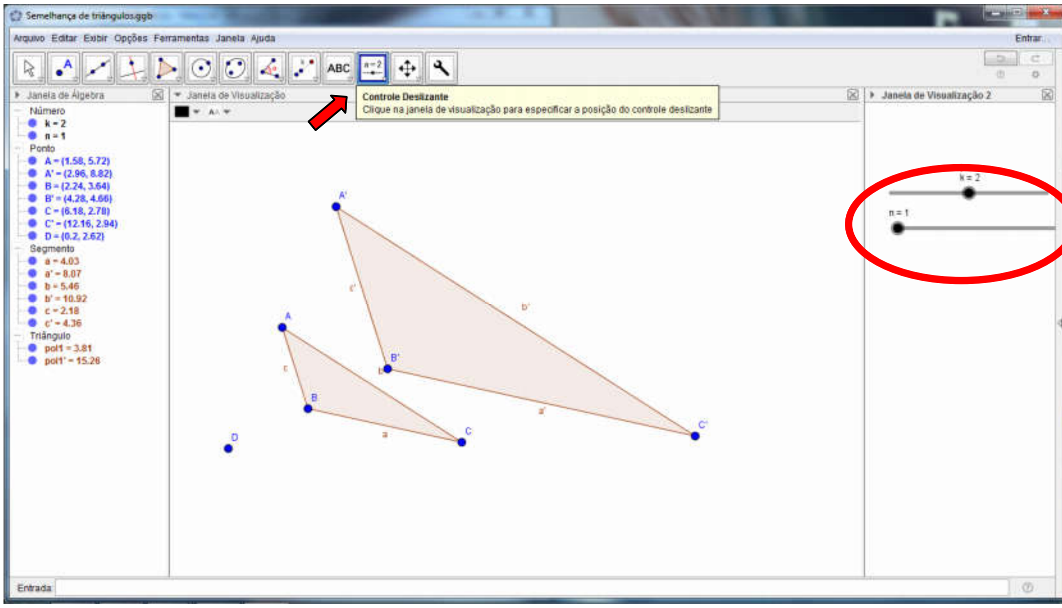


Figura 96: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 10
Fonte: o autor

vi. Criar 6 pontos sobre o eixo Oy para servirem como extremidades dos segmentos f, g, h, i, j e l.

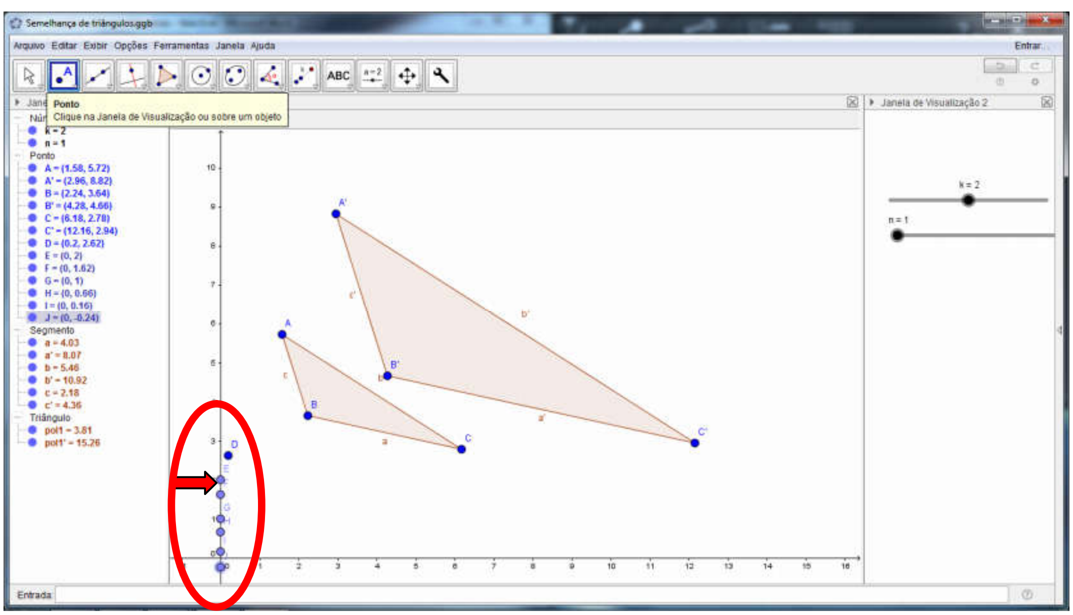


Figura 97: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 11
Fonte: o autor

vii. Utilizando a ferramenta Segmento com Comprimento Fixo, construir um segmento f com extremidade no ponto E, com o comprimento igual a "a".

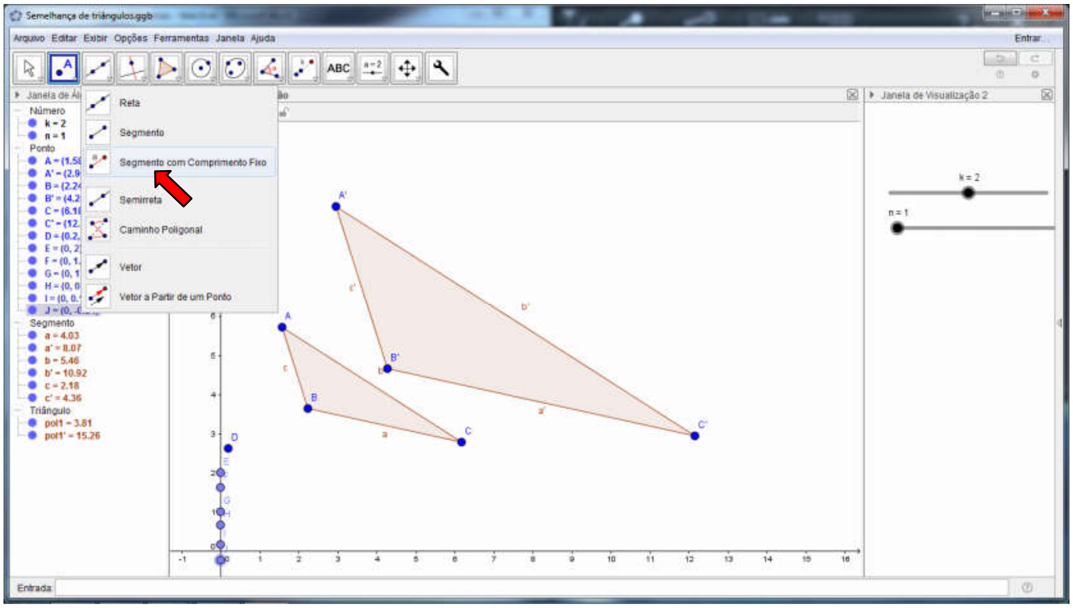


Figura 98: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 12
Fonte: o autor

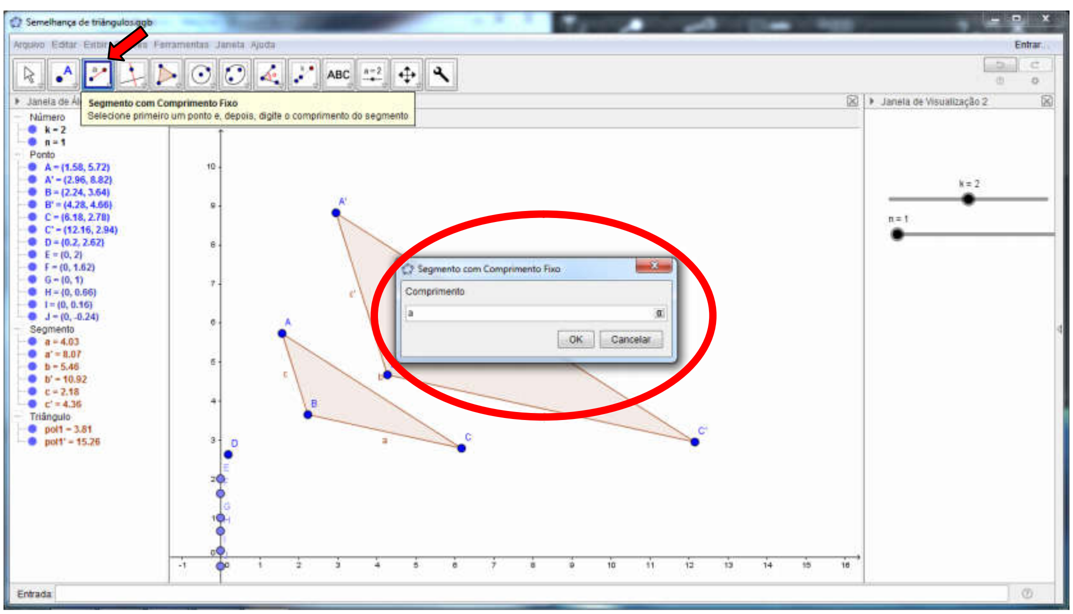


Figura 99: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 13
Fonte: o autor

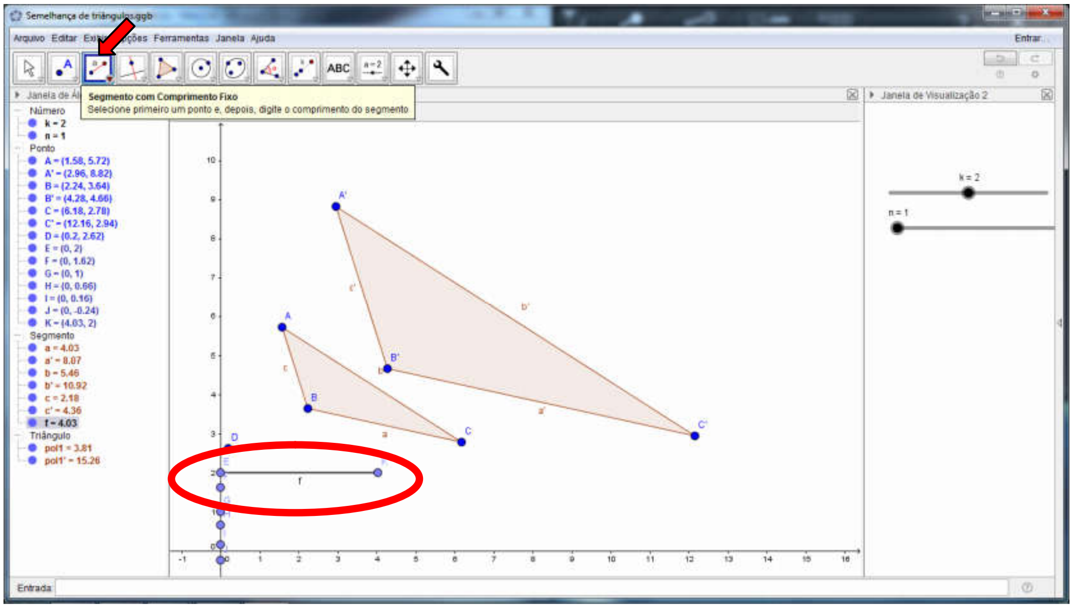


Figura 100: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 14
Fonte: o autor

viii. Repetir o procedimento para os pontos F, G, H, I e J, igualando os comprimentos de cada segmento construído ao segmentos a', b, b', c e c'.

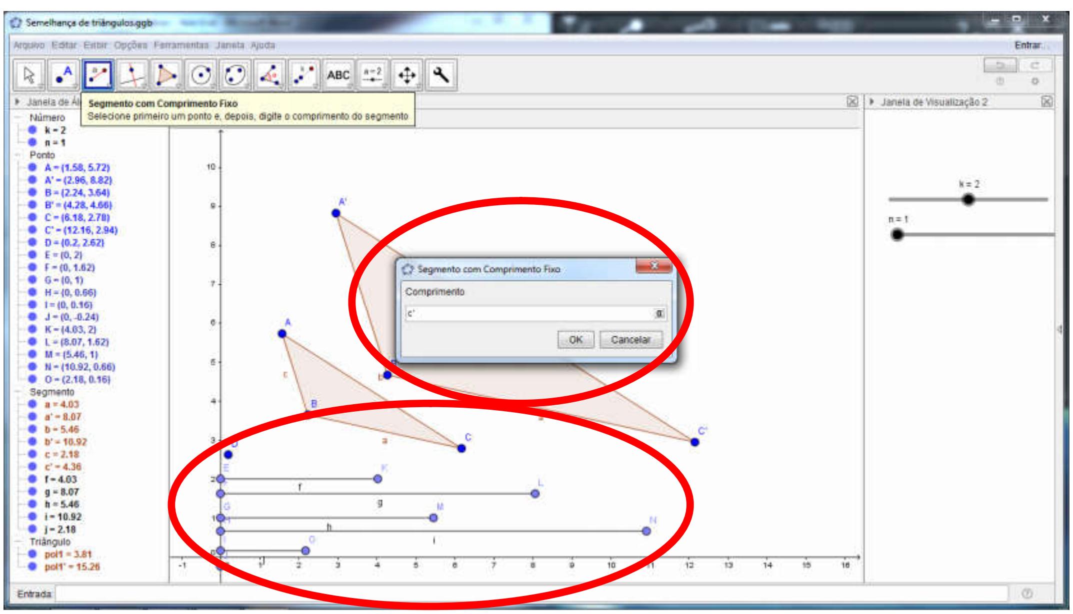


Figura 101: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 15
Fonte: o autor

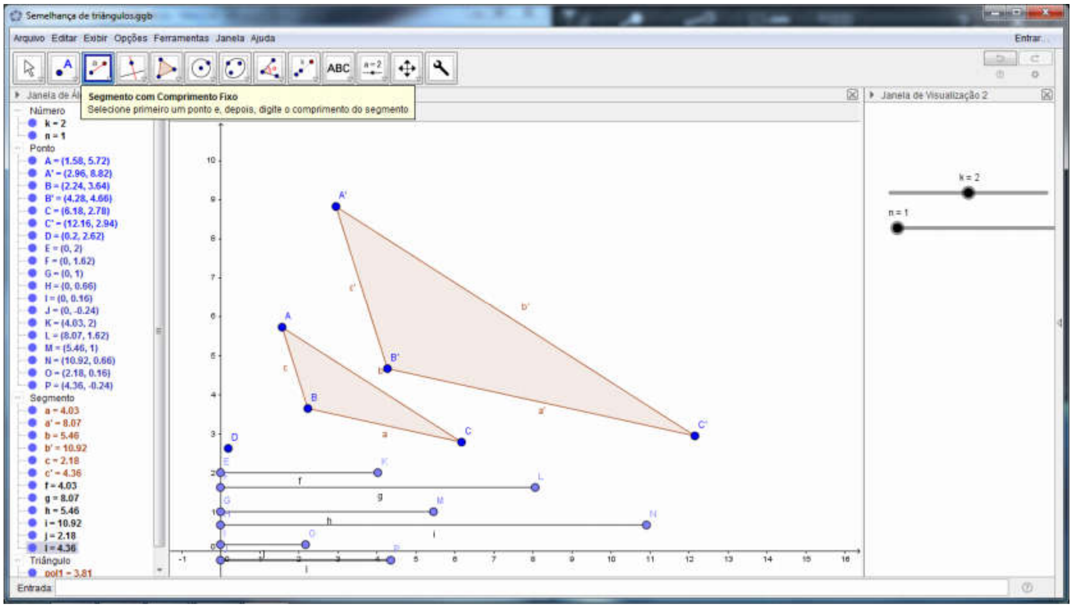


Figura 102: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 16
Fonte: o autor

ix. Utilizar a ferramenta Dividir Distâncias para fazer a partição dos segmentos g, i e l em "n" partes iguais.

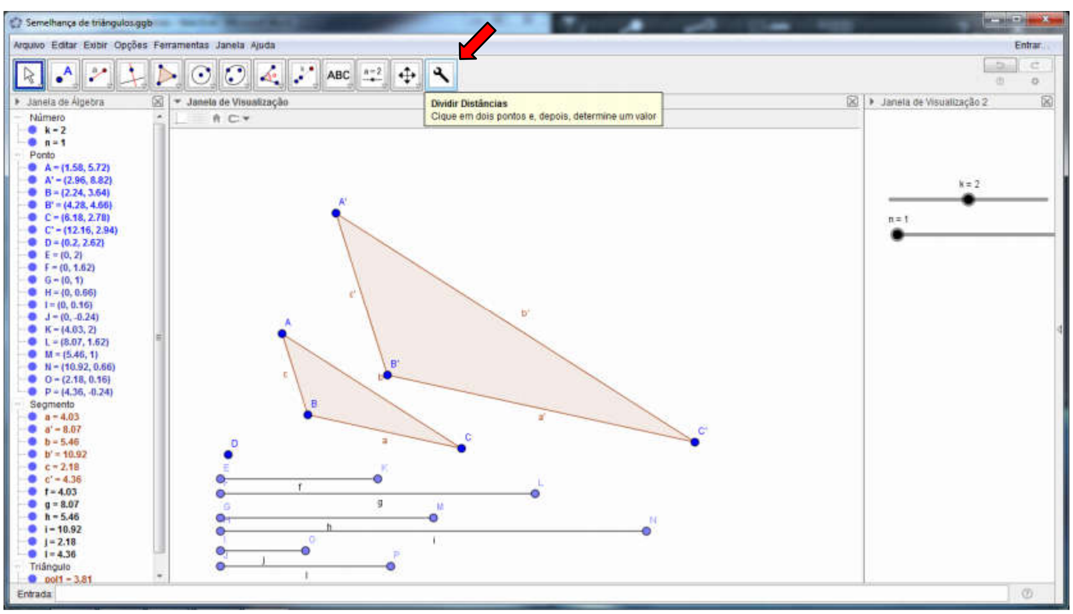


Figura 103: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 17
Fonte: o autor

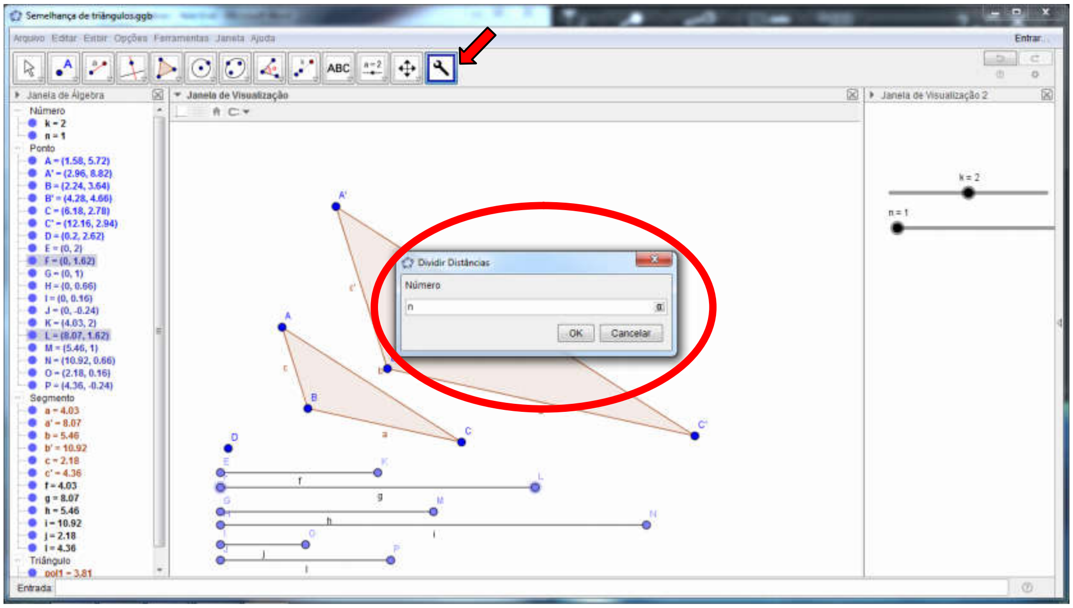


Figura 104: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 18
Fonte: o autor

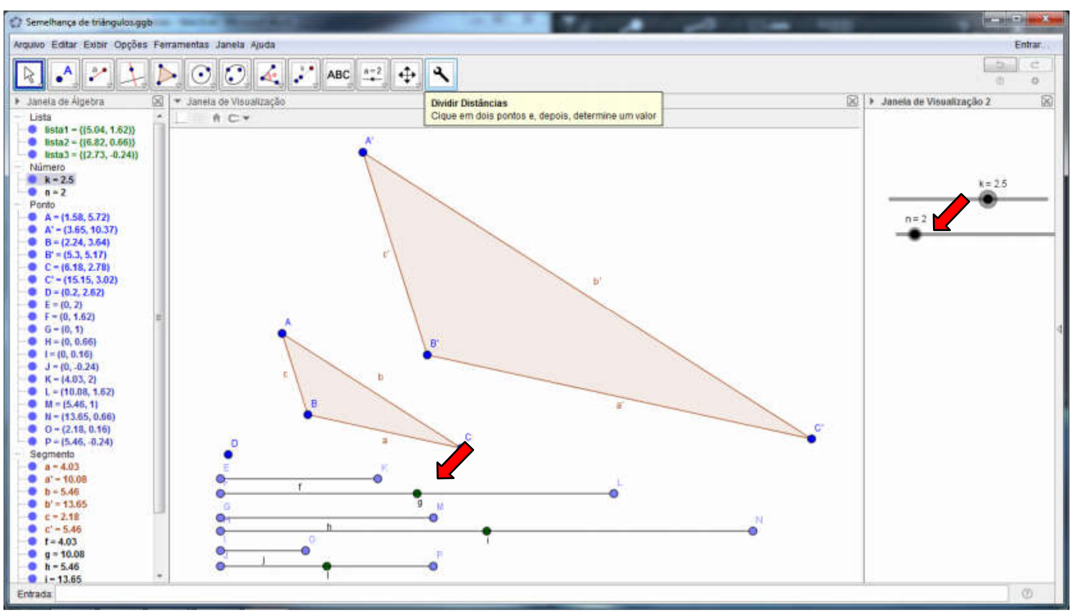


Figura 105: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 19
Fonte: o autor

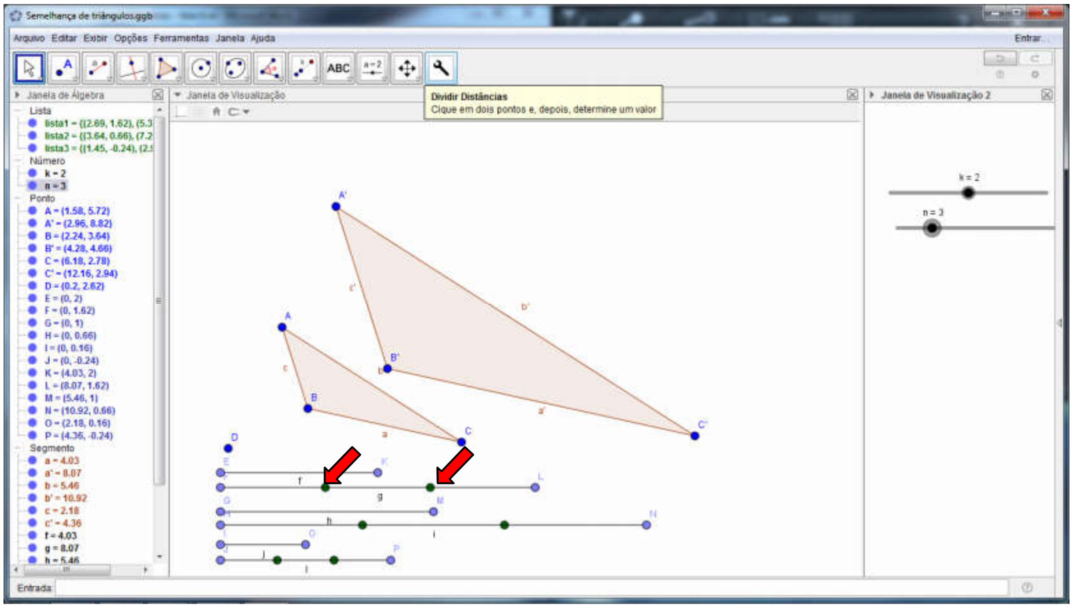


Figura 106: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 20
Fonte: o autor

Após as construções prontas é possível manipular os controles deslizantes selecionando e movendo com o mouse ou com o cursor do teclado. Pode-se também mudar as configurações de linhas e pontos, alterando as cores e espessuras para melhorar as visualizações.

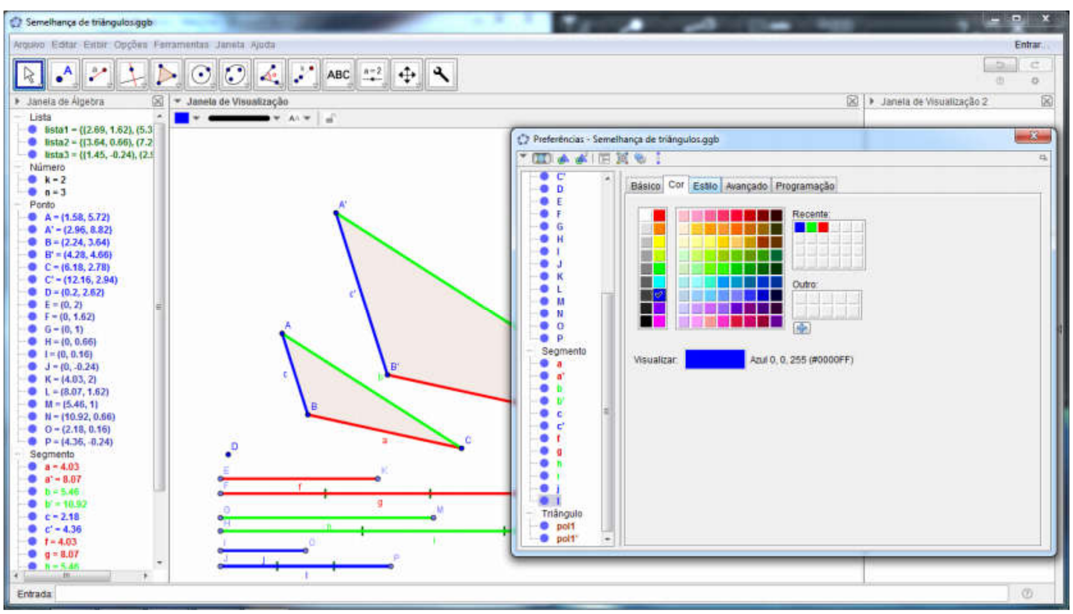


Figura 107: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 21
Fonte: o autor

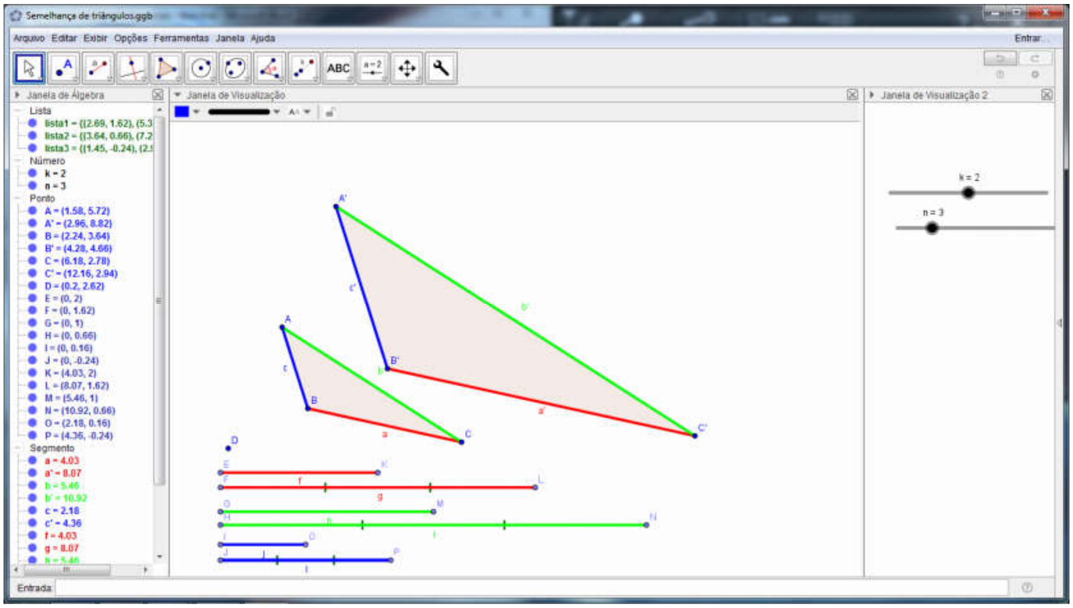


Figura 108: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 22
Fonte: o autor

Fechar a janela de álgebra e usar a construção para visualizar a semelhança entre triângulos.

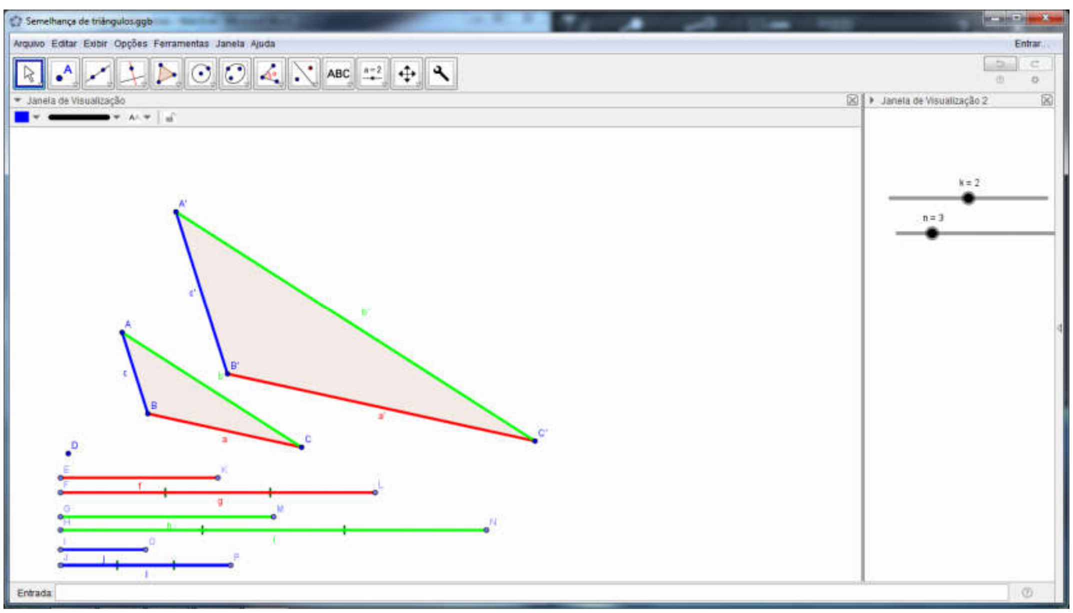


Figura 109: GeoGebra - Semelhança de Triângulos - 23
Fonte: o autor

CAPÍTULO 4

TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Após as atividades com semelhança de triângulos quaisquer passamos às comparações realizadas em triângulos retângulos sempre iniciando os trabalhos sem uso de razões pré-determinadas, mas apenas fazendo comparações visuais de figuras sugeridas sendo bastante interessante realizar construções com os alunos, triangulando com sombras e cordas sem realizar comparações com medidas utilizando unidades padronizadas.

4.1 TALES E A PIRÂMIDE

Tales de Mileto viveu no século VI a.C. e é reconhecido como grande filósofo e matemático que foi, tendo atuado em diversas áreas do pensamento, como astronomia, geografia, economia, geometria, etc.

Contam que, numa de suas passagens pelo Egito, o Faraó pediu que ele determinasse a altura de uma pirâmide, pedido que foi prontamente atendido por Tales que lançou mão de comparações de triângulos usando sombras, como sugere a imagem abaixo.

Figura 110: Tales e a Pirâmide
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br

Existem algumas versões sobre como Tales obteve a medida da altura da pirâmide, bem como sobre a motivação de tal procedimento. Uma narrativa interessante conta que Tales e seus ajudantes aguardam até o momento em que as sombras atingem o mesmo comprimentos que seus respectivos geradores, ou seja, quando a sombra da pessoa atingir um comprimento igual à sua altura fica evidente que a sombra e a altura da árvore serão iguais, bastando medir o comprimento da sombra projetada pela árvore para saber a medida de sua altura.

Levando em conta que as dimensões da base da pirâmide podem dificultar um pouco as medições reproduziremos a ideia substituindo a pirâmide por um outro objeto com uma base mais estreita, recriando a situação em um exercício de determinação da altura de uma árvore sem medi-la diretamente.

Para resolver o problema proposto, determinar a altura da árvore, vamos utilizar os conceitos gerados por semelhança de triângulos, necessitando para isso de dois triângulos que certamente sejam semelhantes. Segundo relatos históricos Tales usou a idéia de que a inclinação dos raios solares em pontos geograficamente próximos é constante obtendo a semelhança entre triângulos formados por sombras.

i. Precisamos de uma árvore para medir e de um objeto próximo a ela, com uma altura fácil de medir (pode ser um estudante voluntário).

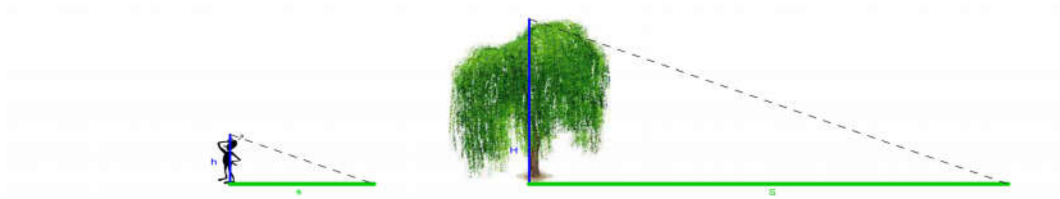


Figura 111: Altura da árvore - 1
Fonte: o autor

ii. Observando as medidas das sombras ao amanhecer, verificamos que estas são mais longas que os objetos geradores (a árvore a ser medida e o estudante).

Com o passar do tempo, aproximando-se do meio dia, as sombras se encurtam e em algum momento serão iguais às medidas dos seus objetos geradores.

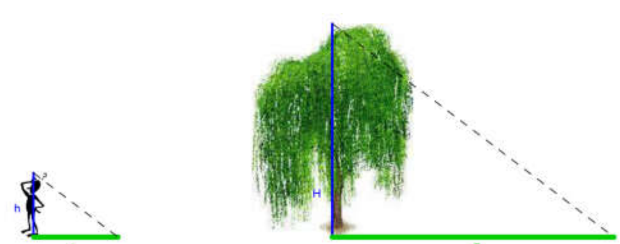


Figura 112: Altura da árvore - 2
Fonte: o autor

iii. Se fosse fácil observar o momento em que a sombra da árvore atinge a equivalência com sua própria altura seria desnecessário observar a sombra do estudante ou de qualquer outro objeto, como uma haste de madeira por exemplo. Visualmente não é tão simples esta observação, e para termos uma resposta mais precisa é importante utilizar um objeto mais baixo, não sendo necessário conhecer sua medida padronizada, bastando transferir a altura do objeto para o chão, a partir de sua base, na direção em que a sombra está sendo projetada e aguardar que a mesma atinja o ponto indicado pela marcação.

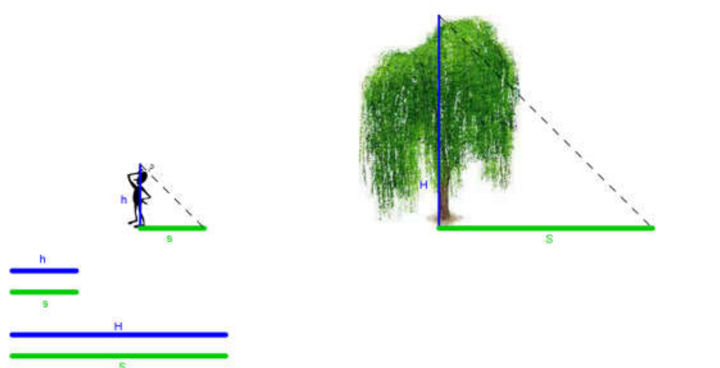


Figura 113: Altura da árvore - 3
Fonte: o autor

iv. Pronto, as sombras chegaram no ponto em seus comprimentos ficam iguais às medidas das alturas, basta nesse momento medir o comprimento da sombra da árvore, na unidade que mais convier e a altura da árvore estará determinada.

O inconveniente desse procedimento é ter que esperar até o momento da equiparação entre as medidas das sombras e de seus objetos de origem, fato este que não causaria nenhum problema a estudiosos e pesquisadores, afinal a paciência, o saber esperar leva a grandes resultados. Entretanto, é sabido que pode-se comparar as medidas a qualquer instante, bastando identificar a razão de semelhança entre os lados do triângulo envolvidos nas medições.

Sabemos que as sombras são mais longas ao amanhecer e ao entardecer e que ficam do mesmo tamanho que o objeto gerador duas vezes ao dia, uma no meio da manhã e outra no meio da tarde. Digamos que já passou do meio da tarde, ou que nos momentos próximos a equiparação das medidas o céu ficou nublado. O que fazer? Teríamos que aguardar o dia seguinte para medir a sombra da árvore no momento em ela atingisse uma medida igual a sua própria altura. Vejamos a figuras que seguem:

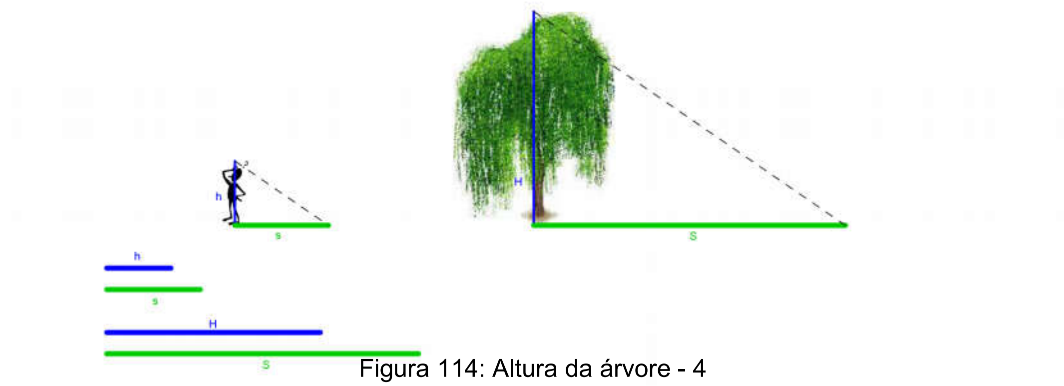


Figura 114: Altura da árvore - 4
Fonte: o autor

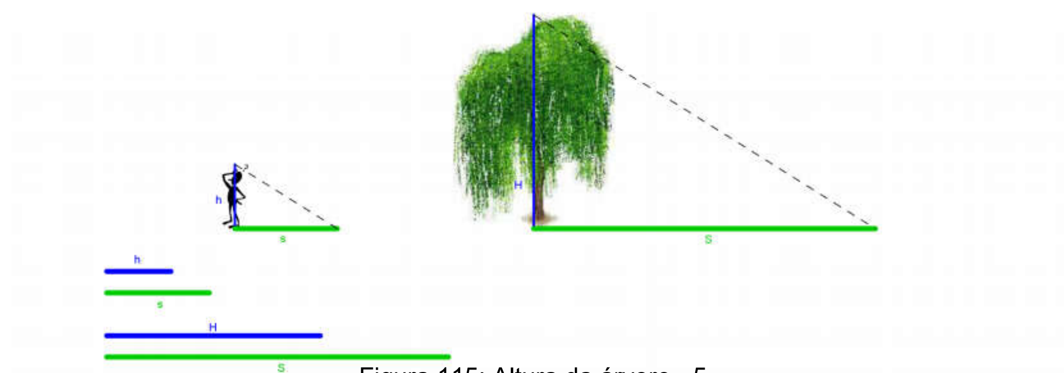


Figura 115: Altura da árvore - 5
Fonte: o autor

Observamos nas figuras acima que as sombras estão aumentando. Poderíamos obter uma resposta a qualquer momento, mas tenhamos paciência.

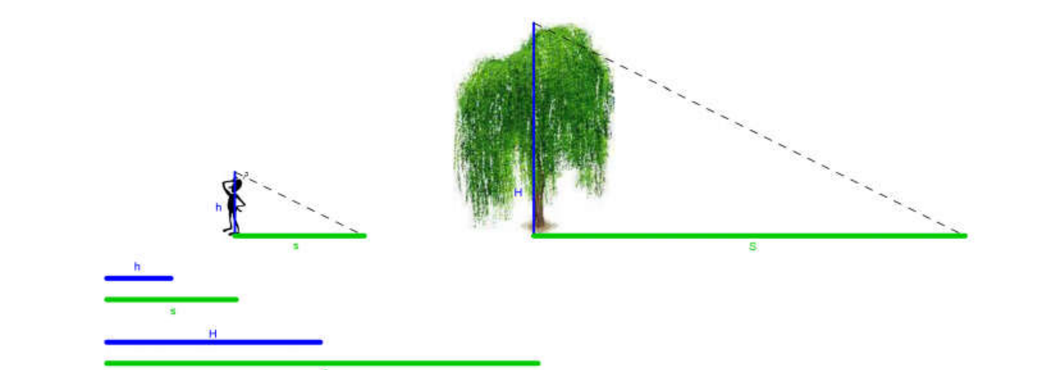


Figura 116: Altura da árvore - 6
Fonte: o autor

Cremos que o momento é agora, as sombras projetadas na última figura estão numa razão especial, mas por qual "razão"?

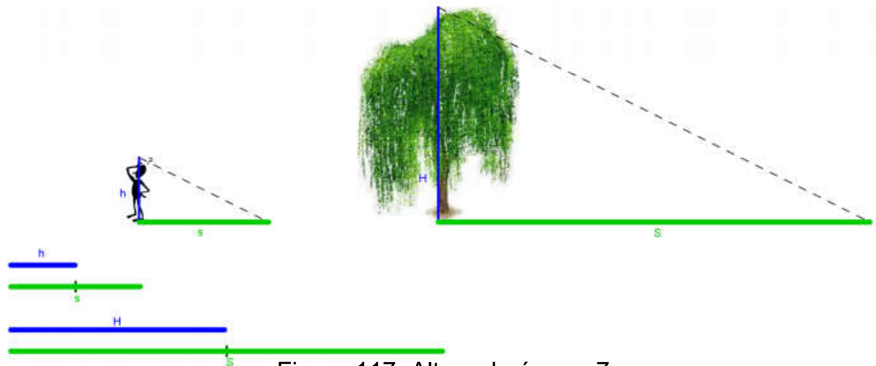


Figura 117: Altura da árvore 7
Fonte: o autor

Temos nesta figura a facilidade de observar que as sombras atingiram o dobro do comprimento das medidas das respectivas alturas, portanto, neste momento, a altura da árvore tem exatamente metade da medida do comprimento de sua sombra.

É possível estabelecer as proporções observando que h está para s na mesma proporção que H está para S, proporção esta que é de 1 para 2, podendo deste modo notar que assim como a altura do menino vale metade de sua sombra, também a altura da árvore será equivalente à metade da sua própria sombra.

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \frac{1}{2}$$

4.2 A ALTURA DO PAREDÃO

Depois de fazer visualizações utilizando dois triângulos semelhantes convém mostrar aos alunos que é possível determinar as razões de proporções em um único triângulo apenas comparando seus lados entre si, sabendo que a semelhança é determinada crucialmente pela congruência entre os ângulos e que triângulos retângulos se prestam bem aos cálculos de distâncias inacessíveis. É bastante viável construir triângulos para determinar medidas de objetos que possam ser medidos com facilidade (a altura de uma parede ou muro, por exemplo) bastando usar um transferidor de madeira, cordas e um trena e material para desenho.

Em Guarapuava existe um paredão em uma antiga pedreira, lugar hoje revigorado e denominado Praça da Fé, bastante utilizado pelos praticantes de rapel*. Consiste em uma parede de pedras boa para o treinamento, principalmente para iniciantes. Minha filha Catarina participou de um treinamento junto aos escoteiros, monitorados em especial pelo chefe Rennan Lima. É um lugar muito aprazível que me inspirou a criação de um exercício simples, com objetivo de iniciar os estudos referentes às razões entre as medidas dos comprimentos dos lados, tomados dois a dois, de um mesmo triângulo retângulo. Observe a fotografia abaixo:

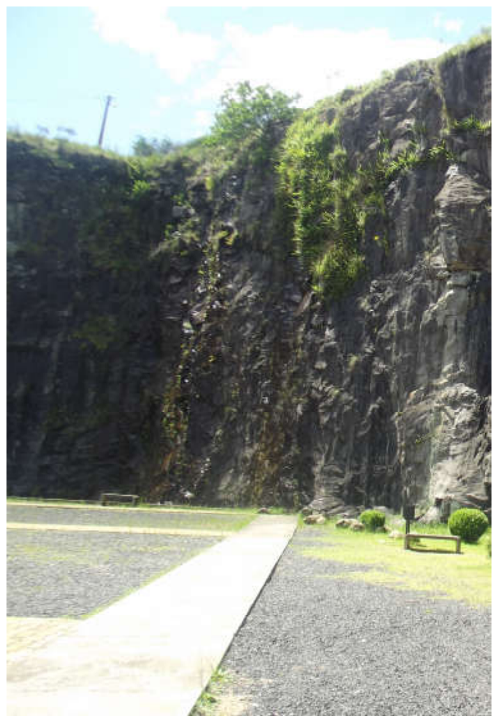


Figura 118: Altura do Paredão - 1
Fonte: http://www.panoramio.com

Uma questão muito simples é descobrir a altura deste paredão de pedras e, uma alternativa seria medi-lo por um processo direto, isso não é muito difícil sabendo que o acesso à parte superior da encosta é feito por uma trilha e uma vez lá em cima pode-se pendurar uma corda e depois medir a corda, ou pendurar uma trena suficiente para tomar a medida em uma única vez.

rapel* *Rappel* é uma palavra que em francês quer dizer "chamar" ou "recuperar" e foi usada para batizar a técnica de descida por cordas. O termo veio da explicação do "criador" do rappel, Jean Charlet-Stranton, por volta de 1879, quando explicava a técnica: *"je tirais vivement par ses bouts la corde qui, on se le rappelle...."* que quer dizer em tradução livre *"Quando chegava perto de meus companheiros eu puxava fortemente a corda por uma de suas pontas e assim a trazia de volta para mim..."*, ou seja, ele chamava a corda de volta ao terminar a escalada e a descida de uma montanha ou pico

Digamos que não exista o acesso pela trilha ou que é muito perigoso chegar perto da beirada para descer a corda, então vamos utilizar um método de triangulação feita na base, sem o perigo de estar lá no alto.

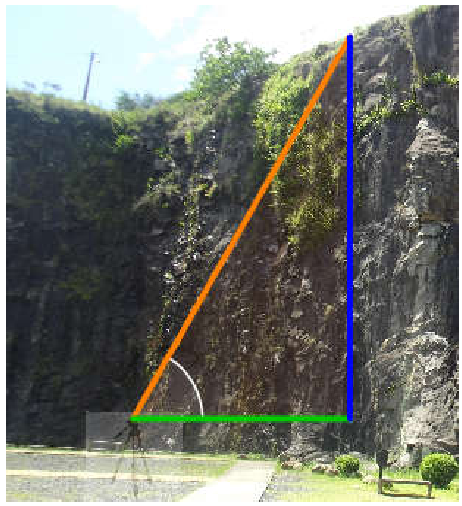


Figura 119: Altura do Paredão - 2
Fonte: http://www.panoramio.com

Com o intuito de descobrir a altura do paredão de pedras, sem a necessidade de escalá-lo, pode-se lançar mão de conceitos de trigonometria, entre eles obter as medidas, através de um aparelho ótico (teodolito), ou com uso de um transferidor e de uma fita métrica, do afastamento horizontal e da inclinação da linha de visão em relação ao topo da encosta, 10 metros e um ângulo α , respectivamente.

Determinar, se possível, dispondo das informações acima e considerando que o aparelho utilizado está nivelado a 1,70 metros longe do chão, a altura da encosta.

Para resolver esta situação usando o princípio da comparação visual, sugere-se confeccionar um desenho utilizando um gabarito retilíneo sem nenhuma graduação e um transferidor e realizar as comparações necessárias para estimar um valor aproximado da altura.

Chamando os catetos do triângulo de x e y , e lembrando que a altura h do paredão é dada por $h = x + 1{,}70m$, com $y = 10m$, seguir o roteiro de comparações.

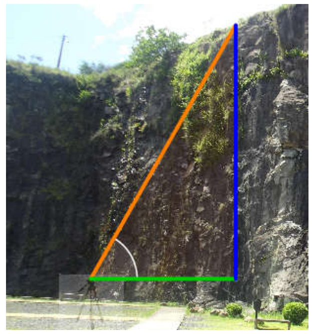


Figura 120: Altura do Paredão - 3
Fonte: http://www.panoramio.com

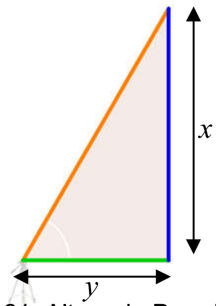


Figura 121: Altura do Paredão - 4
Fonte: o autor

i. As medidas dos comprimentos de x e y são iguais?

- Em caso afirmativo conclui-se que $x = y = 10m$.

- Como não é verdade, seguir as comparações.

ii. A medida do comprimento de x é maior ou menor que a de y?

- via de regra a maioria das pessoas consegue perceber que x é maior que y, mas a seguir deve-se desenhar os segmentos em superposição, x acima de y.

Figura 122: Altura do Paredão - 5
Fonte: o autor

- Assim, fica fácil ver que x é maior que y, logo $x > 10m$.

iii. A medida do comprimento de x ultrapassa a duas vezes a de y?

Figura 123: Altura do Paredão - 6
Fonte: o autor

- Não, x é inferior a duas vezes y, portanto $10m < x < 20m$

iv. Pode-se então dividir y e duas partes, cada uma valendo $5m$ e concluir que $15m < x < 20m$. (é provável que alguns estipulem um valor bem próximo da medida correta, outros não tão próximos e uns poucos estimem um valor bem afastado, porém convém verificar como os alunos enxergam as medidas, se realmente conseguem enxergar o intervalo correto de valores possíveis, encaminhando casos de discordância para análise da equipe pedagógica da escola para testar e intervir, caso necessário. (problemas oftalmológicos, neurológicos, etc. que dificultem a percepção das diferenças entre as medidas dos segmentos)

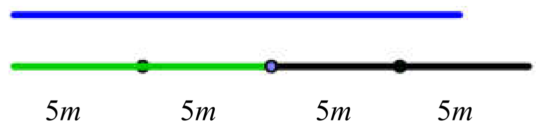


Figura 124: Altura do Paredão - 7
Fonte: o autor

v. Para aproximar melhor, dividir em quatro partes, $2{,}5m$ cada uma facilitando a conclusão de que a medida mais adequada é um pouco menor que de $17{,}50m$.

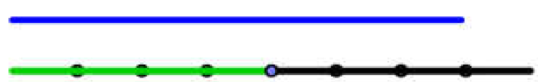
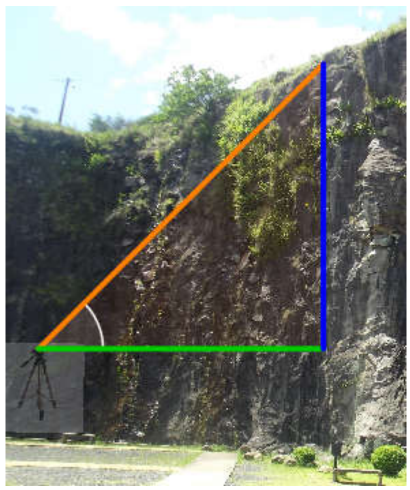


Figura 125: Altura do Paredão - 8
Fonte: o autor

Manualmente é mais prático dividir distâncias ao meio, ao meio novamente e outra vez ao meio obtendo metades, quartos, oitavos (50%, 25% e 12,5%). O importante é que cada aluno tenha seu desenho, com o cuidado e auxílio do professor para que os ângulos sejam bem construídos para que as comparações funcionem. Quanto as medidas dos lados, o interessante é que sejam diferentes a cada desenho e mesmo assim as comparações trarão os mesmos resultados, aproximadamente.

Não é necessário, neste momento, se preocupar com um valor mais exato para o cálculo, até porque para o ângulo sugerido pelos desenhos (60º) não será exato. O importante é o vínculo das proporções ao ângulo, devendo tomar outros exemplos realizados anteriormente, podendo ser aqueles feitos com as sombras, para fixar a concepção de que a cada nova inclinação teremos novas proporções, mudando o resultado final, e para mesmas inclinações as proporções serão as mesmas, ficando o resultado dependendo da distância, no caso da encosta e do tamanho da sombra no caso da árvore.



Para a inclinação indicada nesta figura a encosta e o afastamento do ponto de observação até a base ficam com o mesmo comprimento.

Figura 126: Altura do Paredão - 9
Fonte: http://www.panoramio.com

Figura 127: Altura do Paredão - 10
Fonte: o autor

Vale a pena gastar um tempo com a variação do ângulo para esta mesma atividade, por exemplo: diminuindo o ângulo para 50° fará com que a medida de x se aproxime de $12m$ e para 45° fique exatamente em $10m$.

Também mostrar que, independentemente do tamanho do triângulo, se é o de dimensões reais existentes in loco, um desenho feito numa cartolina ou uma representação no caderno, as respostas para as comparações serão as mesmas.

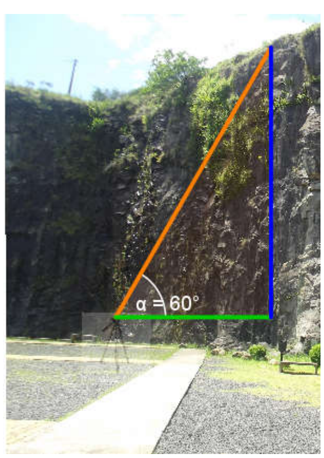


Figura 128: Altura do Paredão - 11
Fonte: http://www.panoramio.com

Figura 129: Altura do Paredão - 12
Fonte: o autor

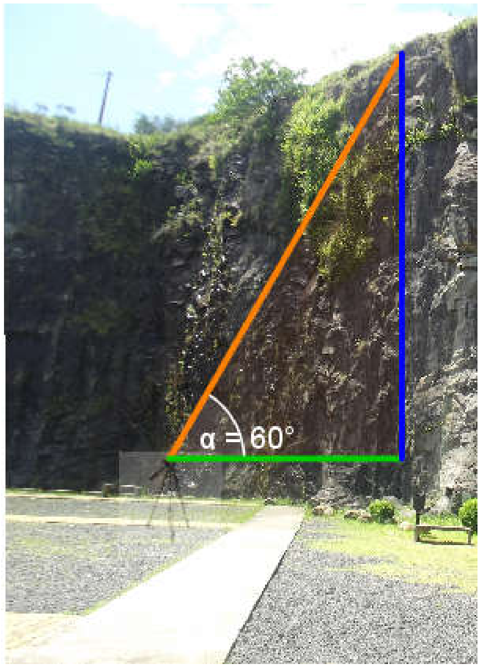


Figura 130: Altura do Paredão - 13
Fonte: http://www.panoramio.com

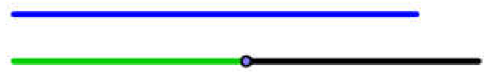


Figura 131: Altura do Paredão - 14
Fonte: o autor

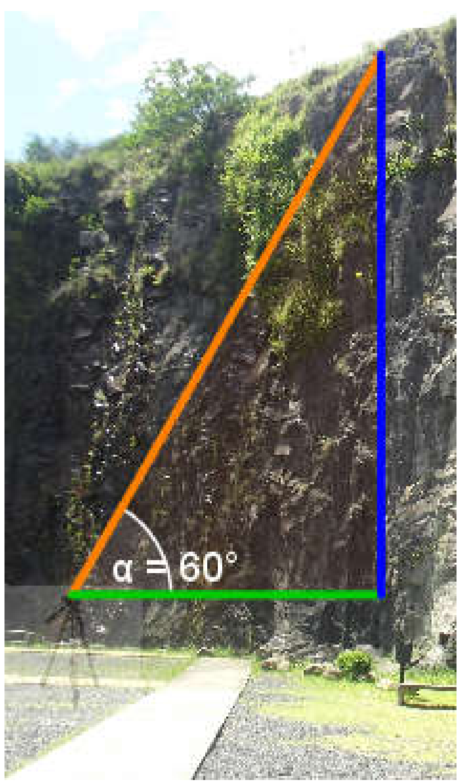


Figura 132: Altura do Paredão - 15
Fonte: http://www.panoramio.com

Figura 133: Altura do Paredão - 16
Fonte: o autor

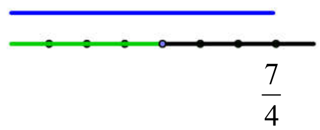


Figura 134: Altura do Paredão - 17
Fonte: o autor

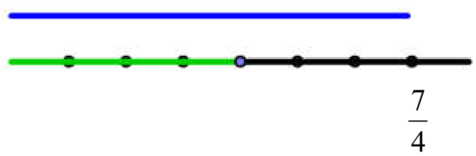


Figura 135: Altura do Paredão - 18
Fonte: o autor

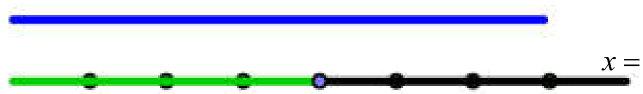


Figura 136: Altura do Paredão - 19
Fonte: o autor

As comparações ao lado são referentes aos triângulos representados em 3 tamanhos distintos.

Procedendo a comparação visual em cada um deles observamos que a medida do segmento em azul x (correspondente à altura da encosta) vale 1 vez o comprimento da linha verde y mais 3/4 do comprimento da mesma linha verde, gerando então, $x = 1y + \frac{3}{4}y$, $x = \frac{4y}{4} + \frac{3y}{4}$, $x = \frac{7}{4}y$.

Analisando o resultado visualmente obtido, observamos que a medida da encosta é um pouco inferior ao comprimento de $\frac{7}{4}$ da medida do afastamento da base ao ponto de onde foi feita a medição. Isso nos leva a um resultado estimado de 1,74y ou 1,73y, não sendo possível precisar um valor, apenas estimar. Vale salientar que quando os alunos chegam a uma resposta próxima daquela que é obtida pelos cálculos, a alegria por ter conseguido se torna grande aliada à manutenção dos conceitos aprendidos.

O que acontece, de forma geral, é que os livros didáticos já apresentam como solução para a situação proposta, desde o início, o uso da tangente do ângulo α, que corresponde ao quociente entre a medida do cateto que se opõe ao ângulo pelo cateto em adjacência a ele.

Muitos alunos reproduzem o procedimento de forma mecânica e até com certa eficácia, porém parece que não há fixação do conceito, visto que após ter estudado o assunto no 9º ano do Ensino Fundamental, ao ser solicitado novamente no Ensino Médio, a impressão é que tudo é novidade, e que causa extrema dificuldade, tanto quanto a compreensão quanto a aplicabilidade.

Para melhorar a eficiência da relação ensino-aprendizado recomendo usar a sequência:

i. Propor o problema de obtenção de uma medida inacessível e simultaneamente realizar a obtenção de uma medida, com o mesmo método, porém que seja acessível. Qual é a medida do paredão de pedra da encosta da Praça da Fé? Qual é a medida a altura do muro da escola, ou da porta da sala de aula?

ii. Efetuar a triangulação sugerida para obter a medida da altura do paredão e proceder da mesma forma com as alturas menores que poderão ser medidas para conferência dos resultados estimados, usando para tanto algum instrumento que garanta a congruência entre os ângulos de visão e os topos de muros, portas, etc.

Figura 137: Altura da Parede - 1
Fonte: o autor

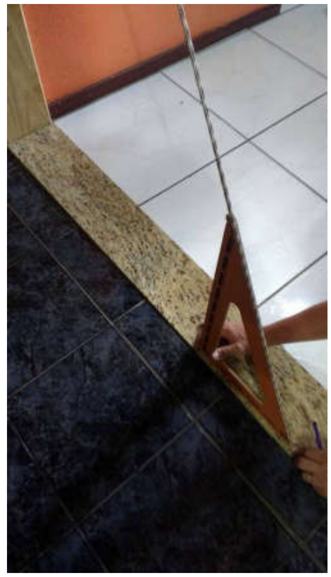


Figura 138: Altura da Parede - 2
Fonte: o autor

iii. Realizar o processo de comparações visuais entre as medidas obtidas através de cordas e estimar os resultados.

Figura 139: Altura da Parede - 3
Fonte: o autor

Figura 140: Altura da Parede - 4
Fonte: o autor

iv. Medir o muro, a porta e qualquer outro objeto que possa ser utilizado para ratificar que a estimativa se aproxima da realidade.

Figura 141: Altura da Parede - 5
Fonte: o autor

Figura 142: Altura da Parede - 6
Fonte: o autor

v. Questionar os alunos quanto a viabilidade e confiabilidade do processo enquanto ferramenta par determinar medidas desejadas. Poderíamos usar o método de comparações visuais para determinar distâncias entre corpos celestes ou determinar a largura de um rio sem poder atravessá-lo, apenas acessando uma de suas margens?

vi. Mostrar, enfim, que os valores estimados pela comparação feita nos triângulos utilizados podem ser obtidos, com uma precisão melhor, de tabelas de valores que são determinadas pelas amplitudes dos ângulos utilizados e que para ter acesso a esses valores precisa apenas saber como procurar e onde procurar. Isso nos leva ao uso de razões trigonométricas que será tratado no próximo capítulo.

4.3 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Quando efetuamos a comparação da sombra da árvore com a sombra de uma pessoa para poder descobrir a altura da árvore mediante a altura da pessoa, fazemos uso do conceito de que triângulos semelhantes geram uma proporção constante entre seus lados correspondentes e isso permite fazer o cálculo utilizando regra de três simples e direta.

Para descobrir medidas desta maneira faz-se necessária a utilização de dois triângulos semelhantes, porém na atividade da Seção 4.2 apenas um triângulo, formado pela medida da distância entre um ponto de observação e a base da encosta, a altura da encosta e a linha gerada entre o ponto de observação e o topo desta encosta, foi suficiente para definir, comparando duas das três medidas envolvidas, a altura desejada.

Apesar de realizarmos as comparações entre dois lados de um único triângulo, estamos utilizando semelhança entre dois triângulos, um real obtido pelas observações e medições in loco, e outro representativo, que é ilustrado manualmente ou através de um programa de computador.

Devemos considerar quais métodos podem ser usados para obter o valor da razão de um triângulo para transferir a outro, semelhante, e determinar medidas de comprimentos desejados como a altura do paredão de pedras, ou a distância percorrida na travessia de um lago tomando medidas de pontos de referência em suas margens e inclinações geradas durante a travessia.

Partimos do pressuposto de que temos um ângulo reto logo outros dois ângulos agudos e que em função da menor ou maior abertura de cada ângulo agudo as razões entre os lados variam, mas na manutenção dos ângulos as razões permanecem constantes. Para determinar a razão entre os lados de um triângulo, tomando-os dois a dois, seria necessário apenas uma ilustração bem feita, medição correta dos lados e a divisão das medidas encontradas

A partir do momento que exista a compreensão de que a semelhança de triângulos gera uma razão constante entre as medidas de lados correspondentes e que é possível obter aproximações muito eficientes para valores relacionados às medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, proporções constantes, através de comparações visuais sem a necessidade de medir utilizando unidades padronizadas, inicia-se o processo de vínculo dos valores obtidos nas comparações com aqueles registrados nas tabelas trigonométricas. Fazer uso de desenhos prontos ou utilizar construções feitas no Geogebra e disponibilizadas nesta dissertação facilitam bastante essa etapa de conexão entre o processo visual e o cálculo.

Façamos uma nova atividade para transitar entre o resultado que pode ser obtido por comparação visual e o cálculo usando valores tabelados. Um avião decola de um aeroporto em uma pista plana e horizontal descrevendo um ângulo constante em uma trajetória retilínea até ter percorrido uma distância de $2000m$. Sabendo que o ângulo descrito é de 15° com a horizontal determinar a altura do avião ao fim deste percurso.

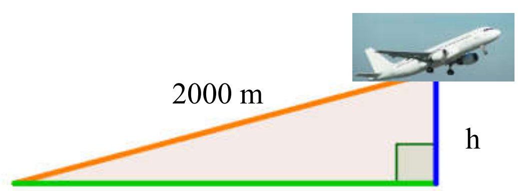


Figura 143: Altura do Avião - 1
Fonte: o autor

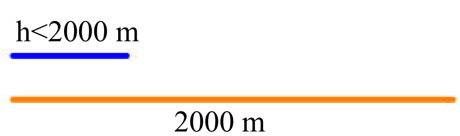


Figura 144: Altura do Avião - 2
Fonte: o autor

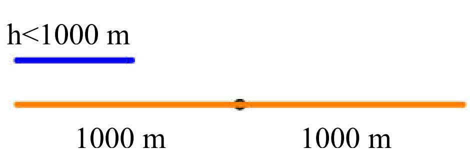


Figura 145: Altura do Avião - 3
Fonte: o autor

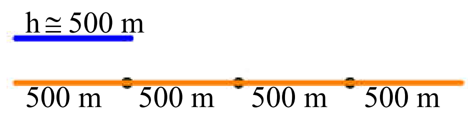


Figura 146: Altura do Avião - 4
Fonte: o autor

Analisando as figuras acima é possível estimarmos a medida da altura atingida pelo avião em pouco mais que 500 m, mas para ser mais preciso teríamos que fazer mais divisões e o método perde a praticidade. Creio que enxergar que é pouco acima de 500 m já é bem significante e suficiente para transitar da comparação visual para a tabela de valores, efetuando o cálculo.

A questão é: Como procurar na tabela? O que procurar na tabela?

O fato é que estamos comparando medidas de lados correspondentes de dois triângulos semelhantes. Um dado por uma situação real, cujas medidas não caberiam numa folha de papel e outro de um desenho feito numa escala menor, porém com ângulos congruentes aos ângulos do triângulo original.

Se fosse necessário, para cada cálculo, um desenho preciso, meticuloso, não se poderia deixar fora do currículo a disciplina de desenho geométrico, o que não seria ruim. Contudo, pensemos que os valores que conseguimos obter visualmente em um desenho ou mesmo medindo com uma régua e dividindo, já estão prontos, numa tabela trigonométrica bastando saber com consultá-la.

Cada comparação feita entre dois lados de um triângulo retângulo através do quociente entre suas medidas recebe um nome específico. Os quocientes formam as razões trigonométricas e podem ser feitos de nove maneiras diferentes.

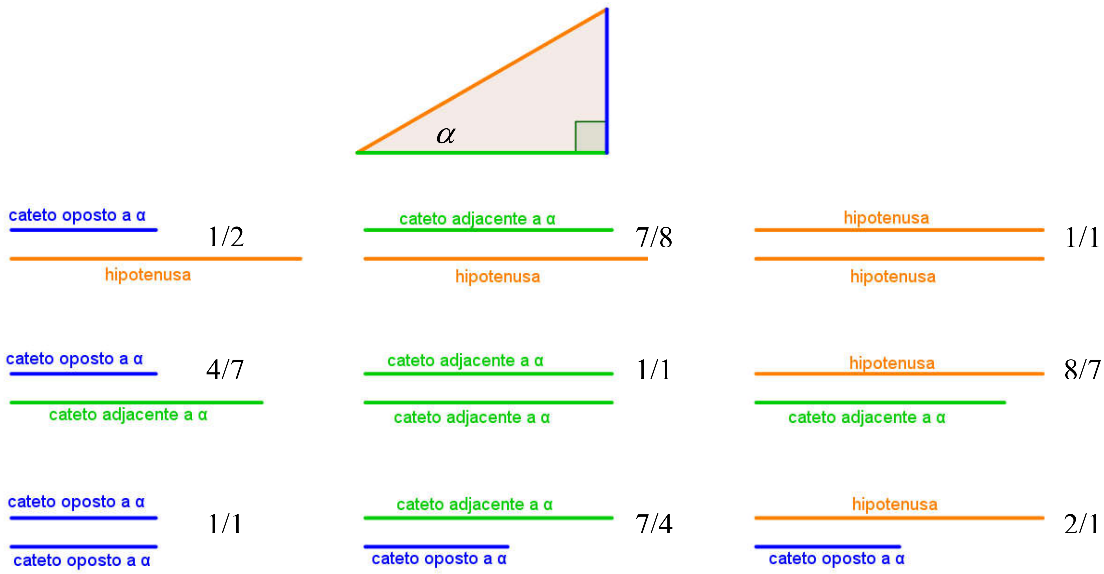


Figura 147: Razões Trigonométricas
Fonte: o autor

Utilizando um dos ângulos agudos do triângulo retângulo como referencial para os quocientes e denominando o catetos oposto e adjacente a ele e a hipotenusa de co, ca e hip, respectivamente teremos as nove razões ilustradas acima com seus respectivos nomes. Três delas correspondem a unidade já que são comparações feitas com cada um dos lados em relação às suas próprias medidas.

$$\frac{co}{hip} = sen\alpha \qquad \frac{ca}{hip} = \cos\alpha \qquad \frac{hip}{hip} = 1$$

$$\frac{co}{ca} = tg\alpha \qquad \frac{ca}{ca} = 1 \qquad \frac{hip}{ca} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

$$\frac{co}{co} = 1 \qquad \frac{ca}{co} = \frac{1}{tg\alpha} = \cot g\alpha \qquad \frac{hip}{co} = \frac{1}{sen\alpha} = \cos ec\alpha$$

Das outras seis razões, três são mais usadas: seno, co-seno e tangente. As outras três correspondem às suas inversões: secante, co-secante e co-tangente.

Para cálculos envolvendo as medidas de triângulos retângulos lançamos mão das três primeiras. Entretanto, algumas tabelas mais antigas trazem a co-tangente, que pode substituir a tangente num cálculo que seria finalizado com uma divisão, para que o mesmo pudesse ser resolvido através de multiplicação.

Neste instante vale a pena lançar mão da tecnologia através de uma construção com auxílio do Geogebra que permitirá variar o ângulo e também a quantidade de partes em que se pode dividir os segmentos para facilitar as comparações. Pode-se inserir os comprimentos em escala, mas creio ser muito mais convincente mostrar que é possível visualizar os valores antes de calcular. Deixando para mais tarde mostrar o poder do software que permite ter os valores de imediato. Contudo, não teria utilidade nenhuma ao "estudante" conhecer as respostas sem saber como obtê-las. Não é preciso saber cozinhar para saborear uma boa receita, mas tenha certeza que é muito prazeroso saborear um receita feita por si mesmo.

Conhecendo os nomes dados às razões trigonométricas e tendo uma tabela disponível, podemos efetuar os cálculos das atividades propostas e comparar aos resultados obtidos pela estimativa das visualizações.

No paredão usamos a tangente para o ângulo de 60°, $tg\alpha = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} \Rightarrow tg60° \cong 1{,}73 \Rightarrow \dfrac{x}{y} \cong 1{,}73 \Rightarrow x \cong 1{,}73 \cdot y \Rightarrow x \cong 1{,}73 \cdot 10 \Rightarrow$ $x \cong 17{,}30m \Rightarrow h = x + 1{,}70m \Rightarrow h = (17{,}30 + 1{,}70)m \Rightarrow h \cong 19{,}00m$.

Para o cálculo da altura do avião usamos o seno para o ângulo de 15°, $sen\alpha = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa} \Rightarrow sen15° \cong 0{,}258 \Rightarrow \dfrac{h}{2000} \cong 0{,}258 \Rightarrow h \cong 0{,}258 \cdot 2000 \Rightarrow$ $h \cong 516m$.

CAPÍTULO 5

OUTRAS COMPARAÇÕES INTERESSANTES

Outras comparações necessárias aos estudos trigonométricos são obtidas de triângulos equiláteros, quadrados e circunferências, podendo ser bastante úteis para o estudo dos ângulos notáveis e para arcos e ângulos no ciclo trigonométrico.

5.1 A ALTURA DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Uma razão extremamente importante para os estudos de geometria métrica e trigonometria é obtida comparando-se as medidas da altura e do lado de um mesmo triângulo equilátero. Quando traçamos uma das alturas de um triângulo equilátero obtemos dois triângulos congruentes cujos ângulos agudos são os notáveis 30° e 60°, nos permitindo descobrir os valores das razões trigonométricas desses ângulos sem a necessidade de uma tabela trigonométrica.

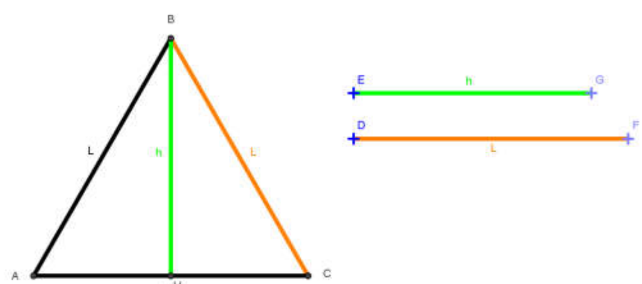


Figura 148: Triângulo Equilátero - 2
Fonte: o autor

Desenho de um triângulo equilátero obtido do GeoGebra, com a medida da altura superposta à medida do lado para as comparações necessárias.

A altura é menor do que o lado.

$$h < \ell$$

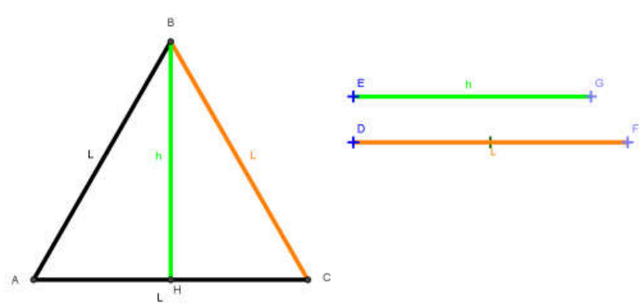


Figura 149: Triângulo Equilátero - 3
Fonte: o autor

Dividindo-se o lado ao meio nota-se que a altura é maior que metade do lado.

$$\frac{\ell}{2} < h < \ell \Rightarrow 0{,}50\ell < h < \ell$$

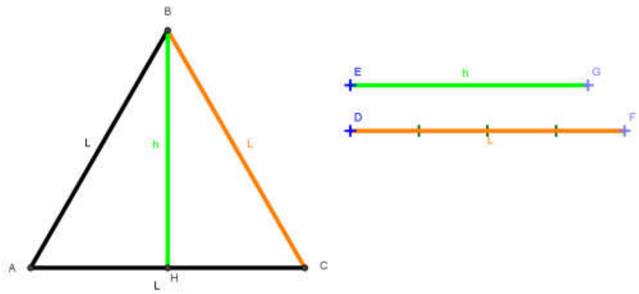


Figura 150: Triângulo Equilátero - 4
Fonte: o autor

Dividindo-se o lado em quatro partes iguais nota-se que a altura é maior que três quartos do lado.

$$\frac{3\ell}{4} < h < \ell \Rightarrow 0{,}75\ell < h < \ell$$

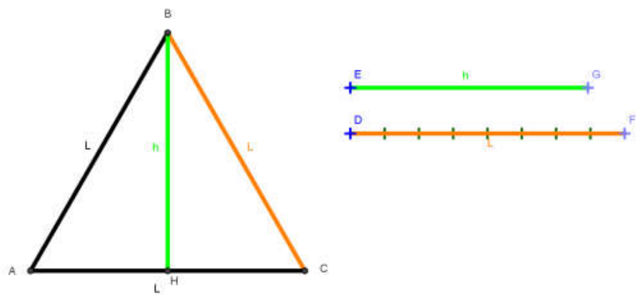
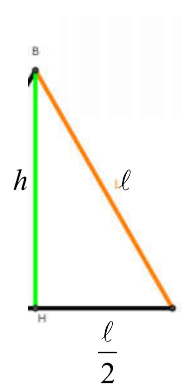


Figura 151: Triângulo Equilátero - 5
Fonte: o autor

Dividindo-se o lado em oito partes iguais nota-se que a altura é aproximadamente igual a sete oitavos do lado.

$$h \cong \frac{7}{8}\ell \Rightarrow h \cong 0{,}875\ell$$

É fácil ver que a medida do comprimento da altura do triângulo é ligeiramente inferior a sete oitavos da medida do comprimento de seu lado. O resultado é obtido de forma precisa através da aplicação do Teorema de Pitágoras.



$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$
$$h^2 + \frac{\ell^2}{4} = \ell^2$$
$$4h^2 + \ell^2 = 4\ell^2$$
$$4h^2 = 3\ell^2$$

$$4h^2 = 3\ell^2$$
$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$
$$h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\ell^2}}{\sqrt{4}}$$
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$h \cong \frac{\ell \cdot 1{,}73205}{2}$$
$$h \cong 0{,}86603\ell$$
$$h \cong 0{,}87\ell$$

Figura 152: Triângulo Equilátero - 6
Fonte: o autor

Comparando os resultados obtidos mediante o Método de Comparações Visuais e pela aplicação do Teorema de Pitágoras, percebe-se quão significativo é o resultado encontrado apenas pela observação das medidas e de divisões sucessivas para melhor aproximação das estimativas. De nossa experiência podemos dizer que, a um primeiro olhar, alguns alunos mais afeitos à matemática costumar estimar a altura em torno de 90% da medida do lado. Sem nenhuma divisão, a maioria dos estudantes não tem nenhuma dificuldade em visualizar que a altura é maior que metade da medida do lado, e permitindo que eles façam suas "apostas" (estimativas), a atividade fica bastante interessante.

Desenhar um triângulo equilátero no chão, de dimensões maiores, utilizando cordas e giz faz a atividade mais interessante ainda.

A seguir, apresentamos a construção, passo a passo, da atividade com triângulo equilátero no GeoGebra.

i. Abrir a janela de visualização 2 para as ferramentas deslizantes.

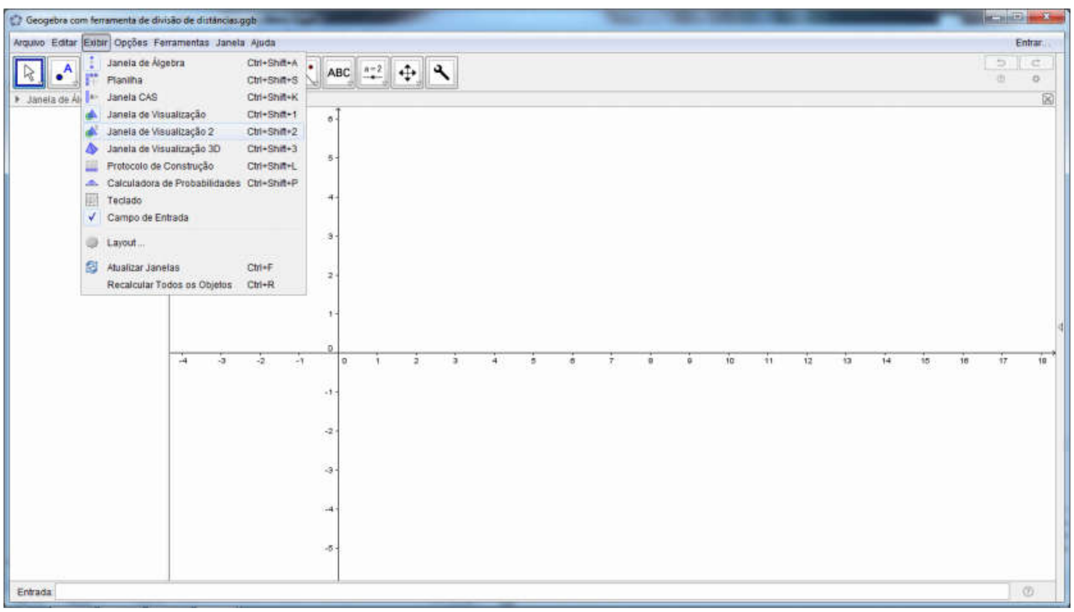


Figura 153: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 1
Fonte: o autor

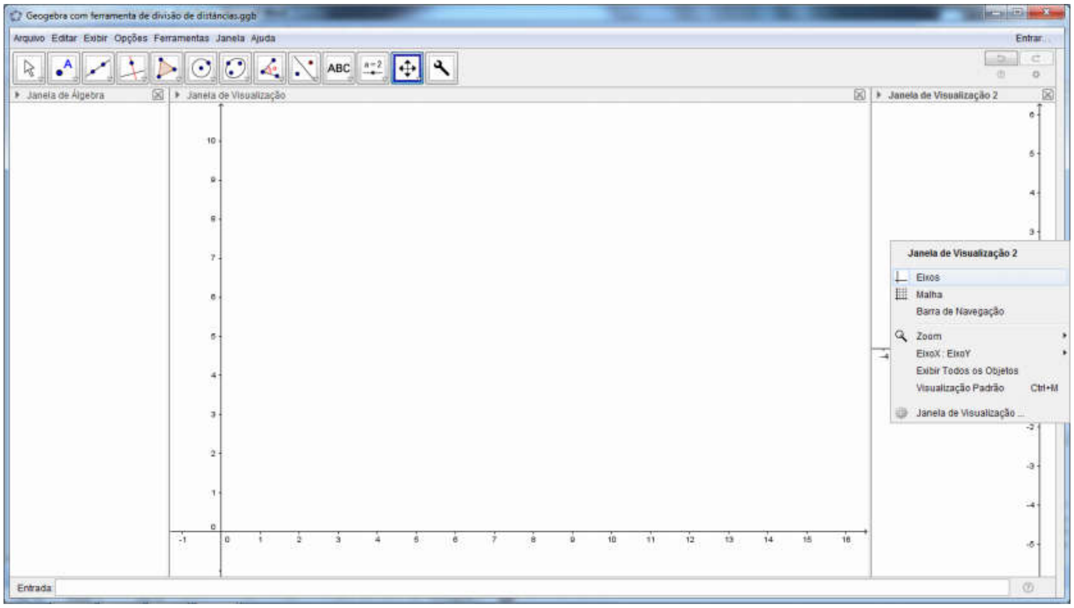


Figura 154: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 2
Fonte: o autor

ii. Construir um controle deslizante "a" com intervalo de 0 a 10 e incremento 0,1 para utilizar como parâmetro para a medida dos lados do triângulo.

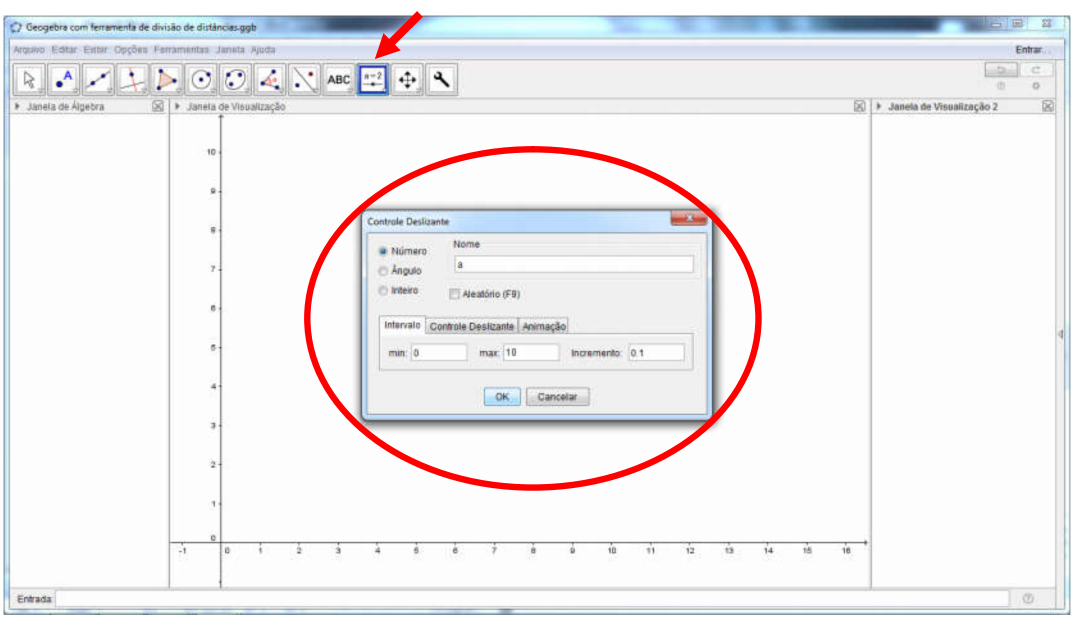


Figura 155: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 3
Fonte: o autor

iii. Construir um controle deslizante "b" com intervalo de 1 a 10 e incremento 1 para usar como parâmetro para as divisões de segmentos necessárias às comparações.

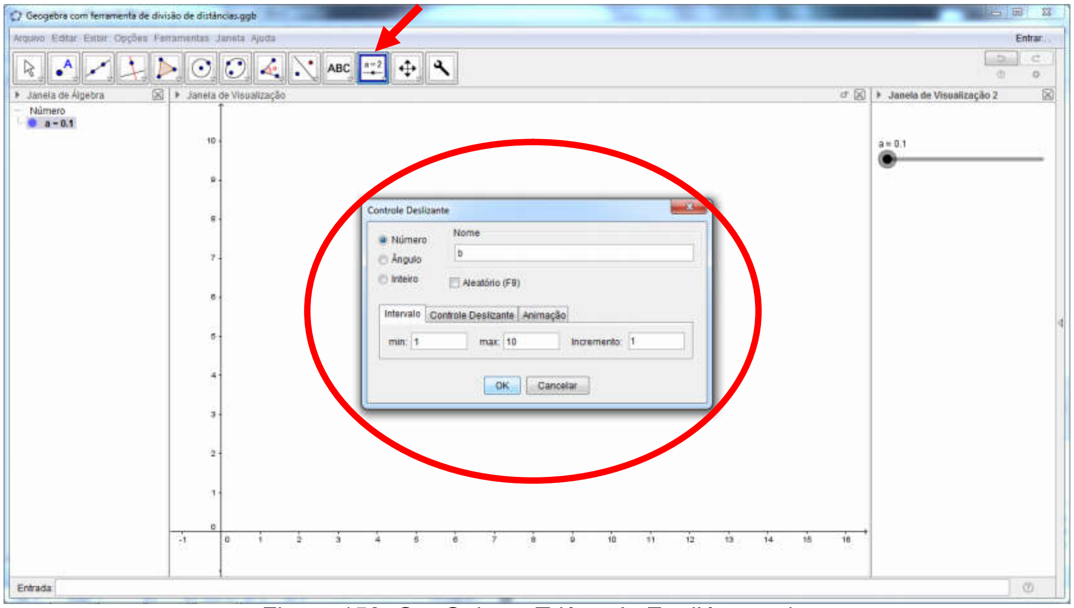


Figura 156: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 4
Fonte: o autor

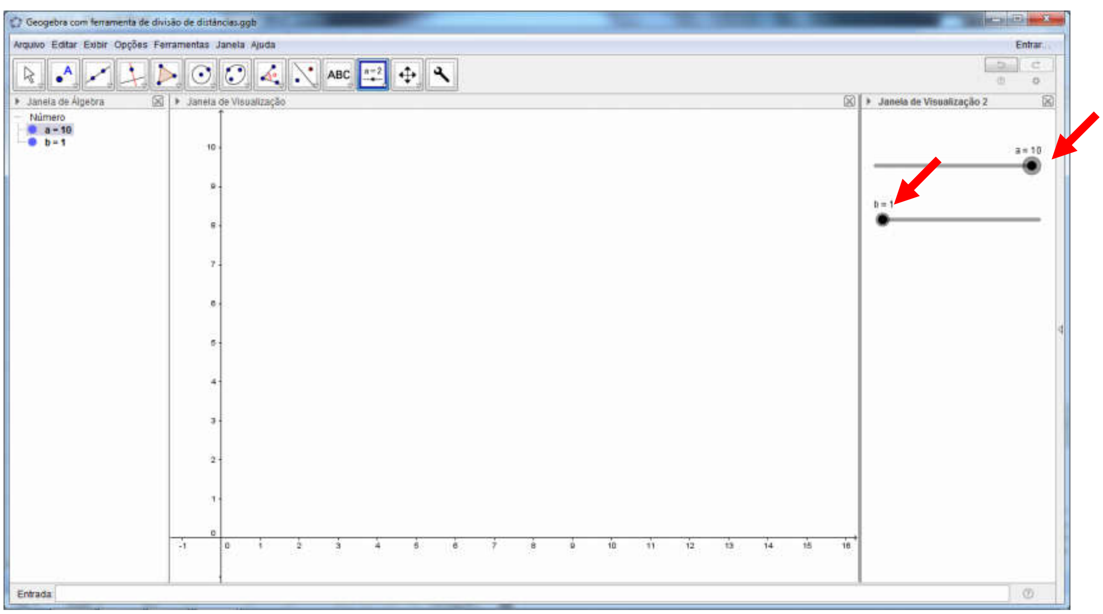


Figura 157: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 5
Fonte: o autor

iv. Utilizando a ferramenta Segmento com Comprimento Fixo construir um segmento de comprimento "a" a partir de um ponto A qualquer.

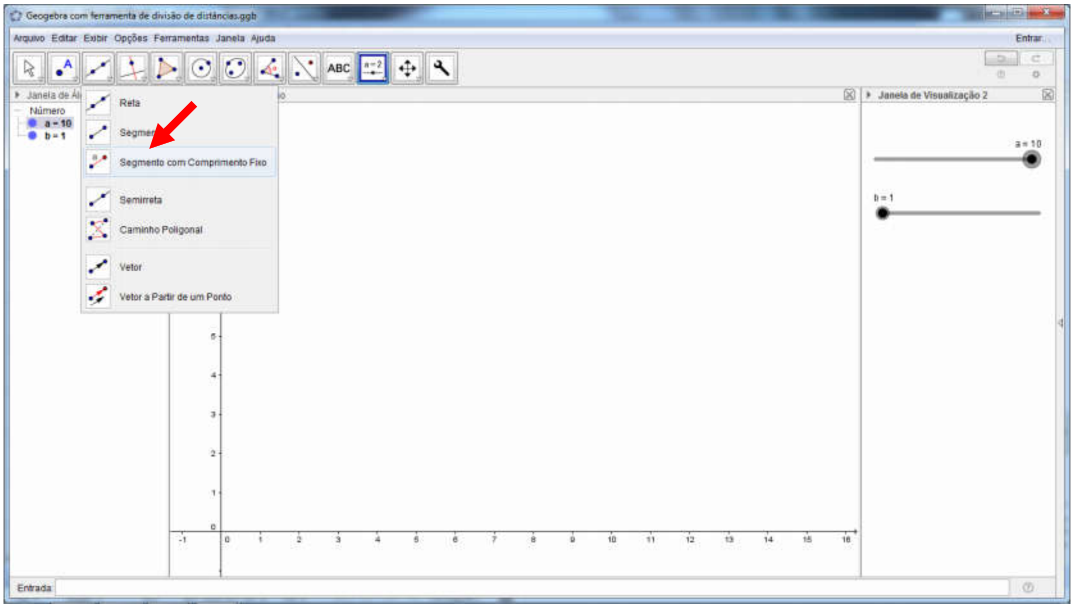


Figura 158: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 6
Fonte: o autor

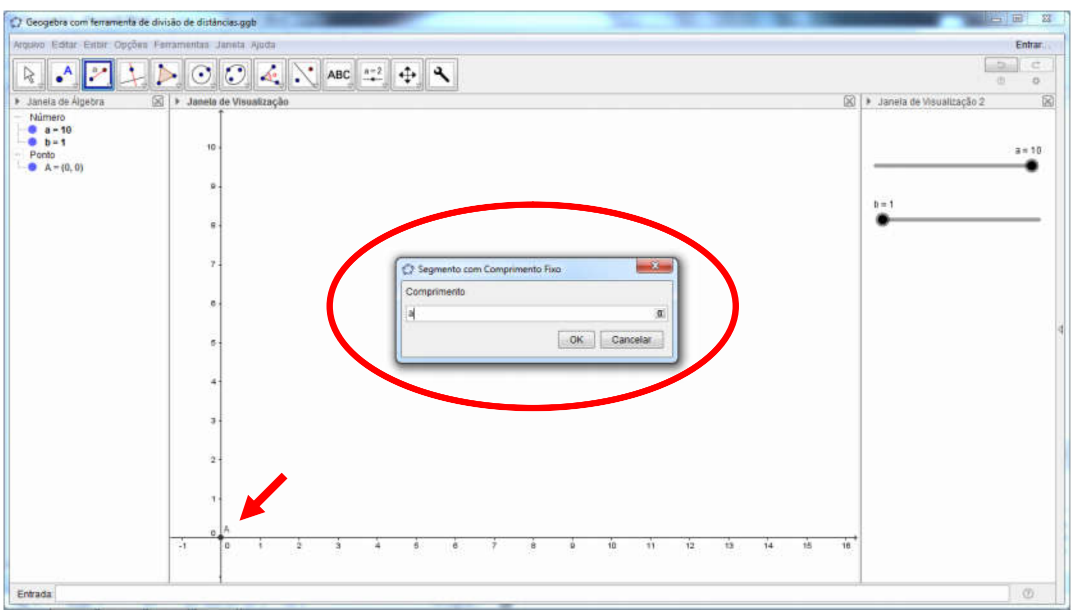


Figura 159: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 7
Fonte: o autor

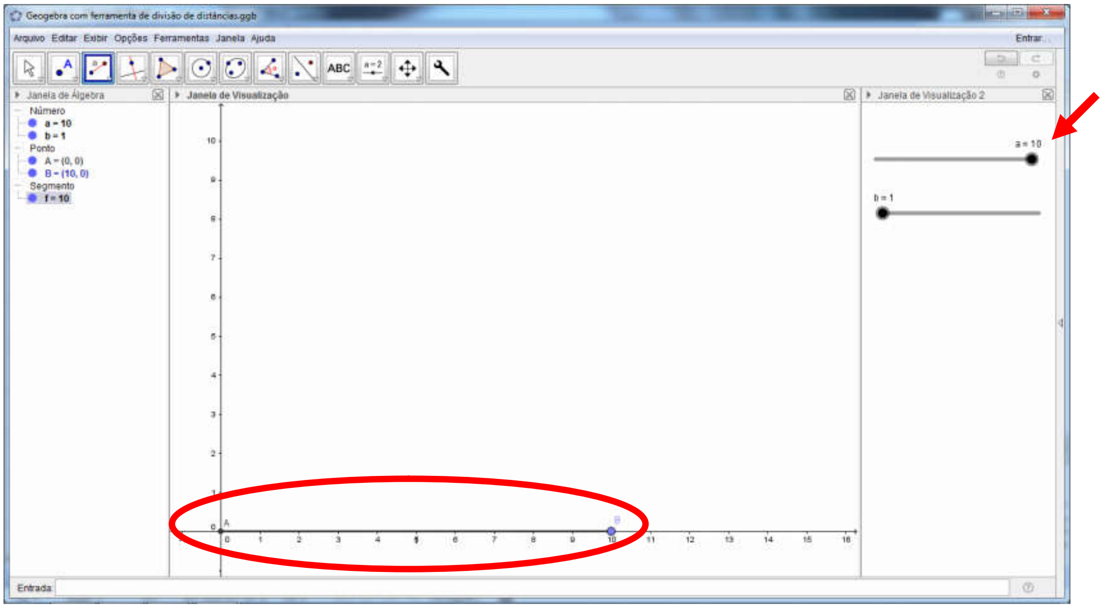


Figura 160: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 8
Fonte: o autor

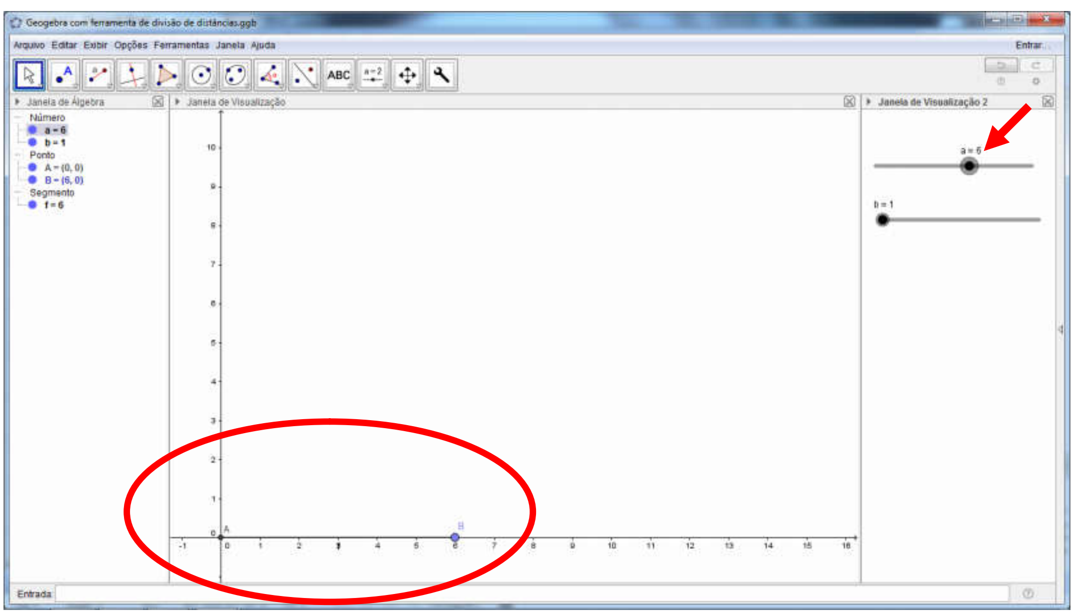


Figura 161: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 9
Fonte: o autor

v. Construir um triângulo equilátero com a ferramenta polígono regular usando com base o segmento $\overline{AB}$.

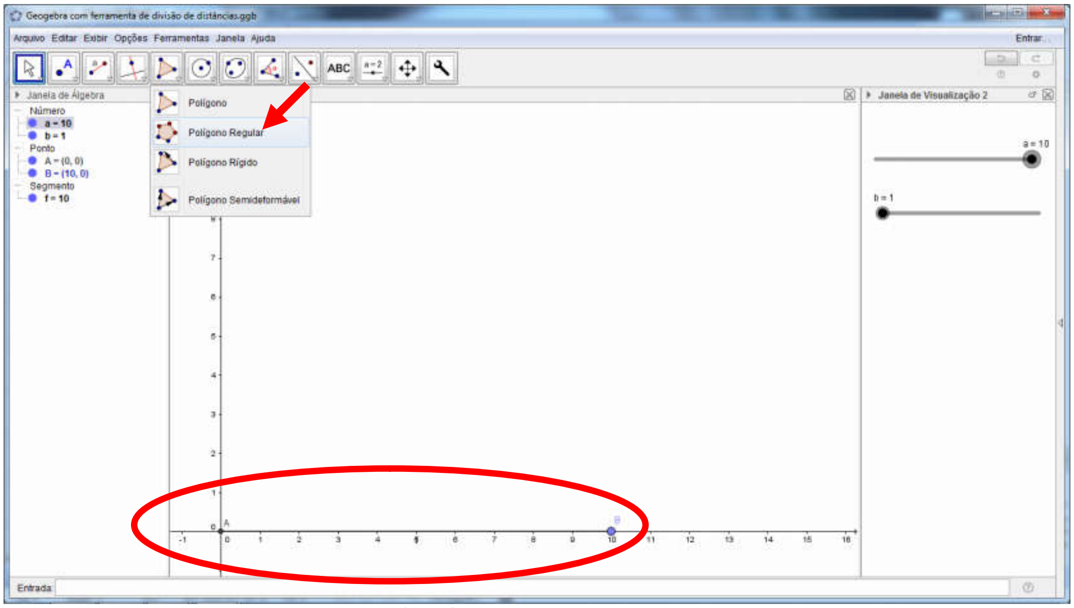


Figura 162: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 10
Fonte: o autor

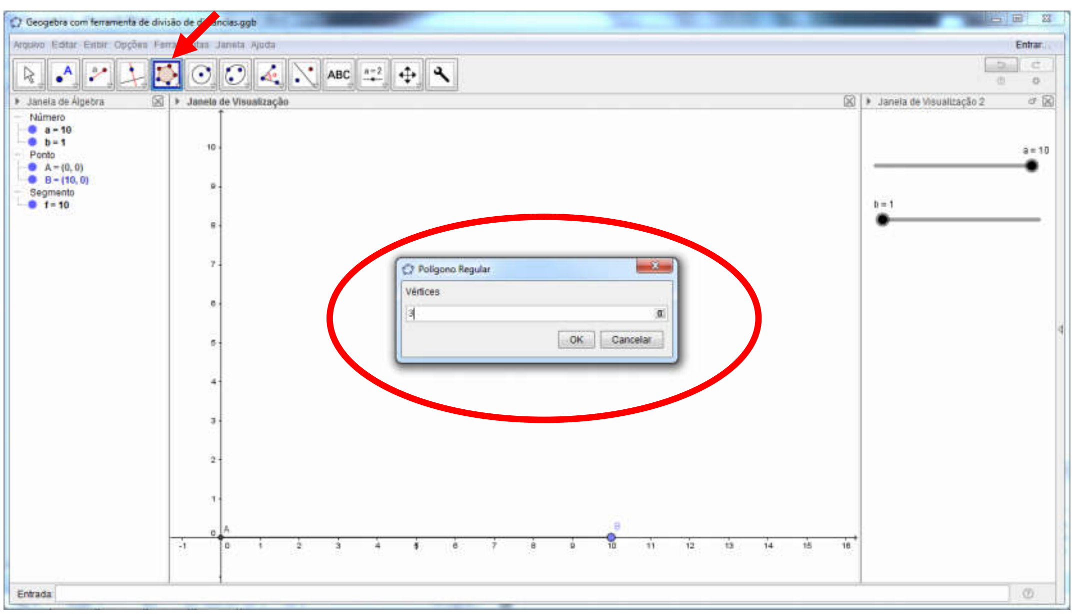


Figura 163: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 11
Fonte: o autor

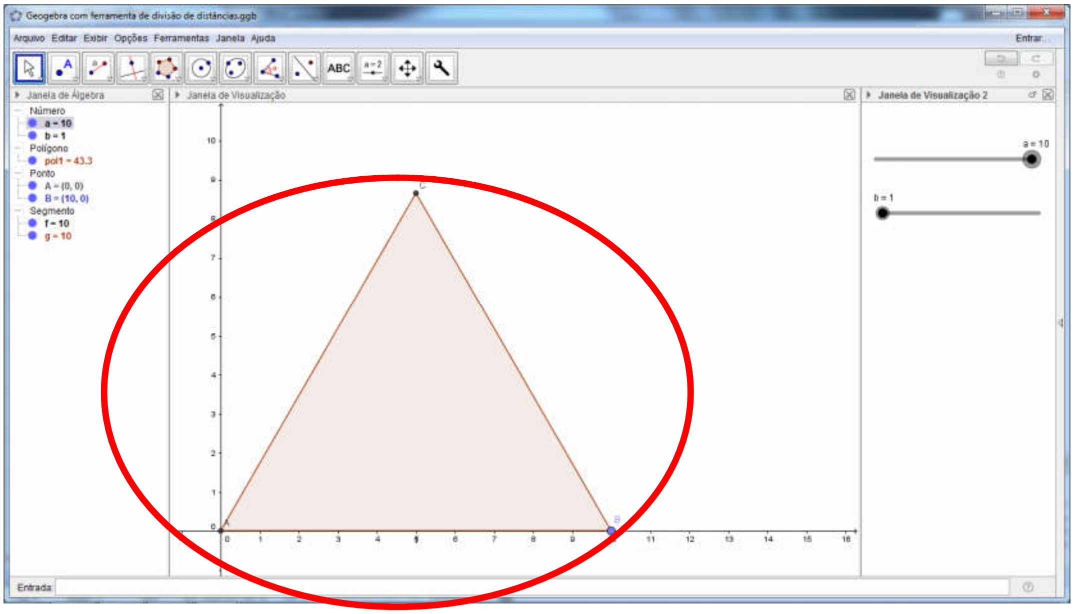


Figura 164: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 12
Fonte: o autor

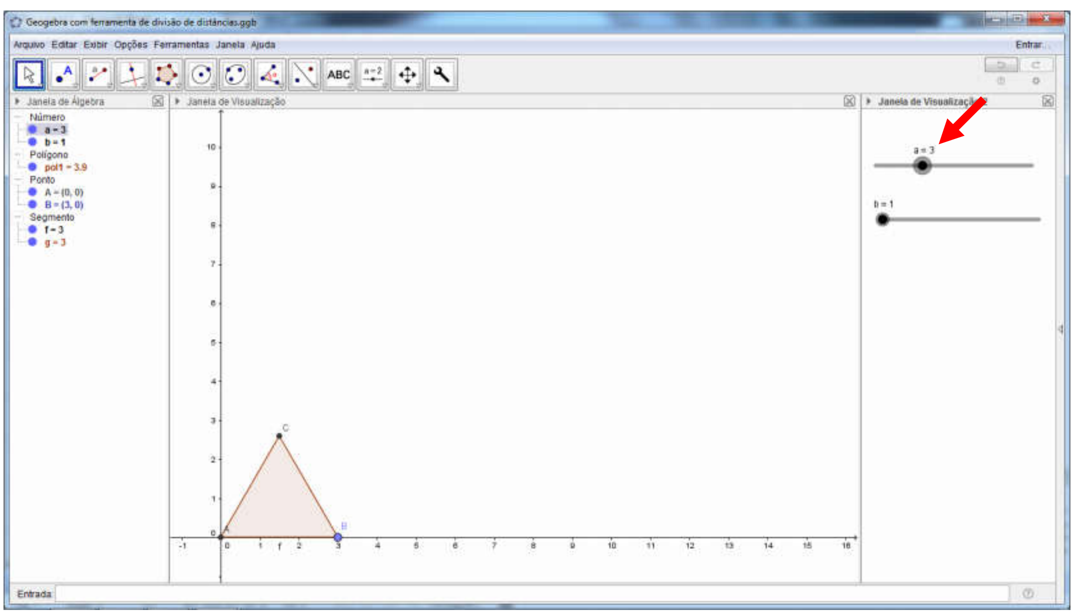


Figura 165: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 13
Fonte: o autor

vi. Construir um reta perpendicular à base passando pelo vértice C para servir com suporte para a altura de C.

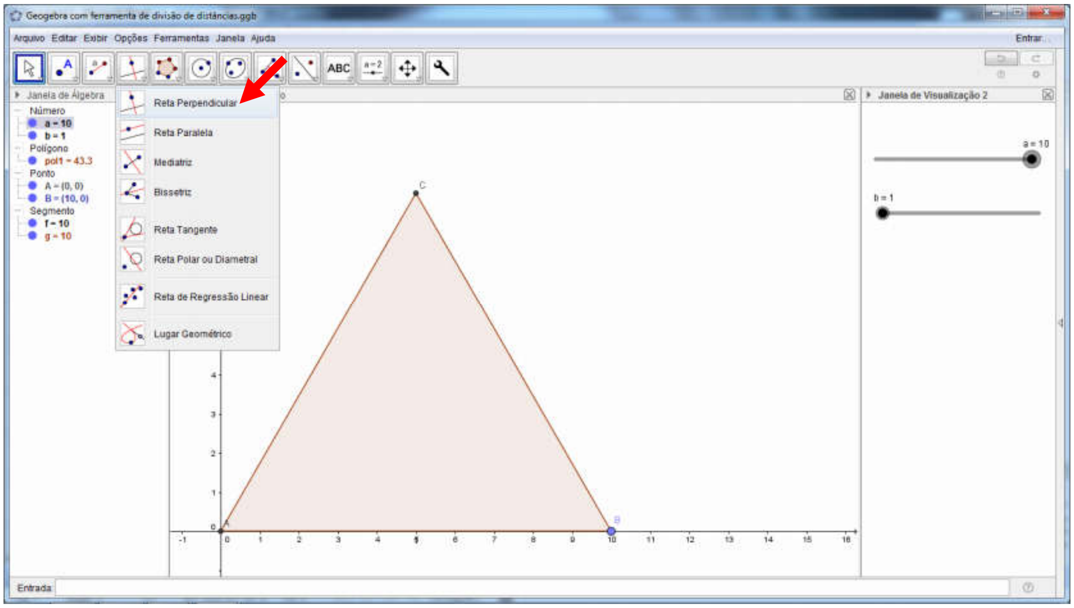


Figura 166: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 14
Fonte: o autor

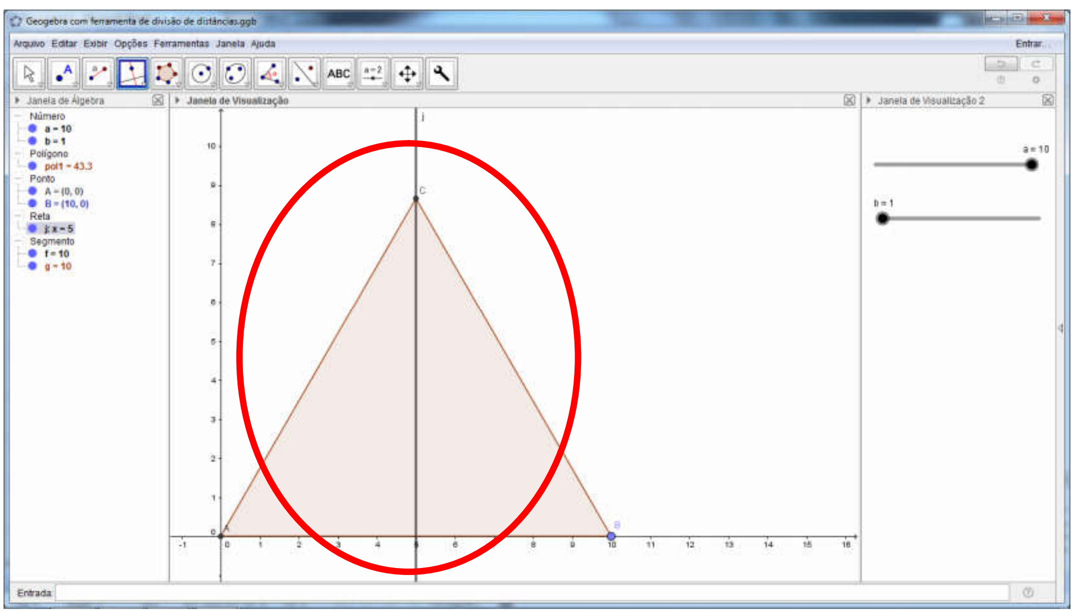


Figura 167: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 15
Fonte: o autor

vii. Utilizar a ferramenta Ponto em Objeto para marcar o ponto de intersecção da reta suporte da altura com a base definindo o pé da altura a ser construída.

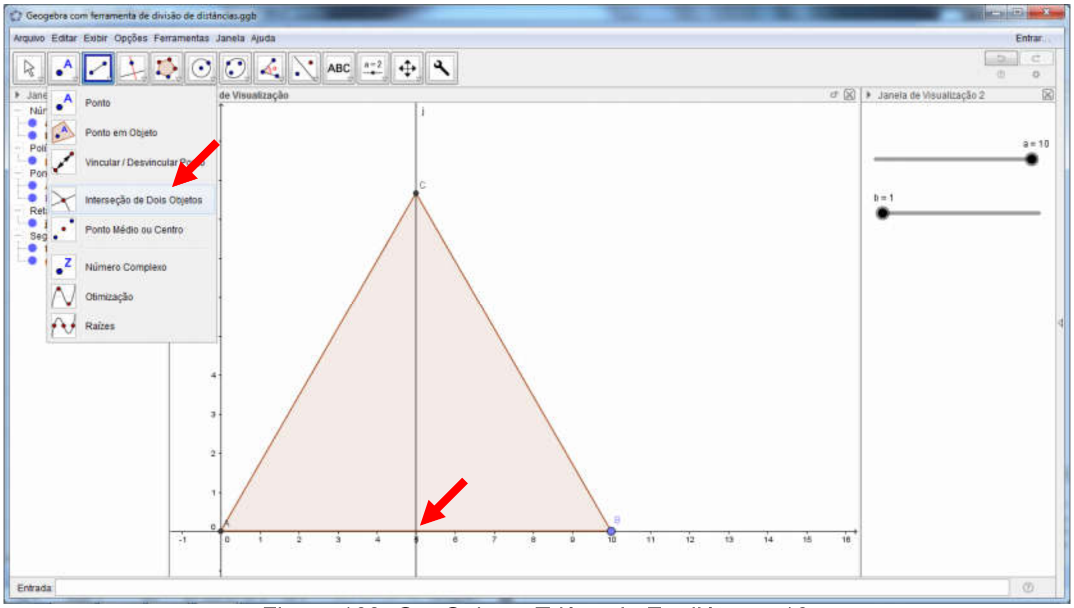


Figura 168: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 16
Fonte: o autor

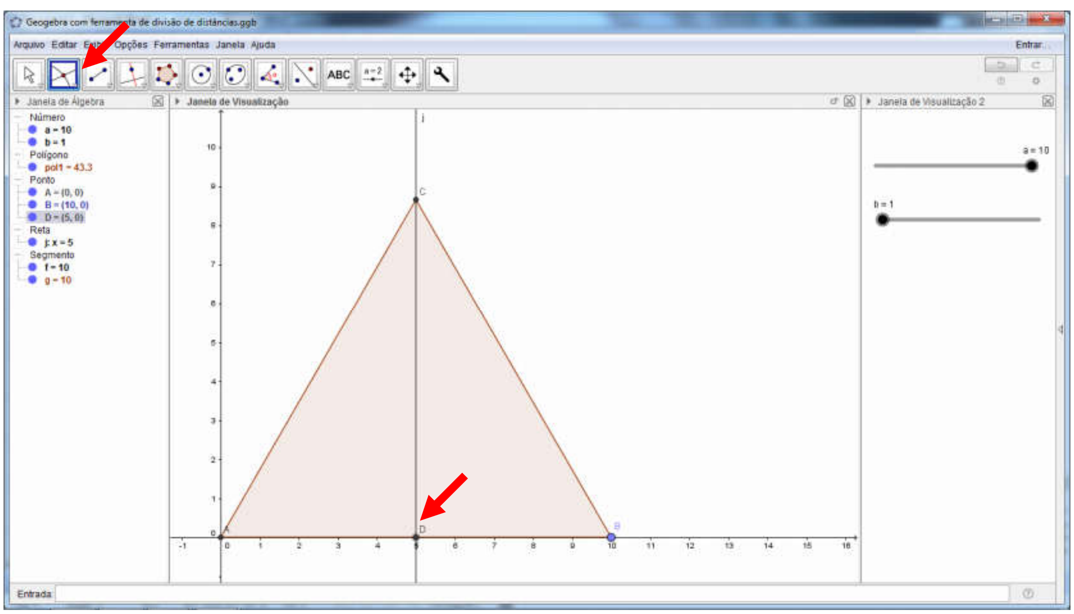


Figura 169: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 17
Fonte: o autor

viii. Construir a altura do vértice C com a ferramenta Segmento e desmarcar a reta suporte para que ela não mais apareça.

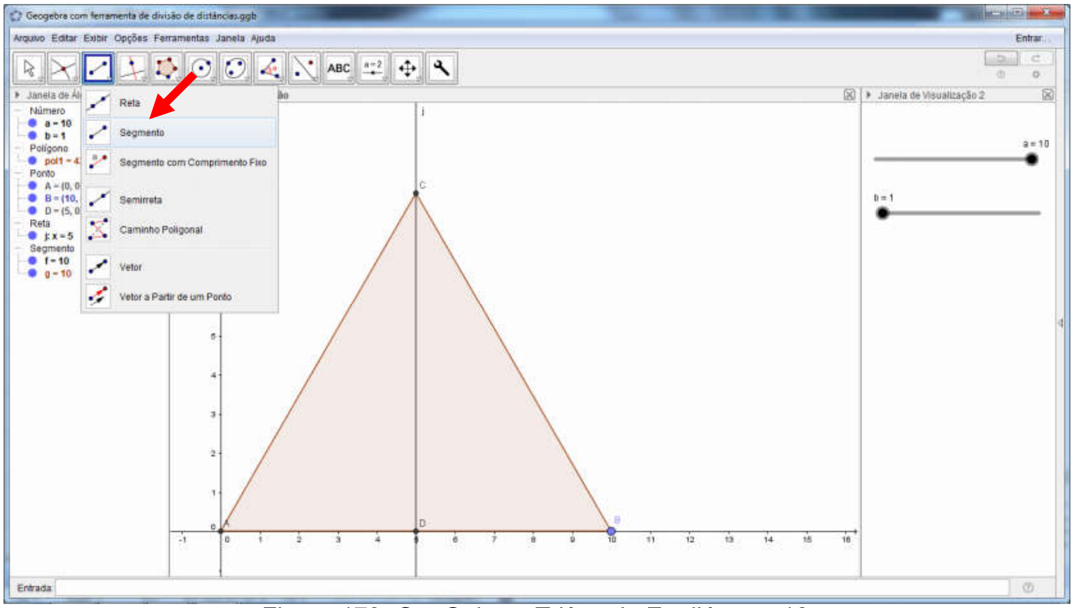


Figura 170: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 18
Fonte: o autor

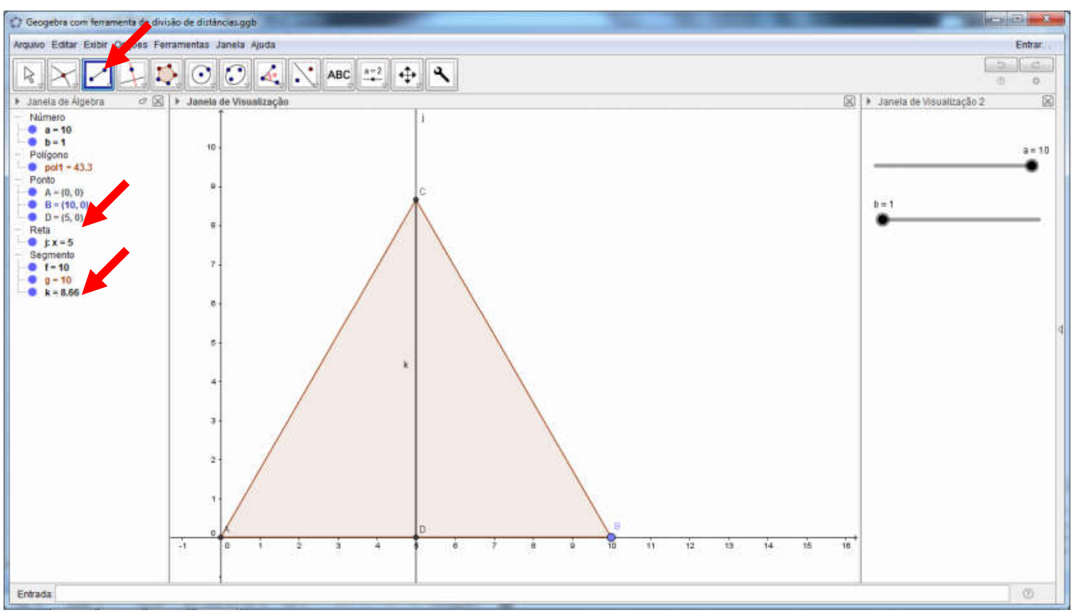


Figura 171: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 19
Fonte: o autor

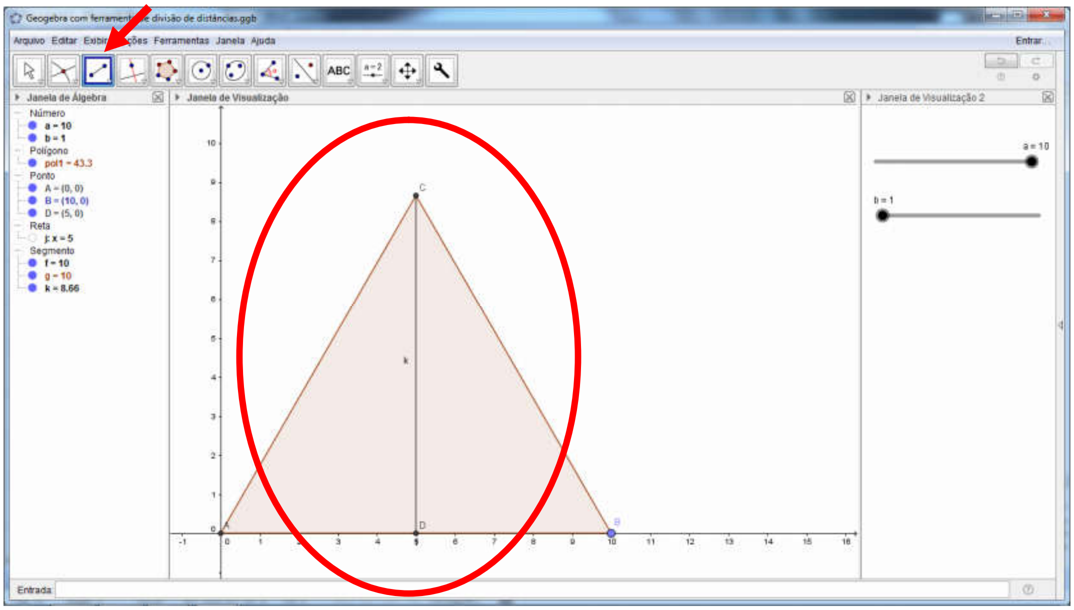


Figura 172: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 20
Fonte: o autor

Desmarcar os eixos (clicando na janela com o botão direito do mouse e aparece a caixa de configurações).

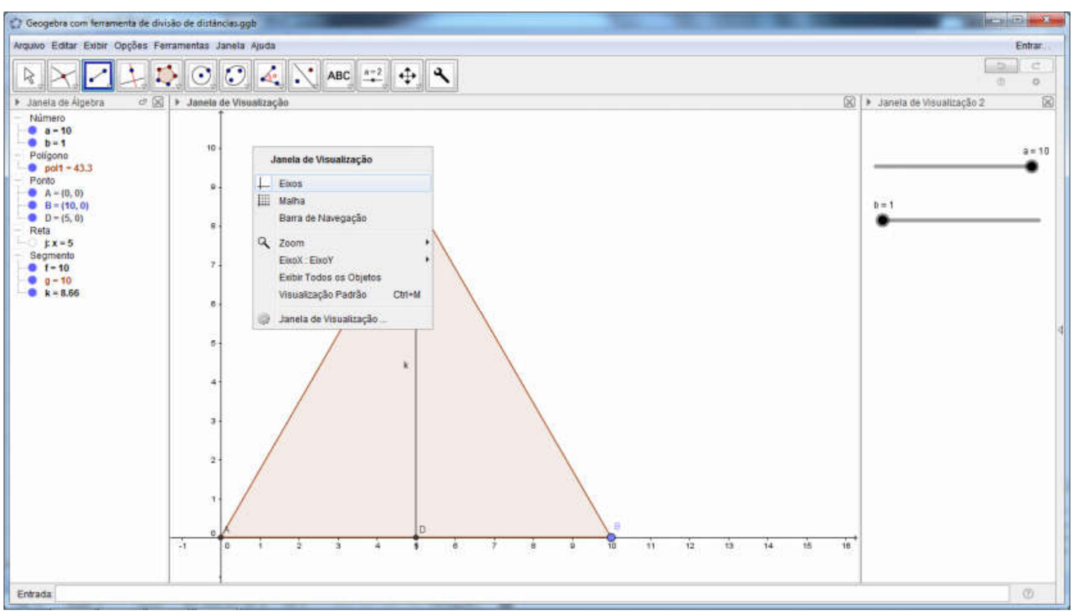


Figura 173: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 21
Fonte: o autor

O triângulo equilátero está pronto para ser usado. Os próximos passos são para a construção dos segmentos necessários às atividades de comparações visuais.

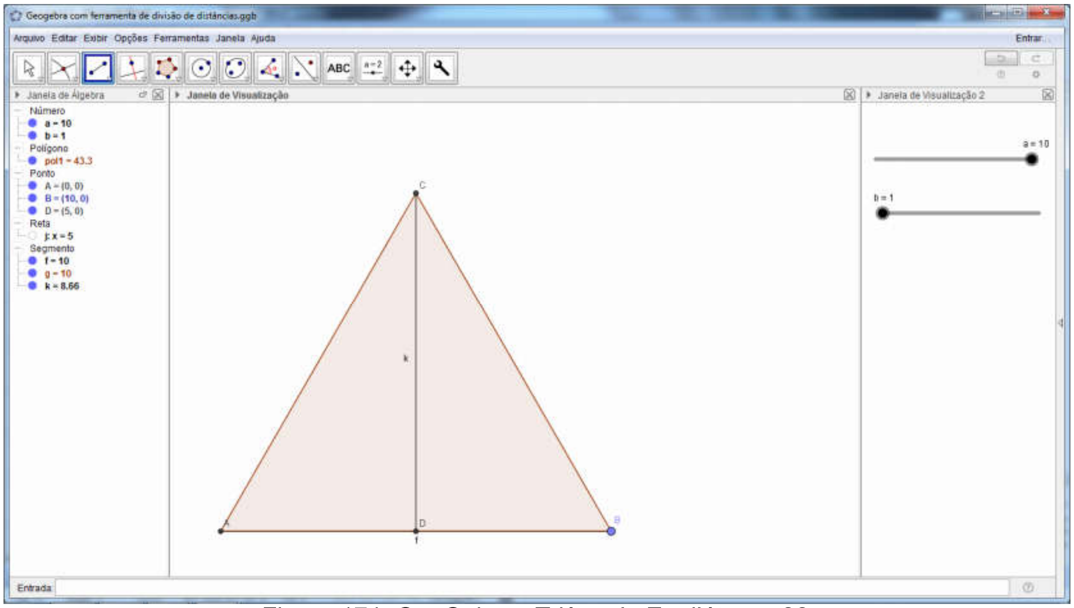


Figura 174: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 22
Fonte: o autor

ix. Construir um segmento fixo de comprimento "k" para a altura.

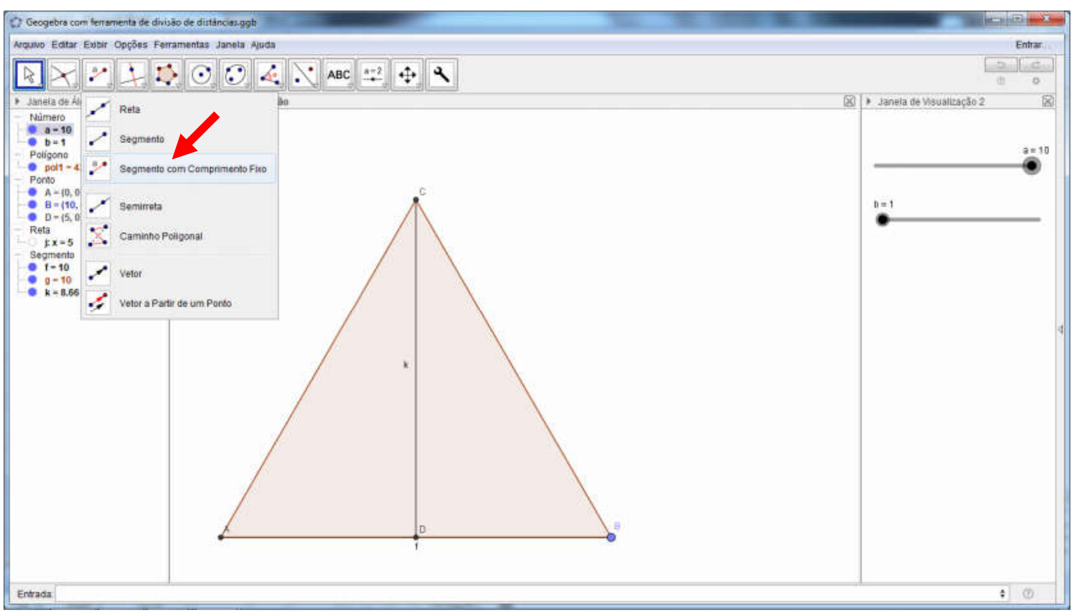


Figura 175: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 23
Fonte: o autor

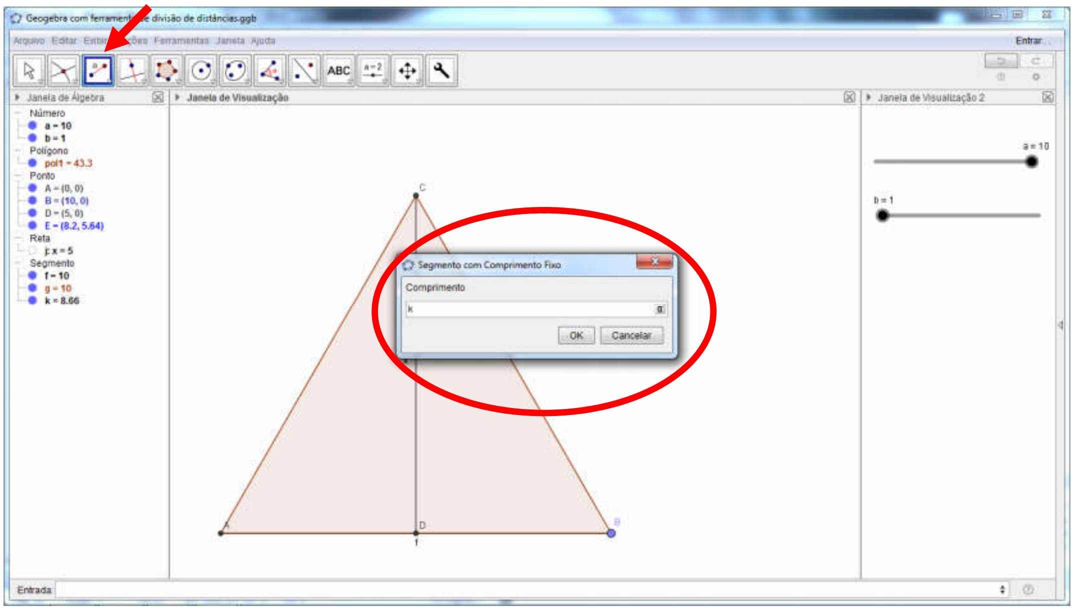


Figura 176: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 24
Fonte: o autor

x. Construir um segmento de comprimento fixo com medida "a" abaixo do primeiro segmento construído com medida "k".

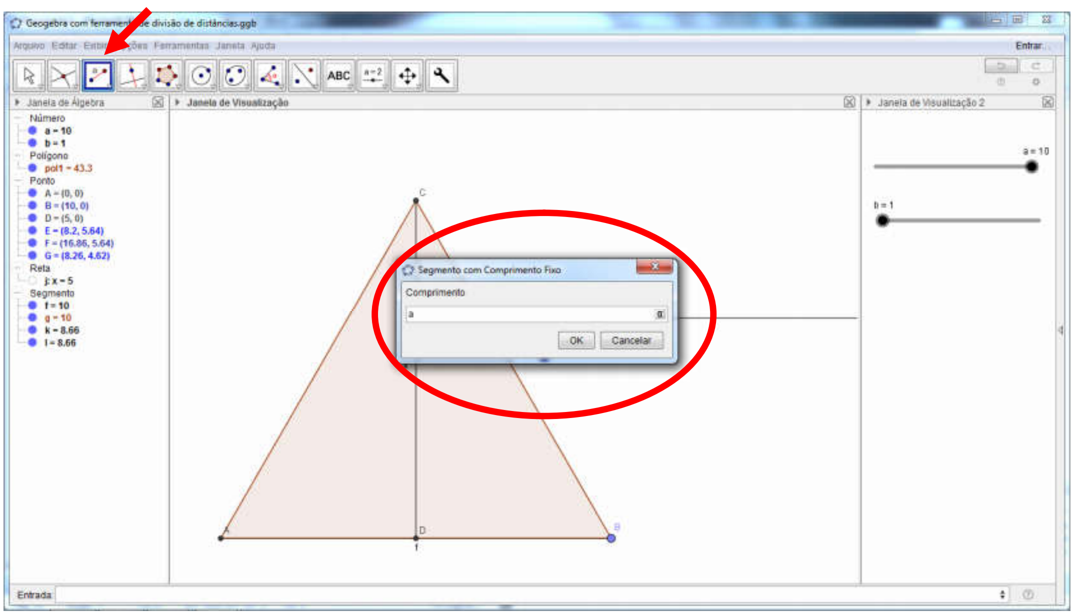


Figura 177: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 25
Fonte: o autor

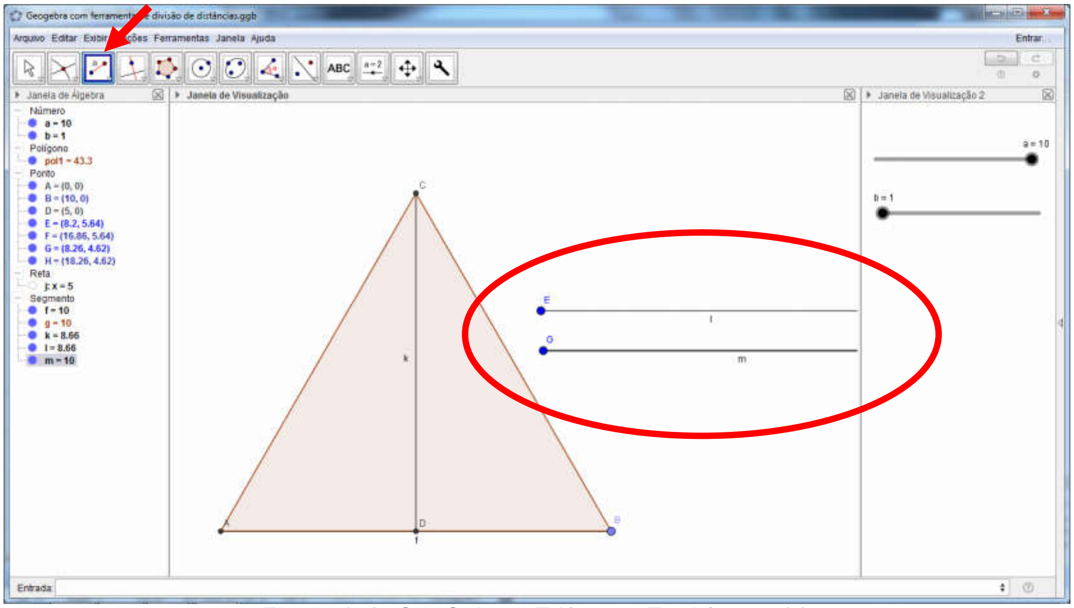


Figura 178: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 26
Fonte: o autor

xi. Alinhar verticalmente os pontos E e G igualando suas abscissas.

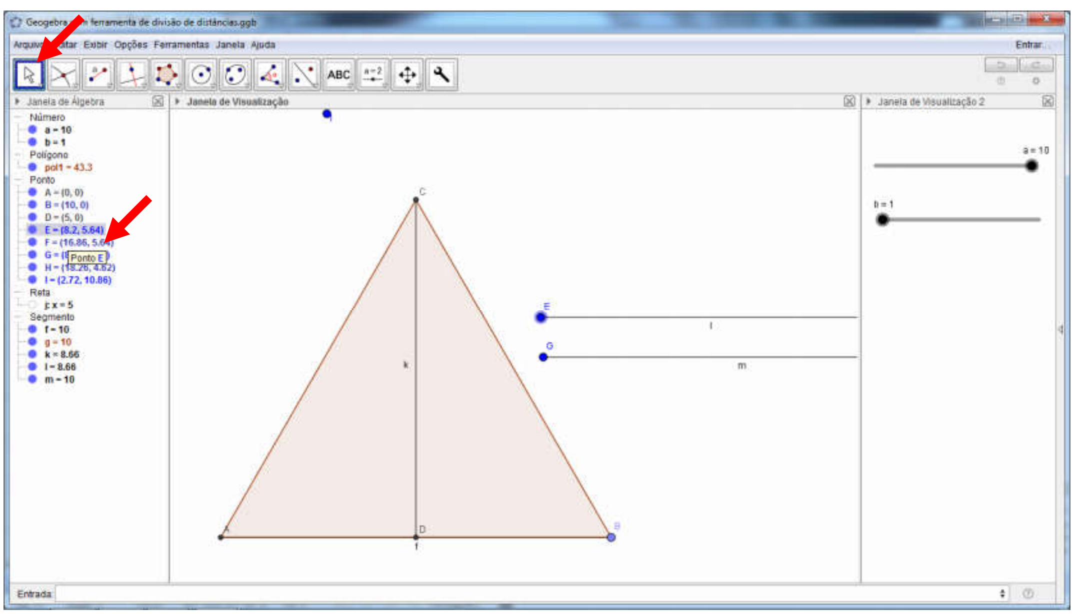


Figura 179: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 27
Fonte: o autor

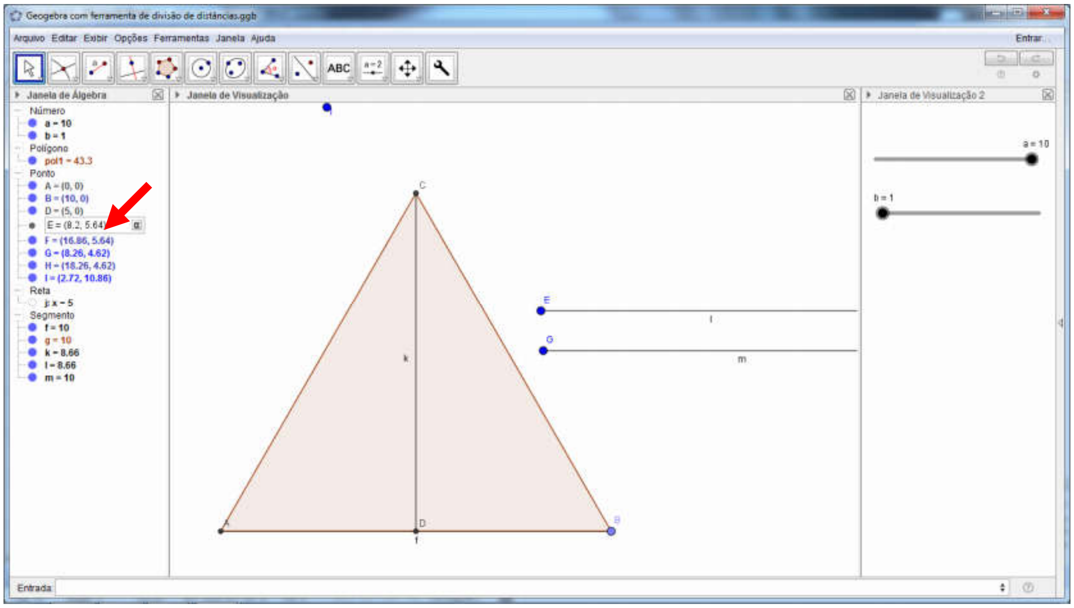


Figura 180: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 28
Fonte: o autor

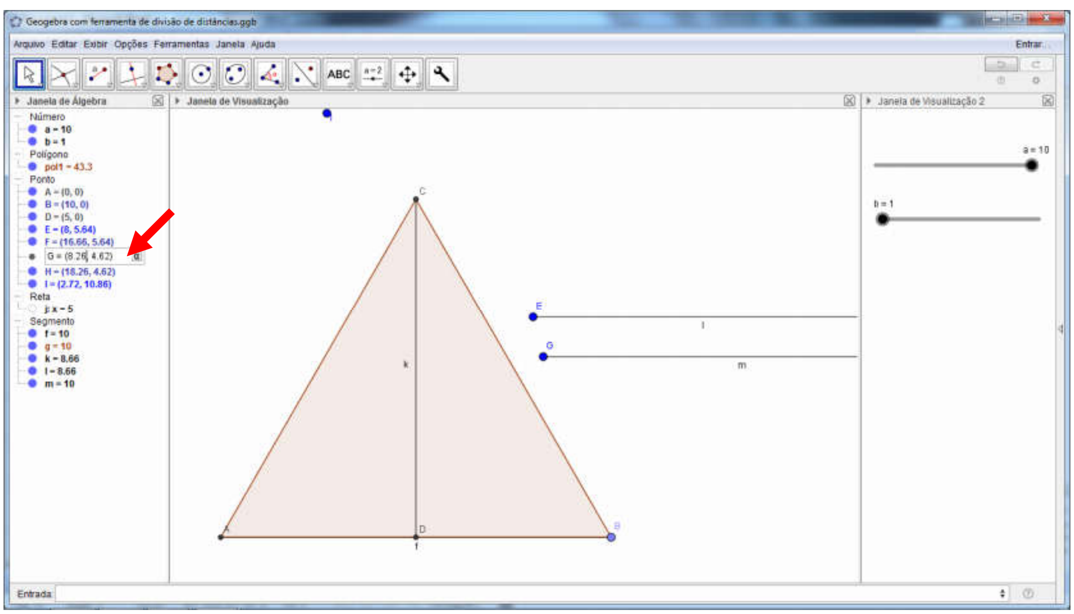


Figura 181: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 29
Fonte: o autor

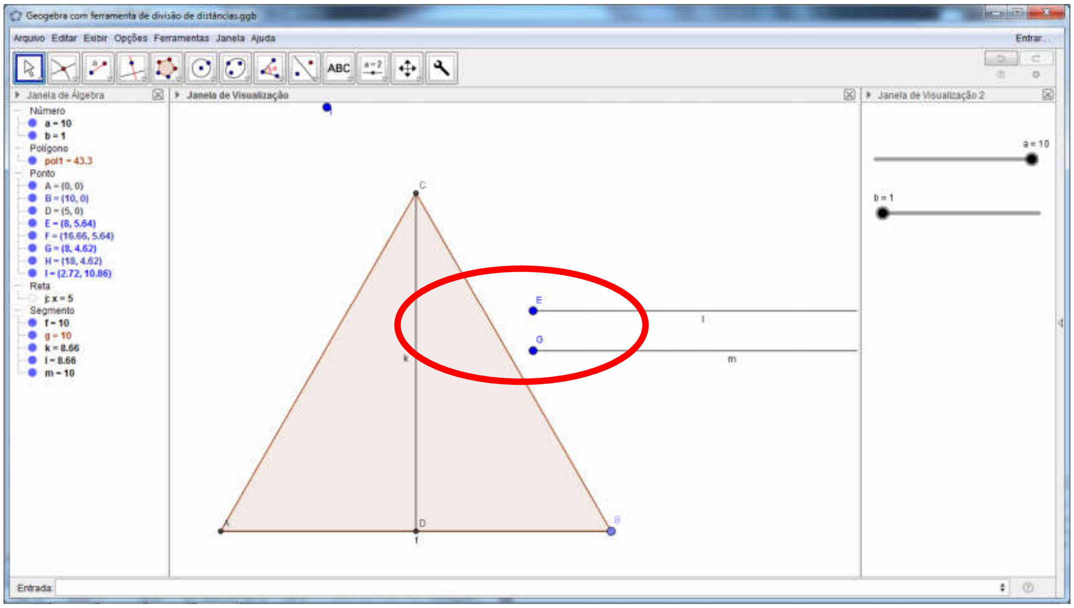


Figura 182: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 30
Fonte: o autor

Fechar a janela de álgebra.

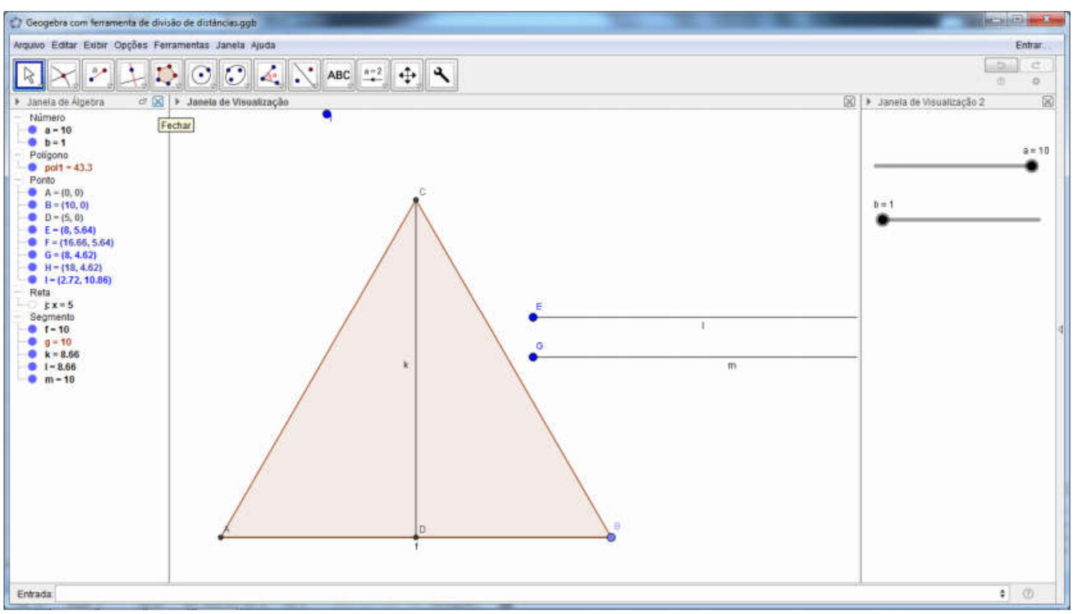


Figura 183: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 31
Fonte: o autor

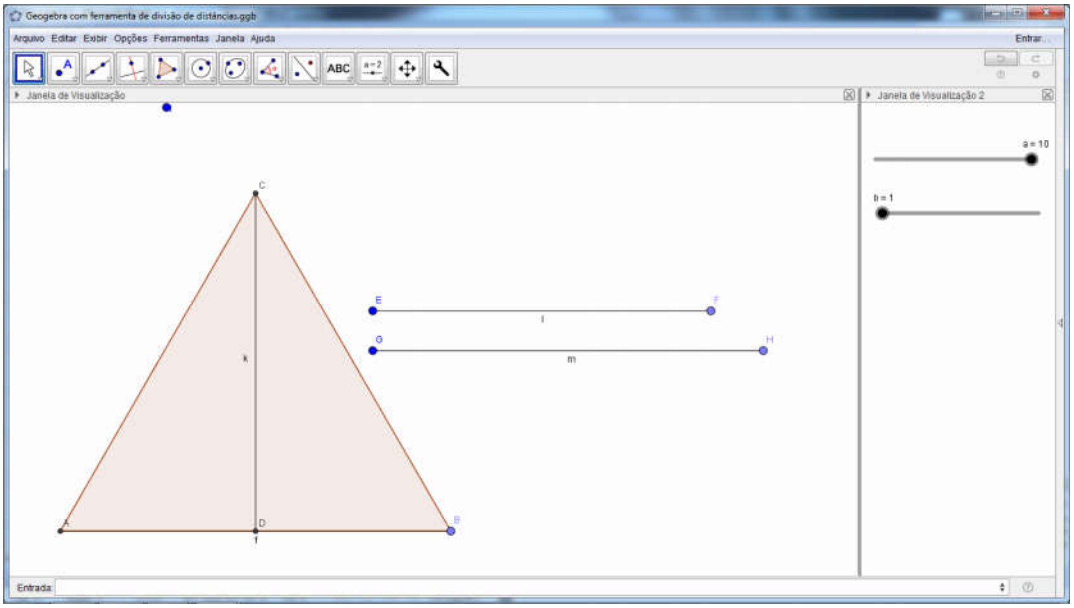


Figura 184: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 32
Fonte: o autor

xii. Com a ferramenta Dividir Distâncias gerar a partição do segmento "m" usando como quantidade de partes o valor "b" do controle deslizante.

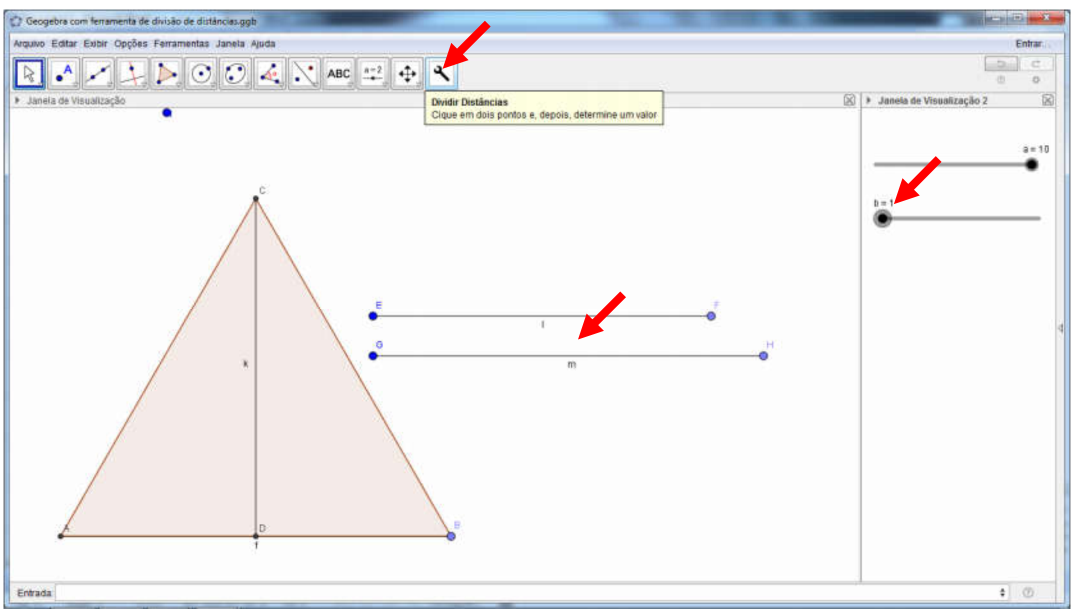


Figura 185: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 33
Fonte: o autor

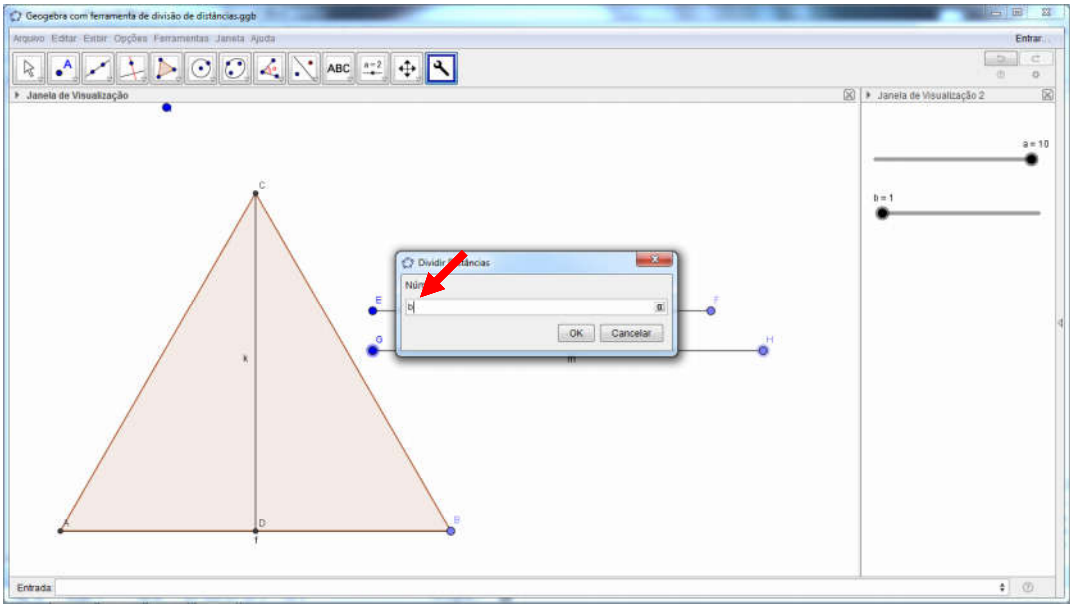


Figura 186: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 34
Fonte: o autor

A construção para realizar comparações entre as medidas da altura e dos lados de um triângulo equilátero está pronta bastando alterar as configurações de cores e estilos das linhas para deixar as observções mais fáceis e atrativas.

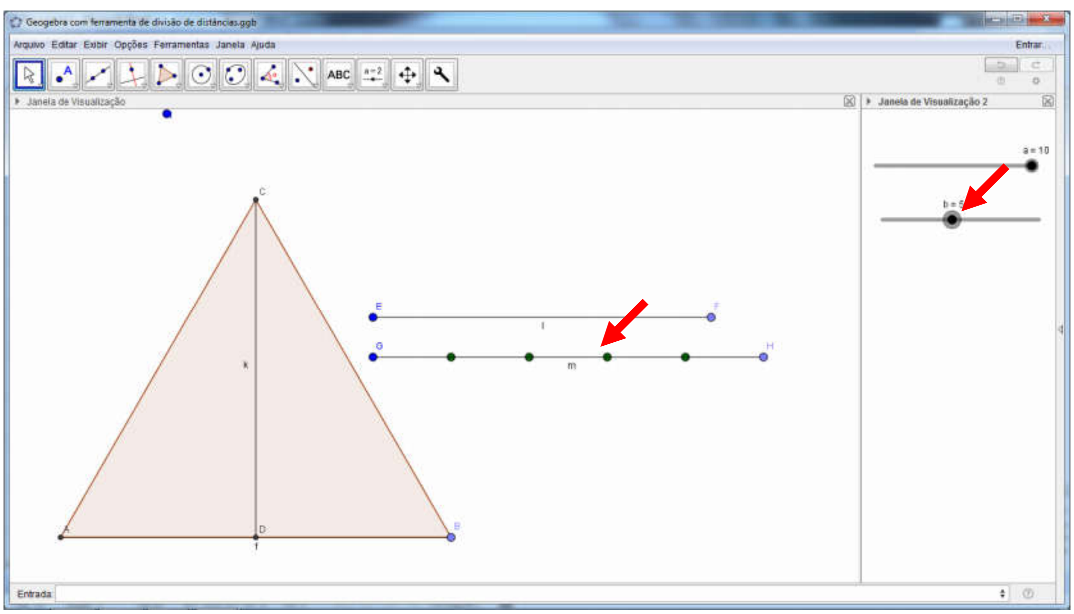


Figura 187: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 35
Fonte: o autor

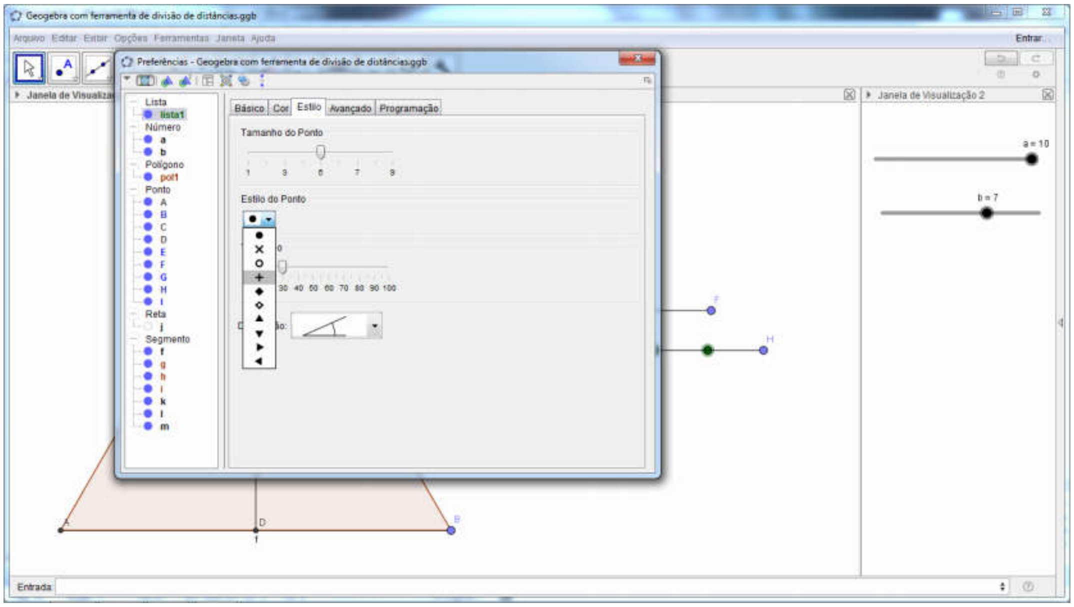


Figura 188: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 36
Fonte: o autor

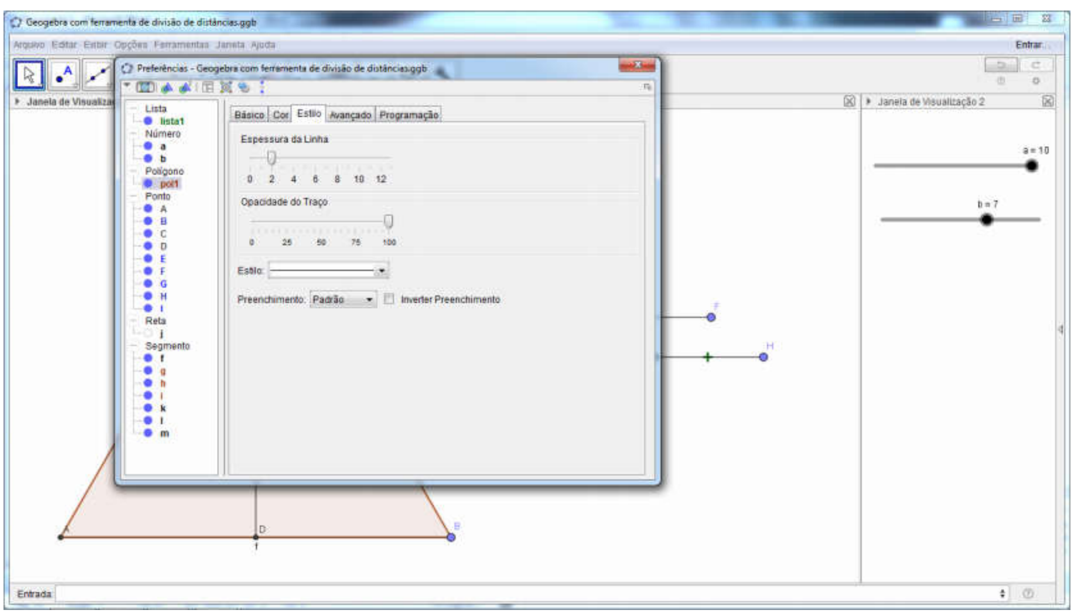


Figura 189: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 37
Fonte: o autor

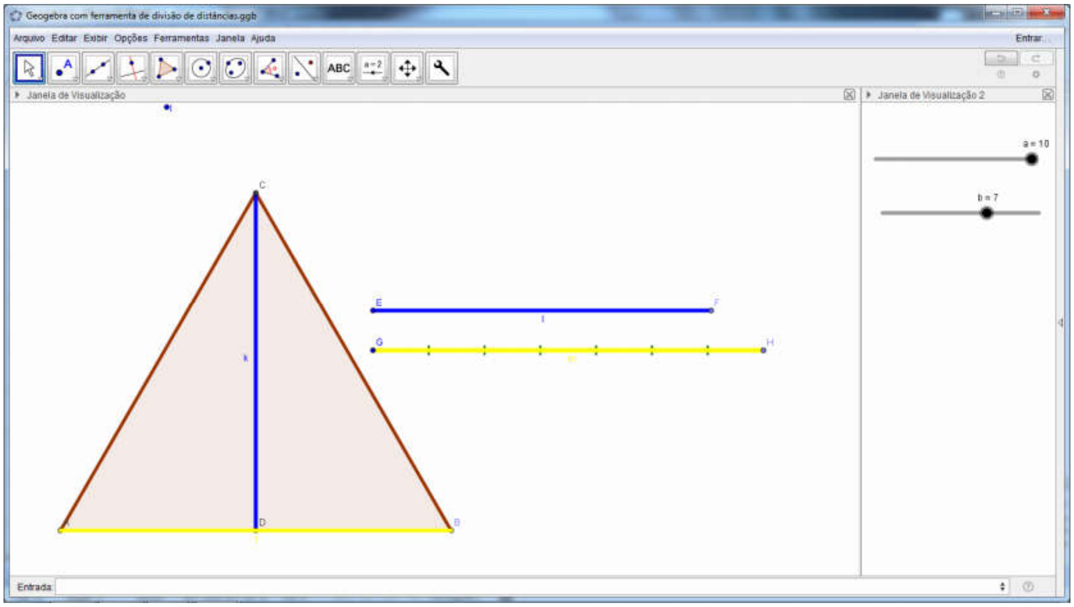


Figura 190: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 38
Fonte: o autor

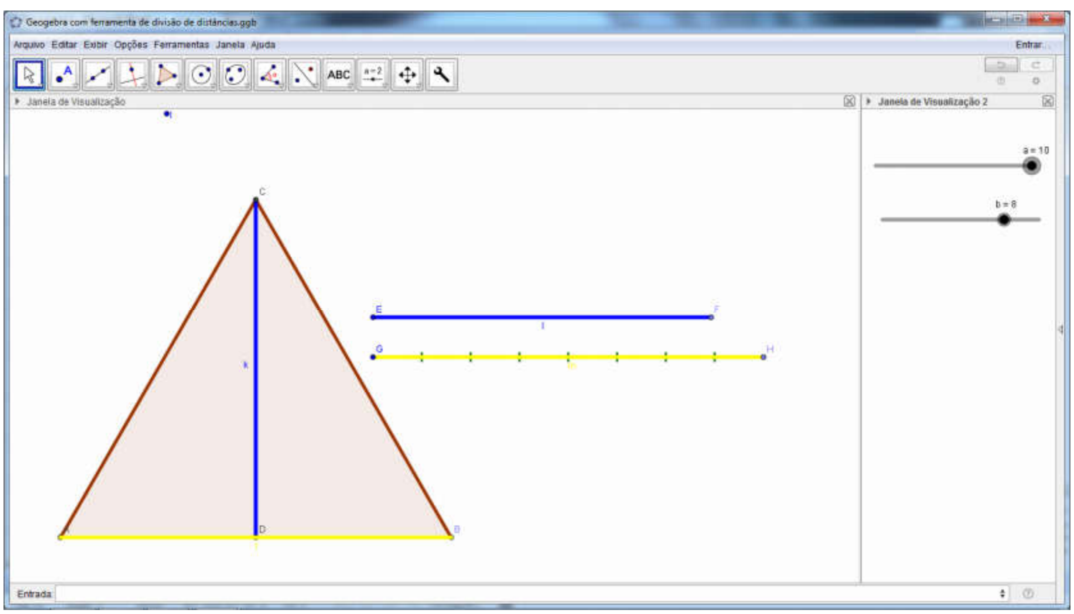


Figura 191: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 39
Fonte: o autor

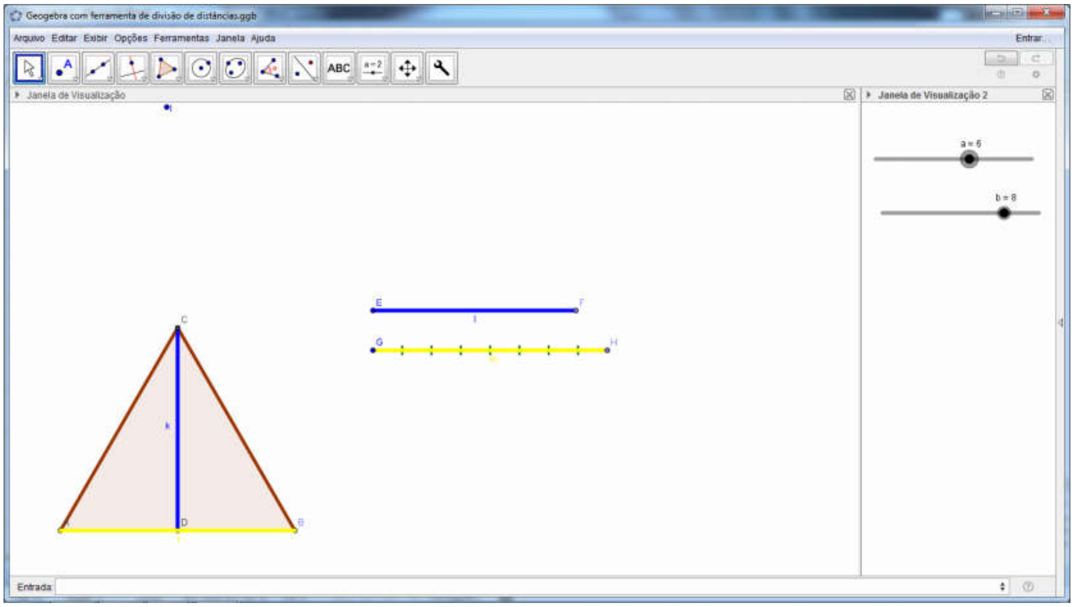


Figura 192: GeoGebra - Triângulo Equilátero - 40
Fonte: o autor

5.2 A DIAGONAL DE UM QUADRADO

O quadrado quando dividido por uma de suas diagonais nos oferece dois triângulos retângulos congruentes e isósceles dos quais obteremos os valores das razões trigonométricas do ângulo notável de 45°.

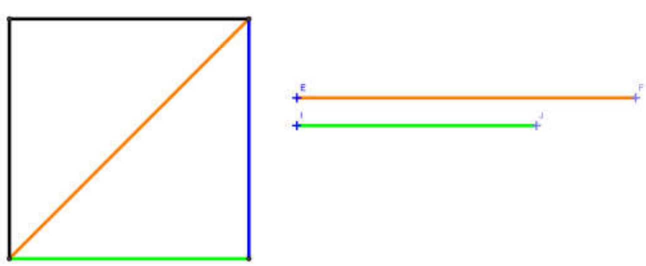


Figura 193: Quadrado - 1
Fonte: o autor

Desenho de um quadrado obtido do GeoGebra, com a medida da diagonal superposta à medida do lado para as comparações necessárias.

A diagonal é maior do que o lado.

$$d > \ell$$

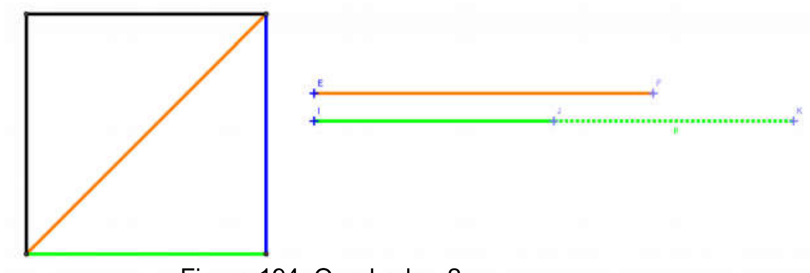


Figura 194: Quadrado - 2
Fonte: o autor

Duplicando-se o lado nota-se que a diagonal é menor do que o dobro do lado.

$$\ell < d < 2\ell$$

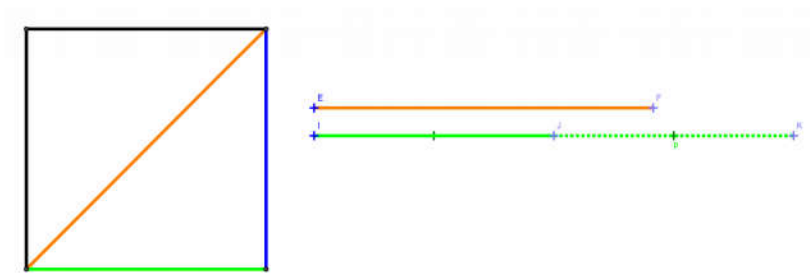


Figura 195: Quadrado - 3
Fonte: o autor

Dividindo-se o lado ao meio nota-se que a diagonal é menor do que três metades do lado.

$$\ell < d < \frac{3}{2}\ell \Rightarrow \ell < d < 1{,}50\ell$$

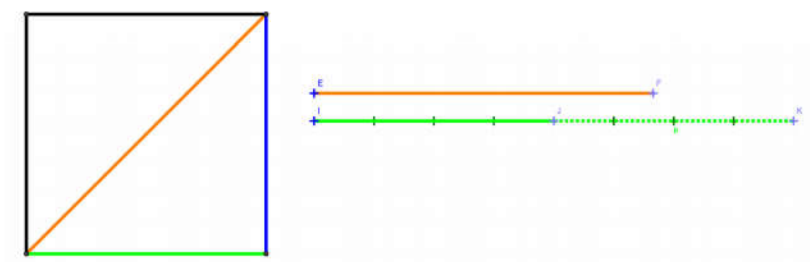


Figura 196: Quadrado - 4
Fonte: o autor

Dividindo-se o lado em quatro partes iguais nota-se que a diagonal é maior do que cinco quartos do lado.

$$\frac{5}{4}\ell < d < \frac{6}{4}\ell \Rightarrow$$
$$1{,}25\ell < d < 1{,}50\ell$$

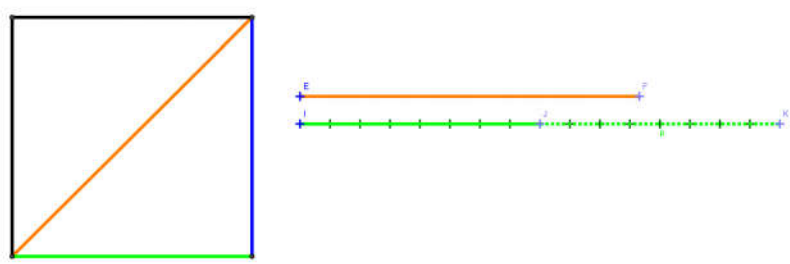


Figura 197: Quadrado - 5
Fonte: o autor

Dividindo-se o lado em oito partes iguais nota-se que a diagonal é maior do que onze oitavos do lado.

$$\frac{11}{8}\ell < d < \frac{12}{8}\ell \Rightarrow$$
$$1{,}375\ell < d < 1{,}50\ell$$

Estamos próximos do valor correto e pode-se aceitar as estimativas dos alunos entre 1,375 e 1,50. Alguns dirão 1,45, outros 1,40 ou 1,42 e isso já seria suficiente para quando efetuar a aplicação do Teorema de Pitágoras verificar que dá para confiar naquilo que podemos apenas visualizar. Contudo, utilizando a ferramenta de divisão de distâncias do GeoGebra podemos dividir facilmente e outras frações e para tanto cremos que cinco partes seja suficiente.

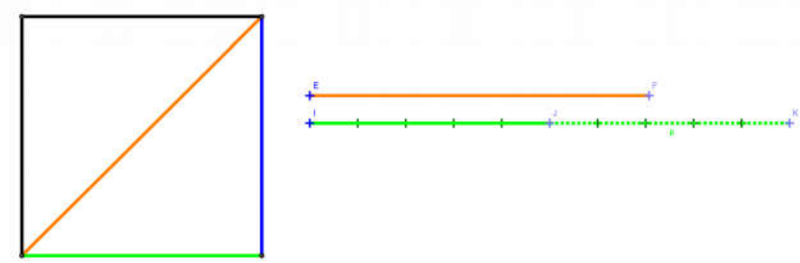


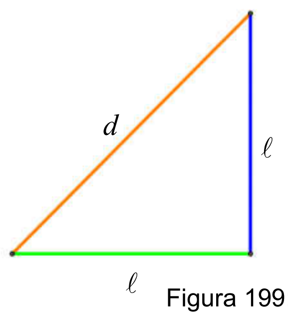
Figura 198: Quadrado - 6
Fonte: o autor

Dividindo-se o lado em cinco partes iguais nota-se que a diagonal é um pouco maior do que sete quintos do lado.

$$\frac{7}{5}\ell < d < \frac{8}{5}\ell \Rightarrow$$
$$1{,}40\ell < d < 1{,}50\ell$$

Podemos inferir que, visualmente, a diagonal mede um pouco mais do que sete quintos da medida do lado, ou seja, um pouco mais que um lado mais quarenta por cento de um segundo lado, pouco mais que 1,40, 1,41 ou 1,42 seria uma ótima estimativa visual.

Aplicando o Teorema de Pitágoras a um dos triângulos retângulos obtidos encontraremos o resultado preciso.



$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$
$$d^2 = 2\ell^2$$
$$d = \sqrt{2}\sqrt{\ell^2}$$
$$d = \ell\sqrt{2}$$

$$d \cong \ell \cdot 1{,}41421 \; d \cong 1{,}41\ell$$

Figura 199: Quadrado - 7
Fonte: o autor

Quando se demonstra o resultado através do teorema antes das comparações visuais a grande maioria dos estudantes não compreendem o significado para $d = \ell\sqrt{2}$. Portanto, vale a pena medir, comparar, desenhar em escala e medir na escala desenhada, qualquer ferramenta ou procedimento que auxilie na compreensão dos resultados que virão a ser calculados serão sempre bem vindos.

5.2.1 Atividade com quadrado elaborada no GeoGebra

A seguir apresentamos o passo a passo para a construção da atividade com o quadrado no Geogebra. Após pronta a construção pode-se mostrar aos alunos ,variando as dimensões do quadrado, que a diagonal comparada ao lado mantém sempre a mesma proporção.

i. repetir os procedimentos para construção do triângulo equilátero até o item v alterando de 3 para quatro a quantidade de vértices.

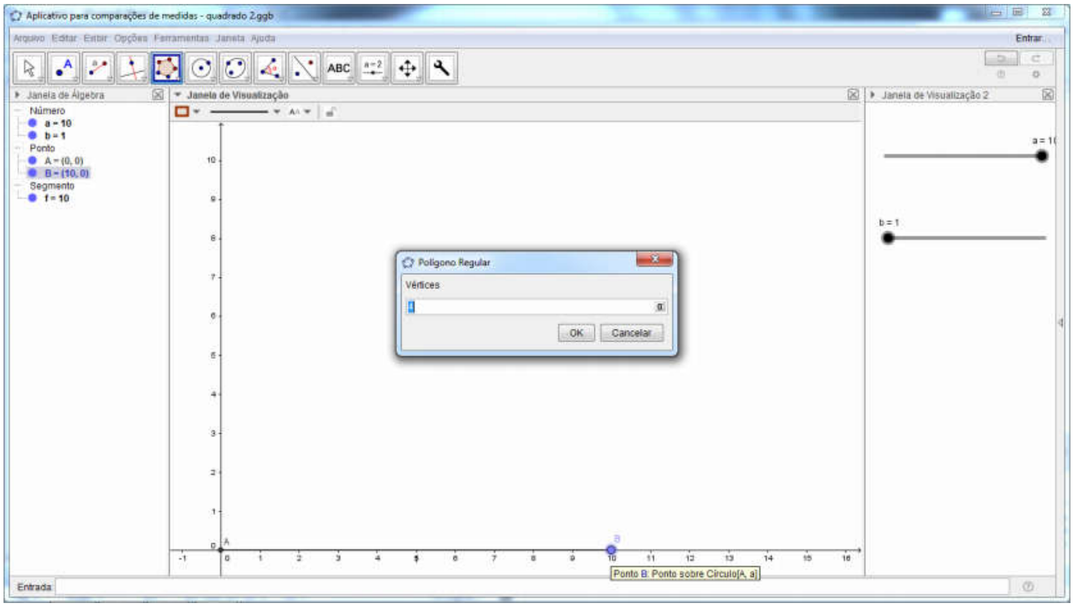


Figura 200: GeoGebra - Quadrado - 1
Fonte: o autor

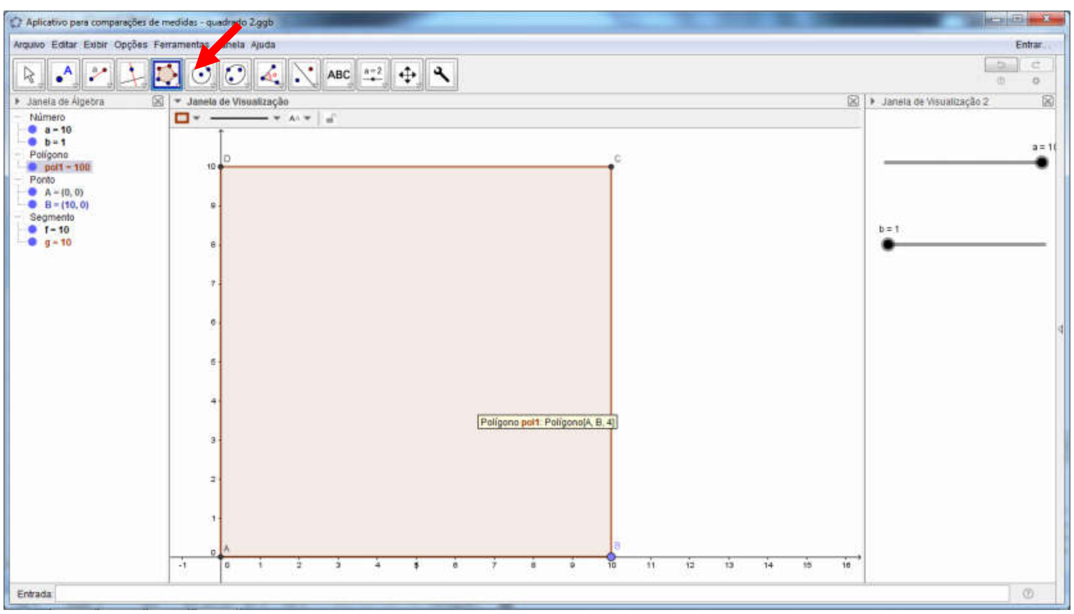


Figura 201: GeoGebra - Quadrado - 2
Fonte: o autor

ii. Construir um segmento $\overline{AC}$ que é um das diagonais do quadrado.

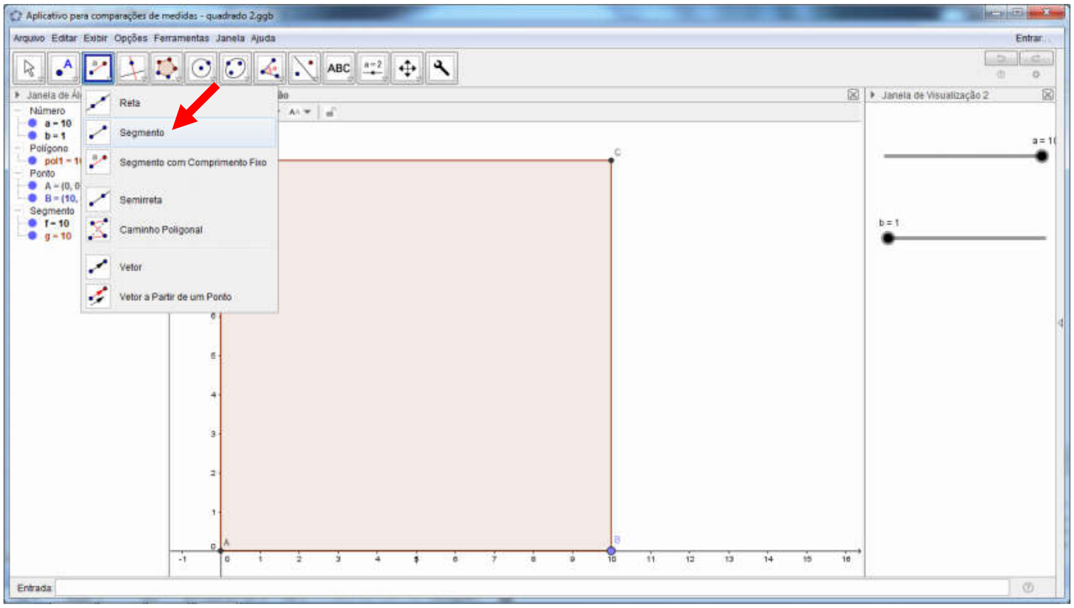


Figura 202: GeoGebra - Quadrado - 3
Fonte: o autor

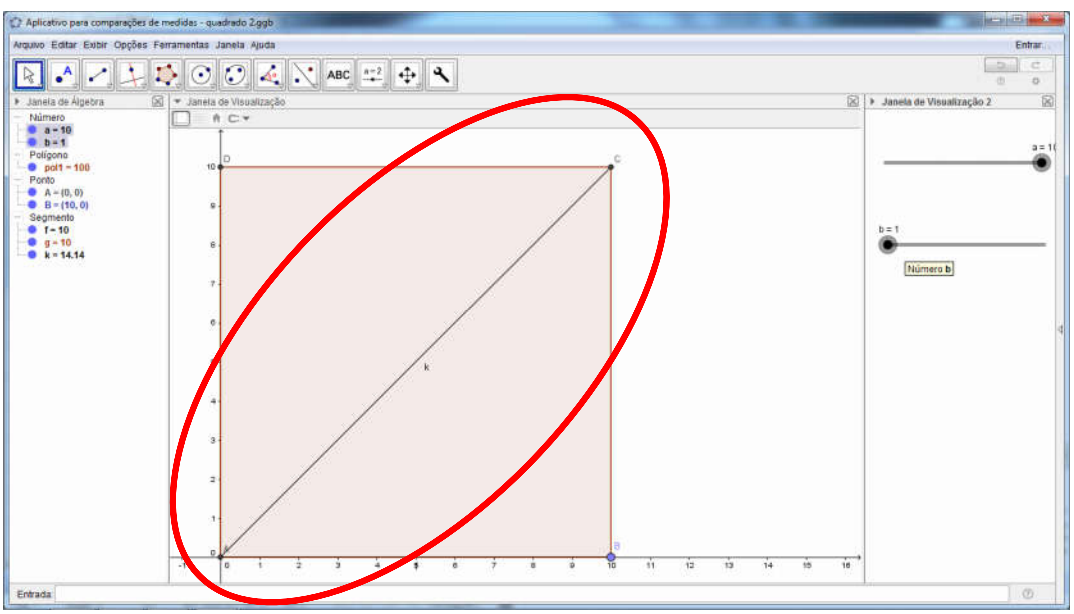


Figura 203: GeoGebra - Quadrado - 4
Fonte: o autor

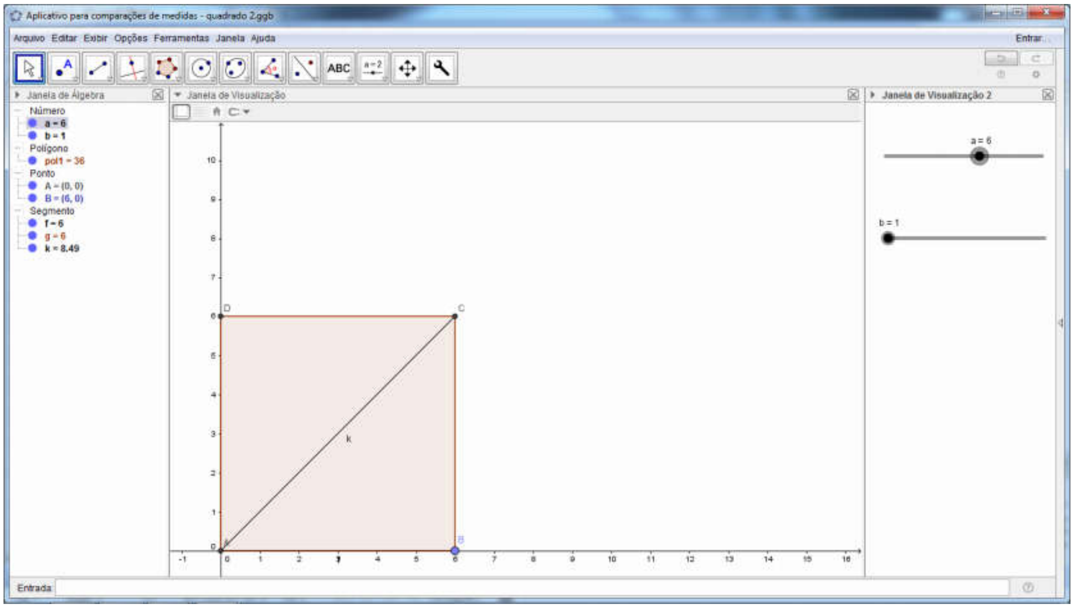


Figura 204: GeoGebra - Quadrado - 5
Fonte: o autor

iii. Marcar dois pontos E e F e igualar suas abscissas.

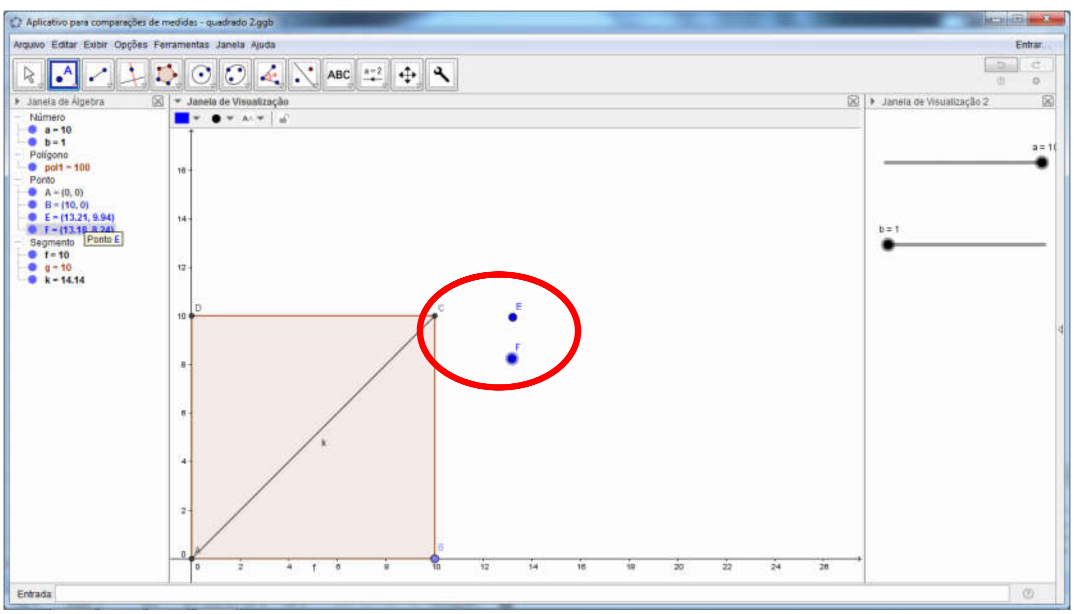


Figura 205: GeoGebra - Quadrado - 6
Fonte: o autor

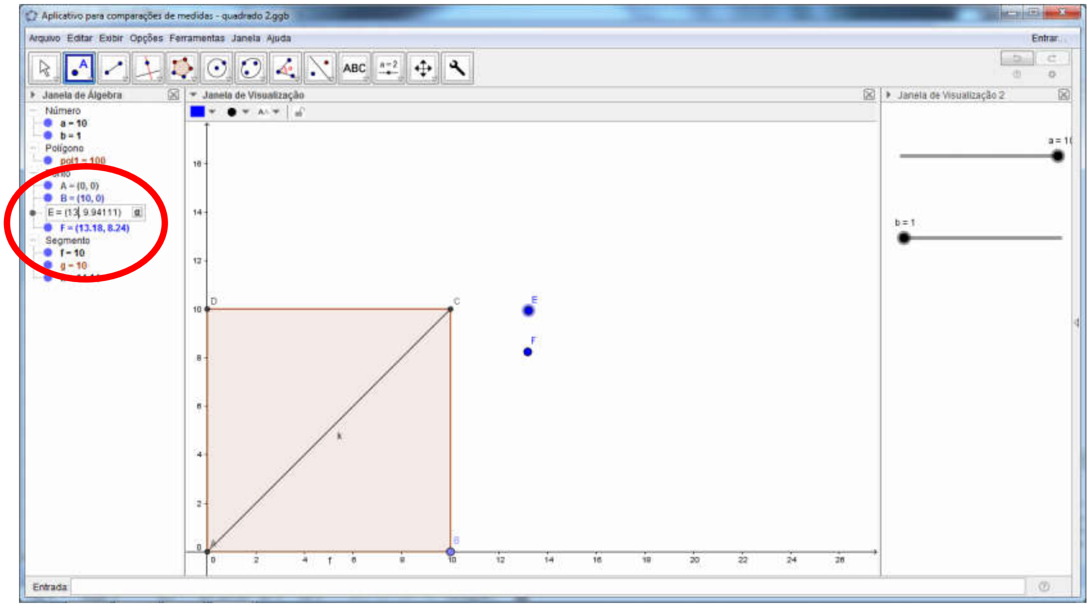


Figura 206: GeoGebra - Quadrado - 7
Fonte: o autor

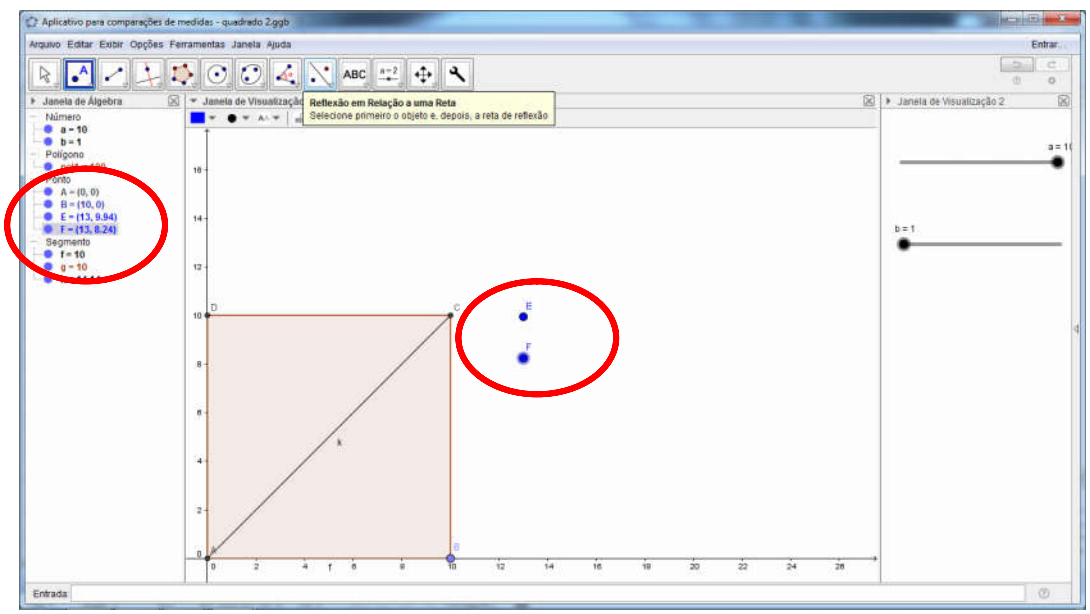


Figura 207: GeoGebra - Quadrado - 8
Fonte: o autor

iv. Construir em E um segmento de comprimento fixo de valor k.

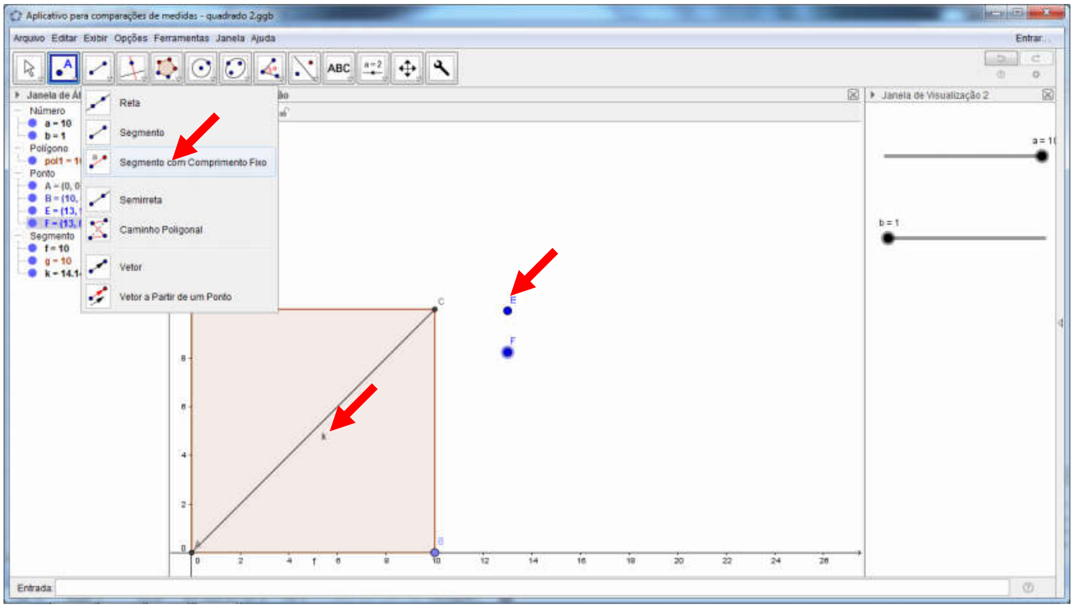


Figura 208: GeoGebra - Quadrado - 9
Fonte: o autor

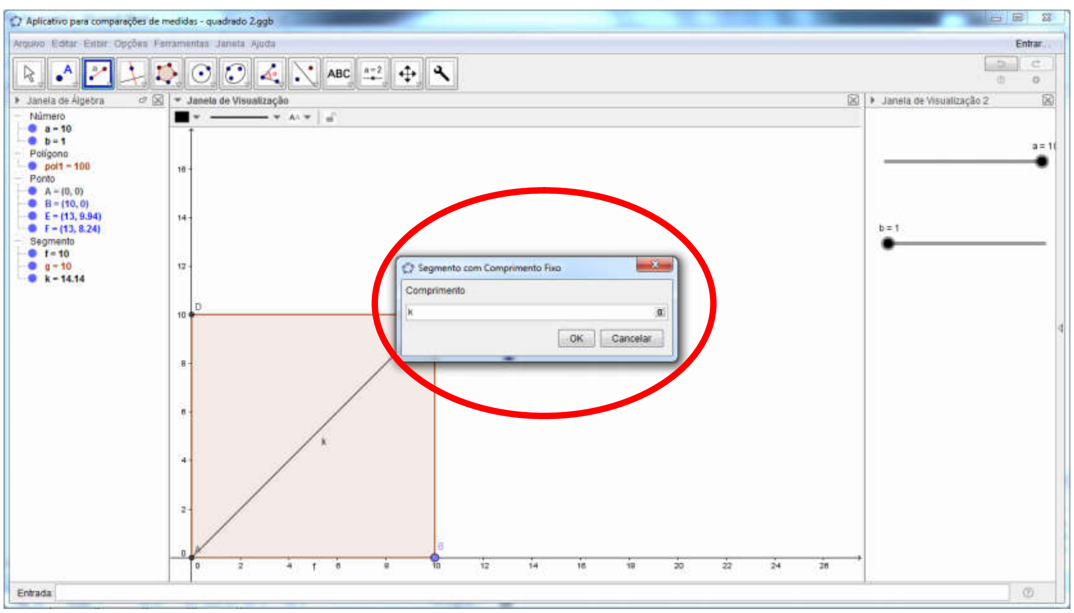


Figura 209: GeoGebra - Quadrado - 10
Fonte: o autor

v. Construir em F um segmento de comprimento fixo de valor "a".

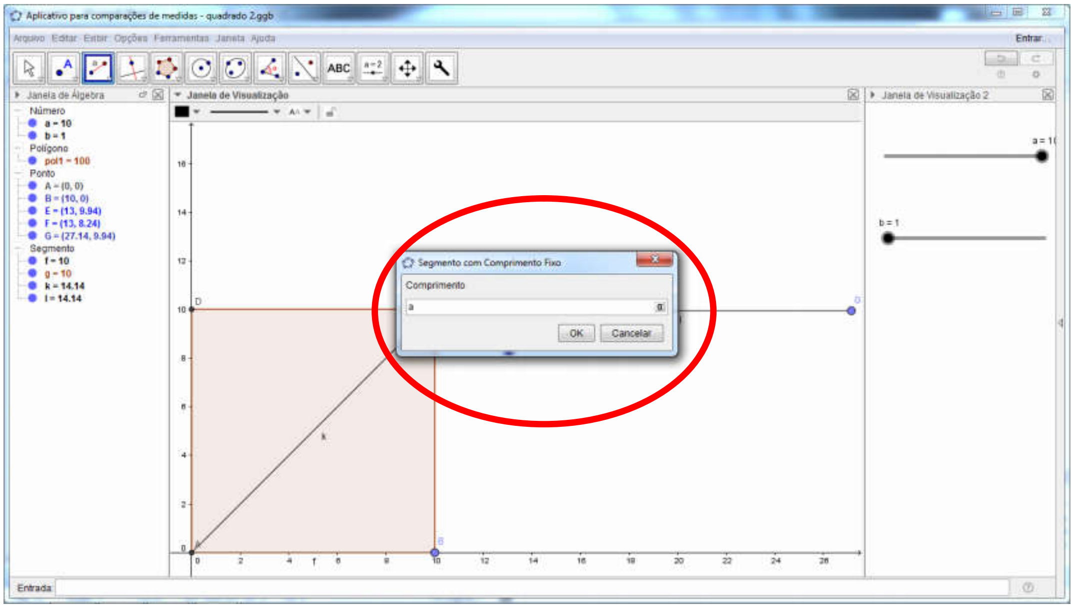


Figura 210: GeoGebra - Quadrado - 11
Fonte: o autor

vi. Construir em H mais um segmento de comprimento fixo de valor "a".

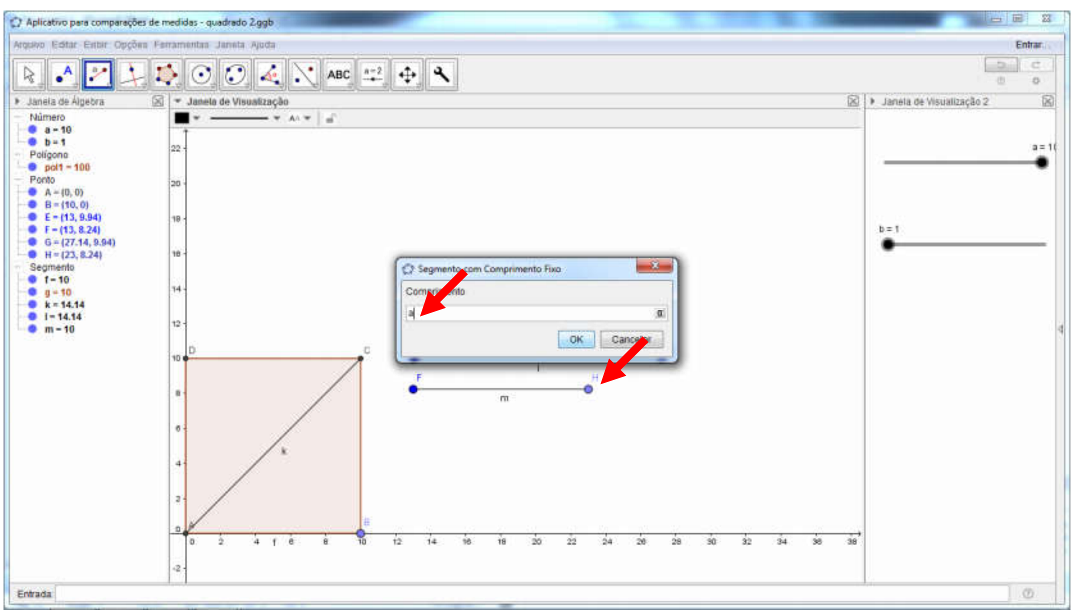


Figura 211: GeoGebra - Quadrado - 12
Fonte: o autor

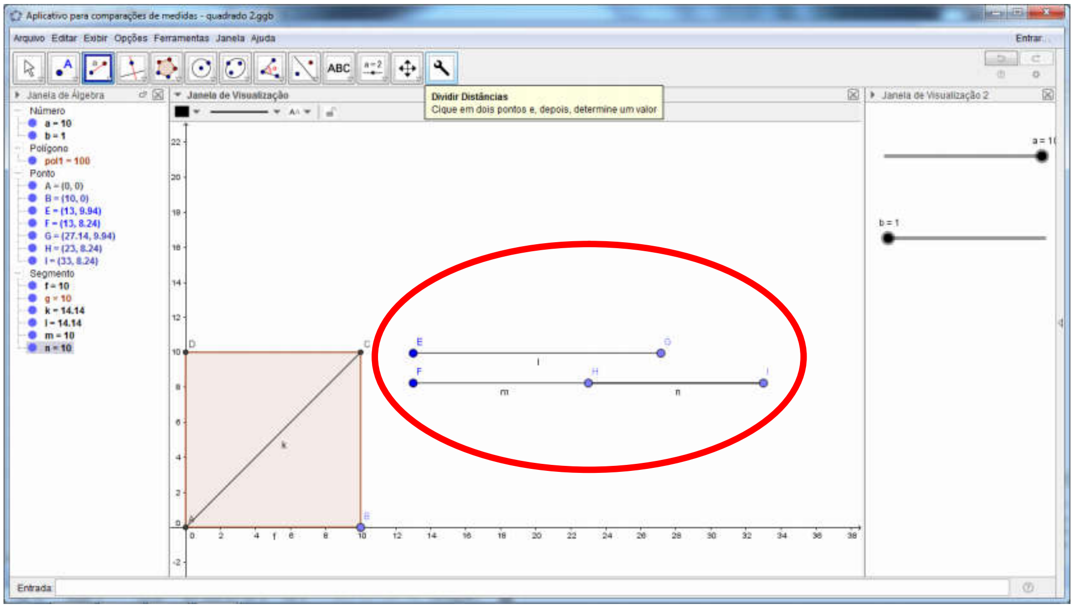


Figura 212: GeoGebra - Quadrado - 13
Fonte: o autor

vii. Utilizando a ferramenta de divisão de segmentos, dividir o segmento "n" em "b" partes.

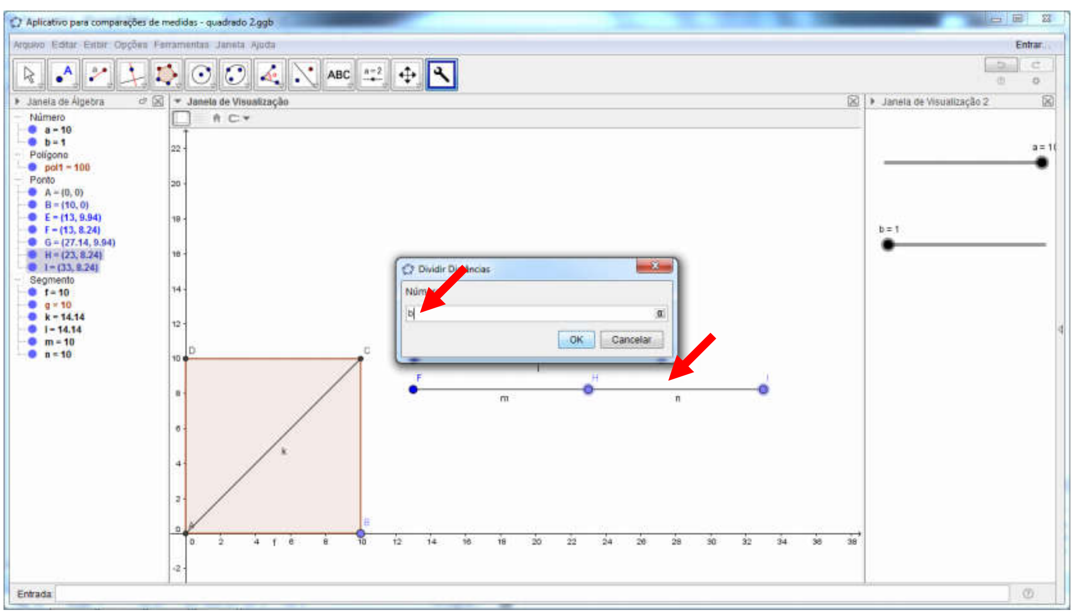


Figura 213: GeoGebra - Quadrado - 14
Fonte: o autor

Agora a construção do quadrado está pronta para ser usada, não esquecendo que é possível alterar as configurações de cor e estilo para tornar mais atrativas e visíveis as atividades.

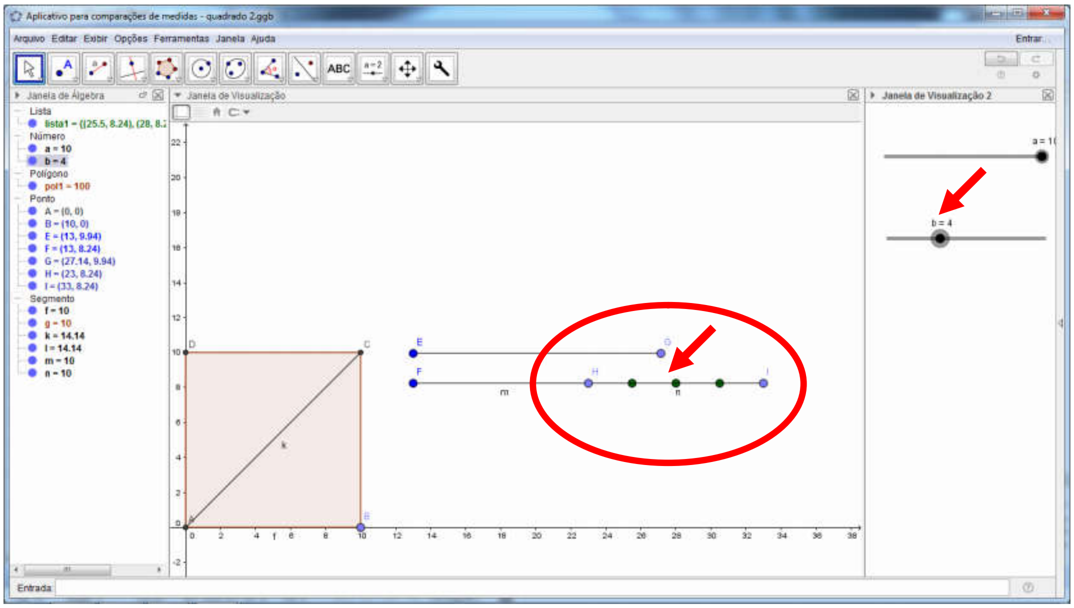


Figura 214: GeoGebra - Quadrado - 15
Fonte: o autor

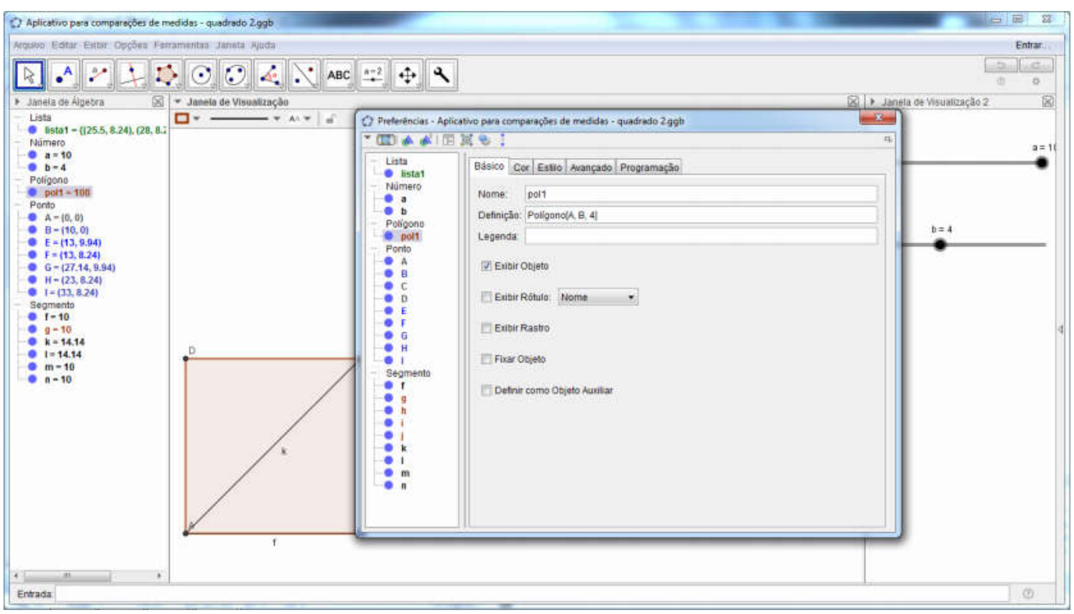


Figura 215: GeoGebra - Quadrado - 16
Fonte: o autor

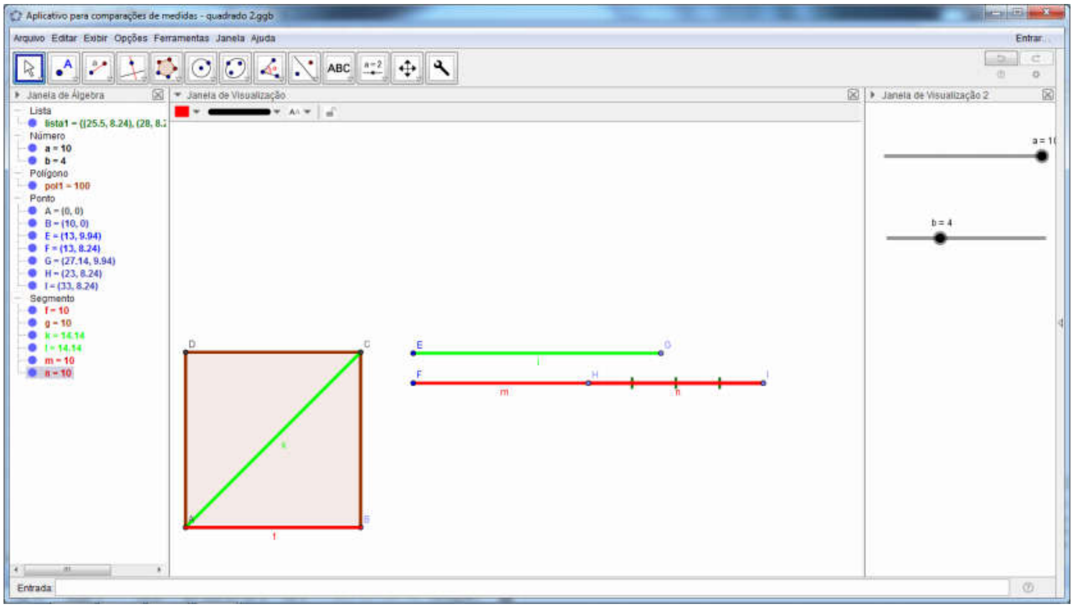


Figura 216: GeoGebra - Quadrado - 17
Fonte: o autor

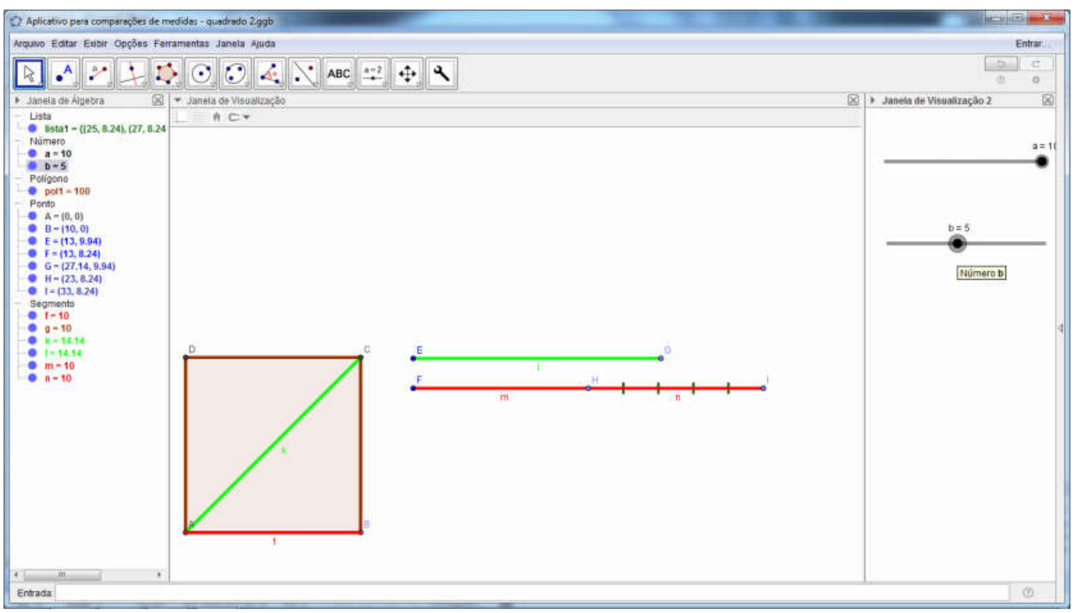


Figura 217: GeoGebra - Quadrado - 18
Fonte: o autor

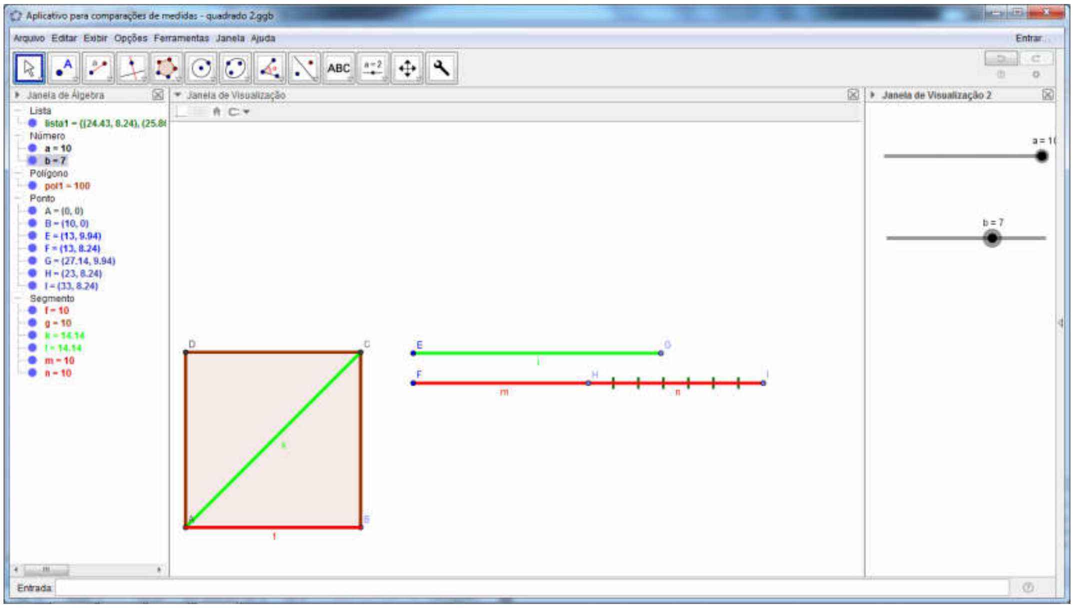


Figura 218: GeoGebra - Quadrado - 19
Fonte: o autor

5.2.2 Atividade com quadrado usando dobras e recortes

Outra atividade que podemos usar para comparar a medida do comprimento da diagonal de um quadrado com a medida do comprimento de um de seus lados é a dobra e recorte com papel retangular. Isto pode ser feito com uma folha de caderno ou de papel sulfite, papel cartão, cartolina e outros que possam ser dobrados com facilidade (seria difícil usar papelão ou EVA).

Sugerimos tal atividade, a qual é apresentada a seguir através de uma sequência de fotografias, de dobras e recortes em uma folha de cartolina.

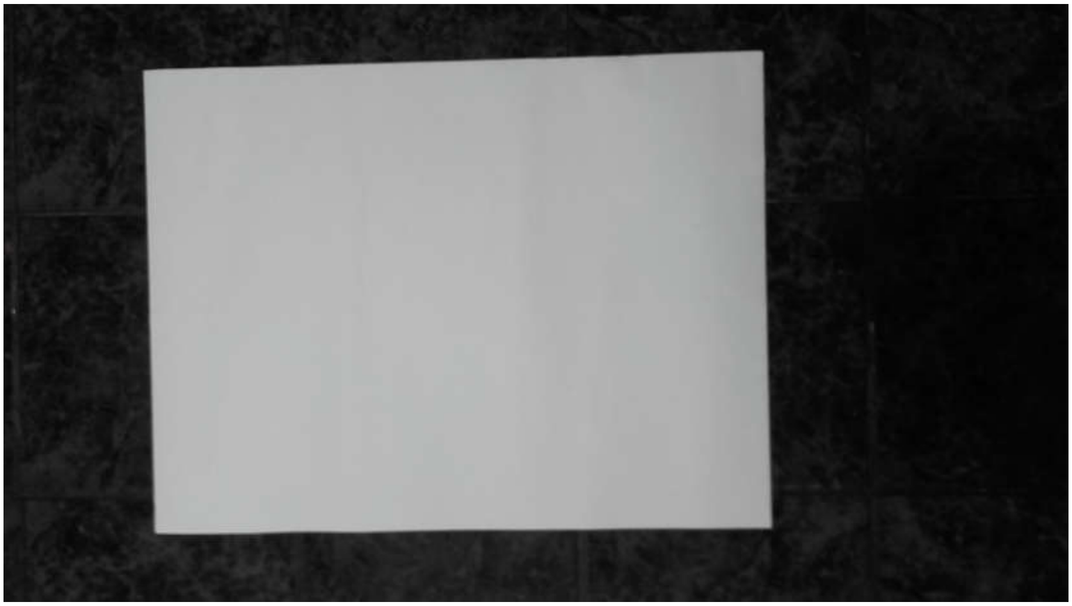


Figura 219: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 1
Fonte: o autor

i. Fazer uma dobra, a partir de um dos vértices, de forma que dois lados adjacentes coincidam. Como a cartolina não tem a forma de um quadrado as medidas são diferentes sobrando um pedaço do lado maior após a dobra ficar pronta. Recortar o pedaço da cartolina que sobra acompanhando a linha que a dobra determina sobre a folha. Esse procedimento é bastante usado por quem pratica dobraduras quando a folha a ser dobrada precisa ser quadrada.

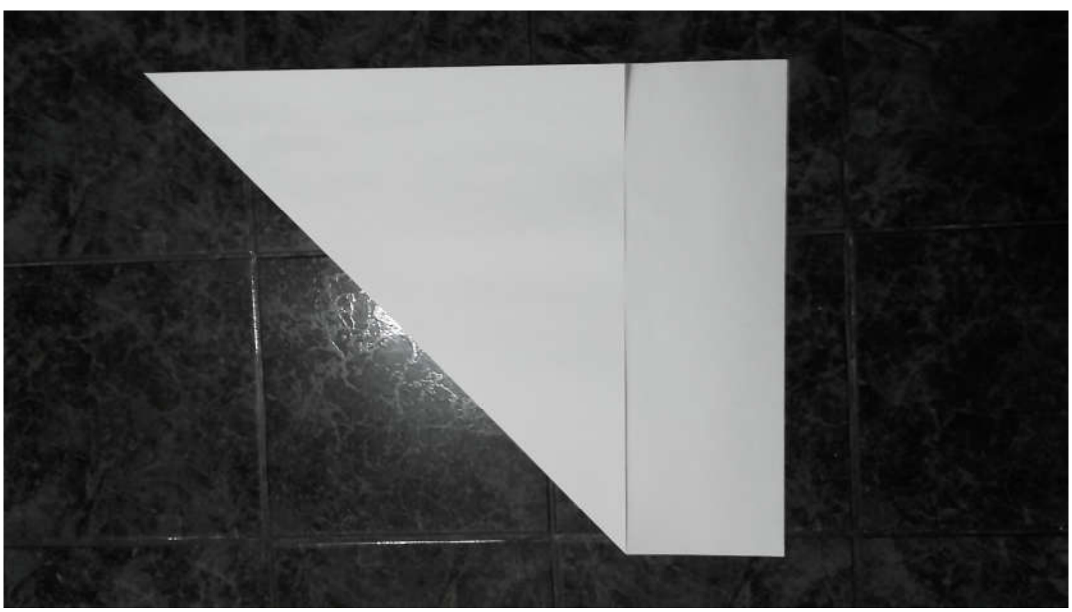


Figura 220: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 2
Fonte: o autor

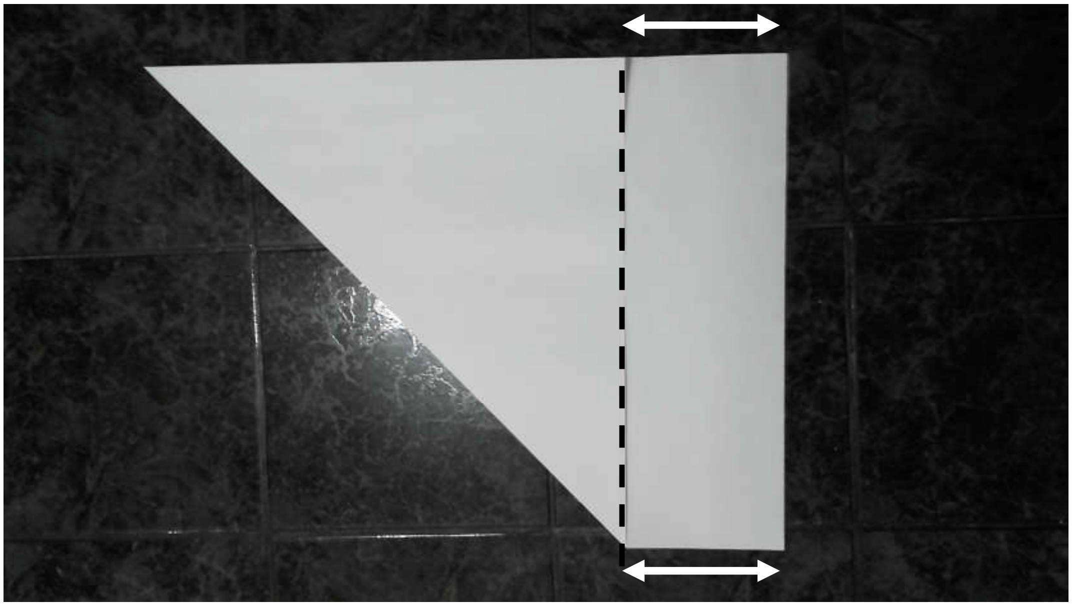


Figura 221: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 3
Fonte: o autor

ii. Após o recorte feito a folha teremos um quadrado e o vinco da dobra determina uma de suas diagonais. Recortar sobre o vinco repartindo o quadrado ao meio.

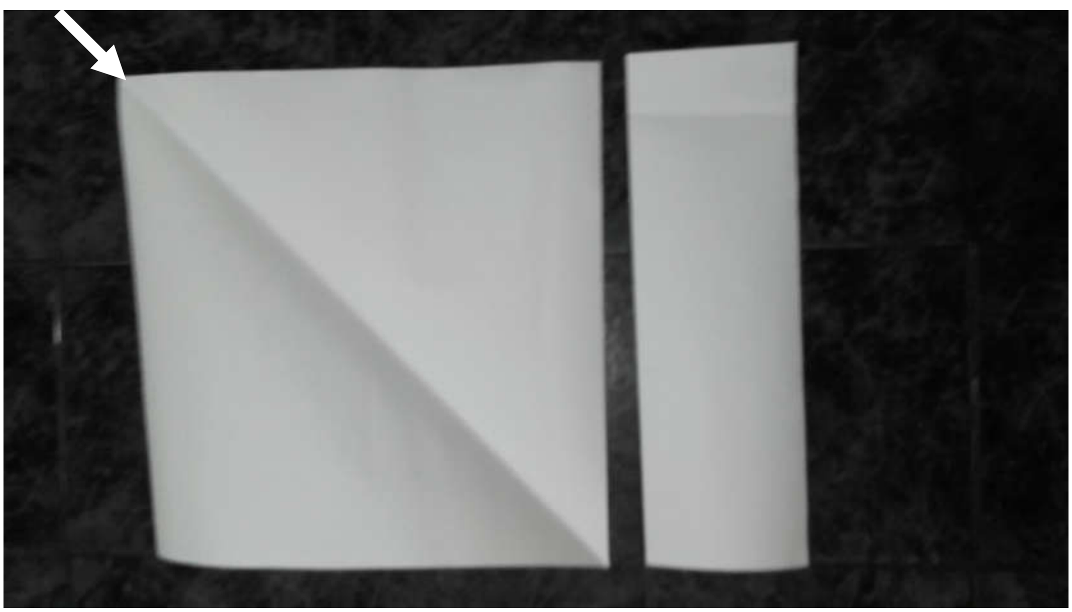


Figura 222: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 4
Fonte: o autor

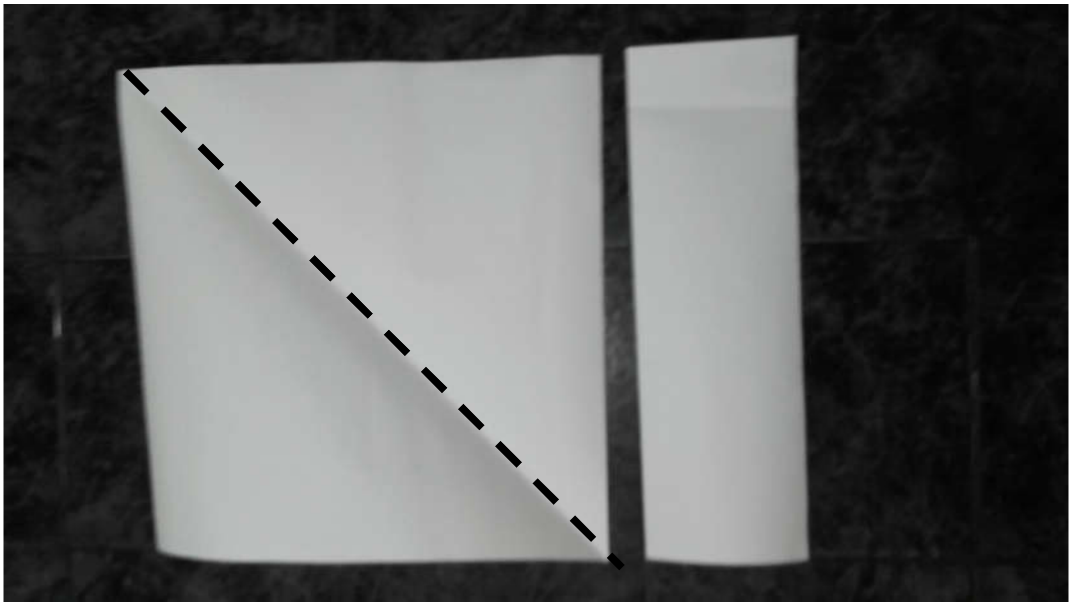


Figura 223: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 5
Fonte: o autor

Cada triângulo obtido após o recorte é retângulo e tem os catetos formados por dois lados do quadrado e a hipotenusa formada pela diagonal do quadrado, o que nos permitirá, usando os dois triângulos, realizar os procedimentos de comparação entre a medida da diagonal e a medida do lado de um mesmo quadrado.

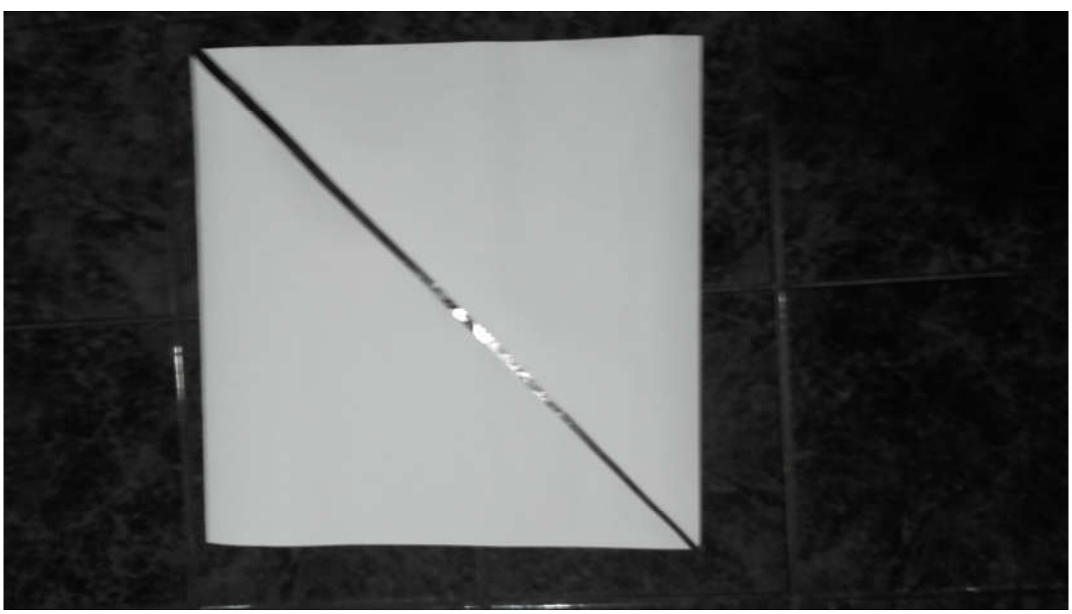


Figura 224: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 6
Fonte: o autor

iii. Dividir um dos triângulos ao meio, gerando dois novos triângulos retângulo cujas hipotenusas são dois dos lados do quadrado original.

Figura 225: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 7
Fonte: o autor

iv. Fazendo o alinhamento, a partir de um dos vértices, da hipotenusa de um dos triângulos menores (lado do quadrado) com a hipotenusa do triângulo maior (diagonal do quadrado) podemos constatar que o comprimento da diagonal é maior que o comprimento do lado.

$$d > \ell$$

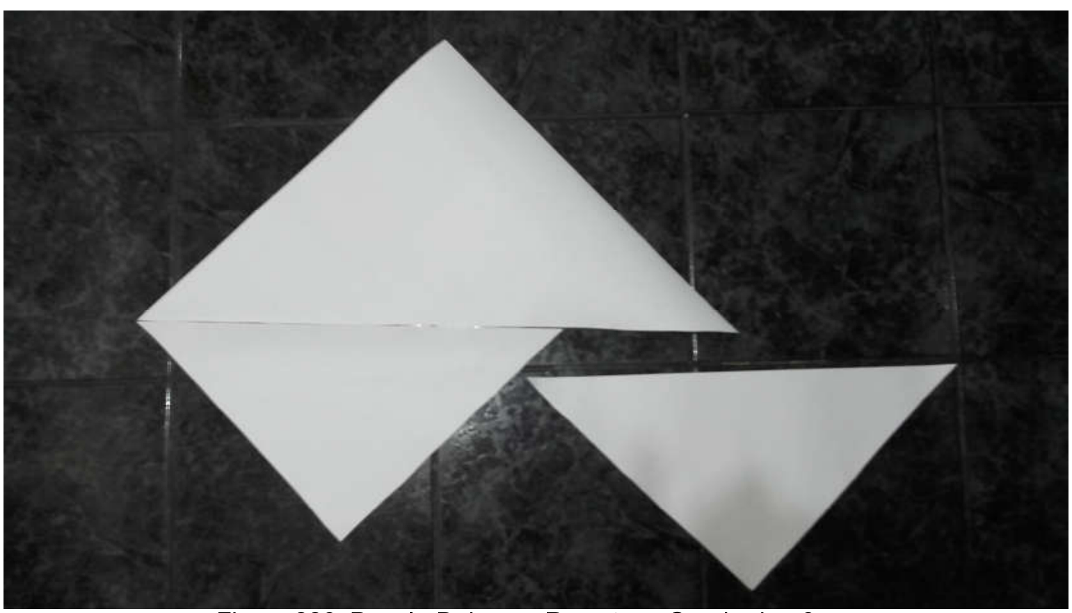


Figura 226: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 8
Fonte: o autor

v. Colocando o outro triângulo menor na sequência do primeiro, alinhando a hipotenusa do menor com a hipotenusa do maior, verificamos que o comprimento da diagonal é menor que o comprimento de dois lados.

$$\ell < d < 2\ell$$

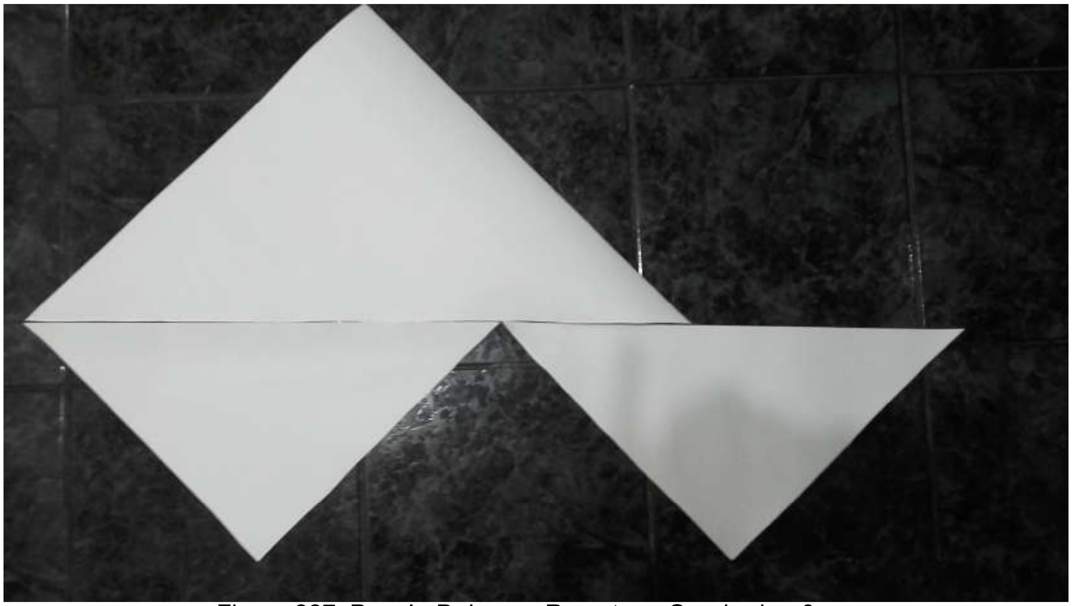


Figura 227: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 9
Fonte: o autor

vi. Recortar o segundo triângulo menor ao meio , teremos a medida de meio lado do quadrado.

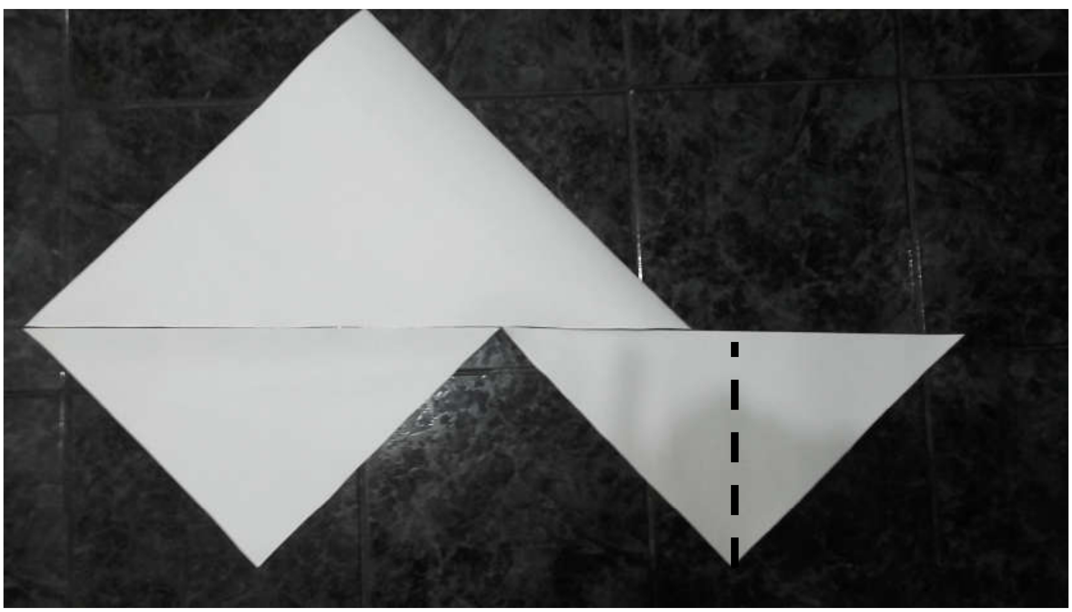


Figura 228: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 10
Fonte: o autor

vii. Mantendo o alinhamento como no item v verificamos que o comprimento da diagonal é menor que 1,5 vezes o lado do quadrado.

$$\ell < d < 1{,}5\ell$$

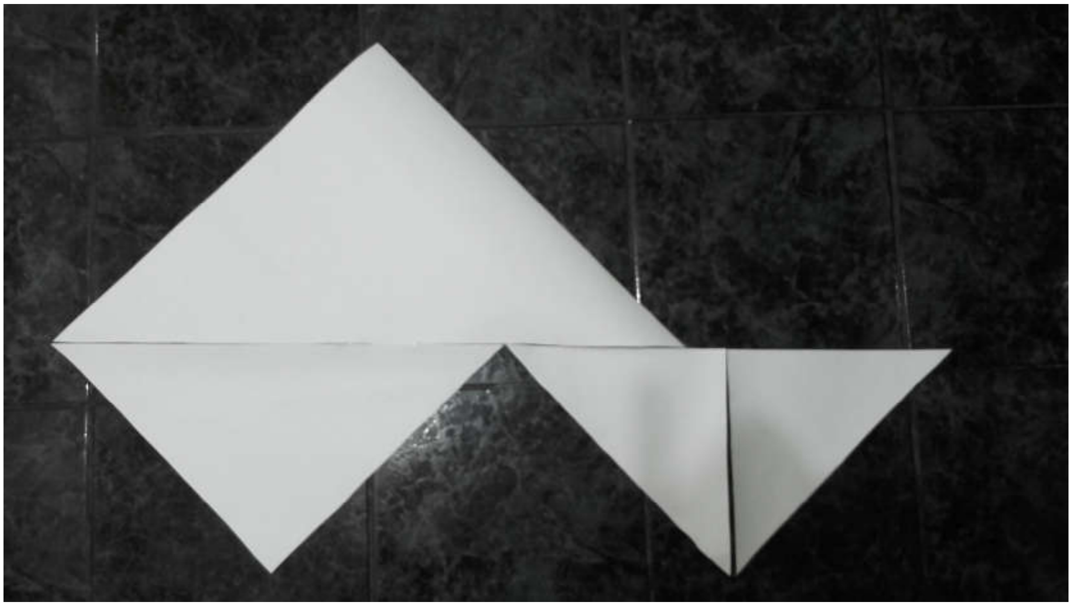


Figura 229: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 11
Fonte: o autor

viii. Sobrepondo os dois triângulos menores e dobrando ao meio cateto de um deles teremos um quarto do lado (0,25) e notaremos que o comprimento da diagonal é maior que 1,25 vezes o lado do quadrado.

$$1{,}25\ell < d < 1{,}50\ell$$

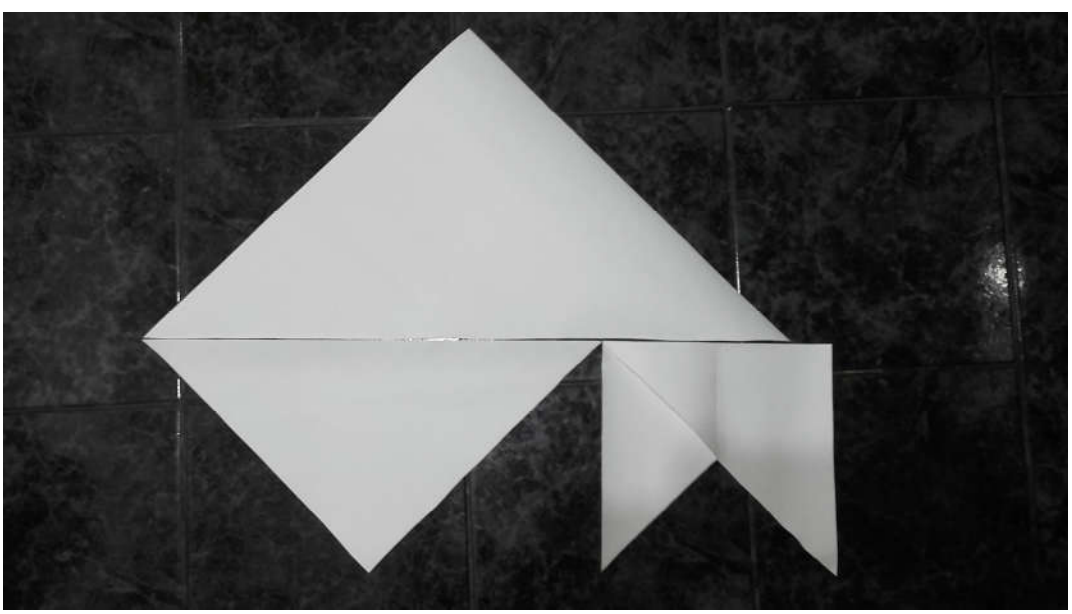


Figura 230: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 12
Fonte: o autor

ix. Fazendo um nova dobra podemos marcar três oitavos do lado (0,375) e observamos que o comprimento da diagonal fica entre 1,375 vezes o lado e 1,5 vezes o lado.

$$1{,}375\ell < d < 1{,}500\ell$$

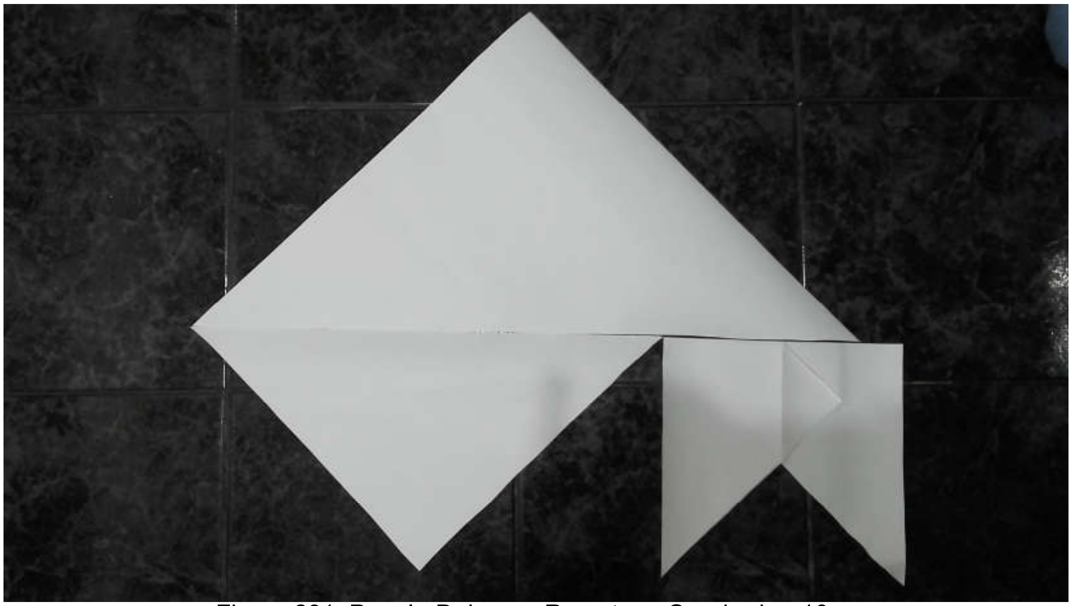


Figura 231: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 13
Fonte: o autor

x. Se fizermos mais uma dobra ao meio teremos sete dezesseis avos (0,4375) e é possível vermos que o comprimento da diagonal não chega a 1,4375 vezes o lado do quadrado.

$$1{,}3750\ell < d < 1{,}4375\ell$$

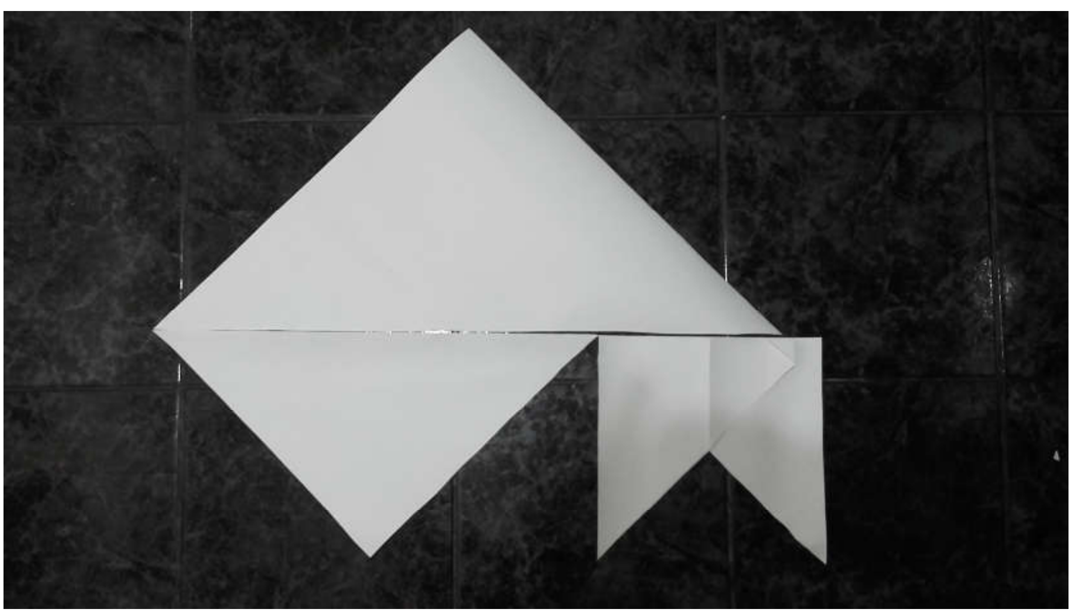


Figura 232: Papel - Dobras e Recortes - Quadrado - 14
Fonte: o autor

Normalmente não passamos das divisões em oito partes, pois deixa de ser interessante e os alunos perdem o foco. Em geral é bom que eles façam estimativas, dêem seus "chutes" e depois percebam quão perto ou longe estavam da resposta correta (neste caso entre 1,41 e 1,42).

Esta atividade tem bom resultado se feita em pequenos grupos, com supervisão do professor.

5.3 A CIRCUNFERÊNCIA E O SEU DIÂMETRO

Para demonstrar que existe uma razão constante entre uma circunferência qualquer e o seu diâmetro, o mais comum é medir circunferências de objetos do cotidiano como formas de pizza, tampas de panela, bordas de lixeiras das salas de aulas, o círculo central das quadras esportivas e isso leva sempre a bons resultados. Nossa sugestão é fazer essas medições sem o uso de unidades padronizadas, apenas comparando as medidas da circunferência com o seu diâmetro e com seu raio.

A dificuldade inicial é que diâmetros e raios são segmentos de reta e a circunferência, curva. Vimos nas comparações das medidas de lados de triângulos que é mais simples compararmos suas medidas se elas estiveram superpostas numa mesma posição, então vamos retificar a circunferência a ser medida e superpô-la à medida de seu diâmetro.

Um objeto bem simples para realização desse procedimento é um rolo de fita adesiva. Podemos retirar uma volta da fita e fixá-la, retificada, sobre um superfície plana e após ir sobrepondo o próprio rolo sobre a retificação para verificar quantas vezes o comprimento da circunferência comporta o comprimento de seu próprio diâmetro.

Usaremos a retificação da circunferência de um pneu de um trator agrícola conforme ilustra a figura:

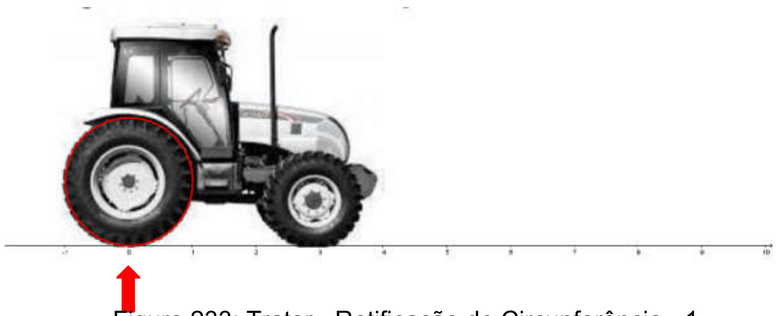


Figura 233: Trator - Retificação de Circunferência - 1
Fonte: o autor

Marca-se um ponto no solo e outro coincidente no pneu do trator.

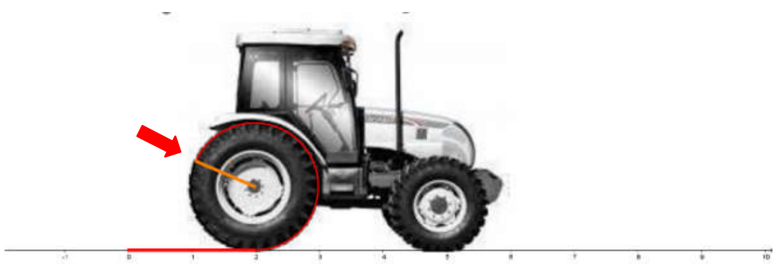


Figura 234: Trator - Retificação de Circunferência - 2
Fonte: o autor

Desloca-se o trator até que o ponto marcado no pneu retorne ao solo.

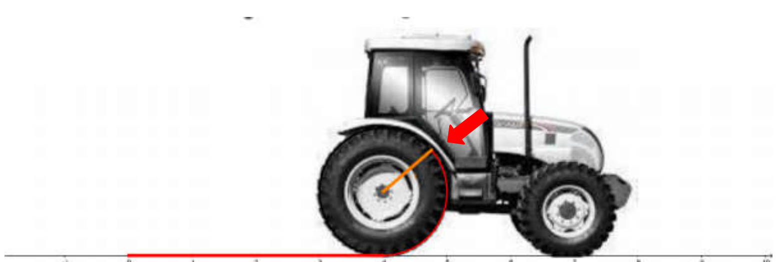


Figura 235: Trator - Retificação de Circunferência - 3
Fonte: o autor

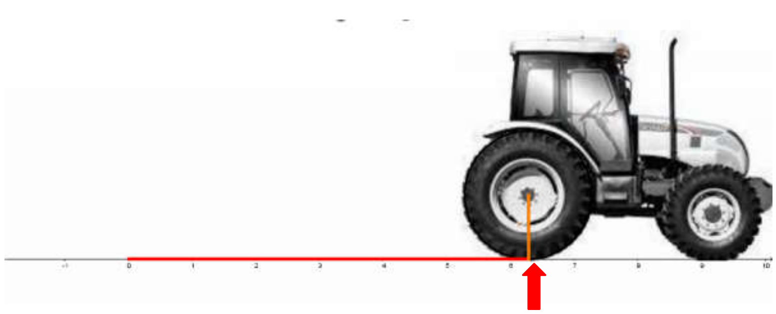


Figura 236: Trator - Retificação de Circunferência - 4
Fonte: o autor

Tem-se a medida do comprimento da circunferência retificado

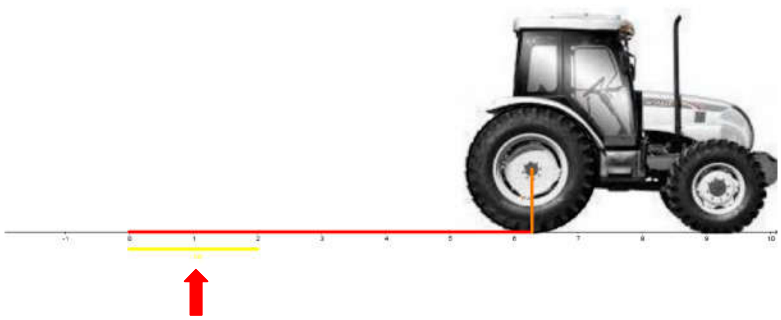


Figura 237: Trator - Retificação de Circunferência - 5
Fonte: o autor

Inserindo-se um diâmetro sob a linha da circunferência nota-se que a circunferência vale bem mais do que um diâmetro.

$$c > d$$

Figura 238: Trator - Retificação de Circunferência - 6
Fonte: o autor

Inserindo-se um segundo diâmetro nota-se que a circunferência vale mais do que dois diâmetros.

$$c > 2d$$

Figura 239: Trator - Retificação de Circunferência - 7
Fonte: o autor

Inserindo-se um terceiro diâmetro nota-se que a circunferência vale mais do que três diâmetros.

$$c > 3d$$

Figura 240: Trator - Retificação de Circunferência - 8
Fonte: o autor

Inserindo-se um quarto diâmetro nota-se que a circunferência vale mais do que três diâmetros e menos do que quatro diâmetros.

$$3d < c < 4d$$

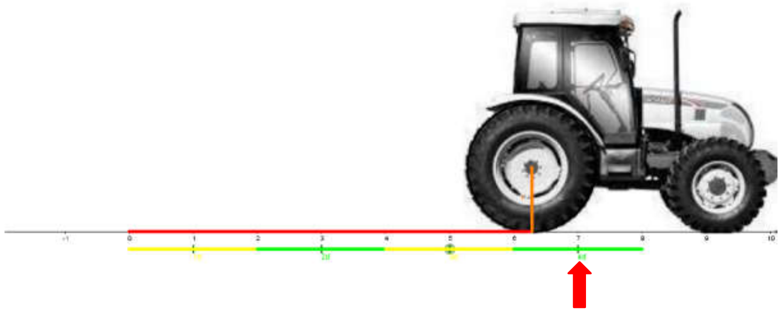


Figura 241: Trator - Retificação de Circunferência - 9
Fonte: o autor

Dividindo-se os diâmetros ao meio pode-se perceber que a circunferência vale mais do que três diâmetros e menos do que três diâmetros e meio.

$$3d < c < 3{,}5d$$

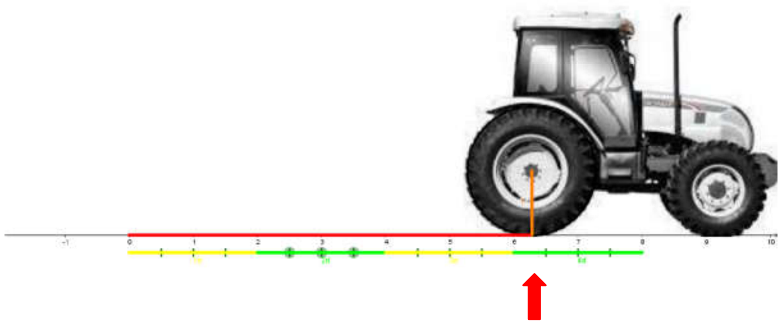


Figura 242: Trator - Retificação de Circunferência - 10
Fonte: o autor

Dividindo-se os diâmetros em quatro partes iguais pode-se perceber que a circunferência vale mais do que três diâmetros e menos do que três e diâmetros e um quarto.

$$3d < c < 3{,}25d$$

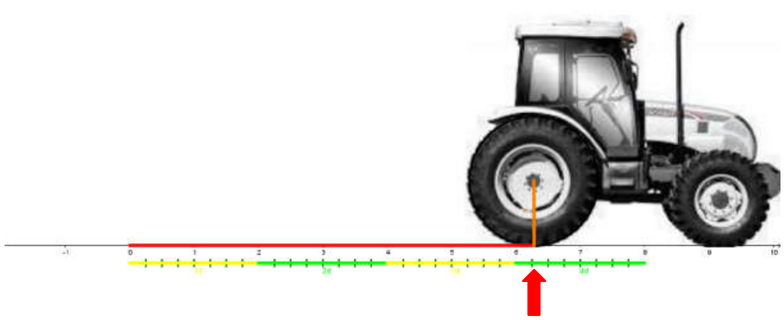


Figura 243: Trator - Retificação de Circunferência - 11
Fonte: o autor

Dividindo-se os diâmetros em oito partes iguais pode-se perceber que a circunferência vale mais do que três diâmetros e um oitavo e menos do que três e diâmetros e dois oitavos.

$$3{,}125d < c < 3{,}250d$$

Pode-se concluir, visualmente, que uma circunferência vale um pouco mais que 3,125 vezes a medida de seu diâmetro, isso significa 3,13, talvez 3,14 ou 3,15 vezes. É interessante realizar as comparações usando circunferências de tamanhos diferentes, um rolo de fita adesiva, uma lixeira de secção circular, uma bicicleta de um aluno (no lugar do trator), etc.

Figura 244: Bicicleta - Retificação de Circunferência - 1
Fonte: o autor

Figura 245: Bicicleta - Retificação de Circunferência - 2
Fonte: o autor

Figura 246: Bicicleta - Retificação de Circunferência - 3
Fonte: o autor

Figura 247: Bicicleta - Retificação de Circunferência - 4
Fonte: o autor

Figura 248: Bicicleta - Retificação de Circunferência - 5
Fonte: o autor

Figura 249: Bicicleta - Retificação de Circunferência - 6
Fonte: o autor

Figura 250: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 1
Fonte: o autor

Figura 251: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 2
Fonte: o autor

Figura 252: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 3
Fonte: o autor

Figura 253: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 4
Fonte: o autor

Figura 254: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 5
Fonte: o autor

Figura 255: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 6
Fonte: o autor

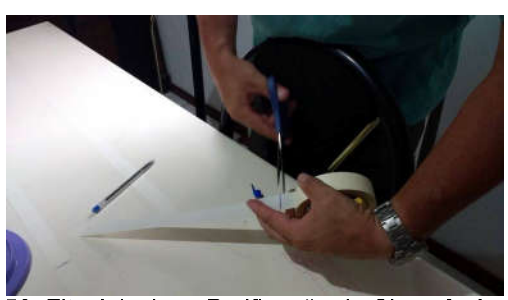


Figura 256: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 7
Fonte: o autor

Figura 257: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 8
Fonte: o autor

Figura 258: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 9
Fonte: o autor

Figura 259: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 10
Fonte: o autor

Figura 260: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 11
Fonte: o autor

Figura 261: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 12
Fonte: o autor

Figura 262: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 13
Fonte: o autor

Figura 263: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 14
Fonte: o autor

Figura 264: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 15
Fonte: o autor

Figura 265: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 16
Fonte: o autor

Figura 266: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 17
Fonte: o autor

Figura 267: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 18
Fonte: o autor

Figura 268: Fita Adesiva - Retificação de Circunferência - 19
Fonte: o autor

No GeoGebra podemos, usando a ferramenta de dividir distâncias, dividir facilmente e quantidades diferentes de partes e, uma fração bastante interessante para a comparação circunferência pelo diâmetro é a sétima parte.

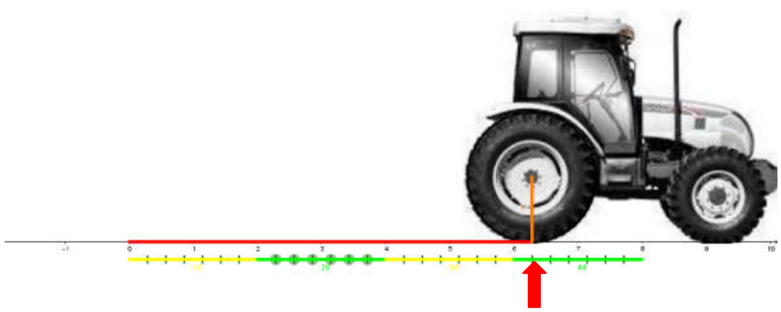


Figura 269: Trator - Retificação de Circunferência - 12
Fonte: o autor

Dividindo-se os diâmetros em sete partes iguais pode-se perceber que a circunferência vale aproximadamente três diâmetros e um sétimo.

$$c \cong 3\frac{1}{7}d \Rightarrow c \cong \frac{22}{7}d \Rightarrow$$
$$c \cong 3{,}14d$$

Pode-se medir as circunferências e seus diâmetros usando fitas métricas e barbantes, a fita adesiva se presta bem a esta atividade podendo ser aderida a borda dos objetos a serem medidos e depois retificada facilitando as medições, e após proceder a divisão dos valores encontrados o que em geral nos leva a valores próximos de 3,14 (3,10; 3,20; 3,15; 3,12, etc.)

A razão de um circunferência pelo seu diâmetro é sempre constante e tem um valor irracional ao qual chamamos PI.

$$\boxed{\frac{c}{d} = 3{,}14159265\ldots \Rightarrow \frac{c}{d} = \pi \Rightarrow \frac{c}{2r} = \pi \Rightarrow c = 2r\pi \Rightarrow c = 2\pi r}$$

Passos para a construção da circunferência com retificação.

i. Construir o controle deslizante a com intervalo de 0 a 2π (2PI) e incremento 0,1.

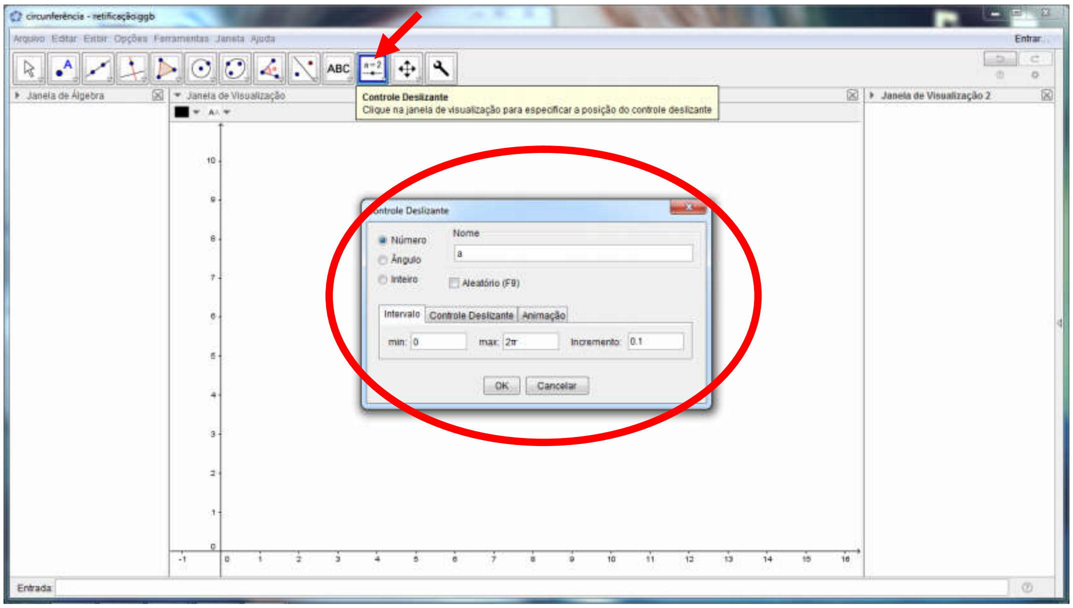


Figura 270: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 1
Fonte: o autor

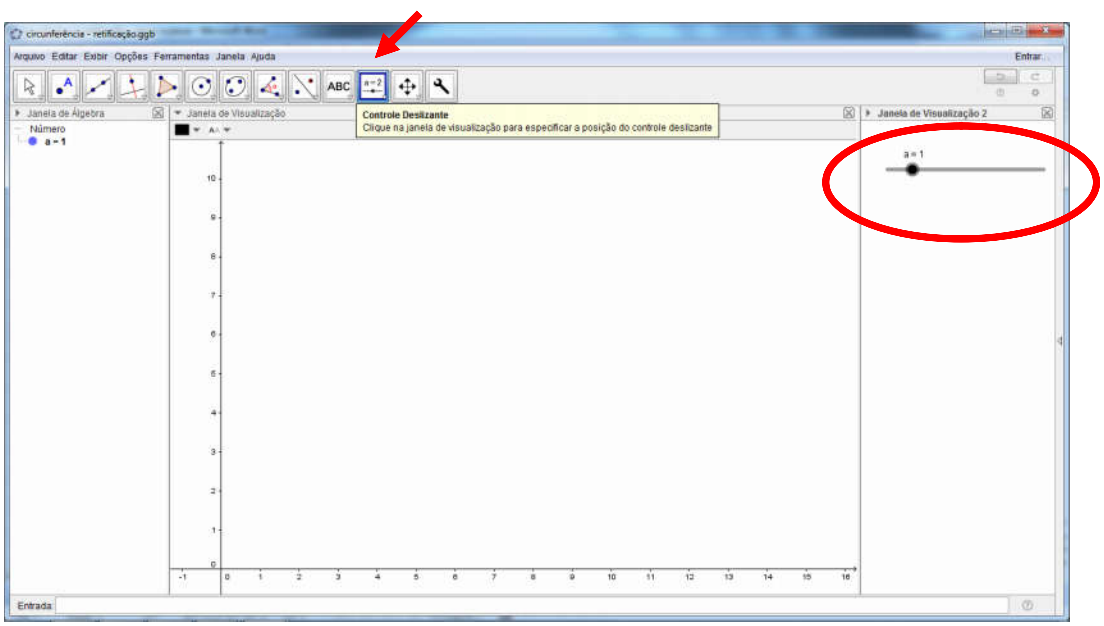


Figura 271: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 2
Fonte: o autor

ii. Digitar na caixa de entrada a equação $x = a$ para gerar a reta t que permitirá movimentar a circunferência para a direita.

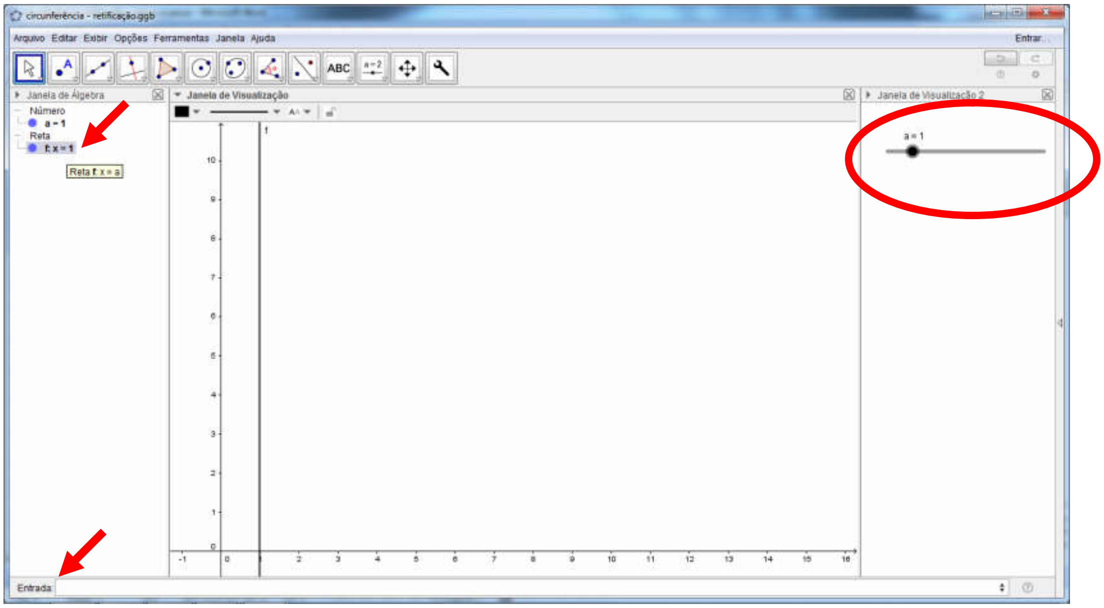


Figura 272: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 3
Fonte: o autor

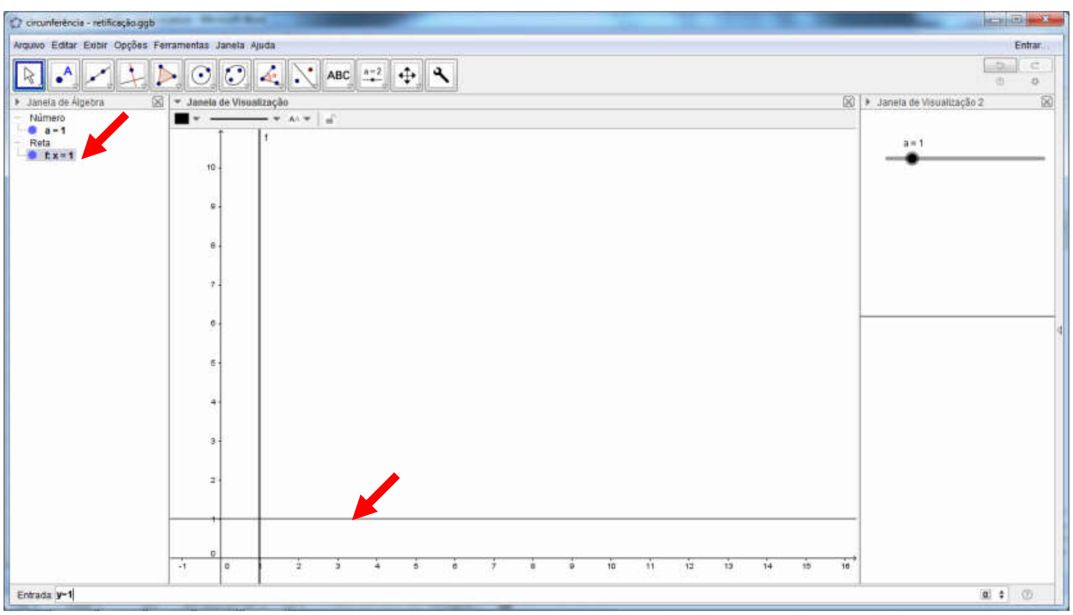


Figura 273: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 4
Fonte: o autor

iii. Digitar na caixa de entrada a equação $y = 1$, gerando a reta g necessária para centralizar a circunferência.

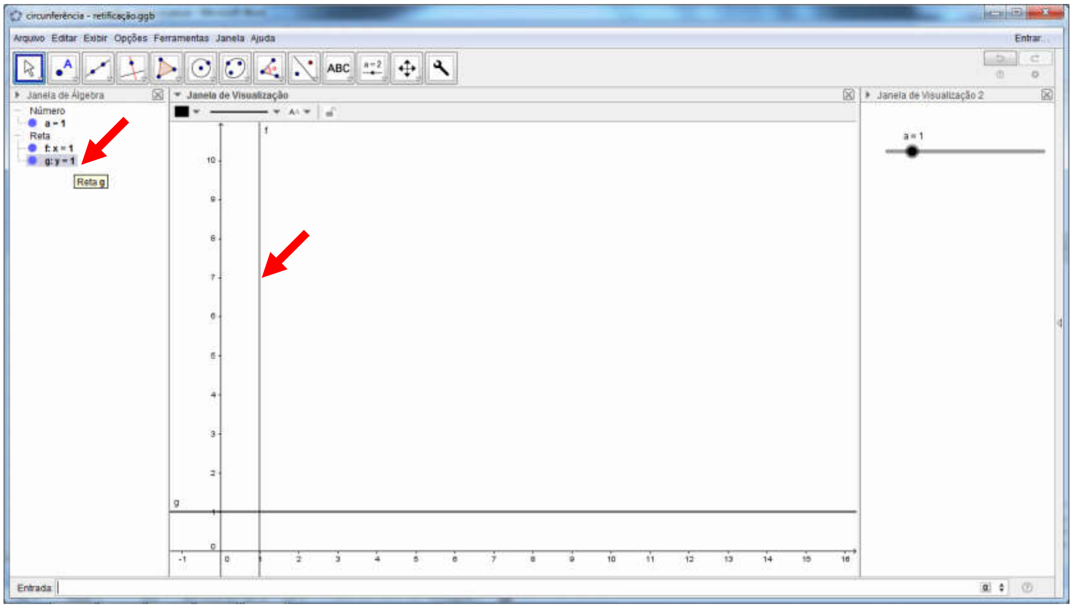


Figura 274: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 5
Fonte: o autor

iv. Com a ferramenta Interseção de Dois Objetos marcar o ponto A no cruzamento da reta t com o eixo Ox e o ponto B no cruzamento das retas t e g.

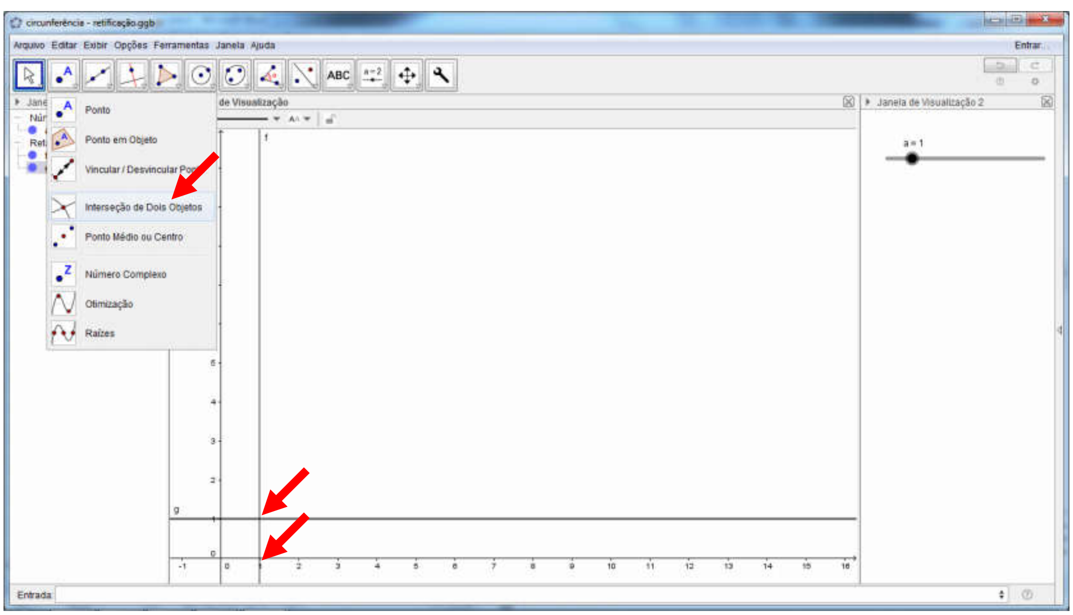


Figura 275: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 6
Fonte: o autor

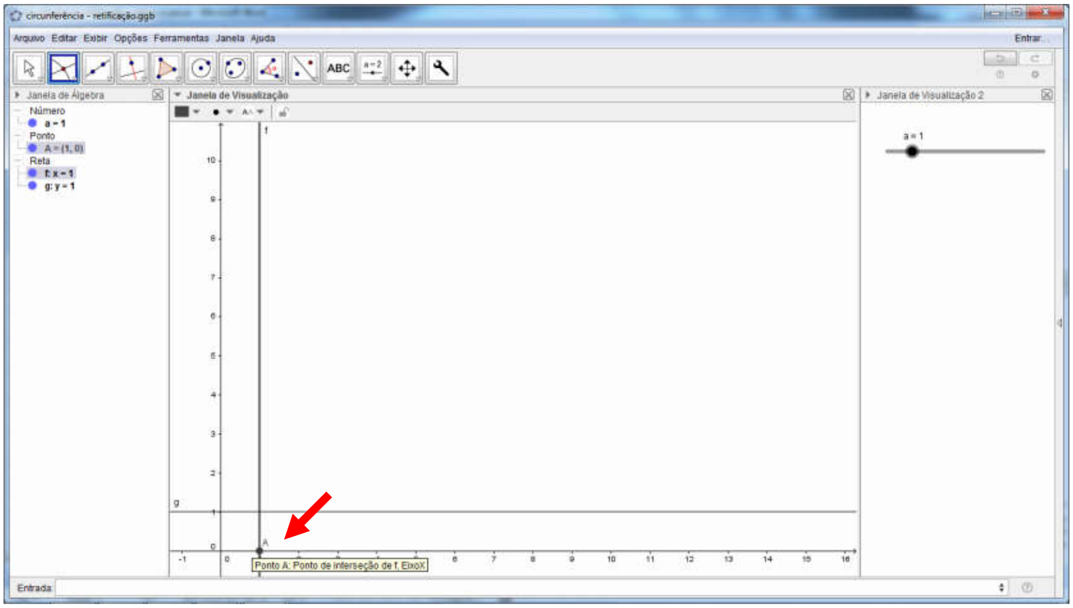


Figura 276: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 7
Fonte: o autor

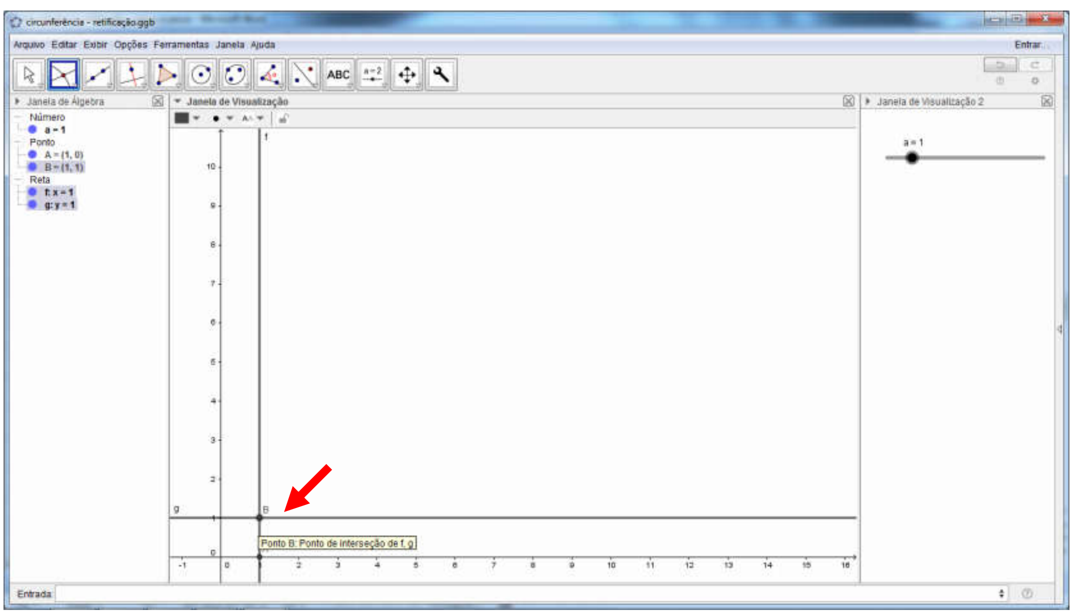


Figura 277: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 8
Fonte: o autor

v. Construir um círculo com centro em B passando por A.

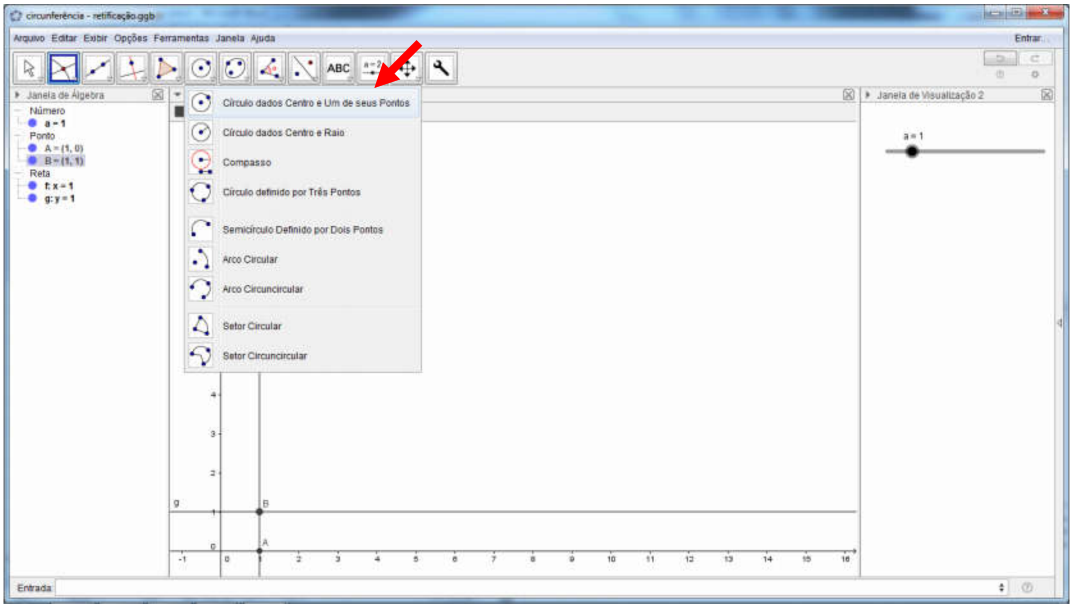


Figura 278: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 9
Fonte: o autor

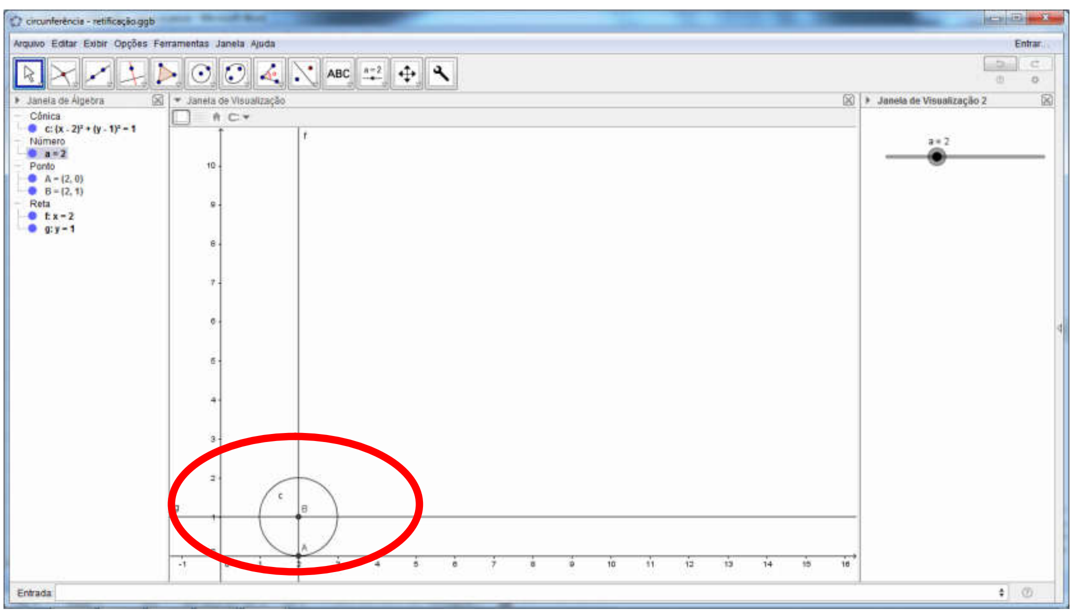


Figura 279: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 10
Fonte: o autor

vi. Com a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa construir um ângulo com origem em A, vértice em B e valor igual a "a" e sentido horário.

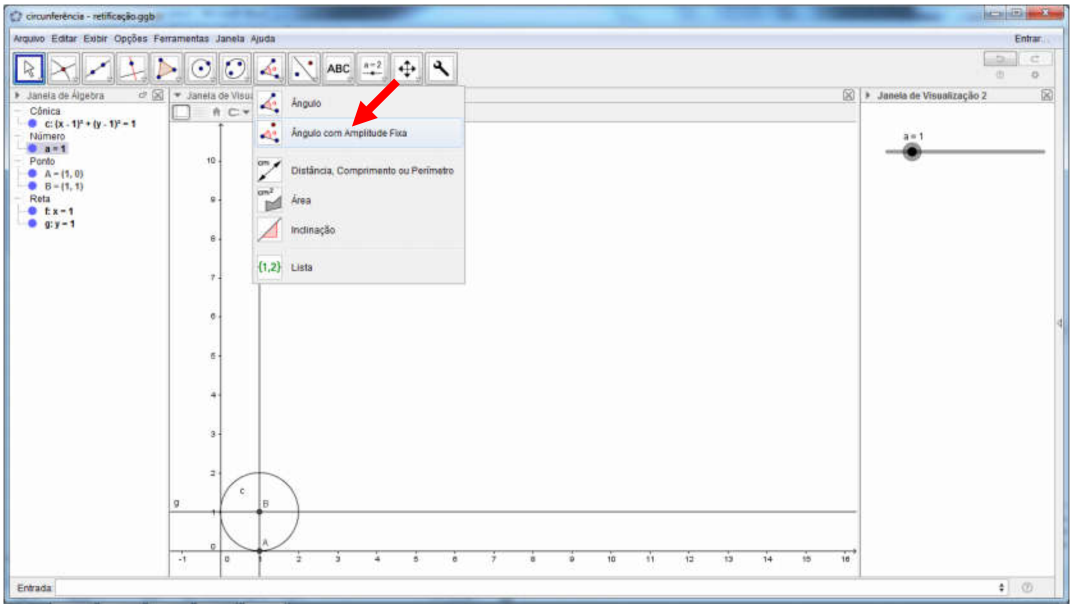


Figura 280: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 11
Fonte: o autor

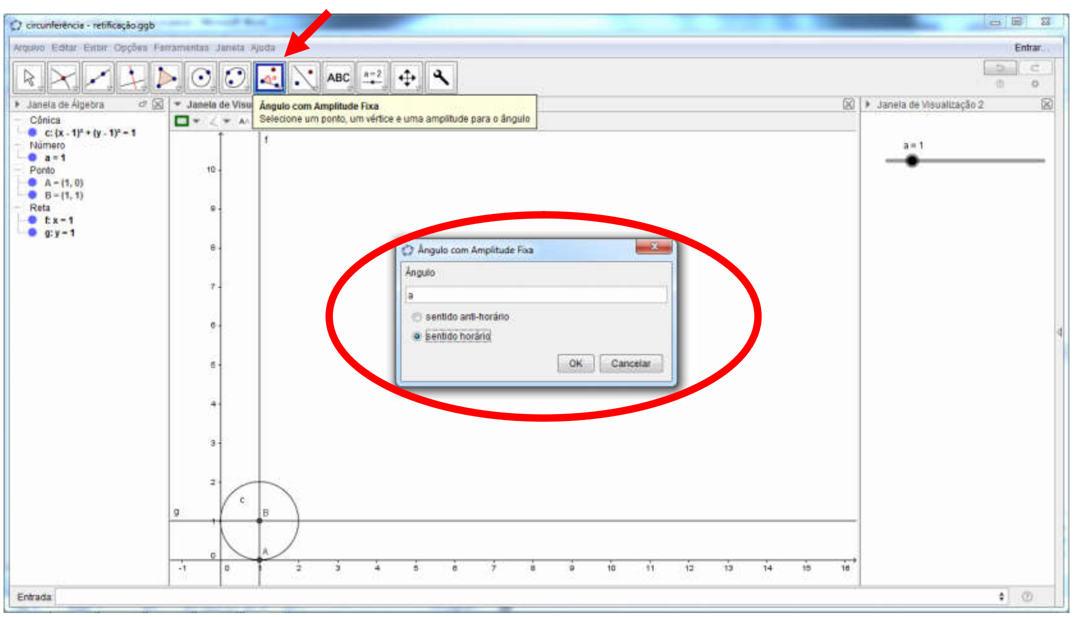


Figura 281: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 12
Fonte: o autor

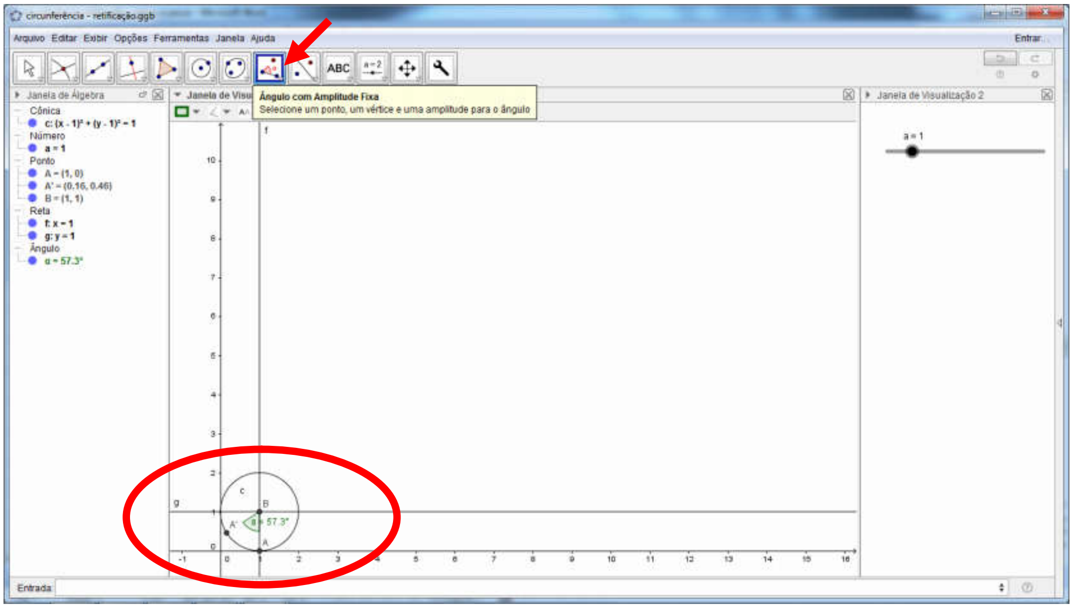


Figura 282: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 13
Fonte: o autor

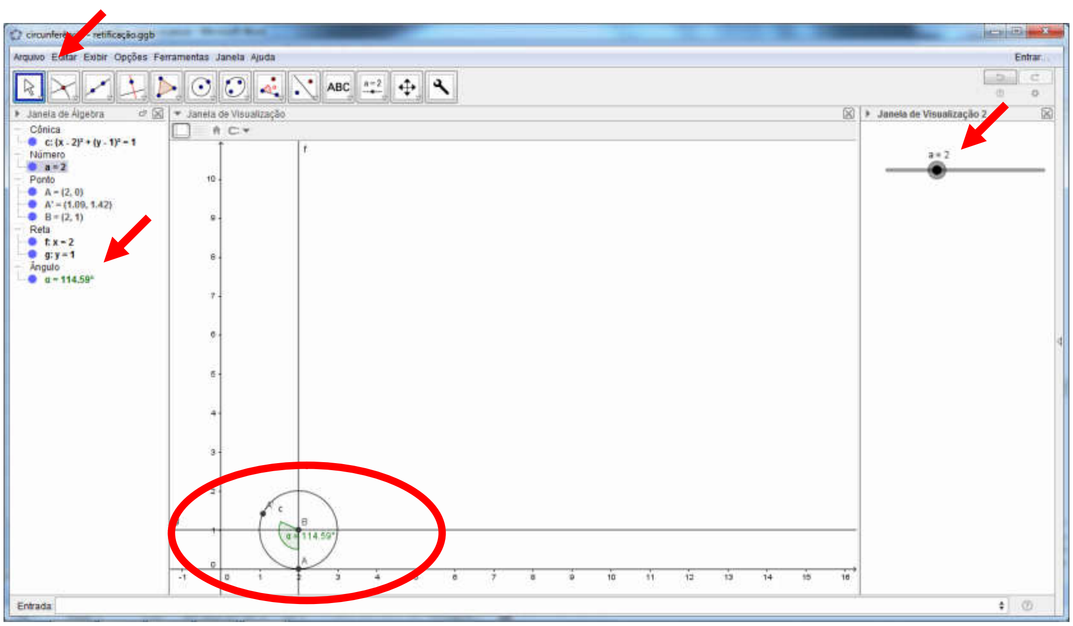


Figura 283: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 14
Fonte: o autor

vii. Utilizando a ferramenta Arco Circular construir um arco com centro em B e extremidades em A e A'.

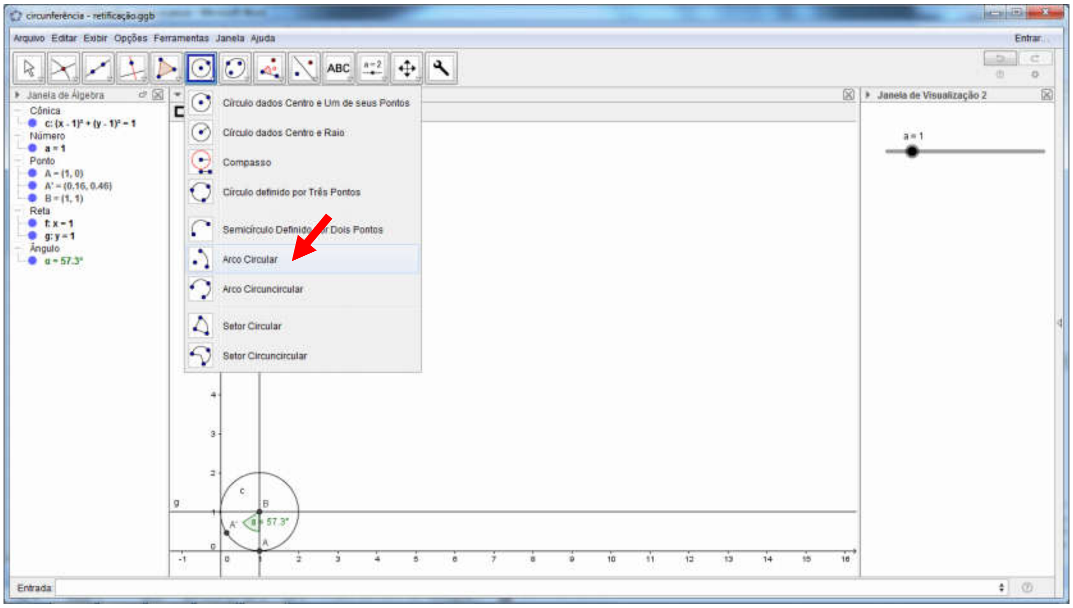


Figura 284: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 15
Fonte: o autor

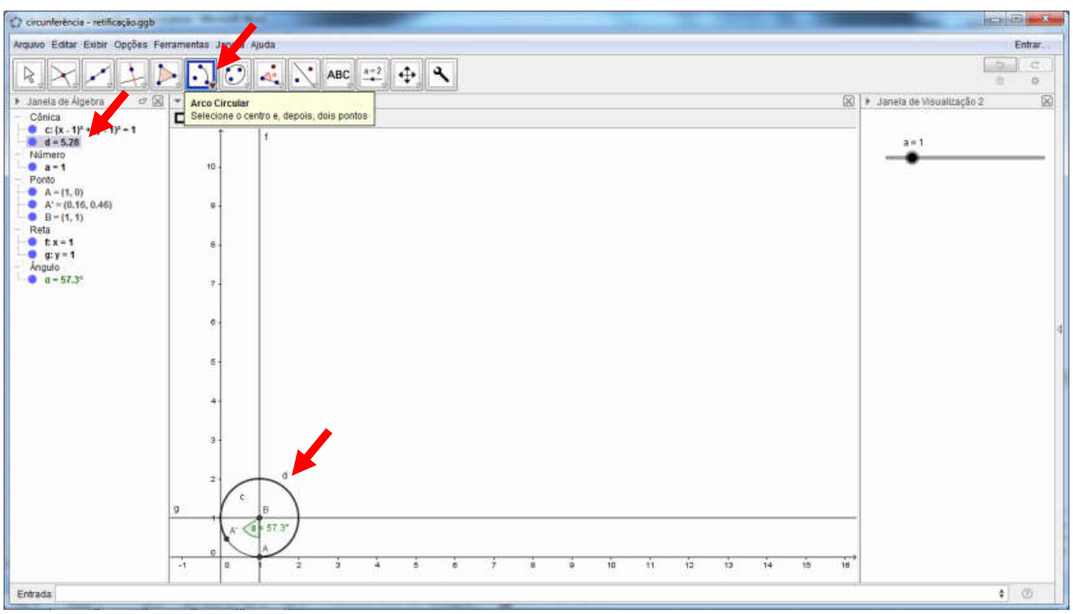


Figura 285: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 16
Fonte: o autor

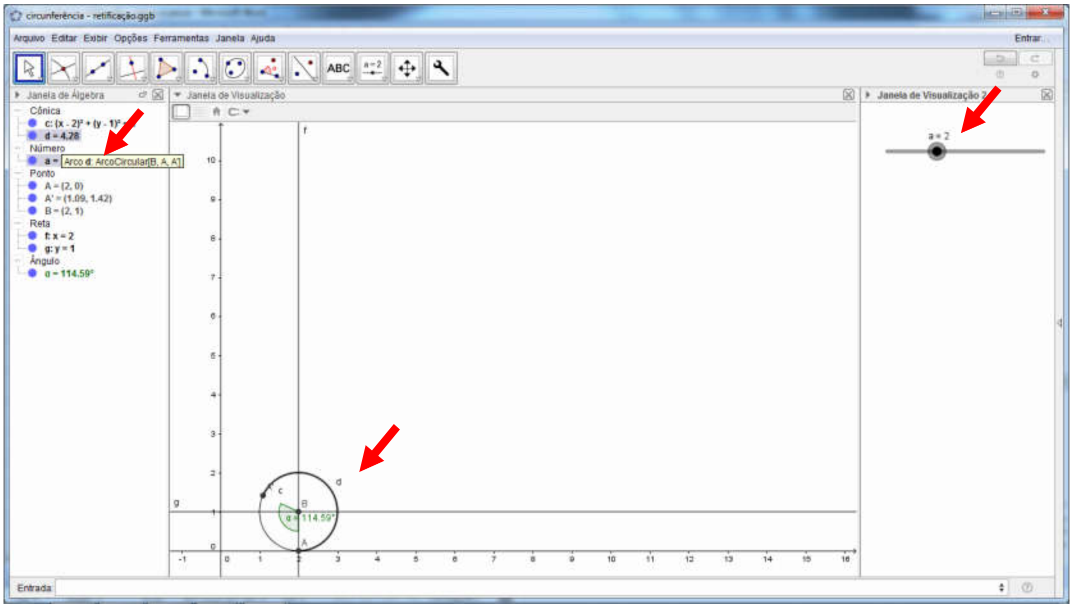


Figura 286: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 17
Fonte: o autor

viii. Marcar os pontos C e D quaisquer sobre o eixo Oy.

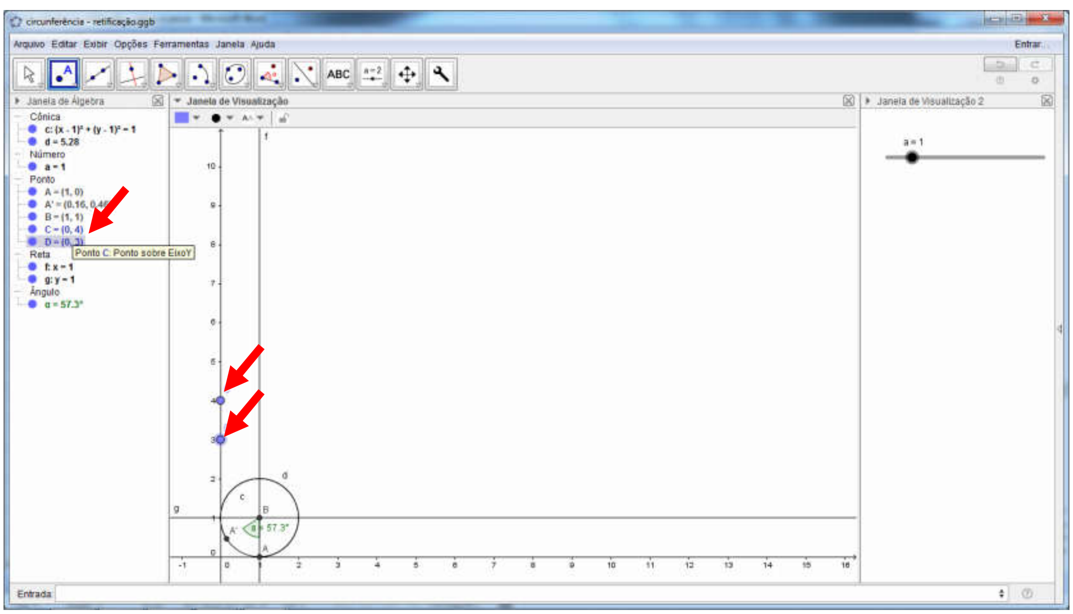


Figura 287: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 18
Fonte: o autor

ix. Construir um segmento com comprimento fixo de valor a com origem no ponto C.

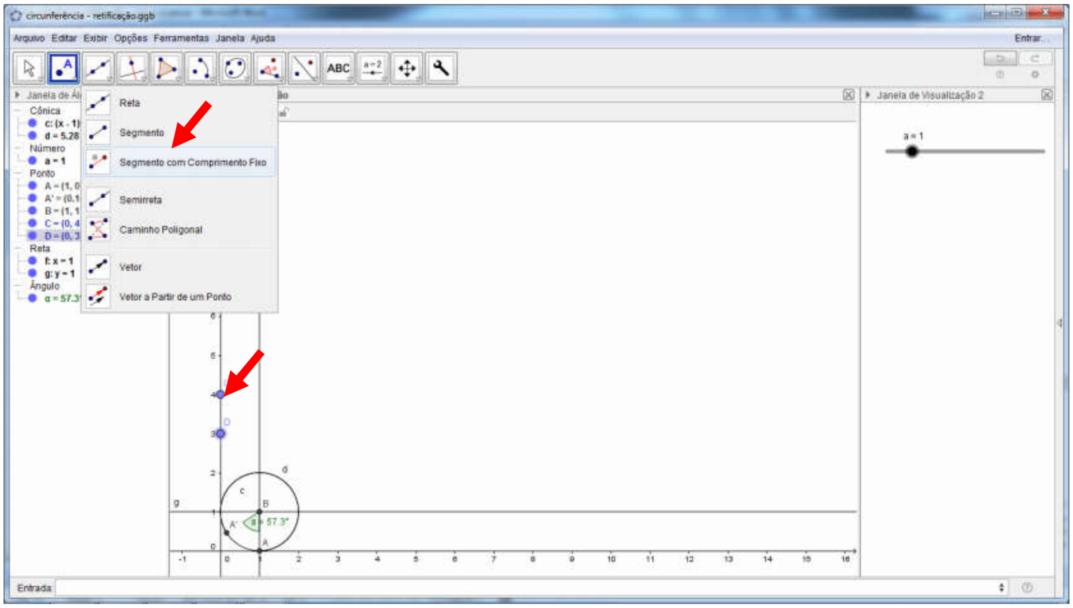


Figura 288: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 19
Fonte: o autor

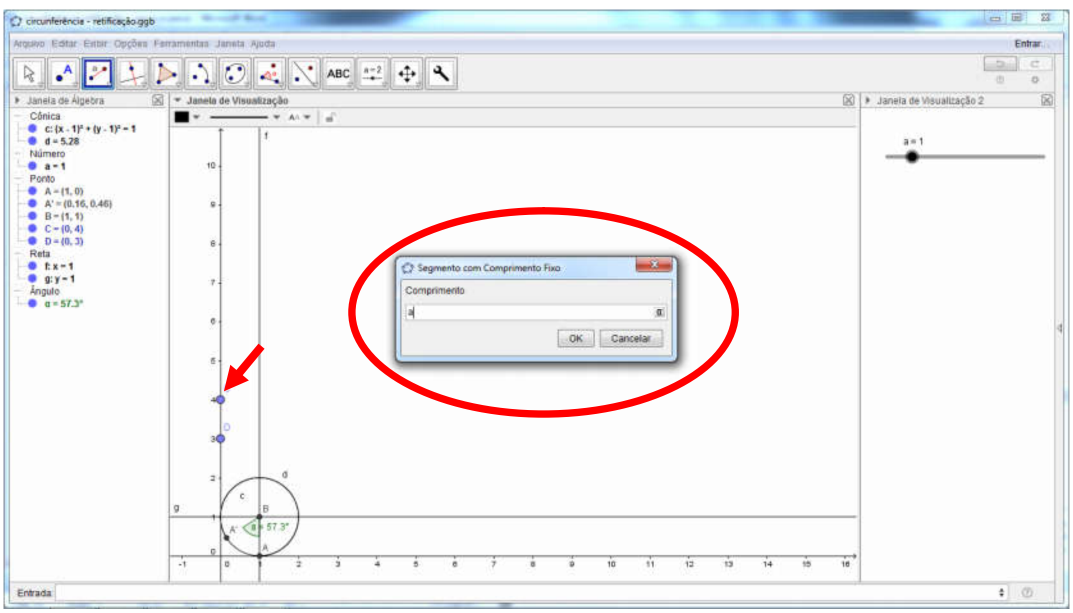


Figura 289: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 20
Fonte: o autor

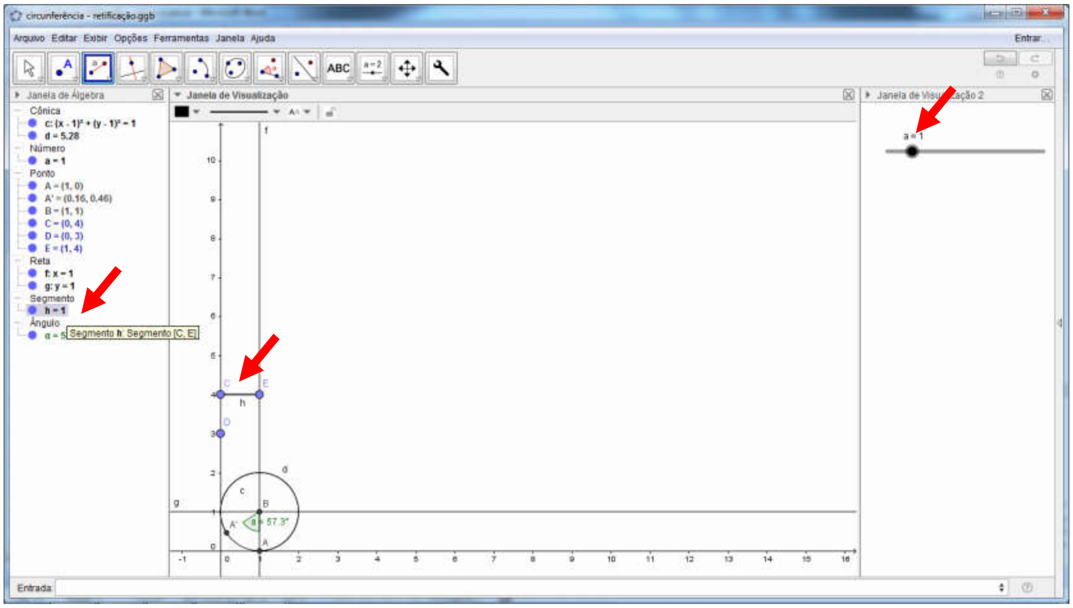


Figura 290: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 21
Fonte: o autor

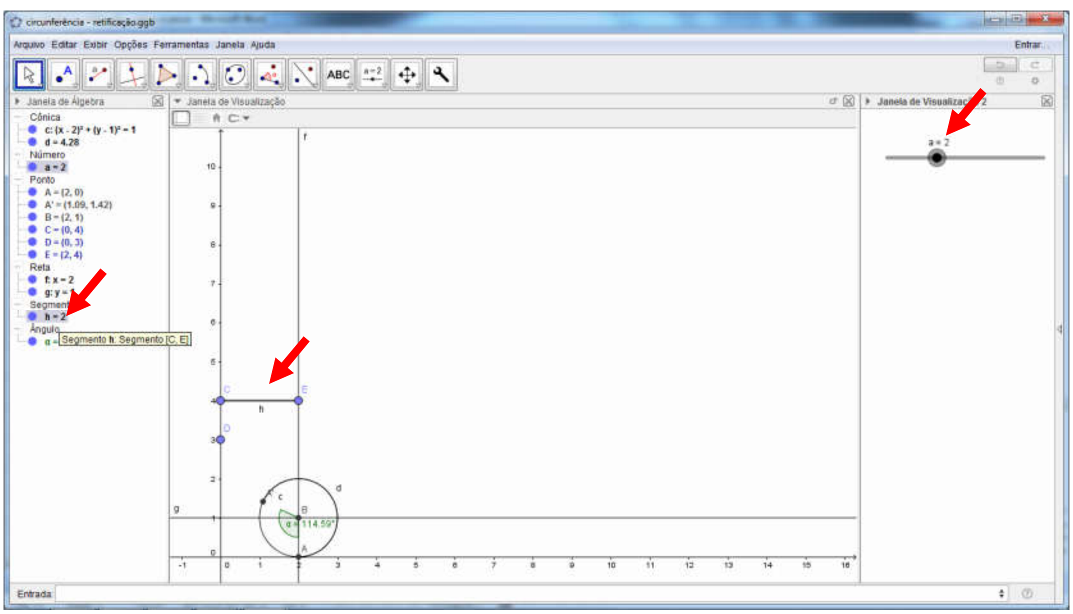


Figura 291: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 22
Fonte: o autor

x. Construir um segmento com origem em D e comprimento igual a 2 que corresponde à medida do diâmetro do círculo.

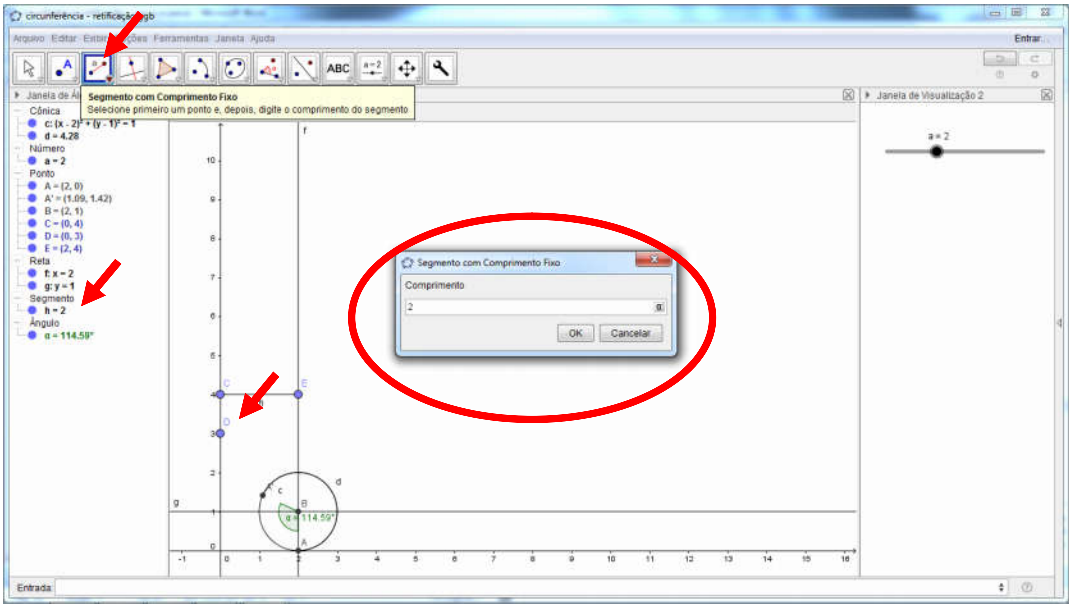


Figura 292: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 23
Fonte: o autor

xi. Construir um segundo segmento, a partir do ponto F, com comprimento 2.

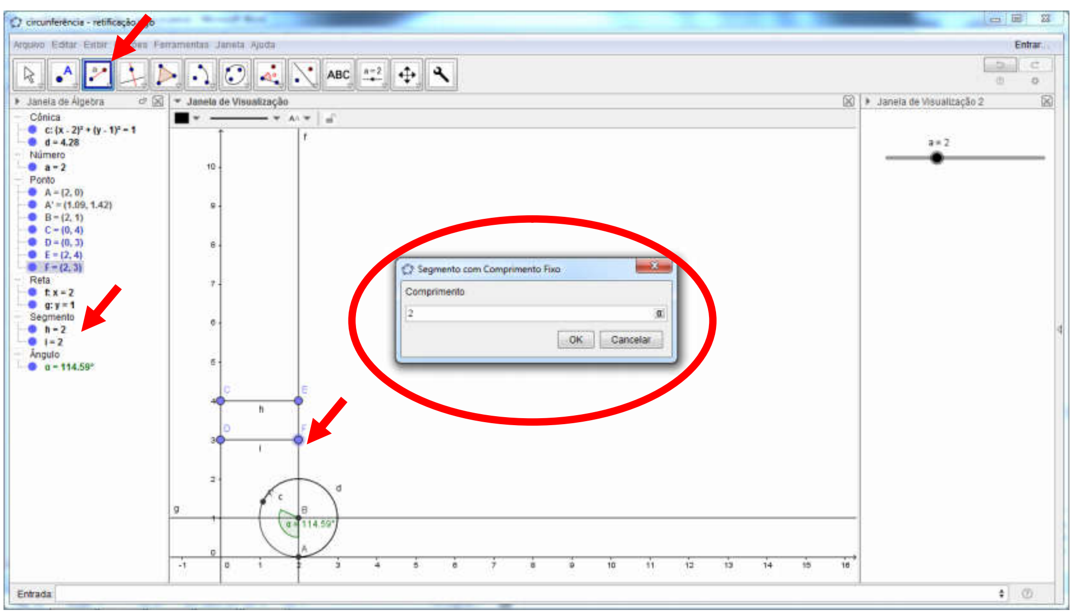


Figura 293: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 24
Fonte: o autor

xii. Com origem em G construir um segmento para representar a medida de um terceiro diâmetro.

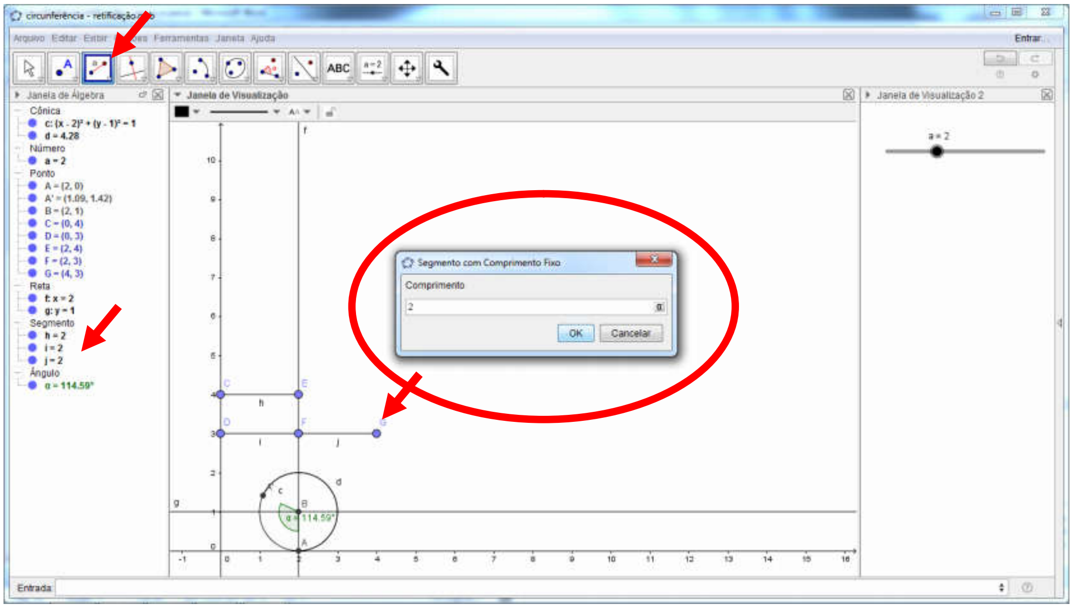


Figura 294: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 25
Fonte: o autor

xiii. Um quarto e último segmento de comprimento 2 com origem H deve ser construído.

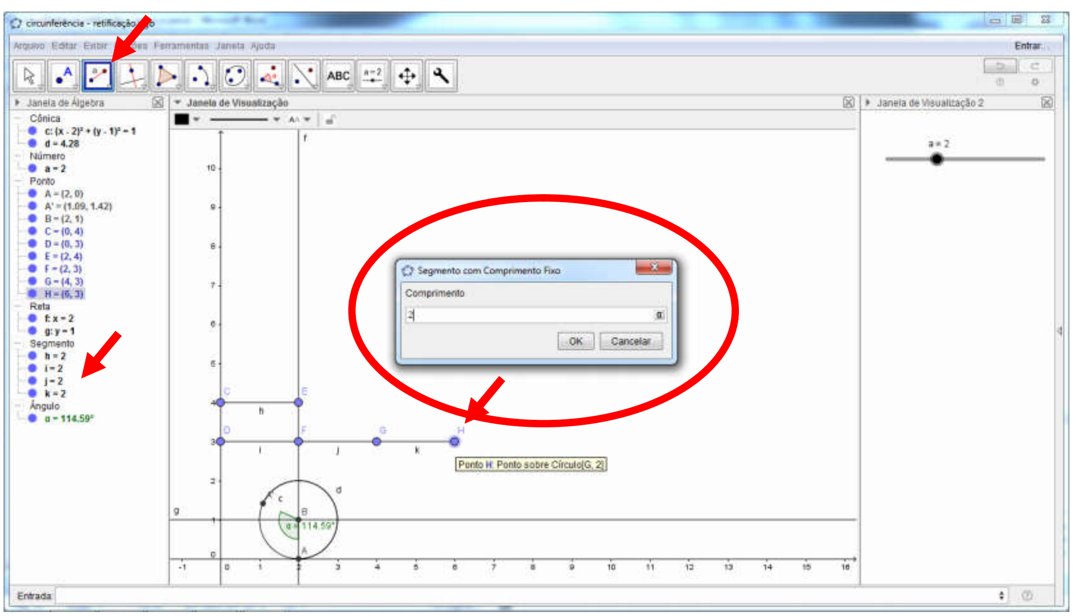


Figura 295: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 26
Fonte: o autor

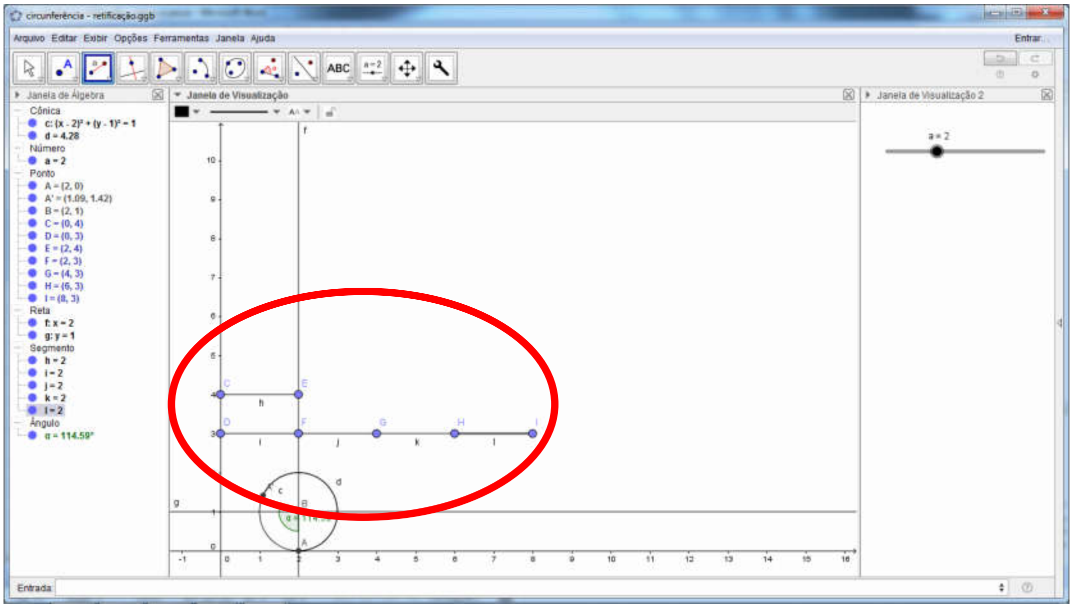


Figura 296: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 27
Fonte: o autor

xiv. Construir um controle deslizante b com intervalo de 1 a 10 e incremento 1.

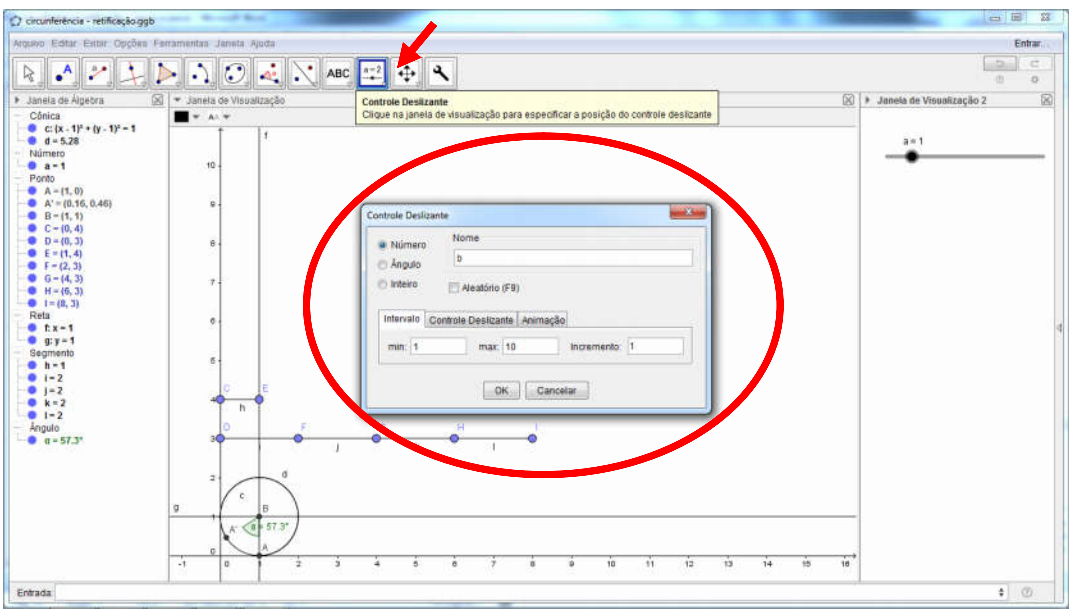


Figura 297: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 28
Fonte: o autor

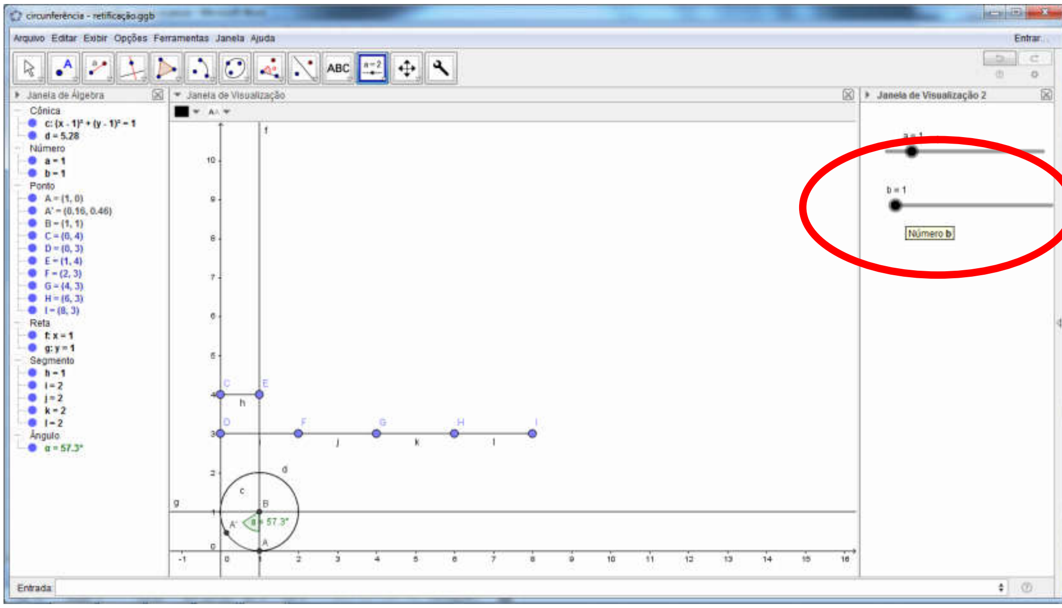


Figura 298: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 29
Fonte: o autor

xv. Usar o valor de "b" como parâmetro para particionar os 4 segmentos que representam o comprimento equivalente a quatro vezes o diâmetro do círculo em "b" partes iguais.

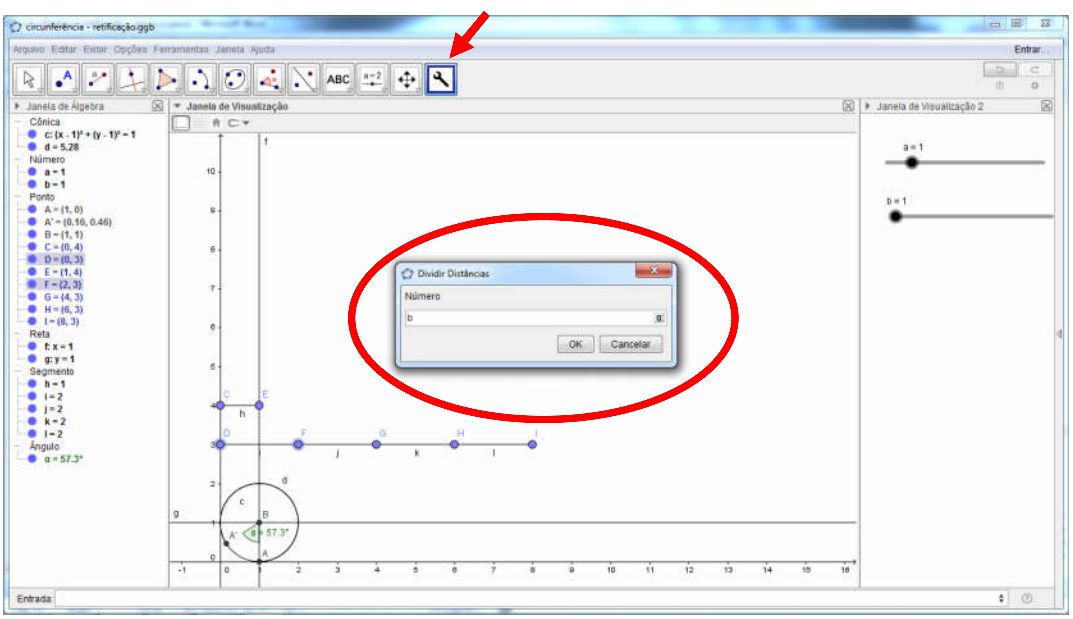


Figura 299: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 30
Fonte: o autor

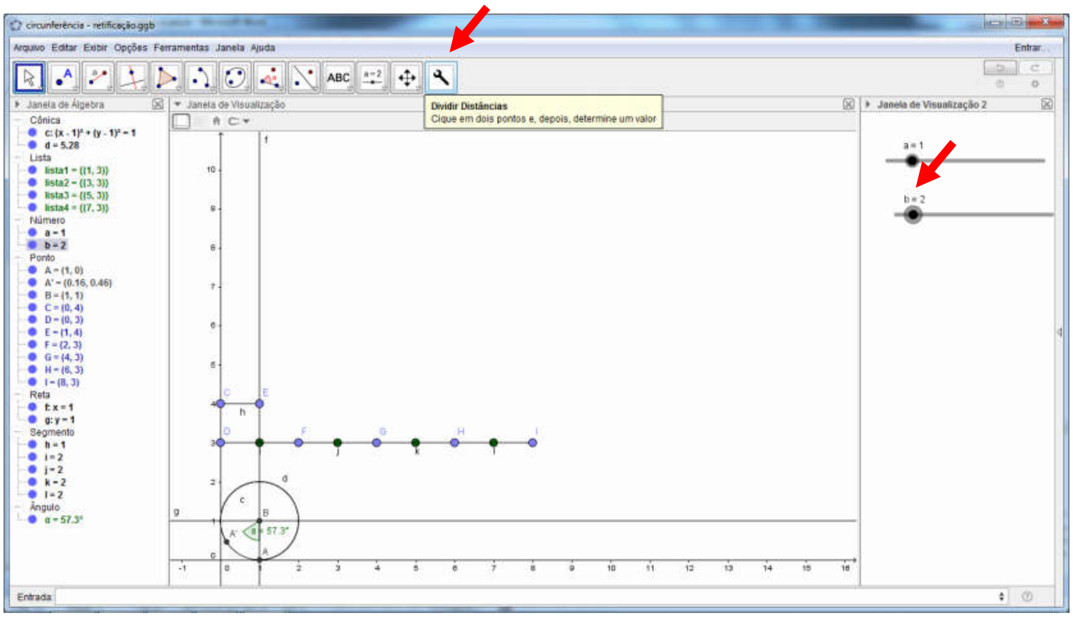


Figura 300: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 31
Fonte: o autor

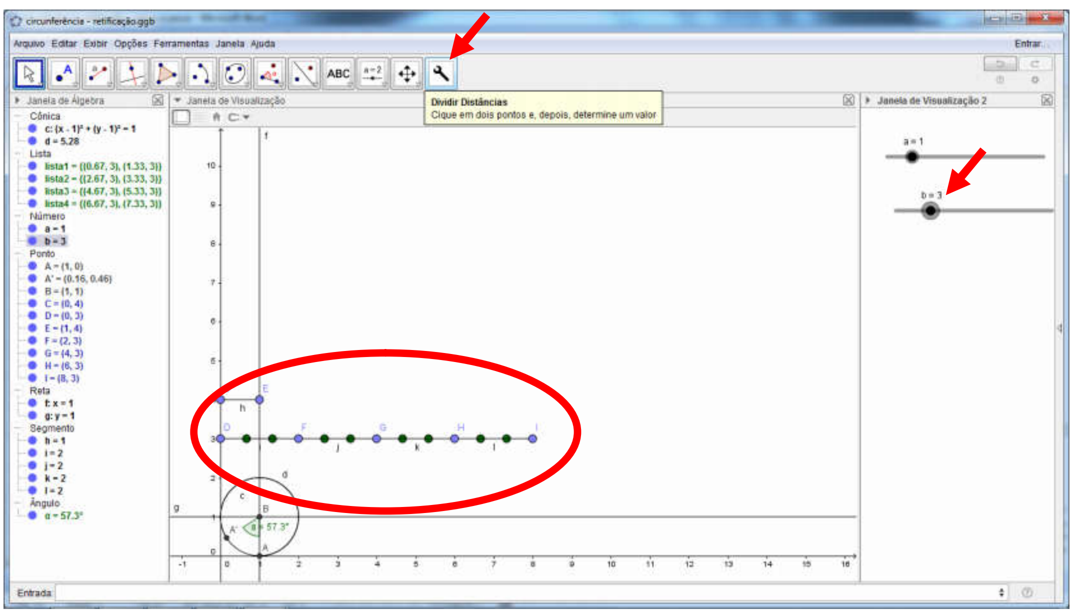


Figura 301: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 32
Fonte: o autor

xvi. Fechar a janela de álgebra.

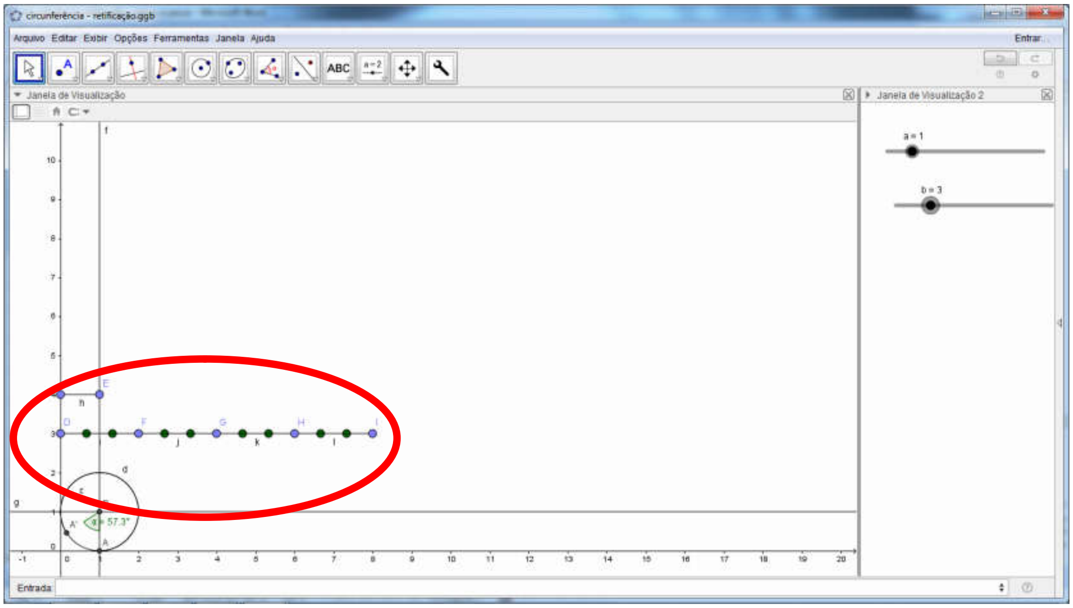


Figura 302: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 33
Fonte: o autor

Está pronta a construção bastando conferir a cada elementos propriedades que permitam melhorar a visibilidade durante as atividades de comparação entre a medida da circunferência e de seu diâmetro.

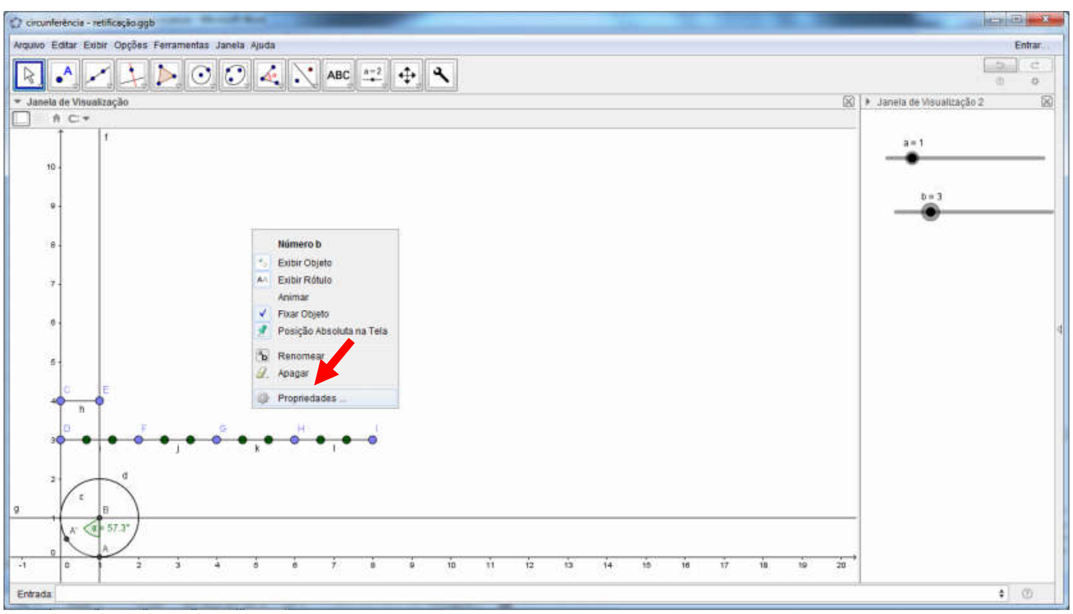


Figura 303: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 34
Fonte: o autor

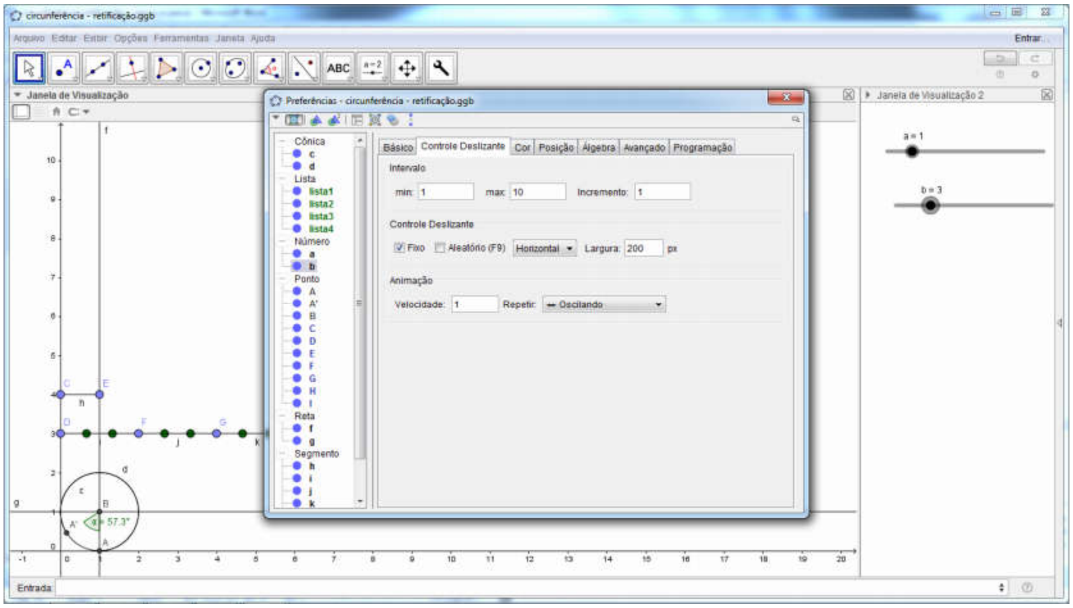


Figura 304: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 35
Fonte: o autor

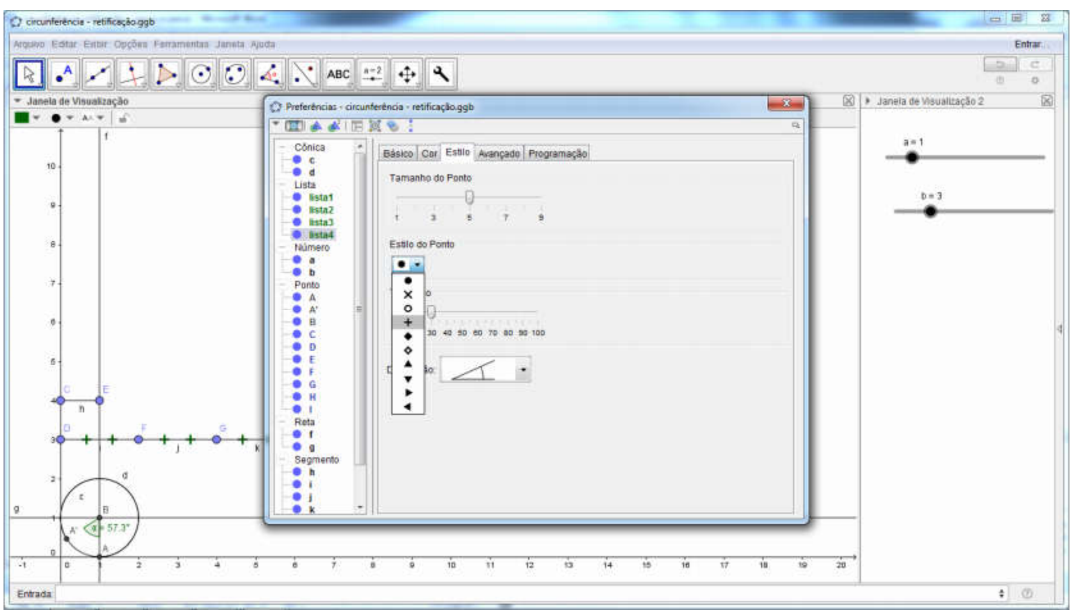


Figura 305: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 36
Fonte: o autor

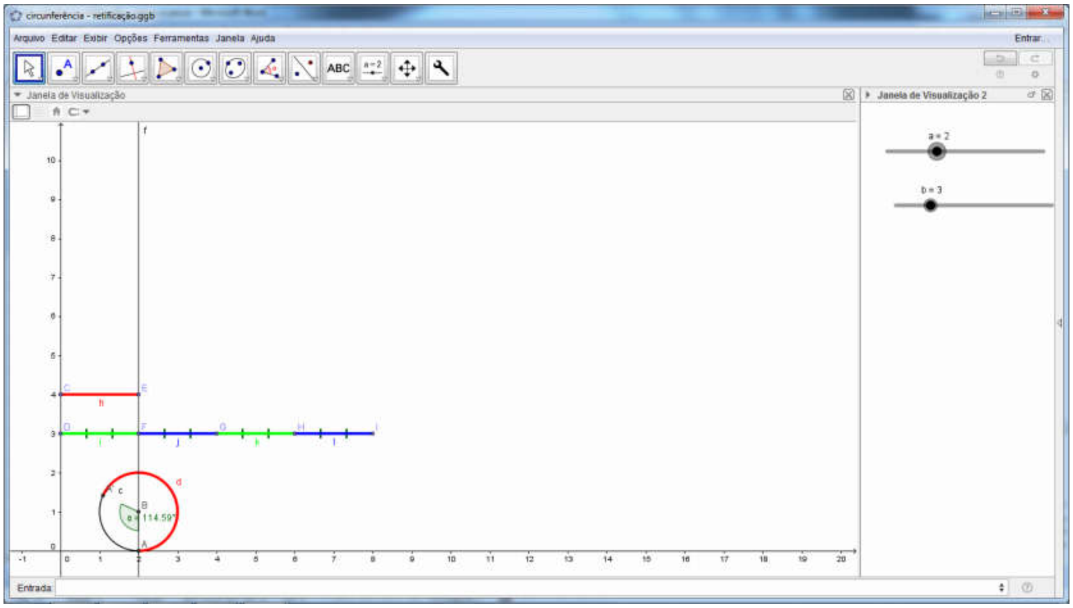


Figura 306: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 37
Fonte: o autor

É possível omitir os eixos coordenados.

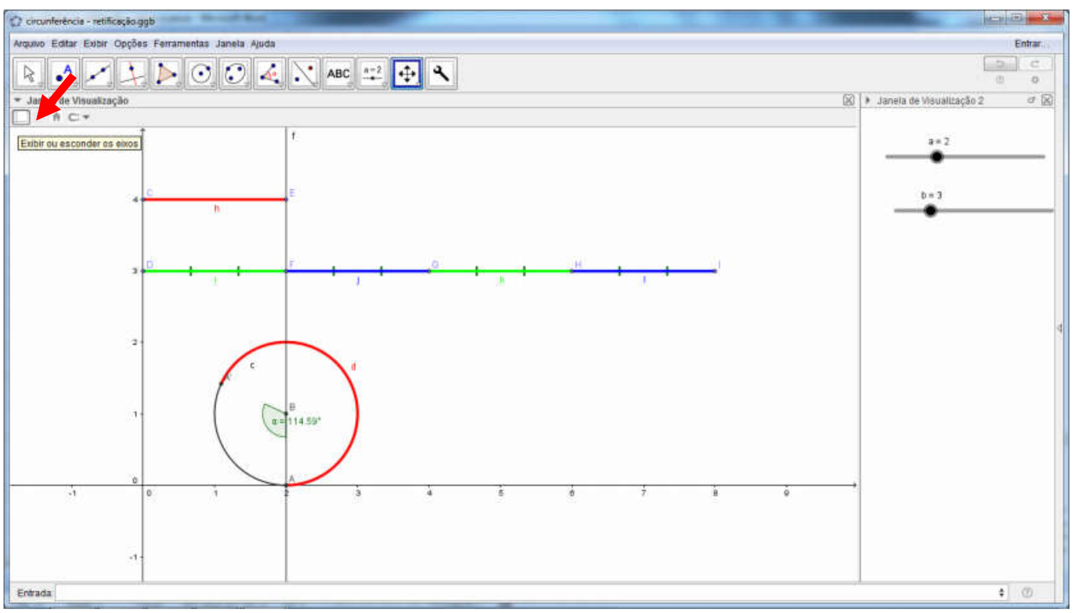


Figura 307: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 38
Fonte: o autor

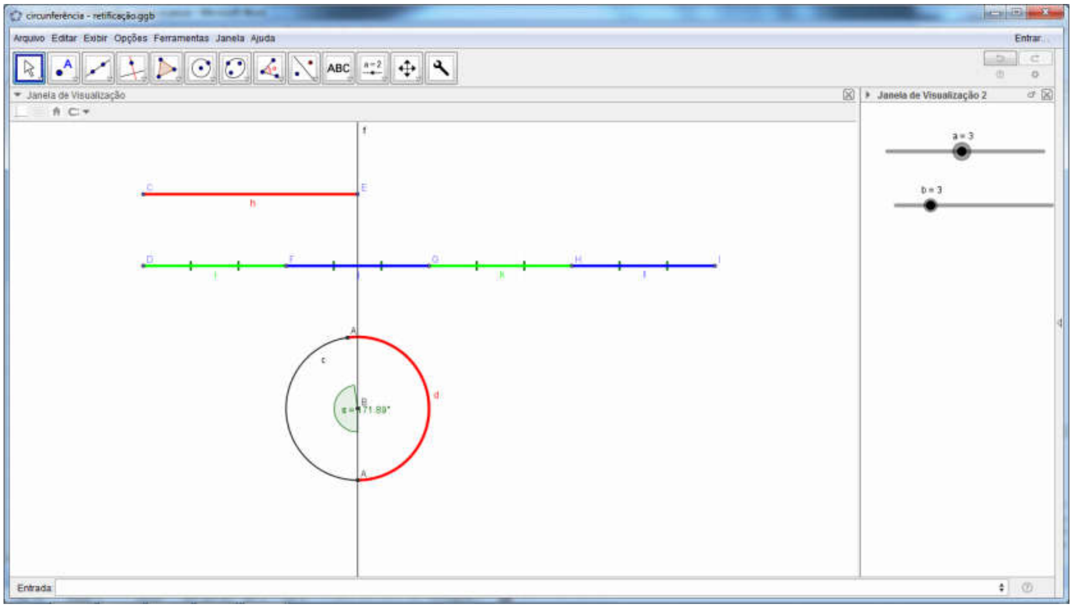


Figura 308: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 39
Fonte: o autor

Pode ser bem interessante para as visualizações a construção de um segmento a partir da origem com comprimento igual a "a" que causará a sensação de que a circunferência está sendo "desenrolada".

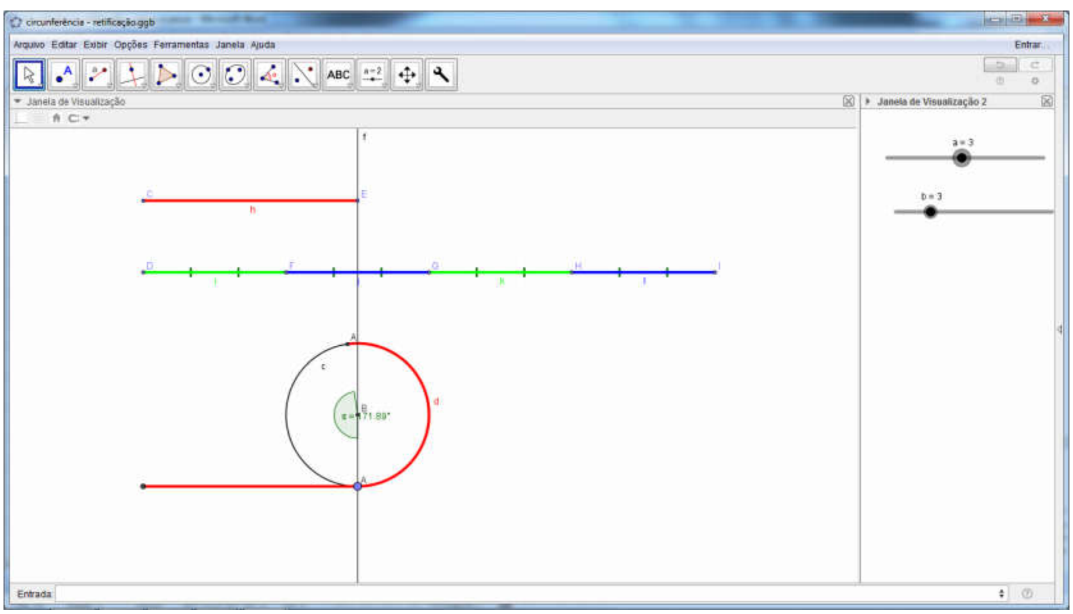


Figura 309: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 40
Fonte: o autor

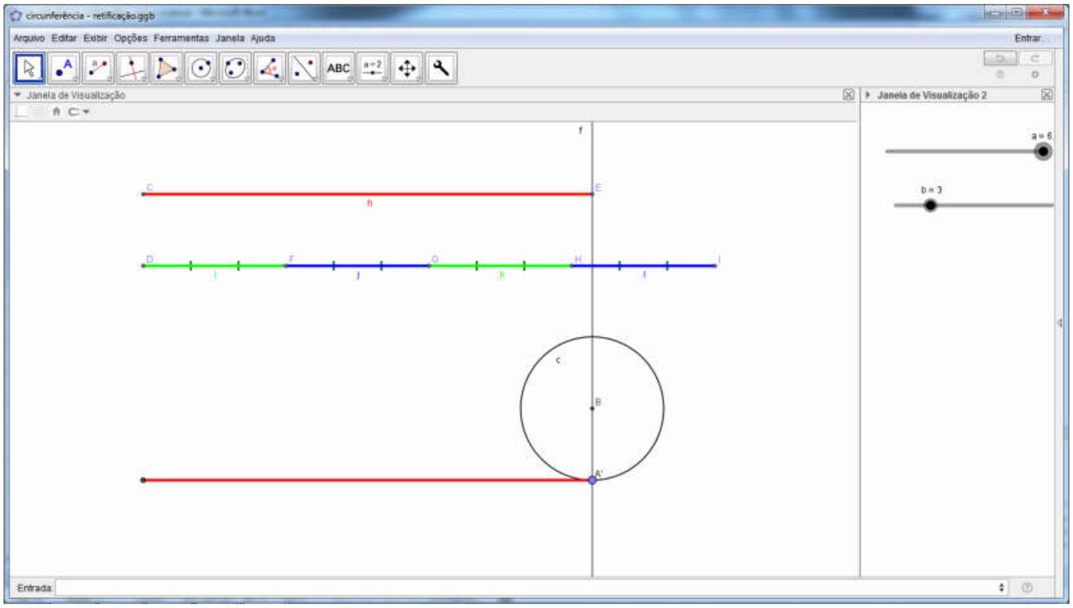


Figura 310: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 41
Fonte: o autor

Por fim a marcação em "b" para 7 partes iguais gerando a visualização de que uma circunferência mede o comprimento de 3 diâmetros completos e mais um sétimo do quarto diâmetro, ou seja $c = \frac{22}{7}d$.

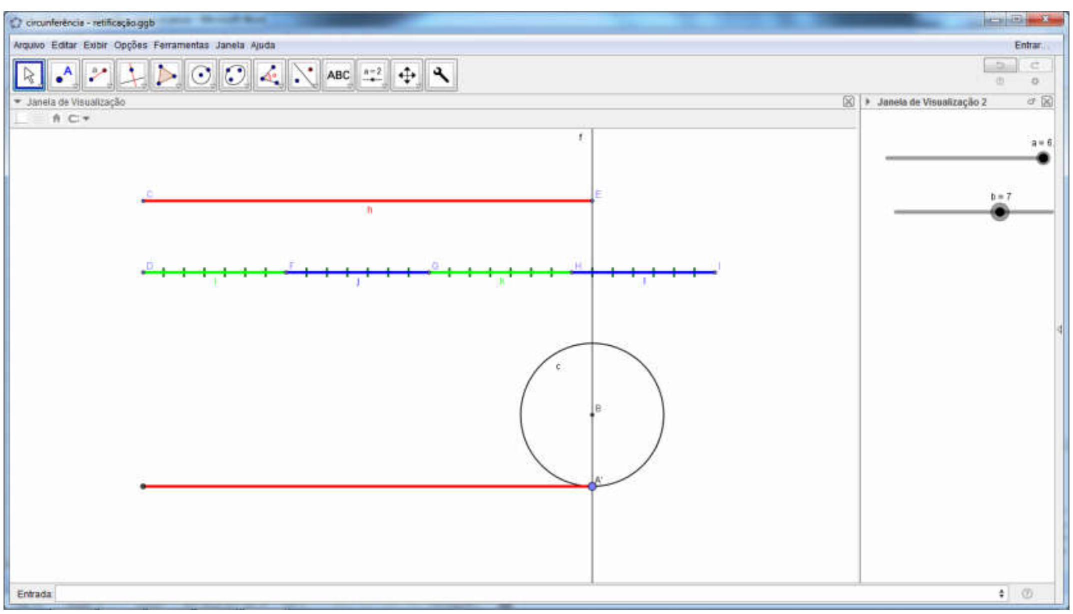


Figura 311: GeoGebra - Retificação de Circunferência - 42
Fonte: o autor

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Faz tempo que utilizo em minhas aulas de trigonometria o Método de Comparações Visuais, que costumo chamar carinhosamente de "método do zoiômetro". Uma brincadeira ingênua, mas que gera descontração sem causar desconcentração. Pelo contrário, atrai mais a atenção dos alunos para as atividades. Entretanto, é uma atitude pessoal, não pode ser algo forçado ou treinado. Cada professor tem sua maneira de se expressar e eu construí ao longo dos anos alguns "jargões" que uso com naturalidade, com o intuito de deixar as aulas mais descontraídas, já que a Matemática é considerada muito "séria", eu diria até "severa". Cito um outro exemplo que utilizo bastante, que é, ao fazer a aplicação do Teorema de Pitágoras em um cálculo, dizer façamos agora um "PIT NELE" e isto traz os alunos mais para perto de mim. Fato importante, já que eles costumam manter uma distância em relação a nós, professores de Matemática.

Esta dissertação tem como principal contribuição divulgar esta prática de comparações visuais. Nesta, acrescentei a utilização do software livre GeoGebra, a qual achei uma idéia ótima. Já havia feito uso do GeoGebra apenas para atividades de Geometria Analítica e para mostrar gráficos de funções trigonométricas, que são mais demorados para construir em sala de aula. Tal software nos dá um ganho de tempo, além da eficiência em mostrar as variações e consequências no gráfico, de quando alteramos os parâmetros da função.

Ao longo da elaboração desta dissertação trabalhamos na construção de imagens, com o auxílio do GeoGebra, para uso de forma dinâmica ou apenas como fonte de ilustrações, com imagens de dimensões precisas. Não seria possível utilizar o método se os objetos representados pelas figuras ficassem distorcidos ou desproporcionais. É importantíssimo desenhos perfeitos, para que os resultados das comparações visuais realizadas sobre estes desenhos sejam uma tradução dos resultados que poderiam ser obtidos através de medições.

Acreditamos também que o resultado deste trabalho é oferecer e propor aos colegas professores uma série de atividades para auxiliar no aprendizado da "difícil" trigonometria. Cabe a cada colega, que queira incorporar à sua prática de sala de aula mais esta ferramenta, adaptá-la ao seu jeito de trabalhar, às condições peculiares de seus alunos e de sua escola. Se a escola oferece acesso fácil a um laboratório de informática, usar as construções feitas no GeoGebra poderá levar o professor a ter resultados excelentes. Caso contrário, usar peças em madeira, desenhos bem feitos no quadro, recortes feitos pelos próprios alunos (considero uma das melhores opções) são opções que indicamos nesta dissertação.

Para finalizar, acrescento que no início de minha carreira eu construía ótimos desenhos no quadro utilizando esquadros, compasso e régua T, e os alunos repetiam o procedimento em seus cadernos. Contudo, eram alunos do Colégio Agrícola, que tinha em seu currículo a disciplina de Desenho Geométrico e Topográfico, não sendo necessário copiar o desenho do quadro ou auxiliar aluno por aluno, bastando pedir: - Desenhem um triângulo equilátero. Com o tempo abandonei as ferramentas e passei a construir desenhos feitos a mão livre, usando as vezes ferramentas como gargantilhas, cordões de sapato, etc. em substituição ao compasso. Depois da elaboração deste trabalho, pretendo variar ainda mais as ferramentas de auxílio no ensino e aprendizado da trigonometria.

REFERÊNCIAS

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana, 7ª ed., vol. 9, São Paulo: Atual, 2000.

PARANÁ. Secretaria de Estado de Educação. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática.** Curitiba: SEED, 2008.

BRASÍLIA. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Explorando o Ensino da Matemática: Atividades: volume 2. Brasília: MEC, 2004.

LIMA, Elon Lages., Números e Funções Reais/Elon Lages Lima. Rio de Janeiro: SBM, 2013.