UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Resolução de Problemas de Matemática Financeira com Planilhas Eletrônicas

Janete Hobold

MANAUS
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Janete Hobold

Resolução de Problemas de Matemática Financeira com Planilhas Eletrônicas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2016

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Hobold, Janete

H683r Resolução de Problemas de Matemática Financeira com Planilhas Eletrônicas / Janete Hobold. 2016

48 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Dr Nilomar Vieira de Oliveira

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Matemática financeira. 2. Planilhas eletrônicas. 3. Resolução de problemas. 4. Financeira. I. Oliveira, Dr Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Janete Hobold

Resolução de Problemas de Matemática Financeira com Planilhas Eletrônicas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 20 de dezembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Presidente

Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
Membro

Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto
Membro

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou o meu caminho durante esta caminhada.

A toda a minha família, especialmente meu esposo Carlos e minhas filhas Sofia e Laura, que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Ao professor Nilomar, pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão desta dissertação. Além de excelente professor, é um ser humano fantástico, que tem sempre uma palavra de incentivo, que nos fáz seguir em frente.

A todos os professores do curso, que compartilharam seus conhecimentos, dando seu melhor para que pudessemos concluir com sucesso esse curso.

Aos professores Disney Douglas de Lima Oliveira e Alcides de Castro Amorim Neto, que aceitaram compor minha banca de defesa, pelas sugestões e análises significativas às quais tentarei atender na versão definitiva do texto.

Aos amigos da turma do mestrado, pela amizade e companheirismo durante essa jornada.

RESUMO

Os conteúdos de matemática financeira são pouco abordados durante a Educação Básica, apesar de sua importância para o exercício da cidadania e tomada de decisões em situações do dia a dia. Pensando nessa problemática, essa dissertação aborda o ensino de matemática financeira, assim como, os conceitos básicos para resolver questões cotidianas, indo além do tradicional cálculo de juros simples e compostos, abordando também as séries de pagamentos e os sistemas de amortização. Para isso, foi realizada uma revisão bibliográfica acerca das finalidades da Educação e a importância do estudo de matemática financeira e do uso das planilhas eletrônicas no ambiente escolar. Faz-se também uma revisão de progressões aritméticas e geométricas, que servem de base para o desenvolvimento dos conteúdos de matemática financeira, e, em seguida, propôs-se o desenvolvimento de seus conteúdos relacionando com as progressões. Proporciona-se assim, a compreensão dos conteúdos e não apenas a aplicação de fórmulas sem sentido. Em consonância com as diretrizes curriculares, é proposto a resolução de problemas relevantes de matemática financeira com o auxílio de planilhas eletrônicas, que, além de facilitar a resolução das questões, prepara os estudantes para o mercado de trabalho.

Palavras-chave: Matemática financeira, Planilhas eletrônicas, Resolução de problemas.

ABSTRACT

The contents of financial mathematics are little discussed during Basic Education, despite its importance for the exercise of citizenship and decision making in everyday situations. Thinking about this problem, this dissertation addresses the teaching of financial mathematics, as well as the basic concepts to solve everyday issues going beyond the traditional simple and compound interest calculation, addressing the series of payments and amortization systems. For this, a bibliographic review was carried out on the purposes of education and the importance of the study of financial mathematics and the use of spreadsheets in the school environment. Also was made a review of progressions arithmetic and geometric, which serve as basis for the development of financial mathematics contents, and then we propose the development of its contents related to progressions. This provides an understanding of the contents and not just the application of meaningless formulas. In line with the curricular guidelines, it is proposed to solve relevant problems of financial mathematics with the aid of spreadsheets, in addition to facilitating the resolution of questions, prepares students for the job market.

Keywords: Financial mathematics, Spreadsheets, Troubleshooting.

LISTA DE SÍMBOLOS

r	Razão de uma progressão aritmética.
a_n	Termo geral de uma progressão.
$=$	Igual.
S_n	Soma dos n termos de uma progressão .
q	Razão de uma progressão geométrica.
C	Capital ou principal.
J	Juro.
M	Montante.
I	taxa de juros.
n	Número de períodos de tempo.
D_0	Valor inicial da dívida.
P_k	Valor da parcela.
A_k	Valor da amortização.
$\lim_{n\to\infty} S_n$	Limite de S_n com n tendendo ao infinito.
$\square$	Indica o fim de uma demonstração.

Sumário

Introdução

Estamos vivendo um momento em que o endividamento da população tem causado preocupação ao país. Diariamente os noticiários apontam números alarmantes sobre a situação financeira de grande parte da população. Essa situação deve-se em parte a questões como o desemprego que atinge uma parcela da população, mas, também, a falta de conhecimento financeiro dessas pessoas.

Rotineiramente, precisamos tomar decisões financeiras sem ter o conhecimento necessário para fazer as melhores escolhas. Apesar da necessidade dos conhecimentos de matemática financeira no cotidiano, a matemática financeira continua sendo pouco estudada no Ensino Médio.

Pensando nessa problemática, este trabalho tem como objetivo, propor uma abordagem desse conteúdo, de forma que o aluno tenha embasamento suficiente para resolver situações presentes no cotidiano. Para resolver as questões de matemática financeira, as planilhas eletrônicas são ferramentas que auxiliam muito. Por isso, nesse trabalho, além de ampliar o conteúdo que é estudado no ensino médio, propô-se resolver os problemas com o auxílio de planilhas.

No capítulo 1, será apresentada uma revisão bibliográfica sobre as finalidades da Educação Básica, onde uma das finalidades evidentes é a necessidade de preparar as pessoas para o exercício da cidadania e para o mundo do trabalho. Aborda-se também a inclusão da disciplina Educação Financeira no Ensino Médio, e, algumas considerações sobre o Ensino de matemática financeira nas escolas, além da importância de introduzir o uso de planilhas eletrônicas no ensino.

No capítulo 2, apresenta-se uma revisão de Progressões Aritméticas e Geométricas. São abordados os conceitos básicos de progressões, que dão subsídio para que os alunos possam compreender os conceitos de matemática financeira.

No capítulo 3, são trabalhados os conceitos de matemática financeira necessários para o dia a dia das pessoas. Ao invés de abordar somente Juros simples e compostos, aborda-se também as séries de pagamentos e os sistemas de amortização de financiamentos.

Por fim, no capítulo 4, serão resolvidos alguns problemas de matemática financeira com o auxílio de planilhas eletrônicas.

Capítulo 1

Aspectos Teóricos

1.1 Finalidades de educação básica segundo a LDB e os PC-NEM

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (LDB), Lei nº 9.394/96, promulgada em 20 de dezembro de 1996, é a legislação que regulamenta o Sistema Educacional do Brasil, e estabelece as diretrizes e bases da educação, desde a educação básica até o ensino superior.

De acordo com o §2º do art. 1º da LDB, a educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social.

O Art. 2º da LDB, diz que: *A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.*

No capitulo II da LDB, que trata da Educação Básica, o Art. 22º diz que: *A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.*

Segundo o Art. 27º, *Os conteúdos curriculares da educação básica observarão, ainda, as seguintes diretrizes:*

1. A difusão de valores fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática;
2. Consideração das condições de escolaridade dos alunos em cada estabelecimento;
3. Orientação para o trabalho;
4. Promoção do desporto educacional e apoio às práticas desportivas não formais.

Na seção IV da LDB, que trata especificamente do Ensino Médio, o Art. 35º nos diz que: *O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:*

- *A consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;*
- *A preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;*
- *O aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;*
- *A compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.*

Em 22 de setembro de 2016, o atual presidente da república, adota a medida provisória Nº 746, que institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral e altera a Lei nº 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

Com essa alteração, o Art. 36º da LDB diz que: *O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos específicos, a serem definidos pelos sistemas de ensino, com ênfase nas seguintes áreas de conhecimento ou de atuação profissional:*

- *Linguagens;*
- *Matemática;*
- *Ciências da natureza;*
- *Ciências humanas;*
- *Formação técnica e profissional.*

No §5º do Art. 36º, está definido que: *Os currículos do ensino médio deverão considerar a formação integral do aluno, de maneira a adotar um trabalho voltado para a construção de seu projeto de vida e para a sua formação nos aspectos cognitivos e socioemocionais, conforme diretrizes definidas pelo Ministério da Educação.*

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), (2002), quando tratam do ensino de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, destacam que o ensino de matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e contextualização sociocultural.

Segundo os PCNEM, *ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.*

1.2 Educação financeira nas escolas

Analisando a LDB, percebemos a exigência legal de oferecer um ensino básico que prepare os estudantes para o mundo do trabalho e para o exercício da cidadania. A partir da legislação que norteia o ensino no Brasil, percebe-se então, que a educação básica, mais especificamente o Ensino médio, não deve apenas preparar os estudantes para o ingresso no Ensino Superior. Ele deve ser visto como um sujeito participante do mundo do trabalho, e ser capaz de exercer sua cidadania.

Nessa perspectiva, o educando deve obter durante sua trajetória escolar, ferramentas que lhe permitam inserir-se no mercado de trabalho e ser capaz de tomar decisões frente às situações que tiver que enfrentar no seu dia a dia.

Hoje vivemos um cenário econômico em que a população tem acesso a diversas modalidades de empréstimos e financiamentos através do Sistema Financeiro. O mercado varejista, com o objetivo de ampliar suas vendas, oferece as mais variadas opções de pagamentos, fazendo com que hoje, as pessoas se deparem com dúvidas tipo: Comprar a vista ou parcelar? Adquirir um bem ou alugar?

Para poder responder a estas perguntas, precisamos ter conhecimentos básicos de matemática financeira, desta forma, faz-se necessário então, que os conteúdos de matemática financeira sejam abordados durante a educação básica, até mesmo porque, se não for nessa etapa, muitas pessoas nunca estudarão.

Para formar um cidadão, que saiba consumir de forma consciente e prudente, a matemática financeira assume um papel importante, pois, saber analisar e conhecer as práticas do comércio, permite que o cidadão melhore sua condição de vida e evite situações de endividamento, fazendo um melhor uso do dinheiro.

Com o objetivo de oferecer ao jovem estudante a formação necessária para tomar decisões financeiras conscientes e sustentáveis, tanto para a vida pessoal quanto para o país, em 22 de dezembro de 2010, foi instituída pelo decreto nº 7.397, a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF).

De acordo com o Art. 1º desse decreto, *Fica instituída a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF com a finalidade de promover a educação financeira e previdenciária e contribuir para o fortalecimento da cidadania, a eficiência e solidez do sistema financeiro nacional e a tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores.* Com esse decreto, espera-se que os estudantes de ensino médio, se tornem multiplicadores desse conhecimento, disseminando-o para suas famílias.

De acordo com o Comitê Nacional de Educação Financeira - CONEF, responsável por definir planos, programas, ações e coordenar a execução da ENEF, a entrada da Educação Financeira nas escolas, se justifica por diversas razões amplamente estudadas pelos países que já acumulam experiência na área. Dentre essas, se destacam:

1. *Os benefícios de se conhecer o universo financeiro e de se tomar decisões financeiras adequadas, que fortaleçam o comando autônomo da própria vida e, por extensão, do âmbito familiar e comunitário;*

2. *A Educação Financeira nas escolas se apresenta como uma estratégia fundamental para ajudar as pessoas a enfrentar seus desafios cotidianos e a realizar seus sonhos individuais e coletivos;*

3. *Discentes e docentes financeiramente educados são mais autônomos em relação a suas finanças e menos suscetíveis a dívidas descontroladas, fraudes e situações comprometedoras que prejudiquem não só a própria qualidade de vida como a de outras pessoas;*

4. *A Educação Financeira tem um papel fundamental ao desenvolver competências que permitem consumir, poupar e investir de forma responsável e consciente, propiciando uma base mais segura para o desenvolvimento do país. Tal desenvolvimento retorna para as pessoas sob a forma de serviços mais eficientes e eficazes por parte do Estado, numa relação saudável das partes com o todo.*

Analisando os livros de Educação Financeira, escritos para as escolas públicas do país, verifica-se a presença de conteúdos que também fazem parte do currículo de Matemática Financeira. As situações didáticas propostas para o estudo de educação financeira, colocarão os alunos frente a situações do cotidiano que irão exigir que eles sejam capazes de:

- Analisar empréstimos e financiamentos, levando em conta valor emprestado, taxas de juros, valor das prestações, prazo para pagamento e o custo efetivo total (CET).

- Relacionar os conceitos de taxa de juros em situações cotidianas e calcular a diferença entre preços à vista e a prazo, analisando qual a melhor opção de compra;

- Calcular o rendimento de uma aplicação na poupança;

- Diferenciar renda bruta e renda líquida, levando-se em conta os descontos de INSS e imposto de renda (IR);

- Buscar informações sobre preços e financiamentos da casa própria, decidir o valor da casa, da entrada e das prestações em função do seu orçamento familiar;

- Decidir entre duas ou mais opções de aplicação, levando em conta as taxas de juros.

Podemos aproveitar a inserção dessa disciplina no currículo do Ensino Médio para trabalhar de forma interdisciplinar com a Matemática e as demais disciplinas, aproveitando a motivação dos alunos para aprofundar mais o estudo de Matemática Financeira.

De acordo com Kiyosaki, R. T. [11],

> *Uma das razões pelas quais os ricos ficam mais ricos, os pobres, mais pobres e a classe média luta com as dívidas, é que o assunto dinheiro não é ensinado nem em casa nem na escola. As escolas se concentram em habilidades acadêmicas e profissionais, mas não em habilidades financeiras. Isso explica o fato de muitos profissionais inteligentes, que tiveram ótimas notas quando eram estudantes, tem problemas financeiros durante toda a sua vida.*

1.3 Ensino de matemática financeira e o uso de planilhas eletrônicas

Ao analisar os livros didáticos de matemática do Ensino Médio, percebe-se que os conteúdos de Matemática Financeira são abordados de forma superficial, limitando-se a resolver problemas de cálculo de juros simples e compostos, ao invés de abordar problemas mais próximos do cotidiano. São raras as situações em que as sequências de pagamentos e depósitos são abordadas.

Segundo Nasser [13], *grande parte dos livros didáticos brasileiros aborda o tema de forma tradicional, por meio da aplicação de fórmulas ou do uso sem significado de tabelas. Poucos relacionam o tema, com o estudo de funções ou de progressões aritméticas ou geométricas, e também não problematizam situações do cotidiano.*

Após fazer a análise de diversos livros didáticos de Matemática do Ensino médio, Coser Filho (2008), também constatou que existe disparidade entre as abordagens utilizadas, conceitos trabalhados e exercícios propostos, fazendo com que, dessa forma, não exista um padrão para o ensino de Matemática Financeira.

Na síntese de sua análise, Coser Filho [6] diz: *(...) alguns livros abordam o assunto entre os estudos de funções exponenciais e progressões geométricas, outros fazem após o estudo das progressões e, em um caso específico, a abordagem ocorreu antes dos dois conceitos citados, sendo mais uma vez, estudada como encerramento dos capítulos das funções exponenciais e das progressões.* Para Morgado [12],a Matemática Financeira é uma importante aplicação de progressões aritméticas e geométricas, e, sua operação básica é o empréstimo.

Dessa forma, é pré requisito para o bom entendimento de Matemática Financeira, que os alunos tenham conhecimento dos conteúdos acima citados, e que os autores dos livros didáticos ajustem a sequência dos conteúdos, de modo que os pré-requisitos sejam estudados antes e, que façam as devidas deduções de fórmulas, permitindo que os estudantes entendam o significado das operações que estão executando.

Atualmente, a população tem acesso fácil a empréstimos e financiamentos, mas não tem conhecimentos para decidir com consciência entre as opções que lhe são apresentadas, por isso, sendo o empréstimo a operação básica, não podemos restringir o ensino de matemática financeira ao cálculo de juros simples e compostos.

Fica claro na LDB, que na educação básica, os conteúdos devem estar em consonância com o interesse social, havendo assim, a necessidade de incluir no currículo das escolas, conteúdos que ajudem as pessoas, para o exercício da cidadania.

Outro aspecto que Coser Filho [6] identificou durante a análise dos livros de matemática do ensino médio, é o fato de que alguns autores sugerem a resolução dos problemas propostos com o auxílio de calculadoras, mas, nenhum deles, propõe a resolução com o auxílio de planilhas eletrônicas.

Esse fato chama atenção, pois, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio Volume 2 (2008), quando tratam dos conhecimentos de matemática, já destacam o impacto provocado pela tecnologia da informação e comunicação na configuração da sociedade.

De acordo com as Orientações curriculares [4],

> *(...) Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia a dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacidade para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática.*

Segundo as Orientações curriculares [4], *deve-se pensar na formação com capacidade para usar calculadoras e planilhas eletrônicas, que são dois instrumentos bastante corriqueiros nos dias de hoje.*

As planilhas eletrônicas são programas de computador que servem para manipular tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas. Para operar com uma planilha, em nível básico, é preciso conhecimento matemático similar àquele necessário ao uso de calculadora, mas com maiores exigências quanto à notação de trabalho, já que as operações e as funções são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação de matrizes.

Apesar de não terem sido pensadas para propósitos pedagógicos, as planilhas eletrônicas podem ser utilizadas como recursos tecnológicos úteis à aprendizagem matemática. Elas oferecem um ambiente adequado para experimentar sequências numéricas e explorar algumas de suas propriedades, por exemplo, comparar o comportamento de uma sequência de pagamentos sob juros simples e juros compostos.

Para Giraldo, V; Cetanos, P; Mattos, F [10], *os recursos disponíveis nas planilhas eletrônicas possibilitam diversas aplicações no ensino de Matemática. Dentre esses recursos destacam-se:*

1. *Manipulações com grandes quantidades de dados numéricos;*

2. *Articulação entre diversas formas de representação;*

3. *Ferramentas lógicas; e*

4. *Ferramentas estatísticas;*

Ainda de acordo com Giraldo, V; Cetanos, P; Mattos, F; [10],*(...) além das planilhas oferecerem muito mais recursos e funções que as calculadoras de bolso, seu uso apresenta algumas diferenças importantes do ponto de vista pedagógico, em relação ao uso da calculadora:*

1. *de forma geral as planilhas possuem maior precisão que as calculadoras, portanto possibilitam a visualização e o tratamento de dados numéricos com mais casas decimais.*

2. *os recursos das planilhas também oferecem a possibilidade de manusear os dados das atividades de forma mais dinâmica e com menos uso de teclas, uma vez que as fórmulas e dados digitados em uma célula podem ser generalizados para outras por meio do recurso arrastar.*

3. *as planilhas geram automaticamente um registro tanto das operações e funções matemáticas empregadas no problema, quanto dos dados da solução. Para guardar tais registros com o uso da calculadora, é preciso manter um controle paralelo em papel.*

4. *por outro lado, os símbolos encontrados nas calculadoras de bolso são essencialmente os mesmos e obedecem às mesmas regras com que os alu-nos estão acostumados a lidar desde a alfabetização matemática nos anos iniciais, enquanto as planilhas eletrônicas possuem simbologia e sintaxe próprias, cuja aprendizagem por si só demanda maior maturidade por parte do aluno?.*

Com todas essas vantagens, é importante introduzir no Ensino Médio, a utilização das planilhas eletrônicas como auxílio na resolução de problemas, principalmente de Matemática Financeira. Com seu auxílio, os estudantes podem dedicar mais tempo à compreensão dos conceitos, bem como, resolver problemas que, seriam muito trabalhosos com o auxílio de calculadoras. Além disso, os problemas resolvidos com o auxílio das planilhas eletrônicas podem ser utilizados em situações futuras. Como as planilhas são interativas, ao se deparar com situações semelhantes podemos alterar os dados digitados, aproveitando a fórmula já existente. Dessa forma, as planilhas construídas durante o Ensino Médio podem acompanhar o estudante ao longo de sua vida e serem adaptadas para a análise de outras situações.

Outro aspecto importante sobre o uso de planilhas, é a necessidade de saber utilizá-las para entrar e se manter no mercado de trabalho. Atualmente elas são amplamente utilizadas por empresas, agências de serviços, grupos de voluntários, organizações do setor privado, cientistas, estudantes, educadores, formadores, investigadores, jornalistas, contadores e outros.

Com elas é possível calcular o imposto de vendas em uma compra, calcular o custo de uma viagem de carro, de criar um conversor de temperatura, calcular o preço da pizza por centímetro quadrado e fazer a análise dos dados introduzidos. Além disso, pode-se acompanhar a evolução de uma dívida, de rendimentos e bens e também organizar o orçamento doméstico. Dessa forma, as utilidades pessoais das planilhas são quase tão infinitas quanto às possibilidades empresariais, sendo assim, uma ferramenta essencial de trabalho.

Capítulo 2

Progressões

Serão apresentados a partir daqui, alguns conceitos de progressões que serão importantes para o estudo de matemática Financeira.

2.1 Progressões Aritméticas

Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior, a partir do segundo, é constante. Essa diferença é chamada de razão da progressão e representada pela letra r.

Exemplo 2.1. *As sequências* $(5, 8, 11, \cdots)$ *e* $(7, 5, 3, 1, \cdots)$ *são progressões aritméticas cujas razões valem, respectivamente,* 3 *e* -2*.*

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$, para avançar um termo basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante, como pode ser visto na figura 2.1.

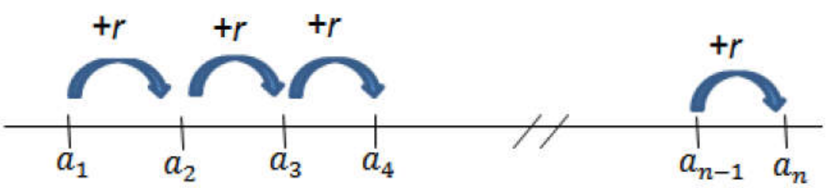

Figura 2.1:
Progressão Aritmética de razão r

Assim, por exemplo, $a_4 = a_1 + 3r$, pois ao passar de a_1 para a_4, avançamos 3 termos. De modo geral, $a_n = a_1 + (n-1)r$ pois, para avançar de a_1 para a_n, avançamos $n-1$ termos.

Exemplo 2.2. *O preço de um carro novo é de* $R\$40000,00$ *e diminui de* $R\$3000,00$ *a cada ano de uso. Qual será o preço com* 4 *anos de uso.*

Solução: *Chamando o preço de n anos de usos de a_n, temos $a_0 = 40000,00$ e queremos calcular a_4. Como a desvalorização anual é constante, (a_n) é uma progressão aritmética. Logo, $a_4 = a_0 + 4r = 40000 + 4(-3000) = 28000,00$. O preço será de $R\$28000,00$.*

2.1.1 Termo Geral de um Progressão Aritmética

Em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em n, sendo $a_n = a_1 + (n-1)r$ então, $a_n = r.n + (a_1 - r)$ e $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio é de grau 1. Se $r = 0$, isto é, se a progressão for estacionária, esse polinômio é de grau menor que 1. Pensando em uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano. então, a_n é uma progressão aritmética, se e somente se, os pontos do plano têm coordenadas $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$,etc ... estão em linha reta, como na figura 2.2.

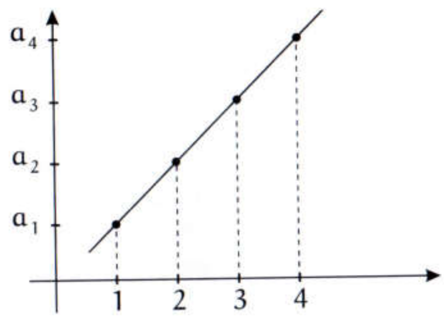

Figura 2.2: Gráfico de uma Progressão Aritmética

2.1.2 A Soma dos Termos de um Progressão Aritmética

Teorema 2.1. *A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $a_1, a_2, a_3, \cdots$ é*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Demonstração. Temos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo a soma de trás para a frente, $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$.
Daí, $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.
Observe que, ao passar de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parêntes são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, temos $2S_n = (a_1 + a_n).n$ e

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

□

2.2 Progressões Geométricas

Progressões geométricas são sequências nas quais a taxa de crescimento i de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Exemplo 2.3. *A sequência* $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ *é um exemplo de uma progressão geométrica. Aqui a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é* 100%, *o que faz com que cada termo seja igual a* 200% *do termo anterior.*

Exemplo 2.4. *A sequência* $(1000, 800, 640, 512, \ldots)$ *é um exemplo de progressão geométrica. Aqui, cada termo é* 80% *do termo anterior. A taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de* -20%.

É claro então que numa progressão geométrica, cada termo é igual ao anterior multiplicado por $1 + i$, onde i é a taxa de crescimento dos termos. Chamamos $1 + i$ de razão da progressão e representamos a razão por q.

Portanto, uma *progressão geométrica* é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo anterior. Esse quociente é chamado de *razão* da progressão e representado pela letra q. A razão q de uma progressão geométrica é simplesmente o valor de $1 + i$, onde $1 + i$ é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte.

2.2.1 Termo Geral de uma Progressão Geométrica

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, para avançar um termo basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante, como pode ser visto na figura 2.3

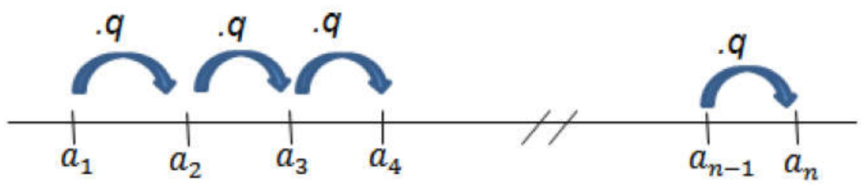

Figura 2.3: Progressão Geométrica de razão q

Por exemplo,$a_4 = a_1 q^3$, pois avançamos 3 termos ao passar de a_1 para a_4. De modo geral, $a_n = a_1 q^{n-1}$, pois ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n - 1$ termos.

Como em uma progressão geométrica $a_n = a_0 q^n$, a função que associa a cada número natural n o valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais da função exponencial $a(x) = a(0)q^x$. Portanto, podemos pensar em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor de a_n, e o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial, como na figura 2.4

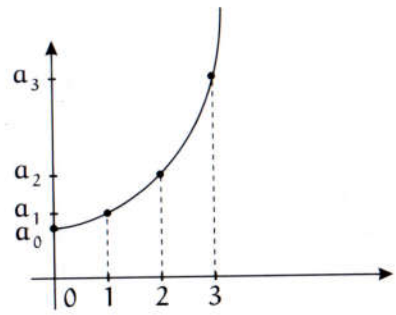

Figura 2.4: Gráfico de uma progressão Geométrica

Um resultado importante é a fórmula que relaciona taxas de crescimento referidas a períodos de tempo diversos. Será abordado na próxima seção.

2.2.2 Fórmula das Taxas Equivalentes

Lema 2.1. *Se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se $T = nt$, então $1 + I = (1 + i)^n$.*

Demonstração. Seja G_0 o valor inicial da grandeza. Após um período de tempo T, o valor da grandeza será $G_0(1 + i)^1$. Como um período T equivale a n períodos de tempo iguais a t, o valor da grandeza será também igual a $G_0(1 + i)^n$. Logo, $G_0(1 + I)^1 = G_0(1 + i)^n$ e $1 + I = (1 + i)^n$. □

Exemplo 2.5. *Se a população de um país cresce 2% ao ano, quanto crescerá em 25 anos?*

***Solução**: Temos $i = 2\% = 0,02$ e $n = 25$. Daí, $1 + I = (1 + i)^n = (1 + 0,02)^{25} \approx 1,6406$ e $I \approx 0,6406 = 64,06\%$.*

Outro resultado importante é a fórmula que fornece a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. Esse resultado será apresentado na próxima seção.

2.2.3 A Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica

Lema 2.2. *A soma dos n termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, é*

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

.

Demonstração. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. Multiplicando por q, obtemos $qS_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1}$. Subtraindo, temos $S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$, isto é, $S_n(1 - q) = a_1 - a_1 q^n$. Portanto,

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

. $\square$

Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \to \infty$. Como nesse caso $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \frac{1-0}{1-q},$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \frac{1}{1-q}.$$

Capítulo 3

Matemática Financeira

Matemática financeira é um conjunto de técnicas e formulações matemáticas que tem por objetivo analisar como os recursos financeiros se alteram ao longo do tempo. Ela parte do princípio de que o dinheiro tem valor no tempo, ou seja, se o credor de uma dívida abre mão de recebe-la hoje para recebe-la no futuro, ele terá de ser recompensado por isso de alguma forma.

O termo juros pode ser definido como o aluguel pago pelo uso momentâneo ou permanente de determinada quantia de capital pertencente a um terceiro.

Alguém que dispõe de um capital C (chamado de principal) empresta-o a outrem por certo período, e seu capital C volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juro. A soma $C + J$ é chamada De montante e será representada por M. A razão $i = \frac{J}{C}$ que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros.

Exemplo 3.1. *João tomou um empréstimo de* $R\$1000,00$. *Dois meses após, pagou* $R\$1100,00$. *Os juros pagos por João são de* $R\$100,00$ *e a taxa de juros é de* $\frac{100}{1000} = 0,1 = 10\%$. *O principal é a dívida inicial de João, é* $C = R\$1000,00$*; o montante, que é a dívida na época do pagamento, é* $M = R\$1100,00$.

3.1 Regime de Capitalização

Regime de capitalização é a forma como os juros são calculados e incorporados ao capital, refletindo dessa forma, o processo de evolução do capital ao longo do tempo. O cálculo da incorporação dos juros pode se dar pressupondo:

- Capitalização discreta, onde os valores monetários são concentrados em determinadas datas;

- Capitalização contínua, na qual, os valores monetários fluem de forma contínua e uniforme ao longo do tempo, segundo uma função matemática.

Na capitalização discreta, os dois regimes existentes se diferenciam pela forma como os juros são calculados:

- Capitalização simples (ou linear);
- Capitalização composta (exponencial).

3.1.1 Juros Simples

Em algumas situações (prazos pequenos, juros de mora), são usados juros simples. No regime de juros simples, os juros em cada época são calculados sobre o principal. Dessa forma, para calcular o juro J, de cada período, fazemos: $J = Ci$. Por exemplo, um principal igual a 100, a juros simples de 2% ao mês evolui de acordo com a tabela abaixo.

n	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
C_n	100	102	104	106	108	110	$\ldots$

Não há dificuldade em calcular juros simples pois a taxa incide sempre sobre o capital inicial. No exemplo, os juros são sempre 2% de 100, ou seja, $J = 100 \times 0,02 = 2$. É claro então que, $C_n = C_0 + niC_0 = C_0(1 + ni)$, o que faz com que os valores de C_n formem uma progressão aritmética.

3.1.2 Juros Compostos

Os juros formados no final de cada intervalo unitário de tempo são gerados pelo montante existente no início de cada intervalo. Ou seja, são gerados pela soma do capital C, inicialmente investido, com os juros acumulados até o fim do intervalo imediatamente anterior. No regime de capitalização composta os juros não pagos são incorporados ao capital para efeito de cálculo dos juros dos períodos subsequentes, determinando, assim, um crescimento exponencial do montante.

Exemplo 3.2. *Manoel tomou um empréstimo de* 100 *reais, a juros de taxa* 2% *ao mês. Após um mês, a dívida de Manoel será acrescida de* $100 \times 0,02$ *reais de juros, (pois* $(J = Ci)$*, passando a* $102,00$ *reais. Se Manoel e seu credor concordarem em adiar a liquidação da dívida por mais um mês, mantida a mesma taxa de juros,o empréstimo será quitado, dois meses depois de contraído, por* $104,04$*, pois os juros relativos ao segundo mês serão de* $102 \times 0,02 = 2,04$ *reais. Esses juros assim calculados são chamados de juros compostos.*

Teorema 3.1. *No regime de juros compostos de taxa* i*, um principal* C_0 *transforma-se, depois de* n *períodos de tempo, em um montante* $C_n = C_0(1 + i)^n$*.*

Demonstração. Basta observar que os valores do capital crescem a uma taxa constante i e, portanto, formam uma progressão geométrica de razão $1 + i$. $\square$

Exemplo 3.3. *Um capital de* $1000,00$ *reais foi aplicado para render juros a* 10% *ao ano, durante cinco anos. Determine o montante ao final dos cinco anos.*

Solução: $C_5 = C_0(1+i)^5 = 1000(1+0,1)^5 = 1610,51$ *reais.*

Outro modo de ler o Teorema 3.1, $C_n = C_0(1+i)^n$, é que uma quantia, hoje igual a C_0, transformar-se-á, depois de n períodos de tempo, em uma quantia igual a $C_0(1+i)^n$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é A, equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a $F = A(1+i)^n$.

Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais: *Para obter o valor futuro, basta multiplicar o valor atual por* $(1+i)^n$. *Para obter o valor atual, basta dividir o valor futuro por* $(1+i)^n$.

Exemplo 3.4. *Uma loja oferece duas opções de pagamento:*

1. *à vista, com* 30% *de desconto.*

2. *em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira prestação sendo paga no ato da compra.*

Qual a taxa mensal dos juros embutidos na venda a prazo?

Solução: *Fixando o valor do bem em* 100, *temos os esquemas de pagamentos representados na figura 3.1*

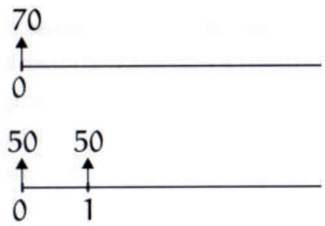

Figura 3.1: Comparando 2 esquemas de pagamento

Igualando os valores, por exemplo, na época 0 *(a data usada nessas condições é chamada de data focal), obtemos* $70 = 50 + \frac{50}{1+i}$. *Daí,* $i = 1,5 = 150\%$. *A loja cobra* 150% *ao mês nas vendas a prazo.*

Exemplo 3.5. *Investindo seu capital a juros mensais de* 2% *ao mês, em quanto tempo você dobrará o seu capital inicial?*

Solução: *Pelo teorema 3,1, temos que* $C_n = C_0(1+i)^n$. *Se dobrarmos o capital, o montante* C_n *será* $2C_0$. *Então,* $C_0(1+0,02)^n = 2C_0$. *Daí,* $1,02^n = 2$ *e* $n = \frac{log2}{log1,02} \approx 35$ *meses.*

Olhando para os gráficos de evolução de um mesmo principal C_0 a juros de taxa i, a juros simples e a juros compostos, na figura 3.2, observamos que o montante a juros compostos é superior ao montante a juros simples, exceto se o prazo for menor que 1. É por isso que os juros simples só são utilizados em cobranças de juros em prazos inferiores ao prazo ao qual se refere a taxa de juros combinada.

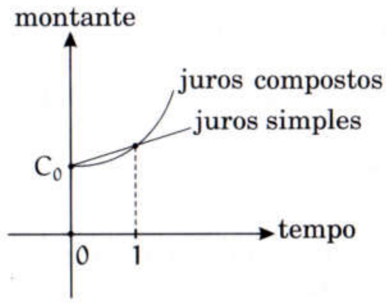

Figura 3.2: Comparação entre juros simples e compostos

3.2 A Fórmula das Taxas Equivalentes

Duas taxas de juros I e i, expressas em unidades de tempo distintas, são consideradas equivalentes quando, incidindo sobre um mesmo capital, durante o mesmo prazo, produzem o mesmo montante.

Fórmula das taxas equivalentes: Se a taxa de juros relativamente a um período de tempo n é igual a i, a taxa de crescimento relativamente a n períodos de tempo é I tal que $1+I = (1+i)^n$.

Exemplo 3.6. *A taxa anual de juros equivalente a 4% ao mês é I tal que $1 + I = (1 + 0,04)^{12}$. Então, $1 + I \approx 1,6010$. Logo, $I \approx 0,6010 \approx 60,10\%$ ao ano.*

Um erro comum é achar que juros de 4% ao mês equivalem a juros anuais de $12 \times 4\% = 48\%$ ao ano. Essas taxas são chamadas de taxas proporcionais, pois, a razão entre elas é igual a razão dos períodos aos quais elas se referem. No regime de capitalização simples, duas taxas de juros proporcionais i e I, incidindo sobre o mesmo capital, resultam no mesmo montante ao final de determinado prazo pois, o montante tem crescimento linear. No regime de capitalização simples, a taxa proporcional é também equivalente. Na capitalização composta, entretanto, a taxa proporcional não é equivalente, pois faz capitais iguais, em tempos iguais, produzam montantes diferentes.

A taxa de 48% ao ano é chamada de *taxa nominal* e a taxa de $60,10\%$ ao ano é chamada de *taxa efetiva*.

Uma taxa de juros é dita taxa nominal quando o prazo de formação e incorporação dos juros ao capital (capitalização) não coincide com aquele ao qual a taxa se refere. Ocorre, portanto, neste caso, que a taxa de juros é expressa em uma unidade de tempo real, mas capitalizada em outra.

As taxas nominais são simples para efeito de informação e compostas para efeito de utilização. Geralmente são taxas anuais capitalizadas ao semestre, trimestre ou mês, ou taxas mensais, capitalizadas diariamente. Trata-se, portanto, da taxa de juros que figura nos contratos (contratada) das operações, sendo também denominada taxa declarada ou taxa cotada no mercado financeiro.

Uma taxa nominal se transforma em taxa efetiva quando convertida em seu período de capitalização. A taxa nominal serve apenas como referência, pois não é a taxa realmente paga ou recebida. A taxa efetiva é a efetivamente paga ou recebida m uma operação financeira, razão pela qual somente esta deve ser utilizada nos cálculos financeiros.

Uma taxa nominal sempre traz em seu enunciado a unidade de tempo da taxa e da capitalização, informações essenciais para fazer a conversão para a taxa efetiva. Na maioria das vezes, as taxas nominais são anuais.

A taxa efetiva é uma taxa apurada durante determinado prazo, sendo formada exponencialmente por meio de n períodos de capitalização composta. Nesse caso, a unidade de tempo da taxa coincide com a unidade de tempo da capitalização dos juros.

Exemplo 3.7. 24% *ao ano com capitalização semestral significa* 12% *ao semestre;* 6% *ao ano com capitalização mensal significa* $0,5\%$ *ao mês.*

Exemplo 3.8. *Verônica investe seu dinheiro a juros de* 6% *ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros à qual está investido o capital de Verônica?*

Solução: *O dinheiro de Verônica está investido a juros de taxa* $i = 0,5\%$ *ao mês. A taxa anual equivalente é* $1+I = (1+i)^{12}$*. Então,* $1+I = (1+0,005)^{12}$*. Daí,* $I \approx 0,0617 = 6,17\%$ *ao ano. A taxa de* 6% *ao ano é nominal e a taxa de* $6,17\%$ *ao ano é efetiva.*

3.3 Séries Uniformes

Uma série uniforme de valores pode ser definida como uma sucessão de valores ou termos (pagamentos ou recebimentos) iguais que ocorrem em intervalos igualmente espaçados. Os termos de uma série uniforme estão representados no diagrama representado na figura 3.3

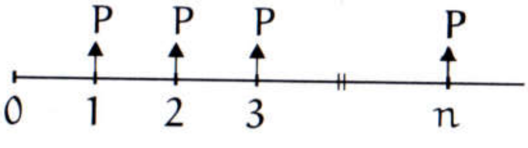

Figura 3.3: Série uniforme

Teorema 3.2. *O valor presente* A *de uma série de* n *pagamentos iguais a* P*, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo* i *a taxa de juros, igual a* $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$*.*

Demonstração. O valor A da série uniforme na época 0 é:

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{p}{(1+i)^2} + \frac{p}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{p}{(1+i)^n}$$

que é a soma de n termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{1+i}$. Já sabemos que a soma dos n termos de uma progressão geométrica é: $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$. Então:

$$A = \frac{P}{1+i} \frac{1 - (\frac{1}{1+i})^n}{1 - \frac{1}{1+i}}$$

Daí,

$$A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

□

Teorema 3.3. *O valor futuro (ou montante) F de uma série de n termos iguais a P, ao final dos n períodos, é, sendo i a taxa de juros, igual a $F = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}$.*

Demonstração. O valor F da série uniforme na época n é:

$$F = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-2} + P(1+i)^{n-3} + \cdots + P$$

que é a soma dos n termos de uma progressão geométrica de razão $1+i$. Então,

$$F = P\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}$$

Logo,

$$F = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

□

Corolário 3.1. *O valor de uma perpetuidade de termos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, sendo i a taxa de juros, é $A = \frac{P}{i}$.*

Demonstração. Basta fazer n tender para o infinito no Teorema 3.2. □

Exemplo 3.9. *Um bem, cujo preço $R\$120,00$, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.*

Solução*: Para essa situação, temos o diagrama representado na figura 3.4:*

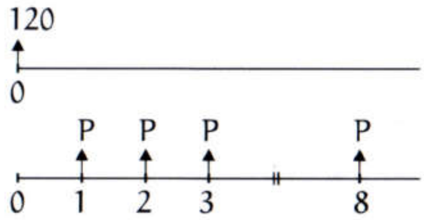

Figura 3.4: Pagamento em 8 parcelas

Vamos igualar os valores na época 0*, um tempo antes do primeiro termo da série. Já sabemos que:* $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. *Então, temos:*

$$120 = P\frac{1-(1+0,08)^{-8}}{0,08}.$$

Logo,

$$P = 120\frac{0,08}{1-1,08^{-8}}$$

Portanto, $P = 20,88$. *Cada prestação será de* $R\$20,88$

3.4 Sistemas de Amortização

Amortização é o processo financeiro pelo qual uma dívida ou obrigação é paga progressivamente por meio de parcelas, de modo que, ao término do prazo estipulado, o débito seja totalmente liquidado. Em outras palavras, é a forma de pagamento dos juros e de devolução do principal contratado. Na maioria dos sistemas, as parcelas são decompostas em juros e amortização da dívida. A diferença entre os sistemas de amortização está na forma de cálculo dos juros, da amortização do principal e do saldo devedor.

No Brasil, os dois sistemas mais utilizados são o sistema francês ou de prestações constante (Price) e o sistema de amortização constante (SAC), que são detalhados a seguir.

3.4.1 Sistema francês ou de prestações constantes (Price)

Neste sistema, o devedor paga o empréstimo em prestações iguais. Cada uma das parcelas contém uma parte destinada a amortização do saldo devedor e outra para pagamento de juros. Por esse sistema, os juros decrescem exponencialmente (em progressão geométrica) ao longo do tempo, à mesma taxa da dívida, uma vez que são calculados sobre o saldo devedor, que é cada vez menor. Consequentemente, as amortizações são cada vez maiores para que somadas aos juros, totalizem prestações iguais. Esse sistema é utilizado em financiamentos de bens de consumo do mercado brasileiro, como automóveis, eletrodomésticos etc, podendo ser também utilizado no pagamento de financiamentos imobiliários.

Teorema 3.4. *No sistema francês de amortização, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:*

$$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}},$$

$$D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}},$$

$$J_k = iD_{k-1}, A_k = P_k - J_k$$

Demonstração. A primeira fórmula, que é utilizada para determinar o valor das parcelas, é simplesmente o Teorema 3.2, onde D_0 é o valor inicial da dívida. As duas últimas fórmulas são óbvias, pois, o juro é calculado sobre o saldo devedor do período anterior e, a amortização é a diferença entre o valor da parcela e o juro correspondente. Quanto a segunda fórmula, observe que D_k é a dívida que será liquida, postecipadamente, por $n-k$ pagamentos sucessivos iguais a P_k. Portanto, novamente pelo Teorema 3.2, temos:

$$D_k = P_k \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$

Substituindo o valor de P_k, obteremos a fórmula

$$D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}},$$

. □

O demonstrativo da evolução da dívida, mostrando o valor da parcela, o valor dos juros, o valor da amortização e do saldo devedor ao final de cada período é:

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	$-$	$-$	$-$	D_0
1	P	$A_1 = P - J_1$	$J_1 = iD_0$	$D_1 = D_0 - A_1$
2	P	$A_2 = P - J_2$	$J_2 = iD_1$	$D_2 = D_1 - A_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	P	$A_k = P - J_k$	$J_k = iD_{k-1}$	$-$

O fluxo de caixa no sistema de amortização francês (Price) pode ser representado como na figura 3.5:

Exemplo 3.10. *Uma dívida de $R\$1500,00$ é paga em 4 meses, pelo sistema francês, com juros de 5% ao mês. Faça a planilha de amortização.*

***Solução**: No sistema francês, as prestações são constantes. Pelo Teorema 3.4, cada prestação vale:*

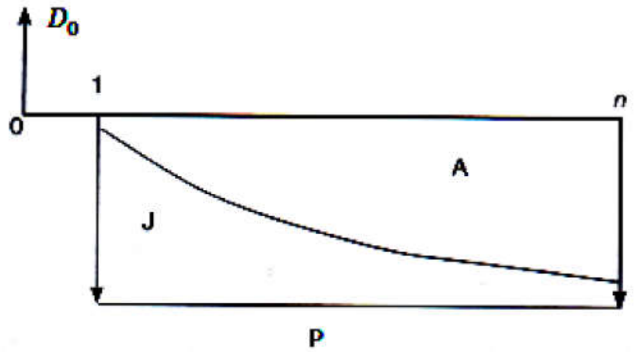

Figura 3.5: Fluxo de Caixa - Price

$$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 1500 \frac{0,05}{1-1,05^{-4}} = 423,02$$

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	$-$	$-$	$-$	1500
1	423,02	348,02	75,00	1151,98
2	423,024	365,42	57,60	786,56
3	423,024	383,69	39,33	402,87
4	423,024	402,88	20,14	0,004

3.4.2 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Neste sistema, o devedor paga a dívida em prestações cujo valor decresce ao longo do tempo, cada uma das quais contém uma parte destinada à amortização do saldo devedor e outra para pagamento de juros. Sendo a amortização fixa ao longo do tempo. Por esse sistema, as prestações P são decrescentes, uma vez que resultam da soma de amortizações iguais com juros que decrescem linearmente no tempo.

Teorema 3.5. *No SAC, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos: $A_k = \frac{D_0}{n}$, $D_k = \frac{n-k}{n} D_0$, $J_k = iD_{k-i}$, $P_k = A_k + J_k$*

Demonstração. Se a dívida D_0 é amortizada em n quotas iguais, cada quota é igual a

$$A_k = \frac{D_0}{n}.$$

O estado da dívida, após k amortizações, é:

$$D_k = D_0 - k\frac{D_0}{n} = \frac{n-k}{n} D_0$$

As duas últimas fórmulas são óbvias pois, os juros são calculados sobre o saldo devedor do período anterior e, as parcelas, pela soma da amortização com o juro do período correspondente.

□

O demonstrativo da evolução da dívida, mostrando o valor da parcela, dos juros, da amortização e do saldo devedor ao final de cada período deste sistema, é:

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	$-$	$-$	$-$	D_0
1	$P_1 = A + J_1$	A	$J_1 = iD_0$	$D_1 = D_0 - A$
2	$P_2 = A + J_2$	A	$J_2 = iD_1$	$D_2 = D_1 - A$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$P_k = A + J_k$	A	$J_k = iD_{k-1}$	$-$

O fluxo de Caixa do Sistema de Amortização Constante (SAC) pode ser representado como na figura 3.6:

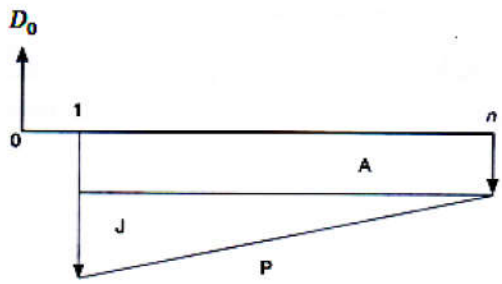

Figura 3.6: Fluxo de Caixa - SAC

Exemplo 3.11. *Uma dívida de* $R\$1500,00$ *é paga em* 4 *meses, pelo sistema SAC, com juros de* 5% *ao mês. Faça a planilha de amortização.*

Solução: *Como as amortizações são iguais, cada amortização será* $\frac{1}{4}$ *da dívida inicial. A planilha portanto é:*

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	$-$	$-$	$-$	1500
1	$450,00$	$375,00$	$75,00$	$1125,004$
2	$431,25$	$375,00$	$56,25$	$750,00$
3	$412,50$	$375,00$	$37,50$	$375,00$
4	$393,75$	$375,00$	$18,75$	$-$

Capítulo 4

Resolução de problemas de matemática financeira com planilhas eletrônicas

Neste capítulo apresenta-se a resolução de alguns problemas de matemática financeira com o auxílio de planilhas eletrônicas. Será utilizado o software Microsoft Excel.

4.1 Juros Simples

Exemplo 4.1. *Você esqueceu-se de pagar a mensalidade da escola onde estuda e quando lembrou já haviam passado* 15 *dias. O valor da mensalidade era de* $R\$650,00$. *No boleto consta a seguinte informação: após o vencimento cobrar multa de* 2% *+ juros de* 1% *ao mês. Quanto você deverá pagar?*

Solução: O objetivo desse problema é trabalhar os conceitos de juros simples e porcentagem. Nessa situação, a multa é um percentual do valor da mensalidade, não depende da quantidade de dias de atraso. Os juros de mora (atraso) são juros simples, logo são calculados sempre sobre o mesmo principal, que nesse caso é $R\$650,00$.

Para resolver este problema,a multa e os juros foram calculados separadamente.

É necessário alinhar os dados para realizar os cálculos. Como a taxa está ao mês, o prazo também deve estar em mês. Foi considerado 1 mês como 30 dias.

Para calcular juros simples, faz-se: $J = Cin$, onde J corresponde aos juros, C é o capital sobre o qual os juros serão calculados, i a taxa de juros e n o número de períodos. O valor a pagar será = mensalidade + multa + juros.

Para construir o simulador na plnailha eletrônica, foram adotados os seguintes procedimentos:

1. Na célula A1, digita-se Mensalidade;

2. Na célula A2, digita-se Taxa de juros (i) (ao mês);

3. Na célula A3, digita-se Prazo de atraso (n) (em mês);

4. Na célula A4, digita-se Taxa da multa (ao mês);

5. Na célula A5, digita-se Valor da multa;

6. Na célula A6, digita-se Juros;

7. Na célula A7, digita-se a fórmula Valor a pagar;

8. Na célula B5, digita-se a fórmula $= B1 * B4$ e tecla-se enter;

9. Na célula B6, digita-se a fórmula $= B1 * B2 * B3$ e tecla-se enter;

10. Na célula B7, digita-se a fórmula $= B1 + B5 + B6$ e tecla-se enter.

As células B1, B2, B3 e B4, servirão como campos de entrada para os valores das variáveis da coluna A. Ao serem preenchidas, o valor da multa, os juros e o valor a pagar serão apresentados nas células B5, B6 e B7, respectivamente.

Na figura 4.1, está a planilha construída e os resultados obtidos.

B7 fx =B1+B5+B6

	A	B
1	Mensalidade	R$ 650,00
2	Taxa de juros (i) (ao mês)	1%
3	Prazo de atraso (n) (em mês)	0,5
4	Taxa da multa ao mês	2%
5	Valor da multa	R$ 13,00
6	Juros	R$ 3,25
7	Valor a pagar	R$ 666,25

Figura 4.1: Planilha do exemplo 4.1

Então, você deverá pagar $R\$666,25$.

4.2 Comparando Juros simples e Juros compostos

Exemplo 4.2. *Um capital de* $R\$10.000,00$ *foi aplicado para render juros de* 10% *ao ano, durante cinco anos. Determine o valor dos juros e o montante ao final de cada período pelo regime de capitalização simples e pelo regime de capitalização composta.*

Solução 1: Para resolver essa questão, pode-se, a partir das definições de capitalização simples e composta, construir uma planilha com os juros e montante de cada período.

Procedimentos necessários:

- Na célula A1, digita-se Principal (A);
- Na célula A2, digita-se taxa de juros (i) ao ano;
- Na célula A3, digita-se Período (n) em anos;
- Preencha as células A7 até A12 com os anos, de 0 a 5;
- Preencha as células E7 até E12 com os anos, de 0 a 5.

Para determinar os juros e o montante no sistema de Juros simples, pocede-se da sequinte forma:

- Na célula B8, digita-se a fórmula $= 10.000 * 0,1$ e tecla-se enter. Arrasta-se essa fórmula até a célula B12, pois o juro será calculado sempre sobre o capital inicial;
- Na célula C7, digita-se o capital, que nesse caso é $10.000,00$;
- Na célula C8, digita-se a fórmula $= C7 + B8$ e tecle enter. Arraste a fórmula da célula C8 até a célula C12; Na célula C14 digita-se a fórmula $= C12 - C7$ e tecla-se enter, para obter o juro total dos 5 anos.

Para determinar os juros e o montante no sistema de capitalização composta, pocede-se da sequinte forma:

- Na célula F8, digita-se a fórmula $= G7 * 0,1$ e tecla-se enter ;
- Arrasta-se a fórmula da célula F8 até a célula F12;
- Na célula G7, digita-se o capital, que também é $10.000,00$;
- Na célula G8, digita-se a fórmula $= G7 + F8$ e tecle enter. Arraste a fórmula da célula G8 até a célula G12;
- Na célula G14 digita-se a fórmula $= G12 - G7$, para obter o juro total dos 5 anos.

As células C1, C2 e C3, servirão como campos de entrada para os valores das variáveis da coluna A.

A planilha obtida está na figura 4.2.

Então, no regime de capitalizção simples, o montante obtido foi de $R\$15.000,00$ e o total de juros foi de $R\$5.000,00$. No regime composto, o montante obtido foi de $R\$16.105,10$ e o total de juros foi de $R\$6.105,10$

	A	B	C	D	E	F	G
1	***Principal (A)***		10000,00				
2	***Taxa de juros (i) ao ano***		10%				
3	***Período (n) em anos***		5				
4							
5		Juro simples			Juro composto		
6	**n**	**Juro**	**Montante**		**n**	**Juro**	**Montante**
7	0	0,00	10.000,00		0	0,00	10.000,00
8	1	1.000,00	11.000,00		1	1.000,00	11.000,00
9	2	1.000,00	12.000,00		2	1.100,00	12.100,00
10	3	1.000,00	13.000,00		3	1.210,00	13.310,00
11	4	1.000,00	14.000,00		4	1.331,00	14.641,00
12	5	1.000,00	15.000,00		5	1.464,10	16.105,10
13							
14		**Juro**	5.000,00			**Juro**	6.105,10
15							

Figura 4.2: Planilha do exemplo 4.2

Pode-se perceber, ao comparar os juros e os montantes obtidos, que no regime de capitalização simples os juros permanecem constantes e o montante tem crecimento linear.Já no regime de capitalização composta, temos um crescimento exponencial exponencial dos juros e montante. Observa-se também que para $n = 1$, os juros e montantes nos dois regimes são iguais.

Comentário: Os autores de livros didáticos constroem essas tabelas para fazer o comparativo dos dois sistemas sem utilizar e sugerir o uso das planilhas eletrônicas e, afirmam que o procedimento é trabalhoso. Enfatizam ainda que é mais fácil utilizar a fórmula para o cálculo dos montantes. Perde-se dessa forma, a oportunidade de fazer com que os alunos compreendam a diferença entre os dois sistemas, onde na capitalização simples, o juro é calculado sobre o capital e no composto, o juro é calculado sobre o montante do período anterior, gerando o famoso juro sobre juro.

Solução 2: Se o objetivo fosse apenas determinar o montante ao final dos cinco anos, podería-se utilizar as fórmulas, construindo um simulador conforme o modelo apresentado na figura 4.3. Para construir o modelo forma utilizadas as fórmulas para cálculo do montante nos juros simples e composto. No regime de capitalização simples, como visto anteriormente, o montante M é obtido pela fórmula $M = C(1 + in)$. No regime de capitalização composta, $M = c(1 + i)^n$.

Procedimentos:

- Na célula A1, digita-se Principal (A);
- Na célula A2, digita-se taxa de juros (i) ao ano;

- Na célula A3, digita-se período (n) em anos;
- Na célula A6, digita-se Montante;
- Na célula A7, digita-se Juros;
- Na célula A10, digita-se Montante;
- Na célula A11, digita-se Juros;
- Na célula A6, digita-se Montante;
- Na célula A7, digita-se Juros;
- Na célula B6, digita-se a fórmula $= B1 * (1 + B2 * B3)$ e tecla-se enter;
- Na célula B7, digita-se a fórmula $= B6 - B1$ e tecla-se enter;
- Na célula B10, digita-se a fórmula $= B1 * (1 + B2)\hat{}B3$ e tecla-se enter;
- Na célula B7, digita-se a fórmula $= B10 - B1$.

As células B1, B2 e B3, servirão como campos de entrada para os valores das variáveis da coluna A. O simulador obtido-se encontra-se na figura 4.3.

	A	B
1	***Principal (A)***	R$ 10.000,00
2	***Taxa de juros (i) ao ano***	10%
3	***Período (n) em anos***	5
4		
5	***Juro simples***	
6	**Montante**	R$ 15.000,00
7	**Juros**	R$ 5.000,00
8		
9	***Juro composto***	
10	***Montante***	R$ 16.105,10
11	**Juros**	R$ 6.105,10
12		

Figura 4.3: Simulador - exemplo 4,2

4.3 Série de pagamentos

Exemplo 4.3. *Um consumidor quer comprar um aparelho de celular. A loja oferece-lhe três opções:*

1. À vista, por $R\$1200,00$

2. Uma entrada de $R\$300,00$, e mais 5 prestações de $R\$200,00$;

3. 12 prestações de$R\$120,00$, sem entrada.

Qual é a melhor opção para o cliente? Considere que na época da compra, a caderneta de poupança estava rendendo aproximadamente $0,6\%$ ao mês.

Solução 1: Para comparar as três opções, é necessário que todas as parcelas estejam no mesmo momento focal. Vamos comparar as três no momento da compra, que será a data zero (0). Vamos também considerar que a 1ª parcela será paga 1 mês após a compra.

Já sabemos que na data da compra, o desembolso seria $R\$1200,00$, pois esse é o preco à vista.

A opção mais vantajosa para o cliente será aquela que na data da compra, exija o menor desembolso. Para isso, precisa-se determinar o valor presente das três opções de pagamento. Como taxa de juros, considerou-se a taxa da caderneta de poupança, $i = 0,6\%$ ao mês.

Fazendo a representação no eixo das setas da proposta 2, temos a representação apresentada na figura 4.4:

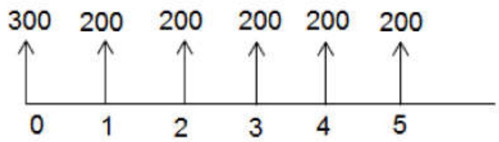

Figura 4.4: Eixo das setas da proposta 2

Como já foi visto anteriormente, para determinar o valor presente de cada parcela, basta dividir a parcela pelo fator de atualização $(1+i)^n$. Para determinar o valor atual das parcelas, através de uma planilha eletrônica, pode-se adotar os seguinte procedimentos:

- Na célula A1, digita-se n, que corresponde ao número da parcelas;
- na célula B1, digita-se Valor da Parcela;
- Na célula C1, digita-se Valor atual, que será o valor da parcela na data da compra;
- Preenche-se as células A2 até A7 com o número as parcelas, de 0 até 5;
- Preenche-se as células B2 até B7 com o valor das parcelas;
- Na célula C2, digita-se a fórmula $= B2/(1+0,006)\hat{}A2$ e tecla-se enter;
- Arrata-se a fórmula da célula C2 até a célula C7;

- Na célula A8, digita-se Total;
- Na célula C8, digita-se a fórmula $= SOMA(C2 : C7)$ e tecla-se enter. Teremos então a soma de todas as parcelas na data da compra.

Obtem-se então, a planilha eletrônica apresentada na figura 4.5:

	A	B	C
1	**n**	**Valor da Parcela**	**Valor atual**
2	0	300,00	300,00
3	1	200,00	198,81
4	2	200,00	197,62
5	3	200,00	196,44
6	4	200,00	195,27
7	5	200,00	194,11
8	**Total**		**1282,25**

Figura 4.5: Planilha eletrônica da proposta 2

A soma do valor presente das parcelas é $R\$1.283,25$, que é superior ao preço à vista do aparelho.

Para a opção 3, temos a representação no eixo das setas apresentada na figura 4.6:

Figura 4.6: Eixo das setas da proposta 3

Para determinar o valor atual das parcelas, através de uma planilha eletrônica, pode-se adotar os seguinte procedimentos:

- Na célula A1, digita-se n, que corresponde ao número da parcela;
- na célula B1, digita-se Valor da Parcela;
- Na célula C1, digita-se Valor atual, que será o valor da parcela na data da compra;
- Preenche-se as células A2 até A14 com o número as parcelas, de 0 até 12;
- Preenche-se as células B2 até B14 com o valor das parcelas;
- Na célula C2, digita-se a fórmula $= B2/(1 + 0,006)\hat{}A2$ e tecla-se enter;

- Arrata-se a fórmula da célula C2 até a célula C14;
- Na célula A15, digita-se Total;
- Na célula C15, digita-se a fórmula $= SOMA(C2 : C14)$ e tecla-se enter. Teremos então a soma de todas as parcelas na data da compra.

Obtem-se então, a planilha eletrônica apresentada na figura 4.7:

	A	B	C
1	n	Valor da Parcela	Valor atual
2	0	0,00	0,00
3	1	120,00	119,28
4	2	120,00	118,57
5	3	120,00	117,87
6	4	120,00	117,16
7	5	120,00	116,46
8	6	120,00	115,77
9	7	120,00	115,08
10	8	120,00	114,39
11	9	120,00	113,71
12	10	120,00	113,03
13	11	120,00	112,36
14	12	120,00	111,69
15	Total		1385,38
16			

Figura 4.7: Planilha da proposta 3

A soma do valor presente das parcelas é $R\$1.385,38$, que também é superior ao preço à vista do aparelho.

Comparando as três opções na data focal zero, percebe-se que o menor desembolso acontece na primeira opção, onde serão necessários $R\$1200,00$.

Solução 2: Pode-se também, resolver esta questão elaborando um simulador, que dê o valor atual sem a necessidade de calcular o valor presente das parcelas individualmente.

Conforme foi visto no estudo de série de pagamentos uniforme, para derminar o valor atual de um série de n pagamentos P, pode-se fazer:

$$A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Na situação aqui apresentada, tem-se também a possibilidade de dar uma entrada. Então, o valor atual será:

$$A = E + P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Para determinar a melhor opção, pode-se,utilizar a equação acima para construir um simulador, que apresente o valor atual de cada uma das propostas.

Para construir o simulador, o procedimento adotado pode ser o seguinte;

- Na célula A1, digita-se Opção;
- Na célula B1, digita-se Valor à Vista;
- Na célula C1, digita-se Entrada;
- Na célula D1, digita-se Prestação;
- Na célula E1, digita-se Taxa de juros;
- Na célula F1, digita-se N de parcelas;
- Na célula G1, digita-se Valor atual, que será o valor presente de cada opção de pagamento da data da compra;
- Preenche-se as células A2 até A4, com o número das opções de pagamento, que vão de 1 até 3;
- Preenche-se as células B2 até B4 com o valor á vista, que é $1.200,00$;
- Preenche-se as células C2 até C4 com o valor da entrada de cada opção;
- Preenche-se as células D2 até D4 com o valor das parcelas de cada opção;
- Preenche-se as células E2 até E4 com a taxa de juros adotada, que nesse caso é $0,60\%$ ao mês;
- Preenche-se as células F2 até F4 com o número de parcelas de cada opção;
- Na célula G2, digita-se a fórmula $= C2 + D2 * ((1 - (1 + E2)\hat{}(-F2))/E2)$ e tecla-se enter;
- Arrasta-se a fórmula da célula G2 até a célula G4. Dessa forma, obtêm-se o valor presente de cada opção.

O simulador construído está apresentado na figura 4.8.

Esse simulador pode ser utilizado para analisar outras situações, apenas trocando os valores de entrada, prestação, número de parcelas e taxa.

Usando a planilha da figura 4.8, tem-se também, a possibilidade de determinar a taxa de juros que está embutida no parcelamento. Basta substituir o valor da taxa na planilha até encontrar o valor atual igual ou aproximado ao preço a vista. Essa taxa será a taxa que a loja cobra pelo

G2 | f_x | =C2+D2*((1-(1+E2)^(-F2))/E2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Opção**	**Valor à vista**	**Entrada**	**Valor da Parcela**	**Taxa de juros**	**Nº de parcelas**	**Valor atual**
2	1	1200,00	1200,00	0,00	0,60%	0	**1200,00**
3	2	1200,00	300,00	200,00	0,60%	5	**1282,25**
4	3	1200,00	0,00	120,00	0,60%	12	**1385,38**

Figura 4.8: Simulador para obter o valor atual das propostas

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Opção**	**Valor à vista**	**Entrada**	**Valor da Parcela**	**Taxa de juros**	**Nº de parcelas**	**Valor atual**
2	1	1200,00	1200,00	0,00	0,60%	0	1200,00
3	2	1200,00	300,00	200,00	3,60%	5	1200,46
4	3	1200,00	0,00	120,00	2,92%	12	1200,20
5							

Figura 4.9: Comparando as taxas de juros

parcelamento. Fazendo as alterações na planilha, encontramos o resultado apresentado na figura 4.9.

Verifica-se então, que na opção 2, estão embutidos juros de $3,6\%$ ao mês e na 3 opção, a taxa de juros embutida é de $2,92\%$ ao mês.

4.4 Sistema Price

Exemplo 4.4. *Uma concessionária está anunciando um automóvel por $R\$35.000,00$ à vista, ou com pagamento realizado por meio de uma entrada de 25% e o restante em 48 parcelas mensais, iguais e postecipadas. Determine o valor de cada parcela, considerando uma taxa de juros de $2,25\%$ a.m.*

Solução: Como as parcelas são postecipadas, considera-se que a primeira parcela será paga 1 mês após a compra. Como terá uma entrada de 25%, o valor financiado será o valor a vista descontando-se a entrada. As parcelas de financiamento de veículos são calculadas pelo sistema Price. Dessa forma, o valor das parcelas é obtido através da equação:

$$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}},$$

onde D_0 será o valor financiado. **Observação:** Nos financiamentos de veículos, além do valor financiado temos o IOF (imposto sobre operações financeiras), que é acrescentado ao financiamento. Nessa resolução, vamos despresar o IOF. Para construir a planilha, pode-se proceder da seguinte forma:

- Na célula A1, digita-se Valor à vista;
- Na célula A2, digita-se Entrada;
- Na célula A3, digita-se Valor financiado;
- Na célula A4, digita-se Nº de parcelas;
- Na célula A5, digita-se Taxa de juros (ao mês);
- Na célula A6, digita-se Valor da parcela;
- Na célula A7, digita-se Total de juros;
- Na célula B2, digita-se a fórmula $= B1 * 0,25$ e tecla-se enter;
- Na célula B3, digita-se a fórmula $= B1 - B2$ e tecla-se enter;
- Na célula B6, digita-se a fórmula $= B3 * (B5/(1 - (1 + B5)\hat{}(-B4)))$ e tecla-se enter;
- Na célula B7, digita-se a fórmula $= B4 * B6 - B3$ e tecla-se enter,

As células B1, B4 e B5, servirão como campos de entrada para os valores das variáveis da coluna A. Obtemos dessa a forma o simulador da figura 4.10.

B6 =B3*(B5/(1-(1+B5)^(-B4)))

	A	B	C	D
1	**Valor à vista**	R$ 35.000,00		
2	**Entrada**	R$ 8.750,00		
3	**Valor financiado**	R$ 26.250,00		
4	**Nº de parcelas**	48		
5	**Taxa de juros (ao mês)**	2,25%		
6	**Valor da parcela**	R$ 899,91		
7	**Total de juros**	R$ 16.945,73		

Figura 4.10: Planilha exemplo 4,4

Ao substiuir os valores do financiamento verifica-se que a parcela será de $R\$899,91$ e serão pagos ao todo, $R\$16.945,73$ de juros.

4.5 Comparando sistemas de amortização: SAC e Price

Exemplo 4.5. *Faça as planilhas de amortização de uma dívida de* $R\$3000,00$*, que será paga em* 8 *parcelas mensais, com juros de* 1% *ao mês:*

1. *Pela tabela Price*
2. *Pelo SAC*

Solução1:

1. No sistema de amortização Price, sabe-se que as parcelas são contantes e determinadas pela fórmula:

$$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}},$$

Para construir a planilha eletrônica do sistema de amortização Price, podemos proceder da seguinte forma:

- Na célula A1, digita-se Valor presente ;
- Na célula A2, digita-se Nº parcelas ;
- Na célula A3, digita-se Taxa de juros (i) a. m.;
- Na célula A4, digita-se Valor da parcela;
- Na célula B4, digita-se a fórmula $= B1 * (B3/(1-(1+B3)\hat{}(-B2)))$ e tecla-se enter;
- Na célula A6, digita-se Período;
- Na célula B6, digita-se Parcela;
- Na célula C6, digita-se Juro;
- Na célula D6, digita-se Amortização;
- Na célula E6, digita-se Saldo devedor;
- Preenche-se as células A7 até A15 com o número de períodos, que vão de 0 à 8;
- Preenche-se as células B8 até B15 com o valor das parcelas, que neste caso $R\$392,07$;
- Na célula E7, digita-se o valor financiado, que nesse caso é $R\$3.000,00$;
- Na célula C8, digita-se a fórmula $= E7 * 0,01$ e tecla-se enter;
- Arrasta-se a fórmula da célula C8 até a célula C15;
- Na célula D8, digita-se a fórmula $= B8 - C8$ e tecla-se enter;

- Arrasta-se a fórmula da célula D8 até a célula D15;
- Na célula E8, digita-se a fórmula $= E7 - D8$ e tecla-se enter;
- Arrasta-se a fórmula da célula E8 até a célula E15.

As células B1, B2 e B3, servirão como campos de entrada para os valores das variáveis da coluna A.

Na figura 4.11, têm-se a planilha construída para determinar o valor das prestações, juros, amortização e saldo devedor de cada período pela sistema Price.

	A	B	C	D	E
1	**Valor presente**	3.000,00			
2	**Nº parcelas**	8			
3	**Taxa de juros (i) a. m.**	1%			
4	**Valor da parcela**	392,07			
5					
6	**Período**	**Parcela**	**Juro**	**Amortização**	**Saldo devedor**
7	0	-	-	-	3000
8	1	392,07	30,00	362,07	2637,93
9	2	392,07	26,38	365,69	2272,24
10	3	392,07	22,72	369,35	1902,89
11	4	392,07	19,03	373,04	1529,85
12	5	392,07	15,30	376,77	1153,08
13	6	392,07	11,53	380,54	772,54
14	7	392,07	7,73	384,34	388,20
15	8	392,07	3,88	388,19	0,01
16					

Figura 4.11: Sistema de Amortização Price

2. No sistema de amortização SAC, sabemos que a amortização A é constante, logo

$$A_k = \frac{D_0}{n}.$$

Então, para construir a planilha do Sistema de amortização SAC, pode-se adotar o seguinte procedimento:

- Na célula A1, digita-se Valor presente ;
- Na célula A2, digita-se N$^{\text{o}}$ parcelas ;
- Na célula A3, digita-se Taxa de juros (i) a. m.;
- Na célula A4, digita-se Amortização;

- Na célula B4, digita-se a fórmula =B1/B2 e tecla-se enter;
- Na célula A6, digita-se Período;
- Na célula B6, digita-se Parcela;
- Na célula C6, digita-se Juro;
- Na célula D6, digita-se Amortização;
- Na célula E6, digita-se Saldo devedor;
- Preenche-se as células A7 até A15 com o número de períodos, que vão de 0 à 8;
- Preenche-se as células D8 até D15 com o valor da amortização, que neste caso $R\$375,00$;
- Na célula E7, digita-se o valor financiado, que nesse caso é $R\$3.000,00$;
- Na célula C8, digita-se a fórmula $= E7 * 0,01$ e tecla-se enter;
- Arrasta-se a fórmula da célula C8 até a célula C15;
- Na célula B8, digita-se a fórmula $= D8 + C8$ e tecla-se enter;
- Arrasta-se a fórmula da célula B8 até a célula B15;
- Na célula E8, digita-se a fórmula $= E7 - D8$ e tecla-se enter;
- Arrasta-se a fórmula da célula E8 até a célula E15.

Então, na planilha de amortização da figura 4.12 obtêm-se o valor das prestações, juros, amortização e saldo devedor de cada período pela sistema SAC.

	A	B	C	D	E
1	**Valor presente**	3.000,00			
2	**Nº parcelas**	8			
3	**Taxa de juros (i) a. m.**	1%			
4	**Amortização**	375,00			
5					
6	**Período**	**Parcela**	**Juro**	**Amortização**	**Saldo devedor**
7	0	-	-	-	3000
8	1	405,00	30,00	375,00	2625,00
9	2	401,25	26,25	375,00	2250,00
10	3	397,50	22,50	375,00	1875,00
11	4	393,75	18,75	375,00	1500,00
12	5	390,00	15,00	375,00	1125,00
13	6	386,25	11,25	375,00	750,00
14	7	382,50	7,50	375,00	375,00
15	8	378,75	3,75	375,00	0,00

Figura 4.12: Sistema de amortização SAC

Comentários: Ao analisar os dois sistemas de amortização, verifica-se que no sistema Price, as prestações são constantes ao longo do contrato, os juros são decrescentes e a amortização cresce exponencialmente. No sistema SAC, o valor da amortização permanece inalterado ao longo do contrato, as prestações juntamente com os juros decrescem linearmente com o tempo.

Muitas pessoas, para comparar os dois sistemas, comparam os juros pagos, na tentativa de determinar qual dos dois é mais vantajoso. Fazendo essa comparação, tem-se a impressão que a pior opção é o sistema Price, pois, são pagos mais juros. Porém, a comparação correta entre os dois planos deve ser feita com os valores de cada um em um mesmo momento focal, ou seja, deve-se calcular o valor atual (A) ou valor futuro (F) dos dois planos, uma vez que o dinheiro muda de valor com o tempo.

Solução 2: Ao invés de construir as planilhas, demonstrando as amortizações e juros pagos em cada parcela, podemos elaborar um simulador através do qual podemos determinar a primeira parcela e a última parcela, a amortização mensal e o total de juros a serem pagos em cada sistema.

1. No sistema SAC, para determinar o valor da amortização mensal, já foi visto que basta dividir o valor financiado pelo número de parcelas. O valor da primeira parcela será soma do juro do primeiro período, que é calculado sobre o valor financiado, com a amortização. Para determinar o valor da última parcela, o juro será calculado sobre a amortização, pois a dívida será igual a amortização mensal. Já o valor total de juros, pode ser obtido através da fórmula da soma de uma progressão aritmética, pois, as parcelas decrescem linearmente. Então, para calcular o juro total no sistema SAC, basta somar a primeira parcela com a última, multiplicar pelo número de parcelas e dividir por 2. Desse valor, subtrai-se o valor financiado.

   Para construir o simulador, pode-se proceder assim:

   - Na célula A1, digita-se Valor Financiado;
   - Na célula A2, digita-se Número de parcelas;
   - Na célula A3, digita-se Taxa de juros (i);
   - Na célula A4, digita-se Amortização Mensal;
   - Na célula A5, digita-se Parcela inicial;
   - Na célula A6, digita-se Parcela final;
   - Na célula A7, digita-se Total de juros;
   - Na célula B4, digita-se a fórmula $= B1/B2$ e tecla-se enter;
   - Na célula B5, digita-se a fórmula $= B4 + B3 * B1$ e tecla-se enter;
   - Na célula B6, digita-se a fórmula $= B4 + B3 * B4$ e tecla-se enter;

- Na célula B7, digita-se a fórmula $= ((B5 + B6) * B2/2) - B1$ e tecla-se enter.

As células B1, B2 e B3, servirão como campos de entrada para os valores das variáveis da coluna A. Ao serem preenchidas, o valor da amortização mensal aparece na célula B4, o valor da parcela inicial aparece na célula B5, da parcela final na célula B6 e o valor total de juros na célula B7.

Veja o simulador da figura 4.13:

	A	B
1	**Valor Financiado**	R$ 3.000,00
2	**Número de parcelas**	8
3	**Taxa de juros (i)**	1%
4	**Amortização Mensal**	R$ 375,00
5	**Parcela inicial**	R$ 405,00
6	**Parcela final**	R$ 378,75
7	**Total de juros**	R$ 135,00
8		

Figura 4.13: Simulador sistema SAC

2. Já para o sistema Price, como o valor das parcelas é constante, determina-se o valor das parcelas usando a fórmula $P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$. O total de juros pagos pode ser obtido multiplicando-se o número de parcelas pelo seu valor e, desse resultado, subtrai-se o valor financiado. Para construir o simulador, pode-se proceder assim:

   - Na célula A1, digita-se Valor Financiado;
   - Na célula A2, digita-se Número de parcelas;
   - Na célula A3, digita-se Taxa de juros (i);
   - Na célula A4, digita-se Parcela mensal;
   - Na célula A5, digita-se Total de juros;
   - Na célula B4, digita-se a fórmula $= B1 * ((B3)/(1 - (1 + B3)\hat{}(-B2)))$ e tecla-se enter;
   - Na célula B5, digita-se a fórmula $= B4 * B2 - B1$ e tecla-se enter;

   As células B1, B2 e B3, servirão como campos de entrada para os valores das variáveis da coluna A. Ao serem preenchidas, o valor da percela aparece na célula B4 e o total de juros na célula B5.

   Veja o simulador na figura 4.14:

	A	B
1	**Valor Financiado**	R$ 3.000,00
2	**Número de parcelas**	8
3	**Taxa de juros (i)**	1%
4	**Parcela mensal**	R$ 392,07
5	**Total de juros**	R$ 136,57

Figura 4.14: Simulador sistema Price

4.6 Estudo de caso: Previdência complementar

Um assunto que tem despertado o interesse do público hoje em dia, dadas as limitações dos planos de aposentadoria do INSS, é o estudo dos planos de complementação de aposentadorias. Trata-se de um problema desse tipo:

Exemplo 4.6. *Dados um valor de complementação mensal de aposentadoria e uma taxa real de juros (taxa isenta do efeito inflacionário), qual deve ser o depósito mensal a ser aplicado durante o período de trabalho, de modo a garantir no futuro, a retirada pretendida?*

Esse problema é uma importante aplicação de Juros Compostos, bem como, uma aplicação do estudo de progressões geométricas.

Vamos supor que um profissional, atualmente com 30 anos, pretende aposentar-se aos 60 anos e deseja uma complementação de aposentadoria de uma quantia que hoje seriam $R\$3000,00$, durante 25 anos. Qual o valor do depósito mensal que deverá efetuar, a partir de agora, para atingir seu objetivo? Vamos considerar que a taxa juros real seja de $0,5\%$ ao mês.

(Esse problema foi proposto no artigo: Progressões - poupando para a aposentadoria, publicado na Revista do Professor de Matemática, São Paulo: SBM, nº 33, 1977.)

Solução: Para responder a essa questão, são duas perguntas que devemos responder:

1. Qual a quantia M que, aplicada à taxa de $0,5\%$ ao mês, pode gerar uma retirada mensal de $R\$3000,00$, durante 25 anos (300 meses)?

2. Qual o depósito mensal C que, aplicado à taxa de $0,5\%$ ao mês, somará no final de 360 meses (30 anos) essa tal quantia M?

1. Para determinar a quantia M, vamos considerar que a retirada seja R e que M seja o valor acumulado na data zero 0, 1 mês antes do início da aposentadoria, conforme esquema da figura 4.15:

   Como já foi visto anteriormente, para obter o valor presente das parcelas, basta dividir cada termo pelo fator de atualização $(1+i)^n$.

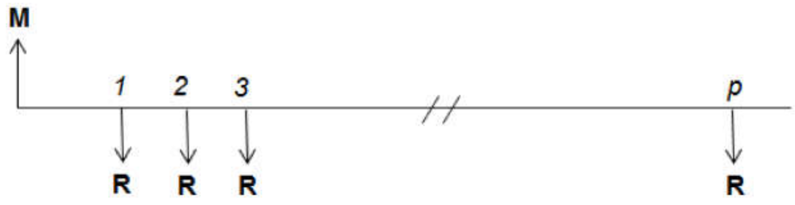

Figura 4.15: Esquema das retiradas mensais

Considerando p o período da aposentadoria, temos:

$$M = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^p}$$

Pela soma dos p termos da uma progressão geométrica, temos:

$$M = \frac{R}{i}(1 - (1+i)^{-p})$$

Para construir o simulador que nos dê o valor dessa quantia M, pode-se proceder assim:

- Na célula A1, digita-se Retirada (R);
- Na célula B1, digita-se taxa de juros;
- Na célula C1, digita-se Período;
- Na célula D1, digita-se Montante (M);
- Na célula D2, digita-se a fórmula $= (A2/B2) * (1 - (1 + B2)\hat{}(-C2))$

As células A2, B2 e C2, servirão como campos de entrada para os valores da linha 1 e, ao serem preenchidas, o valor M, necessário para garantir a aposentadoria aparece na célula D2.

O simulador obtido está na figura 4.16.

	A	B	C	D
1	**Retirada (R)**	**Taxa de juros**	**Período**	**Montante (M)**
2	R$ 3.000,00	0,50%	300	R$ 465.620,59
3				

Figura 4.16: Montante necessário para a aposentadoria

2. Sabendo o montante que devemos ter no início da aposentadoria, podemos agora determinar quanto devemos depositar todos os meses para atingir o montante esperado. Vamos considerar C o valor a ser depositado mensalmente e n o número de períodos de contribuição.As contribuições mensais estão representadas no diagrama da figura 4.17.

Figura 4.17: Esquema das contribuições mensais

Para determinar o valor futuro de cada parcela, utiliza-se a fórmula $F = C(1+i)^n$.

Então, o montante acumulado após n períodos é:

$$M = C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-3} + \cdots + C$$

Pela soma dos termos de uma progressão geométrica, obtemos: $M = C\frac{(1+i)^n-1}{i}$

Portanto, o valor a ser depositado mensalmente C deve ser:

$$C = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1}$$

Para construir o simulador para determinar o valor a ser depositado mensalmente, pode-se proceder assim:

- Na célula A4, digita-se Depósito (C);
- Na célula B4, digita-se taxa de juros;
- Na célula C4, digita-se Período;
- Na célula D4, digita-se Montante (M);
- na célula D5, digita-se a fórmula $= D2$ e tecla-se enter;
- Na célula A5, digita-se a fórmula $= D5 * B5/((1+B5)\hat{}C5 - 1)$ e tecla-se enter;.

As células B5 e C5, servirão como campos de entrada para os valores da linha 4. Ao serem preenchidas, o valor a ser depositado mensalmente C para garantir a aposentadoria aparece na célula A5..

Obtêm-se então, o simulador da figura 4.18:

Verifica-se então, que o profissional deverá aplicar $R\$463,53$ por mês, durante 30 anos para sacar $R\$3000,00$ pelos 25 anos seguintes. Nesse caso, terá acumulado aproximadamente $M = R\$465.620,59$ para garantir as retiradas durante a aposentadoria.

Através do simulador da figura 4.18, também podemos simular outras opções, mudando o valor da retirada, o número de retiradas, número de depósitos e a taxa de juros.

	A	B	C	D
1	**Retirada (R)**	**Taxa de juros**	**Período**	**Montante (M)**
2	R$ 3.000,00	0,50%	300	R$ 465.620,59
3				
4	**Depósito (C)**	**Taxa de juros**	**Período**	**Montante (M)**
5	R$ 463,53	0,50%	360	R$ 465.620,59
6				

Figura 4.18: Simulador para determinar as contribuições mensais

Comentário É possível, a partir das equações acima,deduzir a fórmula para o caso em que o número de retiradas seja infinito, isto é, para o caso de renda perpétua. Nesse caso, como $p = \infty$, o montante acumulado deverá ser: $M = \frac{R}{i}$. Para construir o simulador para essa situação, podemos aproveitar o simulador da figura 4.18, trocando a fórmula da célula D2. No caso de renda perpétua, digita-se na célula D2 a fórmula $= A2/B2$ e tecla-se enter. Obtêm-se dessa forma o simulador da figura 4.19.

	A	B	C	D
1	**Retirada (R)**	**Taxa de juros**	**Período**	**Montante (M)**
2	R$ 3.000,00	0,50%	perpétuo	R$ 600.000,00
3				
4	**Depósito (C)**	**Taxa de juros**	**Período**	**Montante (M)**
5	R$ 597,30	0,50%	360	R$ 600.000,00
6				

Figura 4.19: Simulador para renda perpétua

Assim, para ter uma renda perpétua de $R\$3000,00$, o profissional deve depositar mensalmente $R\$597,30$ por 30 anos.

Considerações Finais

Analisando a legislação que rege a educação básica no Brasil, podemos perceber que os conteúdos estudados devem estar em consonância com o interesse social.

Uma das finalidades da educação escolar é preparar os estudantes para o exercício da cidadania, sendo capazes de tomar decisões frente às situações que lhes são apresentadas no cotidiano. Independente de classe social, profissão que exerça e região onde more, todas as pessoas irão se deparar, no decorrer de sua vida, com situações que exigem conhecimentos de matemática financeira, decidindo, desde a aquisição de um bem, quanto a forma de pagamento.

Uma das negociações, atualmente, presente na vida das pessoas, por exemplo, é o financiamento imobiliário, fazendo com que o indivíduo assuma um compromisso que o acompanhará durante muito tempo de sua vida. Por isso, se a tomada de decisão for mal pensada, esse cidadão terá grandes chances de ter problemas financeiros no decorrer do tempo, fazendo com que um sonho vire um pesadelo.

Conforme descrito no desenvolvimento deste trabalho, fazendo uma revisão bibliográfica sobre o ensino de Matemática Financeira no Ensino Médio, percebe-se que esse conteúdo é trabalhado de forma superficial, deixando de abordar conteúdos como empréstimos e financiamentos, que são frequentes no dia-a-dia dos brasileiros.

Dado que os conteúdos de matemática financeira são aplicações de progressões aritméticas e geométricas, foi apresentado os conceitos básicos de progressões, que darão subsídio pra o estudo de Matemática Financeira, chamando a atenção para o fato de que nos livros didáticos atuais, esses conteúdos são trabalhados de forma desconectada.

Pensando nessas questões, o trabalho aqui apresentado, teve por objetivo, propor um ensino de matemática financeira no Ensino Médio, que prepare as pessoas a resolver problemas comuns do cotidiano.

Nesse trabalho, é apontado o que julgo ser necessário estudar em nível de ensino médio. Além de estudar juros simples e compostos, incluí o estudo de série de pagamentos e os sistemas de amortização que são mais utilizados nos financiamentos: Price e SAC. Além de propor o ensino dos tipos de pagamentos mais utilizados no sistema financeiro brasileiro, é proposto a analise das informações não somente criticando o montante de juros à pagar, mas também a varição dos valores no tempo.

Além da proposta de tornar o aluno uma pessoa mais preparada para exercer sua cidadania, com o intuito de proporcionar um ensino que se aproxime das necessidades reais, este trabalho propõem a inclusão da utilização da informática através das planilhas eletrônicas, que hoje, possibilitam resolver rapidamente problemas que demandariam muito tempo com a utilização da calculadora, além de permitirem que o estudante crie simuladores que podem ser utilizados em várias situações, apenas alterando os valores.

A utilização das planilhas além de agilizar os cálculos e sobrar mais tempo para analisar os problemas e pensar em estratégias de resolução, faz com que prepare o aluno para o mercado de trabalho, pois, este tipo de recurso é amplamente utilizado no meio empresarial, pelo seu desempenho, tanto na precisão dos cálculos, quanto na agilidade em processar grandes quantidades cálculos sem a necessidade de ser um expert da computação.

Neste momento não tive a possibilidade de colocar essa proposta em prática em sala de aula. Futurante, pretendo aplicar esta proposta a fim de verificar as dificuldades que possam surgir no seu desenvolvimento e as alterações necessárias para atingir o objetivo proposto.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*, Lei 9394/1996.

[2] BRASIL, *Medida provisória Nº 746*, que Institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral, altera a Lei nº 9.394, MP 746/ 2016.

[3] BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasilia: MEC/SEF, 1998.

[4] BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. V 2. Ciências da natureza, matemática e suas Tecnologias. Brasilia: MEC/SEF, 2008.

[5] CONEF. *Educação financeira nas escolas: ensino médio*: livro do professor. V. 1, 2 ,3. Brasilia - CONEF, 2013.

[6] COSER FILHO, M. S. *Aprendizagem de matemática financeira no ensino médio*: uma proposta de trabalho a partir de planilhas eletrônicas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre (RS), 2008.

[7] CAMARGOS, M. A. de. *Matemática financeira: aplicada a produtos financeiros e à análise de investimentos*. 1 ed. - São Paulo: Saraiva, 2013.

[8] DUDA, R; GROSSI, L. *Matemática Financeira e planilhas eletrônicas: uma abordagem com a incorporação de recursos computacionais*. Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37, Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 234-252.

[9] GIOVANNI, J. R. *Matemática completa*. V. 1 - 2 Ed. renov. - São Paulo: FTD, 2005.

[10] GIRALDO, V; CAETANO, P; MATTOS, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT)

[11] KIYOUSAKI, R. T. *Pai rico, pai pobre: o que os ricos ensinam a seus filhos sobre dinheiro*. Tradução de Maria José Cyhlar Monteiro - Rio de Janeiro: Elsivier, 2000.

[12] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *A matemática do Ensino Médio*, v.2, 5ª. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

[13] NASSER, L. *Matemática Financeira para a escola básica: uma abordagem prática e visual*. 2ª Ed. Projeto Fundão / UFRJ. Rio de Janeiro, 2012.