Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Mestrado Profissional em Matemática

DOMINGOS BOAES GARCIA

Resolução de Problemas Combinatórios Utilizando Funções Geradoras

São Luís
2013

DOMINGOS BOAES GARCIA

Resolução de Problemas Combinatórios Utilizando Funções Geradoras

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. José Antônio Pires F. Marão

São Luís

2013

Garcia, Domingos Boaes.

Resolução de Problemas Combinatórios Utilizando Funções Geradoras / Domingos Boaes Garcia.- São Luís: UFMA, 2013.

65f

Orientador: José Antônio Pires Ferreira Marão

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Maranhão, Mestrado Profissional em Matemática, 2013.

1. Análise Combinatória. 2. Funções Geradoras.

I. Título

CDU: 519.1

DOMINGOS BOAES GARCIA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS UTILIZANDO FUNÇÕES GERADORAS

Dissertação apresentada ao PROFMAT da Universidade Federal do Maranhão para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em:........../......./.......

BANCA EXAMINADORA

Prof. José Antônio Pires Ferreira Marão(Orientador)
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Félix Silva Costa
Universidade Estadual do maranhão

Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto
Universidade Estadual Paulista

À minha família e amigos.

“Não se preocupe muito com as suas dificuldades em Matemática, posso assegurar-lhe que as minhas são ainda maiores."

Albert Einstein

AGRADECIMENTOS

À Deus, por tudo.

À minha família, especialmente, aos meus pais, pelos princípios, valores, amor, educação, enfim, por tudo que me proporcionaram.

Aos amigos, em especial, Chaves pela ajuda importante, John Wayni e Robert, pelo apoio extra classe.

Ao meu orientador José Marão pela paciência e orientação segura durante elaboração deste trabalho. Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT da UFMA.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, temos como objetivo principal, resolver problemas combinatórios utilizando as funções geradoras. O escopo do trabalho é fazer comparações de alguns problemas resolvidos através da Análise Combinatória Clássica e em seguida usando Funções Geradoras.

Palavras- chave: Análise combinatória, Funções geradoras.

ABSTRACT

In this work, our main goal, solve combinatorial problems using generating functions. The scope of work is to make comparisons of some problems solved by Classical Combinatorial Analysis and then using Generating Functions.

Keywords: Combinatorial Analysis, Generating Functions

SUMÁRIO

Lista de Figuras

INTRODUÇÂO

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas, visando desenvolver métodos que permitam contar, de uma forma indireta, o número de elementos de um conjunto, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

Quando se fala em Análise Combinatória sempre associa-se a combinações, arranjos e permutações, no entanto, trata-se de várias outras técnicas como, por exemplo, o princípio de inclusão e exclusão, funções geradoras, relações de recorrência e princípio da casa dos pombos.

É uma ferramenta bastante utilizada em diversas áreas do conhecimento científico, graças ao seu vasto campo de aplicações, como por exemplo, na Teoria das Probabilidades, Informática, Engenharia, Física, por exemplo. Segundo Roa e Navarro-Pelayo(2001, p.1)

> "os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, a teoria dos números, a teoria dos autômatos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias".

Além disso, contribui significativamente para a elaboração de situações problemas que podem ser discutidas através da construção de conjecturas e discussão de ideias, promovendo o desenvolvimento da capacidade de argumentação em diferentes níveis de ensino.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que os professores devem ter ao desenvolvê-lo. Segundo esse documento:

> "As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e

> raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio..."(BRASIL, 1998, p.257).

Há 14 anos trabalho como professor de Matemática do ensino fundamental e médio em escolas públicas na cidade de São Luís/MA. Durante esses anos percebi, em conversas informais de sala de professores, que alguns professores de Matemática assumiam que evitavam abordar com os seus alunos, o ensino de Análise Combinatória. Várias eram as justificativas dadas por esses professores, dentre elas, destacamos duas: A primeira delas seria a falta de habilidades, por parte dos professores e alunos, respectivamente, em ensinar e compreender conceitos e problemas tão abstratos, vistos em análise combinatória. A segunda, e a mais preocupante, penso eu, seria o fato dos professores considerarem o assunto, a Análise Combinatória, difícil e por terem dificuldades em compreender esses conceitos de forma clara e significativa. De acordo com Batanero et al.,

> [...] os autores afirmam que os professores consideram o ensino desse tema difícil e, em muitas situações, preferem não abordá-lo. (BATANERO et al., 1996 apud SABO, 2010, p.21).

Neste trabalho, temos como objetivo principal, resolver problemas combinatórios utilizando as funções geradoras. Dessa forma, em nossa proposta, mostraremos que a utilidade de uma função geradora surge quando fazemos interpretações combinatórias aos coeficientes e expoentes de sua expansão em séries de potências. Para isso, inicialmente, faremos uma abordagem usual da análise combinatória, ou seja, trabalharemos com a análise combinatória da maneira como é abordada nos livros didáticos do Ensino Médio.

Em seguida, ampliaremos algumas definições, tais como arranjo e combinação com repetição de elementos. Dando continuidade, abordaremos os coeficientes binomiais, definiremos polinômios e séries formais.

Finalmente, em linhas gerais, abordaremos as funções geradoras, especialmente, as funções geradoras ordinárias e as funções geradoras exponenciais, dando ênfase para a resolução de problemas de contagem, juntamente com algumas aplicações clássicas.

Capítulo 1

ANÁLISE COMBINATÓRIA

O presente capítulo tem o objetivo de mostrar conceitos e fórmulas da Análise Combinatória [5], [9] e [3]. Nele serão apresentados vários exemplos para ilustrar a teoria.

A combinatória é a parte da Matemática que trata dos problemas de contagem de certos tipos de subconjunto de um conjunto finito ou discreto (como o conjunto dos inteiros), sem que seja necessário enumerar seus elementos. Além das combinações, arranjos e permutações, que são técnicas usualmente trabalhadas no Ensino Médio, a Combinatória também dispõe de outras técnicas para resolvê-los. Dentre elas, destacamos as Funções Geradoras que, como veremos mais adiante, se constitui em uma técnica versátil para resoluções de problemas Combinatórios.

Apesar de dispor de técnicas que permitem resolver certos tipos de problemas, a Combinatória exige a compreensão plena da situação descrita pelo problema, uma vez que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para a sua solução.

1.1 Um pouco de história

A presente seção terá enfoque na história da Análise Combinatória, fatos vistos também [2] e [5].

Acredita-se que a Análise combinatória tenha se originado ainda na Antiguidade, quando o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.) propôs um problema geométrico que se tornou famoso, denominado Stomachion[1] (palavra derivada do grego stomachos, em português significa "estômago"), que consistia em saber de quantas maneiras poderiam ser reunidas 14 peças planas, de diferentes formatos e tamanhos, para formar um quadrado.

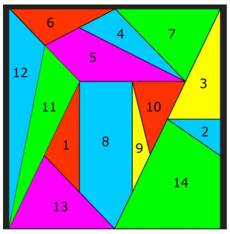

Figura 1.1: Stomachion

Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) resolveu um famoso problema que havia surgido na cidade de Königsberg, na Prussia(atual Kaliningrado, Rússia), conhecida por suas sete pontes, das quais cinco ligavam o continente a uma ilha. Denominado "As sete pontes de Königsberg", o problema consistia em descobrir se era possível caminhar ao redor de toda a cidade passando sobre cada ponte uma única vez.

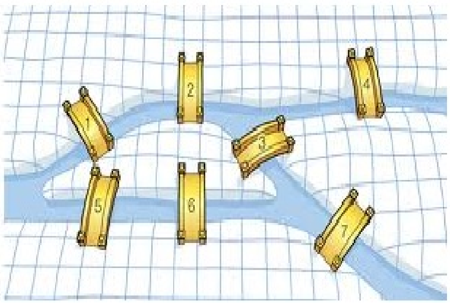

Figura 1.2: As sete pontes de Königsberg

Considerando a característica desse problema, pode-se concluir que a resolução do mesmo exige o conhecimento de combinatória. Apesar de Euler ter provado que a solução para esse problema não existia, mais tarde, ele deu origem à teoria dos grafos, com grandes aplicações na ciência da computação.

A seguir, vamos formalizar as definições dos princípios aditivo e multiplicativo que, sem exagero, são fundamentais para a resolução da maioria dos problemas de contagem.

[1]Por mais de 2 mil anos este problema ficou esquecido até que despertasse o interesse de matemáticos e historiadores. Provou-se recentemente que existem 17152 maneiras.

1.2 Princípios aditivo e multiplicativo

Os exemplos a seguir ilustram esses princípios:

Exemplo 1.1 *Suponhamos que para se deslocar de casa até o trabalho, uma pessoa tenha as seguintes alternativas:*

- Um de seus dois automóveis (A_1 e A_2);
- Uma das três linhas de ônibus que fazem o trajeto (O_1, O_2 e O_3);
- O metrô (M).

Pergunta-se: *De quantas maneiras diferentes ela poderia escolher o seu transporte?*

hipóteses:	Automóvel	**ou**	Ônibus	**ou**	Metrô
opções:	$\underbrace{A_1 \ A_2}_{\text{2 opções}}$		$\underbrace{O_1 \ O_2 \ O_3}_{\text{3 opções}}$		$\underbrace{M}_{\text{1 opção}}$

Portanto, a pessoa pode ir para o trabalho de: $2+3+1=6$ maneiras diferentes. ■

Exemplo 1.2 *Numa lanchonete há 5 sabores de sucos e 3 sabores de salgados. Suponha que Helena só tenha permissão para tomar um suco ou comer um salgado. Quantos são os pedidos que Helena pode fazer?*

Ou Helena escolhe um sabor de suco dentre os 5 ou 1 tipo de salgado dentre os 3. Portanto, Helena pode fazer 8 pedidos diferentes. ■

Os exemplos anteriores obedecem a um mesmo princípio básico que chamamos de *princípio aditivo*: Se A e B são dois conjuntos disjuntos $(A \cap B = \oslash)$ com m e n elementos, respectivamente, então AUB possui $m+n$ elementos. Esse princípio se estende para o caso de três ou mais hipóteses.

O *princípio multiplicativo* também constitui uma ferramenta básica para se resolver os problemas de contagem com uma complexidade um pouco maior dos que são apresentados com adição. Veja o exemplo.

Exemplo 1.3 *Uma pessoa pode viajar no trecho São Luís/Açailândia/São Luís de avião, carro, ônibus ou trem. Se o meio de transporte da ida não é o mesmo da volta, de quantas maneiras essa pessoa pode realizar a viagem?*

Se a pessoa for de avião, ela pode voltar de carro, ônibus ou trem, o que lhe fornece 3 maneiras distintas de fazer o percurso de ida e volta. Denotando avião por A, carro por C, ônibus por O e trem por T, pode-se indicar as 3 maneiras distintas de fazer o percurso por:

$$(A, C), (A, O) \quad \text{e} \quad (A, T)$$

De maneira análoga, se a pessoa for de carro, há novamente 3 modos distintos de fazer o percurso de ida e volta:

$$(C, A), (C, O) \quad \text{e} \quad (C, T)$$

Se a pessoa for de ônibus, há, novamente, 3 modos distintos de fazer o percurso de ida e volta:

$$(O, A), (O, C) \quad \text{e} \quad (O, T)$$

Analogamente, se fizer o percurso de ida usando o trem:

$$(T, A), (T, C) \quad \text{e} \quad (T, O)$$

Uma outra maneira de resolver o problema seria a seguinte: Para a escolha do transporte de ida temos 4 opções distintas. Uma vez escolhido o transporte de ida, a escolha do transporte de volta pode ser feita de 3 maneiras distintas. Logo, o total de possibilidades é $4.3 = 12$. ∎

Exemplo 1.4 *Numa festa há 7 mulheres e 5 homens. De quantos modos possíveis podemos formar um casal nessa festa ?*

Para resolvermos esse problema, iremos combinar cada homem com cada uma das 7 mulheres. Chamando de h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, os homens dessa festa, poderemos combinar h_1 com todas as mulheres, h_2 com todas as mulheres, e assim por diante. Teremos assim, que o número de casais é $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 5 \cdot 7 = 35$. ∎

Os exemplos que acabamos de ilustrar mostram o principio fundamental da enumeração ou principio multiplicativo, o qual diz: *Se uma decisão d_1 pode ser tomada de m maneiras e se,* *uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de n maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $m.n$.*

Assim como no princípio aditivo, o princípio multiplicativo se estende para o caso de três ou mais hipóteses.

Na verdade, o princípio multiplicativo é uma consequência direta do princípio aditivo. Essa é uma das razões pelo quais muitos autores nos livros didáticos de matemática resolvem omitir o princípio aditivo pelo motivo dele estar implicitamente envolvido com o multiplicativo.

Veja a seguir mais alguns exemplos.

Exemplo 1.5 *De quantas maneiras podemos escolher um quadrado preto e um quadrado branco num tabuleiro de xadrez se os dois quadrados não podem pertencer à mesma linha ou coluna?*

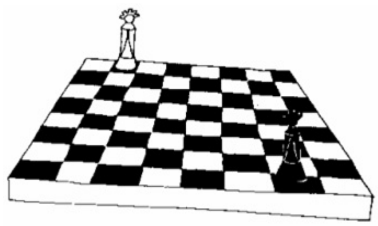

Figura 1.3: Tabuleiro de xadrez

Para se escolher um quadrado preto temos 32 possibilidades e para escolher um quadrado branco, diminuindo as possibilidades dos brancos na mesma linha e mesma coluna que o quadrado preto, temos 24 opções. Assim, temos $32.24 = 768$ maneiras distintas de escolher um quadrado preto e um quadrado branco, não estando ambos na mesma linha ou coluna. ■

Exemplo 1.6 *Determine o numero de subconjuntos de $E = \{1, 2, 3 \cdots, n\}$.*

Para formar subconjuntos de E, devemos decidir se cada elemento de E faz parte ou não de cada subconjunto que queremos formar. Temos assim, duas possibilidades para cada elemento de E (fazer parte ou não dos subconjuntos). Como E tem n elementos, pelo princípio multiplicativo, o número de subconjuntos de E é

$$2.2.2. \cdots .2 = 2^n. \blacksquare$$

Exemplo 1.7 *Para pintar a bandeira a seguir, estão disponíveis seis cores. Sabendo que regiões adjacentes devem ser pintadas de cores diferentes, responda:*

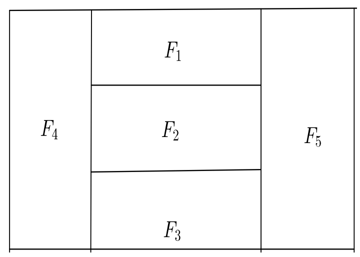

Figura 1.4: Bandeira

(a) qual é o número mínimo de cores a serem usadas?

(b) de quantos modos a bandeira pode ser pintada?

(a) No mínimo devem ser usadas 3 cores (duas, no mínimo, para as faixas centrais e pelo menos mais uma para as faixas laterais).

(b) Para resolver este item, iremos dividir a contagem do número de modos de pintar a bandeira em dois casos:

i) $F_1 \neq F_3$

Neste caso, a faixa F_1 pode ser pintada de 6 modos, a faixa F_2, de 5 modos, a F_3, de 4 modos, a F_4, de 3 modos (pois já foram usadas três cores distintas), o mesmo ocorrendo com F_5. São, portanto, $6.5.4.3.3 = 1080$ modos.

ii) $F_1 = F_3$

Já neste caso, a faixa F_1 pode ser pintada de 6 modos, a faixa F_2, de 5, a F_3, de 1 modo apenas (a mesma cor usada em F_1), a F_4, de 4, o mesmo ocorrendo com F_5. São, portanto, 6.5.1.4.4 = 480 modos.

Logo, o número total de modos de pintar a bandeira é 1 080 + 480 = 1 560.

Exemplo 1.8 *Dados os conjuntos* $A = \{a_1, a_2\}$ *e* $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ *, quantas funções de A em B podem ser construídas?*

Por definição, sabemos que uma função de A em B, é uma correspondência que associa, a cada elemento de A, um único elemento de B. Os elementos de B, que estão associados a algum elemento de A, são chamados imagens da função. Os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, domínio e contradomínio da função.

Nesse exemplo, dado o pequeno número de elementos em A e B, podemos dar a solução para esse problema, construindo todas as funções de A em B. Vejamos:

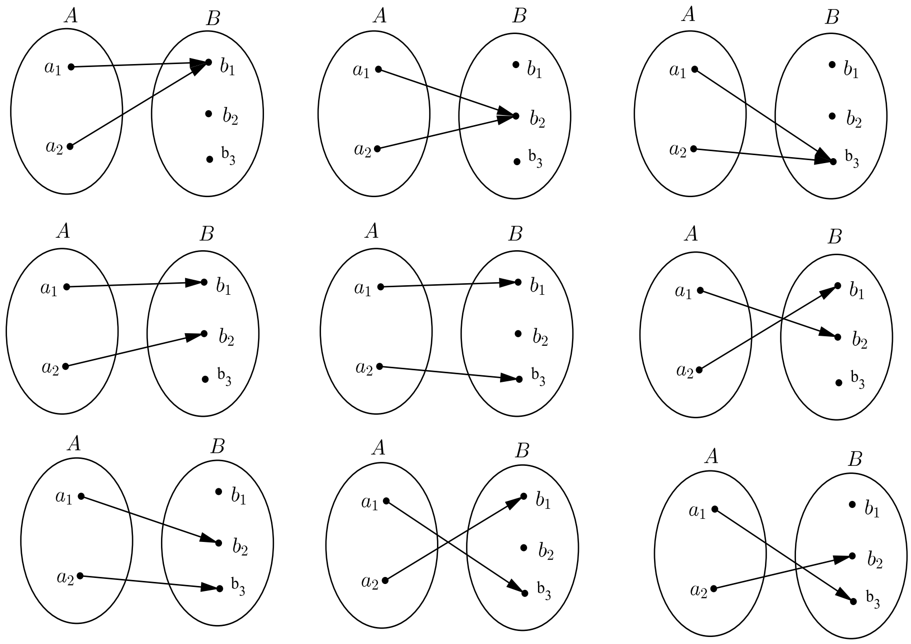

Figura 1.5: Número de funções

Temos, assim, 9 funções de A em B.

Podemos, no entanto, resolver esse problema de uma outra maneira. Vejamos.

Como uma função de A em B é formada tomando cada elemento de A e associando a eles um elemento de B, então para o elemento a_1, temos 3 possibilidades de escolha da imagem, para o elemento a_2, temos também 3 possibilidades, logo, pelo princípio multiplicativo, o número de funções de A em B, é $3.3 = 9$.

Seguindo o raciocínio usado na resolução desse exemplo, podemos generalizar: dados os conjuntos finitos A e B, sendo m e n os números de elementos de A e B, respectivamente, temos que o número de funções de A em B, é

$$\underbrace{n.n.\cdots.n}_{m \text{ vezes}} = n^m.$$

Exemplo 1.9 *De quantas maneiras 2 pessoas podem estacionar seus carros numa garagem com 6 vagas?*

A primeira pode estacionar seu carro de 6 maneiras restando, portanto, 5 vagas para a segunda pessoa estacionar o seu. Logo, as 2 pessoas poderão estacionar seus carros de 6.5=30 maneiras

Exemplo 1.10 *Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de matemática, 7 livros diferentes de física e 10 livros diferentes de química e pediu-me para escolher 2 livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los?*

Posso fazer as seguintes escolhas:
(a) matemática e física: 5.7=35 maneiras;
(b) matemática e química: 5.10=50 maneiras;
(c) física e química: 7.10=70 maneiras.
Como as minhas escolhas só podem ocorrer dentre uma das possibilidades (a), (b) ou (c), então $35 + 50 + 70$ é o número de maneiras de fazer estas escolhas. ■

Exemplo 1.11 *Responda:*
(a) quantos divisores naturais possui o número 240?
(b) quantos desses divisores são ímpares?
(c) quantos são pares?
(d) quantos são quadrados perfeitos?

(a) A decomposição de 240 em fatores primos é $240 = 2^4.3.5$. Um divisor natural de 240 é, necessariamente, um número da forma $2^x.3^y.5^z$, onde $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y \in \{0, 1\}$ e $z \in \{0, 1\}$. Ora, como qualquer divisor natural de 240 é da forma $2^x.3^y.5^z$ e temos 5 modos distintos de escolher o x, 2 modos distintos de escolher o y e 2 de escolher o z, concluímos que existem $5.2.2 = 20$ divisores naturais de 240.

(b) para que o divisor seja ímpar, é necessário e suficiente que o fator 2 não esteja presente na sua decomposição em fatores primos. Isto só ocorre quando $x = 0$. Neste caso, existem $1.2.2 = 4$ divisores naturais de 240, que são ímpares.

(c) o número de divisores naturais pares é igual ao número total de divisores naturais menos o número de divisores naturais ímpares. Logo, $20 - 4 = 16$.

(d) Um número natural é quadrado perfeito se, e somente se, na decomposição em seus fatores primos só comparece expoente par. Desse modo, existem $3.1.1 = 3$ divisores naturais de 240 que são quadrados perfeitos. ■

1.3 Permutações Simples

Seja E um conjunto com n elementos distintos. Uma permutação simples desses n elementos é qualquer agrupamento ordenado desses n elementos.

Como uma permutação simples é qualquer agrupamento ordenado desses n objetos, para a primeira posição da ordem desses elementos temos n possibilidades. Uma vez escolhido o primeiro dessa ordem, para a escolha do segundo, temos $n-1$ possibilidades. Uma vez escolhido o segundo elemento da ordem, para a escolha do segundo, temos $n-2$ possibilidades, e, assim por diante. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de permutações de n objetos, que se indica por P_n, é igual a

$$P_n = n(n-1)...1 = n!.$$

Definimos $P_0 = 0! = 1$.

Exemplo 1.12 *Considerando os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de 5 algarismos distintos podemos formar?*

Parar encontrarmos a quantidade de números de 5 algarismos distintos, basta fazermos a permutação dos 5 dígitos, ou seja, $P_5 = 5.4.3.2.1 = 120$. ■

1.4 Arranjos Simples

Seja E um conjunto com n elementos distintos. Um arranjo simples desses n elementos, tomados p a p (de classe p), que denotamos por A_n^p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, é qualquer subconjunto ordenado de E que tenha p elementos distintos.

Vamos tentar encontrar uma expressão matemática que caracterize A_n^p, usando o princípio multiplicativo.

Temos n elementos dos quais queremos tomar p. Este é um problema equivalente a termos n objetos com os quais queremos preencher p lugares.

$$\overline{L_1}\ \overline{L_2}\ \overline{L_3}\ ...\ \overline{L_p}$$

O primeiro lugar pode ser preenchido de n maneiras diferentes. Tendo preenchido L_1, restam $(n-1)$ objetos e, portanto, o segundo lugar pode ser preenchido de $(n-1)$ maneiras diferentes. Após o preenchimento de L_2 há $(n-2)$ maneiras de se preencher L_3 e assim sucessivamente vamos preenchendo as posições de forma que L_p terá $(n-(p-1))$ maneiras diferentes de ser preenchido. Pelo princípio multiplicativo podemos dizer que as p posições podem ser preenchidas sucessivamente de $n(n-1)(n-2)...(n-(p-1))$ maneiras diferentes. Portanto,

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-(p-1)).$$

Sabemos que uma igualdade não se altera se a multiplicarmos e dividirmos por um mesmo valor, então:

$$A_n^p = \frac{[n(n-1)(n-2)...(n-(p-1))][(n-p)(n-p-1)...2.1]}{(n-p)(n-p-1)...2.1},$$

podendo ser simplificada para

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemplo 1.13 *Considerando os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5 quantos números de 2 algarismos diferentes podem ser formados?*

$$A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 5.4 = 20.\blacksquare$$

Exemplo 1.14 *Quantos números de 4 algarismos distintos, e maiores do que 2000, podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 5 e 7?*

Há 4 posições para serem preenchidas. Como o número deve ser maior do que 2000, a primeira posição pode ser ou com 3 ou com o 5 ou com o 7, isto é, de 3 maneiras diferentes. As outras 3 posições podem ser preenchidas com qualquer um dos 4 dígitos restantes, isto é, de A_4^3 maneiras. Portanto, há $3A_4^3 = 3\frac{4!}{1!} = 72$ números de 4 algarismos distintos e maiores que 2000 formados com os algarismos $0, 1, 3, 5$ e 7. $\blacksquare$

1.5 Combinações Simples

Seja E um conjunto com n elementos distintos. Uma combinação simples desses n elementos, tomados p a p (de classe p), que denotamos por C_n^p, onde p é um número natural tal que $p \leq n$, é qualquer subconjunto de E que tenha p elementos distintos.

Vimos que o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é igual ao número de maneiras de preencher p lugares com n elementos disponíveis. Obtivemos

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

como sendo o número de agrupamentos que diferem entre si *pela natureza e pela ordem* de colocação dos elementos no agrupamento, isto é, quem participa e o lugar que ocupa.

Entretanto, quando consideramos combinações simples de n elementos tomados p a p, temos agrupamento de p elementos, tomados dentre os n elementos disponíveis, que diferem entre si *apenas pela natureza* dos elementos, isto é, importa somente quem participa o grupo. Nesse caso, a combinação simples dos n elementos tomados p a p é dado pelo arranjos simples dos n elementos tomados p a p dividido por $p!$, que é a permutação dos elementos que compõem cada arranjo, isto é,

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemplo 1.15 *Oito cientistas trabalham num projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados, de modo que só é possível abri-los todos se houver pelo menos* 5 *cientistas presentes.*

(a) Qual é o número mínimo possível de cadeados?

(b) Na situação do item (a), quantas chaves cada cientista deve ter?

(a) De acordo com o enunciado do problema, para cada grupo de 3 cientistas do projeto, existe um cadeado de modo que nenhum deles possui a chave. Portanto, o número de cadeados tem de ser no mínimo igual ao número de maneiras de escolher 3 cientistas dentre os 8 participantes do projeto, isto é, o número de cadeados é no mínimo igual a $C_8^3 = 56$.

(b) Seja A um dos cientistas do projeto. Como para qualquer grupo de 3 cientistas, selecionado dentre os 7 restantes, existe um cadeado para o qual A possui a chave, então A possui $C_7^3 = 35$ chaves. De maneira análoga, concluímos que cada cientista tem 35 chaves. ■

Exemplo 1.16 *Quantas saladas contendo exatamente 2 frutas podemos formar se dispomos de 20 frutas diferentes?*

Para formar uma salada basta escolher 2 das 20 frutas, não importando a ordem, o que pode ser feito de

$$C_{20}^{2}=\frac{20!}{2!(20-2)!}=\frac{20!}{2!(18)!}=\frac{20.19.18!}{2!18!}=190$$

maneiras. ∎

Exemplo 1.17 *Quantas anagramas da palavra CENSURADO começam por consoante e terminam em vogal?*

A palavra CENSURADO possui 4 vogais e 5 consoantes. Devemos escolher 1 consoante para começar a palavra e 1 vogal para terminá-la. Isto pode ser feito, respectivamente, de C_5^1 e C_4^1 maneiras. As outras 7 letras podem ocupar qualquer uma das 7 posições e isto se dá de 7! maneiras. Portanto, $C_5^1.C_4^1.7! = 5.4.7! = 100800$ é a resposta para o nosso problema. ∎

Exemplo 1.18 *De quantas maneiras podemos distribuir 8 bolas distintas em três caixas idênticas, de modo que nenhuma fique vazia ?*

Para calcular esse número, a priori, vamos indexar as caixas idênticas para podermos raciocinar, como se fossem distintas.

Sendo assim, sejam c_1, c_2 e c_3 as supostas caixas distintas.

Como nenhuma caixa deve ficar vazia, então podemos fazer a distribuição dessas 8 bolas, em cada caixa, das seguintes maneiras:

i) 1 bola em c_1, 1 em c_2 e 6 em c_3;

ii) 1 bola em c_1, 2 em c_2 e 5 em c_3;

iii) 1 bola em c_1, 3 em c_2 4 em c_3;

iv) 2 bolas em c_1, 2 em c_2 e 4 emc_3;

v) 2 bolas em c_1, 3 em c_2 e 3 em c_3.

Feita a distribuição, como a ordem das bolas em cada caixa não importa, para escolher o número de bolas que deve ficar em cada caixa, iremos utilizar combinação simples. Por outro lado, lembrando que as caixas são idênticas, não devemos ordenar os números de bolas nessas caixas.

Chamando a atenção para os itens i, iv e v, que estão logo abaixo, podemos observar que nesses itens, o número de maneiras de distribuirmos as 8 bolas nas 3 caixas idênticas, foi contado duas vezes, uma vez que distribuir 1 bola em c_1, 1 em c_2 e 6 em c_3, é o mesmo que distribuir 1 bola em c_2, 1 em c_1 e 6 em c_3, visto que essas bolas são idênticas. Daí, devemos dividir por 2!, nesse caso, o número obtido em cada um desses itens.

Feito isso, utilizamos os princípios multiplicativo e aditivo para determinar o total de maneiras. Assim, teremos:

i) $\dfrac{C_8^1.C_7^1.C_6^6}{2} = \dfrac{8.7.1}{2} = 28;$

ii) $C_8^1.C_7^2.C_5^5 = 8.21.1 = 168;$

iii) $C_8^1.C_7^3.C_44 = 8.35.1 = 280;$

iv) $\dfrac{C_8^2.C_6^2.C_2^2}{2} = \dfrac{28.15.1}{2} = 210;$

v) $\dfrac{C_8^2.C_63.C_33}{2} = \dfrac{28.20.1}{2} = 280.$

Portanto, o total de maneiras de distribuir essas 8 bolas em 3 caixas idênticas é:

$$28 + 168 + 280 + 210 + 280 = 966.\blacksquare$$

A seguir vamos estender os conceitos de permutações, arranjos e combinações para o caso em que repetições de elementos são permitidas. Discutiremos, também, o importante conceito de permutações circulares, além de algumas relações satisfeitas pelos coeficientes binomiais.

Iniciaremos com a contagem do número de soluções em inteiros positivos de uma equação linear com coeficientes unitários.

1.5.1 Equações lineares com coeficientes unitários

Nosso objetivo é o de contar o número de soluções inteiras de uma equação da forma

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = m,$$

onde x_i, para $i = 1, 2, ..., n$, e m são inteiros.

Teorema 1.1 *O número de soluções em inteiros positivos da equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r = m,$$

para $m > 0$, é dado por C_{m-1}^{r-1}.

Demonstração: Como estamos interessado em expressar o inteiro positivo m como som a de r inteiros positivos, basta colocarmos $r-1$ barras divisoras entre os m $1's$:

$$1+1+|1+1+...+1|+...+|+1+...+1=m.$$

O valor de x_1 será o número de $1's$ que antecedem a primeira barra, o valor de x_2, o número de $1's$ entre a primeira e a segunda barra, e assim por diante, até obtermos o valor de x_r como sendo o número de $1's$ à direita da barra de número $(r-1)$. Como a cada possível distribuição das barras corresponde uma única solução para a equação em estudo, basta contarmos de quantas forma isto pode ser feito. Devemos selecionar $(r-1)$ dos $(m-1)$ possíveis locais(os sinais de "+" que separam os $1's$) para a colocação das barras divisoras, o que pode ser feito de C_{m-1}^{r-1} maneiras diferentes. ■

Exemplo 1.19 *Encontrar o número de soluções em inteiros positivos da equação*

$$x_1+x_2+...+x_5=9.$$

Temos que $m=9$ e $r=5$ e, portanto,

$$C_{m-1}^{r-1}=C_8^4=\frac{8!}{4!4!}=70.$$

Se considerarmos soluções inteiras não-negativas, isto é, se permitirmos que as variáveis x_i possam assumir também o valor zero, teremos mais soluções. Considerando, por exemplo, a equação anterior: $x_1+x_2+...+x_5=9$, com $x_i\geq 0$, para $i=1,2,...,5$ e fazendo a mudança de variáveis $y_i=x_i+1$, teremos $y_i\geq 1$. Assim,

$$y_1-1+y_2-1+...+y_5-1=9.$$

Segue que,

$$y_1+y_2+...+y_5=9+5.$$

Esta equação possui $C_{9+5-1}^{5-1}=C_{13}^4=715$ soluções inteiras e positivas. Logo, a equação

$$x_1+x_2+...+x_5=9,$$

possui também 715 soluções inteiras não-negativas. ∎

No caso geral em que temos n variáveis:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = m,$$

para $x_i \geq 0$, somando 1 a cada x_i , obtemos

$$(x_1 + 1) + (+1)x_2 + ... + (x_n + 1) = m + n.$$

Se chamarmos $x_i + 1 = y_i$, para $i = 1, 2, 3, ..., n$, teremos

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = m + n,$$

para $y_i \geq 1$.

Como o número de soluções em inteiros não-negativos da equação na variável x é igual ao número de soluções em inteiros positivos da equação na variável y, temos que este número é dado por

$$C^{n-1}_{m+n-1}.$$

Exemplo 1.20 *Encontrar o número de soluções em inteiros não-negativos da equação* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$

Este número é igual a

$$C^{5-1}_{12+5-1} = C^{4}_{16} = 1820.$$

Esta mesma equação possui apenas $C^{4}_{11} = 330$ soluções em inteiros positivos. ∎

1.6 Permutações com repetição

Vamos analisar um exemplo particular que irá nos fornecer a ideia para a obtenção de uma fórmula geral. Vamos contar quantos são os anagramas da palavra BATATA.

Poderíamos resolver essa situação normalmente fazendo $P_6 = 6! = 720$. Se os A's e T's fossem todos distintos. Mas pelo fato da palavra BATATA ter letras repetidas, obtêmse um número de anagramas menor do que obteríamos se as letras fossem distintas. Mas as permutações entre os 3 A's e os 2 T's não produzirão novos anagramas. Dessa forma, precisamos dividir P_6 por P_3 e por P_2. Assim, o número de anagramas da palavra BATATA será:

$$\frac{P_6}{P_3P_2} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6.5.4.3!}{3!2!} = 60$$

Podemos,então, definir indutivamente a permutação de n elementos dos quais α são de um tipo, β de outro e γ de outro, com α+β+$\gamma = n$, como:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!, \beta!, \gamma!}.$$

Exemplo 1.21 *Quantos são os anagramas da palavra "MATEMÁTICA"?*

Como temos 3 letras A's, 2 letras M's, 2 letras T's, 1 letra C, 1 letra I e 1 letra E, a resposta será:

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = 151200.\blacksquare$$

Exemplo 1.22 *De quantas maneiras podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos sem que nenhum quarto fique vazio?*

Sejam q_1, q_2, q_3 e q_4 os quartos. Como nenhum quarto deve ficar vazio, então podemos fazer a distribuição das 9 pessoas, em cada quarto, da seguinte forma:

(i) 3 pessoas em q_1, 2 em q_2, 2 em q_3 e 3 em q_4;

(ii) 3 pessoas em q_1, 3 em q_2, 2 em q_3 e 1 em q_4;

(iii) 4 pessoas em q_1, 2 em q_2, 2 em q_3 e 1 em q_4;

(iv) 4 pessoas em q_1, 3 em q_2, 1 em q_3 e 1 em q_4;

(v) 5 pessoas em q_1, 2 em q_2, 1 em q_3 e 1 em q_4;

(vi) 6 pessoas em q_1, 1 em q_2, 1 em q_3 e 1 em q_4.

Como a ordem das pessoas em cada quarto não importa, para escolher o número de pessoas em cada quarto, iremos utilizar combinações simples. Como os quartos são distintos, precisávamos fazer uma ordenação da quantidade de pessoas neles. Isso pode ser feito utilizando permutação com elementos repetidos. Depois utilizamos o princípio multiplicativo para encontrar quantas possibilidades existem em cada situação descrita e o princípio aditivo para encontrar o total de possibilidades. Assim, teremos:

(i) $C_9^3.C_6^2.C_4^2.C_2^2.P_4^3 = 84.15.6.1.4 = 30240$;

(ii) $C_9^3.C_6^3.C_3^2.C_1^1.P_4^2 = 84.20.3.1.12 = 60480$;

(iii) $C_9^4.C_5^2.C_3^2.C_1^1.P_4^2 = 126.10.3.1.12 = 45360$;

(iv) $C_9^4.C_5^3.C_2^1.C_1^1.P_4^2 = 126.10.2.1.12 = 30240$;

(v) $C_9^5.C_4^2.C_2^1.C_1^1.P_4^2 = 126.6.2.1.12 = 18144$;

(vi) $C_9^6.C_3^1.C_2^1.C_1^1.P_4^3 = 84.3.2.1.4 = 2016$.

Portanto, o total de maneira que as pessoas podem se acomodar nos quartos são

$$30240 + 60480 + 45360 + 30240 + 18144 + 2016 = 186480. \blacksquare$$

1.7 Arranjos com repetição

Vimos que o número de arranjos simples de m elementos tomados p a p é dado por:

$$A_m^p = m(m-1)(m-2)...(m-p+1).$$

Este número conta todas as possíveis maneiras de se retirar, de um conjunto de m elementos distintos, p elementos, levando-se em conta a ordem dos elementos.

Caso repetições sejam permitidas, o princípio multiplicativo nos diz que o número total de maneira de se retirar, levando-se em conta a ordem, p dos m objetos, distintos ou não, é igual a

$$AR_m^p = m^p,$$

uma vez que o primeiro elemento pode ser retirado de m maneiras, o segundo também de m maneiras e assim sucessivamente até que o p'ésimo elemento seja escolhido.

Exemplo 1.23 *Qual o total de placas de carro que podem ser construídas constando de 7 símbolos, sendo os 3 primeiros constituídos por letras e os 4 últimos por dígitos?*

Considerando o alfabeto com 26 letras, podemos escolher as 3 letras de AR_{26}^{3} maneiras diferentes e os 4 dígitos de AR_{10}^{4} maneiras diferentes. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos um total de

$$AR_{26}^{3}AR_{10}^{4} = 175760000$$

possíveis placas. ∎

1.8 Combinações com repetição

Suponhamos que num parque de diversões existem quatro tipos de brinquedos a, b, c e d, e que uma pessoa queira comprar dois bilhetes. É claro que ela poderá comprar dois bilhetes do mesmo tipo (pode ser que ela queira ir duas vezes na roda gigante). Uma pessoa, caso tenha dinheiro suficiente, poderá comprar mais do que 4 bilhetes. Neste caso ela, necessariamente, deverá comprar pelo menos 2 bilhetes de um mesmo brinquedo. Vamos supor que ela resolva comprar 5 bilhete para estes 4 brinquedos. Algumas possibilidades seriam:

$$aaaaa \qquad abbbc \qquad aacbb \qquad bbccd$$

Estamos interessado em contar o total de elementos do tipo acima. Para sabermos quais foram os 5 bilhetes comprados, basta que a pessoa nos diga quantos bilhetes de cada tipo ela comprou. Se chamarmos de x_1 o número de bilhetes para o brinquedo a, de x_2 o número para b, de x_3 para c e de x_4 o número para o brinquedo d, o que estamos procurando é, nada mais nada menos, do que o número de soluções inteiras não-negativas para a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$

que, como sabemos, é igual a

$$C_8^3 = 56.$$

Denotamos isto por CR_4^5.

De uma maneira geral CR_n^p é o número total de maneiras de selecionarmos p objetos dentre n objetos distintos onde cada objeto pode ser tomado até p vezes. Como vimos, este número é igual ao número de soluções inteiras não-negativas da equação

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = p,$$

que, como já vimos, é igual a

$$C_{n+p-1}^{n-1}.$$

Logo, temos que

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^{n-1}.$$

Chamamos a atenção para o fato que, quando consideramos combinações simples de n elementos p a p, p deve ser menor do que ou igual a n. No caso de combinações com repetição esta restrição não é necessária, como vimos no caso da compra dos bilhetes acima.

Exemplo 1.24 *De quantos modos podemos comprar 4 refrigerantes em um bar que vende 2 tipos de refrigerantes?*

$$C_2^4 = C_{2+4-1}^{2-1} = 5$$

Denotando os refrigerantes por a e b, estas 5 possibilidades seriam as seguintes:

$$aaaa \qquad aaab \qquad aabb \qquad abbb \qquad bbbb. \blacksquare$$

Capítulo 2

BINÔMIO DE NEWTON

O presente capítulo tratará do Binômio de Newton [6]. Aqui o assunto será abordado de maneira direta, tendo em vista que o mesmo servirá como pre-requisito para o estudo das Funções Geradoras.

Para resolvermos determinados problemas de análise combinatória, necessitamos de algumas potências da forma $(x+a)^n$ (mais adiante, veremos que essas potências são denominadas de Binômio de Newton), onde x e a são números reais quaisquer e $n \in \mathbb{N}$. Vejamos algumas dessas potências:

$$\begin{aligned}
(x+a)^0 &= 1 \\
(x+a)^1 &= x+a \\
(x+a)^2 &= x^2+2xa+a^2 \\
(x+a)^3 &= x^3+3x^2a+3xa^2+a^3 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Observando essas potências e seus desenvolvimentos, percebemos que quanto maior for o expoente, mais trabalhosos serão os seus desenvolvimentos. No entanto, usando os conceitos vistos no capítulo anterior (análise combinatória), podemos deduzir uma expressão (mais adiante, veremos que essa expressão é denominada Teorema de Newton), relativamente simples, para desenvolver essas potências. Sendo assim, neste capítulo, abordaremos as definições e propriedades necessárias para a dedução de tal expressão.

2.1 Números binomiais

Definição 2.1 *Sejam n e p dois números naturais tais que $0 \leq p \leq n$. Chama-se número binomial, de numerador n e classe p, todo número dado pela expressão:*

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemplo 2.1 $\binom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!(8-3)!} = 56.$

São imediatos os seguintes resultados:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n \quad \text{e} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Observemos que sendo $\binom{n}{p}$ um número natural, pois representa o número de combinações simples, ele possui todas propriedades dos números naturais.

2.1.1 Propriedades

Os números $C_n^p = \binom{n}{p}$ têm propriedades importantes. Estas propriedades podem ser provadas de várias maneiras. Em alguns casos, a maneira mais simples é utilizar a relação

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Em outras, utilizamos um argumento combinatório. Vejamos essas propriedades e suas demonstrações.

Sendo n e p números naturais quaisquer tais que $0 \leq p \leq n$, temos as seguintes propriedades para os números binomiais.

1. $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$

   Demonstração: Como $C_n^p = \binom{n}{p}$ e, por definição, C_n^p é o número de subconjuntos com p elementos do conjunto $E = \{1, 2, 3, ..., n\}$, então $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$ é o número total de subconjuntos de E. Mas, como já foi visto no exemplo 1.6, o número total de subconjuntos de E é 2^n. Portanto:

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.\blacksquare$$

Exemplo 2.2 $\displaystyle\sum_{p=0}^{10}\binom{n}{p}=\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\cdots+\binom{10}{10}=2^{10}=1024.\blacksquare$

Observação 2.1 *O símbolo $\sum$ (letra grega denominada "sigma") é utilizado nas ciências exatas para indicar um somatório.*

2. $\displaystyle\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$

Demonstração: $\displaystyle\binom{n}{n-p}=\frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}.\blacksquare$

Observação 2.2 *Os números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ são chamados números binomiais complementares.*

Exemplo 2.3 $\displaystyle\binom{9}{5}=\binom{9}{4}=\frac{9!}{4!(9-4)!}=126.$

3. (Relação de Fermat): $\displaystyle\binom{n}{p+1}=\left(\frac{n-p}{p+1}\right).\binom{n}{p}.$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\left(\frac{n-p}{p+1}\right).\binom{n}{p}=\left(\frac{n-p}{p+1}\right).\frac{n!}{p!(n-p)!} &= \frac{(n-p)n!}{(p+1)p!(n-p)(n-p-1)!}\\ &= \frac{n!}{(p+1)![n-(p+1)]!}\\ &= \binom{n}{p+1}.\blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 2.4 *Determine o valor de x na equação* $\displaystyle\binom{x}{10}=3\binom{x}{9}.$

Da propriedade 2, temos que

$$\binom{x}{10}=\left(\frac{x-9}{9+1}\right).\binom{x}{9}.$$

Então, a equação se escreve:

$$\binom{\frac{x-9}{10}}{} \cdot \binom{x}{9} = 3\binom{x}{9}.$$

Segue que

$$\frac{x-9}{10} = 3 \Longrightarrow x = 39. \blacksquare$$

4. (Relação de Stifel): $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Demonstração: Aplicando a propriedade 2 no $1^{\underline{o}}$ membro da Relação de Stifel ,temos:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \binom{n}{p} + \left(\frac{n-p}{p+1}\right) \cdot \binom{n}{p} = \binom{n}{p} \cdot \left(1 + \frac{n-p}{p+1}\right) = \binom{n}{p}\left(\frac{n+1}{p+1}\right) \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \left(\frac{n+1}{p+1}\right) = \frac{(n+1)!}{(p+1)![(n+1)-(p+1)]!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}. \blacksquare
\end{aligned}$$

2.2 Triângulo de Pascal

Como já foi visto, os números binomiais apresentam algumas propriedades importantes. Vamos, agora, construir uma tabela com os números binomiais, onde essas propriedades serão visualizadas

Essa tabela é conhecida por Triângulo de Pascal, e é formada de modo que, em cada linha, se tenha números binomiais de mesmo numerador e classes crescentes e, em cada coluna, se tenha números binomiais de mesma classe e numeradores crescentes. Vejamos.

$$\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Utilizando as propriedades vistas anteriormente, podemos substituir todos esses números binomiais pelos seus respectivos valores. Vejamos:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

De acordo com Neto (2009, p. 299)

> A tabela dos números é conhecida como Triângulo de Pascal porque foi Blaise Pascal[1] quem primeiro escreveu um tratado sobre ela: *"Traité du triangle arithmétique"*. Entretanto, o Triângulo já era bem conhecido muito antes de 1653, quando Pascal pela primeira vez editou seu tratado.

Observação 2.3 *A relação de Stifel pode ser visualizada no triângulo de Pascal. Por exemplo,* $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$, *ou seja,* $4 + 6 = 10$.

[1]Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, 19 de Junho de 1623 - Paris, 19 de Agosto de 1662) foi um físico, matemático, filósofo moralista e teólogo francês.

2.3 Desenvolvimento do Binômio de Newton

Dentre as aplicações dos números binomiais, destacaremos o desenvolvimento de potências do tipo $(x+a)^n$ com $n \in \mathbb{N}$, conhecidas como Binômio de Newton, onde x e a são números reais quaisquer.

A ideia de como desenvolver essas potências pode ser deduzida a partir de alguns casos que já foram vistos no ensino fundamental. Vejamos esses casos:

$$\begin{aligned}
(x+a)^0 &= 1;\\
(x+a)^1 &= 1.x + 1.a;\\
(x+a)^2 &= 1.x^2 + 2.x.a + 1.a^2;\\
(x+a)^3 &= 1.x^3 + 3.x^2.a + 3.x.a^2 + 1.a^3.
\end{aligned}$$

Observando os coeficientes nesses desenvolvimentos:

$$\begin{array}{cccc}
1 & & & \\
1 & 1 & & \\
1 & 2 & 1 & \\
1 & 3 & 3 & 1
\end{array}$$

Percebemos algumas linhas do Triângulo de Pascal. Então, podemos reescrever essas potências com seus, respectivos, desenvolvimentos, escrevendo esses coeficientes na notação binomial $\binom{n}{p}$. Fazendo isso, temos:

$$\begin{aligned}
(x+a)^0 &= \binom{0}{p} x^0 a^0;\\
(x+a)^1 &= \binom{1}{0} x^1 a^0 + \binom{1}{1} x^0 a^1;\\
(x+a)^2 &= \binom{2}{0} x^2 a^0 + \binom{2}{1} x^1.a^1 + \binom{2}{2} x^0 a^2;\\
(x+a)^3 &= \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2.a^1 + \binom{3}{2} x^1.a^2 + \binom{3}{3} x^0 a^3.
\end{aligned}$$

Esses casos particulares sugerem que no desenvolvimento de $(x+a)^n$:

- O desenvolvimento de $(x+a)^n$ possui $(n+1)$ termos;

- Os expoentes de a crescem de 0 até n;
- Os expoentes de x decrescem de n até 0;
- Em cada parcela, a recebe como expoente o denominador e x recebe como expoente a diferença entre o numerador e o denominador;
- A soma dos expoentes das variáveis em cada termo é sempre n.

Assim, temos o seguinte desenvolvimento do Binômio de Newton:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}a^0x^n + \binom{n}{1}a^1x^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}x^1 + \binom{n}{n}a^nx^0.$$

Exemplo 2.5 *Desenvolva o binômio* $(2x+3)^4$.

Utilizando o desenvolvimento de Newton, temos:

$$\begin{aligned}(2x+3)^4 &= \binom{4}{0}3^0(2x)^4 + \binom{4}{1}3^1(2x)^3 + \binom{4}{2}3^2(2x)^2 + \binom{4}{3}3^3(2x)^1 + \binom{4}{4}3^4(2x)^0 \\ &= 116x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81.\blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 2.6 *Calcule o valor da expressão* $7^5 + 5.7^4.3 + 10.7^3.3^2 + 10.7^2.3^3 + 5.7.3^4 + 3^5$.

A expressão dada corresponde ao desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$, onde $x = 7$, $a = 3$ e $n = 5$. Logo:

$$7^5 + 5.7^4.3 + 10.7^3.3^2 + 10.7^2.3^3 + 5.7.3^4 + 3^5 = (7+3)^5 = 10^5 = 100000.\blacksquare$$

2.3.1 Termo geral do binômio de Newton

O termo geral serve para obter um determinado termo do desenvolvimento de $(x+a)^n$, sem que haja a necessidade de se efetuar o desenvolvimento.

Observe que no desenvolvimento de $(x+a)^n$:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}a^0x^n + \binom{n}{1}a^1x^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}x^1 + \binom{n}{n}a^nx^0,$$

temos que:

- Para $p = 0$, obtemos o primeiro termo do desenvolvimento, que indicaremos por T_1:

$$T_1 = \binom{n}{0} a^0 x^n;$$

- Para $p = 1$, obtemos o segundo termo T_2:

$$T_2 = \binom{n}{1} a^1 x^{n-1};$$

- Para $p = 2$, obtemos o segundo termo T_3:

$$T_3 = \binom{n}{2} a^2 x^{n-2};$$

e assim por diante. Percebemos, então, que o número que representa a ordem do termo no desenvolvimento é uma unidade maior que o denominador do coeficiente binomial. Assim, temos:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}.$$

Exemplo 2.7 *Calcular o sexto termo do desenvolvimento de* $(x - 2y)^8$.

Neste caso $a = -2y$, $n = 8$, $p = 5$ e $p + 1 = 6$. Portanto

$$T_6 = \binom{8}{5} x^3 (-2y)^5 = \binom{8}{5} x^3 (-2)^5 y^5 = -1792 x^3 y^5. \blacksquare$$

Capítulo 3

POLINÔMIOS E SÉRIES DE POTÊNCIAS

Os Polinômios e as Séries de Potências[4] serão aqui abordados de modo a não usar conceitos de Matemática Superior, e serão tratados de modo a dar subsídios para a formulação da teoria de Funções Geradoras.

Definição 3.1 *Uma sequência de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real a_n, chamado de n-ésimo termo da sequência.*

Escrevemos $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (a_n), para indicar a sequência cujo *n*-ésimo termo é a_n.

Observação 3.1 *Uma sequência pode ter uma quantidade finita ou infinita de termos.*

Observação 3.2 *A sequência (a_n) é diferente do conjunto $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ de seus termos. Por exemplo, a sequência $(1, 1, 1, 1, 1)$ não é o mesmo que o conjunto $\{1\}$; as sequências $(0, 2, 0, 2, \cdots)$ e $(0, 0, 2, 0, 0, 2, \cdots)$ são diferentes mas o conjunto de seus termos é o mesmo, igual a $\{0, 2\}$.*

Definição 3.2 *Um polinômio de grau n é uma expressão do tipo*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n,$$

onde a_n são termos da sequência $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e x uma variável.

Definição 3.3 *Uma série de potências é uma expressão do tipo*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

onde a_n, são termos da sequência $(a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots)$ e x uma variável.

Podemos observar que, pelas definições anteriores, qualquer polinômio de gra n em x é uma série de potências. De fato,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \end{aligned}$$

Quando tivermos interessados em identificar apenas os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, da série de potências

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

os termos

$$x^0 = 1, x^1, x^2, \cdots x^n, \cdots$$

serão meros símbolos algébricos. Nesse caso, a série de potências é chamada *série formal.*

Definição 3.4 *Se $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ e $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$ são duas séries de potências, então a soma destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de x^n é*

$$a_n + b_n$$

e o produto destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de x^n é

$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0.$$

Capítulo 4

FUNÇÕES GERADORAS

O principal objetivo deste capítulo é apresentar, em linhas gerais, o método das Funções Geradoras[9], devido à Euler, que consiste em uma técnica versatil e inovadora, no que se refere ao Ensino Médio, para a resolução de certos tipos de problemas de contagem. Afim de mostrar a aplicabilidade destas funções serão mostradas as resoluções de alguns problemas de Análise Combinatória.

Com o objetivo de mostrar como se utiliza tal técnica, ou seja, como modelar e resolver problemas de contagem utilizando as funções geradoras e, dessa forma, se obter um melhor entendimento do assunto, começaremos por um exemplo simples, mas bastante motivador:

Exemplo 4.1 *Quantas são as soluções inteiras da equação* $\alpha + \beta = 7$*, onde* $0 \leq \alpha \leq 5$ *e* $0 \leq \beta \leq 5$*?*

Pela simplicidade do problema, primeiramente, iremos fazer uma enumeração direta das soluções:

α	2	3	4	5
β	5	4	3	2

Assim, existem quatro soluções para o problema.

Vejamos agora como as funções geradoras poderão ser utilizadas para resolver este problema. Para isso, vamos introduzir um polinômio para cada variável:

$$p_\alpha(x) = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \quad \text{e} \quad p_\beta(x) = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5.$$

Observe que os expoentes da variável x em cada polinômio pertencem ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, cujos elementos são os possíveis valores que α e β podem assumir.

Multiplicando os polinômios $p_\alpha(x)$ e $p_\beta(x)$, teremos:

$$p(x) = p_\alpha(x).p_\beta(x) = (x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5).(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

ou, de forma equivalente,

$$p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 5x^6 + 4x^7 + 3x^8 + 2x^9 + x^{10}.$$

Este polinômio é um exemplo de função geradora.

Mostraremos, a seguir, que a solução do nosso problema é o coeficiente de x^7 em $p(x)$. De fato, de quantas maneiras podemos obter x^7 em $p(x)$? Por exemplo, podemos escolher x^2 em $p_\alpha(x)$ e x^5 em $p_\beta(x)$ e multiplicar esses monômios. Esta é só uma das maneiras de se obter x^7 e corresponde à solução $\alpha = 2$ e $\beta = 5$, isto é, cada solução do problema corresponde exatamente a uma maneira de se obter x^7 em $p(x)$. Portanto, o número de soluções do problema é igual ao número de maneiras de se obter x^7 em $p(x)$. Dessa forma, a solução para o nosso problema é o coeficiente de x^7 em $p(x)$, ou seja, 4. ■

De uma forma geral, o expoente de x na expansão de um polinômio $p(x)$ quantifica alguma propriedade em que estamos interessados, como por exemplo, a quantidade de objetos em um determinado local. Se para cada objeto associarmos tal potência de x e somarmos estas potências, o coeficiente de x^n será o número de locais com n objetos. Dessa forma, a seguir formalizaremos a definição de funções geradoras.

Definição 4.1 *Dada uma sequência de números $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, chama-se função geradora ordinária desta sequência a série de potências*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Como o nosso objetivo é apenas dar uma ideia geral do uso das funções geradoras, não trataremos aqui das questões de convergência que ocorrem nas séries de potências. Para os nossos propósitos, podemos pensar em $f(x)$ como sendo uma série de potências *formal*.

Exemplo 4.2 *Por definição, a função geradora ordinária da sequência* $a_n = 1$, *para* $n = 0, 1, 2, 3\cdots$, *é dada por*

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots .$$

Sempre que quisermos encontrar a função geradora ordinária, estaremos interessado numa expressão simples (que comumente chamamos "fórmula fechada"). Como, no contexto da funções geradoras, estamos interessados somente no cálculo dos coeficientes destas funções e não nos valores numéricos da variável x, *vamos considerar sempre* $|x| < 1$, *uma vez que, nesse caso,*

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

que é a fórmula fechada para $f(x)$. ■

Exemplo 4.3 *Encontrar a função geradora para a sequência* $(a_n) = (1, 1, 1, 3, 1, 1, \cdots)$.

Por definição, a série de potência procurada é igual:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + 3x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + (x^3 + 2x^3) + x^4 + x^5 + \cdots \\ &= 2x^3 + (1 + x + x^2 + 3x^3 + x^4 + x^5 + \cdots) \\ &= 2x^3 + \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Portanto, a função geradora do nosso problema é:

$$f(x) = 2x^3 + \frac{1}{1-x}.\blacksquare$$

Exemplo 4.4 *Encontrar a sequência gerada pela função geradora*

$$f(x) = \frac{x^3}{1-4x}.$$

Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots .$$

Substituindo x por $4x$ nesta última expressão, obtemos:

$$\frac{1}{1-4x} = 1 + (4x) + (4x)^2 + (4x)^3 + (4x)^4 + \cdots .$$

Multiplicando a última expressão por x^3, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{1-4x} &= x^3.1 + x^3.(4x) + x^3.(4x)^2 + x^3.(4x)^3 + x^3.(4x)^4 + \cdots \\ &= x^3 + 4x^4. + 16x^5 + 64x^6 + 256x^7 + \cdots . \end{aligned}$$

Portanto $f(x)$ é a função geradora da sequência $(a_n) = (0, 0, 0, 1, 4, 16, 64, 256, \cdots)$. ■

4.1 O teorema binomial

No capítulo 1, vimos que o número de soluções em inteiros não-negativos para a equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

é igual a

$$C^p_{n+p-1} = \binom{n+p-1}{p}.$$

Dado que $x_i, \ i = 1, 2, \cdots n$, pode assumir qualquer valor não-negativo, a função geradora que "controla" a presença de x_i é

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

e, portanto, a função geradora para este problema é

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}.$$

Para que possamos identificar, nesta função, que o coeficiente de x^p é, de fato,

$$\binom{n+p-1}{p},$$

precisamos de um teorema que generalize o desenvolvimento do binômio de Newton.

Se tomarmos o desenvolvimento em série de Taylor[1], em torno do zero, da função

$$f(x) = (1+x)^u,$$

onde u é um número real arbitrário, podemos provar[2], facilmente, que para $|x| < 1$ temos:

Teorema 4.1 (Teorema binomial.)

$$(1+x)^u = \binom{u}{0} + \binom{u}{1}a^1x + \binom{u}{2}x^2 + \cdots + \binom{u}{p}x^p + \cdots = \sum_{p=0}^{\infty}\binom{u}{p}x^p,$$

onde

$$\binom{u}{p} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)\cdots(u-p+1)}{p!}, & \text{se} \quad p > 0 \\ 1, & \text{se} \quad p = 0. \end{cases}$$

O número $\binom{u}{p}$ definido acima é chamado *coeficiente binomial generalizado*. Se u for igual ao número natural n, $\binom{u}{p}$ será o coeficiente binomial usual e o desenvolvimento acima se reduzirá ao desenvolvimento do binômio de Newton.

Agora sim, dispondo deste resultado podemos provar o teorema seguinte.

Teorema 4.2 *O coeficiente de x^p no desenvolvimento de*

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$$

é igual a $\binom{n+p-1}{p}$.

Demonstração: Temos que:

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n = (\frac{1}{1-x})^n = (1-x)^{-n}.$$

[1]Brook Taylor (Londres, 18 de agosto de 1685- Londres, 30 de novembro de 1731) foi um matemático britânico.

[2]Omitiremos a prova deste resultado, pois precisaríamos de conteúdos com uma linguagem avançada para nível médio.

Aplicando o teorema binomial nesta expressão, obtemos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-n}{p} (-x)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-n}{p} (-1)^p x^p.$$

Utilizando a definição de coeficiente binomial generalizado temos que o coeficiente de x^p é igual a:

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(-1)^p n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \binom{n+p-1}{p}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Observação 4.1 *Embora, para n inteiro positivo e p inteiro não-negativo, $\binom{-n}{p}$ não tenha uma interpretação combinatória, uma simples manipulação algébrica nos diz que:*

$$\binom{-n}{p} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}.$$

Exemplo 4.5 *Usar o teorema binomial para encontrar o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(1+x)^{\frac{1}{4}}$.*

Utilizando o teorema binomial, temos:

$$(1+x)^{\frac{1}{4}} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{4}}{p} x^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})(\frac{1}{4}-1)\cdots(\frac{1}{4}-p+1)}{p!} x^p.$$

Logo o coeficiente de x^2 é dado por:

$$\frac{(\frac{1}{4})(\frac{1}{4}-1)}{2!} = -\frac{3}{32}. \blacksquare$$

Exemplo 4.6 *Encontrar o número de maneiras de se obter um total de 15 pontos ao se jogar, simultaneamente, quatro dados diferentes.*

A função geradora que "controla" a quantidade de pontos de cada dado é

$$x + x^2 + \cdots + x^6.$$

Como são 4 dados, a resposta para o nosso problema será o coeficiente de x^{15} no desenvolvimento de

$$(x + x^2 + \cdots + x^6)^4 = x^4(1 + x + \cdots + x^5)^4.$$

Usando o fato de que

$$1 + x + \cdots + x^5 = \frac{1 - x^6}{1 - x},$$

temos

$$(x + x^2 + \cdots + x^6)^4 = x^4 \left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4.$$

Nosso problema agora se resume em encontrar o coeficiente de x^{11} no desenvolvimento de

$$\left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4 = (1 - x^6)^4(1 - x)^{-4}.$$

Uma vez que

$$(1 - x^6)^4 = x^{24} - 4x^{18} + 6.x^{12} - 4x^6 + 1,$$

devemos encontrar os coeficientes de x^5 e x^{11} no desenvolvimento de $(1-x)^{-4}$. Então, temos:

$$\binom{-4}{5}(-1)^5 = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = 56 \text{ e } \binom{-4}{11}(-1)^{11} = \binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{11} = 364.$$

Portanto o coeficiente de x^{11} em

$$(1 - x^6)^4(1 - x)^{-4}$$

é $-4.56 + 1.364 = 140$, que é a resposta para o nosso problema. ■

Exemplo 4.7 *Quantos dos inteiros compreendidos entre 1 e 1000000 têm soma dos algarismos iguais a 15?*

Vamos pensar nos números de 0 a 999999 já que 1000000 não é, claramente, um de tais inteiros que têm soma dos algarismos iguais a 15.

Todo número na base 10 compreendido entre 0 e 999999 pode ser escrito da forma

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$$

onde $0 \leq x_i \leq 9,\ \forall i = 1, 2, \cdots, 6$. De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= 000000 \\ 1 &= 000001 \\ &\cdots \end{aligned}$$

e, assim por diante, de modo que desta forma representamos todos os inteiros de 0 a 999999.

Assim, como vimos no início deste capítulo, o nosso problema consiste em encontrar o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$ com a restrição $0 \leq x_i \leq 9$. Para isso, devemos encontrar o ceficiente de x^{15} no desenvolvimento da função geradora

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^9)^6 = (1 - x^{10})^6(1 - x)^{-6}.$$

Como

$$(1 - x^{10})^6 = x^{60} - 6x^{50} + 15x^{40} - 20x^{30} + 15x^{20} - 6x^{10} + 1,$$

precisamos dos coeficientes de x^5 e x^{15} no desenvolvimento de $(1 - x)^{-6}$, que são:

$$\binom{-6}{5}(-1)^5 = \binom{6+5-1}{5} = 252 \ \text{ e } \ \binom{-6}{15}(-1)^{15} = \binom{6+15-1}{15} = 15504.$$

Portanto, o coeficiente de x^{15} em

$$(1 - x^{10})^6(1 - x)^{-6}$$

é $-6.252 + 1.15504 = 13992$, que é a resposta para o nosso problema.

Até agora, como vimos em vários exemplos, utilizamos a função geradora ordinária para resolver problemas onde a ordem dos objetos é irrelevante. A seguir vamos abordar, em linhas gerais, as funções geradoras exponenciais, que utilizaremos para resolver problemas em que a ordem dos objetos retirados devem ser considerada.

4.2 Funções geradoras exponenciais

A fim de apresentarmos as noções básicas desta teoria, vamos começar com o seguinte exemplo.

Exemplo 4.8 *Dispomos de uma certa quantidade de livros, sendo dois tipos diferentes a e b. De quantos modos diferentes podemos retirar 3 livros e, colocá-los, em ordem numa prateleira, sendo que o livro a pode ser retirado no máximo uma vez e o livro b no máximo duas vezes?*

Primeiramente consideramos apenas a função geradora ordinária, já conhecida, que nos fornecerá as possíveis escolhas (com as restrições impostas) mas sem dar importância para a ordem. Tal função é dada por:

$$(1+ax)(1+bx+b^2x^2) = 1+(a+b)x+(ab+b^2)x^2+ab^2x^3.$$

Como se pode ver, o coeficiente de $x^0 = 1$ é a possibilidade de não se escolher nenhum livro, que no caso é 1, o coeficiente de x é a lista de todas as possíveis escolha de um só livro, o coeficiente de x^2 das escolhas de dois livros e o coeficiente de x^3 das escolhas de três livros.

Como pretendemos ordenar os 3 livros, ao retirarmos ab^2, poderemos ordená-los de $P_3^2 = \dfrac{3!}{1!2!}$ maneiras diferentes, que é a resposta para o nosso problema.

Agora, com objetivo de encontrar a função geradora, levando em consideração a ordem, vamos alterar os polinômios que "controlam" a presença de cada tipo de livro, introduzindo no coeficiente de x^n o fator $\dfrac{1}{n!}$, $n = 0, 1, 2$. Assim:

$$\left(1+\frac{a}{1!}x\right)\left(1+\frac{b}{1!}x+\frac{b^2}{2!}x^2\right) = 1+\left(\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}\right)x+\left(\frac{ab}{1!1!}+\frac{b^2}{2!}\right)x^2+\left(\frac{ab^2}{1!2!}\right)x^3.$$

Segue que

$$\left(1+\frac{a}{1!}x\right)\left(1+\frac{b}{1!}x+\frac{b^2}{2!}x^2\right) = 1+\left(\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}\right)1!.\frac{x}{1!}+\left(\frac{ab}{1!1!}+\frac{b^2}{2!}\right)2!.\frac{x^2}{2!}+\left(\frac{ab^2}{1!2!}\right)3!.\frac{x^3}{3!}.$$

Tomando $a = b = 1$, obtemos:

$$\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right) = 1+\left(\frac{1!}{1!}+\frac{1!}{1!}\right)\frac{x}{1!}+\left(\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{2!}\right)\frac{x^2}{2!}+\left(\frac{3!}{1!2!}\right)\frac{x^3}{3!}.$$

Dessa forma, a resposta para o nosso problema passa a ser o coeficiente de $\frac{x^3}{3!}$ no desenvolvimento acima.

Portanto, a expressão

$$\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right) = 1+\left(\frac{1!}{1!}+\frac{1!}{1!}\right)\frac{x}{1!}+\left(\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{2!}\right)\frac{x^2}{2!}+\left(\frac{3!}{1!2!}\right)\frac{x^3}{3!},$$

onde se leva em consideração a ordem dos objetos, é a função geradora para o nosso problema, que chamamos de *função geradora exponencial.* ■

De uma maneira geral definimos função geradora exponencial da seguinte forma.

Definição 4.2 *A série de potências*

$$a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots + +a_n\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

é a função geradora exponencial da sequência (a_n).

Exemplo 4.9 *Encontrar a função geradora exponencial para a sequência* $(1, 1, 1, 1, \cdots)$.

Por definição, a função geradora exponencial para a sequência $(a_n) = 1$ é dada pela expressão

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + +\frac{x^n}{n!} + \cdots ,$$

que é igual ao desenvolvimento em série de Taylor[3], em torno do zero, da função $f(x) = e^x$. Dessa forma,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + +\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

é a função geradora exponencial para a sequência $(1, 1, 1, 1, \cdots)$. ■

Exemplo 4.10 *De quantas maneiras podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos sem que nenhum quarto fique vazio?*

[3]Mais uma vez omitiremos a prova deste resultado, pois precisaríamos de conteúdos com uma linguagem avançada para nível médio.

De acordo com o enunciado, nenhum quarto poderá receber mais que 6 pessoas, visto que nenhum deles poderá ficar vazio. Como o número de pessoas em cada quarto é relevante, por exemplo, 3 pessoas no primeiro quarto e 2 em cada um dos demais é diferente de 2 em cada uma dos três primeiros e 3 no último, usaremos, para resolver este problema, função geradora exponencial.

A função geradora para este problema é, portanto,

$$f(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!}\right)^4$$

e, a resposta é o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ nesta função. Observamos que este coeficiente é o mesmo se tomarmos

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^4 \\ &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} + \cdots - 1\right)^4 \\ &= (e^x - 1)^4 \\ &= e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1 \end{aligned}$$

uma vez que as potências extras não contribuem para o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$. Por outro lado, sabemos que:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

logo

$$e^{4x} = 1 + \frac{4x}{1!} + \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(4x)^9}{9!} + \cdots.$$

Assim, o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ é 4^9. Da mesma forma, encontramos os coeficientes de $\frac{x^9}{9!}$ em e^{3x} e e^{2x} que são, respectivamente, 3^9 e 2^9. Portanto, o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ em

$$(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$$

será $4^9 - 4.3^9 + 6.2^9 - 4 = 186480$.

O teorema que enunciaremos a seguir generaliza este resultado.

Teorema 4.3 *O número de maneiras de distribuirmos n objetos distintos em p compartimentos distintos, sem que nenhum compartimento fique vazio, que indicamos por $T(n,p)$, é*

$$T(n,p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} (p-i)^n.$$

Demonstração: Como cada um dos p compartimentos, devem ter pelo menos um objeto, e a ordem dos n objetos distribuídos é relevante, a função geradora exponencial para este problema é

$$f(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)^p = (e^x - 1)^p$$

e, a resposta é o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ nesta função. Sabemos que

$$(e^x - 1)^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} e^{(p-i)x}$$

e como

$$e^{(p-i)x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (p-i)^n x^n,$$

temos

$$(e^x - 1)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (-1)^i \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (p-i)^n x^n = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (-1)^i (p-i)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Concluímos que o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ é

$$T(n,p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} (p-i)^n. \blacksquare$$

Com este teorema podemos resolver o **Exemplo 4.10** fazendo $n = 9$ e $p = 4$. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} T(9,4) &= \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \binom{4}{i} (4-i)^9 = 4^9 - \binom{4}{1} 3^9 + 4^9 - \binom{4}{2} 2^9 - 4^9 - \binom{4}{3} \\ &= 4^9 - 4.3^9 + 6.2^9 - 4 = 186480. \blacksquare \end{aligned}$$

A seguir iremos enunciar um teorema que mostra como é feita a distribuição de n objetos distintos, agora, em compartimentos iguais.

Teorema 4.4 *O números de maneiras $S(n,p)$ de distribuirmos n objetos distintos em p compartimentos idênticos sem que nenhum compartimento fique vazio é*

$$S(n,p) = \frac{1}{p!}T(n,p) = \frac{1}{p!}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}(p-i)^n.$$

Demonstração: Para que possamos obter uma distribuição de n objetos distintos em p compartimentos distintos, sem que nenhum compartimento fique vazio, basta encontrarmos uma distribuição de n objetos distintos em p compartimentos idênticos (nenhum vazio) e ordenar estas caixas. Isto nos garante que $T(n,p) = p!S(n,p)$, o que conclui a demonstração. ■

Exemplo 4.11 *De quantas modos podemos distribuir 4 bolas distintas em duas caixas idênticas, de modo que nenhuma caixa fique vazia?*

Fazendo $n = 4$ e $p = 2$ no teorema 4.4, temos:

$$S(4,2) = \frac{1}{2!}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{2}{i}(2-i)^4 = \frac{1}{2}(2^4 - 2) = 7,$$

que é a resposta para o nosso problema. Se indicarmos as 4 bolas distintas por a, b, c e d, as distribuições serão:

$$a\ bcd, b\ acd, c\ abd, d\ abc, ab\ cd, ac\ bd, ad\ bc.$$ ■

Exemplo 4.12 *De quantas maneiras podemos distribuir 8 bolas distintas em três caixas idênticas, de modo que nenhuma caixa fique vazia?*

Fazendo $n = 8$ e $p = 3$ no teorema 4.4, temos:

$$S(8,3) = \frac{1}{3!}\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{3}{i}(3-i)^8 = \frac{1}{6}[3^8 - 3.2^8 + 3] = 966$$

que é a resposta para o nosso problema. ■

Capítulo 5

RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

O presente capítulo mostra de modo simples e direto o estudo das Relações de Recorrência [9], tendo em vista que este tópico será fundamental na aplicabilidade das Funções Geradoras na resolução de alguns problemas de Análise Combinatória.

Definição 5.1 *Uma relação de recorrência é um esquema que permite determinar um elemento qualquer de uma sequência, a partir das operações com os termos anteriores.*

Exemplo 5.1 *Imagine uma sequência de números onde temos um termo inicial, digamos* a_0*, e tal que cada termo da sequência seja o dobro do termo anterior. Se considerarmos um termo geral* a_n *teremos a seguinte relação de recorrência* $a_n = 2a_{n-1}$.

5.1 Resolução de equações de recorrência baseada em funções geradoras

Nesta técnica, a relação de recorrência é utilizada para obtenção de uma equação para a função geradora ordinária da sequência.

Exemplo 5.2 *Obter uma equação para a relação de recorrência do* ***Exemplo 5.1****.*

Se multiplicarmos cada membro desta equação por x^n, teremos:

$$a_n x^n = 2a_{n-1}x^n.$$

Somando a equação acima para $n \geq 1$ resulta em

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^n.$$

Segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 = 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1}.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e lembrando que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é a função geradora para a sequência $(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$, temos

$$f(x) - a_0 = 2xf(x) \Longrightarrow f(x) = \frac{a_0}{1-2x}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

logo

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$$

Dessa forma,

$$f(x) = \frac{a_0}{1-2x} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$$

Colocando x^n em evidência obtemos a fórmula desejada:

$$a_n = 2^n a_0. \blacksquare$$

5.2 Aplicações envolvendo relações de recorrência e funções geradoras

Aqui veremos mais alguns problemas que podem ser solucionados utilizando a teoria das funções geradoras.

5.2.1 A torre de Hanoi

Este problema foi inventado por Edouard Lucas[1] em 1883 e consiste em transferir n discos de tamanhos diferentes, com um furo no meio, fixados em um pino em ordem decrescente, para outro pino. Com o auxílio de um terceiro pino devemos movimentar somente um disco de cada vez, nunca havendo um disco maior sobre um disco menor.

Dessa forma, desejamos saber qual é o menor número de movimentos necessários pra transferir uma torre de n discos.

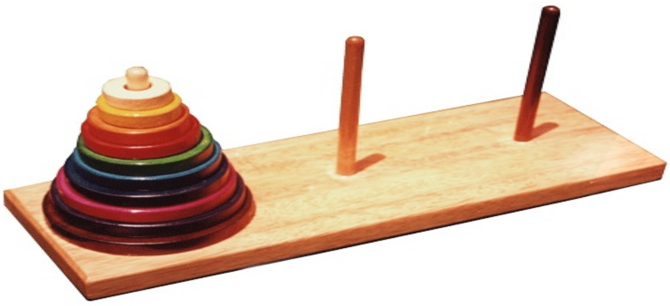

Figura 5.1: Torre de Hanoi

Seja t_n o número mínimo de movimentos necessários para transferir n discos. Se $n = 1$, obviamente, $t_1 = 1$. Se $n = 2$, teremos $t_2 = 3$. De fato, transferimos, no $1^{\underline{o}}$ movimento, o disco menor para o terceiro pino e, no $2^{\underline{o}}$ movimento, transferimos o outro disco para o segundo pino (que é o pino para a qual a torre vai ser transferida). Finalmente, no $3^{\underline{o}}$ movimento, transferimos o disco do terceiro pino para o segundo pino, completando a transferência da torre.

Para $n = 3$, podemos observar que os três primeiros movimentos são os mesmos que no caso $n = 2$. Daí executamos o quarto movimento que é transferir o disco maior para o pino que se quer fazer a transferência da torre. Agora novamente executamos os movimentos de $n = 2$, só que transferindo os dois discos para o pino onde está o disco maior. Assim, se conclui a transferência da torre.

Portanto, para $n = 3$, vamos executar duas vezes os movimentos de $n = 2$, mais o movimento do disco maior, ou seja, $t_3 = 2t_2 + 1$.

Para n discos, precisamos de no mínimo $n - 1$ movimentos para deslocar os $n - 1$ discos

[1]François Édouard Anatole Lucas (Amiens, 4 de Abril de 1842 - Paris, 3 de Outubro de 1891) foi um matemático francês.

que estão em cima do disco maior, mais o movimento do disco maior e ainda no mínimo $n-1$ movimentos para transferir os $n-1$ discos para cima do disco maior, ou seja:

$$t_n = 2t_{n-1} + 1.$$

Esta é a relação de recorrência para a solução deste problema, mas ainda podemos, utilizando funções geradoras, encontrar uma fórmula fechada para t_n. De fato, podemos organizar a sequência da torre de Hanoi da seguinte forma:

$$t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 3,\ t_3 = 7,\ \cdots, t_n = 2t_{n-1} + 1,$$

onde $n \geq 1$.

Por definição, a função geradora dessa sequência é dada por $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$. Como $t_0 = 0$, então:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2t_{n-1} + 1)x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} t_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 2x\sum_{n=1}^{\infty} t_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Mas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n = g(x) \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1.$$

Assim,

$$g(x) = 2xg(x) + \frac{1}{1-x} - 1 \Longleftrightarrow g(x) - 2xg(x) = \frac{x}{1-x} \Longrightarrow (1-2x)g(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Logo,

$$g(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-x)}.$$

Usando frações parciais, temos:

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x} &= \frac{A(1-x) + B(1-2x)}{(1-2x)(1-x)} \\ &= \frac{(-A-2B)x + A + B}{(1-2x)(1-x)}. \end{aligned}$$

Para que esta igualdade seja verdadeira, devemos ter:

$$-A - 2B = 1 \text{ e } A + B = 0 \Longrightarrow A = 1 \text{ e } B = -1.$$

Substituindo os valores de A e B em $g(x) = \dfrac{A}{(1-2x)} - \dfrac{B}{(1-x)}$, obtemos:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(1-2x)} - \frac{1}{(1-x)} \\ &= 1 + (2x) + (2x)^2 + (2x)^3 + \cdots - (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ &= (2-1)x + (2^2-1)x^2 + (2^3-1)x^3 + \cdots . \end{aligned}$$

Como $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$, igualando os coeficientes de x^n, obtemos

$$t_n = 2^n - 1,$$

que é uma fórmula fechada para t_n.■

5.2.2 Cálculo do tamanho de uma população de coelhos

Suponha que um casal de coelhos recém-nascidos é colocado numa ilha, e que eles não produzem descendentes até completar dois meses de idade. Uma vez atingida esta idade, cada casal de coelhos produz exatamente um outro casal de coelhos por mês. Qual seria a população de coelhos na ilha após n meses, supondo que nenhum dos coelhos tenha morrido e não haja migração nesse período?

No primeiro e no segundo mês teremos 1 casal; no terceiro mês teremos 2 casais, pois o primeiro casal produziu um outro casal; no quarto mês serão 3 casais; já no quinto mês serão 5 casais; no sexto mês teremos 8 casais; no sétimo mês serão 13 casais; assim segue-se obedecendo uma determinada regra de formação.

Se denotarmos por F_n a população de coelhos no n-ésimo mês, veremos que $F_0 = 0, F_1 = 1,\ F_2 = 1, F_3 = 2,\ F_4 = 3$ e, assim sucessivamente. Dessa forma podemos mostrar[2] que o

[2] Omitiremos também esta demonstração pois precisaríamos de conteúdos com uma linguagem avançada para nível médio.

termo geral é dado pela relação de recorrência:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para } n \geq 2.$$

Observamos que a sequência $(F_0, F_1, F_2, \cdots F_n, \cdots)$, da população de coelhos, nada mais é do que a sequência de Fibonacci[3].

Agora vamos utilizar funções geradoras para encontrar uma fórmula fechada para F_n. De fato, podemos organizar a sequência da população de coelhos da seguinte forma:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ \cdots, F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

onde $n \geq 2$. Por definição, a função geradora dessa sequência é dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Multiplicando cada membro da relação de recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2$ por x^n, temos: $F_n x^n = F_{n-1}x^n + F_{n-2}x^n$.

Somando a equação acima para $n \geq 2$ resulta em

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
&= x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n
\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0 - xF_1$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0$, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0 - xF_1 = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0\right) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

[3]Leonardo Fibonacci (Pisa, 1170 -Pisa, 1250) foi um matemático italiano, tido como o primeiro grande matemático europeu da idade média.

Dessa forma, teremos

$$f(x) - x = xf(x) + x^2 f(x).$$

Daí, segue que

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Calculando as raízes do polinômio do denominador da função acima, e lembrando que $x - a = -a(1 - \frac{x}{a})$, podemos reescrever a função como

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2} \\
&= \frac{x}{(-1)\left[x - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right].\left[x - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]} \\
&= \frac{x}{(-1).\left\{(-1)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[1 - \frac{x}{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}\right].(-1)\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left[1 - \frac{x}{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}\right]\right\}} \\
&= \frac{x}{\left[1 - \frac{x}{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}\right].\left[1 - \frac{x}{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}\right]} \\
&= \frac{A}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} \\
&= \frac{A\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right) + B\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} \\
&= \frac{\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}A - \frac{1+\sqrt{5}}{2}B\right)x + A + B}{1 - x - x^2}.
\end{aligned}$$

Para que esta igualdade seja verdadeira, devemos ter

$$-\frac{1-\sqrt{5}}{2}A - \frac{1+\sqrt{5}}{2}B = 1 \text{ e } A + B = 0$$

de onde $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Substituindo os valores de A e B em

$$f(x) = \frac{A}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

e desenvolvendo seus termos obtemos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

ou, de forma equivalente

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n, \ n \geq 0.$$

Colocando x^n em evidência obtemos a fórmula desejada:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \ n \geq 0,$$

que é a uma fórmula fechada para F_n.■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante elaboração deste trabalho, percebemos que o método das funções geradoras se aplica a muitos problemas de contagem, cujas resoluções, são consideradas inacessíveis, pelos métodos que são usualmente abordados no Ensino Médio. No entanto, para fazer uso desse método, é necessário um conhecimento conveniente de alguns tópicos de matemática, tais como: Análise Combinatórias, Binômios de Newton, Polinômios e Séries formais.

Ao abordarmos, em linhas gerais, as funções geradoras, especialmente, funções geradoras ordinárias e as funções geradoras exponenciais, constatamos o quanto são versáteis quando usadas na resolução de problemas combinatórios.

Conforme vimos nos exemplos 1.19 e 1.23, suas soluções, pelo método clássico da Análise Combinatória, mostraram-se bastantes trabalhosas, enquanto os mesmos exemplos quando resolvidos com o uso de funções geradoras mostraram-se de fáceis soluções, tendo em vista a praticidade e sistematização conseguida por meio desta técnica, na resolução destes problemas.

Acreditamos assim, que as funções geradoras quando abordadas com as devidas ponderações, podem ser trabalhadas no Ensino Médio, no ensino de Análise Combinatória, caracterizando assim uma proposta inovadora, visto que esse assunto ainda não é abordado neste nível de ensino. Isso caracterizará uma abordagem simples e talvez mais atraente para os alunos do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: MEC, 1999.

[2] DANTE, Luis Roberto. *Matemática: Contexto e Aplicações*. Volume Único. São Paulo: Ática, 2000.

[3] IEZZI, G., HAZZAN, S., DEGENSZAJN, D. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Vol.5. São Paulo: Atual Editora, 2004.

[4] LIMA, Elon Lages. *Análise Real*. vol. 1. Coleção Matemática Universitária. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[5] MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira et al., *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[6] NETO, Aref et al., *Noções de matemática: Combinatória, Matrizes e Determinantes*. v.4. Fortaleza: Vestseller, 2009.

[7] ROA, Rafael; NAVARRO-PELAYO, Virginia. *Razonamiento Combinatório e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad*. Jornadas europeas de estadística, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

[8] SABO, R. D. Mestrado em educação matemática. *Saberes Docentes: A análise combinatória no Ensino Médio*. São Paulo: PUC-SP, 2010.

[9] SANTOS, J.Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T.C. *Introdução à Análise Combinatória*. Campinas: Editora da Unicamp, 1998.