

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL - PROFMAT**

**ANGELINE MARIA CARTAXO MUNIZ**

**PROCEDIMENTOS UTILIZADOS POR ESTUDANTES DO NÍVEL MÉDIO**  
**TÉCNICO EM PROBLEMAS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS**  
**CONTEXTUALIZADOS E NÃO CONTEXTUALIZADOS**

Recife

2017

**ANGELINE MARIA CARTAXO MUNIZ**

**PROCEDIMENTOS UTILIZADOS POR ESTUDANTES DO NÍVEL MÉDIO  
TÉCNICO EM PROBLEMAS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS  
CONTEXTUALIZADOS E NÃO CONTEXTUALIZADOS**

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Anete Soares Cavalcanti

Co-orientador: Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento

Recife

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Nome da Biblioteca, Recife-PE, Brasil

M966p Muniz, Angeline Maria Cartaxo  
Procedimentos utilizados por estudantes do nível médio técnico em problemas de  
semelhança de triângulos contextualizados e não contextualizados / Angeline Maria  
Cartaxo Muniz. – 2017.  
113 f. : il.

Orientadora: Anete Soares Cavalcanti.  
Coorientadoras: Ross Alves do Nascimento.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de  
Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Recife, BR-  
PE, 2017.

Inclui referências, anexo(s) e apêndice(s).

1. Geometria 2. Matemática – Estudo e ensino – Análise de erros I. Cavalcanti,  
Anete Soares, orient. II. Nascimento, Ross Alves do, coorient.  
III. Título

CDD 510

ANGELINE MARIA CARTAXO MUNIZ

**PROCEDIMENTOS UTILIZADOS POR ESTUDANTES DO NÍVEL MÉDIO  
TÉCNICO EM PROBLEMAS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS  
CONTEXTUALIZADOS E NÃO CONTEXTUALIZADOS**

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 23 / 05 / 2017.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Anete Soares Cavalcanti (Orientador (a)) - UFRPE

---

Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento (Co-orientador (a)) - UFRPE

---

Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima – DMAT - UFPE

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Tarciana Maria Santos da Silva – PROFMAT - UFRPE

À Deus que por sua infinita graça e misericórdia permitiu a conclusão deste mestrado e desta pesquisa. Sem Ele nada disto seria possível.

“Nunca me deixes esquecer que tudo o que tenho, tudo o que sou e o que vier a ser, vem de Ti Senhor”.

Ana Paula Valadão

## AGRADECIMENTOS

À Deus, Senhor da minha vida. Àquele a quem sirvo e confio. Meu refúgio e baluarte eternamente.

Durante os dois anos de mestrado e todo o tempo de preparação, execução e conclusão deste trabalho, algumas pessoas foram direcionadas por Deus para serem suportes e auxiliadoras em todos os momentos. Agradeço, portanto:

- À professora orientadora Anete Soares Cavalcanti pela confiança, incentivo, orientação e compreensão depositados em todos os momentos;
- Ao professor co-orientador Ross Nascimento pela contribuição dada para a elaboração deste trabalho;
- Aos amigos do mestrado Emanuel Rodrigo, Erivaldo e Maurílio que foram incentivadores em todos os momentos de estudos, realização de provas, trabalhos e conclusão desta dissertação. Vocês foram força e estímulo de Deus para mim;
- Aos alunos do IFPE da turma de Segurança do Trabalho, pela disponibilidade para participar desta pesquisa. Sem eles este trabalho não poderia ter sido feito;
- À minha filha de coração e irmã Rute Muniz;
- Aos meus pais, Maria Tereza Cartaxo Muniz e Ivson Muniz da Silva e irmã, Karine Bizarria, pelas orações;
- Aos amigos Giuliano Arraes e Alessandra Arraes pelas orações;
- Aos amigos Karol e Thiago pelo incentivo, torcida, paciência e orações.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a sua produção ou construção. Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender”.

Paulo Freire

## RESUMO

O presente trabalho analisou os procedimentos utilizados nas Resoluções de Problemas Matemáticos sem contexto e com contexto, sobre Semelhança de Triângulos, por dezesseis estudantes do Instituto Federal de Pernambuco em Caruaru da turma de Segurança do Trabalho de Nível Técnico na modalidade do Ensino Médio. Após ministrações de aulas e resoluções de exercícios, sem contexto e com contexto, sobre o Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos, os participantes desta pesquisa fizeram uma atividade com quatro questões sem contexto, sendo duas sobre o Teorema de Tales e duas sobre a Semelhança de Triângulos e uma segunda atividade com quatro questões com contexto, com a mesma divisão por temas da primeira atividade. Estas atividades foram elaboradas de tal forma que para cada questão com contexto, foi criada uma sem contexto com enunciados sucintos, mesmas figuras e dados numéricos similares, denominadas por nós de questões equivalentes. Para nosso estudo escolhemos a Questão 3 da primeira atividade e a Questão 1 da segunda atividade, equivalentes e cujo conteúdo é sobre a Semelhança de Triângulos. A construção da análise realizada por este trabalho perpassa pelo saber geométrico; por dois modelos de questões de matemática, o sem contexto e o com contexto; pela utilização do Livro Didático adotado pela instituição de ensino, bem como de uma apostila elaborada pela pesquisadora; pela Resolução de Problemas; e pela análise de erros. Dessa forma, decidimos escrever sobre o ensino da Geometria no Brasil; sobre algumas avaliações matemáticas notáveis no Brasil e os modelos de questões matemáticas adotadas por elas; sobre o Livro Didático adotado; sobre os conceitos na Educação Matemática com relação a Resolução de Problemas, bem como ressaltar estudos importantes nesta área para o ensino da matemática; e sobre as ideias e conceitos de erro e análise de erros. Com relação ao tópico Resolução de Problemas esta pesquisa está mais próxima das ideias de Polya (1995) do que das ideias pós-Polya. A análise de erros dos instrumentos avaliativos, foram fundamentadas nas categorias de erros propostas por Makhubele (2014), utilizando como base no referencial da Psicologia Cognitiva para o papel do erro na aprendizagem, a teoria de reparo apresentada por Makhubele (2014) e tomamos como erro à resposta dada a uma questão, a definição sugerida por Cury (2010). Ao final, observamos que o conceito de Semelhança de Triângulos foi bem fundamentado pela maior parte dos estudantes; os dois modelos de questões, sem contexto e com contexto, para esta amostra, não proporcionou mais o erro ou o acerto, e sim a defasagem num conceito geométrico prévio sobre a menor distância de um ponto a uma reta; e a importância da semana separada para tirar dúvidas, entre as aplicações das duas atividades, no desempenho positivo dos discentes na questão selecionada da segunda atividade.

Palavras-Chave: Geometria; Análise de Erros; Resolução de Problemas; Questões com e sem contexto; Avaliações no Brasil; Livro Didático.



## ABSTRACT

This study seeks to analyze the procedures used in Solving Mathematical Problems with similar triangles, with and without a realistic context, by sixteen students attending the technical/vocational high school level program at Instituto Federal de Pernambuco in the city of Caruaru. After attending classes and doing problem-solving activities with and without realistic context on Thales' Theorem and Similarity of Triangles, the participants in this research did an assessment activity with four questions without realistic context, two on the Theorem of Tales and two on the Similarity of Triangles, and a second activity with four questions with realistic context, grouped by topics just like in the first activity. These activities have been prepared in such a way that for each question with context, another question without context was created, containing concise statements, using the same images and similar numerical data, and we called them equivalent questions. For this study, we chose Question 3 from the first activity and Question 1 from the second activity, considered equivalent, both on Similarity of Triangles. This study's analysis took into account: geometric knowledge; the use of two models of mathematical problems, one with context and the other without context; the use of didactic instruments and the books adopted by the educational institution; problem solving; and error analysis. Thus, we decided to write about the teaching of Geometry in Brazil, the mathematical assessments in Brazil, and the mathematical modeling used in such assessments; about textbooks adopted, and Mathematics Education concepts involved in problem solving, highlighting important studies for the teaching of mathematics; and about ideas and concepts of error and error analysis. Problem-solving techniques used in this research are based on Polya's ideas (1995) rather than in ideas developed after his time. Error analysis of assessment instruments was based on categories of errors proposed by Makhubele (2014), and also involved cognitive psychology benchmarks on the role of error in learning, repair theory by Makhubele (2014), and Cury's definition of Error (2010). In the end we have observed that: for the majority of the students, the understanding of the mathematics of similarity were well-grounded in; for this sampling, the lag in a previous geometric concept about the shortest distance from a point to a line, and not the two models, with and without context, was responsible for errors or accurate responses; and that having a week between the two assessment activities to answer students' questions, played an important role on their positive performance on the second activity.

Keywords: Geometry, Error Analysis, Problem Solving, problems with and without realistic context, Assessment in Brazil; School Book.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Ilustração sobre figuras semelhantes obtidas a partir do Atlas Geográfico Escolar. Rio de Janeiro. IBGE, 2007. ....	25
<b>Figura 2</b> - Exemplo resolvido sobre razão de semelhança. ....	26
<b>Figura 3</b> - Exemplo resolvido sobre semelhança entre triângulos. ....	27
<b>Figura 4</b> - Questão equivalente à questão com contexto utilizada nesta pesquisa. ....	28
<b>Figura 5</b> - Questão sem contexto. ....	35
<b>Figura 6</b> - Questão com contexto. ....	36
<b>Figura 7</b> - Instituto Federal de Pernambuco, Campus Caruaru. ....	43
<b>Figura 8</b> - Primeira folha da atividade sem contexto. ....	45
<b>Figura 9</b> - Segunda folha da atividade sem contexto. ....	46
<b>Figura 10</b> - Primeira folha da atividade com contexto. ....	47
<b>Figura 11</b> - Segunda folha da atividade com contexto. ....	48
<b>Figura 12</b> - Terceira folha da atividade com contexto. ....	49
<b>Figura 13</b> - Resolução da questão sem contexto. ....	53
<b>Figura 14</b> - Resolução da questão com contexto. ....	54
<b>Figura 15</b> - Representação correta da menor distância do ponto A à semirreta DE. ....	56
<b>Figura 16</b> - Representação errada da menor distância do ponto A à semirreta DE. ....	56
<b>Figura 17</b> - Desenvolvimento do aluno A8. ....	57
<b>Figura 18</b> - Desenvolvimento dos alunos A4 e A6. ....	58
<b>Figura 19</b> - Desenvolvimento dos alunos A3. ....	58
<b>Figura 20</b> - Desenvolvimento do aluno A16. ....	59
<b>Figura 21</b> - Desenvolvimento do aluno A4. ....	60
<b>Figura 22</b> - Desenvolvimento do aluno A3. ....	61
<b>Figura 23</b> - Desenvolvimento do aluno A9. ....	61
<b>Figura 24</b> - Desenvolvimento do aluno A5. ....	63
<b>Figura 25</b> - Representação correta da menor distância do ponto Y à semirreta PR. ....	65
<b>Figura 26</b> - Representação incorreta da menor distância do ponto Y à semirreta PR. ....	65
<b>Figura 27</b> - Desenvolvimento do aluno A1. ....	66
<b>Figura 28</b> - Desenvolvimento do aluno A8. ....	67
<b>Figura 29</b> - Desenvolvimento do aluno A14. ....	68
<b>Figura 30</b> - Cálculo do aluno A6 ao desenvolver a proporção da questão com contexto. ....	69
<b>Figura 31</b> - Desenvolvimento do aluno A16. ....	70
<b>Figura 32</b> - Desenvolvimento do aluno A2. ....	71

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> - Categorias de erros dos alunos .....	51
<b>Tabela 2</b> - Categorias de erros .....	51
<b>Tabela 3</b> - Relação entre os cinco procedimentos dos alunos na questão sem contexto e os grupos de Categorias de erros propostos por Makhubele (2014).....	55
<b>Tabela 4</b> - Relação entre os cinco procedimentos dos alunos na questão com contexto e os grupos de Categorias de erros propostos por Makhubele (2014).....	64
<b>Tabela 5</b> - Relação dos instrumentos avaliativos com os procedimentos dos alunos na questão sem contexto e na com contexto e os grupos das Categorias de erros de Makhubele (2014). ...	73
<b>Tabela 6</b> - Percentuais de alunos que erraram ou acertaram cada um dos modelos de questões. ....	77

## LISTA DE GRÁFICOS

<b>Gráfico 1</b> - Frequência relativa de cada questão com relação aos Procedimentos dos alunos, as Categorias de erros dos alunos e as Categorias de erros.....	75
<b>Gráfico 2</b> - Análise quantitativa com relação aos acertos e erros da questão sem contexto e com contexto. ....	77

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	13
2	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	17
2.1	ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL .....	17
2.2	AVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA NO BRASIL .....	19
2.2.1	<b>O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)</b> .....	19
2.2.2	<b>O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)</b> .....	21
2.2.3	<b>O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA)</b> .....	22
2.3	ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO .....	23
2.4	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS .....	28
2.5	ANÁLISES DE ERROS.....	37
3	<b>METODOLOGIA</b> .....	43
3.1	AMBIENTE DA PESQUISA.....	43
3.2	CARACTERÍSTICAS DOS SUJEITOS .....	44
3.3	AS ATIVIDADES TRABALHADAS NA PESQUISA .....	44
3.4	A APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES: COLETA DOS DADOS .....	50
3.5	ANÁLISE DOS DADOS .....	50
3.6	ANÁLISE DA QUESTÃO SEM CONTEXTO .....	55
3.7	ANÁLISE DA QUESTÃO COM CONTEXTO .....	64
4	<b>RESULTADOS DA PESQUISA</b> .....	73
5	<b>CONCLUSÃO</b> .....	79
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	81
	<b>APÊNDICE</b> .....	85
	<b>ANEXOS</b> .....	107

## 1 INTRODUÇÃO

Nosso trabalho se fundamenta na análise dos procedimentos de alunos do Instituto Federal de Pernambuco (IFPE), em Caruaru, do curso Técnico na modalidade do Ensino Médio, frente a questões sem e com contexto, que focam em Semelhança de Triângulos, pois percebemos dificuldades de muitos estudantes, durante nossa carreira docente, na Resolução de Problemas de Matemática, no qual o contexto estava repleto de textos longos, e outro fato é que as propostas de avaliação: Prova Brasil (SAEB), o PISA e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) vêm buscando inserir essa forma contextualizada. É importante lembrar que o ENEM está servindo como avaliação seletiva para a maioria das Universidades Federais do Brasil e até o ano de 2016 era considerado como certificação para a conclusão do Ensino Médio e o SAEB e o PISA tem por objetivo avaliar o aprendizado em Matemática dos alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio a nível nacional e internacional, respectivamente.

Atualmente tem-se dado ênfase na contextualização das questões, sem a preocupação de o contexto ser meramente ilustrativo ou ter um papel de contribuição para a aprendizagem matemática. Em sua dissertação, Carrocino (2014) comenta sobre a interpretação errada da associação do contexto com textos longos e cansativos e que “a ideia de contextualizar está direta e unicamente associada à aplicação de conteúdos em situações do dia a dia. Essa ideia pode ser relevante, porém não é a única e nem sempre a mais importante na contextualização como um todo”. (MARCO; HOMERO, 2014 apud CARROCINO, 2014, p. 13). Diante disto, tomamos como parâmetro de questões contextualizadas, as consideradas questões-padrão do ENEM, ou seja, com textos longos e aplicações de situações do dia a dia, e propomos aos educandos a resolução de uma questão, com contexto, presente no processo seletivo 2012.1 do Instituto de Ensino e Pesquisa (INSPER).

Por questões sem contexto, consideramos serem aquelas cujos enunciados normalmente não são extensos e onde os dados são facilmente encontrados, a interpretação em geral é menos trabalhosa e a pergunta direta. Muitas vezes são fornecidas nos enunciados, no caso de questões de Geometria, as figuras necessárias para a resolução. Por questão com contexto, consideramos serem aquelas cujos enunciados normalmente são mais extensos, onde alguns dados nem sempre são facilmente encontrados, a interpretação mais detalhada, a pergunta não é facilmente visualizada, nem sempre as figuras são fornecidas, é preciso relacionar entes matemáticos com outros conhecimentos, frequentemente com situações do cotidiano.

Estruturamos nosso trabalho na Geometria, pois, “segundo Lorenzato (1995) o ensino de Geometria é importante pela grande possibilidade de contextualização e

interdisciplinaridade ou mesmo pela aplicação em outros tópicos da Matemática”. (PEREIRA. M; MACIEL. S, 2016). Escolhemos o tópico de Semelhança de Triângulos como assunto abordado pela questão com contexto, pois ele é pré-requisito para a construção de outros conteúdos da Matemática, como também, para alguns da Física por ser “um dos conteúdos que permite compreender e interpretar fenômenos naturais” (ALMOULOUD; MACIEL, 2009, p. 1), possibilitando, dessa forma, um leque enorme de aplicações no dia a dia, e, por fim, neste semestre tal conteúdo estava presente na ementa da turma onde foi realizada a pesquisa.

Diante disto achamos importante, em nosso trabalho, apresentar uma Fundamentação Teórica baseada nos seguintes tópicos:

- O Ensino da Geometria no Brasil, onde trataremos sobre este ensino no período colonial do Brasil, na época do Movimento da Matemática Moderna e na época do Movimento da Educação Matemática.
- A Avaliação em Matemática no Brasil, onde descreveremos sobre o SAEB, o PISA e o ENEM, falando sobre: suas origens, objetivos, funcionalidades e tipos de provas.
- A Análise do Livro Didático, onde perpassaremos pelas ideias de estudiosos como Pavão (2011), Chervel (1991), Brandt (2012) e Kluppl (2012), sobre a importância e funcionalidade do Livro Didático e analisaremos no Livro Didático, adotado pelo IFPE, o capítulo que aborda a Semelhança de Triângulos.
- A Resolução de Problemas, onde trataremos inicialmente sobre as ideias presentes nos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares (PCN+, 2000) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2016), no que diz respeito a relevância de Resolver Problemas no processo de ensino e aprendizagem, a diferença entre resolver exercícios padrões e Resolver Problemas, e sobre a contextualização dos Problemas Matemáticos. Achamos interessante mostrar as abordagens de alguns estudiosos sobre a definição de Problemas; falar sobre a diferença existente entre “ensinar sobre Resolver Problemas”, “ensinar para Resolver Problemas” e “ensinar através da Resolução de Problemas”; e, por fim, mencionar estudos sobre a importância da Geometria na Resolução de Problemas.
- A Análise de Erros, onde traremos as ideias de Cury (2006, 2010) sobre avaliações e erros, bem como a importância e perigos dos erros no processo de ensino-aprendizagem. Descreveremos diferentes definições de alguns estudiosos da Educação Matemática sobre o erro; as diferentes categorias de erros presentes em algumas pesquisas sobre análise de erros como as de Makhubele (2014), onde nossa pesquisa se fundamenta; e as diferentes concepções,

nos estudos da Educação e da Educação Matemática, com base no referencial da Psicologia Cognitiva para o papel do erro na aprendizagem.

Finalmente, gostaríamos de observar se o fato da questão contextualizada com fatos do dia a dia, em possuindo um texto longo, que requer interpretação de texto e leitura detalhada, influenciaria positivamente ou negativamente no desempenho do aluno no processo de resolução da questão, bem como, na aplicabilidade do conteúdo sobre Semelhança de Triângulos, ministrado em sala. Disponibilizamos para os alunos uma questão sem contexto e uma com contexto e realizamos uma análise criteriosa em seus procedimentos resolutivos fundamentamo-nos nas ideias de Makhubele (2014) para análise de erros, utilizando suas categorias de erros que são subdividas em: Categoria de erros dos alunos (**Tabela 1**) e Categoria de erros (**Tabela 2**).



## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo destacamos algumas compreensões advindas da literatura relacionada aos conhecimentos do ensino de Matemática que tratam sobre o ensino da Geometria no Brasil; a avaliação em Matemática no Brasil; a análise do capítulo de Semelhança de Triângulos presente no Livro Didático adotado pelo IFPE, como também sobre o Livro Didático nas instituições de ensino; a Resolução de Problemas; e a Análise de Erros.

### 2.1 ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL

A Geometria no período colonial do Brasil não era muito valorizada. Segundo Valente (1999) era considerada um divertimento vazio, um conhecimento infrutífero por ele mesmo. Nesta época dizia-se que “os homens não serviam para medir linhas e para examinar a relação entre ângulos, seu espírito era muito grande, a vida muito curta, seu tempo muito precioso para se ocupar de tão pequenas coisas”. (DAINVILLE apud VALENTE, 1999, p.35 apud ESTEPHAN; MOCROSKY; MONDINI, 2012, p. 2).

Ferreira (2005) escreve que com a expulsão dos Jesuítas, o Brasil passa por um momento bem precário na educação. Um tempo depois foram instituídas as Aulas Régias – aulas de disciplinas isoladas – em que, embora ainda sendo muito precárias, a Geometria era ensinada, mas pouco frequentada. Em 1837, o Colégio Pedro II foi criado e neste momento a Geometria, Aritmética e Álgebra passam a fazer parte do currículo das oito séries do curso. Nesta época duas obras foram criadas, uma voltada para o ensino de artilharias, escrita pelo Sargento-Mor José Fernandes Pinto Alpoim e a outra intitulada “Elementos da Geometria”, escrita pelo Marques de Paranaguá e adotada para o ensino de Geometria neste colégio. O objetivo do ensino da Geometria, bem como da Aritmética e Álgebra, no período colonial, era “formar uma sólida base para futuros estudos de engenharia militar, navegação e arquitetura naval”. (CASTRO, 1953, p. 47 apud FERREIRA, 2005, p. 3).

Neste período o ensino era centralizado no professor e o papel do aluno, reproduzir o que foi ensinado. A educação era elitista: para a elite ensinava-se a Geometria Euclidiana racional e rigorosa, para as classes menos favorecidas, o ensino técnico, focado no cálculo. Apesar de não termos estudos aprofundados de como essa geometria era ensinada, ela sempre esteve presente no Brasil. (FERREIRA, 2005).

Ferreira (2005) afirma que posteriormente, no início da década de 30, a educação brasileira sofreu bastante influência do Movimento Internacional da Escola Nova, cuja ideia estava centrada num ensino para resolver problemas da vida real do educando e no lema “aprender a aprender”. Nesta época o ensino da Matemática já vinha sofrendo influências do Movimento Internacional para a Modernização da Matemática, cujo objetivo era integrar os conteúdos matemáticos e o avanço científico e tecnológico que ocorriam no mundo. Foi neste momento que ocorre a unificação dos tópicos: Geometria, Aritmética e Álgebra e o ensino passa a ser mais democrático. Novos livros didáticos foram elaborados contemplando os conteúdos de Geometria num formato dedutivo.

O Movimento da Matemática Moderna surge a partir dos avanços tecnológicos ocorridos no mundo por volta da década de 50. As correntes que fundamentavam este movimento eram:

as extensões da noção de número e o aparecimento da álgebra abstrata; o aparecimento das geometrias não-euclidianas e a axiomatização da geometria; o desenvolvimento da teoria dos conjuntos e da lógica; e a aritmetização da análise e a percepção da necessidade de rigor nesta área. (CARVALHO, 1998 apud BERTI, 2005, p. 9).

É um momento onde dá-se lugar a Matemática Pura. Período de grande discussão sobre o ensino da Matemática através de grupos de pesquisas espalhados pelo Brasil, de crescentes produções de livros didáticos e aprendizagem pelos alunos sobre esta nova Matemática. Ele trouxe uma abordagem para a Geometria baseada em raciocínio lógico, estruturas axiomáticas, processos dedutivos e promove uma reestruturação do ensino ao incluir na Geometria Euclidiana uma linguagem de conjuntos, gerando uma dificuldade por parte dos professores ao ensinar este conteúdo, já que não houve tempo de aperfeiçoamento por parte destes; na aprendizagem e interesse por meio dos alunos; e na exclusão, na maioria das vezes, deste conteúdo das salas de aulas, bem como, na sua discriminação nos livros didáticos quando passa a ocupar seus últimos capítulos.

na década de 70 surgem críticas ao Movimento da Matemática Moderna. Morris Kline em seu livro “ O Fracasso da Matemática Moderna” (1976, p.72), comenta: “Os líderes da Matemática Moderna não se satisfazem com uma abordagem dedutiva da Matemática. Desejam apresentar um desenvolvimento dedutivo rigoroso”. Crítica, ainda, que a Geometria de Euclides, substituída pela Geometria não-euclidiana, é dedutiva, porém, não rigorosa. Para Kline, os modernistas tornaram a Geometria muito rigorosa, oferecendo axiomas adicionais para provar uma afirmação óbvia pelo raciocínio dedutivo, acabando por afastar os jovens, em vez de aproximá-los. (FERREIRA, 2005, p. 7).

“ A partir desse movimento a Geometria assume posição secundária no ensino, é o início do esquecimento desses conteúdos na prática das salas de aula”. (PAVANELLO, 1993 apud ESTEPHAN; MOCROSKY; MONDINI, 2012, p. 8).

Percebe-se que o Movimento da Matemática Moderna não estava promovendo aprendizagem significativa para os educandos. Ao invés de aproximar os estudantes dos conteúdos matemáticos, os distanciava cada vez mais. Os estudiosos começaram a argumentar sobre a qualidade e os objetivos do ensino da Matemática. É quando, na década de setenta, o Movimento da Educação Matemática começa a tomar espaço, a partir de diversos grupos de pesquisa que se baseavam nos desenvolvimentos psicológicos do ser humano e nas influências de Piaget.

Diante deste histórico, entende-se o porquê de a Geometria ainda ser um dos tópicos mais discriminados da Matemática. Embora atualmente, venha ganhando espaço significativo tanto nas ministrações desse conteúdo em sala de aula, quanto na presença dele em capítulos iniciais dos livros didáticos e tanto nas produções científicas.

para Fainguelernt (1999), o estudo da Geometria é de fundamental importância para o desenvolvimento do pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para a leitura do mundo e para que visão da Matemática não fique distorcida. (NASCIMENTO; PINHEIRO; SILVA; 2009, p. 1031).

## 2.2 AVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA NO BRASIL

Nesta subseção apresentaremos e descreveremos sobre três avaliações em Matemática desenvolvidas e aplicadas no Brasil, são elas: ENEM, SAEB e PISA. Dissertaremos sobre suas origens, importâncias, público alvo e modelos de questões de Matemática presentes em cada uma delas.

### 2.2.1 O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)

As modificações no sistema educacional de um país, geralmente são acompanhadas de implantações de modelos de avaliações cujas finalidades variam desde a avaliação individual de cada estudante, passando pela avaliação de cursos, instituições e até mesmo do sistema educacional como um todo. Essa é uma discussão levantada por Schwartzman (SOUZA, 2005), quando afirma que: “Educação e avaliação sempre andam de mãos dadas, sendo peculiar à

educação, a avaliação está relacionada ao desenvolvimento de sistemas complexos, no qual se busca resultados para diversos fins” (SOUZA, 2005, p. 15).

Atualmente o caminho de transição dos estudantes do Ensino Básico para as universidades, em alguns países, é marcado pelo emprego de teste e provas cujo papel é informar às instituições analisadoras se o educando está apto para concluir o ensino básico, ingressar na educação superior e/ou fazer parte do seu grupo de discentes.

Segundo Schwartzman (SOUZA, 2005), nos Estados Unidos, o *Scholastic Aptitude Test* (SAT) e o *American College Test* (ACT), que são provas de múltipla escolha e denominadas por *high stakes*, avaliações de alto risco no sentido de serem classificatórias, destacam-se como exames que buscam avaliar a capacidade do aluno em como se sair bem num provável curso universitário e, não necessariamente, se ele aprenderá os conteúdos específicos trabalhados nos cursos de nível médio. Esses exames apesar de voluntários, são requeridos pela maioria das instituições de nível superior, como parte de seus processos de seleções de alunos.

No Brasil, desde 1998, trabalha-se com o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), assemelhando-se a mesma metodologia vivenciada no modelo norte americano. O ENEM era um exame voluntário composto por 63 questões interdisciplinares, cujo objetivo era avaliar as competências e habilidades desenvolvidas pelos estudantes, durante a educação básica. Posteriormente, os resultados das provas do ENEM foram sendo adotados por instituições, como parte da nota classificatória de algumas universidades do país. Outro fato é que após o Programa Universidade para Todos (ProUni, 2004), a nota do ENEM passou a ser vinculada a concessão de bolsas de estudos, e em 2009 passa a ser uma das principais vias de ingresso nas Universidades Federais do país, recebendo um rótulo de NOVO ENEM.

O NOVO ENEM passa por uma reformulação na sua Matriz de Referência, estruturando-se em quatro áreas do conhecimento: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias, onde cada uma contempla suas respectivas competências e habilidades. Todas as questões desta prova são contextualizadas.

Segundo PCN+ (Brasil, 2000) o ensino da matemática, antes focado em apenas definições, conceitos, aplicações de fórmulas e resolução de problemas, deve explorar os conteúdos não apenas que se integrem com as demais disciplinas, como também consigam refletir situações do cotidiano e, dessa forma, promover autonomia, argumentação, reflexão, criatividade e interpretação no estudante, desenvolvendo nele as competências e habilidades propostas que:

são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2000, p. 111).

### 2.2.2 O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)

Conforme o site do INEP (2015), O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) tem por objetivos avaliar a qualidade da educação básica, o acesso à escola, a formulação, a reformulação e o monitoramento das políticas públicas para a educação básica. Este sistema fornece dados e indicadores do desempenho dos alunos nas áreas e anos escolares. O SAEB teve início em 1990 com a participação de algumas escolas públicas da rede urbana que ofertavam a 1º, 3º, 5º e 7º séries do Ensino Fundamental. A prova contemplava as disciplinas de Português, Matemática e Ciências.

Atualmente esta prova é subdividida em três: Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEAB) e Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (ANRESC), que começaram a serem aplicadas juntas em 2005 e a Avaliação Nacional de Alfabetização (ANA), sendo aplicada juntamente com as outras só em 2013. As duas primeiras são bianuais e a terceira, anual. Nos deteremos apenas na ANEB, já que é a avaliação que engloba estudantes do Ensino Médio.

A ANEB tem por finalidade avaliar a equidade, qualidade e eficiência da educação brasileira. É uma avaliação amostral e abrange escolas da rede pública e privada das áreas urbanas e rurais que contemplam o 5º ano e 9º ano do Ensino Fundamental e o 3º ano do Ensino Médio. Nesta prova são contemplados os conteúdos de Língua Portuguesa, com foco em leitura, e de Matemática, com foco em Resolução de Problemas (questões com contexto), e só a partir de 2013 foi inserido o conteúdo de Ciências.

é possível afirmar que um aluno desenvolveu uma habilidade (constante em um descritor) quando ele é capaz de resolver um problema a partir da utilização e aplicação de um conceito por ele já construído. Por isso, a prova busca apresentar, prioritariamente, situações em que a resolução de problemas seja significativa para o aluno. Por problemas significativos para o aluno entendem-se situações que permitam "recontextualizar" os conhecimentos que foram apresentados a ele de forma "descontextualizada", por ocasião de seu processo de aprendizagem. (BRASIL, 2015).

Analisando a Evolução dos Resultados do Brasil no SAEB (2005-2015), percebemos que a proficiência média em Matemática, com relação ao Ensino Médio teve uma queda no período de 2011 a 2015. Com relação a proficiência média, por estado, nesta categoria de

ensino, nos anos de 2013 e 2015, embora Pernambuco tenha estado abaixo da média, de 2013 a 2015 vivenciou um aumento.

Os dados do SAEB com relação à construção de competências e desenvolvimento de habilidades na Resolução de Problemas mostram que:

os alunos desenvolvem algumas habilidades elementares de interpretação de problemas, mas não conseguem transpor o que está sendo pedido no enunciado para uma linguagem matemática específica estando, portanto, muito aquém do exigido em cada série avaliada. (SOUSA, 2005, p. 2).

### 2.2.3 O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA)

O *Programme for International Student Assessment* (PISA) – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes é uma avaliação aplicada para estudantes cuja faixa etária é de 15 anos, idade em que os alunos concluem a escolaridade obrigatória na maioria dos países. É desenvolvido e coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), sendo em cada país gerenciado por um órgão, portanto, no Brasil, o responsável é o Instituto Nacional de Educação e Pesquisa (INEP). “Seu objetivo é produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria do ensino básico”. (BRASIL, 2015).

as avaliações do PISA acontecem a cada três anos e abrangem três áreas do conhecimento – Leitura, Matemática e Ciências – havendo, a cada edição do programa, maior ênfase em cada uma dessas áreas. Em 2000, o foco foi em Leitura; em 2003, Matemática; e em 2006, Ciências. O PISA 2009 iniciou um novo ciclo do programa, com o foco novamente recaindo sobre o domínio de Leitura; em 2012, é novamente Matemática; e em 2015, Ciências, além da inclusão de novas áreas do conhecimento: Competência Financeira e Resolução Colaborativa de Problemas. (BRASIL, 2015).

Esta avaliação propõe alunos ativos na Resolução de Problemas. Segundo a Matriz de Avaliação de Matemática – PISA 2012, “um indivíduo quando trabalha na solução de um problema contextualizado, ativa suas capacidades fundamentais da matemática, simultaneamente e sucessivamente, recorrendo a conteúdos matemáticos até encontrar a solução” (BRASIL, 2012). Enfatiza a necessidade de numa sala de aula oferecer meios significativos para a construção do conhecimento matemático de forma contextualizada, o que denomina letramento matemático:

letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar, e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias. (PISA, 2012).

Um comentário sobre o PISA é destacado por Sousa (2005), quando afirma que:

de acordo com o PISA, o aluno apresenta dificuldade em recuperar e transformar um dado matemático e a origem desta dificuldade pode estar na leitura e transformação da linguagem matemática, portanto, a leitura ultrapassa a aprendizagem em língua materna e requer uma sistematização por todos os envolvidos no processo de ensino, considerando fundamental trabalhar em sala de aula a resolução de problemas para um “resgate” da linguagem matemática. (SOUSA, 2005, p. 2).

### 2.3 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

O Livro Didático é um documento de ensino que está presente em quase todas as instituições da educação básica, a partir do programa do livro didático. Para os professores, serve como instrumento pedagógico orientador na elaboração de aulas e para o aperfeiçoamento dos conteúdos ministrados em sala de aula.

Segundo Pavão (2011 apud BRANDT; KLUPPL, 2012, p. 1), “existe por parte dos professores, falta de tempo, de condições financeiras, de formação para utilizarem outros materiais de pesquisa e a falta de atualização em relação a seu campo profissional, de modo à”:

contribuir para que o professor organize sua prática e forneça sugestões de aprofundamento das concepções pedagógicas desenvolvidas na escola. O livro deve oferecer uma orientação para que o professor busque, de forma autônoma, outras fontes e experiências para complementar seu trabalho. Deve garantir ao professor liberdade de escolha e espaço para que ele possa agregar ao seu trabalho outros instrumentos. E o professor não pode se transformar em refém do livro, imaginando encontrar ali todo o saber verdadeiro e a narrativa ideal. (PAVÃO, 2007, p. 4 apud BRANDT; KLUPPL, 2012, p. 1).

“O Livro Didático é um dos recursos quase sempre presentes no ensino da matemática, onde funciona como fonte de referência para validação do saber escolar. Quer seja por parte do aluno ou professor”. (CHERVEL, 1991 apud NASCIMENTO; PINHEIRO; SILVA, 2009, p. 1029).

Para Lauro (2007), “o livro didático é uma fonte de pesquisa rica para a elaboração de conjecturas a respeito do tipo de ensino a ser desenvolvido”. (LAURO, 2007 apud BRANDT; KLUPPL, 2012, p. 2).

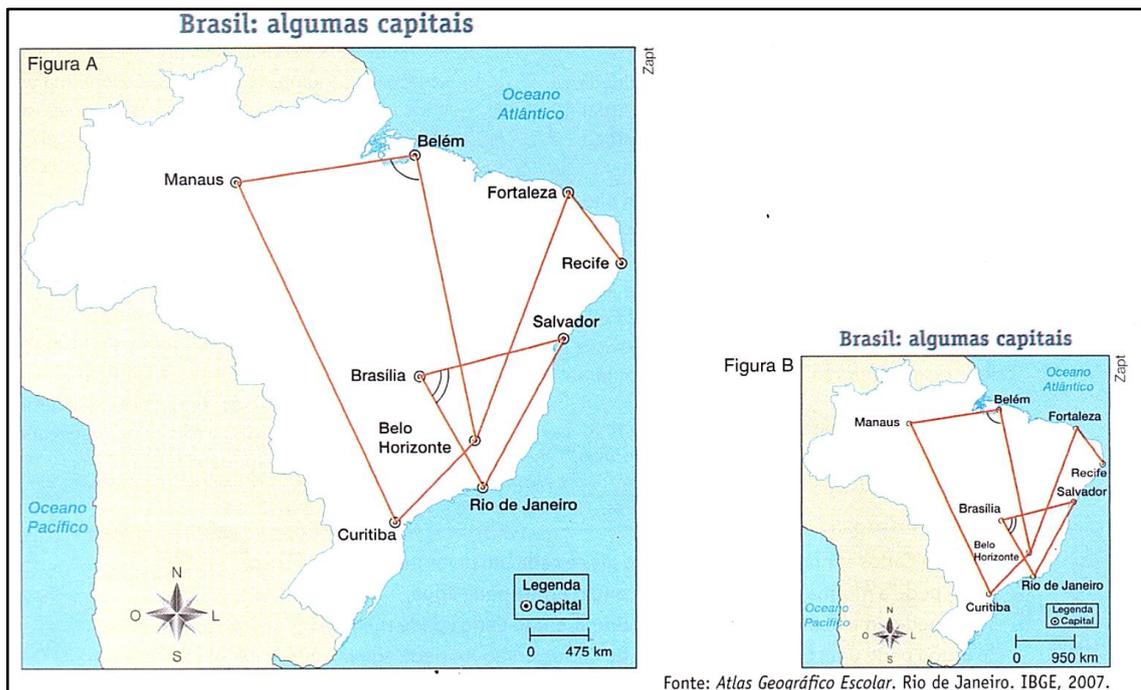
Por fim, o livro didático “constitui-se em referencial indispensável para quem deseja saber como a matemática chega à sala de aula”. (IMENES, 1989, p. 65 apud BRANDT; KLUPPL, 2012, p. 2).

Nesta perspectiva analisamos o Livro Didático adotado pelo Instituto Federal de Pernambuco de Caruaru, e utilizado pelos educandos da turma do quinto período de Segurança do Trabalho do nível técnico, na modalidade do Ensino Médio. Esta análise se dará em identificar os tipos de questões presentes neste Livro Didático para o tema de: *Semelhança de Triângulos*, se sem contexto ou com contexto e se são equivalentes às que foram feitas pelos instrumentos avaliativos desta pesquisa. Também analisaremos a forma como foi introduzido este tema e subtemas: *teorema fundamental da semelhança* e os *casos de semelhança*.

O Livro Didático adotado por esta instituição é o *Matemática, Ciência e Aplicações* (ALMEIDA; DEGENSZAJN; DOLCE; IEZZI; PÉRIGO, 2013, v. 1, ed. 7). Este livro é subdividido em quatorze capítulos, em que o décimo segundo e o décimo terceiro são os referentes à Geometria: *Semelhança e Triângulo Retângulo* e *Trigonometria no Triângulo Retângulo*, respectivamente.

Os autores iniciam o capítulo doze com uma situação-problema que envolve a ideia de semelhança entre figuras, onde são mostradas as figuras de dois mapas A e B, sendo B a redução do mapa A (**Figura 1**). Nestes mapas são traçados segmentos de retas ligando pontos correspondentes à algumas cidades dos mapas. É importante ressaltar que as cidades consideradas no mapa A, são as mesmas consideradas no mapa B. Introduzem a ideia de razão de semelhança entre as medidas dos respectivos segmentos de retas traçados nos mapas, e no final conclui dizendo que: [...] *quando em duas figuras as medidas lineares correspondentes são proporcionais e as medidas angulares correspondentes são congruentes, dizemos que as figuras são semelhantes*.

**Figura 1-** Ilustração sobre figuras semelhantes obtidas a partir do Atlas Geográfico Escolar. Rio de Janeiro. IBGE, 2007.



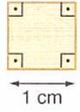
Fonte: Livro Didático: Matemática, Ciência e Aplicações (ALMEIDA; DEGENSZAJN; DOLCE; IEZZI; PÉRIGO, 2013, v. 1, ed. 7, p. 236)

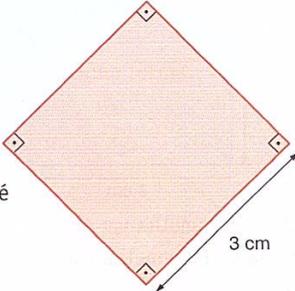
Após a explicação deste tema, foram colocados quatro exemplos resolvidos, todos com o objetivo de encontrar a razão de semelhança entre figuras (quadrados, círculos, retângulos e paralelepípedos). Observamos que em todos os exemplos o enunciado garante a semelhança entre as figuras e apenas no primeiro exemplo mostra que a razão de semelhança pode ser calculada da figura maior para a figura menor e vice-versa (**Figura 2**). Os exercícios propostos aos alunos envolvem a aplicação de escalas, encontrar as medidas dos lados de figuras conhecidas ou desconhecidas a partir da razão de semelhança fornecida ou não, como é o caso de uma questão onde o aluno precisaria encontrar a razão de semelhança através das medidas dos perímetros e a ideia de semelhança entre triângulos isósceles dado o ângulo do vértice.

**Figura 2** - Exemplo resolvido sobre razão de semelhança.

**Exemplo 1**

Dois quadrados quaisquer são semelhantes.

①  1 cm

②  3 cm

A razão de semelhança entre os quadrados ① e ② é

$$\frac{1 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{1}{3}.$$

Poderíamos também ter calculado a razão de semelhança entre os quadrados ② e ①, nessa ordem, obtendo  $\frac{3 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 3$ , que é o inverso de  $\frac{1}{3}$ .

Fonte: Livro Didático: Matemática, Ciência e Aplicações (ALMEIDA; DEGENSZAJN; DOLCE; IEZZI; PÉRIGO, 2013, v. 1, ed. 7, p. 237)

Após este tópico sobre “*Semelhança entre Figuras*”, se inicia outro tópico: “*Semelhança entre Triângulos*” (ver **Anexo A**, p. 239). A introdução para este tópico é estritamente tradicional, ou seja, são apresentados dois triângulos, um menor e outro maior, onde são conhecidas, através dos símbolos, a congruência dos respectivos ângulos e as medidas dos seus respectivos lados, os opostos aos ângulos correspondentes congruentes. Estabelecendo a razão entre as medidas dos lados correspondentes, observa-se que tais razões são iguais, portanto, os autores concluem que os triângulos são proporcionais e definem da seguinte maneira a Semelhança entre Triângulos: *Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.*

Em seguida define *Razão de Semelhança para Triângulos Semelhantes* (ver **Anexo A**, p. 240), dizendo: *Quando dois triângulos são semelhantes, a razão entre as medidas dos lados correspondentes é chamada razão de semelhança.* A partir desta definição demonstra o *Teorema de Tales* e consequentemente o *Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos* (ver **Anexo A**, p. 241-242), dizendo: *Toda reta paralela a um lado de um triângulo, que intercepta os outros dois lados em pontos distintos, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.* Depois destas demonstrações existe um exemplo resolvido, envolvendo a reprodução do *Teorema Fundamental da Semelhança*.

No terceiro tópico são abordados os casos de semelhança entre triângulos, denominados neste livro de *Critérios de Semelhança* (ver **Anexo A**, p. 243-245). O primeiro, considerado por AA (*ângulo – ângulo*) é demonstrado e conclui-se da seguinte maneira: *Se dois triângulos*

possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes; o segundo, considerado por LAL (lado – ângulo – lado) é iniciado com a definição: *Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes* e posteriormente é demonstrado; e o terceiro, considerado LLL (lado – lado – lado) também é iniciado com a definição: *Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes* e posteriormente é demonstrado. Em seguida, existem dois exemplos comentados e um exercício resolvido (**Figura 3**), todos considerados por nós *sem contexto* já que não relaciona os entes matemáticos com o cotidiano do aluno e/ou outros conhecimentos. Com relação aos exemplos, o primeiro, reproduz o primeiro caso de semelhança e o segundo, reproduz o terceiro caso de semelhança; já o exercício, aborda o primeiro caso de semelhança. Finalizando este tópico, são disponibilizados para os alunos nove exercícios (ver **Anexo A, p. 246**), onde apenas um é *com contexto* e sem figura, descrito a seguir para o leitor: *Determine a altura de um prédio cuja sombra tem 15 m no mesmo instante em que uma vara de 6 m, fncada em posição vertical, tem uma sombra de 2 m.* (p. 246).

**Figura 3** - Exemplo resolvido sobre semelhança entre triângulos.

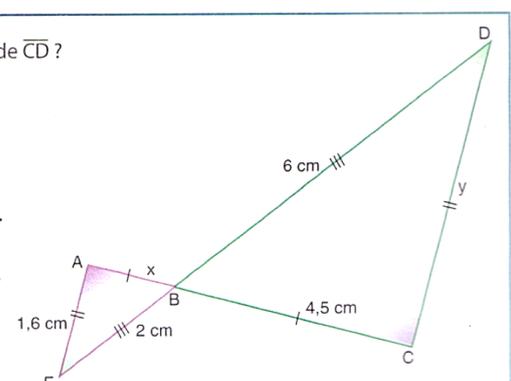
**Exercício resolvido**

**1.** Sabe-se que  $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$ . Quais são as medidas  $x$  de  $\overline{AB}$  e  $y$  de  $\overline{CD}$  ?

**Solução:**  
 Como  $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$ , há dois pares de ângulos alternos internos congruentes:  
 $B\hat{A}E = B\hat{C}D$  e  $B\hat{E}A = B\hat{D}C$   
 Há também  $A\hat{B}E = C\hat{B}D$  (ângulos opostos pelo vértice).  
 Assim, temos  $\triangle ABE \sim \triangle CBD$ .  
 Podemos escrever a proporcionalidade entre as medidas dos lados homólogos:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AE}{CD} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{x}{4,5} = \frac{1,6}{y} = \frac{2}{6}$$

Vem, então,  $x = \frac{2 \cdot 4,5}{6}$ , isto é,  $x = 1,5$  cm, além de  $y = \frac{6 \cdot 1,6}{2}$ , ou seja,  $y = 4,8$  cm.



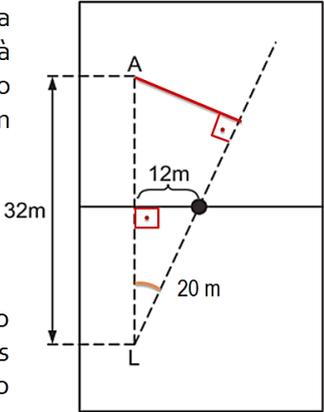
Fonte: Livro Didático: Matemática, Ciência e Aplicações (ALMEIDA; DEGENSZAJN; DOLCE; IEZZI; PÉRIGO, 2013, v. 1, ed. 7, p. 245)

Durante as aulas destinadas para este assunto trabalhamos com os estudantes como fonte de estudo, além do Livro Didático (ver **Anexo A**), uma apostila baseada no ensino da Geometria Plana (ver **Apêndice C**) e slides no Power Point, elaborados pela própria pesquisadora para explorar outras formas de exercícios e de metodologia de ensino sobre Semelhança de

Triângulos. Os problemas sugeridos na apostila são sem contexto, apenas para reprodução do conhecimento adquirido, já os problemas sugeridos nos slides são com contexto, sendo um deles (**Figura 4**) tendo uma abordagem e construção idêntica à Questão 1 da segunda atividade analisada nesta pesquisa.

**Figura 4** - Questão equivalente à questão com contexto utilizada nesta pesquisa.

Um lateral L faz um lançamento para um atacante A, situado 32 m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e quando passa pela linha de meio do campo está a uma distância de 12 m da linha que une o lateral ao atacante.



Sabendo – se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de:

Fonte: Slides elaborados pela pesquisadora.

## 2.4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A história da humanidade é marcada pela dinâmica de resolver problemas em diversas áreas. Em Matemática desde os antigos egípcios, chineses e gregos já se resolviam os problemas do *Papiro de Ahmes* copiado pelo escriba Ahmes, em 1650 A. C., de um documento mais antigo ainda, um manuscrito matemático egípcio que contém uma coleção de problemas e outro que é um documento chinês de cerca de 1000 A. C. (STANIC; KILPATRICK, 1989 apud ONUCHIC, 2012, p. 4). Segundo estes autores problemas semelhantes ainda aparecem nos livros de matemática dos séculos XX e XXI.

No PCN+ (Brasil, 2000), quando é mencionado o Novo Ensino Médio, fala-se não apenas em habilitar o educando para o ensino superior ou profissional, mas na preparação para a vida o que significa dentre outras coisas: *enfrentar problemas de diferentes naturezas*. Para isto é importante uma dinâmica na formação do aluno que o permita ser capaz de: “*comunicar-se e argumentar; defrontar-se com problemas, compreende-los e enfrenta-los; e tomar gosto*

*pelo conhecimento, aprender a aprender*”. Este documento diz que as Ciências da Natureza e Matemática, através da competência: investigação e compreensão, conectam-se diretamente com as Linguagens e Códigos, na competência de representação e comunicação, e com as Ciências Humanas, na competência de contextualização sociocultural. A seguir descreveremos alguns dos significados matemáticos de cada uma destas competências, relevantes para o desenvolvimento desta pesquisa:

- **representação e comunicação:**

redigir resumos, justificar raciocínios, propor situações-problemas, sistematizar as ideias principais sobre um dado tema matemático com exemplos e comentários próprios. Expressar-se da forma oral para comunicar ideias, aprendizagens e dificuldades de compreensão, por exemplo: explicando a solução dada a um problema, expondo dúvidas sobre um conteúdo ou procedimento. (BRASIL 2000, p. 115).

- **investigação e compreensão:**

elaborar estratégias para enfrentar uma dada situação-problema, por exemplo: para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente ou usar semelhança de figuras. Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébricas, numéricas, geométricas, combinatórias ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas. (BRASIL, 2000, p. 115).

- **contextualização das ciências no âmbito sociocultural:**

reconhecer relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências ou ainda nos mais diversos setores da sociedade. Utilizar as ferramentas matemáticas para analisar situações de seu entorno real e propor soluções. (BRASIL, 2000, p. 117).

Simultaneamente o PCN+ (Brasil, 2000) sugere aos professores trabalhar em sala de aula com a interdisciplinaridade e/ou a contextualização dos conteúdos e competências não como forma secundária, mas fundamental na formação intelectual e social do educando. Ressalta que a contextualização pode ser utilizada separadamente da interdisciplinaridade numa mesma ciência pelo fato do contexto ser transdisciplinar:

essa articulação interdisciplinar, promovida por um aprendizado com contexto, não deve ser vista como um produto suplementar a ser oferecido eventualmente se der tempo, porque sem ela o conhecimento desenvolvido pelo aluno estará fragmentado e será ineficaz. É preciso dar ao aluno condições para compor e relacionar, de fato, as situações, os problemas e os conceitos, tratados de forma relativamente diferente das diversas áreas e disciplinas. (BRASIL, 2000, p. 31).

Diante disto, o PCN+ (Brasil, 2000) entende a contextualização da matemática, através da resolução de problemas, algo relevante para a construção das competências e habilidades desta ciência, bem como para possibilitar o educando nas soluções de problemas em outras áreas de estudo e do seu cotidiano. Não exclui a importância dos exercícios cujo foco é apenas a reprodução de conteúdo e técnicas, dizendo que os mesmos contribuem também para a fixação do assunto:

aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando – o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. Espera-se que o aluno seja competente em resolução de problemas, se não de todos, pelo menos daqueles que permitam desenvolver formas de pensar em matemática. A resolução de problemas é peça central para o ensino de matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicações dos conceitos e técnicas matemáticos, pois neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica. (BRASIL, 2000, p. 111).

A Base Nacional Comum Curricular, segunda versão revista (Brasil, 2016) na área de matemática diz que:

o ensino da matemática visa a uma compreensão abrangente do mundo e das práticas sociais, segurança para lidar com problemas e desafios de origens diversas. Por isso, é fundamental que o ensino seja contextualizado e interdisciplinar, mas que, ao mesmo tempo, se persiga o desenvolvimento da capacidade de abstrair, de perceber o que pode ser generalizado para outros contextos, de usar a imaginação. Nessa formulação, está implícito que o conceito em foco deve ser trabalhado por meio da resolução de problemas, ao mesmo tempo em que, a partir de problemas conhecidos, deve-se refletir e questionar o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida. (BRASIL, 2016, n. 2, p. 132).

A metodologia de ensino, fundamentada na Resolução de Problemas em sala de aula, possibilita ao educando mobilidade de conhecimento para gerenciar informações dentro e fora da escola, para a criação de diferentes estratégias utilizadas na resolução de uma mesma situação-problema e para um espírito investigativo. Um ensino neste formato tem por objetivo proporcionar ao aluno capacidade de aprender a aprender, tornando-o agente ativo nos problemas em que se deparam e/ou depararão no interior e exterior do ambiente escolar. Dessa forma, desenvolver a habilidade de Resolver Problemas no educando é fundamental no ensino e aprendizagem da matemática.

É importante ressaltar que existe uma diferença significativa entre Resolver Exercícios Padrões e Resolver Problemas. No primeiro ocorre apenas a reprodução de fórmulas, algoritmos e dados aritméticos anteriormente ensinados e muitas vezes fornecidos no enunciado. Neste caso, o educando resolve mecanicamente e não é levado a refletir sobre diferentes estratégias e/ou aplicações de conhecimentos prévios. Para o segundo listaremos nove definições de autores da área da Educação Matemática e documentos oficiais que servem de suporte à educação. São elas:

“Um problema matemático é uma situação que demanda a realização e uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la”. (BRASIL, 2000)

Segundo Silveira (2001):

um problema matemático é toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo e/ou invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado. O fundamental é que o resolvidor conheça o objetivo a chegar, mas só estará enfrentando um problema se ele ainda não tem os meios para atingir tal objetivo. (SILVEIRA, 2001 apud SOUSA, 2005, p. 4).

“Problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”. (LESTER, 1982 apud DANTE, 2010 apud SOUZA, 2013, p. 7).

Segundo Dante (2010):

um problema é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo. É a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não temos previamente nenhum algoritmo que garanta a sua solução. (DANTE, 2010, 1998, p. 86 apud SOUZA, 2013, p. 7; SOARES; PINTO, 2001, p. 7).

“O problema é o meio pelo qual a Matemática se desenvolve, ou seja, o “alimento” da evolução matemática”. (POLYA, 1995, apud ALVES; ARAÚJO; CAVALCANTI; FEITOSA; SILVA, 2011, p. 1).

Segundo Callejo e Vila (1989):

O termo problema é utilizado para designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvidor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar

uma situação nova. (CALLEJO, VILA, 1989, apud ALVES; ARAÚJO; CAVALCANTI; FEITOSA; SILVA, 2011, p. 1).

“Os problemas exigem reflexão, questionamentos e tomada de decisões”. (POZO, 1998, p. 48 apud SOARES; PINTO, 2001, p. 7).

“Um problema é toda a situação na qual o indivíduo confrontado não tem garantia de obter solução com o uso de um algoritmo, sendo que todo o conhecimento relevante desta pessoa deve ser combinado de maneira nova para resolver esta questão”. (DINIZ, 1998 apud BOTIN; LUPINACCI, 2004, p. 3).

“Problemas exigem reflexão e além da compreensão de conceitos matemáticos, que o aluno faça relações entre seus conhecimentos já construídos e a possível solução problema”. (CARRAHER, 1986 apud BOTIN; LUPINACCI, 2004, p. 3).

Percebemos que cada um destes autores define, à sua maneira, o que seria um problema, mas todos concordam em alguns pontos: problemas são situações onde é necessária a leitura detalhada para uma boa interpretação; a conexão entre os conhecimentos antigos e atuais como fundamento para a construção de uma resolução coerente, levando o resolvidor ao objetivo central do problema; e os dados desconhecidos, mas de fundamental importância para o resultado, não são informados diretamente e não podem ser encontrados a partir de utilização de algoritmos pré-estabelecidos e repetitivos.

Embora os formatos de exercícios e problemas sejam aplicações matemáticas de propostas bem diferentes, não se pode elevar a importância de um em detrimento da do outro. Cada um tem sua funcionalidade e quando ministrado coerentemente traz para o educando estímulo para o aprendizado da matemática.

O professor deve tomar cuidado com recorrentes procedimentos padronizados. É importante que o ensino da matemática tenha significado para o estudante. Os problemas precisam despertar cada vez mais o interesse do educando, desafiando-o, apresentando perguntas interessantes e atuais, e sempre de forma clara e objetiva.

Alguns estudiosos chegam a mencionar que o ensino e aprendizagem da matemática, sem Resolução de Problemas, está relacionado ao alto índice de insucesso escolar. (CHARNAY, 1996; D’AVILA, 2007; SOUSA, 2005)

Onuchic (1999) afirma que em 1980 o *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)* publica um documento intitulado por *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980’s*, cuja indicação era de que a Resolução de Problemas deve ser o foco da matemática escolar. Diante disso, muitas formas de Resolução de Problemas eram

adotadas pelos docentes, nesta época. E com isso, três modos de abordar a Resolução de Problemas como justificativa para as diferentes ideias, de como e para que aplicar este tipo de metodologia ao ensinar a matemática, foram apresentados:

ensinar *sobre* Resolução de Problemas, ou seja, ensinar estratégias e métodos para resolver problemas; ensinar matemática *para* resolver problemas, ou seja, apresentar a matemática formal para, depois, oferecer aos alunos o problema como aplicação dessa matemática; e ensinar matemática *através* da Resolução de Problemas, ou seja, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos. “Os alunos são co-construtores do seu próprio conhecimento e os professores responsáveis por conduzir este processo. (SCHOEDER; LESTER, 1989, apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, v. 25, n. 41, p. 80).

Segundo Onuchic e Allevato (2011), os estudiosos da linha de Polya (1995) se dividiam entre o “ensinar sobre Resolução de Problemas” e “ensinar para resolver problemas”. Já o “ensinar através da Resolução de Problemas” é visto como um trabalho pós-Polya de se encarar a Resolução de Problemas.

A seguir comentaremos sobre as linhas e propostas de notáveis pesquisadores nesta área de Resolução de Problemas.

Polya (1995) é um dos pioneiros em matemática a dar destaque a uma discussão sobre Resolução de Problemas. “É considerado o pai da Resolução de Problemas”. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, v. 25, n. 41, p. 77). Em seu livro “A Arte de Resolver Problemas” diz que o papel do professor é de auxiliar o aluno através de indagações e sugestões que suscitem operações mentais importantes para a resolução dos problemas apresentados e para desenvolver nos estudantes capacidade para Resolução de Problemas futuros sozinhos. Afirma que a Resolução de Problemas é uma habilitação prática. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. Propõe quatro passos para auxiliar na resolução dos problemas: (1) Compreensão do problema; (2) Observação da inter-relação dos dados e incógnitas para a elaboração de um plano; (3) Execução do plano; e (4) Revisão e discussão da resolução do problema.

Dante (1998) ao discutir sobre Resolução de Problemas, ressalta a qualidade do tipo de problema: ser desafiador, envolver dados da realidade, ser interessante; ter uma característica de problema desconhecido; consistir na aplicação de várias operações matemáticas e ter um nível de dificuldade adequado. Sugere diferentes estratégias para abordar na resolução de um problema: tentativa e erro organizado; procura de padrões ou generalizações; resolvendo antes um problema mais simples; reduzindo à unidade; fazendo o caminho inverso. Tem por objetivos

na Resolução de Problemas: fazer o aluno pensar produtivamente; desenvolver o raciocínio do aluno; preparar o aluno para enfrentar situações novas; dar oportunidade aos alunos de se envolverem com aplicações matemáticas; tornar as aulas de matemática mais importantes e desafiadoras; e equipar o aluno com estratégias e procedimentos que auxiliam na análise e na solução de situações onde se procura um ou mais elementos desconhecidos. E, para ele, o trabalho de Resolução de Problemas não é tarefa fácil, pois cabe ao professor, primeiro propor objetivos da atividade e, no decorrer das mesmas, deve propor questionamentos para guiar os estudantes na compreensão e resolução do problema.

O Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic, tem sido um “núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, de investigação e de produção científica na linha de Resolução de Problemas”. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2011, v. 25, n. 41, p. 75). Este grupo iniciou seus estudos sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e atualmente, fundamenta suas pesquisas sobre o ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Falar sobre ensino-aprendizagem-avaliação significa a ocorrência destes três elementos ao mesmo tempo. Enquanto o professor ensina, o aluno, como agente ativo da sua aprendizagem, aprende, e a avaliação é realizada no mesmo instante. Aqui a avaliação deixa de ser um processo que visa apenas o resultado final. No ensino através da Resolução de Problemas, o professor deixa de ser o centro ou único responsável pela aprendizagem, mas o educando se torna o responsável pelo que aprende. Nesta perspectiva, o educando elabora as justificativas e dá sentido para o que faz.

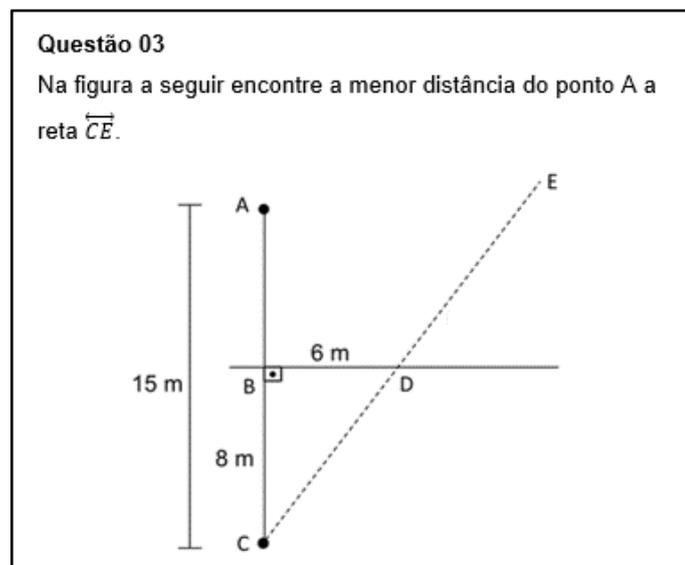
Reitere-se que, nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita continuamente, durante a resolução do problema. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2011, v. 25, n. 41, p. 85).

Segundo Souza (2013), o ensino da Geometria é de grande relevância neste processo de Resolução de Problemas. A aprendizagem deste tópico da matemática proporciona ao aluno mais pensamento lógico, capacidade de raciocínio, conhecimentos e exploração do espaço onde se vive, novas descobertas, identificação das formas geométricas e pensamento crítico e autônomo.

Infelizmente o ensino da geometria tem sido voltado, principalmente, para a aplicação de fórmulas em resoluções de exercícios. Isto promove ao educando grande dificuldade na aprendizagem, desestímulo e conseqüentemente não conseguem usufruir dos benefícios da Geometria, não só para a resolução de problemas como em situações extra sala de aula. Segundo Deguire (LINDQUIST; SHULTE, 2005) “[...] é possível citar muitas razões para que se estude Geometria na educação básica. Uma delas é a oportunidade que a Geometria oferece de ensinar a resolver problemas e ensinar para resolver problemas”. (LINDQUIST; SHULTE, (org.), 2005, p. 73)

Fundamentados nas propostas do PCN+ (Brasil, 2000), para o ensino da matemática na educação básica, fomentada na interdisciplinaridade, na contextualização e na Resolução de Problemas; em observância aos tipos de questões adotadas nas provas do ENEM, SAEB e PISA; e na importância do pensamento geométrico na dinâmica de Resolução de Problemas, decidimos analisar o comportamento dos educandos frente a questões sem contexto (**Figura 5**) e com contexto (**Figura 6**) sobre Semelhança de Triângulos. Ambas as questões se enquadram nas ideias comuns sobre a essência do que é um problema, mencionadas nas páginas 31 e 32. Em ambas as questões, apenas a leitura do enunciado não define a resposta ou procedimentos a serem tomados.

**Figura 5** - Questão sem contexto.



Fonte: Atividade sem contexto.

**Figura 6 - Questão com contexto.**

**Questão 01**

Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.

Sabe-se que o governo está planejando uma nova estrada ligando a cidade Y até a R103. A menor extensão, em quilômetros, que esta nova estrada poderá ter é:

Fonte: Atividade com contexto.

A primeira reflexão sugerida ao aluno é: O que é a menor distância? Neste momento, precisará pensar nas características do segmento de reta representativo desta menor distância, ou seja, lembrar de conhecimentos antigos e ao mesmo tempo completar a figura fornecida, no enunciado, com o desenho da menor distância. Após o traçado, outra indagação: Quais figuras geométricas estão definidas? Em sendo triângulos, quais são semelhantes? Tais indagações requerem conhecimentos antigos se fundindo a novos.

Posteriormente, desenvolver a proporção entre os lados correspondentes destes triângulos semelhantes, e escolher algumas possibilidades de proporção para calcular. Neste momento, como a medida de um dos lados dos triângulos semelhantes não foi fornecida, os alunos precisariam observar a classificação de um dos triângulos quanto aos ângulos, verificar que é retângulo e desenvolver o Teorema de Pitágoras, encontrando assim, a medida desejada. Não podemos esquecer que, no caso da questão com contexto, existe o texto para ser interpretado e a relação entre nomenclaturas de entes matemáticos com as do cotidiano.

Embora a análise das resoluções dessas questões pelos alunos, não tenha se fundamentado nas técnicas e padrões de Resolução de Problemas dos autores mencionados anteriormente, podemos concluir, com base nos procedimentos didáticos utilizados em sala de aula e seus resultados, que estabelecemos um ensino-aprendizagem, sobre a Semelhança de Triângulos, anterior a linha de pensamento do ensino da matemática *através* da Resolução de Problemas.

Em todas as aulas de resolução de exercícios e problemas, o aluno era sempre argumentado para dar sua opinião e expor seu raciocínio. Algumas vezes, através de sorteios, foram chamados para resolver questões no quadro. Podemos afirmar que embora o educando não fosse o principal responsável para sua aprendizagem, ocorreu uma interação entre aluno-professor, nestes encontros. E na semana entre as aplicações das duas atividades, sem e com contexto, a qual chamamos de semana de dúvidas, foram tiradas todas as dúvidas da atividade sem contexto, em especial sobre a questão sem contexto escolhida por nós, para fazer parte desta pesquisa.

## 2.5 ANÁLISES DE ERROS

Quando falamos sobre erros dos alunos no processo do ensino-aprendizagem, com frequência se pensa no resultado de avaliações realizadas a partir das respostas, seja verbal ou escrita, dos mesmos, frente a um questionamento sobre determinado conteúdo.

Cury (2006) comenta que existem três tipos de avaliação: a diagnóstica, a somativa e a formativa. A primeira procura saber o que o educando sabe ou não sabe dentro do conteúdo a ser ministrado; a segunda é desenvolvida já no final de um conteúdo, atividade, semestre ou ano como resultado final do que foi exposto, tem por objetivo classificar e certificar; e a terceira é desenvolvida durante todo o processo de ensino-aprendizagem, diagnosticando a partir de observações as habilidades e o tempo de aprendizagem dos educandos frente a metodologia de ensino dos conteúdos, proporcionado ao professor uma elaboração de aulas e atividades coerentes com as necessidades e ritmos dos alunos, e uma prática em sala de aula fundamentada no apoio e orientação ao aluno, no processo de construção do seu conhecimento.

O erro pode ser algo positivo ou negativo dependendo de como seja trabalhado no processo de ensino-aprendizagem. Em alguns momentos foi considerado algo não aceitável, e promovia nos educandos o entendimento de o erro ser ausência de conhecimento e até mesmo impossibilidade para tal. Mas, estudos recentes como os de Cury (2007), apontam para a

importância didática do erro no processo da apropriação do conhecimento, e a consideração do erro como metodologia de ensino. Cury (2010) ressalta o cuidado que se deve ter com o termo “erro construtivo”, pois tem levado professores a elevar a importância do erro do aluno, sem buscar resultados significativos para o conhecimento do sujeito.

detectado um erro, procura-se representar o conteúdo, com a (falsa) crença de que a repetição vai fazer com que a falta de compreensão sobre o tópico em questão vai fazer com que o aluno entenda e não mais cometa o mesmo erro. No entanto, se esta ideia fosse correta, não teríamos os erros sistemáticos, pois, detectados e remediados por uma nova explicação, já teriam sido eliminados. Assim, é necessário encontrar outras maneiras de chegar às possíveis causas de um determinado erro e discuti-las com os professores, em especial. (CURY, 2010, p. 9).

Neste sentido, na cópia datilografada da sua dissertação, Cury (2007) descreve sobre as ideias dos professores israelenses Movshovitz-Hadar, Zaslavski e Inbar (1996,1986) em acreditar que “se o professor auxiliar o aluno, advertindo-o quanto a distorções feita no teorema, é provável que ele o recorde apropriadamente e o aplique corretamente em outra oportunidade”. (CURY, 2007, p. 30). Mas, esta autora não concorda, pois, em geral, esta é a primeira ideia que os professores têm ao detectar um tipo de erro e, baseada em suas experiências, esta atitude não provou ser eficaz para prevenir os erros. Cury (2007) informa que alguns erros são persistentes e apenas a partir de uma tomada de consciência, por uma reflexão sobre sua própria reflexão e pela compreensão das consequências de sua afirmativa errada, pode modificar o comportamento do educando (CURY, 2007, p. 31).

Alguns professores do ensino básico ainda compartilham a ideia de o erro ser a falta parcial ou total de conhecimentos. Autores como Cury (2006) e Esteban (2002) a partir de seus estudos dão ênfase a seguinte pergunta: o erro demonstra apenas aquilo que o aluno não sabe? É nesta perspectiva que a seguir traremos posicionamentos sobre as ideias de erros de alguns estudiosos, encontradas em artigos de Cury (2006, 2010) e Ozores e Valério (2015) e na cópia datilografada da dissertação de Cury (2007):

Donaldson diz que “do ponto de vista do senso comum, os erros são acontecimentos desastrosos, que seria melhor evitar completamente, se possível”. (DONALDSON, 1977, p.181 apud CURY, 2007, p. 25). Este autor acredita ser este um pensamento incoerente, já que “[...] o erro pode ter um papel extremamente fecundo na atividade intelectual”. (Idem, CURY, 2007).

Ozores e Valério (2015) diz que “segundo Cury (1994) o erro não é somente efeito da ignorância, da incerteza e do acaso, os erros são esperados e ajudam a detectar maneiras de como o aluno pensa”. (OZORES; VALÉRIO, 2015, p. 1).

os erros cometidos pelos alunos são considerados estágios necessários à exploração de problemas e podem ser utilizados, pelo professor ou pelos próprios alunos, para novas descobertas e para discussão dos conceitos envolvidos em um determinado problema matemático”. (CURY, 1994, p.132 apud OZORES; VALÉRIO, 2015, p. 1).

Segundo Moraes (2013):

o erro é um conhecimento, é um saber que o aluno possui e não a falta dele. Ele não considera que os erros demonstram aquilo que os alunos não sabem, assim como não é possível assumir que os acertos demonstram aquilo que eles sabem. Os alunos podem acertar um raciocínio por inúmeras razões sem ter, de fato, absorvido o conteúdo em questão. (MORAES, 2013 apud OZORES; VALÉRIO, 2015, p. 2).

Percebemos que em todas estas ideias, o erro traz em si conhecimentos e possibilidades para investigar e descobrir as etapas do saber do aluno, como por exemplo: o que foi ou não aprendido no atual momento de ensino, como também, em momentos anteriores e as incoerências das ações dos alunos frente as aplicações do conteúdo; e formas significativas para intervir positivamente na construção do conhecimento deste aluno.

A partir de uma análise com base no referencial da Psicologia Cognitiva para o papel do erro na aprendizagem, a seguir, apresentamos de forma sucinta diferentes concepções existentes nos estudos da Educação e da Educação Matemática:

- **Concepção behaviorista:** Teixeira (1997) diz que na abordagem comportamental o erro ocorre devido à ausência de condicionamento adequado ou de reforçamento. O erro é tido como fracasso ou insucesso; produz efeitos de punição. Na abordagem empírica o erro é algo a ser evitado, não tem função pedagógica. Utiliza-se procedimentos de repetição como forma de superação do erro.

nos últimos anos, modificou-se a atitude dos educadores matemáticos em relação aos erros dos estudantes, passando de uma perspectiva behaviorista que sugeria que os erros eram obstáculos ao processo de aprendizagem, devendo ser evitados e eliminados, para uma nova perspectiva sob o qual é reconhecido o valor dos erros como instrumentos de identificação das causas dos problemas de aprendizagem e das estratégias para superá-los. (BORASI, 1988 apud CURY, 2007, p. 25).

- **Concepção piagetiana:**

no processo de construção das estruturas lógicas, os erros, segundo Piaget (1976), são produzidos como resultado dos conflitos cognitivos que os sujeitos vivem no esforço para se adaptarem a novas situações. Conflito cognitivo para Piaget é o termo usado para explicar o processo através do qual ocorrem mudanças cognitivas, ou seja, passagem de um estado de equilíbrio a outro, através de um período de transição em que há formas contraditórias de interpretar e resolver um mesmo problema. (TEIXEIRA,1997, v. 3, p. 49).

- Conceção de G. Brousseau:

Brousseau afirma que o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, mas o efeito de um conhecimento anterior que num contexto era adaptado, mas que em outro se revela falso ou simplesmente inadaptado. Acrescenta que os erros, em um mesmo sujeito, aparecem ligados entre si por uma fonte comum; um conhecimento antigo que foi eficiente em certas situações. Por isso mesmo são resistentes e vão ressurgir várias vezes, mesmo depois do sujeito ter rejeitado o modelo errado. (TEIXEIRA, 1997, v. 3, p. 49).

Teixeira (1997) afirma que Brousseau (1983) utiliza a abordagem de obstáculos para entender questões didáticas da matemática. Para Brousseau (1983) existem três tipos de obstáculos: o epistemológico, os didáticos e os ontogenéticos. Com relação ao primeiro obstáculo, são considerados conhecimentos e não ausência de conhecimento, são eficazes para alguns conceitos e para outros levam ao erro, resistentes a novos conceitos, ampliações de conceitos e a contradições com as quais são confrontados; o segundo obstáculo são concepções de ensino que redundam numa transposição didática; e o terceiro obstáculo são resultantes das dificuldades dos sujeitos num determinado momento do seu desenvolvimento mental.

“A noção de obstáculo é também um meio de olhar de outro modo os erros do aluno; certos erros recorrentes são resultados de conceitos que, mesmo quando são falsos, não são acidentais, mas aquisições muitas vezes positivas”. (PERRIN – GLORIAN, 1995, p.81 apud TEIXEIRA, 1997, v. 3, p. 51).

- Conceção de G. Vergnaud:

nesta abordagem não comparece a ideia de obstáculo, no sentido da sua produção histórica. Vergnaud se preocupa com o caráter psicológico e restrito ao campo cognitivo. Identifica obstáculo como resultado das contradições entre a ação a ser executada e aquela apontada pelo funcionamento do esquema e considera que a base do conhecimento está nos esquemas de ação que são organizações invariantes da conduta para uma classe de situações dadas. O erro como manifestação da falta de coordenação entre esquemas, pode advir de dificuldades em qualquer dos conjuntos necessários a formação dos conceitos: seja das situações, dos invariantes construídos ou das representações simbólicas (TEIXEIRA, 1997, v. 3, p. 51).

- Conceção da teoria do reparo defendida por Makhubele (2014): Também enfatiza o fato do erro como um equívoco, afirmando que “quando um conjunto relativamente estável e funcional, de crenças de um indivíduo, entra em conflito com uma posição alternativa mantida por toda comunidade de estudiosos, especialistas e professores é que ocorre o equívoco

(misconceptions)”. (MAKHUBELE, 2014, p. 43 apud CHIUMMO; OLIVEIRA, 2015, v. 35, n. 2, p. 184). No meio acadêmico existem interpretações sobre o que seria um equívoco:

- (Leinhardt, Zaslavsky e Stein) aspectos incorretos do conhecimento do aluno que são repetidos e explicitados;
- (Dikgomo) dificuldades conceituais que os alunos experimentam que podem impedir o conhecimento dos conceitos matemáticos. Concepções equivocadas são, portanto, impedimentos na aprendizagem significativa dos conhecimentos matemáticos;
- (Thabane) podem ser uma pedra no caminho ao entendimento de conceitos matemáticos;
- (Nesher) linha de pensamento que causa uma série de erros todos eles resultantes de uma subjacente premissa incorreta em vez de um erro esporádico sem conexão e não sistemático;
- (Michael) dificuldade de entendimento ou raciocínio que impede o domínio de certo conteúdo;
- (Van Lehn) aplicação equivocada de uma regra, uma excessiva ou insuficiente generalização ou uma concepção alternativa de uma situação. (MAKHUBELE, 2014, p.55)

Neste contexto, Makhubele (2014) apresenta a teoria do reparo:

quando os solucionadores se deparam com um novo problema, eles tentam aplicar um conhecimento anterior à nova situação. Se eles falham ao resolver o problema, eles podem introduzir um reparo no procedimento. Quando o procedimento mudado está correto, uma solução criativa é obtida. Entretanto, quando o procedimento alterado está incorreto, uma concepção equivocada se manifesta. Então, de acordo com a teoria do reparo, uma concepção equivocada não é uma simples generalização excessiva que ocorre sempre que o solucionador aplica um conceito quando está em outro domínio em que é incorreto; mas uma concepção equivocada resulta de um pequeno reparo a dado procedimento. (MAKHUBELE, 2014, p. 43 apud CHIUMMO; OLIVEIRA, 2015, v. 35, n. 2, p. 185)

No estudo de Cury (2007), encontramos vários autores de pesquisas sobre análise de erros que apresentam categorias de erros, entre elas:

As de Weimer (1922), na Alemanha, que agrupou seus padrões de erros em cinco categorias: erros de familiaridade, erros de perseverança, erros de similaridade, erros mistos e erros devido à emoção e vontade. (CURY, 2007, p.27).

As de Menchiskaya (1969), na União Soviética, com relação às causas dos erros: erros devido à incorreta implementação de uma operação, erros devido à qualidade insuficiente da compreensão do conceito, erros mecânicos devido à falta de interesse ou digressão e erros devido à aplicação de regras ou algoritmos inapropriados. (CURY, 2007, p.27).

As de Radatz (1979,1980) baseadas no mecanismo do processamento de informação: erros devido à dificuldade de linguagem, erros devido à dificuldade de obter informação espacial, erros devido ao domínio deficiente dos conteúdos, fatos e habilidades consideradas

como pré-requisitos, erros devido a associações incorretas ou rigidez de pensamentos e erros devido a aplicações de regras ou estratégias irrelevantes. (CURY, 2007, p.27).

As de Movshovitz-Hadar, Zaslavski e Inbar (1986,1987), em Israel, que agrupou suas análises em seis categorias de erros: uso errado dos dados, linguagem mal interpretada, inferência logicamente inválida, definição ou teorema distorcido, solução não comprovada e erros técnicos. (CURY, 2007, p. 29).

E por fim as de Smith (1940) que foram voltadas para à Geometria, na tentativa de verificar as dificuldades na aprendizagem de demonstrações: erros devido ao pouco conhecimento das figuras geométricas, erros devido à incompreensão do significado da relação lógica de implicação e erros devido à escassa compreensão do significado de uma demonstração. (CURY, 2007, p. 33).

Diante do exposto nesta seção, investigamos os erros e dificuldades dos alunos, utilizando questões sem/com contexto e descrevemos os resultados. Consideramos como erro as respostas dos alunos a partir das resoluções das questões:

que não corresponde à produção esperada de um aluno que já deve ter tido contato com os conteúdos apresentados na referida questão ou com estratégias de resolução de problemas em Matemática. É, portanto, um referencial que toma como suposta verdade o conhecimento institucional, ou seja, o que a instituição “Escola” espera ver apresentado por alunos de um determinado nível de ensino, em suas produções escritas em Matemática. (CURY, 2010, p. 2).

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 AMBIENTE DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada no Instituto Federal de Pernambuco em Caruaru, localizado na Estrada do Alto do Moura, km 3.8, Distrito Industrial III. Este instituto faz parte da segunda fase de expansão do IFPE e foi inaugurado em 27 de agosto de 2010. Segundo Hugo Ferreira (2016), o Campus Caruaru veio ao encontro da vocação do município de Caruaru e da região circunvizinha para empreendimentos nos setores de comércio, serviço e indústria. Atualmente, trabalham no Campus Caruaru 66 docentes e 53 técnicos administrativos, totalizando 119 servidores efetivos. E no semestre 2015.2 houveram 693 alunos regularmente matriculados.

Inicialmente foram abertos os cursos técnicos em Edificações, Mecatrônica e Segurança do Trabalho na modalidade subsequente, em que o educando, já formado no Ensino Médio, conclui o ensino técnico. Em 2012, foi implantada, para os cursos técnicos, a modalidade integrada com o Ensino Médio, onde o estudante após quatro anos se forma ao mesmo tempo, no ensino médio e em um curso técnico. Neste mesmo ano, foi criado o primeiro curso superior de Engenharia Mecânica do interior de Pernambuco (Ferreira, 2016).

**Figura 7** - Instituto Federal de Pernambuco, Campus Caruaru.



Fonte: <http://www.ifpe.edu.br/campus/caruaru/o-campus/imagens>

### 3.2 CARACTERÍSTICAS DOS SUJEITOS

Para o estudo de caso foi escolhida uma turma do 5º período do curso técnico em Segurança do Trabalho na modalidade integrado com o Ensino Médio, do IFPE em Caruaru. Esta turma é formada por 18 alunos cuja média de idade é de 17 anos, mas devido à ausência nas datas da aplicação das atividades, apenas 16 participaram deste estudo.

A partir das respostas a um questionário sócio – econômico, observamos que a maior parte desses estudantes realizou o ensino fundamental em instituições privadas e todos residem em zona urbana.

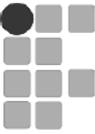
### 3.3 AS ATIVIDADES TRABALHADAS NA PESQUISA

Um dos conteúdos contemplados pela ementa de Matemática 5 no período 2016.1, na turma escolhida, era o Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos. A atividade sem contexto e a atividade com contexto, que serviram de apoio a esta pesquisa, foram elaboradas a partir de modelos de problemas interpretados e resolvidos em sala de aula e entregues aos educandos através de slides e fichas de exercícios, durante a ministração destes conteúdos. Como o tempo de duração de cada aula no IFPE é de 45 minutos as duas atividades foram elaboradas de tal forma a contemplar, cada uma, apenas quatro questões, sendo duas abordando o Teorema de Tales e as outras duas a Semelhança de Triângulos.

Foram selecionadas quatro questões com contexto em provas baseadas no modelo do NOVO ENEM, duas sobre o Teorema de Tales e duas sobre a Semelhança de Triângulos. A partir das figuras destas questões, elaboramos as questões da atividade sem contexto, modificando o enunciado, os valores numéricos com suas unidades de medidas e numeração das questões. E em seguida, colocamos as quatro questões com contexto, selecionadas inicialmente, para compor a atividade com contexto. Isto foi feito para garantir que os alunos estivessem realizando duas atividades distintas, cujos procedimentos didáticos fossem equivalentes e não houvesse correlação entre as atividades por parte deles no dia da aplicação.

A atividade sem contexto (**Figura 8 e Figura 9**) apresenta apenas questões de modelos tradicionais, cujos enunciados fornecem apenas os dados de forma direta, ou seja, não requer uma longa leitura. Nesse tipo de questão o aluno, em sua primeira leitura, depara-se com termos e figuras matemáticas e sai em busca do valor a determinar.

Figura 8 - Primeira folha da atividade sem contexto.



**INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO**

**Campus Caruaru – ATIVIDADE I**

Nota: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

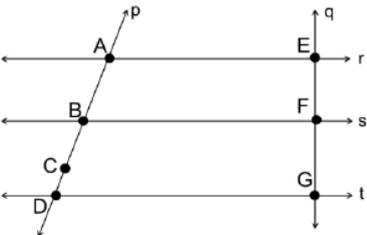
**Orientações:**

- 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.
- 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a **resposta final** deverá estar de **caneta**.
- 3) A atividade vale 2,0 pontos.
- 4) A duração da prova é de 90 minutos.
- 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

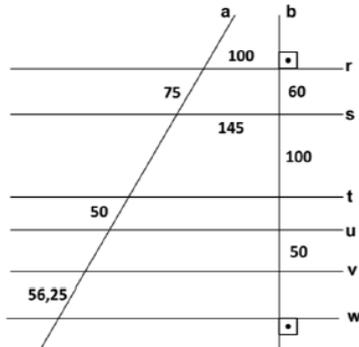
**Questão 01**

Na figura abaixo considerando as medidas dos segmentos  $\overline{AB} = 15\text{ cm}$ ,  $\overline{CD} = 1\text{ cm}$ ,  $\overline{EF} = 12\text{ cm}$  e  $\overline{EG} = 28\text{ cm}$  e sendo as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  paralelas e as retas  $p$  e  $q$  transversal, determine a medida do segmento  $\overline{BC}$ .



**Questão 02**

Sendo as retas  $r$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $u$ ,  $v$  e  $w$  paralelas e as retas  $a$  e  $b$  transversais,

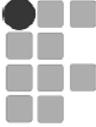


Determine a distância entre as retas  $r$  e  $w$ .

**Prof(a): Angeline Muniz**

**Segurança - V**

Figura 9 - Segunda folha da atividade sem contexto.



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO

**Campus Caruaru – ATIVIDADE I**

Nota: \_\_\_\_\_

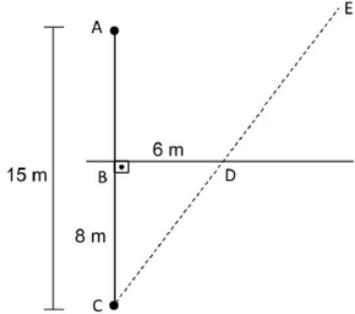
Nome: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

---

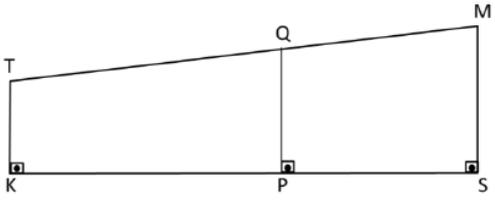
**Questão 03**

Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta  $\overleftrightarrow{CE}$ .



**Questão 04**

Na figura abaixo,  $\overline{TK} = 2$ ,  $\overline{KP} = 6$ ,  $\overline{KS} = 10$  e  $\overline{MS} = 3$ .



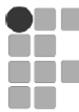
Qual a medida de QP?

**Prof(a): Angeline Muniz**

**Segurança - V**

A atividade com contexto (**Figura 10**, **Figura 11** e **Figura 12**) apresenta apenas questões cujos enunciados são longos e na maioria das vezes requerem uma interpretação mais detalhada. Tais questões exigem do aluno um entendimento quanto às correspondências entre alguns termos e figuras do dia a dia, com relação a alguns termos e figuras matemáticas, como por exemplo, a representação de retas, simulando rodovias, e pontos, as cidades.

**Figura 10** - Primeira folha da atividade com contexto.



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO

**Campus Caruaru – ATIVIDADE II**

Nota: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

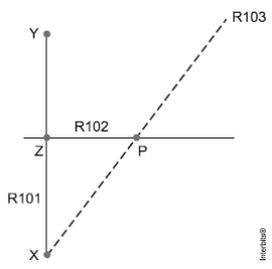
**Orientações:**

- 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.
- 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a **resposta final** deverá estar de **caneta**.
- 3) A atividade vale 4,0 pontos.
- 4) A duração da prova é de 90 minutos.
- 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**

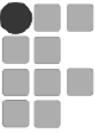
Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.



**Prof(a): Angeline Muniz**

**Segurança - V**

Figura 11 - Segunda folha da atividade com contexto.



**INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO**

**Campus Caruaru – ATIVIDADE II**

**Nota:** \_\_\_\_\_

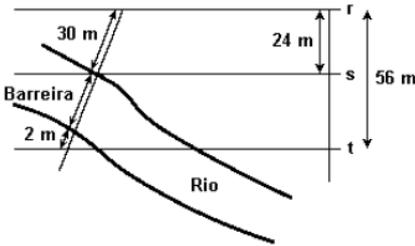
**Nome:** \_\_\_\_\_

**Curso:** \_\_\_\_\_ **Data:** \_\_\_\_\_

---

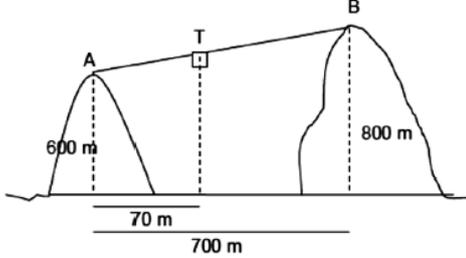
**Questão 02**

A crise energética tem levado as médias e grandes empresas a buscarem alternativas na geração de energia elétrica para a manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi a de construir uma pequena hidrelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo às suas instalações. Observando a figura e admitindo que as linhas retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  sejam paralelas, pode-se afirmar que a barreira mede:



**Questão 03**

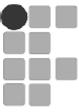
Na figura abaixo, que não guarda as devidas proporções com as medidas reais, o ponto T representa o teleférico subindo. Nessas condições e desprezando as dimensões do teleférico, calcule a que altura do solo o mesmo se encontra, quando seu deslocamento horizontal for de 70 m.



**Prof(a): Angeline Muniz**

**Segurança - V**

**Figura 12** - Terceira folha da atividade com contexto.



**INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO**

**Campus Caruaru – ATIVIDADE II**

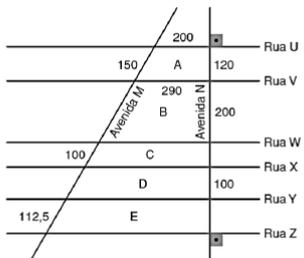
**Nota:** \_\_\_\_\_

**Nome:** \_\_\_\_\_

**Curso:** \_\_\_\_\_ **Data:** \_\_\_\_\_

**Questão 04**

Na figura abaixo tem – se parte da planta de um bairro, na qual as ruas são paralelas entre si. As quadras A, B, C, D e E têm as medidas de alguns de seus lados indicadas em metros.



Quantos metros percorre – se, seguindo – se em linha reta da esquina da Avenida N com a Rua U até a esquina da Avenida N com a Rua Z?

3

**Prof(a): Angeline Muniz**

**Segurança - V**

Fonte: Atividade com contexto.

Sendo, o conteúdo de Semelhança de Triângulos, um dos objetos de conhecimento das Matrizes de Referência do NOVO ENEM, como também, um tópico da unidade temática: Geometria Plana, presente no documento dos PCN+ (Brasil, 2000), decidimos desenvolver uma pesquisa que se fundamenta na postura dos estudantes quanto à resolução de problemas, com abordagens em Semelhança de Triângulos, elaborados com e sem contexto.

### 3.4 A APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES: COLETA DOS DADOS

A atividade sem contexto foi aplicada no dia 05/04/2016 e a atividade com contexto no dia 19/04/2016, sendo em ambos os dias, disponibilizadas para os alunos duas aulas (90 minutos). Foi pedido que os estudantes, durante as resoluções, explicassem com suas palavras o porquê do procedimento de cálculo utilizado em cada questão, já que os únicos assuntos abordados eram o Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos e em ambos, o desenvolvimento matemático recaía em proporções. Tínhamos por intuito compreender se o aluno estava dominando ou não os conteúdos, já que não faríamos as entrevistas posteriormente.

Decidimos intercalar a aplicação destas atividades com uma pausa de uma semana para a resolução da atividade sem contexto, devido aos pedidos dos estudantes para explanar algumas dúvidas, resolvendo algumas questões. Nesta semana observamos mais da metade dos alunos com dúvidas na Questão 3, a respeito da menor distância de um ponto a uma reta resultando em grande quantidade de respostas erradas para a referida questão. É de grande valia informar que no momento das ministrações das aulas este tópico foi debatido em sala, bem como questões equivalentes resolvidas.

Como mencionado anteriormente, nossa pesquisa fundamenta-se no tópico de Semelhança de Triângulos, para isto, restringimos nossa análise selecionando apenas a Questão 3 da atividade sem contexto (**Figura 5**) e a Questão 1 da atividade com contexto (**Figura 6**), equivalente a Questão 3, para ser discutida em nosso estudo de dissertação, visto que as referidas questões são mais abrangentes no aspecto que desejamos nossa investigação.

### 3.5 ANÁLISE DOS DADOS

Segundo os encaminhamentos sugeridos por Cury (2006) nos debruçamos sobre as resoluções dos estudantes para as duas questões selecionadas, no sentido de entender como acontecem os procedimentos das respostas dos estudantes, fazendo uma primeira leitura para se impregnar com os dados e em seguida, relemos o material e identificamos cinco procedimentos recorrentes nas resoluções dos alunos, para a questão sem contexto (**Figura 5**) e para a questão com contexto (**Figura 6**), selecionadas anteriormente.

Pesquisando sobre análise de erros em tópicos de Geometria, encontramos o artigo Análise da Aprendizagem de Semelhança de Triângulos por Alunos de Graduação em Matemática, de Chiummo e Oliveira (2015), no qual conhecemos um pouco as ideias de

Makhubele (2014) para a análise de erros e posteriormente, estudamos sua dissertação e as Categorias de erros por ele classificadas e achamos bastante interessante tal abordagem e decidimos conectar tais categorias com o nosso estudo, pois sugere dois conjuntos de categorização para a análise de respostas de alunos às questões propostas pelo professor, para verificar a aprendizagem de um conceito geométrico. Este matemático subdivide suas categorias em duas: Categoria de erros dos alunos (**Tabela 1**) e Categoria de erros (**Tabela 2**). A primeira aborda o envolvimento cognitivo do aluno e o conhecimento mobilizado, subdividida em cinco categorias, representadas por  $C_n$ , com  $n \in \{1,2,3,4,5\}$ ; e a segunda, aborda o tipo de erro cometido pelo aluno, especificamente lapsos, erros conceituais, erros procedimentais e erros de ordem das operações (MAKHUBELE, 2014, p. 133).

A **Tabela 1** categoriza as respostas dos alunos com as nomenclaturas de  $C1$  a  $C5$  de maneira que “esta categoria foca os procedimentos escritos pelos alunos e suas razões” (MAKHUBELE, 2014, p. 133).

**Tabela 1** - Categorias de erros dos alunos

Categorias	Explicação
$C1$	Procedimento correto, justificativa correta/raciocínio válido (Resposta correta).
$C2$	Procedimento incorreto, resposta incorreta. Raciocínio inválido. (Resposta errada).
$C3$	Procedimento incorreto, raciocínio incorreto.
$C4$	Procedimento incorreto, raciocínio correto.
$C5$	Nenhuma tentativa feita

Fonte: MAKHUBELE, Y. E. Misconceptions and Resulting Errors Displayed by Grade 11 Learners in the Learning of Geometry. 2014. 249 f. p. 133. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – University of Johannesburg.

A **Tabela 2** descreve quais categorias das respostas foi empregado, em termos do tipo de erro cometido pelo aluno, especificamente lapsos, erros conceituais, erros procedimentais e erros de ordem das operações (Makhubele, 2014).

**Tabela 2** - Categorias de erros

Categoria	Tipo de Erro	Explicação
$Err1$	Sem erro	<ul style="list-style-type: none"> <li>o aluno não cometeu erro. Evidência de habilidade de prova.</li> </ul>
$Err2$	Lapso	<ul style="list-style-type: none"> <li>engano, erro menor cometido porque o aluno estava preocupado;</li> <li>causado por falta de concentração;</li> <li>respostas erradas que os alunos podem sozinhos corrigir prontamente;</li> </ul>

**Tabela 2** - Categorias de erros (continuação)

<i>Err2</i>	Lapso	<ul style="list-style-type: none"> <li>● devido à falta de cuidado, provavelmente será repetido;</li> <li>● pode ser entendido automaticamente após rever o trabalho de outro.</li> </ul>
<i>Err3</i>	Erro conceitual	<ul style="list-style-type: none"> <li>● falta de conhecimento do conceito;</li> <li>● cometido pela não familiaridade com a terminologia;</li> <li>● cometido por um domínio insuficiente de fatos básicos, conceitos e habilidades.</li> </ul>
<i>Err4</i>	Erro procedimental	<ul style="list-style-type: none"> <li>● apresenta conhecimento conceitual, mas aplica equivocadamente o conceito;</li> <li>● alunos memorizaram os conceitos e propriedades sem conhecer quando os aplica e porque eles os aplicam quando realizam a resolução;</li> <li>● alunos conhecem os conceitos e propriedades das figuras, mas não conseguem aplicá-los no problema.</li> </ul>
<i>Err5</i>	Erro de ordem da operação	<ul style="list-style-type: none"> <li>● falta de ordem quando realizam a resolução que envolve dois ou mais passos. Aplicam cegamente os procedimentos sem conhecer de fato como prosseguir a resolução;</li> <li>● problema em termos de raciocínio dedutivo;</li> <li>● cometido por esquemas incompletos.</li> </ul>

Fonte: MAKHUBELE, Y. E. Misconceptions and Resulting Erros Displayed by Grade 11 Learners in the Learning of Geometry. 2014. 249 f. p. 133. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – University of Johannesburg.

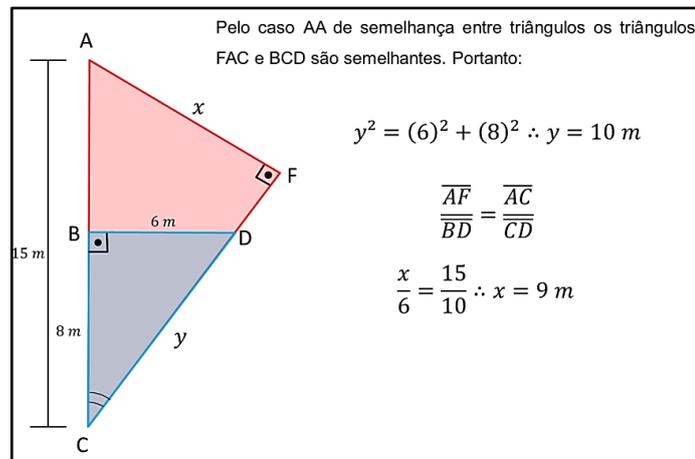
Portanto, basearemos nossa análise, das duas questões selecionadas no estudo, na categorização estabelecida anteriormente por Makhubele (2014) e codificaremos os instrumentos de avaliação por  $A_n$ , com  $n \in \{1,2,3,4, \dots, 16\}$ , referente a identificação de cada aluno. Antes de analisarmos individualmente os procedimentos dos alunos para cada questão selecionada, discutimos os conceitos estudados em sala de aula sobre este conteúdo e apresentamos uma resolução comentada sobre cada questão, a partir do conteúdo matemático selecionado para o estudo.

Em sala de aula inicialmente definimos a semelhança entre dois triângulos da seguinte maneira: “Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais” (BARBOSA, 2006, p. 109). Em seguida falamos sobre o teorema fundamental da semelhança: “Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intersecta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro” (DOLCE, POMPEO, 2002, ed. 7, p. 200) e os três casos de semelhança: o primeiro caso de Semelhança de Triângulos (AA): “Se dois triângulos possuem

dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes”; o segundo caso de semelhança (LAL): “Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes”; e o terceiro caso de semelhança (LLL): “Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes”. (DOLCE, POMPEO, 2002, ed. 7, p. 204-206).

Sendo a resolução da questão sem contexto (**Figura 5**) dada por:

**Figura 13** - Resolução da questão sem contexto.



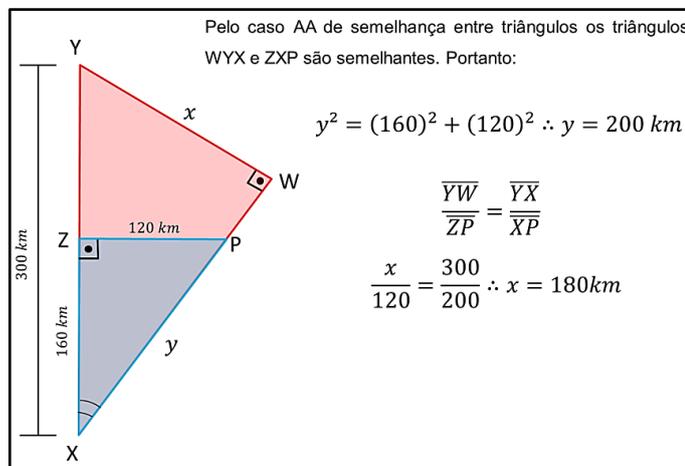
Fonte: MUNIZ, A. M. C. 2016.

Percebemos que para resolver esta questão, o educando precisaria saber o que significa a menor distância entre um ponto e uma reta, conceito ministrado em sala de aula e aplicado através de problemas com e sem contexto. Após traçar a menor distância pedida, seria percebida a existência de um triângulo maior  $FAC$  e um triângulo menor  $BCD$ , ambos retângulos, respectivamente em  $F$  e  $B$ , pois o conceito de menor distância entre um ponto e uma reta defende a existência do ângulo de  $90^\circ$  do ponto em relação a reta.

Tendo conhecimento do primeiro caso de semelhança (AA), pode-se confirmar que os triângulos  $FAC$  e  $BCD$  são semelhantes. Ressaltamos a necessidade de encontrar, a partir da aplicação do teorema de Pitágoras, a medida do lado oposto ao ângulo reto no triângulo  $BCD$  e com isso, após desenvolver a proporção entre os lados correspondentes, seria possível ser encontrada a menor distância do ponto  $A$ , à reta  $\overline{CE}$ .

Sendo a resolução da questão com contexto (**Figura 6**) dada por:

**Figura 14** - Resolução da questão com contexto.



Fonte: MUNIZ, A. M. C. 2016.

Como já falamos anteriormente, as duas questões possuem o mesmo procedimento de resolução, mas os triângulos semelhantes visualizados são identificados por vértices diferentes nesses triângulos apresentados na **Figura 13** e **Figura 14**. Para resolver esta questão o educando precisava interpretar matematicamente as informações do enunciado, portanto, aqui destacamos a importância de contexto nos problemas, ou seja, que venha acompanhado de textos que o envolvam de significado, e assim entender que a menor extensão da nova estrada é a menor distância de um ponto a uma reta.

Após traçar a menor distância fica definido um triângulo maior WYX e um triângulo menor ZXP, ambos retângulos, respectivamente, em W e Z e semelhantes pelo primeiro caso de semelhança (AA). Para aplicar a proporção entre os lados correspondentes destes triângulos, o aluno precisaria perceber que a medida do lado oposto ao ângulo reto no triângulo ZXP não é conhecida, portanto o teorema de Pitágoras deveria ser aplicado.

Dessa forma, como já havíamos comentado, definimos cinco Procedimentos considerados recorrentes e/ou importantes para o bom desenvolvimento de cada uma destas questões. Agrupamos os instrumentos de avaliação em duas tabelas elaboradas para a análise das resoluções dos educandos respectivamente, para cada uma das questões selecionadas. Inicialmente realizaremos a análise para a questão sem contexto e depois para a questão com contexto.

### 3.6 ANÁLISE DA QUESTÃO SEM CONTEXTO

Os Procedimentos para a questão sem contexto foram: o aluno identifica a menor distância do ponto  $A$  à reta  $\overleftrightarrow{CE}$ ; considera como semelhantes os triângulos  $FAC$  e  $BCD$  (**Figura 15**); considera como semelhantes os triângulos  $ACE$  e  $BCD$  (**Figura 16**); considera como semelhantes outros triângulos; e descreve a definição de semelhança entre os triângulos encontrados na resolução. Organizamos estes procedimentos na **Tabela 3**, onde os relacionamos com os alunos e os dois grupos de Categorias de erros propostos por Makhubele (2014).

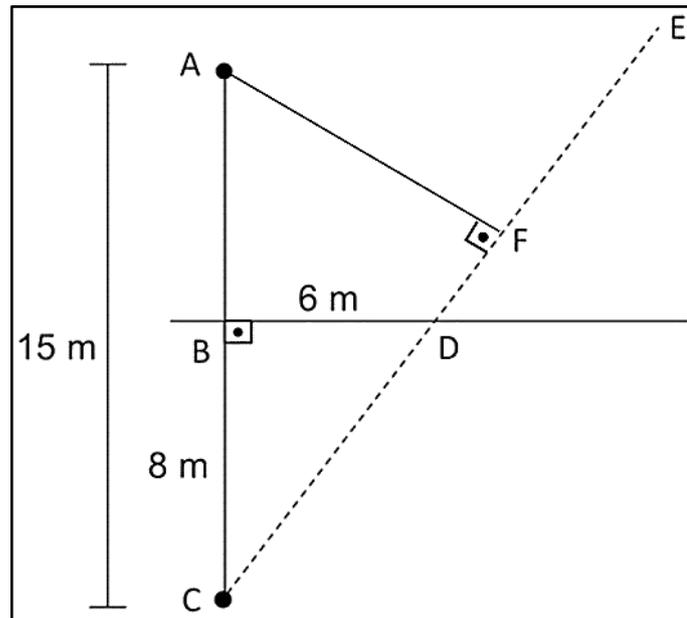
**Tabela 3** - Relação entre os cinco procedimentos dos alunos na questão sem contexto e os grupos de Categorias de erros propostos por Makhubele (2014).

Procedimentos dos alunos	Agrupamentos dos alunos	Categorias
$(P_1)$ Identifica a menor distância do ponto $A$ à reta $\overleftrightarrow{CE}$ .	Todos	$C_1, C_2, C_4, Err_1, Err_2$ e $Err_4$
$(P_2)$ Considera como semelhantes os triângulos $FAC$ e $BCD$ .	$A_8, A_{11}$ e $A_{16}$	$C_1, C_4, C_5, Err_1, Err_3$ e $Err_4$
$(P_3)$ Considera como semelhantes os triângulos $ACE$ e $BCD$ .	$A_1, A_2, A_4, A_5, A_6, A_7, A_{10}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ e $A_{15}$	$C_1, C_2, Err_1, Err_2$
$(P_4)$ Considera como semelhantes outros triângulos.	$A_3$ e $A_9$	$C_1, C_2, Err_1, Err_3$
$(P_5)$ Descreve a definição de semelhança entre os triângulos encontrados na resolução.	$A_2, A_4, A_5, A_6, A_8, A_{10}, A_{12}, A_{13}$ e $A_{15}$	$C_1, C_2, C_3, C_4, Err_1, Err_2, Err_3$

Fonte: MUNIZ, A. M. C. 2016.

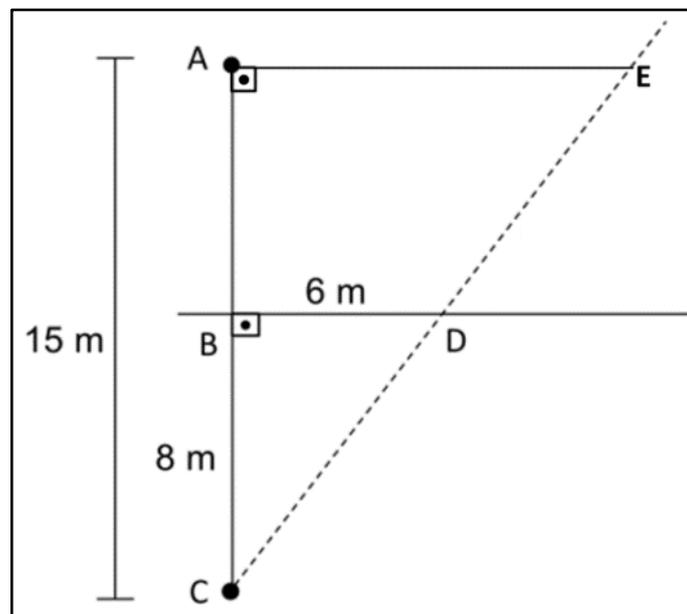
Devido às variações de nomenclaturas para os triângulos semelhantes nas resoluções dos alunos para esta questão, adotaremos por triângulos  $FAC$  (**Figura 15**) e  $ACE$  (**Figura 16**), triângulos cujas características e posicionamentos dos vértices sejam parecidos com os das figuras abaixo, respectivamente. Ou seja, o vértice  $F$  sendo um ponto da semirreta  $\overrightarrow{DE}$ , diferente do ponto  $D$ , e vértice do ângulo reto (**Figura 15**); e o vértice  $E$ , sendo um ponto da semirreta  $\overrightarrow{DE}$ , diferente do ponto  $D$ , com o ponto  $A$ , vértice do ângulo reto (**Figura 16**).

**Figura 15** - Representação correta da menor distância do ponto A à semirreta  $\overrightarrow{DE}$ .



Fonte: MUNIZ, A. M. C. 2016.

**Figura 16** - Representação errada da menor distância do ponto A à semirreta  $\overrightarrow{DE}$ .



Fonte: MUNIZ, A. M. C. 2016.

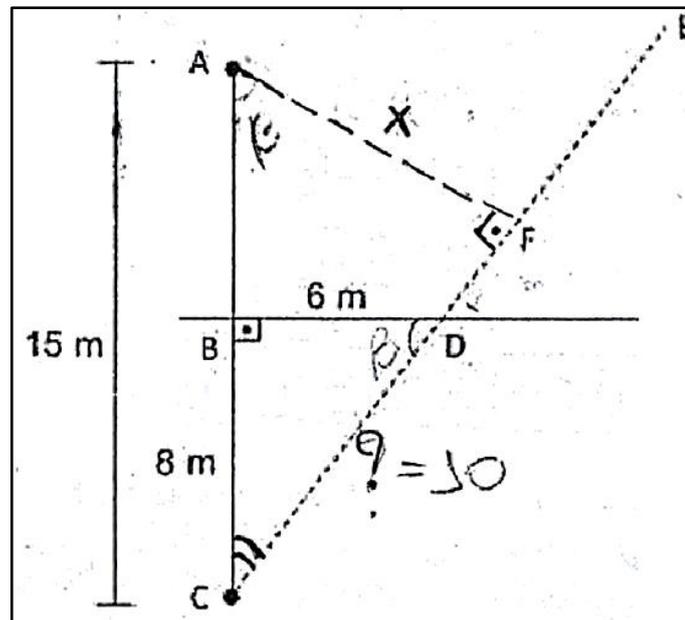
A seguir faremos a análise dos cinco procedimentos identificados anteriormente para a questão sem contexto, associando-os com os dois grupos de Categorias de erros de Makhubele (2014).

- **Procedimento 1 ( $P_1$ ):** “O aluno identifica a menor distância do ponto  $A$  à reta  $\overleftrightarrow{CE}$ .”

Todos os alunos representam este Procedimento. A seguir, analisaremos os dezesseis alunos por grupo de categorias de erros.

Três alunos destacam o Procedimento corretamente ( $C1$ ) demonstrando habilidade neste conteúdo ( $Err1$ ). A **Figura 17** mostra o desenvolvimento de um destes alunos para este Procedimento.

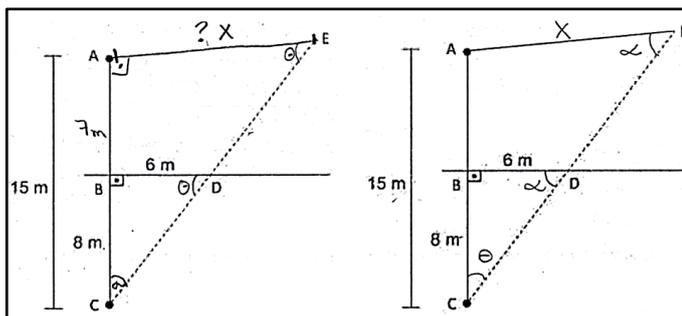
**Figura 17** - Desenvolvimento do aluno  $A_8$ .



Fonte: Atividade sem contexto resolvida pelo aluno  $A_8$ .

Doze alunos tem um raciocínio incorreto, uma resposta inválida ( $C2$ ) apresentando falta de conhecimento do conceito ( $Err3$ ). Observamos 50% destes alunos colocando a representação do ângulo  $\hat{A}$  com o símbolo do ângulo reto e os demais alunos, embora seja verificada a consideração do ângulo  $\hat{A}$  como reto nas resoluções, nem o símbolo, nem o valor, são escritos. Na **Figura 18** estão os Procedimentos dos alunos  $A_4$  e  $A_6$  exemplificando, respectivamente, tais situações.

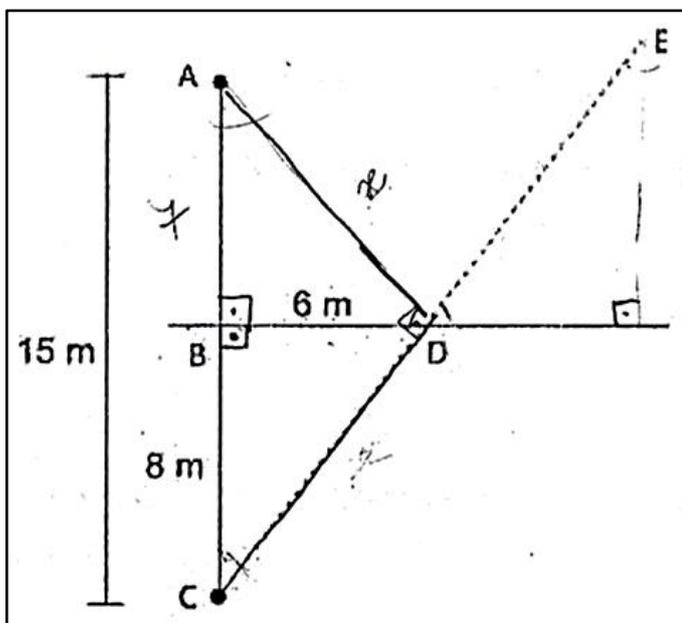
**Figura 18** - Desenvolvimento dos alunos  $A_4$  e  $A_6$ .



Fonte: Atividade sem contexto resolvidas pelos alunos  $A_4$  e  $A_6$ .

Apenas um aluno ( $A_3$ ) adota o procedimento incorreto, mas mostra um raciocínio correto (C4). Podemos considerar um lapso (*Err2*) como também, perceber que o aluno apresenta conhecimento sobre o conceito, mas não sabe aplicá-lo (*Err4*). Em seu traçado, considera a menor distância como sendo o segmento cuja extremidade é o ponto  $D$ , intersecção da reta  $\overline{CE}$  com a reta  $\overline{BD}$ . Observamos a iniciativa do mesmo de querer construir um triângulo isósceles sem perceber que as medidas não condizem com o desenvolvimento correto, apesar de seu desenho está próximo da situação correta em relação a medida dos lados (**Figura 19**).

**Figura 19** - Desenvolvimento do aluno  $A_3$ .



Fonte: Atividade sem contexto resolvida pelo aluno  $A_3$ .

• **Procedimento 2 ( $P_2$ ):** “Considera como semelhantes os triângulos  $FAC$  e  $BCD$ .”

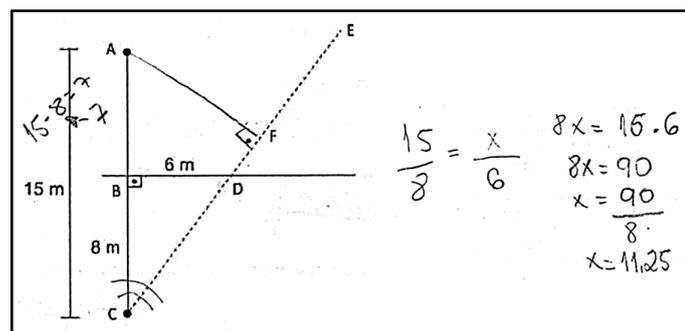
Os estudantes que apresentaram este procedimento em suas resoluções foram os três estudantes cujo Procedimento 1 foi desenvolvido corretamente ( $C1$ ).

O aluno  $A_8$  estabelece a proporção entre os lados homólogos correspondentes, do triângulo menor ( $BCD$ ) para o triângulo maior ( $FAC$ ), considerando por primeira razão desta proporção a que relaciona os respectivos lados opostos ao ângulo comum nesses triângulos. Realiza um desenvolvimento correto ( $C1$ ) e apresenta domínio do conteúdo ( $Err1$ ).

O estudante  $A_{11}$ , não desenvolve cálculos ( $C5$ ), portanto, só podemos classifica-lo nas Categorias de erro dos alunos (**Tabela 1**), e como não existem cálculos, não podemos classifica-lo nas Categorias de erros (**Tabela 2**).

Já o aluno  $A_{16}$ , embora tenha feito um procedimento incorreto, apresenta raciocínio correto ( $C4$ ) mostrando conhecer o conteúdo, mas se equivoca ao aplica-lo ( $Err4$ ); consideramos a possibilidade da recorrência deste desenvolvimento por falta de atenção e uma possível descoberta do erro após uma rápida explicação ( $Err2$ ). Este aluno estabelece a proporção entre os lados correspondentes do triângulo maior ( $FAC$ ) para o triângulo menor ( $BCD$ ), e propõe por primeira razão desta proporção, a que relaciona o lado do triângulo maior e o lado do triângulo menor opostos aos ângulos retos. Mas, em seu desenvolvimento, se equivoca ao considerar a primeira razão da proporção, a que relaciona o lado do triângulo maior oposto ao ângulo reto e o lado do triângulo menor oposto ao ângulo  $\hat{D} \equiv \hat{A} \neq 90^\circ$  (**Figura 20**).

**Figura 20** - Desenvolvimento do aluno  $A_{16}$ .



Fonte: Atividade sem contexto resolvida pelo aluno  $A_{16}$ .

• **Procedimento 3 ( $P_3$ ):** “Considera como semelhantes os triângulos  $ACE$  e  $BCD$ .”

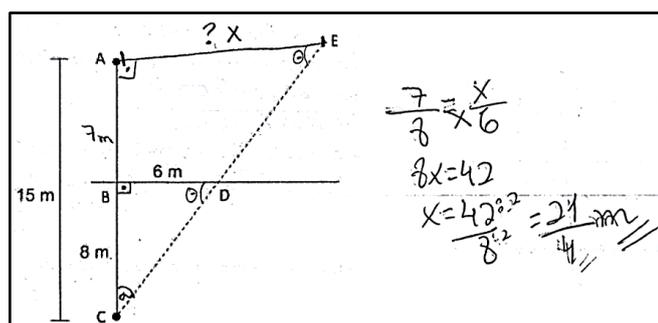
Onze alunos foram classificados para este Procedimento. A seguir serão analisados por grupos de categorias de erros.

Dez alunos produzem uma resposta correta (C1), portanto apresentam habilidades na resolução da questão (Err1). Destes, seis alunos estabelecem a proporção entre os lados correspondentes do triângulo maior (ACE) para o triângulo menor (BCD), em que cinco destes seis alunos, consideram por primeira razão desta proporção, a que relaciona os lados opostos ao ângulo comum desses triângulos ( $\hat{C}$ ); e um aluno, considera por primeira razão desta proporção, a que relacionam os lados opostos aos ângulos correspondentes  $\hat{E}$  e  $\hat{D}$  (congruentes), desses triângulos.

Os outros quatro alunos estabelecem a proporção entre os lados correspondentes, do triângulo menor (BCD) para o triângulo maior (ACE). Destes, três alunos consideram por primeira razão desta proporção, a que relacionam os lados opostos aos ângulos correspondentes  $\hat{E}$  e  $\hat{D}$ , desses triângulos e um aluno, considera por primeira razão desta proporção, a que relacionam os lados opostos ao ângulo comum desses triângulos ( $\hat{C}$ ).

Um aluno equaciona de forma errada a proporção, embora apresente um raciocínio correto (C4). Neste sentido, em sua resolução, percebemos que pode ser um erro recorrente (Err2); nesse sentido, observamos que o estudante mostra um domínio insuficiente do conteúdo. Portanto, apresenta uma dificuldade na aplicação, do mesmo, no problema (Err3 e Err4). Este aluno inicia a proporção entre os elementos homólogos, do triângulo maior (ACE) para o triângulo menor (BCD), mas confunde o conceito de Semelhança de Triângulos com o conceito do Teorema de Tales quando considera a primeira razão desta proporção, a que relaciona o segmento  $\overline{AB}$ , parte do lado AC oposto ao ângulo  $\hat{E}$  no triângulo maior, com o lado BC, do triângulo menor oposto ao ângulo  $\hat{D}$ , correspondente ao  $\hat{E}$  no triângulo maior. (Figura 21). Esse é um fato importante que os professores devem estar atentos, no sentido de corrigir os erros e dificuldades dos estudantes, quando trabalham Semelhança de Triângulos e não observam a associação ao Teorema de Tales de forma errada.

**Figura 21** - Desenvolvimento do aluno A<sub>4</sub>.

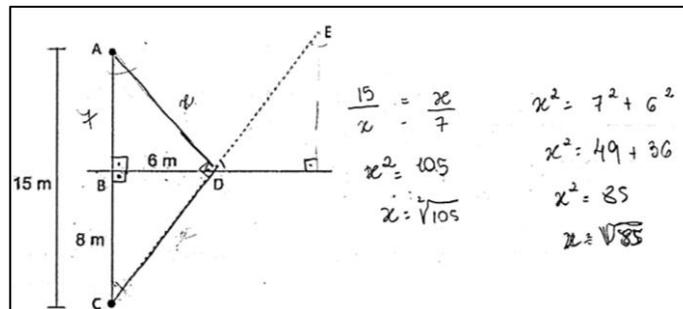


Fonte: Atividade sem contexto resolvida pelo aluno A<sub>4</sub>.

• **Procedimento 4 ( $P_4$ ):** “Considera como semelhantes outros triângulos”.

O aluno  $A_3$  apresenta uma resposta incorreta e demonstra um raciocínio inválido para essa questão ( $C2$ ). Demonstra não conhecer ou não dominar o conceito ( $Err3$ ); talvez tenha memorizado os conceitos e desenvolvimentos, mas não soube aplicar ou não sabe como e onde aplicar ( $Err4$ ). Em sua resolução observamos dois procedimentos de cálculos distintos para uma mesma finalidade, mostrando uma aplicação cega, ou seja, não coerente dos procedimentos que utiliza, pois de fato não sabe o procedimento adequado a ser utilizado ( $Err5$ ). Acreditamos que mesmo com o fato da deficiência no Procedimento 1, este aluno não desenvolveria corretamente a questão, devido a incoerência estabelecida na proporção (**Figura 22**).

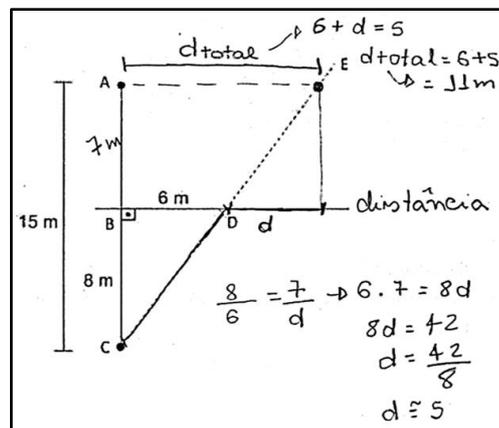
**Figura 22** - Desenvolvimento do aluno  $A_3$ .



Fonte: Atividade sem contexto resolvida pelo aluno  $A_3$ .

O aluno  $A_9$  mostra uma resposta válida para este procedimento ( $C1$ ), portanto, um domínio e habilidade do conteúdo ( $Err1$ ). Acreditamos ser um dos fatores contribuintes para o erro da questão, a incoerência no desenvolvimento do Procedimento 1 (**Figura 23**).

**Figura 23** - Desenvolvimento do aluno  $A_9$ .



Fonte: Atividade sem contexto resolvida pelo aluno  $A_9$ .

● **Procedimento 5 ( $P_5$ ):** “Descreve a definição de semelhança entre os triângulos encontrados na resolução”.

Observamos que cinco estudantes, com suas palavras, conseguem atingir um raciocínio válido ( $C1$ ) para este Procedimento, mostrando uma habilidade do conteúdo ( $Err1$ ).

Os alunos  $A_2$  e  $A_{12}$  descrevem a semelhança entre os triângulos baseando-se no teorema fundamental da semelhança e no primeiro caso de semelhança ( $AA$ ).

*“Traçando uma paralela no ponto  $A$ , e formando um triângulo maior, no qual já existe um triângulo menor. Esses triângulos são semelhantes pelo fato de apresentarem dois ângulos congruentes. Tendo dois ângulos congruentes, (incluindo o ponto  $C$  que é o ângulo comum entre eles) pode – se dizer que os triângulos são semelhantes”* (Escrita do aluno  $A_2$ ).

*“A menor distância vai ser a que forma  $90^\circ$ , assim temos um triângulo  $CAE$ , cortado pela paralela  $BD$ , o que garante a Semelhança de Triângulos. Ambos também possuem um ângulo em comum e o ângulo de  $90^\circ$ ”* (Escrita do aluno  $A_{12}$ ).

Os alunos  $A_8$  e  $A_{10}$  descrevem a semelhança entre os triângulos fundamentada apenas no primeiro caso de semelhança ( $AA$ ). Ressaltamos na escrita de  $A_{10}$  uma pequena confusão ao mencionar “*triângulo  $BAE$* ”, quando deveria ser “*triângulo  $BCD$* ”, após analisar seus cálculos.

*“São semelhantes porque possuem ambos o ângulo de  $90^\circ$  e também possuem um ângulo comum no ponto  $C$ ”* (Escrita do aluno  $A_8$ ).

*“Por Semelhança de Triângulos... O triângulo  $CAE$  é semelhante ao triângulo  $BAE$ , pois terão o ângulo  $\alpha$  em comum, assim como ambos irão ter o de  $90^\circ$  e conseqüentemente o  $\beta$ ”* (Escrita do aluno  $A_{10}$ ).

Já o aluno  $A_{15}$ , embora deixe a desejar em sua explicação talvez por falta de domínio e habilidade das terminologias ( $Err3$ ), atinge um raciocínio válido e se baseia apenas no teorema fundamental da semelhança.

*“Traçando uma reta paralela à  $\overline{BD}$  e aplicando semelhança de triângulo, pois os lados são proporcionais”* (Escrita do aluno  $A_{15}$ ).

Apenas dois alunos demonstram um raciocínio inválido, descreve incorretamente a semelhança entre os triângulos (C2).

O aluno  $A_4$ , mostra ter um domínio insuficiente do conceito (Err3); já o aluno  $A_{13}$  não conhece o conceito e não domina as terminologias (Err3).

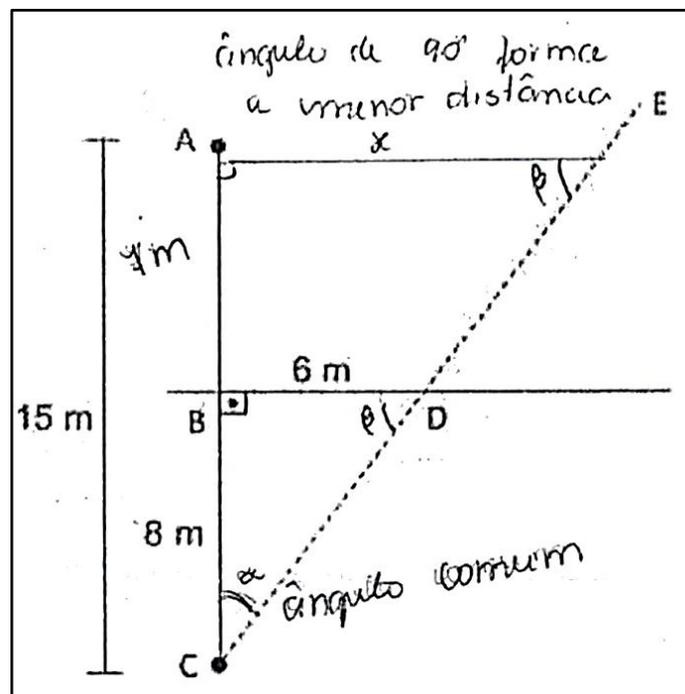
“Os triângulos são semelhantes porque tem em comum o ângulo  $\alpha$ ” (Escrita do aluno  $A_4$ ).

“São iguais, pois tem ângulos iguais” (Escrita do aluno  $A_{13}$ ).

E também apenas dois alunos descrevem a semelhança incorretamente, mas mostram um raciocínio correto (C4). São os alunos  $A_5$  e  $A_6$ . Podendo ter sido uma distração ou dificuldade ao escrever a definição, mas talvez facilmente revertida após uma explicação sobre este tópico (Err2 e Err3).

“Os triângulos são semelhantes porque possuem os ângulos  $\alpha$  e  $90^\circ$  em comum” (Escrita do aluno  $A_5$ ).

**Figura 24** - Desenvolvimento do aluno  $A_5$ .



Fonte: Atividade sem contexto resolvida pelo aluno  $A_5$ .

“Utilizei a Semelhança de Triângulos, pois os triângulos possuem um ângulo em comum e dois lados proporcionais, sendo esses o ângulo  $\theta$  e os lados  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CD}$ ,  $\overline{CE}$ . Ângulos respectivamente congruentes e lados proporcionais garantem Semelhança de Triângulos” (Escrita do aluno  $A_6$ ).

### 3.7 ANÁLISE DA QUESTÃO COM CONTEXTO

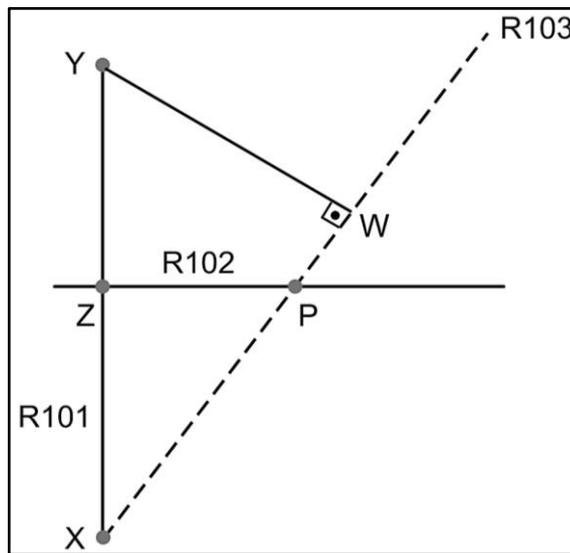
Os Procedimentos da questão com contexto foram: o aluno identifica a menor distância do ponto  $Y$  à reta  $\overline{XP}$ ; considera como semelhantes os triângulos  $WYX$  e  $ZXP$  (**Figura 25**); considera como semelhantes os triângulos  $YXK$  e  $ZXP$  (**Figura 26**); considera como semelhantes outros triângulos; e descreve a definição de semelhança entre os triângulos encontrados na resolução. Organizamos estes procedimentos na **Tabela 4**, onde os relacionamos com os alunos e os dois grupos de Categorias de erros propostos por Makhubele (2014).

**Tabela 4** - Relação entre os cinco procedimentos dos alunos na questão com contexto e os grupos de Categorias de erros propostos por Makhubele (2014).

Procedimentos dos alunos	Agrupamentos dos alunos	Categorias
$(P_1)$ Identifica a menor distância do ponto $Y$ à reta $\overline{XP}$ .	Todos	$C_1, C_2, C_4, Err_1, Err_2, Err_3$ e $Err_4$
$(P_2)$ Considera como semelhantes os triângulos $WYX$ e $ZXP$ .	$A_1, A_3, A_4, A_5, A_6, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ e $A_{16}$	$C_1, C_4, Err_1, Err_2, Err_3$ e $Err_4$
$(P_3)$ Considera como semelhantes os triângulos $YXK$ e $ZXP$ .	$A_7$	$C_1$ e $Err_1$
$(P_4)$ Considera como semelhantes outros triângulos.	$A_2, A_8$ e $A_{15}$	$C_1, C_2, C_5, Err_1, Err_3$ e $Err_4$
$(P_5)$ Descreve a definição de semelhança entre os triângulos encontrados na resolução.	$A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_8, A_{10}, A_{12}$ e $A_{16}$	$C_1, C_2, C_4, Err_1$ e $Err_3$

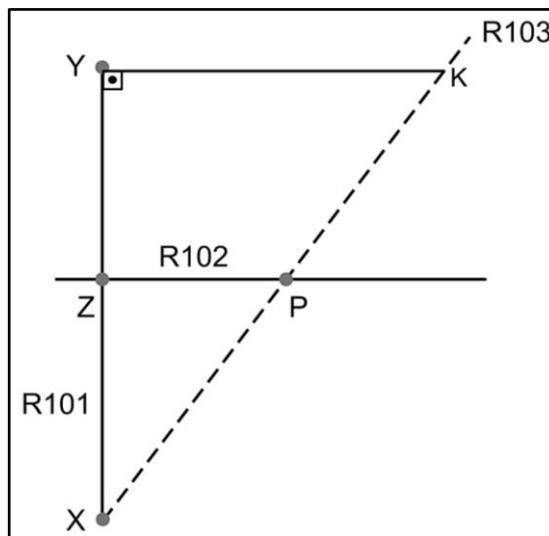
Devido às variações de nomenclaturas para os triângulos semelhantes nas resoluções dos alunos, adotaremos por triângulos  $WYX$  (**Figura 25**) e  $YXK$  (**Figura 26**), triângulos cujas características e posicionamentos dos vértices sejam parecidos com os das figuras abaixo, respectivamente. Ou seja, o vértice  $W$  sendo um ponto da semirreta  $\overrightarrow{PR}$ , diferente do ponto  $P$ , e vértice do ângulo reto (**Figura 25**); e o vértice  $K$ , sendo um ponto da semirreta  $\overrightarrow{PR}$ , diferente do ponto  $P$ , com o ponto  $Y$ , vértice do ângulo reto (**Figura 26**).

**Figura 25** - Representação correta da menor distância do ponto  $Y$  à semirreta  $\overrightarrow{PR}$ .



Fonte: MUNIZ, A. M. C. 2016.

**Figura 26** - Representação incorreta da menor distância do ponto  $Y$  à semirreta  $\overrightarrow{PR}$ .



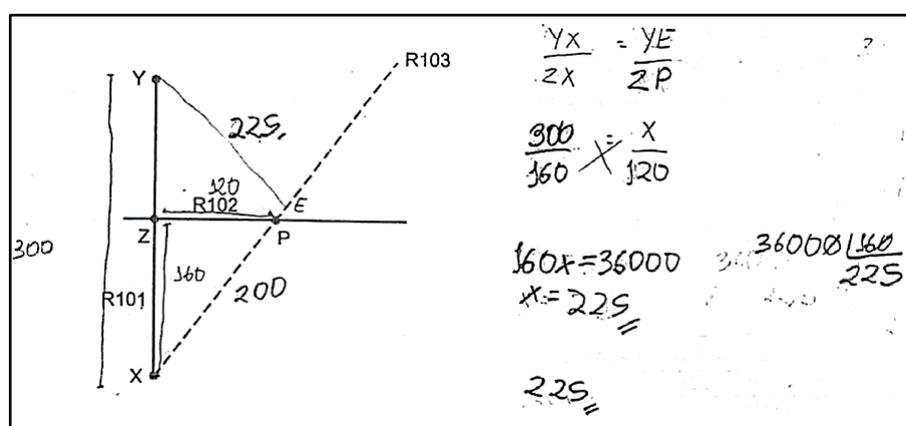
Fonte: MUNIZ, A. M. C. 2016.

A seguir faremos a análise dos cinco procedimentos identificados anteriormente para a questão com contexto, associando-os com os dois grupos de Categorias de erros de Makhubele (2014).

• **Procedimento 1 ( $P_1$ ):** “O aluno identifica a menor distância do ponto  $Y$  à reta  $\overline{XP}$ .”

Doze alunos apresentaram uma resposta correta (C1). Portanto mostraram ter habilidade e domínio neste conceito (Err1). Destes, apenas o aluno  $A_1$ , embora tenha considerado o ângulo  $\hat{E}$  como ângulo reto em suas resoluções, nem o símbolo, nem o valor, foram escritos.

**Figura 27** - Desenvolvimento do aluno  $A_1$ .

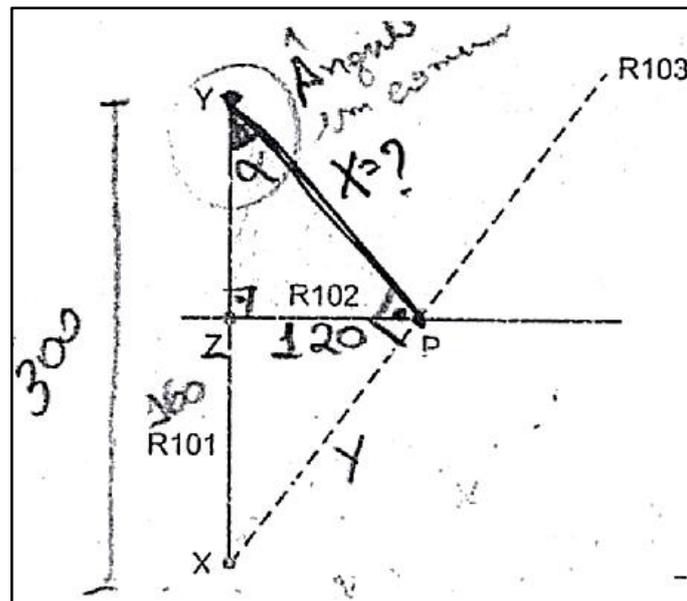


Fonte: Atividade com contexto resolvida pelo aluno  $A_1$ .

Três alunos apresentaram procedimentos incorretos e raciocínios inválidos (C2). Destes,  $A_2$  e  $A_{15}$  mostram não conhecer o conceito e a terminologia (Err3) e o aluno  $A_7$ , conhece o conceito, mas não consegue aplicá-lo corretamente (Err4), embora acreditemos ser possível uma recorrência deste procedimento, através da observação de resoluções corretas talvez este aluno seja capaz de gerar um entendimento automático (Err2).

Apenas o aluno  $A_8$  teve um procedimento incorreto, mas o seu raciocínio foi correto (C4). Mostra uma desatenção com a possibilidade de ser entendido rapidamente por si só ou através da observação de resoluções corretas (Err2). Acreditamos na possibilidade do lapso, já que na prova anterior, este educando apresentou habilidade e domínio neste conceito. Outra suposição é que talvez, por ser uma questão com contexto e que aborda em seu enunciado situações de intersecção de rodovias com cidades, possa ter distraído e induzido o aluno a considerar a menor distância interceptando a rodovia  $R102$  no ponto  $P$  (Figura 28).

**Figura 28** - Desenvolvimento do aluno  $A_8$ .



Fonte: Atividade com contexto resolvida pelo aluno  $A_8$ .

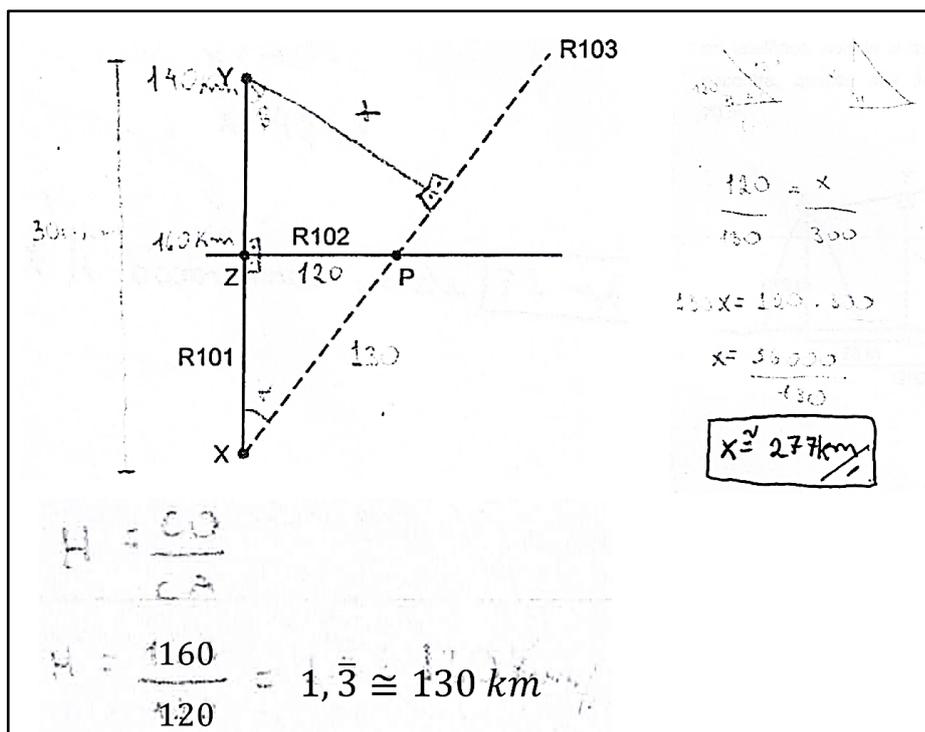
- **Procedimento 2 ( $P_2$ ):** “Considera como semelhantes os triângulos  $WYX$  e  $ZXP$ .”

Doze alunos contemplam resoluções com esta abordagem.

Dez respondem corretamente e apresentam raciocínio válido ( $C1$ ), portanto, mostram conhecimento e habilidade neste Procedimento ( $Err1$ ).

Metade destes alunos desenvolve a proporção do triângulo menor ( $ZXP$ ) para o triângulo maior ( $WYP$ ). Destes cinco alunos, três consideram por primeira razão desta proporção, a que relaciona os lados opostos aos ângulos retos correspondentes nestes triângulos; um considera por primeira razão desta proporção, a que relaciona os lados opostos ao ângulo comum ( $\hat{X}$ ) nestes triângulos; e outro aluno (**Figura 29**) considera por primeira razão desta proporção, a que relaciona o lado oposto ao ângulo comum ( $\hat{X}$ ) no triângulo menor, com o lado oposto ao ângulo reto deste mesmo triângulo.

**Figura 29** - Desenvolvimento do aluno  $A_{14}$ .



Fonte: Atividade com contexto resolvida pelo aluno  $A_{14}$ .

A outra metade estabelece a proporção do triângulo maior ( $WYP$ ) para o triângulo menor ( $ZXP$ ). Três destes alunos consideram por primeira razão desta proporção, a que relaciona os lados opostos aos respectivos ângulos retos nestes triângulos; os outros dois consideram por primeira razão desta proporção, a que relaciona os lados opostos ao ângulo comum ( $\hat{X}$ ) nestes triângulos.

Dos dez alunos mencionados anteriormente, apenas os alunos  $A_6$  e  $A_{14}$  obtiveram em seus cálculos resultado incorreto para esta questão. No caso do aluno  $A_6$ , ocorreu um deslize na operação de multiplicação final (**Figura 30**); e no caso do aluno  $A_{14}$ , percebe-se uma aplicação inadequada da ideia de razões trigonométricas, ao calcular a medida do comprimento da hipotenusa  $\overline{XP}$  do triângulo  $ZXP$  e ainda pela consideração de  $1,3 \text{ km}$  como sendo aproximadamente  $130 \text{ km}$ , levando a uma medida errada e consequentemente um resultado errado pelos cálculos da proporção (**Figura 29**).

**Figura 30** - Cálculo do aluno  $A_6$  ao desenvolver a proporção da questão com contexto.

The image shows a student's handwritten work in a rectangular box. At the top, there is a proportion:  $\frac{D}{120} = \frac{300}{200}$ . Below this, the student has written  $2D = 120$ . At the bottom, the final result is boxed:  $D = 60 \text{ km}$ .

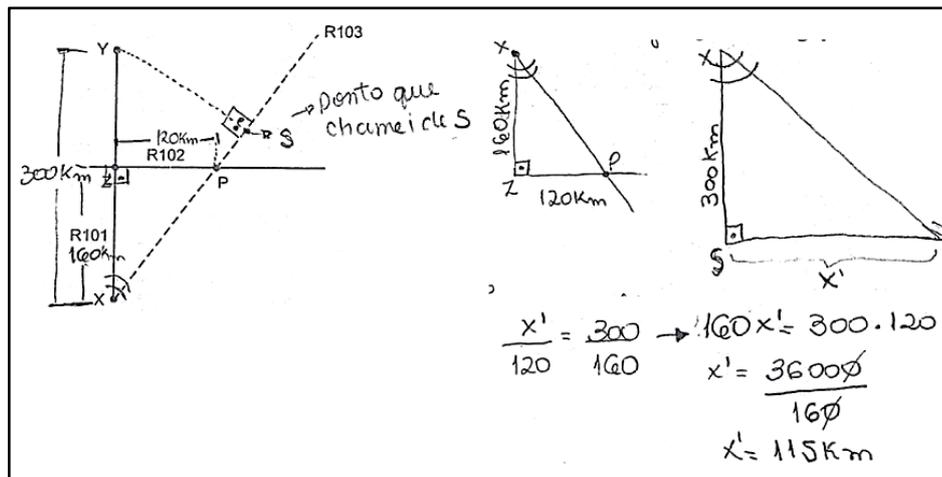
Fonte: Atividade com contexto resolvida pelo aluno  $A_6$ .

Dos doze alunos classificados neste procedimento, apenas dois apresentam desenvolvimento incorreto, mas raciocínio correto ( $C4$ ).

O aluno  $A_1$  mostra conhecer o conteúdo, mas não sabe quando e porque aplicá-lo ( $Err4$ ) e, por isso, podemos considerar ser um erro propício à repetição ( $Err2$ ). Este aluno estabelece a proporção do triângulo maior ( $EYX$ ) para o triângulo menor ( $ZXP$ ) e considera por primeira razão desta proporção, a que relaciona o lado  $YX$  oposto ao ângulo reto no triângulo maior, com o lado  $ZX$  oposto ao ângulo  $\hat{P}$ , cuja medida é diferente de  $90^\circ$ , no triângulo menor (**Figura 27**). Os lados  $YX$  e  $ZX$  não são lados correspondentes, pois não se opõem a ângulos congruentes. Portanto, a proporção está incorreta. Por serem comuns questões envolvendo Semelhança de Triângulos em que um par de lados correspondentes proporcionais são segmentos consecutivos, entendemos ser este o motivo do procedimento deste aluno, quando estabelece a proporção entre os segmentos consecutivos  $\overline{YX}$  e  $\overline{ZX}$ , lados dos triângulos semelhantes  $EYZ$  e  $ZXP$  (**Figura 27**).

O aluno  $A_{16}$  apresenta domínio insuficiente em alguns pontos conceituais ( $Err3$ ) ao fazer o esboço de cada um dos triângulos semelhantes e não levar em consideração a relação de lados e ângulos opostos a estes lados (**Figura 31**). Apresenta a proporção do triângulo maior ( $WYX$ ) para o triângulo menor ( $ZXP$ ), considerando por primeira razão desta proporção, a que relaciona os lados opostos ao ângulo comum nestes triângulos. Entendemos este procedimento como sendo análogo ao do aluno  $A_1$ , portanto um erro passível de repetição ( $Err2$ ). Ressaltamos para um erro na operação de divisão ao final dos seus cálculos (**Figura 31**).

**Figura 31** - Desenvolvimento do aluno  $A_{16}$ .



Fonte: Atividade com contexto resolvida pelo aluno  $A_{16}$ .

● **Procedimento 3 ( $P_3$ ):** “Considera como semelhantes os triângulos  $YXK$  e  $ZXP$ .”

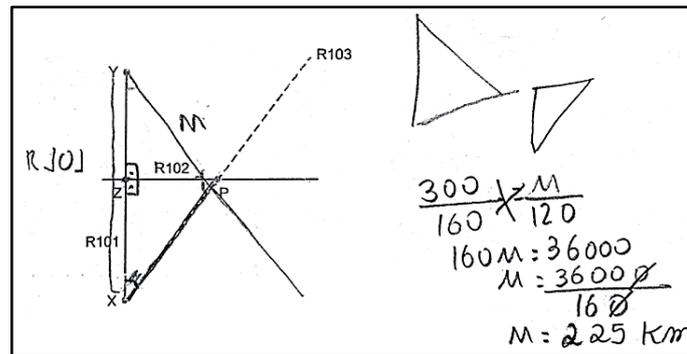
Apenas o aluno  $A_7$  apresenta este Procedimento. Desenvolve um raciocínio válido ( $C1$ ), mostrando domínio do conteúdo ( $Err1$ ). Estabelece a proporção do triângulo maior ( $YXK$ ) para o triângulo menor ( $ZXP$ ) e considera por primeira razão desta proporção, a que relaciona os lados opostos ao ângulo comum ( $\hat{X}$ ) nestes triângulos.

● **Procedimento 4 ( $P_4$ ):** “Considera como semelhantes outros triângulos”.

Os três alunos agrupados neste procedimento apresentam diferentes posicionamentos em suas resoluções, portanto, analisaremos individualmente cada um.

O aluno  $A_2$  apresenta um procedimento incorreto e um raciocínio incorreto ( $C3$ ); demonstra conhecimento conceitual, mas se equivoca na aplicação deste conceito ou não sabe onde ou porque aplica-lo ( $Err4$ ). Estabelece a proporção entre o triângulo maior  $TYX$  (consideramos por  $T$  o vértice desconhecido) e o triângulo menor  $ZXP$  e considera por primeira razão desta proporção, a que relaciona os lados  $YX$  (do triângulo maior) e  $ZX$  (do triângulo menor), aos quais chama de altura destes triângulos (**Figura 32**); em seguida, considera por segunda razão a que relaciona os lados opostos ao ângulo comum  $\hat{X}$  nos triângulos. Embora desenhe separadamente os triângulos aos quais considera por semelhantes tal desenho é incompleto, já que não informa vértices e medidas de lados. Isto dificulta saber se é o ponto  $P$ , ou não, o vértice ao qual consideramos por “ $T$ ”.

**Figura 32** - Desenvolvimento do aluno  $A_2$ .



Fonte: Atividade com contexto resolvida pelo aluno  $A_2$ .

O aluno  $A_8$ , apresenta raciocínio válido ( $C1$ ), portanto, mostra conhecimento e habilidade neste procedimento ( $Err1$ ). É importante informar que em seu desenvolvimento o aluno define por semelhantes os triângulos  $PYX$  e  $ZXP$ , considerando como ângulo comum  $\hat{Y}$  e retos os ângulos  $\hat{P}$  e  $\hat{Z}$ , respectivamente. Pelas características de um triângulo retângulo, o triângulo  $PYX$  não é retângulo, portanto,  $\hat{P} \neq 90^\circ$ . O educando estabelece a proporção a partir do triângulo maior ( $PYX$ ) para o triângulo menor ( $ZXP$ ), tomando por primeira razão desta proporção, a que relaciona os lados opostos aos respectivos ângulos reto nestes triângulos. Os cálculos ficam corretos porque, embora os triângulos considerados sejam impróprios, as medidas dos lados dos triângulos corretos são as mesmas dos triângulos apresentados por este aluno em sua resolução (**Figura 28**).

O aluno  $A_{15}$  após desenvolver o Procedimento 1 de forma incorreta, não identifica os triângulos aos quais consideram semelhantes e não apresenta cálculos para a resolução da questão, ou seja, nenhuma tentativa feita ( $C5$ ).

• **Procedimento 5 ( $P_5$ ):** “Descreve a definição de semelhança entre os triângulos encontrados na resolução”.

Observamos que seis estudantes, com suas palavras, conseguem atingir um raciocínio válido ( $C1$ ) para este procedimento, mostrando uma habilidade do conteúdo ( $Err1$ ). Todos descrevem a semelhança entre os triângulos baseando-se no primeiro caso de semelhança ( $AA$ ).

“Aplica – se Semelhança de Triângulos, pois sabe – se ambos tem dois ângulos congruentes” (Escrita do aluno  $A_2$ ).

“A menor distância vai ser uma reta perpendicular à  $R103$ , quando traçada, forma um triângulo  $YLX$  pois possuem um ângulo em comum, o  $Z\hat{X}P/Y\hat{X}L$  e

*ambos possuem um ângulo reto, sendo possível a Semelhança de Triângulos”* (Escrita do aluno  $A_3$ ).

*“Observamos que os dois triângulos são semelhantes pois possuem um ângulo em comum ( $\alpha$ ) e um ângulo congruente ( $\square$ )”* (Escrita do aluno  $A_6$ ).

*“São triângulos semelhantes por possuírem um ângulo em comum e também ambos possuem o ângulo de  $90^\circ$ ”* (Escrita do aluno  $A_8$ ).

*“Para resolver o problemas usam os Semelhança de Triângulos onde  $XYW$  é semelhante ao  $XZP$ , porque os dois tem o ângulo “linha” em comum e ambos tem o ângulo de  $90^\circ$ , garantindo assim que  $\alpha$  seja o mesmo para os dois”* (Escrita do aluno  $A_{10}$ ).

*“Formamos assim um triângulo maior,  $XYZ$ , e o triângulo  $XZP$ . Ambos tem um ângulo de  $90^\circ$  e o ângulo comum”* (Escrita do aluno  $A_{12}$ ).

O aluno  $A_4$  descreve incorretamente a definição de semelhança entre triângulos mostrando raciocínio inválido (C2) e falta de conhecimento do conceito (Err3).

*“Os triângulos são semelhantes pois apresenta um ângulo em comum  $\alpha$ ”* (Escrita do aluno  $A_4$ ).

Os alunos  $A_5$  e  $A_{16}$  apresentam uma escrita incorreta, mas um raciocínio correto (C4); não dominam e não tem familiaridade com o conceito (Err3).

*“E, como a soma interna é  $180^\circ$ , os dois triângulos possuem o ângulo  $90^\circ$ , o ângulo  $\alpha$  é comum, o terceiro ( $\beta$ ) também é comum. Logo, pode – se aplicar a Semelhança de Triângulos”* (Escrita do aluno  $A_5$ ).

*“E posso aplicar Semelhança de Triângulos pela definição: “dois e apenas dois, ângulos congruentes”* (Escrita do aluno  $A_{16}$ ).

#### 4 RESULTADOS DA PESQUISA

A partir das análises realizadas nos dados coletados das resoluções dos alunos nas duas questões com e sem contexto trabalhadas na pesquisa, elaboramos a **Tabela 5** que mostra os Procedimentos dos alunos na questão sem contexto e na questão com contexto, comparados as Categorias de erros dos alunos e as Categorias de erros, ambas de Makhubele (2014).

**Tabela 5** - Relação dos instrumentos avaliativos com os procedimentos dos alunos na questão sem contexto e na com contexto e os grupos das Categorias de erros de Makhubele (2014).

Instrumentos de avaliação	P. (S/C)	C.E.A. (S/C)	C.E. (S/C)	P. (C/C)	C.E.A. (C/C)	C.E. (C/C)
$A_1$	$P_1$ e $P_3$	$C_1$ e $C_2$	$Err_1$ e $Err_4$	$P_1$ e $P_2$	$C_1$ e $C_4$	$Err_1$ , $Err_2$ e $Err_4$
$A_2$	$P_1$ , $P_3$ e $P_5$	$C_1$ e $C_2$	$Err_1$ e $Err_4$	$P_1$ , $P_4$ e $P_5$	$C_1$ , $C_2$ e $C_3$	$Err_1$ , $Err_3$ e $Err_4$
$A_3$	$P_1$ e $P_4$	$C_2$ e $C_4$	$Err_2$ , $Err_3$ , $Err_4$ e $Err_5$	$P_1$ , $P_2$ e $P_5$	$C_1$	$Err_1$
$A_4$	$P_1$ , $P_3$ e $P_5$	$C_2$ e $C_4$	$Err_2$ , $Err_3$ e $Err_4$	$P_1$ , $P_2$ e $P_5$	$C_1$ e $C_2$	$Err_1$ e $Err_3$
$A_5$	$P_1$ , $P_3$ e $P_5$	$C_1$ , $C_2$ e $C_4$	$Err_1$ , $Err_2$ , $Err_3$ e $Err_4$	$P_1$ , $P_2$ e $P_5$	$C_1$ e $C_4$	$Err_1$ e $Err_3$
$A_6$	$P_1$ , $P_3$ e $P_5$	$C_1$ , $C_2$ e $C_3$	$Err_1$ , $Err_2$ , $Err_3$ e $Err_4$	$P_1$ , $P_2$ e $P_5$	$C_1$	$Err_1$
$A_7$	$P_1$ e $P_3$	$C_1$ e $C_2$	$Err_1$ e $Err_4$	$P_1$ e $P_3$	$C_1$ e $C_2$	$Err_1$ , $Err_2$ e $Err_4$
$A_8$	$P_1$ , $P_2$ e $P_5$	$C_1$	$Err_1$	$P_1$ , $P_4$ e $P_5$	$C_1$ e $C_4$	$Err_1$ e $Err_2$
$A_9$	$P_1$ e $P_4$	$C_1$ e $C_2$	$Err_1$ e $Err_4$	$P_1$ e $P_2$	$C_1$	$Err_1$
$A_{10}$	$P_1$ , $P_3$ e $P_5$	$C_1$ e $C_2$	$Err_1$ e $Err_4$	$P_1$ , $P_2$ e $P_5$	$C_1$	$Err_1$
$A_{11}$	$P_1$ e $P_2$	$C_1$ e $C_5$	$Err_1$	$P_1$ e $P_2$	$C_1$	$Err_1$
$A_{12}$	$P_1$ , $P_3$ e $P_5$	$C_1$ e $C_2$	$Err_1$ e $Err_4$	$P_1$ , $P_2$ e $P_5$	$C_1$	$Err_1$
$A_{13}$	$P_1$ , $P_3$ e $P_5$	$C_1$ e $C_2$	$Err_1$ , $Err_3$ e $Err_4$	$P_1$ e $P_2$	$C_1$	$Err_1$
$A_{14}$	$P_1$ e $P_3$	$C_1$ e $C_2$	$Err_1$ e $Err_4$	$P_1$ e $P_2$	$C_1$	$Err_1$ e $Err_3$
$A_{15}$	$P_1$ , $P_3$ e $P_5$	$C_1$ , $C_2$ e $C_4$	$Err_1$ e $Err_3$	$P_1$ e $P_4$	$C_2$ e $C_5$	$Err_3$
$A_{16}$	$P_1$ e $P_2$	$C_1$ e $C_4$	$Err_1$ , $Err_2$ e $Err_4$	$P_1$ , $P_2$ e $P_5$	$C_1$ e $C_4$	$Err_1$ , $Err_2$ e $Err_3$

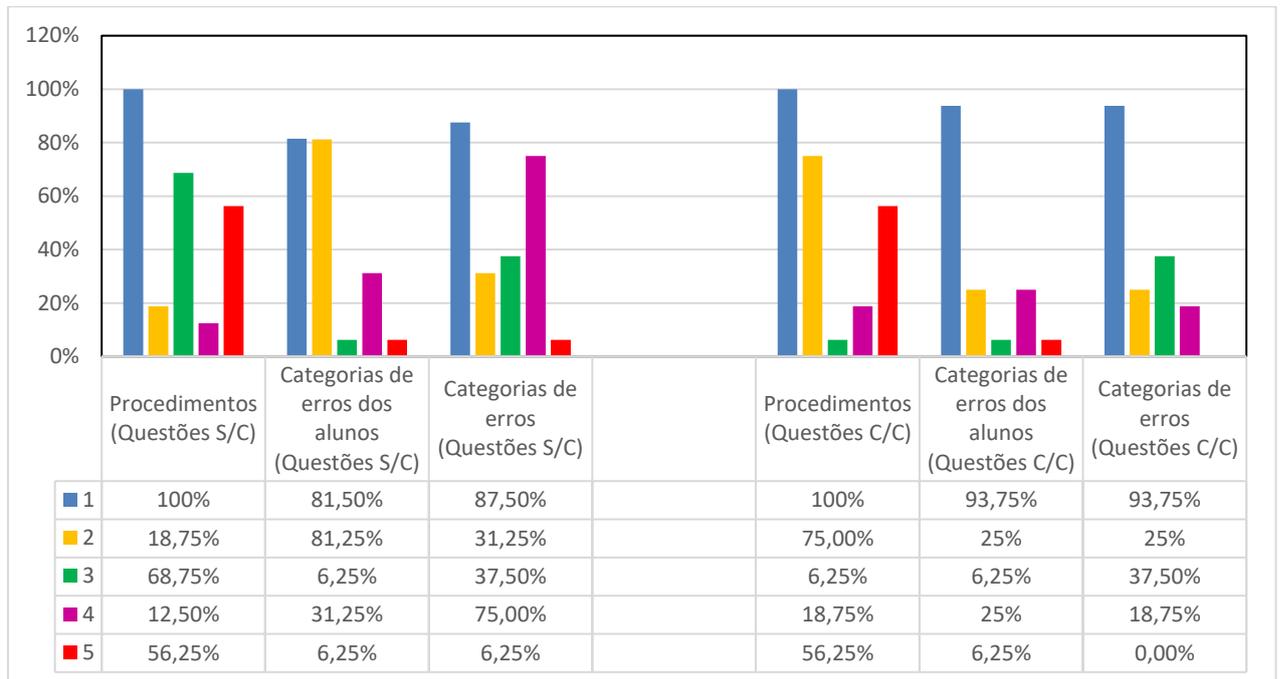
Legenda utilizada: P. (S/C)-Procedimentos na questão sem contexto; C.E.A. (S/C)-Categorias de erros dos alunos na questão sem contexto; C.E. (S/C)-Categorias de erros na questão sem contexto; P. (C/C)-Procedimentos na questão com contexto; C.E.A. (C/C)-Categorias de erros dos alunos na questão com contexto; e C.E. (C/C)-Categorias de erros na questão com contexto.

Fonte: MUNIZ, A. M. C. 2016.

A partir da **Tabela 5** podemos observar para cada aluno os Procedimentos utilizados nas resoluções de cada tipo de questão e identificar quais Procedimentos foram comuns em ambas as resoluções. Também é possível fazer esta observação com relação às Categorias de erros dos alunos (**Tabela 1**) e às Categorias de erros (**Tabela 2**), para cada aluno e tipo de questão resolvida. Um exemplo é o instrumento avaliativo  $A_6$  que com relação aos Procedimentos, tanto na questão sem contexto, como na com contexto desenvolve o Procedimento 1 e o Procedimento 5, mas com relação aos Procedimento referentes a identificação dos triângulos semelhantes, na resolução sem contexto apresenta o Procedimento 3, e na com contexto o Procedimento 2. Com relação às Categorias de erros dos alunos, observamos que para alguns Procedimentos anteriores, utilizados para resolver a questão sem contexto, percebe-se respostas corretas ( $C_1$ ), respostas erradas ( $C_2$ ) ou um raciocínio incorreto ( $C_3$ ), já na resolução da questão com contexto todos os Procedimentos foram corretos ( $C_1$ ). E com relação às Categorias de erros, para alguns Procedimentos, observamos na resolução da questão sem contexto, o acerto ( $Err_1$ ), o lapso ( $Err_2$ ), o erro conceitual ( $Err_3$ ) e o erro procedimental ( $Err_4$ ), já na resolução da questão com contexto, este aluno desenvolve os Procedimentos corretamente ( $Err_1$ ).

Após esta análise, realizamos uma análise quantitativa com respeito a classificação, por alunos, em cada um dos Procedimentos, em cada uma das Categorias de erros dos alunos (**Tabela 1**) e em cada uma das Categorias de erros (**Tabela 2**), para as duas questões selecionadas para este estudo. Inicialmente coletamos os dados separadamente e em seguida os agrupamos num gráfico, pensando em facilitar as observações e comparações com respeito aos cinco tópicos existentes em cada uma das classificações estabelecidas nesta análise, por tipo de questão.

**Gráfico 1** - Frequência relativa de cada questão com relação aos Procedimentos dos alunos, as Categorias de erros dos alunos e as Categorias de erros.



Legenda utilizada: Questões S/C-Questões sem contexto e Questões C/C-Questões com contexto.  
Fonte: MUNIZ, A. M. C. 2016.

A partir do **Gráfico 1** observamos que todos os alunos, nos dois tipos de questões, identificam a menor distância de um ponto à uma reta ( $P_1$ ).

Com relação ao Procedimento 2 observamos um crescimento percentual significativo da questão sem contexto para a questão com contexto. Entendemos que os alunos, na questão com contexto, estabelecem a proporção entre os triângulos corretos, pois desenvolvem corretamente o Procedimento 1. Não podemos afirmar que tal situação seja porque os estudantes sentiram mais dificuldade no conteúdo de Semelhança de Triângulos na questão sem contexto do que na questão com contexto. Pois, a partir das análises dos dados, observamos que dez alunos conseguiram ter um bom desempenho neste conteúdo na questão sem contexto, mesmo errando a questão, quando identificaram dois triângulos semelhantes diferentes dos propostos no enunciado. Apenas três alunos apresentaram equívocos conceituais como justificativa para o erro na questão sem contexto, frente a dois na questão com contexto; e dois alunos deixaram de desenvolver os cálculos: um na questão sem contexto e outro na questão com contexto.

Para ambas as questões, os percentuais de estudantes que desenvolvem o Procedimento 5 são iguais. Quando observamos a **Tabela 5** e as análises dos dados para o Procedimento 5 nos dois tipos de questões, percebemos que a maioria dos alunos descreve a definição de Semelhança de Triângulos na questão sem contexto de forma análoga a descrição feita na

questão com contexto, com exceção dos alunos  $A_3$  e  $A_{13}$  cujas descrições são feitas, respectivamente, apenas na questão com contexto e na sem contexto.

Com relação as Categorias de erros dos alunos (**Tabela 1**), observa-se no **Gráfico 1** uma disparidade percentual significativa para a categoria  $C_2$ , onde na questão sem contexto tem-se uma frequência relativa de 81,25% e na questão com contexto, uma frequência relativa de 25%. Isto se dá como resposta à dificuldade conceitual sobre o Procedimento 1 na resolução da questão sem contexto, já que a partir das análises dos dados deste procedimento, na questão com contexto, foi observado mais domínio dos alunos sobre o conceito da menor distância de um ponto a uma reta. Percebemos que este conceito foi fator significativo para o erro da maior parte dos instrumentos avaliativos na questão sem contexto.

Nos desenvolvimentos para a questão sem contexto, apenas um aluno aplicou o conceito da menor distância de um ponto a uma reta, corretamente. Antes da aplicação da questão com contexto, disponibilizamos para os educandos duas aulas para explanações de dúvidas, onde ocorreu a abordagem deste conceito e foi possível ouvir as dúvidas e erros cometidos pelos alunos e reestruturá-los. É neste sentido que os pensamentos dos professores israelenses Movshovitz-Hadar, Zaslavski e Inbar (1996,1986), mencionados na seção 2.5 deste trabalho, são verificados, e obtivemos como resultado que doze alunos dos dezesseis, que haviam errado sobre tal conceito na questão sem contexto, o acertaram na questão com contexto. Entendemos este acontecimento como sendo uma resposta positiva à semana de dúvidas e resolução das questões da primeira atividade, aplicada em sala. Percebemos que três alunos continuaram desenvolvendo o conceito de forma equivocada; apenas um deles permanece com o mesmo procedimento para os dois tipos de questões; e os outros dois, apresentam tentativas diferentes, em resposta à questão com contexto, com relação à que foi dada na questão sem contexto, mas não finalizam corretamente. Neste momento, visualizamos o pensamento de Cury (2007) também mencionado na seção 2.5 deste trabalho.

Em observância às outras categorias de erros dos alunos (**Tabela 1**), com relação às duas questões, as frequências relativas se mantiveram praticamente iguais.

Quanto às Categorias de erros (**Tabela 2**), a Categoria  $Err_4$  (erro procedimental) foi a que apresentou diferença significativa para os dois tipos de questões. Esta Categoria, para a questão sem contexto, teve uma frequência relativa de 75%, já para a questão com contexto teve uma frequência relativa de 18,75%. Este fato pode estar atrelado também a justificativa dada anteriormente para o comentário da Categoria de erros dos alunos  $C_2$ , como também referente a déficits em conteúdos pré-requisitos para os atuais, assim como Miranda (2007) concluiu que “a maior parte dos erros são relativos a conteúdos já estudados em séries

anteriores, mostrando que os alunos não compreenderam os conceitos e que essa incompreensão pode ser um obstáculo que se propaga pelas séries anteriores”. (MIRANDA, 2007 apud CURY, 2010, p. 3). E Pontes (2008) que discutiu sobre o que chama de “concepções alternativas (ou seja, as concepções prévias ou espontâneas) dos alunos, que podem ter influência na forma como resolvem as questões propostas e nos erros que cometem”. (PONTES, 2007 apud CURY, 2010, p. 3).

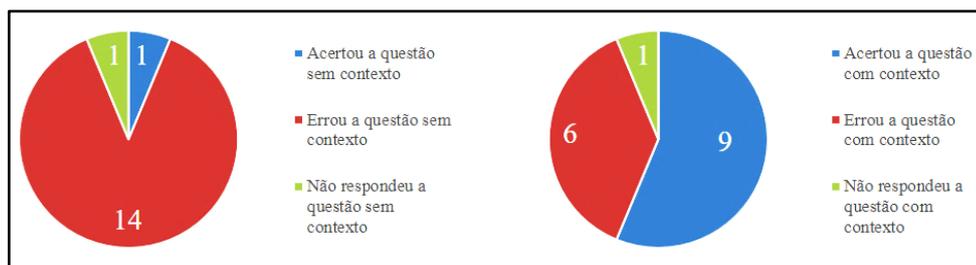
A seguir construímos a **Tabela 6** e o **Gráfico 2** para visualizarmos o quantitativo de alunos que erraram ou acertaram cada uma das questões. Neste momento, não serão consideradas as causas dos erros apenas a resposta final.

**Tabela 6** - Percentuais de alunos que erraram ou acertaram cada um dos modelos de questões.

Instrumentos de avaliação	Acertou a questão sem contexto	Errou a questão sem contexto	Acertou a questão com contexto	Errou a questão com contexto
$A_1$	Não	Sim	Não	Sim
$A_2$	Não	Sim	Não	Sim
$A_3$	Não	Sim	Sim	Não
$A_4$	Não	Sim	Sim	Não
$A_5$	Não	Sim	Sim	Não
$A_6$	Não	Sim	Não	Sim
$A_7$	Não	Sim	Não	Sim
$A_8$	Sim	Não	Sim	Não
$A_9$	Não	Sim	Sim	Não
$A_{10}$	Não	Sim	Sim	Não
$A_{11}$	Sem resposta	Sem resposta	Sim	Não
$A_{12}$	Não	Sim	Sim	Não
$A_{13}$	Não	Sim	Sim	Não
$A_{14}$	Não	Sim	Não	Sim
$A_{15}$	Não	Sim	Sem resposta	Sem resposta
$A_{16}$	Não	Sim	Não	Sim
<b>Total</b>	<b>1</b>	<b>14</b>	<b>9</b>	<b>6</b>
<b>Frequência Relativa</b>	<b>6,25%</b>	<b>87,50%</b>	<b>56,25%</b>	<b>37,50%</b>

Fonte: MUNIZ, A. M. C. 2016.

**Gráfico 2** - Análise quantitativa com relação aos acertos e erros da questão sem contexto e com contexto.



Fonte: MUNIZ, A. M. C. 2016.

A partir da **Tabela 6** e **Gráfico 2** observa-se que após análise das resoluções dos alunos na questão sem contexto, apenas o aluno  $A_8$  acertou esta questão e o aluno  $A_{11}$  não a respondeu. Já as análises com relação a questão com contexto, nove alunos acertaram esta questão e o aluno  $A_{15}$  não a respondeu. Como resultado do nosso estudo, percebemos que o principal fator contribuinte para o elevado percentual de erro, na questão sem contexto, foi a deficiência no conceito da menor distância entre ponto e reta. Com relação aos erros da questão com contexto, não existiu um fator principal, mas um conjunto de fatores que permeiam dificuldades no campo conceitual de Semelhança de Triângulos, procedimentos aritméticos envolvendo multiplicação, divisão e simplificação, e dificuldades nos conceitos sobre relações métricas e trigonométricas num triângulo retângulo.

Outro ponto importante a ser constatado em nossa análise é que oito alunos, na resolução da questão sem contexto, desenvolvem a proporção do triângulo maior para o triângulo menor, cinco alunos do triângulo menor para o triângulo maior e os outros três apresentam outro desenvolvimento. Para a resolução da questão com contexto, nove alunos desenvolvem a proporção do triângulo maior para o triângulo menor, seis alunos do triângulo menor para o triângulo maior e o outro aluno não responde à questão. Observamos que em ambas as provas mais da metade dos alunos desenvolvem a proporção do triângulo maior para o triângulo menor, e é muito próxima a quantidade de alunos cuja proporção estabelecida é do triângulo menor para o triângulo maior.

Com relação a utilização na proporção, dos lados opostos ao ângulo comum, aos ângulos retos e aos ângulos correspondentes e congruentes  $\hat{D}$  e  $\hat{E}$ , para a questão sem contexto, três alunos iniciaram a proporção relacionando os lados correspondentes ao ângulo comum, um aluno relacionando os lados correspondentes aos ângulos retos e oito alunos relacionando os lados correspondentes aos ângulos congruentes  $\hat{D}$  e  $\hat{E}$ . Para a questão com contexto, cinco alunos iniciaram a proporção relacionando os lados correspondentes ao ângulo comum e sete alunos relacionando os lados correspondentes aos ângulos retos.

## 5 CONCLUSÃO

O desejo inicial desta pesquisa era mostrar se os alunos sentiriam mais dificuldade em resolver questões sem contexto ou em resolver questões com contexto, analisar estas dificuldades e as resoluções dos alunos. Para isto elaboramos uma atividade com quatro questões com contexto, no modelo do NOVO ENEM e uma outra atividade com quatro questões sem contexto, cada uma delas elaboradas a partir das questões com contexto, ou seja, mantivemos as figuras, modificando apenas os valores numéricos e escrevemos um enunciado mais sucinto e tradicional. É importante mencionar que durante as ministrações das aulas sobre o Teorema de Tales e sobre a Semelhança de Triângulos, entregamos e resolvemos uma ficha de exercícios com questões sem e com contexto, como também resolvemos os exercícios da apostila de Geometria Plana, elaborada pela pesquisadora, do tópico sobre Semelhança de Triângulos, sendo todas estas questões parecidas com as das atividades elaboradas para a pesquisa.

A atividade sem contexto (**Figura 8 e Figura 9**) foi aplicada para a turma participante da pesquisa numa semana diferente e anterior a da que foi aplicada a atividade com contexto. Após analisar as resoluções dos alunos na atividade sem contexto, bem como seus erros e acertos, percebemos que a Questão 3 (**Figura 5**), selecionada para a pesquisa, foi a mais errada, que apenas um aluno dos dezesseis havia acertado e doze alunos haviam errado o conceito da menor distância de um ponto à uma reta. Diante deste fato e do pedido insistente dos alunos em tirar dúvidas sobre a atividade sem contexto, decidimos disponibilizar uma semana de dúvidas, pois achamos que se aplicássemos a atividade com contexto (**Figura 10, Figura 11 e Figura 12**) sem explicar novamente o conceito da menor distância de um ponto à uma reta, poderíamos ter resultados muito próximos dos obtidos na atividade sem contexto. Por conta desta intervenção didática, no decorrer da pesquisa, foi necessário modificar um pouco as ideias iniciais.

Após a semana de dúvida aplicamos a atividade com contexto com os mesmos alunos da pesquisa e após analisar suas resoluções para a Questão 1 (**Figura 6**), selecionada para a pesquisa e correspondente a Questão 3 (**Figura 5**) da atividade sem contexto, vimos que doze alunos, na questão com contexto, desenvolvem o Procedimento 2 (**Tabela 4**), pois procedem de forma correta no Procedimento 1 (**Tabela 4**), frente a três alunos, na questão sem contexto, que desenvolvem o Procedimento 2 (**Tabela 3**), pois procedem de forma correta no Procedimento 1 (**Tabela 3**).

Como resultado de nossa análise verificamos que a maior parte dos instrumentos avaliativos não encontraram dificuldade em interpretar e descrever a ideia central nos dois tipos de questões. Com relação a resolução da questão com contexto, os alunos mostram dominar interpretação de texto e conseqüentemente conseguem relacionar elementos do cotidiano com entes matemáticos. Acreditamos ser este desempenho, fruto dos tipos de questões resolvidas em sala de aula antes da realização das atividades bem como resultado da semana separada para explicações de dúvidas sobre o assunto.

Estas atividades podem ter servido como “*problemas correlatos antes vistos*”, um dos tópicos do pequeno dicionário de heurística de Polya (1995). O mesmo autor afirma que as sugestões e indagações de sua lista tem em comum o bom senso e a generalidade, portanto, podem ocorrer ao próprio estudante mesmo sem os mesmos tê-las conhecido.

Para o grupo de estudantes analisados, a diferença da modalidade de questões não foi fator preponderante para desempenho dos mesmos. Em ambas as questões se observou um domínio no conteúdo de Semelhança de Triângulos em mais da metade das resoluções dos alunos. E o fator determinante para o erro na primeira atividade foi, como já mencionado anteriormente, a compreensão errada sobre a menor distância de um ponto à uma reta.

## REFERÊNCIAS

- ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, Rio Claro SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223514005>> [Acesso em: 04 dez. 2016].
- ALMEIDA, Nilze et al. **Matemática: ciência e aplicações**. 1. São Paulo: Ed. Saraiva, 2013. 236-246 p.
- ALMOULOUD, Saddo Ag; MACIEL, Aleksandra Camara. O ensino de semelhança: uma proposta de ensino. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2013, São Paulo. **Anais eletrônicos ...** São Paulo: SBEM, 2013. Disponível em: <[http://www.sbemrasil.org.br/files/ix\\_ENEM/Html/comunicacaoCientifica.html](http://www.sbemrasil.org.br/files/ix_ENEM/Html/comunicacaoCientifica.html)> [Acesso em: 06 abr. 2017].
- ALVES, Cleiton Luis de Siqueira et al. **Problemas: observando, refletindo e construindo**. In: SEMANA DE MATEMÁTICA DA UFRPE, 10., Recife, 2011.
- BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: 10. ed., SBM, 2006.
- BERTI, Nívia Martins. O ensino de matemática no Brasil: buscando uma compreensão histórica. In: JORNADA DE ESTUDOS E PESQUISAS DO HISTEDBR, 6., 2005, Ponta Grossa. **Anais eletrônicos...** Ponta Grossa: UEPG, 2005. Disponível em: <[http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer\\_histedbr/jornada/jornada6/trabalhos/617/617.pdf](http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/jornada/jornada6/trabalhos/617/617.pdf)> [Acesso em: 11 dez. 2016].
- BOTIN, Mara Lúcia Muller; LUPINACCI, Vera Lúcia Martins. Resolução de problemas no ensino de matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais eletrônicos...** Recife: UFPE, 2004. Disponível em: <<http://www.sbemrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC18361331034.pdf>> [Acesso em: 16 nov. 2016].
- BRANDT, Célia Finck.; KLUPPEL, Gabriela Teixeira. Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 9., 2012, Caxias do Sul. **Anais eletrônicos...** Caxias do Sul: UCS, 2012. Disponível em: <[http://www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/2012/Ensino de Matematica e ciencias/Trabalho/04\\_39\\_52\\_2024-6630-1-PB.pdf](http://www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/2012/Ensino%20de%20Matematica%20e%20ciencias/Trabalho/04_39_52_2024-6630-1-PB.pdf)> [Acesso em: 18 out. 2016].
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>> [Acesso em: 15 out. 2015].
- BRASIL. Ministério da Educação. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira: Programa Internacional de Avaliação de Estudantes**. Brasília, 2012. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/PISA> [Acesso em: 15 out. 2015].

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2016. Disponível em: < <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>> [Acesso em: 20 nov. 2016].

BRASIL. Ministério da Educação. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira: Sistema de Avaliação da Educação Básica**. Brasília, 2015. Disponível em: < <http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/SAEB>> [Acesso em: 15 out. 2015].

BRASIL. Ministério da Educação. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira: Exame Nacional do Ensino Médio**. Brasília, 2015. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/ENEM>> [Acesso em: 15 out. 2015].

CARROCINO, Carlos Homero Gonçalves. **Questões contextualizadas nas provas de matemática**. Dissertação de mestrado: Rio de Janeiro: RJ, 2014. Disponível em: < <http://bit.proffmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/1341>> [Acesso em: 06 abr. 2017].

CHIUMMO, Ana; OLIVEIRA, Emilio Celso de. Análise da aprendizagem de semelhança de triângulos por alunos de graduação em matemática. *Vidya*, Santa Maria, v. 35; n. 2; p. 179-195, 2015. Disponível em <<http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/597>> [Acesso em: 10 dez. 2016].

CURY, Helena Noronha. A análise de erros na construção do saber matemático. In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA/JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 14., 2006, Passo Fundo. **Anais eletrônicos...** Passo Fundo: UPF, 2006. Disponível em: [http://jem.upf.br/images/trabalhos-2006/mesas/MRED\\_CURY\\_.pdf](http://jem.upf.br/images/trabalhos-2006/mesas/MRED_CURY_.pdf) > [Acesso em: 08 dez. 2016].

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros em demonstrações de geometria plana: um estudo com alunos de 3º grau**. Cópia datilografada da dissertação. Porto Alegre: UNIFRA, 2007. Disponível em: <[http://www.unifra.br/professores/13935/Dissertacao\\_Helena\\_Cury.pdf](http://www.unifra.br/professores/13935/Dissertacao_Helena_Cury.pdf)> [Acesso em: 08 dez. 2016].

CURY, Helena Noronha. Análise de erros. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais eletrônicos...** Salvador, 2010. Disponível em < [www.unifra.br/professores/13935/Palestra-ENEM-2010.pdf](http://www.unifra.br/professores/13935/Palestra-ENEM-2010.pdf) > [Acesso em: 08 dez. 2016].

DANTE, L.R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 2. ed. São Paulo: Ática, 1998.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**. v. 9.; 7. ed. São Paulo: Atual, 2002.

ESTEPHAN, Violeta Maria.; MOCROSKY, Luciane Ferreira; MONDINI, Fabiane. O ensino de geometria no brasil: alguns aspectos da sua origem nos livros didáticos brasileiros. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 3., 2012, Ponta Grossa. **Anais eletrônicos...** Ponta Grossa: UTFPR, 2012. Disponível em: <<http://www.sinect.com.br/anais2012/html/artigos/ensino%20mat/18.pdf>> [Acesso em: 19 dez. 2016].

FERREIRA, Ana Célia da Costa. Ensino da Geometria no Brasil: enfatizando o período do Movimento da Matemática Moderna. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – EDUCERE, 5., 2005, Curitiba. **Anais eletrônicos...** Curitiba: PUCPR, 2005. Disponível em: <<http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/painel/TCCI136.pdf>> [Acesso em: 02 nov. 2016].

INSTITUTO DE ENSINO E PESQUISA (Brasil). **Processo seletivo**. 1. ed. São Paulo, 2012. Disponível em: <<http://vestibular.brasilecola.uol.com.br/noticias/insper-divulga-gabarito-oficial-processo-seletivo-2012-1/317043.html>> [Acesso em: 07 abr. 2017].

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org), Tradução de Hygino H. Domingues. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: 5. ed., Atual, 2005.

MAKHUBELE, Yeyisani Evans. **Misconceptions and resulting erros displayed by grade 11 learners in the learning of geometry**. Dissertação de mestrado: Johannesburg: UJ, 2014. Disponível em: <<https://ujcontent.uj.ac.za/vital/access/manager/Repository/uj:13814>> [Acesso em: 05 set. 2016].

NASCIMENTO, Maristel do.; PINHEIRO, Nilceia Aparecida Maciel.; SILVA, Sani de Carvalho Rutz da. O ensino das geometrias e os livros didáticos do ensino médio: uma análise. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Ponta Grossa. **Anais eletrônicos...** Ponta Grossa: UTFPR, 2009. Disponível em: <[http://www.sinect.com.br/anais2009/artigos/10%20Ensinodematematica/Ensinodematematic\\_a\\_artigo14.pdf](http://www.sinect.com.br/anais2009/artigos/10%20Ensinodematematica/Ensinodematematic_a_artigo14.pdf)> [Acesso em: 18 out. 2016].

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos?. In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA/JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4.; 17., 2012, Passo Fundo. **Anais eletrônicos...** Passo Fundo: UPF, 2012. Disponível em: <<http://anaisjem.upf.br/download/cmp-14-onuchic.pdf>> [Acesso em: 18 nov. 2016].

PEREIRA, Marcos Fabrício Ferreira; PEREIRA, Sandra Regina Ferreira. O ensino de semelhança de triângulos na opinião de alunos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais eletrônicos...** São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: <[http://www.sbem.com.br/ENEM2016/anais/pdf/7486\\_3464\\_ID.pdf](http://www.sbem.com.br/ENEM2016/anais/pdf/7486_3464_ID.pdf)> [Acesso em: 06 abr. 2017].

PERNAMBUCO. Instituto Federal de Pernambuco: **Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco**. Caruaru, 2010. Disponível em: <<http://www.ifpe.edu.br/campus/caruaru/o-campus>> [Acesso em: 15 set. 2016].

PINTO, Neuza Bertoni; SOARES, Maria Tereza Carneiro. Metodologia da resolução de problemas. **Reunião...** GRUPO DE TRABALHO EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, UFRRJ, 24., 2001,   
Caxambú. Disponível em: <[http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_24/metodologia.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf)> [Acesso em: 26 nov. 2016].

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência Ltda, 1995. 196 p.

ROMERO, Danielle D'avila. O ensino da matemática através da resolução de problemas. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – EDUCERE, 7., 2007, Curitiba. **Anais eletrônicos...** Curitiba: PUCPR, 2007. Disponível em: <<http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2007/anaisEvento/arquivos/CI-238-14.pdf>> [Acesso em: 20 out. 2016].

SOUSA, Ariana Bezerra de. **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática.** Brasília: UCB, 2005. Disponível em: < <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf> > [Acesso em: 19 dez. 2016].

SOUZA, Alberto de Mello e (Org.). **Dimensões da avaliação educacional.** Petrópolis: 1. ed., Vozes, 2005.

SOUZA, Samilly Alexandre. Formulação e resolução de problemas geométricos a partir de materiais manipuláveis. In: ENCONTRO NACIONAL DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17., 2013, Vitória. **Anais eletrônicos...** Vitória: IFES/UFES, 2013. Disponível em <[http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ebapem/xvii\\_ebapem/paper/view/742](http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ebapem/xvii_ebapem/paper/view/742)> [Acesso em: 26 nov. 2016].

TEIXEIRA, Leny Rodrigues Martins. A análise de erros: uma perspectiva cognitiva para compreender o processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Nuance, Presidente Prudente SP, v. 3, n. 3, p. 47-52, 1997. Disponível em: <<http://revista.fct.unesp.br/index.php/Nuances/article/view/56>> [Acesso em: 10 dez. 2016].

VALÉRIO, Bárbara Corominas; OZORES, Ana Luiza Festa. A análise de erros como estratégia de ensino. In: CENTRO DO APERFEIÇOAMENTO DO ENSINO DE MATEMÁTICA – CAEM. 30. 2015, São Paulo. **Anais eletrônicos...** São Paulo: IME USP, 2015. Disponível em <[https://www.ime.usp.br/caem/anais\\_mostra\\_2015/arquivos\\_auxiliares/posteres\\_mpm/Poster\\_MPM\\_Ana\\_Luiza\\_Ozores.pdf](https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/posteres_mpm/Poster_MPM_Ana_Luiza_Ozores.pdf) > [Acesso em: 08 dez. 2016].

APÊNDICE

APÊNDICE A – Atividades sem contexto resolvidas pelos alunos.

Campus Caruaru – ATIVIDADE I

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA PERNAMBUCO

Nome: \_\_\_\_\_ Nota: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta  $\overline{CE}$ .

$x = 11,25$

$1 = 10$

$\frac{15}{8} = \frac{x}{6}$

$8x = 90$

$x = 11,25$

**Questão 04**  
Na figura abaixo,  $TK = 2$ ,  $KP = 6$ ,  $KS = 10$  e  $MS = 3$ .

Qual a medida de QP?

$\frac{10}{6} = \frac{x}{4}$

$x = 1,8$

Prof(a): Angeline Muniz

Aluno A<sub>1</sub>

Campus Caruaru – ATIVIDADE I

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA PERNAMBUCO

Nome: Maria Gabriela Alou Begemio Silva Nota: \_\_\_\_\_

Curso: Segurança do Trabalho Data: 05/10/11/2016

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta  $\overline{CE}$ .

$CE \perp AC$

$CE = x$

Tracando uma paralela no ponto A, é formado um triângulo maior, no qual já existe um triângulo menor. Esses triângulos são semelhantes pelo fato de apresentarem dois ângulos congruentes.

$\frac{15}{8} = \frac{x}{6}$

$8x = 90$

$x = 11,25$

$x = 11,25$  ou  $\frac{45}{4}$

**Questão 04**  
Na figura abaixo,  $TK = 2$ ,  $KP = 6$ ,  $KS = 10$  e  $MS = 3$ .

Qual a medida de QP?

$QP = x$

$\frac{1}{3-x} = \frac{10}{4}$

$30 - 10x = 4$

$30 - 4 = 10x$

$26 = 10x$

$x = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$

$x = 2,6$  ou  $QP = 2,6$

$\frac{13 \times 5}{30 \times 2,6}$

Sabendo o valor de KS e KP podemos descobrir o valor de PS e fazer o cálculo do quadrilátero quadrado formado, e assim descobrir o valor de x ou QP. Estes não são triângulos pois apresentarem um ângulo comum e ângulos retos, e quando dois ângulos são congruentes, dois outros não necessariamente.

Tracando dois ângulos congruentes, (medulamos o ponto C que é o ângulo comum entre eles) pode se dizer que os triângulos são semelhantes.

Prof(a): Angeline Muniz

Aluno A<sub>2</sub>

**Campus Caruaru – ATIVIDADE I**      Nota: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_      Curso: \_\_\_\_\_      Data: \_\_\_\_\_

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta CE.

$15^2 = x^2 + 8^2$   
 $x^2 = 105$   
 $x = \sqrt{105}$

$x^2 = 7^2 + 6^2$   
 $x^2 = 49 + 36$   
 $x^2 = 85$   
 $x = \sqrt{85}$

**Questão 04**  
Na figura abaixo,  $TK = 2$ ,  $KP = 6$ ,  $KS = 10$  e  $MS = 3$ .

Qual a medida de QP?

$QP = 2 + x$   
 $10x = 6$   
 $x = 0,6$

*Desenhando para facilitar a visualização a KS, obtendo dois triângulos semelhantes TQL e TMS, pois possuem um ângulo em comum e ângulos retos adjacentes.*

Aluno A<sub>3</sub>

**Campus Caruaru – ATIVIDADE I**      Nota: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_      Curso: \_\_\_\_\_      Data: \_\_\_\_\_

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta CE.

$7^2 = x^2 + 6^2$   
 $49 = x^2 + 36$   
 $x^2 = 13$   
 $x = \sqrt{13}$

$7 = \frac{x}{8}$   
 $8x = 56$   
 $x = 7$

*Os triângulos são semelhantes porque tem em comum o ângulo (α).*

**Questão 04**  
Na figura abaixo,  $TK = 2$ ,  $KP = 6$ ,  $KS = 10$  e  $MS = 3$ .

Qual a medida de QP?

$\frac{2}{3} = \frac{6}{x}$   
 $2x = 18$   
 $x = 9$

$\frac{6}{x} = \frac{2}{3}$   
 $6x = 18$   
 $x = 3$

$QP = 3$

Aluno A<sub>4</sub>

Aluno A<sub>5</sub>



**Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Pernambuco**

**Campus Caruaru – ATIVIDADE I**

Nota: \_\_\_\_\_

---

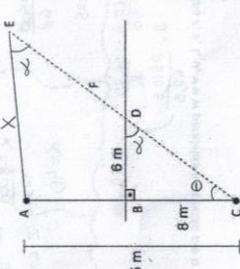
Nome: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

**Questão 03**

Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta  $\overline{CE}$ .



Os triângulos são semelhantes porque possuem os ângulos  $\alpha$  e  $90^\circ$  em comum.

Assim:

$$\frac{8}{15} = \frac{6}{x}$$

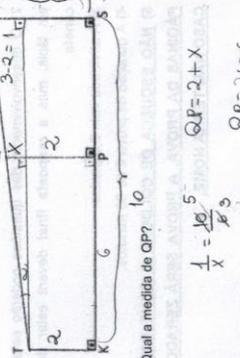
$$x = \frac{15 \cdot 6}{8}$$

$$x = 11,25 \text{ m}$$

---

**Questão 04**

Na figura abaixo,  $\overline{TK} = 2$ ,  $\overline{KP} = 6$ ,  $\overline{KS} = 10$  e  $\overline{MS} = 3$ .



Qual a medida de  $\overline{QP}$ ?

$\frac{1}{x} = \frac{10-5}{6-5}$

$\frac{1}{x} = \frac{5}{1}$

$x = \frac{1}{5} = 0,2$

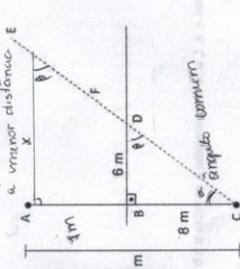
$\overline{QP} = 2 + x$

$\overline{QP} = 2,2$

---

**Questão 03**

Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta  $\overline{CE}$ .



Os triângulos são semelhantes porque possuem os ângulos  $\alpha$  e  $90^\circ$  em comum.

Assim:

$$\frac{8}{15} = \frac{6}{x}$$

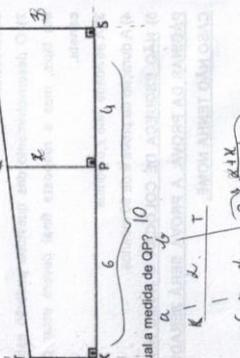
$$x = \frac{15 \cdot 6}{8}$$

$$x = 11,25 \text{ m}$$

---

**Questão 04**

Na figura abaixo,  $\overline{TK} = 2$ ,  $\overline{KP} = 6$ ,  $\overline{KS} = 10$  e  $\overline{MS} = 3$ .



Qual a medida de  $\overline{QP}$ ?

$\frac{1}{x} = \frac{10-5}{6-5}$

$\frac{1}{x} = \frac{5}{1}$

$x = \frac{1}{5} = 0,2$

$\overline{QP} = 2 + x$

$\overline{QP} = 2,2$

Aluno A<sub>6</sub>



**Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Pernambuco**

**Campus Caruaru – ATIVIDADE I**

Nota: \_\_\_\_\_

---

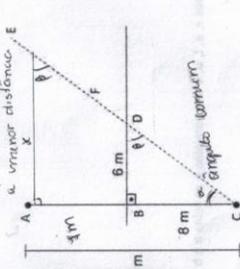
Nome: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

**Questão 03**

Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta  $\overline{CE}$ .



Os triângulos são semelhantes porque possuem os ângulos  $\alpha$  e  $90^\circ$  em comum.

Assim:

$$\frac{8}{15} = \frac{6}{x}$$

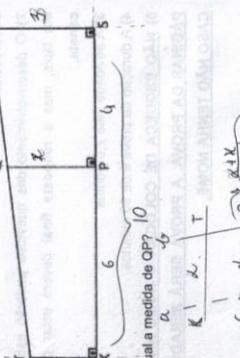
$$x = \frac{15 \cdot 6}{8}$$

$$x = 11,25 \text{ m}$$

---

**Questão 04**

Na figura abaixo,  $\overline{TK} = 2$ ,  $\overline{KP} = 6$ ,  $\overline{KS} = 10$  e  $\overline{MS} = 3$ .



Qual a medida de  $\overline{QP}$ ?

$\frac{1}{x} = \frac{10-5}{6-5}$

$\frac{1}{x} = \frac{5}{1}$

$x = \frac{1}{5} = 0,2$

$\overline{QP} = 2 + x$

$\overline{QP} = 2,2$

**Campus Caruaru - ATIVIDADE I**      **Nota:** \_\_\_\_\_

**Nome:** \_\_\_\_\_      **Curso:** \_\_\_\_\_      **Data:** \_\_\_\_\_

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta  $\overline{CE}$ .

$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{BD}$   
menor distância de  $\overline{CE}$

$$\frac{15}{8} = \frac{x}{6}$$

$$8x = 15 \cdot 6$$

$$x = \frac{90}{8}$$

**Questão 04**  
Na figura abaixo,  $\overline{TK} = 2$ ,  $\overline{KP} = 6$ ,  $\overline{KS} = 10$  e  $\overline{MS} = 3$ .

Qual a medida de  $\overline{QP}$ ?

$$\frac{x}{3} = \frac{6}{10}$$

$$10x = 18$$

$$x = \frac{18}{10} = \frac{9}{5} = 1,8$$

$\boxed{x = 1,8}$

O ângulo oposto ao menor é  $x$  e no mesmo ângulo  $\overline{P}$  oposto ao menor é  $\overline{P}$  para o  $\overline{B}$  no mesmo ângulo  $\overline{P}$  é a medida  $\overline{QP}$  é 1,8.

Aluno A<sub>7</sub>

**Campus Caruaru - ATIVIDADE I**      **Nota:** \_\_\_\_\_

**Nome:** Alexandre Roberto Silva Frazine      **Curso:** Engenharia de Tráfego      **Data:** 05/04/16

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta  $\overline{CE}$ .

$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{BD}$   
menor distância de  $\overline{CE}$

$$\frac{15}{8} = \frac{x}{6}$$

$$8x = 15 \cdot 6$$

$$8x = 90$$

$$x = \frac{90}{8}$$

$\boxed{x = 11,25}$

**Questão 04**  
Na figura abaixo,  $\overline{TK} = 2$ ,  $\overline{KP} = 6$ ,  $\overline{KS} = 10$  e  $\overline{MS} = 3$ .

Qual a medida de  $\overline{QP}$ ?

$$\frac{x-2}{1} = \frac{6}{10}$$

$$10(x-2) = 6$$

$$10x - 20 = 6$$

$$10x = 26$$

$$x = \frac{26}{10} = 2,6$$

$\boxed{x = 2,6}$

Obs: Triângulo com reta paralela a KS encontra dois triângulos retângulos e usamos a semelhança de triângulos corrigi a hora o valor de x, que no caso é a medida  $\overline{QP}$ .

Logo:  $\frac{6}{x} = \frac{10}{15} = 5$   
 $\frac{6}{x} \cdot x = \frac{10}{15} \cdot x$   
 $2x = 18$   
 $x = 9m$

Logo:  $\frac{6}{x} = \frac{10}{15} = 5$   
 $\frac{6}{x} \cdot x = \frac{10}{15} \cdot x$   
 $2x = 18$   
 $x = 9m$

Aluno A<sub>8</sub>

Aluno A<sub>9</sub>

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO

Campus Caruaru – ATIVIDADE I

Nota: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta CE.

15m  
8m

$AE = x$

$BE = 8 - x$

$CE = h$

Para semelhança de triângulos...  
Os triângulos CAE e CBE são semelhantes.  
triângulo BHE pois tem o ângulo de 90° em comum, assim com ambos, não tem o de 90° e consequentemente o op.

$$\frac{AE}{BC} = \frac{AC}{BE} \rightarrow \frac{x}{8} = \frac{15}{8-x}$$

$$6 + 10 - 20 = 10$$

$$6 + 10 - 20 = 10$$

$$6 = 10x - 20$$

$$6 + 20 = 10x$$

$$x = \frac{26}{10} \rightarrow x = 2,6$$

$AE = 2,6m$

---

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO

Campus Caruaru – ATIVIDADE I

Nota: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

**Questão 04**  
Na figura abaixo, TK = 2, KP = 6, KS = 10 e MS = 3.

2  
6  
10  
3

Qual a medida de QP? 10

Se traçarmos uma reta do ponto T ao ponto M encontraremos dois triângulos semelhantes, pois terão o ângulo de 90° em comum, assim com ambos, não tem o de 90° e consequentemente o op.

Os triângulos CAE e CBE são semelhantes.  
triângulo BHE pois tem o ângulo de 90° em comum, assim com ambos, não tem o de 90° e consequentemente o op.

$$\frac{AE}{BC} = \frac{AC}{BE} \rightarrow \frac{x}{8} = \frac{15}{8-x}$$

$$6 + 10 - 20 = 10$$

$$6 + 10 - 20 = 10$$

$$6 = 10x - 20$$

$$6 + 20 = 10x$$

$$x = \frac{26}{10} \rightarrow x = 2,6$$

$AE = 2,6m$

Aluno A<sub>10</sub>

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO

Campus Caruaru – ATIVIDADE I

Nota: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta CE.

15m  
8m

$AE = x$

$BE = 8 - x$

$CE = h$

Se nos quisermos a distância total então ela deveria ser chamada com a de 5m o que nos daria o resultado de 11m.

11m

**Questão 04**  
Na figura abaixo, TK = 2, KP = 6, KS = 10 e MS = 3.

2  
6  
10  
3

Qual a medida de QP?

temos o triângulo menor TQC e o triângulo maior TMD. Tanto no ponto E quanto no D temos um ângulo de 90° e no ponto A um ângulo em comum para os dois triângulos que será α.  
Sabemos que a altura do α (pois 3-2=1) e a altura do menor nos podemos descobrir a depois multiplicamos com 2.

$$\frac{KP}{QE} = \frac{KS}{MD} \rightarrow \frac{6}{QE} = \frac{10}{10}$$

$$QE = 6$$

então QP será igual a QE + TK  
QP será igual a 6 + 2

**Campus Caruaru – ATIVIDADE I**      Nota: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_      Data: \_\_\_\_\_

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta CE.

$15\text{ m}$        $8\text{ m}$

**Questão 04**  
Na figura abaixo,  $TR = 2$ ,  $KP = 6$ ,  $KS = 10$  e  $MS = 3$ . Qual a medida de  $QP$ ?

$2$        $6$        $10$        $3$

**Questão 03**  
A menor distância vai ser 2 que forma  $90^\circ$ , assim temos um  $\Delta CAE$ , cortado pelo feixe  $BD$ , o que geramos 2 semelhantes de triângulos. Ambos tem em comum o ângulo de  $90^\circ$ .

**Questão 04**  
Traçam do uma reta paralela a KS temos dois triângulos, cortado por uma paralela. Possuem um ângulo comum e o ângulo de  $90^\circ$ .

$$\frac{TA}{TB} = \frac{QA}{MB} \Rightarrow \frac{2}{10} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 2$$

**Questão 03**  
Continuação questão 3:  
 $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AE} \Rightarrow \frac{8}{17} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{120}{17}$

**Questão 04**  
Continuação questão 3:  
 $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AE} \Rightarrow \frac{8}{17} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{120}{17}$

Aluno A11

**Campus Caruaru – ATIVIDADE I**      Nota: \_\_\_\_\_

Nome: Matalia Maria Mendes Silva      Data: 05/09/2016

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta CE.

$15\text{ m}$        $8\text{ m}$

**Questão 04**  
Na figura abaixo,  $TR = 2$ ,  $KP = 6$ ,  $KS = 10$  e  $MS = 3$ . Qual a medida de  $QP$ ?

$2$        $6$        $10$        $3$

**Questão 03**  
A menor distância vai ser 2 que forma  $90^\circ$ , assim temos um  $\Delta CAE$ , cortado pelo feixe  $BD$ , o que geramos 2 semelhantes de triângulos. Ambos tem em comum o ângulo de  $90^\circ$ .

**Questão 04**  
Traçam do uma reta paralela a KS temos dois triângulos, cortado por uma paralela. Possuem um ângulo comum e o ângulo de  $90^\circ$ .

$$\frac{TA}{TB} = \frac{QA}{MB} \Rightarrow \frac{2}{10} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 2$$

**Questão 03**  
Continuação questão 3:  
 $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AE} \Rightarrow \frac{8}{17} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{120}{17}$

**Questão 04**  
Continuação questão 3:  
 $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AE} \Rightarrow \frac{8}{17} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{120}{17}$

Aluno A12

**Campus Caruaru – ATIVIDADE I** Nota: \_\_\_\_\_

Nome: Ricardo Gomes de Sousa Júnior Curso: Seg. de Trabalho Data: 05/01/2016

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta CE.

$15\text{ m}$ ,  $8\text{ m}$ ,  $6\text{ m}$ ,  $10$ ,  $X \approx 11$

**Questão 04**  
Na figura abaixo,  $TK = 2$ ,  $KP = 6$ ,  $KS = 10$  e  $MS = 3$ . Qual a medida de QP?

$2$ ,  $6$ ,  $10$ ,  $3$ ,  $X = \frac{4}{3}$

**Prof(a): Angeline Muniz** Segurança - V

Aluno A<sub>14</sub>

**Campus Caruaru – ATIVIDADE I** Nota: \_\_\_\_\_

Nome: Ricardo Gomes de Sousa Júnior Curso: Seg. de Trabalho Data: 05/01/2016

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta CE.

$15\text{ m}$ ,  $8\text{ m}$ ,  $6\text{ m}$ ,  $10$ ,  $X \approx 11$

**Questão 04**  
Na figura abaixo,  $TK = 2$ ,  $KP = 6$ ,  $KS = 10$  e  $MS = 3$ . Qual a medida de QP?

$2$ ,  $6$ ,  $10$ ,  $3$ ,  $X = \frac{4}{3}$

**Prof(a): Angeline Muniz** Segurança - V

Aluno A<sub>13</sub>

E15

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO

**Campus Caruaru – ATIVIDADE I**

Nome: \_\_\_\_\_ Nota: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta CE.

Qual a medida de QP?

$\frac{15}{8} = \frac{x}{6}$   
 $90 = 8x$   
 $x = \frac{90}{8} \Rightarrow x = 11,25 \text{ m}$

Aproximando uma reta paralela a BD e aplicando semelhança de triângulos nos dois lados não proporcionais.

**Questão 04**  
Na figura abaixo, TK = 2, KP = 6, KS = 10 e MS = 3.

Qual a medida de QP?

$\frac{10}{6} = \frac{1}{x}$   
 $10x = 6$   
 $x = \frac{6}{10}$   
 $x = 0,6$

Como  $x = 0,6$ , aproximando mesmo que de ir de A para a forna - cad de um du angulo na divisões ficou satisfeitos que uma parte um baixo do traço para encaixar a mesma no len de TK e encaixar o colunio para achar o valor de x.

Q.P =  $0,60 + 2$   
**Q.P = 2,60**

Prof(a): Angeline Muniz

Aluno A15

E16

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO

**Campus Caruaru – ATIVIDADE I**

Nome: \_\_\_\_\_ Nota: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

**Questão 03**  
Na figura a seguir encontre a menor distância do ponto A a reta CE.

Qual a medida de QP?

$\frac{10}{6} = \frac{1}{x}$   
 $10x = 6$   
 $x = \frac{6}{10}$   
 $x = 0,6$

Como  $x = 0,6$ , aproximando mesmo que de ir de A para a forna - cad de um du angulo na divisões ficou satisfeitos que uma parte um baixo do traço para encaixar a mesma no len de TK e encaixar o colunio para achar o valor de x.

Q.P =  $0,60 + 2$   
**Q.P = 2,60**

**Questão 04**  
Na figura abaixo, TK = 2, KP = 6, KS = 10 e MS = 3.

Qual a medida de QP?

$\frac{10}{6} = \frac{1}{x}$   
 $10x = 6$   
 $x = \frac{6}{10}$   
 $x = 0,6$

Como  $x = 0,6$ , aproximando mesmo que de ir de A para a forna - cad de um du angulo na divisões ficou satisfeitos que uma parte um baixo do traço para encaixar a mesma no len de TK e encaixar o colunio para achar o valor de x.

Q.P =  $0,60 + 2$   
**Q.P = 2,60**

Prof(a): Angeline Muniz

Aluno A16

APÊNDICE B – Atividades com contexto resolvidas pelos alunos.

**A E2**

INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**      Nota: \_\_\_\_\_

**Nome:** *Isabella Natália Soares Frobinoz*

**Curso:** *Segurança de Trabalho*      **Data:** *19/10/16*

Sabe-se que o governo está planejando uma nova estrada ligando a cidade Y até a R103. A menor extensão, em quilômetros, que esta nova estrada poderá ter é:

$\frac{YX}{ZX} = \frac{YE}{ZP}$

$\frac{300}{360} = \frac{X}{225}$

$60X = 36000$

$X = 225$

**Orientações:**

- 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.
- 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.
- 3) A atividade vale 4,0 pontos.
- 4) A duração da prova é de 90 minutos.
- 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**

Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.

$X^2 = 360^2 + 120^2$

$X^2 = 25200 + 14400$

$X^2 = 40000$

$X = 200$

**Prof(a): Angeline Muniz**      **Segurança - V**

Aluno A<sub>1</sub>

**B E2**

INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**      Nota: \_\_\_\_\_

**Nome:** *Maria Gabriela Alves Bezerra Silva*

**Curso:** *Segurança de Trabalho*      **Data:** *19/10/2016*

Sabe-se que o governo está planejando uma nova estrada ligando a cidade Y até a R103. A menor extensão, em quilômetros, que esta nova estrada poderá ter é:

**Orientações:**

- 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.
- 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.
- 3) A atividade vale 4,0 pontos.
- 4) A duração da prova é de 90 minutos.
- 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**

Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.

$M = \frac{300 \times 120}{160}$

$M = \frac{36000}{160}$

$M = 225 \text{ km}$

Requer-se a altura maior em a menor, e desenha-se os pontos O e ângulos congruentes nos triângulos (M no maior e 120 no menor).

Jogando isso pode-se desenhá-lo a menor extenção

$R101 = 300 \text{ km}$

$R102 = 120 \text{ km}$

**Prof(a): Angeline Muniz**      **Segurança - V**

Aluno A<sub>2</sub>

Aluno A<sub>3</sub>



**INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DO RIO GRANDE DO SUL**

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**

**Nota:** \_\_\_\_\_

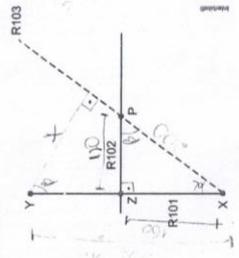
**Nome:** Mylena Regina Cardoso **Data:** 19-04-16

**Curso:** Segurança do Trabalho

**Orientações:**  
 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.  
 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.  
 3) A atividade vale 4,0 pontos.  
 4) A duração da prova é de 90 minutos.  
 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

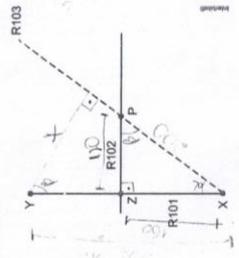
**Questão 01**  
 Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.



$XY = 300$   
 $XZ = 160$   
 $ZP = 120$   
 $XP = 180$

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**  
 Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.



$XY = 300$   
 $XZ = 160$   
 $ZP = 120$   
 $XP = 180$

*Os triângulos são semelhantes pois apresenta um ângulo em comum, e 1 (REPRESENTADO NO FIGURA)*

Aluno A<sub>4</sub>



**INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DO RIO GRANDE DO SUL**

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**

**Nota:** \_\_\_\_\_

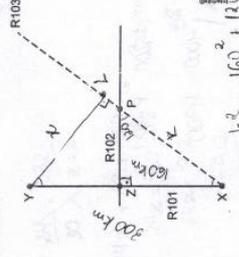
**Nome:** Laurine Jontine Machado Reis **Data:** 19/04/16

**Curso:** Segurança do Trabalho

**Orientações:**  
 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.  
 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.  
 3) A atividade vale 4,0 pontos.  
 4) A duração da prova é de 90 minutos.  
 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**  
 Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.



$XY = 300$   
 $XZ = 160$   
 $ZP = 120$   
 $XP = 180$

*A menor distância vai por uma linha perpendicular à R103, quando traçada, forma um triângulo XYZ, que é semelhante ao triângulo XZP, pois possuem um ângulo em comum, o ZXP / XZL e ambos possuem um ângulo reto, sendo portanto a semelhança de triângulos.*

$\frac{200}{300} = \frac{120}{x}$   
 $200x = 36000$   
 $x = \frac{360}{2}$   
 $x = 180 \text{ km}$

Aluno A<sub>4</sub>

Segurança - V

Prof(a): Angeline Muniz

Segurança - V

Prof(a): Angeline Muniz

Aluno A<sub>5</sub>



**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**

**Nota:** \_\_\_\_\_

**Data:** 19/04/2016

---

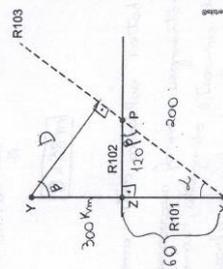
**Nome:** Kátia Alkeini de Laceranda

**Curso:** Eng de Tráfego

**Orientações:**  
 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.  
 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.  
 3) A atividade vale 4,0 pontos.  
 4) A duração da prova é de 90 minutos.  
 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**  
 Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.



*Observamos que os dois triângulos são semelhantes, pois possuem um ângulo em comum (α) e um ângulo congruente (β). Aplicando a semelhança de triângulos, obtemos:*

$$\frac{D}{120} = \frac{300}{200}$$

$$200 = 120 \cdot D$$

$$D = 60 \text{ Km}$$

Aluno A<sub>6</sub>



**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**

**Nota:** \_\_\_\_\_

**Data:** 19/04/16

---

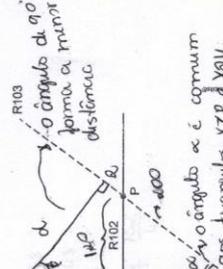
**Nome:** Maria Karanda de Souza J. F. Fernandes

**Curso:** Segurança de Tráfego

**Orientações:**  
 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.  
 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.  
 3) A atividade vale 4,0 pontos.  
 4) A duração da prova é de 90 minutos.  
 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**  
 Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.



*Como a soma interna é 180°, os dois triângulos possuem o ângulo 90°, o ângulo α é comum, o terceiro (β) também é comum. Logo, pode-se aplicar a semelhança de triângulos*

$$\frac{160}{d} = \frac{300}{120}$$

$$d = 60,5$$

$$d = 180 \text{ km}$$

Segurança - V

Prof(a): Angeline Muniz

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**      **Nota:** \_\_\_\_\_

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA PERNAMBUCO

**Nome:** Alzandira Batista de Silva Ferreira      **Data:** 19/04/16

**Curso:** Seguranca de Trabalho

**Orientações:**  
 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.  
 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.  
 3) A atividade vale 4,0 pontos.  
 4) A duração da prova é de 90 minutos.  
 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**  
 Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.

*• São triângulos semelhantes, por possuírem um ângulo em comum e também ambos possuem o ângulo de 90°*

**Respostas manuscritas:**  
 "Não há a medida Y por não utilizar P. Ficação para descobrir a (ZXP)"  
 $Y^2 = 160^2 + 300^2$   
 $Y^2 = 25600 + 90000$   
 $Y^2 = 115600$   
 $Y = \sqrt{115600}$   
 $Y = 340$   
 $X = 120$   
 $300 \times 200$   
 $20x = 3600$   
 $x = 180$

Aluno A<sub>8</sub>

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**      **Nota:** \_\_\_\_\_

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA PERNAMBUCO

**Nome:** Amirley Santos do Nascimento      **Data:** 19.04.2016

**Curso:** Seguranca de Trabalho

**Orientações:**  
 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.  
 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.  
 3) A atividade vale 4,0 pontos.  
 4) A duração da prova é de 90 minutos.  
 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**  
 Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.

**Respostas manuscritas:**  
 $\frac{X}{120} = \frac{300}{160}$   
 $160X = 120 \cdot 300$   
 $X = \frac{36000}{160}$   
 $X = 225$   
 A menor extensão é 225 km

Aluno A<sub>7</sub>

Seguranca - V

Prof(a): Angeline Muniz

Seguranca - V

Prof(a): Angeline Muniz

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**      **Nota:** \_\_\_\_\_

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA PERNAMBUCO

**Nome:** Marina Eduarda Padua de Brito      **Data:** 19.04.2016

**Curso:** Eng. do Trabalho V

**Orientações:**  
 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.  
 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.  
 3) A atividade vale 4,0 pontos.  
 4) A duração da prova é de 90 minutos.  
 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**  
 Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.

**Resolução:**

$Y^2 = 160^2 + 120^2$   
 $Y^2 = 25.600 + 14.400$   
 $Y = \sqrt{40.000}$   
 $Y = 200$   
 $200 - 300 = 100$   
 $200 \times 2 = 36.000$   
 $36.000 \div 200 = 180 \text{ km}$

160	100
160	120
25600	14400
40000	
200	
40000	
25600	
14400	
40000	

**Segurança - V**

Aluno A<sub>9</sub>

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**      **Nota:** \_\_\_\_\_

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA PERNAMBUCO

**Nome:** Eduarda Alexandra Sobral de Araújo Lima      **Data:** 19/04/16

**Curso:** Segurança de Trabalho V

**Orientações:**  
 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.  
 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.  
 3) A atividade vale 4,0 pontos.  
 4) A duração da prova é de 90 minutos.  
 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**  
 Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.

**Resolução:**

Para resolver o problema usamos a semelhança de triângulo onde XYW é perpendicular a XZP, pois os dois tem o ângulo "linha" em comum e ambos tem o ângulo de 90°, garantindo assim que XZP e XYP sejam triângulos semelhantes.  
 Para garantir a proporcionalidade e calcular os lados XY, YW e ZP, usamos as seguintes equações:  
 • Todo o ponto ao ângulo de 90° no triângulo maior: XY  
 No triângulo menor: XZP  
 • Todo o ponto ao ângulo "linha" no triângulo maior: YW  
 No triângulo menor: ZP  
 • Para as aplicações, usamos os dados descritos e resolvemos o lado XP por Pitágoras:  
 $XP^2 = XZ^2 + ZP^2 \rightarrow XP^2 = 160^2 + 120^2$   
 $XP^2 = 25600 + 14400 \rightarrow XP = \sqrt{40000}$   
 $XP = 200 \text{ km}$

**Segurança - V**

Aluno A<sub>10</sub>

Aluno A<sub>11</sub>



**INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO**

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**

**Nota:** \_\_\_\_\_

**Nome:** Marceliz Maria Mendes Silva

**Curso:** Seg. do Trabalho

**Data:** 19/09/16

Sabe-se que o governo está planejando uma nova estrada ligando a cidade Y até a R103. A menor extensão, em quilômetros, que esta nova estrada poderá ter é:

A menor distância entre 2 cidades Y e Z R103 é a que formam o ângulo de 90° com Z R103.

Formamos assim um triângulo XYZ, ambos com um ângulo de 90° e o ângulo comum.

$$PX^2 = ZX^2 + ZP^2$$

$$PX^2 = 160^2 + 120^2$$

$$PX^2 = 25600 + 14400$$

$$PX = \sqrt{40000}$$

$$PX = 200 \text{ Km}$$

$$\frac{PX}{YX} = \frac{PZ}{YS} \Rightarrow \frac{200}{300} = \frac{120}{X}$$

$$X = \frac{300 \cdot 120}{200} \Rightarrow X = 3 \cdot 60$$

$$X = 180 \text{ Km}$$

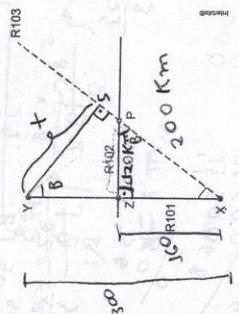
**Orientações:**

- 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.
- 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.
- 3) A atividade vale 4,0 pontos.
- 4) A duração da prova é de 90 minutos.
- 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**

Dois cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.



Aluno A<sub>11</sub>



**INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO**

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**

**Nota:** \_\_\_\_\_

**Nome:** illy Cavatini Ribeiro

**Curso:** Segurança do Trabalho

**Data:** 19/09/16

Sabe-se que o governo está planejando uma nova estrada ligando a cidade Y até a R103. A menor extensão, em quilômetros, que esta nova estrada poderá ter é:

300 X

$X = 180 \text{ Km}$

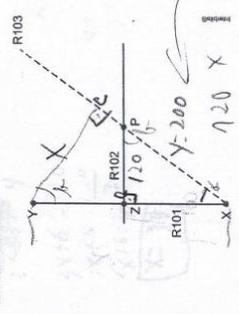
**Orientações:**

- 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.
- 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.
- 3) A atividade vale 4,0 pontos.
- 4) A duração da prova é de 90 minutos.
- 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**

Dois cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.



Prof(a): Angeline Muniz

Segurança - V

Aluno A13



**INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO**

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**

**Nota:** \_\_\_\_\_

**Nome:** Roberto Gomes de Jesus **Data:** 10/06/2016

**Curso:** Seg. do Trabalho V

Sabe-se que o governo está planejando uma nova estrada ligando a cidade Y até a R103. A menor extensão, em quilômetros, que esta nova estrada poderá ter é:

$300 = x$   
 $200 = 180$   
 $2x = 480$   
 $x = \frac{480}{2}$   
 $x = 240$

$300 = y$   
 $200 = 180$   
 $2y = 360$   
 $y = 180$

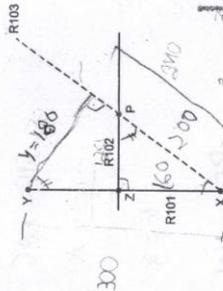
**Orientações:**

- 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.
- 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.
- 3) A atividade vale 4,0 pontos.
- 4) A duração da prova é de 90 minutos.
- 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**

Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.



$h = \sqrt{4080} \approx 202$

$h^2 = 14400 + 25600$   
 $h = \sqrt{40000} = 200$

Segurança - V

Prof(a): Angeline Muniz

Aluno A14



**INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO**

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**

**Nota:** \_\_\_\_\_

**Nome:** Angeline Rodrigues Muniz **Data:** 13/04/2016

**Curso:** Seg. do Trabalho V

Sabe-se que o governo está planejando uma nova estrada ligando a cidade Y até a R103. A menor extensão, em quilômetros, que esta nova estrada poderá ter é:

$110 = x$   
 $160 = 300$   
 $110x = 120 \cdot 300$   
 $x = \frac{36000}{110}$   
 $x \approx 327,27$   
 **$x \approx 277 \text{ km}$**

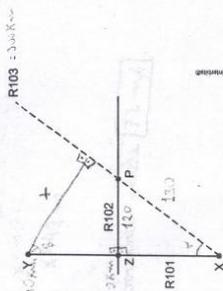
**Orientações:**

- 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.
- 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.
- 3) A atividade vale 4,0 pontos.
- 4) A duração da prova é de 90 minutos.
- 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**

Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.



$h = \frac{300}{110}$   
 $h = \frac{300}{110} = 2,727 \text{ km}$

**\* A menor extensão em quilômetros ligando a cidade Y até a R103 é aproximadamente 277 km.**

Segurança - V

Prof(a): Angeline Muniz

Nota: \_\_\_\_\_

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA PERNAMBUCO

Nome: Abner Rameo da Silva Data: 19/04/2016

Curso: Segurança do Trabalho

Orientações:  
 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.  
 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.  
 3) A atividade vale 4,0 pontos.  
 4) A duração da prova é de 90 minutos.  
 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**  
 Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.

Prof(a): Angeline Muniz

**Segurança - V**

Aluno A15

Nota: \_\_\_\_\_

**Campus Caruaru – ATIVIDADE III**

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA PERNAMBUCO

Nome: Angeline Pereira da S. Soares Data: 19 de Abril 2016

Curso: Seg. do Trabalho - Snt V

Orientações:  
 1) A prova é individual, sem consulta e sem utilizar calculadora.  
 2) O desenvolvimento das questões poderão estar em lápis, mas a resposta final deverá estar de caneta.  
 3) A atividade vale 4,0 pontos.  
 4) A duração da prova é de 90 minutos.  
 5) **NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME NAS PÁGINAS DA PROVA. A PROVA SERÁ ZERADO CASO NÃO TENHA NOME.**

**BOA ATIVIDADE!**

**Questão 01**  
 Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Atualmente vem sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. Essa nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.

*Handwritten notes:*  
 Sabendo que o governo está planejando uma nova estrada ligando a cidade Y até a R103. A menor extensão, em quilômetros, que esta nova estrada poderá ter é:  
 utilizando os triângulos do desenho, temos dois triângulos retângulos, pois a distância que se pede é a hipotenusa (para encontrar a hipotenusa eu tracei uma reta que forma um ângulo de 90°).  
 Se preciso aplicar com regra de três de triângulo pelo seguinte: "claro" e a mesma coisa, o que chamamos "complementar".  

$$\frac{x'}{120} = \frac{300}{160} \rightarrow 160x' = 300 \cdot 120$$

$$160x' = 36.000$$

$$x' = \frac{36.000}{160}$$

$$x' = 225 \text{ km}$$
  
 A menor extensão é um km novo a nova estrada é: **115 km**

Prof(a): Angeline Muniz

**Segurança - V**

Aluno A16

# APÊNDICE C – Tópico de semelhança de triângulos da apostila de geometria plana elaborada pela pesquisadora.

## Geometria Plana

- a) Em centímetros sua medida é:  $med(\overline{AB}) = 5 \text{ cm}$
- b) Em milímetros sua medida é:  $med(\overline{AB}) = 50 \text{ mm}$

→ **Razão de dois segmentos:**

É a razão das medidas de dois segmentos expressas na mesma unidade. Observe:

Ex:



a razão dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  nessa ordem é igual a:

$$\frac{med(\overline{AB})}{med(\overline{CD})} = \frac{AB}{CD} = \frac{7}{3}$$

→ **Segmentos comensuráveis e incommensuráveis:**

- **Segmentos Comensuráveis:** Quando a razão de suas medidas é um número racional.
- **Segmentos Incommensuráveis:** Quando a razão de suas medidas é um número irracional.

• **Teorema de Tales**

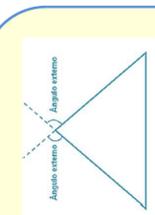
→ **Definições importantes:**

- **Feixe de retas paralelas:** é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.
- **Transversal do feixe de retas paralelas:** é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe.
- **Pontos correspondentes de duas transversais:** são pontos destas transversais que estão em uma mesma reta do feixe de retas paralelas.
- **Segmentos correspondentes de duas transversais:** São segmentos nas transversais compreendidos entre duas mesmas retas paralelas do feixe.

Ex: Dado o segmento AB



tem –se que ao medirmos o segmento AB notaremos que:



As bissetrizes externas  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  dos ângulos externos de um triângulo encontram-se duas a duas em três pontos,  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  denominados **exincentro**, assim como mostra a figura.

Dado um **exincentro**, o círculo que tem esse ponto como centro, é tangente a um lado e ao prolongamento dos dois outros lados do triângulo, é denominado **círculo exinscrito**. Observe na figura ao lado os **círculos exinscritos**.

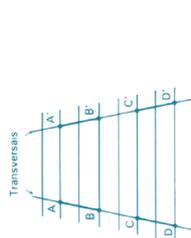
• **Linhas proporcionais**

→ **Medida de um segmento:**

Medir um segmento significa compará-lo com alguma unidade padrão.

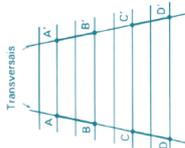
## Geometria Plana

- A e A', B e B', C e C', D e D' são pontos correspondentes.
- $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{C'D'}$  são segmentos correspondentes.



→ **O teorema de Tales:**

Um feixe de retas paralelas determina sempre sobre duas transversais, segmentos correspondentes proporcionais.



Observando a figura acima tem-se que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \dots = k$$

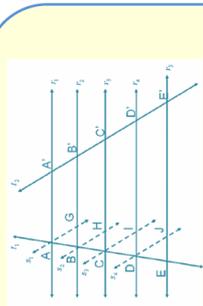
**Atenção!**

**Teorema:**

Se, num feixe de paralelas, forem determinados, sobre uma transversal, segmentos congruentes, serão determinados também sobre qualquer outra transversal, segmentos congruentes.

**Observe o desenvolvimento:**

Se  $r_1 // r_2 // r_3 // r_4 // r_5$  e os segmentos determinados na transversal  $t_1$  são congruentes, ou seja,  $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE}$ , tem-se:



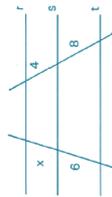
Sabendo que  $s_1, s_2, s_3$  e  $s_4 // t_2$ , então  $\overline{AG} \equiv \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BH} \equiv \overline{B'C'}$ ,  $\overline{CI} \equiv \overline{C'D'}$  e  $\overline{DJ} \equiv \overline{D'E'}$ . Logo, os triângulos ABG, BCH, CDI e DEJ são congruentes pelo caso ALA e constatamos que:

$$\overline{A'B'} \equiv \overline{B'C'} \equiv \overline{C'D'} \equiv \overline{D'E'}$$

■ **Exemplos comentados:**

Ex:

Determine o valor de x, sendo r, s e t retas paralelas.



**Resolução:**  
Pelo Teorema de Tales, a proporção é verdadeira:

$$\frac{x}{4} = \frac{6}{8} \therefore x = 3$$

Ex:

Aplicando a proporcionalidade existente no Teorema de Tales, determine o valor dos segmentos AB e BC na ilustração a seguir:



## Geometria Plana

alterando seu tamanho sem modificar suas proporções. No estudo tradicional da Geometria, o conceito de semelhança, principalmente de triângulo, ocupa um lugar bem destacado. Os livros em geral definem triângulos semelhantes como aqueles que têm "ângulos iguais e lados homólogos proporcionais". Esta definição se estende literalmente para polígonos.

Entretanto, em muitas situações, gostaríamos de dizer que duas figuras são semelhantes embora elas não sejam polígonos. Por exemplo, a foto ampliada de uma pessoa é semelhante à figura que está no filme antes da reprodução, as imagens na tela de um cinema são semelhantes às da película que está sendo projetada e uma bola de gude é semelhante a uma bola de bilhar.

Lima, Elon Lages; Medidas e Forma em Geometria. 4 ed. SBM, 2006.

### • Polígonos semelhantes

Ao ampliarmos ou reduzirmos uma figura mantendo a sua forma, obtemos figuras semelhantes à figura original. Os polígonos a seguir são semelhantes. Veja como podemos verificar a semelhança desse polígono de acordo com as medidas de seus lados e de seus ângulos internos.

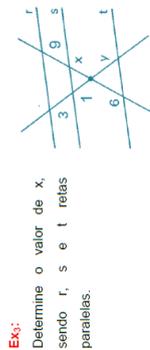


Note que as medidas dos lados correspondentes são proporcionais, pois, se dividimos a medida de cada lado do polígono ABCD pela medida de cada lado do polígono A1B1C1, indicado pela mesma letra, obteremos o mesmo número.

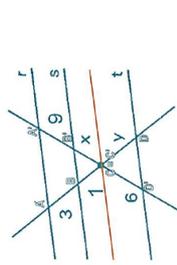
**Resolução:**

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

$$\frac{2x - 3}{5} = \frac{x + 2}{6} \therefore 7x = 28 \therefore x = 3$$



**Resolução:** Inicialmente traçamos uma reta paralela às retas r, s e t e passando pelo ponto de interseção das transversais:



Em seguida observamos as seguintes proporções:

(I)  $\frac{AB}{AB} = \frac{BC}{B_1C_1} \therefore \frac{3}{6} = \frac{1}{x} \therefore x = 3$

(II)  $\frac{BC}{BC} = \frac{CD}{C_1D_1} \therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \therefore \frac{1}{3} = \frac{1}{y} \therefore y = 3$

### • Semelhança de figuras

A noção de semelhança corresponde à ideia natural de "mudança de escala". Isto é, ampliação ou redução de uma figura



## Geometria Plana

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{2}{0,8} = \frac{4}{1,6} = 2,5$$

Dizemos que a **razão de semelhança** entre os polígonos ABCD e A1B1C1D1 é igual a 2,5.

Perceba que a medida dos ângulos homólogos é igual. Assim, dizemos que o polígono ABCD é semelhante ao polígono A1B1C1D1, pois as medidas dos lados correspondentes são proporcionais e as medidas dos ângulos internos correspondentes são iguais. Indicamos essa semelhança da seguinte maneira:

$$ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$$

(ê – se ABCD é semelhante a A1B1C1D1)

Dois polígonos são semelhantes quando satisfazem, simultaneamente, as seguintes condições:

- As medidas dos lados correspondentes são proporcionais.
- As medidas dos ângulos correspondentes são iguais.

### Fique atento!

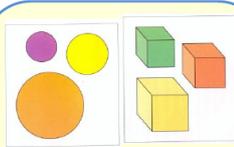
Algumas formas geométricas são sempre semelhantes. Veja a seguir algumas delas:

- (I) Os quadrados são semelhantes, pois seus ângulos internos são iguais e os seus lados correspondentes são proporcionais.

Os polígonos regulares com a mesma quantidade de lados são sempre semelhantes!

(II) Os círculos, independente do tamanho são semelhantes, pois todos têm a mesma forma.

(III) Os cubos, também são semelhantes, pois independente do seu tamanho, todos têm a mesma forma.



### Exemplo comentado:

**Ex:** Certa fotografia mede 3 cm de largura por 4 cm de comprimento. Paula quer ampliar essa fotografia para as seguintes dimensões: 15 cm de largura por 20 m de comprimento. Qual é a razão de semelhança entre a fotografia original e a ampliação?



### Resolução:

A razão de semelhança será dada por:

$$\frac{3}{15} = \frac{4}{20} = 0,2$$

Diz-se que **0,2** é a razão de semelhança.

### Homotetia

Homotetia é a ampliação positiva ou negativa de figuras semelhantes. Temos sempre um centro de razão, de onde partem linhas que irão passar por todos os pontos das outras figuras ampliadas ou reduzidas. A seguir temos uma figura dando o exemplo da homotetia:

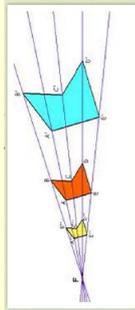


## Geometria Plana



Repare como a figura original é ampliada, assim ficando reduzida ou ampliada com as mesmas medidas, porém com estas multiplicadas por um número. Repare também que o ângulo é sempre o mesmo. Como vemos a homotetia hoje no dia a dia?

A homotetia está muito presente no dia a dia, por exemplo, quando estamos trabalhando com uma foto, no celular ou computador, a trabalho ou para compartilhar em uma rede social, e queremos ampliá-la de forma semelhante, arrastamos sua diagonal, que é o centro de razão.



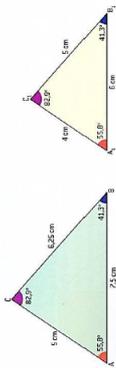
Acima notamos que o ponto F é o ponto em comum à todas, ou seja, o centro; a figura em laranja a original, em amarelo a reduzida e azul a ampliada.

[http://aprendendohomoteialegal.blogspot.com.br/2013/06/homoteia-o-que-e\\_2927.html](http://aprendendohomoteialegal.blogspot.com.br/2013/06/homoteia-o-que-e_2927.html)

### • Semelhança de triângulos

Diz-se que dois triângulo são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

Com isso se queremos dizer que os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes:



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \iff \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{cases} \text{ e } \frac{7,5}{1} = \frac{6,25}{4} = \frac{5}{5} = \frac{12,5}{12,5}$$

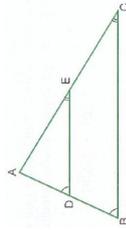
### Atenção!

■ Aos ângulos respectivamente iguais também se dá o nome de ângulos homólogos (homo = mesmo, logos = lugar) e os vértices respectivos dizem-se homólogos; os lados homólogos são os que se opõem a ângulos iguais.

■ Se dois triângulos são semelhantes, as medianas, as bissetrizes internas, as alturas, os perímetros, ..., enfim, os elementos lineares homólogos são proporcionais e seus ângulos são congruentes.

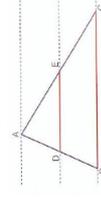
### ■ Teorema fundamental da semelhança de triângulos:

Seja o triângulo ABC:



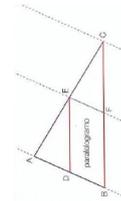
Considerando DE paralelo a BC, tem-se que os ângulos:  $\hat{C}BA \equiv \hat{E}DA$ ,  $\hat{BC}A \equiv \hat{D}EA$  e  $\hat{A} \equiv \hat{A}$  são comuns.

Pelo teorema de Tales, traçando retas paralelas pelo vértice A, pelo segmento DE e pelo segmento BC, temos a seguinte proporção:



## Geometria Plana

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (I)$$



E traçando retas paralelas pelo vértice C, pelo segmento EF e pelo segmento AB, tem-se a seguinte proporção:

$$\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (II)$$

Sendo, DBFE um paralelogramo,  $BF = DE$ , então:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (III)$$

Observando as igualdades (I) e (III):

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Perceba que os triângulos ABC e ADE possuem lados homólogos proporcionais e ângulos homólogos congruentes. Dessa forma, pode-se afirmar que:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

(O triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADE)

E enunciar o teorema fundamental da semelhança de triângulos:

Toda paralela a um lado de um triângulo, que intercepta os outros dois lados em pontos distintos, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

### ■ Exemplos comentados:

Ex:



Sabendo que  $\frac{BE}{CD}$ ,  $AD = 20 \text{ cm}$ ,  $AC = 12 \text{ cm}$ ,  $CD = 16 \text{ cm}$  e  $AE = 5 \text{ cm}$ , determine  $AB = x$  e  $BE = y$ .

### Resolução:

Sendo ABC triângulo e  $\frac{BE}{CD}$ , pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, tem-se:

$$\frac{20}{5} = \frac{12}{y} \implies 4 = \frac{12}{y} \implies y = \frac{12}{4}$$

Portanto,  $x = 3 \text{ cm}$  e  $y = 4 \text{ cm}$ .

### Ex:

Na figura, os ângulos  $\hat{R}$  e  $\hat{C}$  são congruentes,  $AS = 6 \text{ cm}$ ,  $SB = 12 \text{ cm}$  e  $BC = 30 \text{ cm}$ . Determine  $RS = x$ .



### Resolução:

Sendo ABC triângulo perceba que se os ângulos  $\hat{R}$  e  $\hat{C}$  são congruentes, necessariamente,  $SR \parallel BC$ . Logo, pode-se aplicar o teorema fundamental:

$$\frac{30}{x} = \frac{18}{6}$$

Portanto,  $x = 10 \text{ cm}$ .

### ■ Casos de semelhança de triângulos:

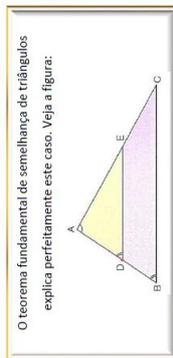
As exigências para que dois triângulos sejam semelhantes podem ser reduzidas. Os casos de semelhança (ou critérios de semelhança) mostram quais são as condições mínimas para dois triângulos serem semelhantes.

### → 1º caso (Ângulo - Ângulo (AA))

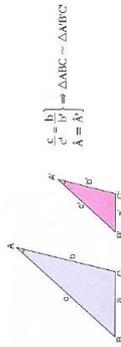


## Geometria Plana

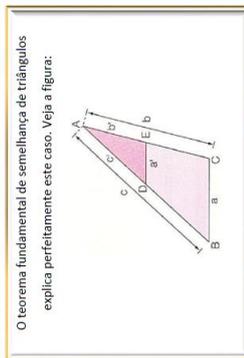
Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes.



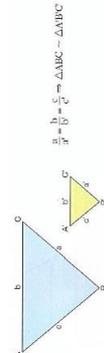
→ 2º caso (Lado - Ângulo - Lado (LAL))



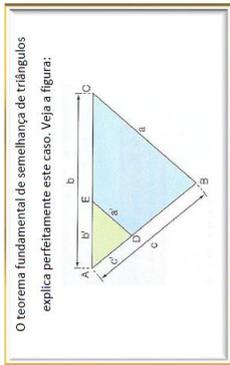
Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos congruentes, então os triângulos são semelhantes.



→ 3º caso (Lado - Lado - Lado (LLL))

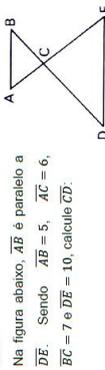


Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.



■ Exemplos comentados:

Ex:



Resolução:

Sendo  $AB/DE$ , os ângulos  $\hat{A} \equiv \hat{E}$  e  $\hat{C}$  é ângulo comum dos triângulos ABC e CDE. Portanto, pelo 1º caso de semelhança de triângulos, afirmamos que estes triângulos são semelhantes. Então:

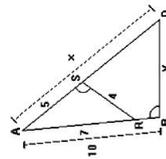
$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{CE}{AC}$$

Como desejamos encontrar a medida de  $\overline{CD}$ :

$$\frac{10}{5} = \frac{\overline{CD}}{7} \Rightarrow \overline{CD} = 14$$

Ex:

Na figura, sabe-se que S e B são congruentes,  $AR = 7$  cm,  $AS = 5$  cm,  $SR = 4$  cm e  $AB = 10$  cm. Determine  $AD = x$  e  $BD = y$  respectivamente.



## Geometria Plana

Resolução:

Perceba que os triângulos ABD e ARS são semelhantes pelo 1º caso de semelhança. Os ângulos  $\hat{S} \equiv \hat{B}$  e  $\hat{A}$  é comum. Portanto:

$$\frac{AD}{AR} = \frac{BD}{RS} = \frac{AB}{AS} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{10}{5}$$

Então,  $x = 14$  cm e  $y = 8$  cm.

# Geometria Plana

**Elaboração e diagramação da apostila:** Angeline Muniz, Graduada em Licenciatura em Matemática e Mestranda em Matemática (PROFMAT).

**Material auxiliar:**  
 Ribeiro, Jackson; Matemática, Projeto Ródis, Ensino fundamental II, Itinerar, Bianchi, Edwalo; Matemática, Ensino fundamental II, Dante, Luz Roberto; Tudo é Matemática, Ensino fundamental II, Res e Trovon, Aplicando a Matemática, Ensino fundamental II, Barbosa, João Lucas Marques, Geometria Euclidiana Plana (SBM);

78

Curso de Matemática

Prof: Alexandre Beltrão

78

Curso de Matemática

## APÊNDICE D – Ficha de exercícios entregue aos alunos na sala de aula.



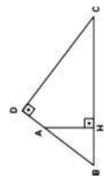
**INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO**

**Campus Caruaru – FICHA DE EXERCÍCIOS**

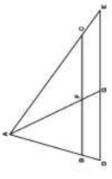
1

**Segurança - V**

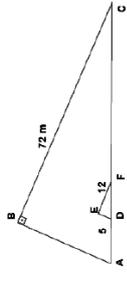
**01)** Na figura,  $AH = 4$ ,  $BC = 10$  e  $DC = 8$ . A medida de  $AB$  é:



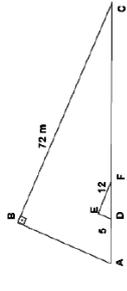
**02)** Na ilustração a seguir, os segmentos  $BC$  e  $DE$  são paralelos



Se  $BC = 12$ ,  $DG = 7$  e  $GE = 8$ , quanto mede  $FC$ ?



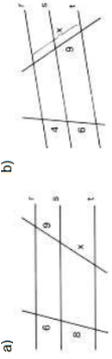
**03)** A figura abaixo ilustra dois terrenos planos. Suponha que os lados  $AB$  e  $CD$  são paralelos, respectivamente,  $a$  e  $c$  que  $A, D, F, C$  são pontos colineares.



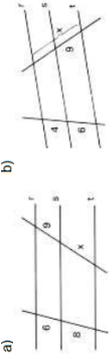
Qual a distância ,em metros?

**04)** Nas figuras, as retas  $r, s$  e  $t$  são paralelas. Determine os valores de  $x$ .

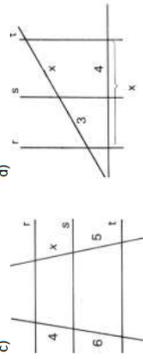
a)



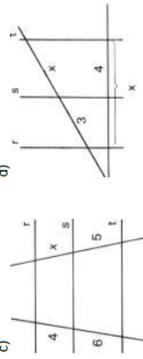
b)



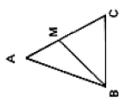
c)



d)



**05)** Dados:  
 $m\angle C = 54^\circ$   
 $\overline{AB} = 3$   
 $\overline{BC} = 2$   
 $\overline{AC} = 4$

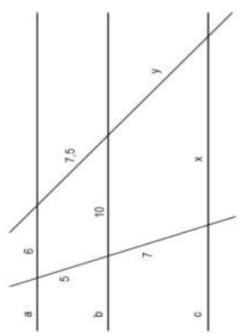


Então  $m\angle C$  é igual a:

**06)** Determine  $x$  na figura abaixo:



**07)** Na ilustração a seguir, as retas  $a, b$  e  $c$  são paralelas.



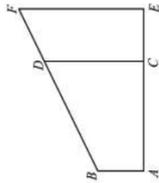
Assinale o inteiro mais próximo de  $x + y$ .



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
PERNAMBUCO

### Campus Caruaru – FICHA DE EXERCÍCIOS

- 08) Na figura ao lado os segmentos  $AB$ ,  $CD$  e  $EF$  são perpendiculares à reta  $AE$  e medem, respectivamente, 40m, 82m e 100m.

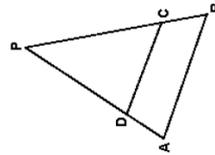


Se o segmento  $CE$  mede 27m, o comprimento do segmento  $AC$  é:

- 09) Na figura, o triângulo  $ABC$  é retângulo em  $A$ ,  $ADEF$  é um quadrado,  $AB = 2$  cm e  $AC = 6$  cm. Quanto mede o lado do quadrado em metros?



- 10) Em um mapa, o parque turístico  $P$  e as cidades  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  estão dispostos conforme a figura a seguir, sendo  $AB$  paralelo a  $CD$ . Sabendo-se que, na realidade,  $AB = 40$  km,  $AD = 30$  km e  $DC = 25$  km, a distância da cidade  $A$  até o parque  $P$ , em quilômetros, é:



Por exemplo, ao medir a distância entre Belo Horizonte e Fortaleza na figura A, obtemos  $d_1 = 40$  mm. Em B, a distância que separa essas duas capitais é  $d_2 = 20$  mm.

Entre o Rio de Janeiro e Salvador temos, em A,  $d_3 = 26$  mm e, em B,  $d_4 = 13$  mm. Generalizando, para essas duas figuras temos:  $d_1 = 2d_2$ . Isso nos garante que existe uma constante de proporcionalidade,  $k$ , entre as medidas (lineares) da figura A e suas correspondentes na figura B; no caso,  $k = \frac{d_1}{d_2} = 2$ . Essa constante chama-se **razão de semelhança**.

Vamos estudar agora a parte angular: tanto na figura A como na B, o ângulo com vértice em Belém mede  $93^\circ$ . Da mesma forma que, nas duas figuras, cada ângulo com vértice na capital federal tem  $76^\circ$ .

Os ângulos indicam a "forma" da figura, que se mantém quando a ampliamos ou reduzimos. O que se modifica nesses casos é apenas as medidas dos segmentos de reta. Quando essas duas condições (medidas lineares proporcionais e medidas angulares congruentes) são satisfeitas, dizemos que duas figuras são **semelhantes**.

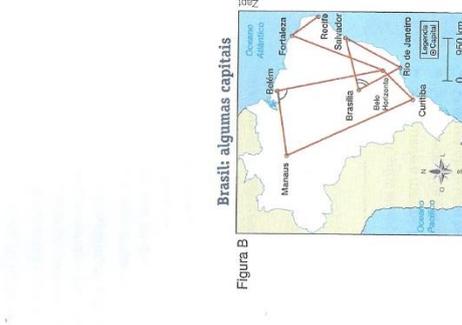
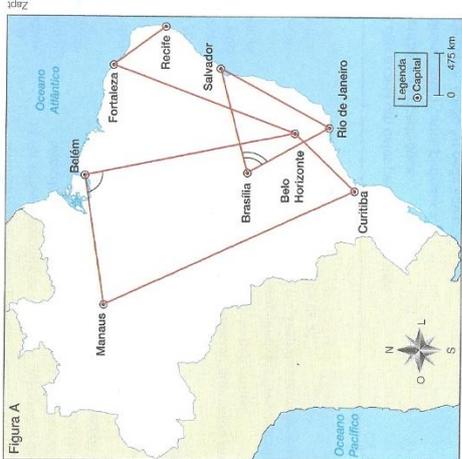
# Semelhança e triângulos retângulos

## Semelhança entre figuras

### Introdução

Cada uma das figuras apresenta, em escalas diferentes, o esboço de um mapa contendo o nome de algumas das capitais brasileiras.

Brasil: algumas capitais



Fonte: Atlas Geográfico Escolar. Rio de Janeiro, 1965, 2007.

Vamos relacionar elementos da figura A com seus correspondentes da figura B e construir alguns conceitos importantes.

- = Medindo a distância entre duas cidades quaisquer na figura A e a correspondente distância na figura B, observamos que a primeira mede o dobro da segunda.
- = Ao medir um ângulo qualquer em uma das figuras e seu correspondente na outra, obtemos a mesma medida.

## ANEXOS

### ANEXO A – Capítulo 12 do Livro Matemática: ciência e aplicação.

**Exemplo 1**

Dois quadrados quaisquer são semelhantes.

A razão de semelhança entre os quadrados ① e ② é  $\frac{1 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{1}{3}$ .

Poderíamos também ter calculado a razão de semelhança entre os quadrados ② e ①, nessa ordem, obtendo  $\frac{3 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 3$ , que é o inverso de  $\frac{1}{3}$ .

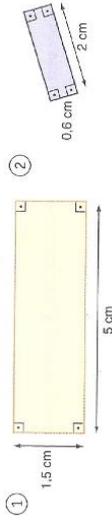
**Exemplo 2**

Dois círculos quaisquer são semelhantes.

A razão de semelhança entre os círculos ① e ② é  $\frac{3 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 1,5$ .

### Exemplo 3

Dois retângulos serão semelhantes somente se a razão entre as medidas de suas bases for igual à razão entre as medidas de suas alturas.

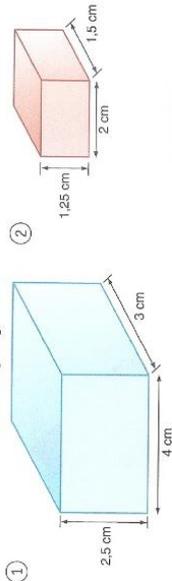


A razão de semelhança entre os retângulos (1) e (2) é  $\frac{5 \text{ cm}}{1,5 \text{ cm}} = \frac{1,5 \text{ cm}}{0,6 \text{ cm}} = 2,5$ .

**Pense nisto:** Dê um exemplo de retângulos que não são semelhantes.

Por exemplo, um retângulo ABCD com lados medindo 2 cm e 6 cm e um retângulo EFGH com lados medindo 2 cm e 10 cm, pois  $\frac{2}{2} \neq \frac{6}{10}$ .

Dois blocos retangulares (paralelepípedos retângulos) serão semelhantes somente se as razões entre as três dimensões (tomadas, por exemplo, em ordem crescente) de um deles e as correspondentes dimensões do outro forem sempre iguais.



A razão de semelhança entre os paralelepípedos (1) e (2) é  $\frac{2,5 \text{ cm}}{1,25 \text{ cm}} = \frac{3 \text{ cm}}{1,5 \text{ cm}} = \frac{4 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 2$ . Logo, eles são semelhantes.

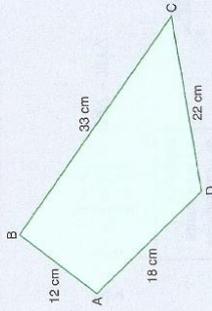
**Pense nisto:** Dois cubos quaisquer são sempre semelhantes?

Sim, porque se um cubo tem aresta  $a$  e o outro tem aresta  $b$ , quaisquer dois segmentos correspondentes que se tome, um em cada cubo, estarão na razão  $\frac{a}{b}$ .

### Exercícios

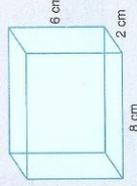
- A escala utilizada em um mapa foi de 1 : 30 000. Qual a distância real entre duas cidades distantes 20 cm no mapa?
- Relacione no caderno quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas.
  - Dois retângulos quaisquer são semelhantes.
  - Dois círculos quaisquer são semelhantes.
  - Dois triângulos retângulos quaisquer são semelhantes.
  - Dois triângulos equiláteros quaisquer são semelhantes.
- Dois retângulos,  $R_1$  e  $R_2$ , são semelhantes. As medidas dos lados de  $R_1$  são 6 cm e 10 cm. Sabendo que a razão de semelhança entre  $R_1$  e  $R_2$ , nessa ordem, é  $\frac{2}{3}$ , determine as medidas dos lados de  $R_2$ .
- Dois triângulos retângulos distintos possuem um ângulo de  $48^\circ$  e lados com medidas proporcionais. Pode-se afirmar que eles são semelhantes? Explique.

5. Quais são as medidas dos lados de um quadrilátero ABCD com perímetro de 17 cm, semelhante ao quadrilátero ABCD da figura?



6. Dois triângulos isósceles distintos possuem um ângulo de  $40^\circ$ . Pode-se afirmar que eles são semelhantes? Explique.

7. No bloco retangular mostrado, o comprimento mede 8 cm, a largura 2 cm e a altura 6 cm.



A razão de semelhança entre esse bloco e um outro nessa ordem é  $\frac{1}{3}$ . Quais são as dimensões desse outro bloco?

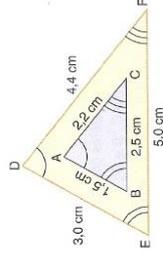
## Semelhança de triângulos

### Introdução

Observe os triângulos ABC e DEF, construídos de modo a terem a mesma forma.



É possível colocar o triângulo menor (ABC) dentro do maior (DEF), de maneira que seus lados fiquem respectivamente paralelos.



Vemos, assim, que dois triângulos com formas iguais têm necessariamente ângulos congruentes:

$$\hat{A} = \hat{D} \quad \hat{B} = \hat{E} \quad \hat{C} = \hat{F}$$

Se medirmos os lados dos dois triângulos e calcularmos as razões entre os lados correspondentes, teremos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{1,5 \text{ cm}}{4,4 \text{ cm}} = \frac{1}{2,93} \quad \frac{BC}{EF} = \frac{2,2 \text{ cm}}{5,0 \text{ cm}} = \frac{1}{2,27} \quad \frac{AC}{DF} = \frac{3,0 \text{ cm}}{7,5 \text{ cm}} = \frac{1}{2,5}$$

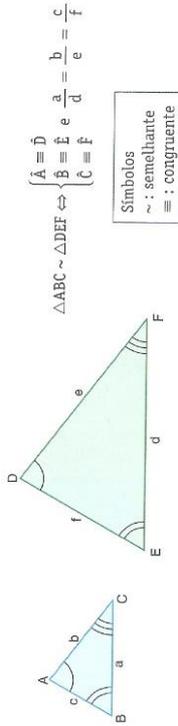
Logo, as razões são todas iguais, ou seja, os lados correspondentes (homólogos) são proporcionais.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF} = \frac{AC}{EF}$$

Daí, podemos estabelecer a seguinte definição:

Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

Em símbolos matemáticos, podemos escrever:



### Razão de semelhança

Quando dois triângulos são semelhantes, a razão entre as medidas dos lados correspondentes é chamada **razão de semelhança**. Nos triângulos ABC e DEF, que estão logo acima:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k, \text{ em que } k \text{ é a razão de semelhança}$$

Se dois triângulos ABC e DEF são semelhantes e a razão de semelhança é a razão  $k$ , então os triângulos ABC e DEF são respectivamente congruentes a, consequentemente, os triângulos são congruentes.

**Pense nisto:** O que ocorre quando a razão de semelhança de dois triângulos é igual a 1?

O conceito de triângulos semelhantes fixou as seguintes condições para um triângulo ABC ser semelhante a outro A'B'C':

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \quad \text{e} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

três congruências de ângulos      proporcionalidade dos três lados

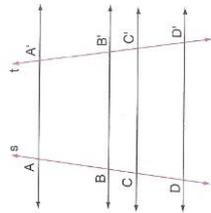
Mas podemos reduzir essas exigências a uma quantidade bem menor. Os casos de semelhança (ou critérios de semelhança), que estudaremos a seguir, mostram quais são as condições mínimas para dois triângulos serem semelhantes.

Para demonstrar a validade dos critérios de semelhança, precisamos rever o teorema de Tales e o teorema fundamental da semelhança.

Ao observar a figura, que mostra um feixe de paralelas com duas transversais, podemos dizer que:

= são **correspondentes** os pontos: A e A', B e B', C e C', D e D';

= são **correspondentes** os segmentos:  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{C'D'}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{A'C'}$ , etc.



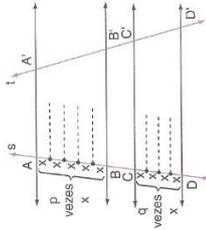
Vamos supor que existe um segmento  $x$  que "cabe"  $p$  vezes em AB e  $q$  vezes em CD, e que  $p$  e  $q$  são números inteiros. Na figura,  $p = 5$  e  $q = 4$ .

Temos, então:

$$AB = p \cdot x \quad \text{e} \quad CD = q \cdot x$$

Estabelecendo a razão  $\frac{AB}{CD}$ , temos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p \cdot x}{q \cdot x} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{p}{q} \quad (1)$$



$$p = 5 \text{ e } q = 4; \text{ portanto, } \frac{AB}{CD} = \frac{5}{4}$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  (veja linhas tracejadas na figura), observamos que:

= o segmento  $\overline{A'B'}$  fica dividido em  $p$  partes congruentes (de medida  $x'$ );

= o segmento  $\overline{C'D'}$  fica dividido em  $q$  partes congruentes (também de medida  $x'$ );

$$A'B' = p \cdot x' \text{ e } C'D' = q \cdot x'$$

= ao estabelecer a razão  $\frac{A'B'}{C'D'}$ , temos:

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p \cdot x'}{q \cdot x'} \Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p}{q} \quad (2)$$

= comparando as igualdades (1) e (2), vem:

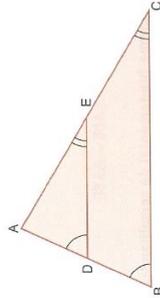
$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Daí concluímos a validade do **teorema de Tales**:

Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.

Vamos agora conhecer o teorema fundamental da semelhança de triângulos. Veja como chegamos a ele.

A figura mostra um triângulo ABC, e  $\overline{DE}$  é um segmento paralelo ao lado BC.



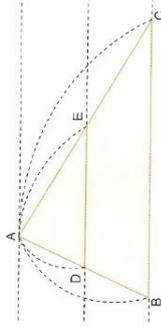
Observe os ângulos dos triângulos ADE e ABC. Do paralelismo de  $\overline{DE}$  e  $\overline{BC}$ , temos:

$$\hat{D} = \hat{B} \quad \text{e} \quad \hat{E} = \hat{C}$$

Então os triângulos ADE e ABC têm os ângulos ordenadamente congruentes:

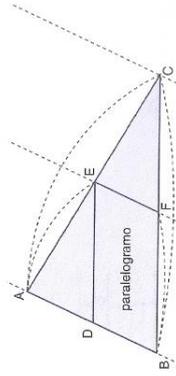
$$\hat{D} = \hat{B}, \hat{E} = \hat{C} \text{ e } \hat{A} \text{ é comum} \quad (1)$$

Sendo  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  e aplicando o teorema de Tales nas transversais  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , temos:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (2)$$

Pelo ponto E, vamos conduzir  $\overline{EF}$ , paralela a  $\overline{AB}$ .



Sendo  $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$  e aplicando o teorema de Tales, temos:  $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$ .

Mas  $\overline{BF} = \overline{DE}$ , pois BDEF é um paralelogramo; vamos então substituir BF por DE na igualdade anterior:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (3)$$

Comparando (2) e (3), resulta:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (4)$$

Concluímos, assim, que os triângulos ADE e ABC têm ângulos congruentes (ver (1)) e lados proporcionais (ver (4)). Logo, eles são semelhantes:

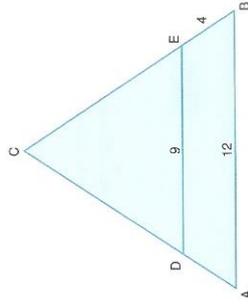
$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Daí concluímos a validade do **teorema fundamental da semelhança**:

Toda reta paralela a um lado de um triângulo, que intercepta os outros dois lados em pontos distintos, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

## 5 Exemplo

Na figura abaixo, sendo  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ , qual é a medida dos segmentos  $\overline{CB}$  e  $\overline{CE}$ ?



Sendo  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ , temos:  $\triangle CDE \sim \triangle CAB$ .

Daí, vem:

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{9}{12} = \frac{CE}{CE + 4} = \frac{9}{12}$$

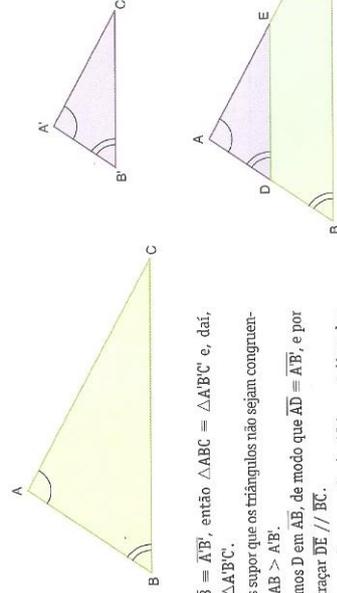
$$CB = CE + 4 = 12 + 4 = 16$$

## Critérios de semelhança

### AA (ângulo - ângulo)

Observe os triângulos, ABC e A'B'C', com dois ângulos respectivamente congruentes:

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \text{e} \quad \hat{B} = \hat{B}'$$



Se  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ , então  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$  e, daí,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

Vamos supor que os triângulos não sejam congruentes e que  $AB > A'B'$ .

Tomemos D em  $\overline{AB}$ , de modo que  $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ , e por D vamos traçar  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .

Pelo caso de congruência ALA, os triângulos ADE e A'B'C' são congruentes:

$$\triangle ADE = \triangle A'B'C'$$

Pelo teorema fundamental os triângulos ADE e ABC são semelhantes:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

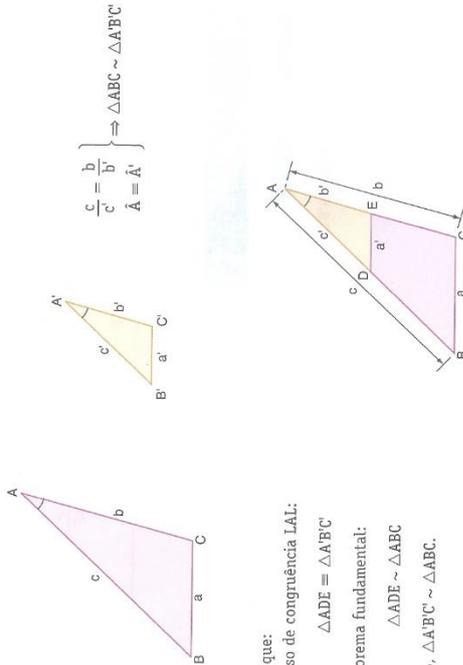
Então, os triângulos A'B'C' e ABC também são semelhantes:

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes.

### LAL (lado — ângulo — lado)

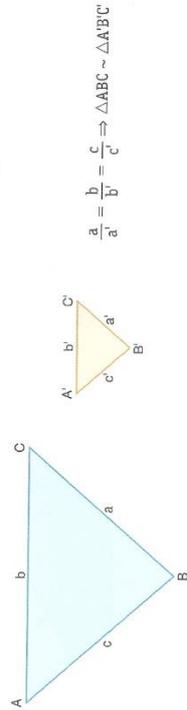
Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes. Observe a demonstração considerando os dois triângulos ilustrados.



Note que:  
= pelo caso de congruência LAL:  
 $\triangle ADE = \triangle A'B'C'$   
= pelo teorema fundamental:  
 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$   
Então,  $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ .

### LLL (lado — lado — lado)

Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Note que:

= pelo caso de congruência LLL:  
 $\triangle ADE = \triangle A'B'C'$

= pelo teorema fundamental:  
 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$   
Então,  $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ .

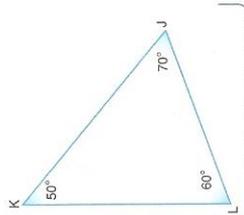
## Exemplo 9

Observe os dois triângulos ilustrados. Temos:

$$\hat{G} = \hat{J} \text{ e } \hat{I} = \hat{L}$$

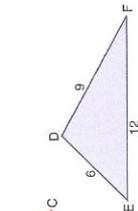
Então, pelo 1º critério de semelhança,  $\triangle GHI \sim \triangle JKL$  e, em consequência, seus lados homólogos são proporcionais:

$$\frac{GH}{JK} = \frac{GI}{JL} = \frac{HI}{KL}$$



## Exemplo 7

Observe os dois triângulos ilustrados.



Temos:  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$   
Então, pelo 3º critério de semelhança,  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  e, em consequência, seus ângulos são respectivamente congruentes:  
 $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E} \text{ e } \hat{C} = \hat{F}$

## Exercício resolvido

1. Sabe-se que  $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$ . Quais são as medidas x de  $\overline{AB}$  e y de  $\overline{CD}$ ?

**Solução:**

Como  $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$ , há dois pares de ângulos alternos internos congruentes:

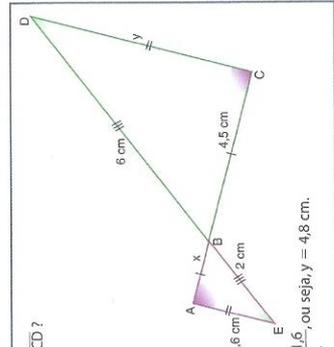
$$\hat{B}\hat{A}\hat{E} = \hat{B}\hat{C}\hat{D} \text{ e } \hat{B}\hat{E}\hat{A} = \hat{B}\hat{D}\hat{C}$$

Há também  $\hat{A}\hat{B}\hat{E} = \hat{C}\hat{B}\hat{D}$  (ângulos opostos pelo vértice). Assim, temos  $\triangle ABE \sim \triangle CBD$ .

Podemos escrever a proporcionalidade entre as medidas dos lados homólogos:

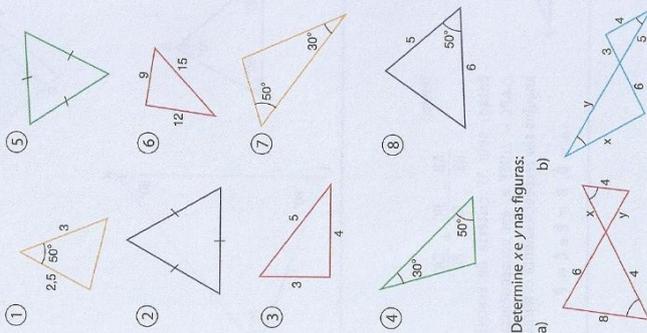
$$\frac{AB}{CB} = \frac{AE}{CD} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{x}{4,5} = \frac{1,6}{y} = \frac{2}{6}$$

Vem, então,  $x = 2 \cdot \frac{4,5}{6}$ , isto é,  $x = 1,5$  cm, além de  $y = \frac{6 \cdot 1,6}{2}$ , ou seja,  $y = 4,8$  cm.

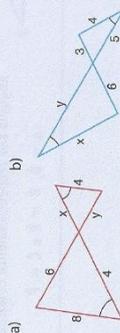


**Exercícios**

8. São dados oito triângulos. Indique os pares de triângulos semelhantes e o critério de semelhança correspondente:

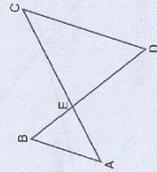


9. Determine  $x$  e  $y$  nas figuras:

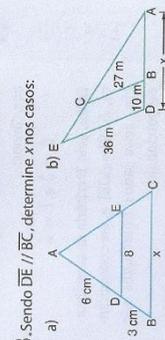


10. Determine a altura de um prédio cuja sombra tem 15 m no mesmo instante em que uma vara de 6 m, fixada em posição vertical, tem uma sombra de 2 m.

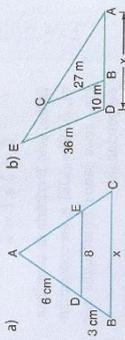
11. Determine  $DE$ , sendo  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ,  $BE = 4$  cm,  $EC = 8$  cm e  $AC = 11$  cm.



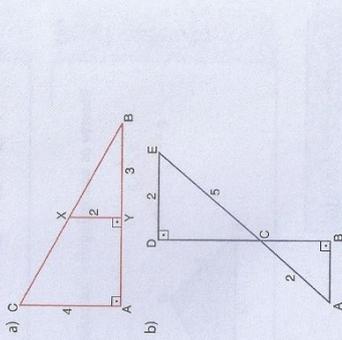
12. Os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  dividem o lado  $\overline{AB}$  do triângulo  $ABC$  em quatro partes congruentes. Os pontos  $G$ ,  $H$  e  $I$  dividem o lado  $\overline{AC}$  desse triângulo em partes congruentes. Sabendo que  $BC = 20$  cm, calcule  $DG$ ,  $EH$  e  $FI$ .



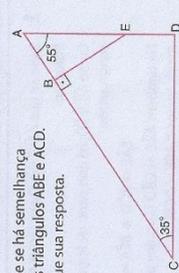
13. Sendo  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ , determine  $x$  nos casos:



14. Determine a medida de  $\overline{AB}$  em cada caso:



15. Verifique se há semelhança entre os triângulos  $ABE$  e  $ACD$ . Justifique sua resposta.



16. São semelhantes os triângulos  $AMN$  e  $PMN$  da figura? Justifique sua resposta.

