

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA**

David Jonnes Francez

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS

Florianópolis

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Francez, David Jonnes
Uma introdução à teoria dos jogos / David Jonnes
Francez ; orientador, Celso Melchiades Doria, 2017.
87 p.

Dissertação (mestrado profissional) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós
Graduação em Matemática, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Teoria dos Jogos, Teorema
Minimax, Estratégias. I. Doria, Celso Melchiades .
II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

David Jonnes Francez

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS

Dissertação submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Matemática em
Rede Nacional para a obtenção do Grau
de Mestrado Profissional em Matemática.
Orientador
Universidade Federal de Santa Cata-
rina: Dr. Celso Melchiades Doria

Florianópolis

2017

David Jonnes Francez

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestrado Profissional em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Florianópolis, 30 de Maio 2017.

Dr. Celso Melchiades Doria
Coordenador
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Dr. Celso Melchiades Doria
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Dr. Gilles Gonçalves Castro
Universidade Federal de Santa Catarina

Dr. André Vanderlinde da Silva
Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Blumenau

Dr. Leonardo Koller Sacht
Universidade Federal de Santa Catarina

À minha esposa e filha pelo amor e compreensão.

AGRADECIMENTOS

A minha família, especialmente a minha mãe, irmãos e sogra pelo carinho e incentivo.

A todos os colegas do Profmat: Daiana, Hiandra, Marco, Marisa e Nicole pelas tardes produtivas e descontraídas de estudos.

A todos os professores da UFSC, em especial os do Profmat: Eliezer, Gilles, Ruy, Daniel, Amar e Fernando que de alguma maneira contribuíram muito para me tornar um professor mais preparado.

Ao professor Celso Melchiades Doria pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão desta dissertação.

Obrigado a todas as pessoas que contribuíram para meu sucesso e para meu crescimento como pessoa. Sou o resultado da confiança e da força de cada um de vocês.

RESUMO

A Teoria dos Jogos é um ramo da matemática aplicada que estuda situações estratégicas onde jogadores escolhem diferentes ações na tentativa de melhorar seu ganho. Inicialmente desenvolvida como ferramenta para compreender comportamento econômico, a teoria dos jogos é hoje usada em diversos campos acadêmicos. O objetivo do trabalho é mostrar, a partir de jogos simples, os conceitos de soma-zero, estratégias, matriz de ganhos, jogos estritamente e não estritamente determinados e finalmente, o famoso Teorema Minimax de John Von Neumann e Oskar Morgenstern.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos - Maximin - Minimax - Estratégias - Matriz de Ganhos - Soma-zero.

ABSTRACT

The Game Theory is a branch of applied mathematics whose main concern is the study strategic situations where players choose different actions in an attempt to improve their payoffs. Initially developed as a tool to understand economic behavior, game theory is now used in many academic fields. The objective of this work is to show, from simple games, the concepts of zero-sum, strategies, matrix of payoffs, games strictly and nonstrictly determined, and finally, the famous Minimax Theorem of John Von Neumann and Oskar Morgenstern.

Keywords: Game Theory - Maximin - Minimax - Strategy - Payoffs - Sum-zero.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS	13
2	ESTRATÉGIA	25
3	RESPOSTAS IDEAIS PARA ESTRATÉGIAS ES- PECÍFICAS	35
4	A ESTRATÉGIA MAXIMIN	43
5	A ESTRATÉGIA MINIMAX	55
6	SOLUÇÕES DE JOGOS SOMA ZERO	63
7	CONCLUSÃO	81
Índice Remissivo		83
	REFERÊNCIAS	85

1 INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS

A teoria dos jogos foi inicialmente desenvolvida como um modelo para analisar situações de conflito, na busca da racionalidade para embasar as decisões entre os agentes envolvidos.

Alguns matemáticos já fizeram estudos de jogos, como James Waldergrave, Augustin Cournot, Ernst Zermelo e Emile Borel. Porém, nenhum deles deu continuidade às suas pesquisas para melhor fundamentá-las. Assim, esta teoria começou a se tornar realmente um foco de estudo na Matemática na década de 30 com pesquisas do matemático John von Neumann, ganhando um enfoque maior no ano de 1944 com seu livro *The Theory of Games and Economic Behavior*, escrito por ele e Oskar Morgenstern.

Em seu livro Neumann e Morgenstern (1944) apresentam uma abordagem da teoria de jogos voltada, principalmente, a aplicações na área da Economia, porém, a complexidade de suas contribuições conseguem abranger muitas áreas pela diversidade de sua aplicabilidade.

Vivemos em uma sociedade na qual os conflitos e interesses são inerentes às relações humanas, é por conta disso que a aplicação desta teoria consegue ser tão vasta, e abranger áreas tão distintas das exatas; como a Psicologia, Ciências Sociais, Política, Biologia, Sociologia, entre outras. Trazendo análises importantes na tomada de decisões que podem ser utilizadas como ferramentas para enriquecer o trabalho desenvolvido dentro da área em questão.

Os jogos a serem considerados nestes estudos não são aqueles em que o resultado está sujeito exclusivamente ao fator sorte, no qual a atuação do jogador independe do resultado, como o jogo de dados, por exemplo. Tratam-se daqueles que são denominados jogos de estratégia, nos quais os sujeitos envolvidos criam uma sequência de tomadas de decisões e portanto passam a ter responsabilidade no resultado do jogo.

Partimos do pressuposto que os jogadores envolvidos sempre estarão em busca de vencer, ou seja, eles criarão estratégias que possam maximizar suas possibilidades, sempre tendo como objetivo a vitória. Salientamos que há a possibilidade de empate, mas quando um jogador vence, essa ação implica automaticamente na derrota de seu adversário, excluindo a possibilidade de ambos serem vencedores. Denominamos essa condição do jogo de soma zero, que definiremos no próximo capítulo.

Na década de 50, John Forbes Nash, começou a estudar a teoria dos jogos e sentiu a necessidade de expandir as pesquisas realizadas

por Neumann, uma vez que muitos jogos não se enquadram nas características de soma zero.

Buscando ampliar o repertório de jogos a serem analisados e questionando, que em dado momento do jogo, as estratégias escolhidas por seus jogadores já não tem mais como serem melhoradas, John Nash criou o conceito de equilíbrio.

Nesta teoria, qualquer situação de conflito ou interação a ser considerada é denominada de “jogo”, e os sujeitos envolvidos de “jogadores”. Nesta pesquisa, por se tratar de uma introdução a esta complexa teoria, iremos limitar a utilização de situações em que constam apenas dois jogadores.

Os exemplos a seguir servem para ilustrar a teoria dos jogos antes de introduzir a formalização matemática.

Exemplo 1.1. PAR OU ÍMPAR . *Este jogo consiste em dois jogadores tentarem acertar se o resultado da soma de seus dedos será um número par ou um número ímpar. Exemplo: João e Pedro, ambos com os punhos fechados e atrás das costas, escolhem entre par e ímpar. Supondo que Pedro escolha par e João ímpar, eles pensam em um número e seguem o jogo mostrando as mãos com os respectivos número de dedos para representarem o valor que cada um escolheu. O jogo termina quando contam-se os dedos e o vencedor é aquele que tiver acertado a paridade do total do número de dedos.*

Nota-se que a princípio se trata de um jogo justo, visto que nenhum dos jogadores apresenta alguma vantagem sobre o outro. Além disso, se o jogo for disputado apenas uma vez, subtende-se que nenhum dos dois jogadores conseguiu ainda captar alguma estratégia ou desvantagem de seu adversário, para a partir de sua leitura elaborar uma nova tática que poderia lhe conceder algum benefício. Não conseguindo portanto, aumentar sua probabilidade de vitória. Em contrapartida, por não conhecer as táticas de seu concorrente, o jogador também não corre o risco de tomar uma decisão ruim e que poderia lhe prejudicar.

A situação já não é a mesma se o jogo for feito em sequência e por diversas vezes, pois é possível que um dos jogadores crie um padrão durante a partida e acabe por escolher repetidamente a mesma paridade na soma de seus dedos, ou acabe ingenuamente colocando sempre a mesma quantidade de dedos ou ainda apenas utilizando uma paridade com mais frequência do que a outra. Tais situações acabam dando margem para que seu oponente consiga perceber este padrão, e se baseie nele para construir uma estratégia de jogo, obtendo assim

uma clara vantagem.

A partir deste raciocínio, deve-se criar alguma estratégia para que os jogadores consigam optar, em todas as sucessivas jogadas, com igual probabilidade de $\frac{1}{2}$ entre par ou ímpar, ou seja, devem escolher de forma aleatória. Em todas as jogadas podemos representar os ganhos e as perdas de Pedro com a matriz abaixo.

		João	
		Par	Ímpar
Pedro	Par	1	-1
	Ímpar	-1	1

Tabela 1 – Par ou ímpar

Na matriz acima a entrada 1 demonstra que Pedro ganhou e a entrada -1 que Pedro perdeu. Obviamente, percebe-se que a vitória de Pedro implica diretamente na derrota de João e vice-versa. A tabela acima também mostra que Pedro tem duas maneiras de vencer: uma se ambos os jogadores exibirem um número par de dedos ou um número ímpar de dedos, uma vez que a soma de dois valores pares resultará em um número par, bem como a soma de dois valores ímpares. Assim, a vitória de João só acontecerá se um dos jogadores mostrar um número par e outro um número ímpar ou vice-versa.

Todos os outros exemplos subsequentes e grande parte da discussão será feita a partir dos mesmos jogadores Pedro e João. As matrizes de ganhos (*payoffs*) serão dadas a partir do ponto de vista de Pedro. Assim cada ganho será um pagamento de João para Pedro.

□

Exemplo 1.2. PEDRA-PAPEL-TESOURA. *O jogo pedra, papel e tesoura consiste em dois jogadores ficando um de frente para o outro e optando por um entre os três elementos que dão nome ao jogo. Estes elementos são representados com as mãos (a pedra é simbolizada por um punho fechado; a tesoura, por dois dedos esticados; e o papel, pela mão aberta) e cada elemento apresenta uma habilidade e uma limitação diante de cada um dos outros, o que amplia as possibilidades de combinações e torna o jogo mais interessante. Exemplo: Pedro e João devem simultaneamente estender os braços com suas respectivas representações e então comparam os símbolos para decidir quem ganhou, da*

seguinte forma:

- *Pedra ganha da tesoura (quebrando-a).*
- *Tesoura ganha do papel (cortando-o).*
- *Papel ganha da pedra (embrulhando-a).*

Caso dois jogadores façam o mesmo gesto, ocorre um empate, e geralmente se joga de novo até desempatar.

Esse jogo é muito similar ao Par ou Ímpar na medida em que nenhum dos dois jogadores têm como tomar uma má decisão, ou tentar criar algum artifício engenhoso capaz de aumentar suas possibilidades em uma única jogada. Mas, assim como no par ou ímpar, se o jogo for realizado diversas vezes e em sequência, algum dos jogadores pode se colocar em desvantagem, optando com mais frequência por um dos elementos. Desta forma, uma boa maneira de se proteger de tal desvantagem seria escolher com igual probabilidades de $1/3$ entre pedra, papel ou tesoura. Como é muito difícil ter imparcialidade na escolha dos elementos e conseguir de fato obter este $1/3$ para cada escolha, uma maneira eficaz de se fazer isso seria utilizar uma roleta aleatória como representa a Figura 1.

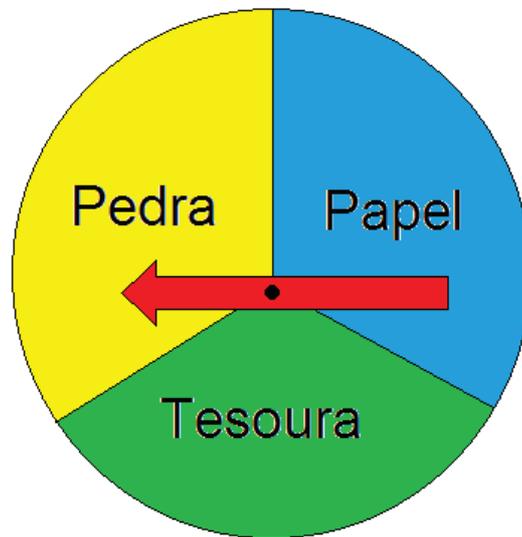


Figura 1 – Roleta Aleatória I

A matriz de ganho do jogo Pedra-Papel-Tesoura pode ser tabuada como

		João		
		Pedra	Papel	Tesoura
Pedro	Pedra	0	-1	1
	Papel	1	0	-1
	Tesoura	-1	1	0

Tabela 2 – Pedra, papel e tesoura

Como visto anteriormente, as entradas positivas referem-se à vitória de Pedro e os valores negativos às derrotas, o valor zero representa um empate.

□

Exemplo 1.3. *MORRA DE DOIS DEDOS.* O jogo consiste em adivinhar a soma dos números que são mostrados com os dedos pelos jogadores. Simultaneamente Pedro e João estendem o braço mostrando o punho cerrado com um ou dois dedos abertos, segundo sua escolha. O jogador que adivinhar o resultado da soma dos dedos, ganha em pontos a mesma quantidade do valor da soma. Se ambos os jogadores adivinham a soma o jogo continua e ninguém vence o ponto.

Seria um tanto quanto ingênuo se algum dos jogadores escolhesse um número que não seja possível obter na soma de todos os dedos. Assim se algum jogador exhibir um dedo teria que apostar na soma 2 ou 3, uma vez que alcançar 4 na soma seria impossível. Enquanto um jogador que mostrar 2 dedos só poderia obter 3 ou 4. Conseqüentemente cada jogador tem somente quatro opções de jogo e tais opções podem ser resumidas na matriz de ganhos ilustrada na Tabela 3.

Note que cada entrada (i, j) corresponde na exibição de i dedos com aposta de j .

		João			
		(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)
Pedro	(1,2)	0	2	-3	0
	(1,3)	-2	0	0	3
	(2,3)	3	0	0	-4
	(2,4)	0	-3	4	0

Tabela 3 – Morra de dois dedos

Esse jogo, como o anterior, é simétrico. Nenhum dos jogadores têm alguma vantagem pré-estabelecida. A princípio quando o jogo é feito, muitas vezes consecutivamente, os jogadores queiram randomizar suas escolhas de maneira homogênea, ou seja, manter a probabilidade de $\frac{1}{4}$ entre as quatro possíveis (1,2,3 ou 4 dedos). Porém percebe-se que essa estratégia não é indicada, pois caso Pedro mantenha tal frequência de escolha e João perceba essa regularidade, temos que as opções (1, 3) ou (2, 4) seria ideal para a vitória de João. Note que, nesses casos, pelas regras de probabilidade teríamos:

$$\frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times (-3) = -\frac{1}{4}$$

ou

$$\frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{4} \times (-4) + \frac{1}{4} \times (0) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

Portanto, caso Pedro escolha optar por uma frequência de $\frac{1}{4}$ para cada opção e João empregar constantemente (1,3) ou (2,4), é esperado que João ganhe, em média, $\frac{1}{4}$ dos pontos de Pedro por jogada. Entretanto, esse jogo é muito diferente dos anteriores. Por mais que seja um jogo simétrico como os outros, cada jogador tentará criar alguma estratégia ao longo das rodadas, levando em consideração as opções anteriores do oponente. Ainda não está claro qual a melhor estratégia

para esse jogo. Discutiremos mais adiante tal estratégia quando a teoria geral dos jogos for proposta.

Entretanto temos que se Pedro randomizar suas opções em $\frac{1}{4}$, João pode obter uma vantagem a longo prazo aplicando a escolha (1, 3) consistentemente. Porém, se João fizer isto, temos que Pedro irá começar a responder com a escolha (1, 2), tomando assim dois pontos de João. Em contrapartida, João fará a escolha (2, 3), ganhando assim 3 pontos por jogada. Pedro por sua vez, irá trocar para (2, 4) tomando 4 pontos. E finalmente João voltará para a escolha (1, 3), começando assim todo um novo ciclo. Uma razoável teoria dos jogos fornecerá uma estratégia estável que evite tais “ciclos lógicos” e veremos que é exatamente o caso proposto.

□

Exemplo 1.4. *COBRANÇA DE PÊNALTI* Vamos supor agora que João e Pedro estejam fazendo uma disputa de pênaltis, no caso João é o goleiro e Pedro o cobrador, suponha ainda que Pedro possua apenas duas estratégias: chutar a bola no lado direito do gol ou chutar a bola no lado esquerdo do gol. Como a distância entre o gol e a marca do pênalti é muito curta, isto impossibilita o goleiro João de determinar de que lado Pedro chutará a bola. Assim, ele deve escolher para que lado pular sem saber qual será a direção do chute. Suponha também que, sempre que o goleiro adivinhar corretamente o lado do chute, ele é capaz de fazer a defesa em 80% das vezes caso o chute seja à direita e 60% à esquerda. O batedor possui um tiro certo quando chuta no lado direito, mas não é tão bom quando chuta do lado esquerdo. Se Pedro chutar do lado direito do gol e o goleiro pular para o lado esquerdo, a bola entrará com 100% de certeza. Se o batedor chutar do lado esquerdo do gol e o goleiro pular para o lado direito, a bola entrará no gol com uma probabilidade de 50%.

Este jogo é muito diferente dos anteriores, uma vez que não é um jogo simétrico, ou seja, existem grupos de estratégias diferentes para cada jogador. Se forem realizadas muitas cobranças, os jogadores não devem manter uma única estratégia (Estratégia Pura), pois colocaria seu oponente em vantagem. Nessas situações a melhor escolha é trocar constantemente de estratégia (Estratégia Mista). A vantagem da estratégia mista é que se coloca a dúvida na cabeça do oponente, pois ao alterar sistematicamente os lados para quais chuta, o cobrador não dá ao goleiro a certeza para qual lado chutará a bola. Da mesma forma, o chutador também não saberá exatamente qual canto escolher, se não tem certeza do que o goleiro fará.

Perceba que caso o goleiro pule para o mesmo lado que a bola, então terá 80% ou 60% de chance de fazer a defesa, dependendo do lado que Pedro chutar, gerando assim dois eventos favoráveis a João considerando os quatro possíveis (direita-direita e esquerda-esquerda). Enquanto Pedro estará certo do gol, caso faça a cobrança à direita e João pule para a esquerda. Por outro lado, caso Pedro cobre à esquerda e João pule à direita, isto não implica na certeza de gol, uma vez que o jogador não apresenta muita habilidade ao chutar para a esquerda, acertando assim, apenas a metade dos pênaltis. A matriz de ganhos da situação descrita fica assim:

		João	
		Direita	Esquerda
Pedro	Direita	20%	100%
	Esquerda	50%	40%

Tabela 4 – Cobrança de Pênalti

Pedro sabe que se chutar constantemente no lado esquerdo do gol, ele terá uma expectativa de converter no mínimo 40% das cobranças. Por outro lado, João percebe também tal informação e com o objetivo de minimizar as conversões de Pedro, escolhe sempre fazer defesas à esquerda, mantendo assim, suas chances em 60%. Porém, como Pedro gosta muito de “blefar”, decide trocar o lado da cobrança ocasionalmente. Sendo assim, vamos supor que ele faça a troca em 25% das vezes, João enfrentará o dilema de qual seria a melhor frequência para maximizar suas defesas.

Nesse exemplo, é extremamente importante não confundir taxa de sucesso com estratégia. Definiremos formalmente o que é estratégia mais a frente. Porém, para diferenciar essas ideias, entenda que estratégia é a frequência com que se escolhe uma opção em um jogo qualquer e taxa de sucesso é a probabilidade de ocorrência quando ambos os jogadores fazem suas respectivas escolhas.

Supondo que João queira minimizar as conversões de Pedro, e por isso decide trocar de lado metade das cobranças, a situação descrita pode ser resumida pela tabela abaixo:

Analisando a Tabela 5 de frequências, podemos agora definir a probabilidade de cada um dos quatro eventos possíveis de ocorrerem. As respectivas chances de cada evento se encontram na Tabela 6.

Assim, podemos calcular a probabilidade de sucesso da cobrança

		Frequência	
		Defesa	
		50%	50%
		Direita	Esquerda
Frequência	25%	Direita	20%
Cobrança	75%	Esquerda	40%

Tabela 5 – Frequência Pênaltis I

Evento Composto	Probabilidade Evento	Sucesso Cobrança
Cobrar à direita e defender à direita	$0,25 \cdot 0,50 = 0,125$	20%
Cobrar à direita e defender à esquerda	$0,25 \cdot 0,50 = 0,125$	100%
Cobrar à esquerda e defender à direita	$0,75 \cdot 0,50 = 0,375$	50%
Cobrar à esquerda e defender à esquerda	$0,75 \cdot 0,50 = 0,375$	40%

Tabela 6 – Pênaltis I

de pênaltis em relação a Pedro:

$$0,125 \cdot 20\% + 0,125 \cdot 100\% + 0,375 \cdot 50\% + 0,375 \cdot 40\% = 2,5\% + 12,5\% + 18,75\% + 15\% = 48,75\%.$$

Note que devido ao blefe de Pedro, este conseguiu criar uma situação de sucesso de 48,75%, o que gera um aumento de aproximadamente 22% em relação a manter as cobranças na esquerda, no qual garantiria exatamente 40% suas chances de êxito.

Entretanto, João pode contornar o problema do blefe aumen-

tando a frequência de defesas à direita para 80%. A situação descrita seria assim:

		Frequência	
		Defesa	
		80%	20%
		Direita	Esquerda
Frequência	25%	Direita	20%
			100%
Cobrança	75%	Esquerda	50%
			40%

Tabela 7 – Frequência Pênaltis II

Fazendo novamente os cálculos dos quatro eventos possíveis a partir da Tabela 7 e 8, temos a seguinte situação:

$$0,20 \cdot 20\% + 0,05 \cdot 100\% + 0,60 \cdot 50\% + 0,15 \cdot 40\% = 4\% + 5\% + 30\% + 6\% = 45\%.$$

Evento Composto	Probabilidade Evento	Sucesso Cobrança
Cobrar à direita e defender à direita	$0,25 \cdot 0,80 = 0,20$	20%
Cobrar à direita e defender à esquerda	$0,25 \cdot 0,20 = 0,05$	100%
Cobrar à esquerda e defender à direita	$0,75 \cdot 0,80 = 0,60$	50%
Cobrar à esquerda e defender à esquerda	$0,75 \cdot 0,20 = 15$	40%

Tabela 8 – Pênaltis II

Perceba então, que caso João aumente a frequência de defesas à direita, ele acaba diminuindo a chance de sucesso de Pedro de 48,75% para exatamente 45%, o que para o ponto de vista do goleiro é muito mais vantajoso. Será que João obteria uma maior probabilidade de vitória se aumentasse ainda mais as defesas à direita? Supondo neste caso que João faça apenas defesas à direita. Então a descrição do evento fica assim:

		Frequência	
		Defesa	
		100%	0%
		Direita	Esquerda
Frequência	25%	Direita	20%
Cobrança	75%	Esquerda	40%

Tabela 9 – Frequência Pênaltis III

Evento Composto	Probabilidade Evento	Sucesso Cobrança
Cobrar à direita e defender à direita	$0,25 \cdot 1 = 0,25$	20%
Cobrar à direita e defender à esquerda	$0,25 \cdot 0 = 0$	100%
Cobrar à esquerda e defender à direita	$0,75 \cdot 1 = 0,75$	50%
Cobrar à esquerda e defender à esquerda	$0,75 \cdot 0 = 0$	40%

Tabela 10 – Pênaltis III

Fazendo novamente os cálculos dos eventos possíveis com o auxílio das Tabelas 9 e 10, obtemos o seguinte resultado:

$$0,25 \cdot 20\% + 0,100\% + 0,75 \cdot 50\% + 0,40\% = \\ 5\% + 0\% + 37,5\% + 0\% = 42,5\%.$$

Perceba que o sucesso das cobranças em relação a Pedro caíram de 45% para 42,5%, demonstrando que, apesar do blefe do batedor, o goleiro deve ignorar a troca de lado e manter constantemente a defesa à direita. Por outro lado, a estratégia de Pedro em manter uma frequência de 25% e 75%, respectivamente à direita e esquerda, aumenta em 2,5% suas chances do que cobrar os pênalti somente à esquerda. Essa análise traz vários questionamentos que serão respondidos nos próximos capítulos: Pedro pode aumentar suas chances para além de 42,5% com uma estratégia diferente? Qual é a maior probabilidade de sucesso que Pedro pode fazer? Qual a melhor resposta de João para qualquer estratégia de Pedro? João consegue definir uma melhor estratégia independente das decisões de Pedro? As respostas serão respondidas respectivamente nos capítulos 3, 4 e 5.

2 ESTRATÉGIA

A teoria dos jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflitos. O elemento básico em um jogo é o conjunto de jogadores que dele participam e suas estratégias. Neste trabalho definiremos estratégia como o conjunto das frequências com que um jogador escolhe as opções de um determinado jogo. Assim, diante de suas escolhas, cria-se uma situação ou perfil no espaço de todas as situações (perfis) possíveis. Por uma questão puramente didática, começaremos com os jogos em que os jogadores tenham apenas duas opções, deixando o caso geral para o fim do capítulo.

Tomando como exemplo os jogos *Par ou Ímpar* e *Cobrança de Pênalti*, já vistos no capítulo anterior e lembrando que as matrizes de *payoffs* representam os ganhos de Pedro, definiremos um jogo de soma-zero 2×2 como uma matriz quadrada de ordem 2×2 com quatro elementos. Então, a representação matemática do jogo *Par ou Ímpar* é a matriz:

		João	
		Par	Ímpar
Pedro	Par	1	-1
	Ímpar	-1	1

Tabela 11 – Soma-Zero: Par ou Ímpar

enquanto a representação matemática do jogo *Cobrança de Pênalti* é a matriz:

		João	
		Direita	Esquerda
Pedro	Direita	20%	100%
	Esquerda	50%	40%

Tabela 12 – Soma-Zero: Cobrança de Pênalti

Os detalhes específicos de cada jogo serão ignorados nos exemplos subsequentes e simplesmente trataremos de uma matriz de números, sem unidade de medida. Portanto, podemos tratar um jogo de soma-zero 2×2 com a forma:

		João	
Pedro	a_{11}	a_{12}	
	a_{21}	a_{22}	

Tabela 13 – Soma-Zero: Genérico

no qual a_{11} , a_{12} , a_{21} e a_{22} são números quaisquer. Essa abstração matemática tem o intuito de simplificar cada jogo estudado, facilitando a compreensão dos mesmos. Entretanto, faremos discussões de alguns casos concretos para que os exemplos se tornem palpáveis e de fácil entendimento.

Cada jogo de soma-zero 2×2 tem dois jogadores, que continuaremos chamando de Pedro e João. Quando os jogadores tomam alguma decisão, conseqüentemente, escolhem uma linha ou uma coluna da matriz. Especificamente nos exemplos anteriores, Pedro escolhe uma linha e João uma coluna. Por exemplo, suponha que no jogo *Cobrança de Pênalti* Pedro chute à direita e João pule à esquerda, a situação descrita seria assim:

20%	100%
50%	40%

Figura 2 – Tomada de Decisão

Cada jogador faz sua escolha simultânea e independentemente do oponente. Assim, a seleção da linha e coluna representa o resultado da jogada, e a entrada da matriz, cujo elemento está contido na intersecção da linha e coluna selecionada, é o ganho do jogador (*payoff*). No caso acima o ganho de Pedro é 100%. Por outro lado, se Pedro tivesse chutado à esquerda e João mantido sua escolha, o ganho do baterador seria de 40%. Note que o ganho é em relação ao cobrador, conforme

comentado no capítulo anterior, e obviamente o ganho de Pedro implica diretamente a perda de João.

Como o objetivo de Pedro é maximizar suas chances de gol e João de minimizar o sucesso das cobranças, cada jogador aplica uma estratégia, ou seja, toma uma decisão entre as opções possíveis.

Definição 2.1. Uma estratégia em um jogo de soma-zero 2×2 é um par de números p_1, p_2 , denotaremos $[p_1; p_2]$, em que:

$$0 \leq p_1 \leq 1, \quad 0 \leq p_2 \leq 1 \quad \text{onde} \quad p_1 + p_2 = 1$$

no qual p_1 representa a frequência com que a primeira linha (ou coluna) é escolhida, e p_2 a frequência com que a segunda linha (ou coluna) é escolhida.

No exemplo *Cobrança de Pênalti* Pedro faz a escolha de chutar 25% das vezes para o lado direito, ou seja, o par de números que representa sua estratégia é $[0, 25; 0, 75]$, enquanto a estratégia inicial de João é manter metade de suas defesas para cada lado, ou seja, sua estratégia é $[0, 5; 0, 5]$. Quando se faz a discussão de estratégias de um modo geral, pode-se definir a estratégia de Pedro como $[1 - p; p]$ e a de João como $[1 - q; q]$.

Conforme visto anteriormente no jogo *Cobrança de Pênalti*, cada jogador aplicou uma estratégia e com isso foi possível estabelecer a probabilidade de ganho para cada oponente. Agora será feito o cálculo de maneira genérica em termos de um jogo de soma-zero 2×2 , tomando as estratégias $[1 - p; p]$ $[q; 1 - q]$ obteremos a seguinte matriz:

	1-q	q
1-p	a_{11}	a_{12}
p	a_{21}	a_{22}

Tabela 14 – Soma-Zero:Genérico II

Vamos supor que Pedro tenha escolhido uma linha e João uma coluna. Desde que ambos os jogadores tenham feito suas escolhas de maneiras independentes, podemos concluir que:

- A probabilidade de Pedro receber o ganho a_{11} é $(1 - p) \times (1 - q)$
- A probabilidade de Pedro receber o ganho a_{12} $(1 - p) \times q$
- A probabilidade de Pedro receber o ganho a_{21} $p \times (1 - q)$

- A probabilidade de Pedro receber o ganho a_{22} $p \times q$

E como os quatro eventos são mutuamente exclusivos e cobrem todas as possibilidades, segue que o ganho esperado de Pedro ($G_{\mathcal{P}}$) é uma função de variáveis p e q definida por:

$$G_{\mathcal{P}}(p, q) = (1 - p) \cdot (1 - q) \cdot a_{11} + (1 - p) \cdot q \cdot a_{12} + p \cdot (1 - q) \cdot a_{21} + p \cdot q \cdot a_{22}.$$

O diagrama representado pela Tabela 14 serve de auxílio para o cálculo dos ganhos de cada jogador. Tais diagramas são chamados de *diagramas auxiliares*, com eles pode-se computar de forma rápida e precisa o resultado do jogo, principalmente quando aplicado em uma rotina repetidas vezes.

Exemplo 2.1. No jogo Cobrança de Pênalti, supondo que Pedro tenha uma estratégia $[0, 3; 0, 7]$ e João $[0, 6; 0, 4]$, então o diagrama auxiliar seria

	60%	40%
30%	20%	100%
70%	50%	40%

Tabela 15 – Exemplo 2.1

Tomando os cálculos dos ganhos de Pedro, temos

$$0,3 \cdot 0,6 \cdot 20\% + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 100\% + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 50\% + 0,7 \cdot 0,4 \cdot 40\% \\ 3,6\% + 12\% + 21\% + 11,2\% = 47,8\%.$$

Portanto, quando Pedro e João aplicarem, respectivamente, as estratégias $[0, 3; 0, 7]$ e $[0, 6; 0, 4]$ então, Pedro deve esperar um sucesso em 47,8% de suas cobranças.

□

Exemplo 2.2. Obtenha o ganho de Pedro em relação às estratégias $[0, 2; 0, 8]$ e João $[0, 3; 0, 7]$ em um jogo abstrato de soma-zero 2×2

5	0
-1	2

Tabela 16 – Exemplo 2.2 - I

Então, o diagrama auxiliar das estratégias impostas acima seria:

	30%	70%
20%	5	0
80%	-1	2

Tabela 17 – Exemplo 2.2 - II

e o resultado esperado é:

$$0,2 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,7 = 0,6 + 0,14 + 0,24 + 0,56 = 1,54$$

Portanto, quando os jogadores aplicam as estratégias especificadas acima, dentro do contexto dado ao jogo, Pedro pode esperar vencer em média 1,54 por rodada. Por outro lado, como se trata de um jogo de soma-zero, João irá perder o mesmo montante.

□

Iremos agora definir jogos de soma-zero, nos quais os jogadores possuem mais de duas opções. Sejam m e n dois números inteiros positivos, então, um jogo de soma-zero $m \times n$ é uma matriz retangular de ordem $m \times n$. São exemplos os jogos *Pedra-Papel-Tesoura* e *Morra de Dois Dedos*:

0	1	-1
-1	0	1
1	-1	0

Tabela 18 – Exemplo soma-zero 3x3

a Tabela 18 é um jogo de soma-zero 3×3 , e

0	2	-3	0
-2	0	0	3
3	0	0	-4
0	-3	4	0

Tabela 19 – Exemplo soma-zero 4x4

enquanto a Tabela 19 representa um jogo de soma-zero 4×4 .

Definição 2.2. Dado um jogo de soma-zero $m \times n$, uma estratégia para Pedro é uma lista de números $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$, denotaremos $[p_1; p_2; p_3; \dots; p_m]$, onde

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_m = 1$$

onde p_i é a frequência com que Pedro escolhe a i -ésima linha. De maneira análoga, uma estratégia para João é uma lista ordenada de números $[q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]$, onde

$$0 \leq q_j \leq 1 \quad \text{onde } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = 1$$

onde q_j é a frequência com que João escolhe a j -ésima coluna.

Para ilustrar a definição de estratégia em um jogo $m \times n$, suponha que Pedro escolha a lista de números $[0, 2; 0, 5; 0, 3]$ no jogo *Pedra-Papel-Tesoura*, isto significa que ele escolherá Pedra 20% das vezes, Papel 50% enquanto Tesoura 30%.

As estratégias de um jogador podem ser classificadas de duas maneiras: Estratégias Puras e Estratégias Mistas. Uma estratégia é dita pura quando o jogador escolhe apenas uma das opções do jogo, ou seja, a frequência de uma determinada opção é 1, enquanto todas as outras é nula.

Definição 2.3. Dada uma estratégia $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$ em um jogo de soma-zero $m \times n$, tal estratégia é dita pura quando existir $p_k = 1$ para algum $k \in (1, 2, 3, \dots, m)$.

Por outro lado, uma estratégia é dita mista quando não for pura, ou seja, o jogador não escolhe constantemente uma única opção do jogo.

Definição 2.4. Dada uma estratégia $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$ em um jogo de soma-zero $m \times n$, tal estratégia é dita mista quando $p_k \neq 1$ para todo $k \in (1, 2, 3, \dots, m)$.

No jogo *Cobrança de Pênalti*, Pedro possui duas estratégias puras: $[1, 0]$ e $[0, 1]$ que representariam, respectivamente, cobranças de pênaltis apenas à direita e apenas à esquerda. Estratégias que não são puras são chamadas de mistas. Portanto, $[0, 1; 0, 9]$ e $[1 - p; p]$ são estratégias mistas, contanto é claro, que p não seja 0 ou 1.

Para cada escolha de uma estratégia específica de ambos os jogadores, podemos calcular o ganho esperado. Suponha que Pedro escolha a estratégia $[p_1, p_2, p_3, \dots, p_m]$ e João $[q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]$ em algum jogo de soma-zero $m \times n$. Se o ganho a_{ij} está na i -ésima linha e na j -ésima coluna (Ver Tabela 20) e é uma das $m \times n$ possibilidades, com probabilidade de ocorrência de $p_i \cdot q_j$.

		q_j
p_i	a_{ij}	

Tabela 20 – Ganho Esperado

Portanto, a contribuição desse evento para a expectativa do ganho é $p_i \cdot q_j \cdot a_{ij}$. Consequentemente, o ganho esperado total é igual a:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} p_i \cdot q_j \cdot a_{ij}.$$

Exemplo 2.3. Calcule o ganho quando Pedro aplica a estratégia $[0, 3; 0, 5; 0, 2]$ e João $[0, 1; 0, 7; 0, 2]$ no *Jogo Pedra-Papel-Tesoura*.

O diagrama auxiliar seria dado por

	10%	70%	20%
30%	0	1	-1
50%	-1	0	1
20%	1	-1	0

Tabela 21 – Exemplo 2.3

e o ganho esperado seria

$$\begin{aligned} & 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1 + 0,3 \cdot 0,2 \cdot (-1) \\ & + 0,5 \cdot 0,1 \cdot (-1) + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 1 \\ & + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 1 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot (-1) + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0 \\ & = 0 + 0,21 - 0,06 - 0,05 + 0 + 0,1 + 0,02 - 0,14 + 0 = 0,08. \end{aligned}$$

Portanto, com as circunstâncias dadas acima, Pedro tem um ganho 0,08 pontos por partida disputada, por outro lado João perde a mesma quantidade, uma vez que o jogo é de soma-zero.

Exemplo 2.4. Calcule o ganho quando Pedro aplica a estratégia mista $[0, 1; 0, 4; 0, 2; 0, 3]$ e João uma estratégia pura $[0; 0; 1; 0]$ no *Morra de Dois Dedos*.

O diagrama auxiliar seria dado por

	0%	0%	100%	0%
10%	0	2	-3	0
40%	-2	0	0	3
20%	3	0	0	-4
30%	0	-3	4	0

Tabela 22 – Exemplo 2.4

Perceba que, ao aplicar uma estratégia pura, João reduz o cálculo dos ganhos ao escolher apenas a terceira coluna, sendo assim, todos os outros eventos não ocorrem. Portanto o ganho esperado é dado por:

$$0,1 \cdot 1 \cdot (-3) + 0,4 \cdot 1 \cdot 0 + 0,2 \cdot 1 \cdot 0 + 0,3 \cdot 1 \cdot 4 - 0,3 + 0 + 0 + 1,2 = 0,9.$$

Portanto, a estratégia mista de Pedro foi muito vantajosa comparada a de João, uma vez que obteve uma expectativa de ganho de 0.9 pontos por rodada.

Ao final desse capítulo, seria natural nos perguntarmos: qual a melhor estratégia possível para maximizar os ganhos de Pedro? E como poríamos encontrá-la? No próximo capítulo iremos investigar e discutir tal estratégia.

3 RESPOSTAS IDEAIS PARA ESTRATÉGIAS ESPECÍFICAS

Nesse capítulo procuraremos encontrar as melhores táticas quando sabe-se a estratégia do oponente. Antes de fazermos essa análise, devemos ter precaução, pois deduzir a estratégia do adversário a partir de movimentos anteriores não é uma tarefa simples, e por mais que encontremos tal estratégia, isto não significa que saberemos a próxima jogada do oponente. Uma estratégia é uma lista de números que representa a frequência com que cada opção é escolhida no jogo. Por exemplo, a estratégia $[0, 5; 0, 3; 0, 2]$ no jogo *Pedra, Papel e Tesoura* poderia ser feita usando uma roleta aleatória como a da Figura 3, assim teríamos garantidas as frequências indicadas na estratégia.

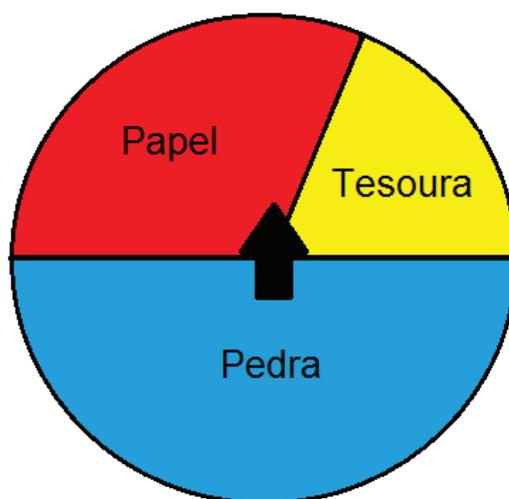


Figura 3 – Roleta Aleatória II

Voltemos ao jogo *Cobranças de Pênalti*. Em dado momento Pedro definiu a estratégia $[0, 25; 0, 75]$, ou seja, cobrar 25% das vezes à direita e 75% à esquerda. Suponha que João perceba a estratégia de seu adversário e procure a melhor resposta para minimizar o sucesso de Pedro. Seja $[1 - q; q]$ a melhor estratégia para João, portanto o diagrama auxiliar seria dado por:

	1-q	q
25%	20%	100%
75%	50%	40%

Tabela 23 – Resposta Ideal Pênalti I

e a expectativa de Pedro é

$$\begin{aligned}
 & 0,25 \cdot (1 - q) \cdot 0,2 + 0,25 \cdot q \cdot 1 + 0,75 \cdot (1 - q) \cdot 0,5 + 0,75 \cdot q \cdot 0,4 \\
 & = 0,05(1 - q) + 0,25q + 0,375(1 - q) + 0,3q \\
 & = 0,05 - 0,05q + 0,25q + 0,375 - 0,375q + 0,3q \\
 & = 0,425 - 0,125q.
 \end{aligned}$$

Perceba então, que o ganho de Pedro depende da estratégia a ser aplicada por João, ou seja, o *payoff* do cobrador está em função da frequência q do goleiro. Note que o menor valor do ganho de Pedro acontece quando João decide defender exclusivamente à esquerda, ou seja, tomando $q = 1$ entre todos os valores possíveis de q , assim o ganho seria dado por:

$$0,425 - 0,125q = 0,425 - 0,125 \cdot 1 = 0,3$$

Portanto, o ganho esperado de Pedro é 30%, conseqüentemente, João tem em média 70% de sucesso.

Suponha agora que Pedro diversificará seus chutes à direita e à esquerda igualmente, ou seja, aplicará a estratégia $[0,5; 0,5]$. Qual seria a resposta ideal de João para minimizar o sucesso de Pedro? Vejamos o diagrama auxiliar

	1-q	q
50%	20%	100%
50%	50%	40%

Tabela 24 – Resposta Ideal Pênalti II

e portanto o ganho esperado é

$$\begin{aligned}
 & 0,5 \cdot (1 - q) \cdot 0,2 + 0,5 \cdot q \cdot 1 + 0,5 \cdot (1 - q) \cdot 0,5 + 0,5 \cdot q \cdot 0,4 \\
 & = 0,1(1 - q) + 0,5q + 0,25(1 - q) + 0,2q \\
 & = 0,1 - 0,1q + 0,5q + 0,25 - 0,25q + 0,2q \\
 & = 0,35 + 0,35q.
 \end{aligned}$$

Analisando a expressão com o intuito de minimizá-la, basta João tomar a contra-estratégia $[1; 0]$ para que o sucesso do cobrador seja reduzido a 35%. Entre outras palavras, caso Pedro chute metade dos pênaltis à direita e a outra metade à esquerda, a melhor escolha para o goleiro seria apostar constantemente no lado direito.

Quando um jogador aplica uma estratégia qualquer, seu oponente procura uma tática que resulte no ganho mínimo de seu adversário, tal tática chamaremos de *contra-estratégia ideal*. Note que nos exemplos anteriores, as duas contra-estratégias de João são puras, isto de certa forma não é mera coincidência. Podemos formular esse princípio de maneira mais geral, como um teorema.

Teorema 3.1. *Se um dos jogadores aplicar uma estratégia fixa, então seu oponente tem uma contra-estratégia ideal e ela é pura.*

Demonstração. Suponha que João aplique uma estratégia fixa $[1 - q_0; q_0]$ e Pedro deseja encontrar a contra-estratégia ideal, ou seja, procura maximizar seus ganhos. Vejamos a situação descrita em um jogo genérico abaixo:

		João	
		$1 - q_0$	q_0
Pedro	$1 - p$	a_{11}	a_{12}
	p	a_{21}	a_{22}

Tabela 25 – Demonstração 3.1

Note então que a função ganho de Pedro é dada por:

$$G_{\mathcal{P}}(p) = (1 - p) \cdot (1 - q_0) \cdot a_{11} + (1 - p) \cdot q_0 \cdot a_{12} + p \cdot (1 - q_0) \cdot a_{21} + p \cdot q_0 \cdot a_{22}$$

fazendo as operações de multiplicação e colocando p em evidência temos:

$$G_{\mathcal{P}}(p) = p(q_0(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) - a_{11} + a_{21}) + a_{11} + q_0 \cdot (a_{12} - a_{11})$$

Observe que $G_{\mathcal{P}}$ é uma função do tipo afim com variável independente p , logo seu gráfico é representado por um segmento de reta, uma vez que a função está definida apenas para $0 \leq p \leq 1$. Assim, o ponto de máximo é dado pela extremidade do segmento, ou seja, para $p = 0$ ou $p = 1$, portanto a contra-estratégia ideal para Pedro é dada por $[0; 1]$ ou $[1; 0]$ e ambas são puras como queríamos mostrar. \square

Exemplo 3.1. Encontre uma contra-estratégia ideal sabendo que Pedro aplicou a estratégia $[0, 3; 0, 7]$ no jogo *Par ou Ímpar*.

Sabemos pelo Teorema 3.1 que dada qualquer estratégia fixa em um jogo, existe uma contra-estratégia ideal para seu oponente e ela é pura. Portanto listemos as duas possibilidades: $[1, 0]$ e $[0, 1]$. Façamos o cálculo do ganho para cada uma das estratégias, usando seus respectivos diagramas auxiliares:

		João		
		Par	Ímpar	
Pedro		Par 70%	1	-1
		Ímpar 30%	-1	1

Tabela 26 – Aplicação Contra-estratégia pura $[1, 0]$

Assim o ganho esperado por Pedro é dado por:

$$\begin{aligned} & 0,7 \cdot 1 \cdot 1 + 0,7 \cdot 0 \cdot (-1) + 0,3 \cdot (-1) \cdot 1 + 0,3 \cdot 1 \cdot 0 = \\ & = 0,7 - 0,3 = 0,4 \end{aligned}$$

Portanto Pedro ganha 0,4 por partida.

Calculemos agora, o ganho para a estratégia pura $[0, 1]$.

		João	
		Par	Ímpar
		0	1
Pedro	Par 70%	1	-1
	Ímpar 30%	-1	1

Tabela 27 – Aplicação Contra-estratégia pura $[0,1]$

Assim o ganho esperado por Pedro é dado por:

$$\begin{aligned} & 0,7 \cdot 1 \cdot 0 + 0,7 \cdot 1 \cdot (-1) + 0,3 \cdot (-1) \cdot 0 + 0,3 \cdot 1 \cdot 1 = \\ & = -0,7 + 0,3 = -0,4 \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que Pedro perde 0,4 pontos por partida, então a contra-estratégia ideal para João é dada por $[0, 1]$.

□

De maneira análoga, podemos expandir o Teorema para jogos maiores que 2×2 , veja o exemplo abaixo:

Exemplo 3.2. Encontre uma contra-estratégia ideal sabendo que Pedro aplicou a estratégia $[10, 25; 0, 1; 0, 4; 0, 25; 0]$ no jogo *Morra de dois dedos*.

Sabemos pelo Teorema 3.1 que dada qualquer estratégia fixa em um jogo, existe uma contra-estratégia ideal para seu oponente e ela é pura. Portanto listemos as quatro possibilidades: $[1, 0, 0, 0]$, $[0, 1, 0, 0]$, $[0, 0, 1, 0]$ e $[0, 0, 0, 1]$. Façamos o cálculo do ganho para cada uma das estratégias, usando seus respectivos diagramas auxiliares:

Para a estratégia $[1, 0, 0, 0]$ temos

	1	0	0	0
25%	0	2	-3	0
10%	-2	0	0	3
40%	3	0	0	-4
25%	0	-3	4	0

Tabela 28 – Estratégia Ideal Morra dois dedos I

E o ganho é dado por

$$\begin{aligned}
 &0, 25 \cdot 1 \cdot 0 + 0, 25 \cdot 0 \cdot 2 + 0, 25 \cdot 0 \cdot (-3) + 0, 25 \cdot 0 \cdot 0 \\
 &+ 0, 10 \cdot 1 \cdot (-2) + 0, 10 \cdot 0 \cdot 0 + 0, 10 \cdot 0 \cdot 0 + 0, 10 \cdot 0 \cdot 3 \\
 &+ 0, 40 \cdot 1 \cdot 3 + 0, 40 \cdot 0 \cdot 0 + 0, 40 \cdot 0 \cdot 0 + 0, 40 \cdot 0 \cdot (-4) \\
 &+ 0, 25 \cdot 1 \cdot 0 + 0, 25 \cdot 0 \cdot (-3) + 0, 25 \cdot 0 \cdot 4 + 0, 25 \cdot 0 \cdot 0 \\
 &= 0, 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 0, 4 \cdot 1 \cdot 3 = -0, 2 + 1, 2 = 1.
 \end{aligned}$$

ou seja, o ganho é 1 ponto por rodada.

De modo análogo, para a estratégia $[0, 1, 0, 0]$ temos

	0	1	0	0
25%	0	2	-3	0
10%	-2	0	0	3
40%	3	0	0	-4
25%	0	-3	4	0

Tabela 29 – Estratégia Ideal Morra dois dedos II

E o ganho é dado por

$$\begin{aligned}
 &0,25 \cdot 0 \cdot 0 + 0,25 \cdot 1 \cdot 2 + 0,25 \cdot 0 \cdot (-3) + 0,25 \cdot 0 \cdot 0 \\
 &+ 0,10 \cdot 0 \cdot (-2) + 0,10 \cdot 1 \cdot 0 + 0,10 \cdot 0 \cdot 0 + 0,10 \cdot 0 \cdot 3 \\
 &+ 0,40 \cdot 0 \cdot 3 + 0,40 \cdot 1 \cdot 0 + 0,40 \cdot 0 \cdot 0 + 0,40 \cdot 0 \cdot (-4) \\
 &+ 0,25 \cdot 0 \cdot 0 + 0,25 \cdot 1 \cdot (-3) + 0,25 \cdot 0 \cdot 4 + 0,25 \cdot 0 \cdot 0 \\
 &= 0,25 \cdot 1 \cdot 2 + 0,25 \cdot 1 \cdot (-3) = 0,5 - 0,75 = -0,25
 \end{aligned}$$

ou seja, o ganho é $-0,25$ ponto por rodada. Analogamente para $[0, 0, 1, 0]$, temos

	0	0	1	0
25%	0	2	-3	0
10%	-2	0	0	3
40%	3	0	0	-4
25%	0	-3	4	0

Tabela 30 – Estratégia Ideal Morra dois dedos III

e o ganho é dado por

$$\begin{aligned}
 &0,25 \cdot 0 \cdot 0 + 0,25 \cdot 0 \cdot 2 + 0,25 \cdot 1 \cdot (-3) + 0,25 \cdot 0 \cdot 0 \\
 &+ 0,10 \cdot 0 \cdot (-2) + 0,10 \cdot 0 \cdot 0 + 0,10 \cdot 1 \cdot 0 + 0,10 \cdot 0 \cdot 3 \\
 &+ 0,40 \cdot 0 \cdot 3 + 0,40 \cdot 0 \cdot 0 + 0,40 \cdot 1 \cdot 0 + 0,40 \cdot 0 \cdot (-4) \\
 &+ 0,25 \cdot 0 \cdot 0 + 0,25 \cdot 0 \cdot (-3) + 0,25 \cdot 1 \cdot 4 + 0,25 \cdot 0 \cdot 0 \\
 &= 0,25 \cdot 1 \cdot (-3) + 0,25 \cdot 1 \cdot 4 = -0,75 + 1 = 0,25
 \end{aligned}$$

ou seja, o ganho é $0,25$ ponto por rodada.

E finalmente para a estratégia $[0, 0, 0, 1]$ temos

	0	0	0	1
25%	0	2	-3	0
10%	-2	0	0	3
40%	3	0	0	-4
25%	0	-3	4	0

Tabela 31 – Estratégia Ideal Morra dois dedos IV

e o ganho é dado por

$$\begin{aligned}
 & 0, 25.0.0 + 0, 25.0.2 + 0, 25.0.(-3) + 0, 25.1.0 \\
 & + 0, 10.0.(-2) + 0, 10.0.0 + 0, 10.0.0 + 0, 10.1.3 \\
 & + 0, 40.0.3 + 0, 40.0.0 + 0, 40.0.0 + 0, 40.1.(-4) \\
 & + 0, 25.0.0 + 0, 25.0.(-3) + 0, 25.0.4 + 0, 25.1.0 \\
 & = 0, 1.1.3 + 0, 4.1.(-4) = 0, 3 - 1, 6 = -1, 3
 \end{aligned}$$

ou seja, o ganho é -1,3 ponto por rodada.

Fazendo uma análise das quatro estratégias acima, fica fácil perceber que, a contra-estratégia ideal para João minimizar os ganhos de Pedro é a estratégia pura $[0, 0, 0, 1]$, ou seja, João deve mostrar continuamente dois dedos e apostar sempre em 4 ao total, assim seu ganho esperado será de 1,3 ponto por partida.

□

4 A ESTRATÉGIA MAXIMIN

Neste capítulo buscaremos uma estratégia ideal, ou seja, procurar a melhor tática possível para Pedro em qualquer jogo de soma-zero 2×2 , justificando-a matematicamente. Seja o jogo:

		João	
		a_{11}	a_{12}
Pedro		a_{21}	a_{22}

Tabela 32 – Estratégia Ideal I

Devido ao Teorema 3.1, sabemos que para qualquer estratégia $[1 - p, p]$ imposta por Pedro, existe uma contra-estratégia pura que João pode aplicar para minimizar o ganho de seu adversário. Sejam $g_1(p)$ e $g_2(p)$ os respectivos ganhos de Pedro quando o mesmo aplica as estratégias puras $[1, 0]$ e $[0, 1]$. Segue abaixo os diagramas auxiliares da situação descrita:

		1	0
		a_{11}	a_{12}
1-p		a_{21}	a_{22}
p			

Tabela 33 – Estratégia Ideal II

		0	1
		a_{11}	a_{12}
1-p		a_{21}	a_{22}
p			

Tabela 34 – Estratégia Ideal III

portanto o ganho é dado por

$$g_1(p) = (1 - p) \cdot 1 \cdot a_{11} + p \cdot 1 \cdot a_{21} = a_{11}(1 - p) + a_{21}p = (a_{21} - a_{11})p + a_{11}.$$

$$g_2(p) = (1 - p) \cdot 1 \cdot a_{12} + p \cdot 1 \cdot a_{22} = a_{12}(1 - p) + a_{22}p = (a_{22} - a_{12})p + a_{12}.$$

Se denotarmos como $G_P(p)$ a expectativa do ganho de Pedro aplicando as estratégias descritas acima, mesmo sabendo que João pode minimizá-las, então o ganho de Pedro é dado por

$$G_P(p) = \min(g_1(p), g_2(p))$$

Acabamos de determinar o ganho de Pedro $G_{\mathcal{P}}(p)$ em função de p , ou seja, temos uma relação direta entre a estratégia $[1 - p; p]$ aplicada e o ganho esperado.

Perceba que a variável independente p aparece nas expressões $g_1(p)$ e $g_2(p)$ como uma função afim, portanto, o respectivo gráfico é dado por uma reta. Perceba, é claro, que o valor de p é um número real entre 0 e 1, uma vez que p representa uma probabilidade, assim, o gráfico da função descrita é formado por segmentos de reta no intervalo $[0, 1]$. Note que as extremidades dessa função são dadas por:

$$g_1(0) = (a_{21} - a_{11}).0 + a_{11} = a_{11}.$$

$$g_1(1) = (a_{21} - a_{11}).1 + a_{11} = a_{21}.$$

Isso mostra que o gráfico de $g_1(p)$ é um segmento de reta que contém as extremidades $(0, a_{11})$ e $(1, a_{21})$. Analogamente:

$$g_2(0) = (a_{22} - a_{12}).0 + a_{12} = a_{12}.$$

$$g_2(1) = (a_{22} - a_{12}).1 + a_{12} = a_{22}.$$

e o gráfico de $g_2(p)$ é um segmento de reta que contém as extremidades $(0, a_{12})$ e $(1, a_{22})$. Com essas informações de $g_1(p)$ e $g_2(p)$, podemos notar que ao aplicar a estratégia $[1 - p; p]$ ou $[p; 1 - p]$, conseqüentemente, as funções teriam seus gráficos trocados, ou seja, o gráfico de $g_1(p)$ seria de $g_2(p)$ e vice-versa. O gráfico de $G_{\mathcal{P}}(p)$ é feito a partir da observação seguinte:

O gráfico de $G_{\mathcal{P}}(p)$ consiste em uma linha que, para qualquer valor possível de p , contém o menor valor entre $g_1(p)$ e $g_2(p)$.

Os exemplos a seguir mostram uma variedade de informações importantes para a escolha de uma estratégia, apenas observando o gráfico da função.

Exemplo 4.1. Para o jogo do *Par ou Ímpar* tínhamos a seguinte matriz de ganhos

	Par	Ímpar
Par	1	-1
Ímpar	-1	1

Tabela 35 – Exemplo 4.1

e o gráfico de $G_{\mathcal{P}}$ é dado pela linha destacada na Figura 4.

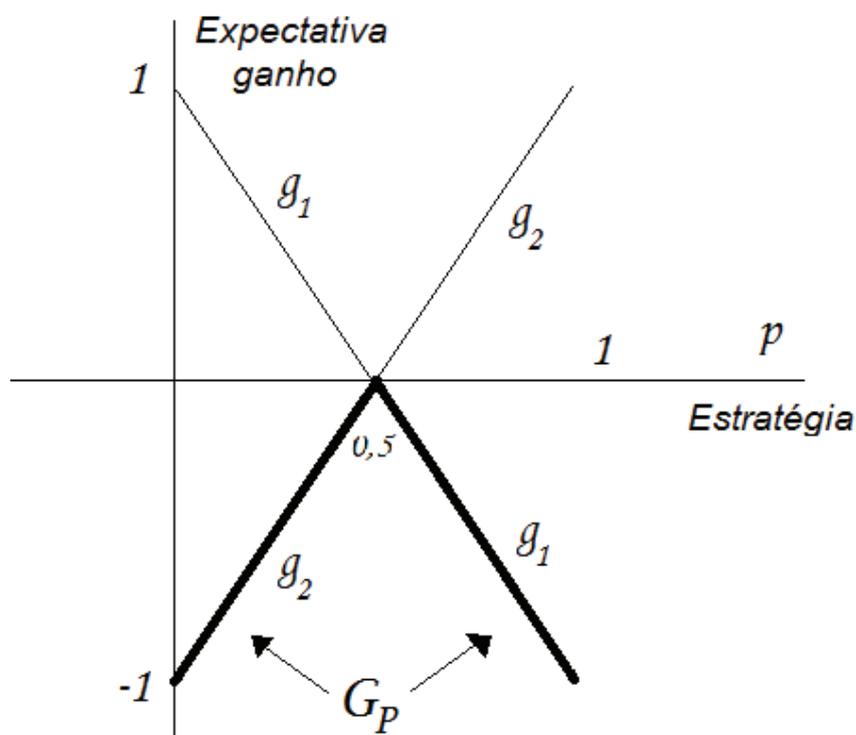


Figura 4 – Exemplo 4.1 - Gráfico Expectativa

Perceba no gráfico, que se Pedro aplicar qualquer estratégia com $0 \leq p < 0,5$ o ganho será dado por g_2 , uma vez que João recorrerá à estratégia pura $[0; 1]$, ou seja, caso Pedro tenha uma frequência maior na escolha par, então, João apostará continuamente na opção ímpar. Por outro lado, caso $0,5 < p \leq 1$ então, o gráfico da função será representado por g_1 , já que João passará a aplicar a contra-estratégia ideal $[1; 0]$.

Assim, em outras palavras, se Pedro tiver uma maior probabilidade de jogar um número ímpar, então seu adversário jogará conti-

nuamente na opção par. E finalmente, se $p = 0,5$ temos o ponto de intersecção de g_1 com g_2 não importa a estratégia escolhida por João, a expectativa de ganho de Pedro será a mesma. Podemos resumir a situação descrita como:

$[1; 0]$ é uma contra-estratégia ideal para João quando $0 \leq p \leq 0,5$.
 $[0; 1]$ é uma contra-estratégia ideal para João quando $0,5 \leq p \leq 1$.

Além disso, o ponto de máximo da função $G_{\mathcal{P}}$ é o ponto correspondente de $p = 0,5$, isso mostra que a melhor estratégia para Pedro é diversificar igualmente suas escolhas entre par e ímpar, ou seja, $[1 - 0,5; 0,5] = [0,5; 0,5]$. Essa conclusão se encaixa perfeitamente na intuição inicial do problema.

□

Exemplo 4.2. Para o jogo do *Cobranças de Pênalti* tínhamos a seguinte matriz de ganhos:

20%	100%
50%	40%

Tabela 36 – Exemplo 4.2 - Cobrança Pênalti

Temos $a_{11} = 0,2, a_{12} = 1, a_{21} = 0,5$ e $a_{22} = 0,4$. Determinando $g_1(p)$ e $g_2(p)$, temos:

$$g_1(p) = (a_{21} - a_{11})p + a_{11} = (0,5 - 0,2)p + 0,2 = 0,3p + 0,2.$$

$$g_2(p) = (a_{22} - a_{12})p + a_{12} = (0,4 - 1)p + 1 = -0,6p + 1.$$

e o gráfico da função é dada pela Figura 5 abaixo:

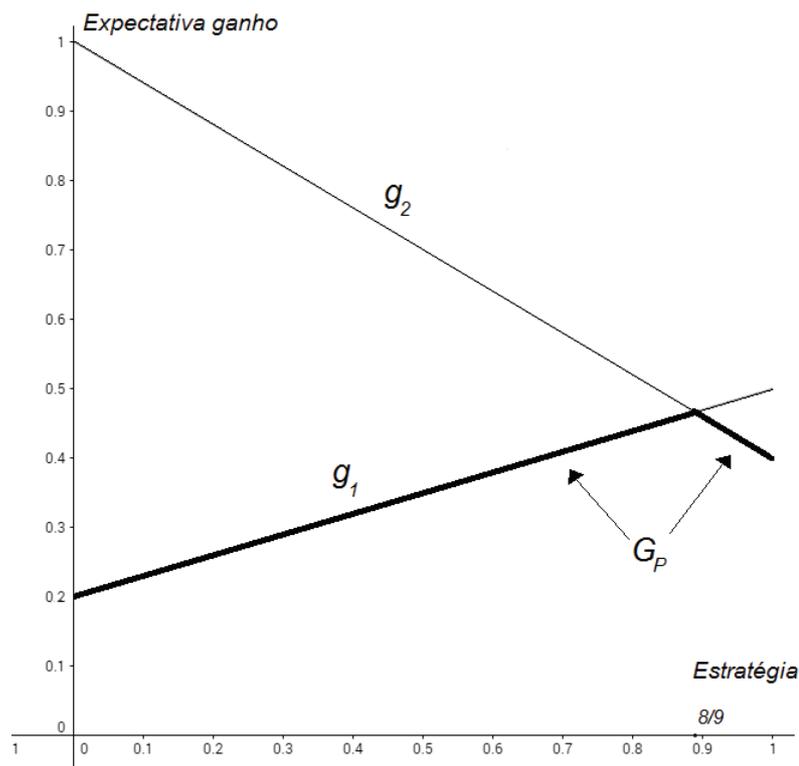


Figura 5 – Exemplo 4.2 - Gráfico Expectativa

Perceba que o gráfico de G_P é dado grande parte por $g_1(p)$, onde João aplicaria a contra-estratégia pura $[1; 0]$ até o determinado momento em que João trocava de estratégia e passaria a aplicar $[0; 1]$. Note que o momento de troca de estratégia é exatamente a intersecção de $g_1(p)$ e $g_2(p)$. Esse ponto é de extrema importância para a análise do jogo, podemos encontrá-lo facilmente resolvendo a equação:

$$g_1(p) = g_2(p)$$

isto é,

$$0,3p + 0,2 = -0,6p + 1$$

$$0,9p = 0,8$$

$$p = \frac{8}{9}.$$

Consequentemente,

$[1; 0]$ é uma contra-estratégia ideal para João quando $0 \leq p \leq \frac{8}{9}$.

$[0; 1]$ é uma contra-estratégia ideal para João quando $\frac{8}{9} \leq p \leq 1$.

Fazendo uma análise informal, podemos concluir que caso Pedro chute à esquerda com uma frequência menor que $\frac{8}{9}$, então João irá persistir em defender à direita. Porém, quando Pedro faz as cobranças com probabilidade superior a $\frac{8}{9}$ à esquerda, então o goleiro fará suas defesas constantemente à esquerda. Finalmente, quando $p = \frac{8}{9}$ temos o mesmo valor da função independente da estratégia pura aplicada por João, ou seja, o ganho será o mesmo para $g_1(p)$ ou $g_2(p)$.

Uma vez que a intersecção dos gráficos de $g_1(p)$ e $g_2(p)$ é o ponto de máximo da função G_P temos que esse ponto representa a escolha ideal para Pedro, assim temos que a estratégia é dada por:

$$\left[1 - \frac{8}{9}; \frac{8}{9}\right] = \left[\frac{1}{9}; \frac{8}{9}\right]$$

Portanto, a maior expectativa de ganho que Pedro, levando em conta que João quer minimizá-la, pode garantir é calculada abaixo:

$$g_1\left(\frac{8}{9}\right) = 0,3 \cdot \frac{8}{9} + 0,2 = \frac{8}{30} + 0,2 = 0,26... + 0,2 = 0,26... = 46,6...%$$

ou

$$g_2\left(\frac{8}{9}\right) = -0,6 \cdot \frac{8}{9} + 1 = -\frac{8}{15} + 1 = -0,53... + 1 = 0,46... = 46,66...%$$

□

Está claro nos exemplos vistos anteriormente, que o ponto de máximo da função G_P é uma estratégia especial. Infelizmente, há situações nas quais há mais de um ponto máximo (ver Exemplo 4.5) e devemos ter cautela. Porém podemos formular a seguinte definição/teorema:

Teorema 4.1. *Se (x, y) é o ponto de máximo do gráfico de G_P então:*

$[1 - x; x]$ é uma estratégia Maximin para Pedro, e y é o ganho Maximin esperado.

Se Pedro aplicar a estratégia Maximin $[1 - x; x]$ então ele pode esperar vencer no mínimo y em cada jogada.

Essa nomenclatura é dada porque cada ponto do gráfico é o mínimo de duas possíveis escolhas de João, e por outro lado, Pedro

está escolhendo o ponto mais alto do gráfico, ou seja, está maximizando o mínimo. Entre outras palavras, Pedro está escolhendo o valor mais alto abaixo da curva de mínimo. O exemplo abaixo representa que a estratégia Maximin não é necessariamente a intersecção de $g_1(p)$ e $g_2(p)$.

Exemplo 4.3. Seja o jogo abstrato descrito abaixo

1	0
3	4

Tabela 37 – Exemplo 4.3

então $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 3$ e $a_{22} = 4$. Calculando as expressões de g_1 e g_2 obtemos

$$g_1(p) = (a_{21} - a_{11})p + a_{11} = (3 - (1))p + 1 = 2p + 1.$$

$$g_2(p) = (a_{22} - a_{12})p + a_{12} = (4 - 0)p + 0 = 4p.$$

O gráfico é a linha em negrito na Figura 6.

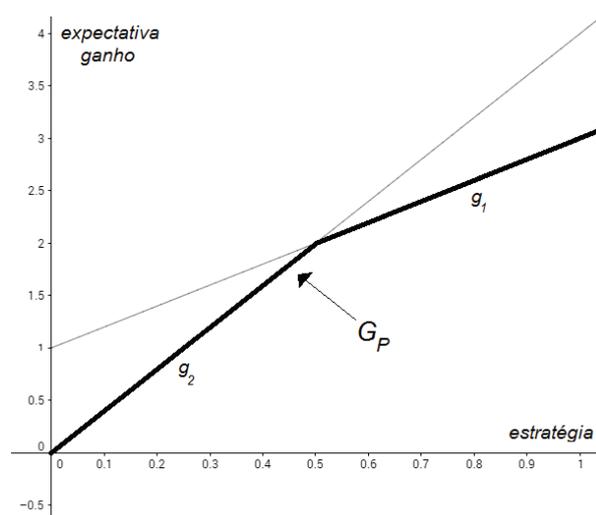


Figura 6 – Exemplo 4.3 - Gráfico Expectativa

Para encontrar a intersecção dos gráficos de g_1 e g_2 basta resolvermos a equação

$$\begin{aligned} g_1(p) &= g_2(p) \\ 2p + 1 &= 4p \\ -2p &= -1 \\ p &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Note que o ponto de intersecção dos gráficos de g_1 e g_2 não é o máximo assumido pela função $G_{\mathcal{P}}$. O máximo da função é dado pelo ponto $(1, 3)$, que representa o ganho mínimo de Pedro, pois a estratégia Maximin ocorre quando ele aplica a estratégia pura $[0; 1]$. Informalmente faz muito sentido, pois ao escolher apenas a segunda linha, ele obtém um ganho de no mínimo 3, uma vez que seria extrema ingenuidade de João escolher a segunda coluna e proporcionar um ganho de 4 para o seu adversário. Então, o ponto $(1, 3)$ representa o máximo da função $G_{\mathcal{P}}$, ou seja, para a estratégia Maximin $[0; 1]$ o ganho esperado é de no mínimo 3.

□

Exemplo 4.4. Façamos a análise do jogo abaixo:

2	0
-2	-3

Tabela 38 – Exemplo 4.4

então $a_{11} = 2$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = -2$ e $a_{22} = -3$. Calculando as expressões de g_1 e g_2 obtemos

$$\begin{aligned} g_1(p) &= (a_{21} - a_{11})p + a_{11} = (-2 - 2)p + 2 = -4p + 2. \\ g_2(p) &= (a_{22} - a_{12})p + a_{12} = (-3 - 0)p + 0 = -3p. \end{aligned}$$

O gráfico é a linha em negrito na Figura 7.

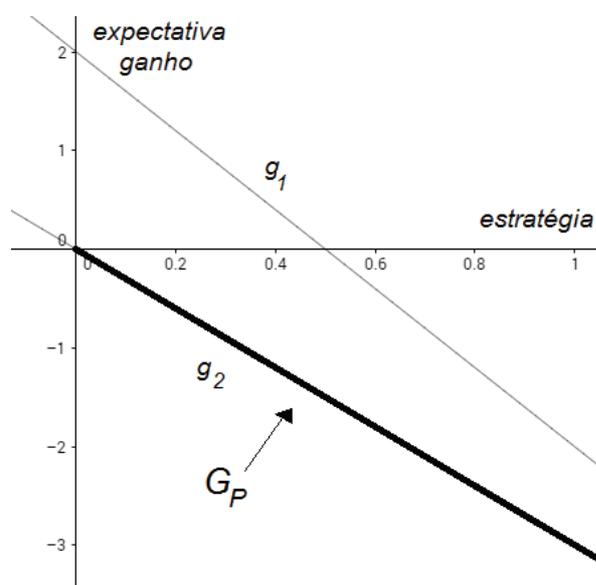


Figura 7 – Exemplo 4.4 - Gráfico Expectativa

Perceba neste jogo, que o gráfico do ganho de Pedro coincide exatamente com o gráfico de g_2 para todo valor de p com $0 \leq p \leq 1$. Isso significa que independentemente da estratégia que Pedro venha a aplicar, João sempre escolherá a segunda coluna. De certa maneira isto é obvio, pois escolhendo a segunda coluna, João deixará Pedro decidir entre ganhar nada (0) ou perder 3, como Pedro sempre procura ganhar o máximo possível, então, optará pelo zero.

A estratégia Maximin de Pedro na situação descrita é assegurada pela estratégia pura $[1 - 0, 0] = [1, 0]$, em outras palavras, Pedro escolherá a linha 1 enquanto João a coluna dois, garantindo assim um ganho de zero para Pedro.

□

Todos os exemplos vistos até agora mostraram um ponto único para a estratégia Maximin, mas isso não ocorre sempre, vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo 4.5. Seja o jogo dado por:

0	1
2	1

Tabela 39 – Exemplo 6

então $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 2$ e $a_{22} = 1$. Calculando as expressões de g_1 e g_2 obtemos

$$g_1(p) = (a_{21} - a_{11})p + a_{11} = (2 - 0)p + 0 = 2p.$$

$$g_2(p) = (a_{22} - a_{12})p + a_{12} = (1 - 1)p + 1 = 1.$$

O gráfico é a linha em negrito na Figura 8.

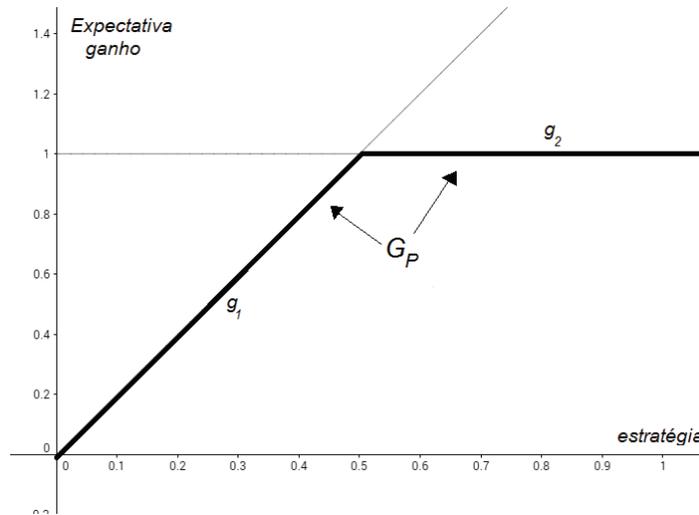


Figura 8 – Exemplo 4.5 - Gráfico Expectativa

O gráfico da função G_p possui a intersecção entre g_1 e g_2 e tal ponto pode ser calculado pela equação:

$$g_1(p) = g_2(p)$$

$$2p = 1$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Observe que a partir desse ponto, o gráfico da função coincide com o função constante $g_2(p) = 1$ então, o ponto $(0,5;1)$ não é o único ponto de máximo, ou seja, existem infinitas estratégias Maximin para Pedro. Portanto, o ganho esperado por Pedro, para qualquer estratégia $[1 - p, p]$ com p tal que $0,5 \leq p \leq 1$, é de 1.

□

Para concluir esse capítulo, percebemos que a estratégia Maxi-

min é boa no sentido de garantir o ganho mínimo por jogada, além disso, é o melhor valor que pode ser assegurado. No entanto, é natural nos questionarmos se a estratégia Maximin é realmente a melhor tática para aumentarmos o ganho esperado. A resposta dessa questão, é claro, depende das circunstâncias de cada jogo. Por exemplo, suponha que o jogo a seguir

6	-2
3	5

Tabela 40 – Melhor Estratégia

seja disputado 10 vezes e Pedro aplique a estratégia $[0, 2; 0, 8]$. Se Pedro seleciona a linha 1 apenas na primeira e quinta jogadas, e caso João escolha a segunda coluna no mesmo momento, o ganho de Pedro será $2 \cdot (-2) + 8 \cdot 3 = -4 + 24 = 20$, o que é menor que os 30 garantidos pela estratégia Maximin. Por outro lado, caso João escolha sempre a primeira coluna, ou pelo menos nas duas vezes que Pedro escolher a linha um, o ganho será de $2 \cdot 6 + 8 \cdot 3 = 12 + 24 = 36$, o que representa um ganho maior em relação ao da estratégia Maximin.

Von Neumann e Morgenstern estavam conscientes da relatividade do ganho da estratégia Maximin. Eles acreditavam que esta estratégia é defensiva e garante o ganho mínimo para o jogador:

Isso pode ser resumido dizendo que nossas estratégias são perfeitas do ponto de vista defensivo, porém elas não conseguem aproveitar os erros do oponente, ou seja, elas não são estratégias calculadas para a ofensiva. [VON NEUMANN e MORGENSTERN, 1944]

5 A ESTRATÉGIA MINIMAX

Vamos, agora, em busca de uma boa estratégia para João. O gráfico da expectativa de ganho de João em um jogo de soma-zero 2×2 , pode ser encontrado de maneira análoga a de Pedro, porém, com algumas pequenas diferenças e similaridades que serão descritas abaixo.

Devido ao Teorema 3.1, sabemos que para qualquer estratégia $[1 - q, q]$ aplicada por João em um jogo qualquer de soma-zero 2×2

		João	
		a_{11}	a_{12}
Pedro	a_{21}		
	a_{22}		

Tabela 41 – Estratégia Ideal IV

existe uma contra-estratégia pura que Pedro pode aplicar para maximizar seu ganho. Sejam $h_1(q)$ e $h_2(q)$ os respectivos ganhos de Pedro quando o mesmo aplica as estratégias puras $[1; 0]$ e $[0; 1]$. Seguem abaixo os diagramas auxiliares da situação descrita:

		1-q	q
		a_{11}	a_{12}
1			
0	a_{21}	a_{22}	

		1-q	q
		a_{11}	a_{12}
0			
1	a_{21}	a_{22}	

Tabela 42 – Estratégia Ideal VI

Tabela 43 – Estratégia Ideal VII

portanto o ganho de Pedro é dado por

$$h_1(q) = (1 - q) \cdot 1 \cdot a_{11} + q \cdot 1 \cdot a_{12} = a_{11}(1 - q) + a_{12}q = (a_{12} - a_{11})q + a_{11}.$$

$$h_2(q) = (1 - q) \cdot 1 \cdot a_{21} + q \cdot 1 \cdot a_{22} = a_{21}(1 - q) + a_{22}q = (a_{22} - a_{21})q + a_{21}.$$

Se denotarmos como $G_{\mathcal{J}}(q)$ a expectativa do ganho de Pedro aplicando as estratégias descritas acima, mesmo sabendo que ele pode maximizá-las, então o ganho de Pedro é dado por:

$$G_{\mathcal{J}}(q) = \max(h_1(q), h_2(q))$$

Acabamos de determinar o ganho de Pedro $G_J(q)$ em função de q , ou seja, temos uma relação direta entre a estratégia $[1 - q; q]$ aplicada e o ganho esperado.

Perceba que a variável independente q aparece nas expressões $h_1(q)$ e $h_2(q)$ como uma função afim, portanto o respectivo gráfico é dado por uma reta. Perceba é claro, que o valor de q é um número real entre 0 e 1, uma vez que q representa uma probabilidade, assim o gráfico da função descrita é formado por segmentos de reta no intervalo $[0; 1]$. Note que as extremidades dessa função são dadas por:

$$h_1(0) = (a_{12} - a_{11}).0 + a_{11} = a_{11}.$$

$$h_1(1) = (a_{12} - a_{11}).1 + a_{11} = a_{12}.$$

Isso mostra que o gráfico de $h_1(q)$ é um segmento de reta que contém as extremidades $(0, a_{11})$ e $(1, a_{12})$. Analogamente,

$$h_2(0) = (a_{22} - a_{21}).0 + a_{21} = a_{21}.$$

$$h_2(1) = (a_{22} - a_{21}).1 + a_{21} = a_{22}.$$

e o gráfico de $h_2(q)$ é um segmento de reta que contém as extremidades $(0, a_{21})$ e $(1, a_{22})$. Com essas informações de $h_1(q)$ e $h_2(q)$ podemos notar que aplicar a estratégia $[1 - q; q]$ ou $[q; 1 - q]$ não mudaria o ganho esperado de João, pois essa escolha de estratégia implicaria em apenas uma troca de gráficos, ou seja, o gráfico de $h_1(q)$ seria de $h_2(q)$ e vice-versa. O gráfico de $G_{\mathcal{J}}(q)$ é feito a partir da observação seguinte:

O gráfico de $G_{\mathcal{J}}(q)$ consiste em uma linha que, para qualquer valor possível de q , contém o maior valor entre $h_1(q)$ e $h_2(q)$.

Agora reexaminaremos os exemplos anteriores visto sob a perspectiva de João.

Exemplo 5.1. Para o jogo do *Par ou Ímpar* temos $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = -1$ e a seguinte matriz de ganhos

	Par	Ímpar
Par	1	-1
Ímpar	-1	1

Tabela 44 – Exemplo 4.1

o gráfico de $G_{\mathcal{J}}$ é dado pela linha destacada na Figura 9.

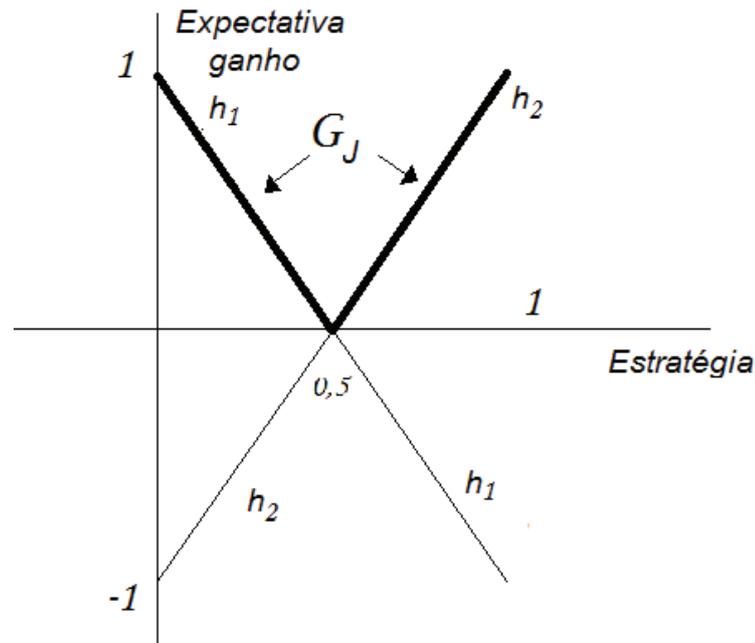


Figura 9 – Exemplo 5.1 - Gráfico Expectativa

Observe que o gráfico coincide com $h_1(q)$ para todo $0 \leq q \leq 0,5$. Isso significa que ao aplicar a estratégia $[1 - q; q]$ com $q \leq 0,5$, então Pedro deve responder empregando a estratégia pura $[1; 0]$. Em outras palavras, se João escolher par, Pedro também escolherá par. Por outro lado, se João mostrar um número ímpar, Pedro aplicará a estratégia $[0; 1]$ para todo valor de $q \geq 0,5$. Tudo isso pode ser resumido da seguinte forma:

- $[1; 0]$ é uma contra-estratégia ideal para Pedro quando $0 \leq p \leq 0,5$.
- $[0; 1]$ é uma contra-estratégia ideal para Pedro quando $0,5 \leq p \leq 1$.

Além disso, o ponto de mínimo da função $G_{\mathcal{J}}$ é o ponto correspondente de $q = 0,5$, isso mostra que a melhor estratégia para João é escolher com igual probabilidade entre par ou ímpar em cada jo-

gada, somente assim João pode garantir que Pedro tenha a expectativa mínima de ganho.

□

Exemplo 5.2. No jogo *Cobranças de Pênalti* temos a seguinte matriz de ganhos:

20%	100%
50%	40%

Tabela 45 – Exemplo 5.2 - Cobrança Pênalti

temos então $a_{11} = 0,2$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 0,5$ e $a_{22} = 0,4$. Calculando as expressões de $h_1(q)$ e $h_2(q)$, temos:

$$h_1(q) = (a_{12} - a_{11})q + a_{11} = (1 - 0,2)q + 0,2 = 0,8q + 0,2.$$

$$h_2(q) = (a_{22} - a_{21})q + a_{21} = (0,4 - 0,5)q + 0,5 = -0,1q + 0,5.$$

e o gráfico da função é dada pela Figura 10 abaixo.

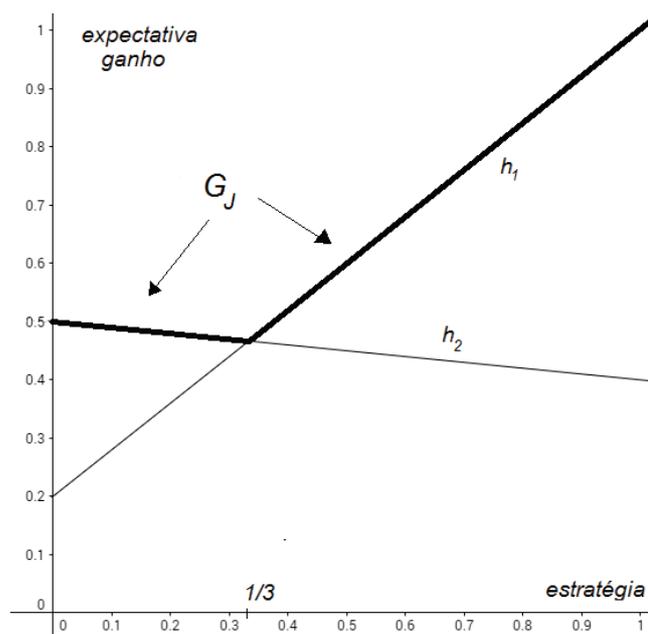


Figura 10 – Exemplo 5.2 - Gráfico Expectativa

O gráfico de $G_{\mathcal{J}}$ coincide inicialmente com h_2 para pequenos valores de q . Portanto, quando João aplicar a estratégia $[1 - q; q]$ para valores próximos de zero, Pedro deve responder com a estratégia pura $[0; 1]$; quando q está próximo de 1, então Pedro emprega $[1; 0]$. De maneira mais informal, se João raramente defender à esquerda, Pedro irá cobrar exatamente nesse lado; se João pular à esquerda, então Pedro sempre chutará à direita. O ponto mais interessante para minimizar a expectativa de ganho de Pedro é a intersecção de $h_1(q)$ e $h_2(q)$. Para encontrar tal ponto basta resolvermos a equação abaixo:

$$\begin{aligned} h_1(q) &= h_2(q) \\ 0,8q + 0,2 &= -0,1q + 0,5 \\ 0,9q &= 0,3 \\ q &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$[0; 1]$ é uma contra-estratégia ideal para Pedro quando $0 \leq q \leq \frac{1}{3}$,
 $[1; 0]$ é uma contra-estratégia ideal para Pedro quando $\frac{1}{3} \leq q \leq 1$.

Em outras palavras, caso João não defenda mais que $\frac{1}{3}$ das vezes à esquerda, Pedro deve persistir com cobranças à esquerda. Uma vez que João pule mais que $\frac{1}{3}$ à esquerda, então, Pedro chutará sempre à direita. Finalmente, quando $q = \frac{1}{3}$ independente da estratégia de Pedro, o ganho será o mesmo.

Como a intersecção dos gráficos de $h_1(q)$ e $h_2(q)$ também representa o ponto mais baixo de $G_{\mathcal{J}}$, isto quer dizer, que para esse valor de q temos a escolha ideal para João. Impondo a estratégia a seguir:

$$\left[1 - \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right] = \left[\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right],$$

o valor mínimo esperado por João é dado por

$$h_1\left(\frac{1}{3}\right) = 0,8 \cdot \frac{1}{3} + 0,2 = \frac{8}{30} + 0,2 = 0,26\dots + 0,2 = 0,46\dots = 46,6\dots\%$$

ou

$$h_2\left(\frac{1}{3}\right) = -0,1 \cdot \frac{1}{3} + 0,5 = -\frac{1}{30} + 0,5 = -0,033\dots + 0,5 = 0,466\dots = 46,6\dots\%.$$

□

Está claro que o ponto de mínimo da função representa uma estratégia significativa. Assim, como o ponto de máximo da função $G_{\mathcal{P}}$, o gráfico de $G_{\mathcal{J}}$ pode ter mais de um ponto de mínimo. Analogamente ao capítulo anterior podemos enunciar a definição/teorema

Teorema 5.1. *Se (x, y) é o ponto de mínimo do gráfico de $G_{\mathcal{J}}$, então,*

$[1 - x; x]$ é uma estratégia Minimax para João, e y é o ganho Minimax esperado.

Se João aplicar a estratégia Minimax $[1 - x; x]$, então, ele pode impedir, em média, que Pedro ganhe nada mais que y em cada jogada.

Assim como o Teorema 4.1, o nome Minimax faz referência à escolha mínima de João entre as maiores escolhas de Pedro, ou seja, representa o ponto mais baixo da curva de máximo.

O próximo exemplo demonstra a situação caso Pedro não seja cuidadoso. Portanto, mesmo que João aplique a estratégia Minimax ele pode ganhar menos que o esperado.

Exemplo 5.3. Seja o jogo abstrato descrito abaixo:

1	0
3	4

Tabela 46 – Exemplo 5.3

Em que $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 3$ e $a_{22} = 4$. Calculando as expressões de h_1 e h_2 obtemos:

$$\begin{aligned} h_1(q) &= (a_{12} - a_{11})q + a_{11} = (0 - (1))q + 1 = -q + 1, \\ h_2(q) &= (a_{22} - a_{21})q + a_{21} = (4 - 3)q + 3 = q + 3. \end{aligned}$$

O gráfico é a linha em negrito na Figura 11.

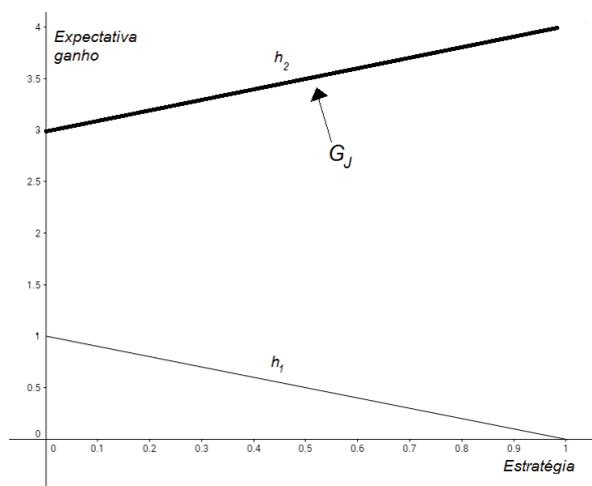


Figura 11 – Exemplo 5.3 - Gráfico Expectativa

Observe que o gráfico esperado de Pedro coincide com h_2 para todo valor de $q \in [0, 1]$. Para obtermos a estratégia ideal para João, basta escolher o ponto de mínimo da curva descrita acima, ou seja, a estratégia Minimax ocorre quando o valor de q é 0 . Portanto, a estratégia pura $[1, 0]$ é capaz de impedir que o ganho de Pedro seja maior que 3 . Em outras palavras, João deve escolher a coluna 1, o que faz com que Pedro escolha em ganhar 1 ou 3 , Pedro obviamente escolherá o maior, no caso 3 . Caso Pedro seja ingênuo o suficiente a ponto de escolher a linha 1 em algum momento, ganhando assim menos do que a estratégia Minimax indica.

□

Exemplo 5.4. Seja jogo abstrato abaixo

2	0
-2	-3

Tabela 47 – Exemplo 5.4

Em que $a_{11} = 2$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = -2$ e $a_{22} = -3$. Calculando as expressões de h_1 e h_2 obtemos

$$h_1(q) = (a_{12} - a_{11})q + a_{11} = (0 - 2)q + 2 = -2q + 2,$$

$$h_2(q) = (a_{22} - a_{21})q + a_{12} = (-3 - (-2))q - 2 = -q - 2.$$

O gráfico é a linha em negrito na Figura 12.

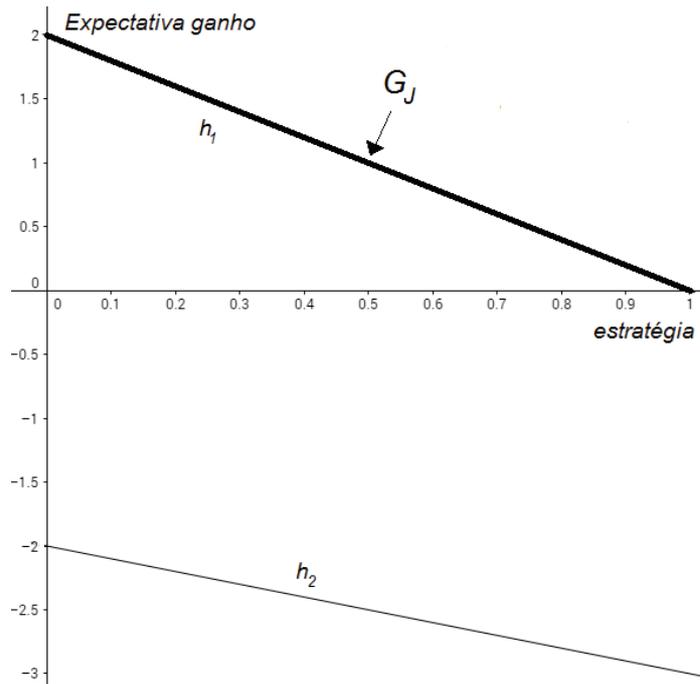


Figura 12 – Exemplo 5.4 - Gráfico Expectativa

Está claro que o gráfico da função $G_{\mathcal{J}}$ coincide com o gráfico de $h_1(q)$. Note que o ponto mais baixo é a estratégia pura $[0; 1]$, assim João espera impedir que o ganho de Pedro não ultrapasse zero. Caso Pedro seja ingênuo e escolha a segunda linha, poderá ganhar menos que o da estratégia Minimax aplicada por seu adversário. Nesse sentido, se ambos os jogadores aplicarem as estratégias de Minimax e Maximin então o jogo sempre acabará num ganho de zero, o que representaria um jogo sem muito sentido.

□

6 SOLUÇÕES DE JOGOS SOMA ZERO

Nos capítulos 4 e 5 encontramos uma coincidência nos exemplos. As expectativas de ganho eram iguais quando as estratégias de Maximin e Minimax eram impostas. Por exemplo, no jogo *Cobrança de Pênalti* o ganho esperado de Pedro com estratégia Maximin era de 46,6...% e de mesma maneira, a estratégia minimax aplicada por João gerava uma expectativa também de 46,6...%. A tabela 46 mostra um valor comum v de todos os exemplos anteriores. Tal coincidência acontece devido ao valor das expectativas não mudarem conforme as partidas são disputadas. Porém, as estratégias Minimax e Maximin possuem definições diferentes. Informalmente falando, a estratégia Maximin é um “base” para Pedro, enquanto a estratégia Minimax é um “teto” nos ganhos de Pedro, imposto por João.

Exemplos	v
4.1, 5.1	0
4.2, 5.2	46,6...%
4.3, 5.3	3
4.4, 5.4	0
4.5, 5.5	1

Tabela 48 – Valor de v Exemplos

A certeza da coincidência para jogos repetitivos de soma-zero é o teorema central da Teoria dos Jogos. Esse teorema será inicialmente discutido em um contexto de jogos 2×2 e reformulado para um caso mais geral, o qual será demonstrado no final desse capítulo.

Teorema 6.1. *Para qualquer jogo de soma-zero 2×2 há um único número v em que*

- i) a estratégia Maximin de Pedro garante uma expectativa de ganho de mínimo v ;*
- ii) a estratégia Minimax de João garante uma expectativa de ganho a Pedro que não exceda v .*

Os dois capítulos anteriores tiveram como objetivo encontrar

métodos e soluções de jogos de soma-zero 2×2 . Faremos agora algumas simplificações para agilizar as análises feitas anteriormente. Inicialmente, vamos classificar os jogos de soma-zero 2×2 em dois tipos.

• **Jogos 2×2 Estritamente Determinados** - Dizemos que um jogo é estritamente determinado se as estratégias Minimax e Maximin são puras. Essa classificação recebe este nome, uma vez que, cada jogador já sabe o que esperar de seu adversário, ou seja, uma estratégia pura.

• **Jogos 2×2 Não Estritamente Determinados** - são todos os outros jogos que possuem estratégias de Maximin e Minimax não puras, ou seja, são estratégias mistas.

Para entendermos melhor os jogos estritamente determinados precisamos do conceito Ponto de Sela de um jogo de soma-zero $m \times n$.

Definição 6.1. Dizemos que um elemento a_{ij} de uma matriz A $m \times n$ é um ponto de sela da matriz A , se ele for simultaneamente um mínimo em sua linha e um máximo em sua coluna, isto é, se

$$a_{ij} \leq a_{il} \quad \text{para todo } l = 1, \dots, n \quad \text{e}$$

$$a_{ij} \geq a_{kj} \quad \text{para todo } k = 1, \dots, m.$$

Exemplo 6.1. A entrada de número 3 representa o ponto de sela do jogo

1	0
3	4

Tabela 49 – Exemplo 6.1

□

Exemplo 6.2. Os exemplos 4.4 e 5.4 analogamente, representam um jogo com ponto de sela cujo valor é 0.

2	0
-2	-3

Tabela 50 – Exemplo 6.2

□

Vamos demonstrar dois lemas, para jogos estritamente determinados, necessários para a demonstração do Teorema Minimax que enunciaremos mais tarde.

Lema 6.2. *Pedro tem uma estratégia Maximin pura se, e somente se, a matriz do jogo G tem um ponto de sela, e nesse caso o ganho do ponto de sela é igual valor Maximin.*

Demonstração. Dado um jogo qualquer

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array}$$

Tabela 51 – Lema 6.2

vamos assumir sem perda de generalidade que $a_{11} \leq a_{12}$. Suponha inicialmente que Pedro tem uma estratégia Maximin pura. Lembremos que os segmentos $g_1(p) = (1-p)a_{11} + pa_{21}$ e $g_2(p) = (1-p)a_{12} + pa_{22}$ com $0 \leq p \leq 1$ estão entre nos pontos $(0, a_{11})$ e $(1, a_{21})$ para $g_1(p)$ e $(0, a_{12})$ e $(1, a_{22})$ para $g_2(p)$. Como a estratégia Maximin é dada pelo ponto de máximo do gráfico de $G_P(p)$ então podemos afirmar, de acordo com a suposição acima, que os segmentos não se interceptam em um ponto interior (Fig. 13.1 e 13.2), os segmentos possuem coeficientes angulares positivos (Fig. 13.3) ou ambos negativos (Fig. 13.4). Mantendo em mente ainda que $a_{11} \leq a_{12}$, podemos notar que, nos quatro casos possíveis, os pontos de sela que ocorrem em cada uma das figuras são dados por a_{11} , a_{21} , a_{22} e a_{11} , respectivamente, e esses valores são iguais ao Maximin de cada jogo.

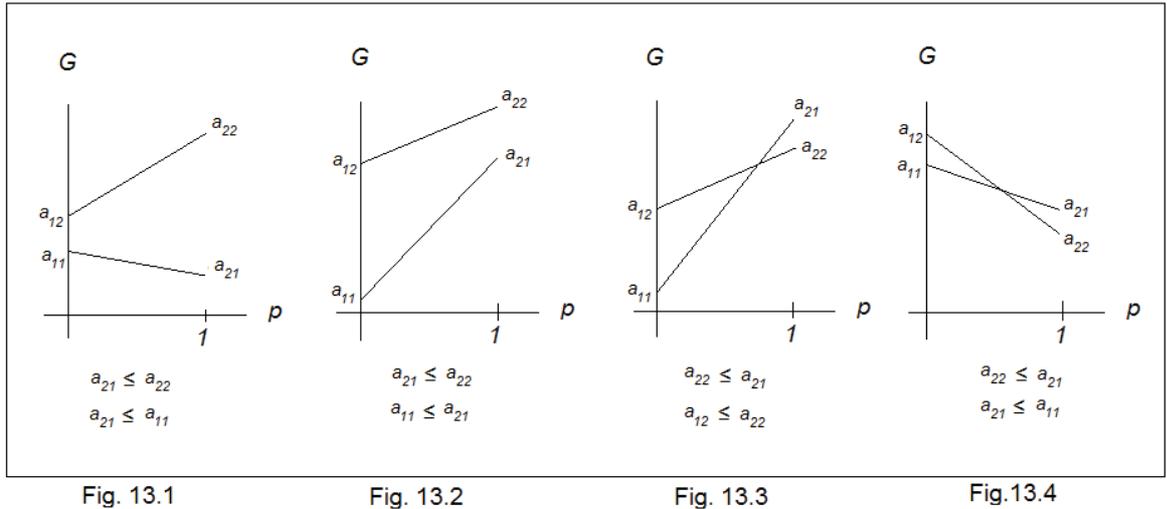


Figura 13 – Demonstração - Lema 6.2

Suponha, agora, que o jogo G admita um ponto de sela. Esse ponto de sela implica algumas desigualdades para o gráfico de $G_P(p)$ gerando assim quatro possibilidades para a função ganho de Pedro, considerando ainda a suposição que $a_{11} \leq a_{12}$, os casos são dados pelas figuras 14.1 a 14.4. Perceba facilmente, que em todos os casos, existe uma estratégia Maximin pura e o valor do ganho coincide com o ponto de sela.

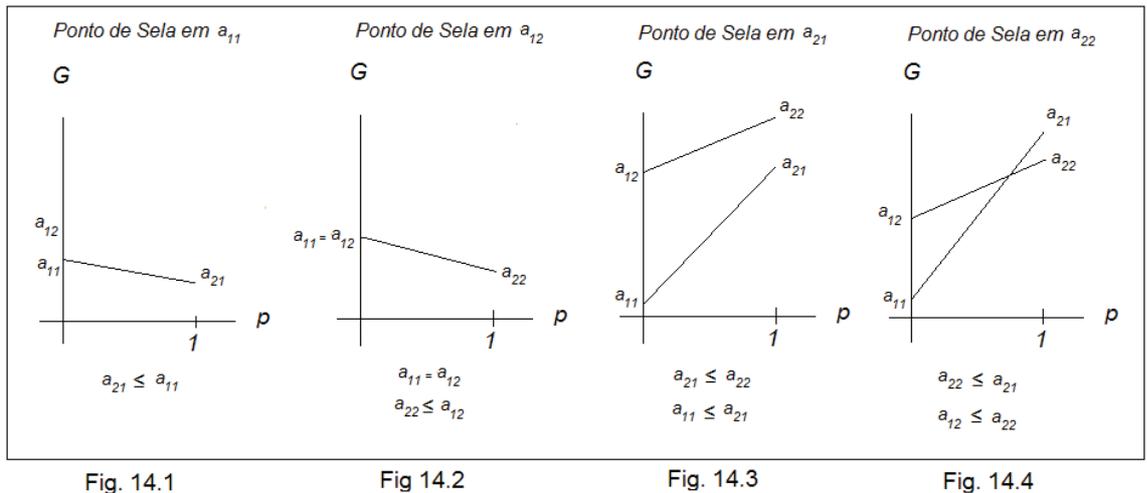


Figura 14 – Demonstração - Lema 6.2

□

Lema 6.3. *João tem uma estratégia Minimax pura se, e somente se, o jogo G tem um ponto de sela, e nesse caso o ganho do ponto de sela é igual valor Minimax.*

Demonstração. A demonstração é análoga ao Lema 6.2 □

Com os lemas acima demonstrados podemos criar um procedimento simples capaz de reconhecer e analisar um jogo estritamente determinado em poucos passos. Vamos ao procedimento:

I) Escreva ao lado de cada linha da matriz de ganhos seu respectivo valor de mínimo;

II) Escreva ao lado de cada coluna da matriz de ganhos seu respectivo valor de máximo ;

III) Se o valor de máximo de uma coluna for igual ao valor de mínimo de uma linha, então o jogo será estritamente determinado e tal valor será o ponto de sela, caso contrário o jogo será não estritamente determinado;

IV) o ponto de sela representa a expectativa de ganho do jogador;

VI) a linha do ponto de sela na matriz de ganhos constitui a estratégia pura Maximin, e a coluna a estratégia pura Minimax.

Vamos aplicar o procedimento nos três jogos abaixo.

Exemplo A	Exemplo B	Exemplo C																		
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="padding: 5px;">6</td><td style="padding: 5px;">4</td><td style="padding: 5px; text-align: right;"><u>4</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">5</td><td style="padding: 5px;">2</td><td style="padding: 5px; text-align: right;">2</td></tr> </table>	6	4	<u>4</u>	5	2	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="padding: 5px;">3</td><td style="padding: 5px;">4</td><td style="padding: 5px; text-align: right;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">5</td><td style="padding: 5px;">2</td><td style="padding: 5px; text-align: right;">2</td></tr> </table>	3	4	3	5	2	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="padding: 5px;">-2</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px; text-align: right;">-2</td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">-1</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px; text-align: right;"><u>-1</u></td></tr> </table>	-2	0	-2	-1	1	<u>-1</u>
6	4	<u>4</u>																		
5	2	2																		
3	4	3																		
5	2	2																		
-2	0	-2																		
-1	1	<u>-1</u>																		
<table style="width: 100px; height: 30px;"> <tr><td style="padding: 5px;">6</td><td style="padding: 5px;"><u>4</u></td></tr> </table>	6	<u>4</u>	<table style="width: 100px; height: 30px;"> <tr><td style="padding: 5px;">5</td><td style="padding: 5px;">4</td></tr> </table>	5	4	<table style="width: 100px; height: 30px;"> <tr><td style="padding: 5px;"><u>-1</u></td><td style="padding: 5px;">1</td></tr> </table>	<u>-1</u>	1												
6	<u>4</u>																			
5	4																			
<u>-1</u>	1																			
valor = 4	Não estritamente determinado	valor = -1																		
Estratégia maximin = [1,0]		Estratégia maximin = [0,1]																		
Estratégia minimax = [0,1]		Estratégia minimax = [1,0]																		

Figura 15 – Exemplos A, B e C

Observe nos exemplo A e C (Figura 15) que os jogos são estritamente determinados pois o valor de mínimo da linha é igual ao valor de máximo da coluna. Por outro lado, o exemplo B não possui tal igualdade, portanto o jogo não é estritamente determinado.

Exemplo 6.3. Solucione o jogo

1	-2
5	2

Tabela 52 – Exemplo 6.3

Inicialmente devemos classificar o jogo em estritamente determinado ou não estritamente determinado. Para isso, aplicaremos o primeiro procedimento visto no neste capítulo.

1	-2	1
5	2	<u>2</u>
5	<u>2</u>	

Tabela 53 – Classificação Exemplo 6.3

Observe que o jogo acima possui o ponto de sela $a_{22} = 2$, logo o jogo é estritamente determinado. Consequentemente, Pedro aplicará a estratégia Maximin pura $[0, 1]$, ou seja, apostará continuamente na segunda linha. De maneira análoga João terá estratégia de Minimax $[0, 1]$, minimizando assim a expectativa de ganho de Pedro em 2.

Podemos deduzir a função $G_P(p, q)$ a partir da matriz auxiliar:

		João	
		1-q	q
Pedro	1-p	1	-2
	p	5	2

Tabela 54 – $G_P(p, q)$

O ganho de Pedro é dado em função de p e q por:

$$G_P(p, q) = (1 - q) \cdot (1 - p) \cdot 1 + p \cdot 5 \cdot (1 - q) + p \cdot 2 \cdot q + (1 - p) \cdot (-2) \cdot q$$

$$G_P(p, q) = pq - p - q + 1 + 5p - 5pq + 2pq - 2q + 2pq$$

$$G_P(p, q) = 4p - 3q + 1.$$

Perceba que o gráfico é uma região no espaço (ver a Figura 16) limitado pelos valores das estratégias $0 \leq p, q \leq 1$.

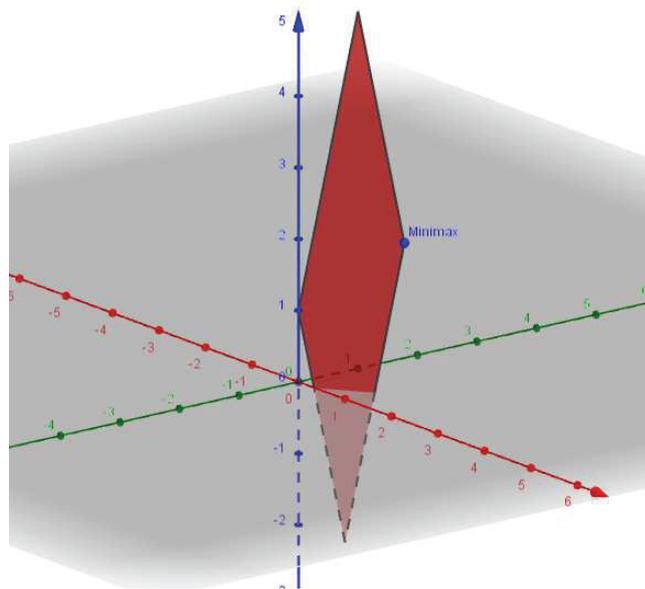


Figura 16 – Exemplo 6.3

Note que o valor esperado por Pedro, aplicando a estratégia Maximin pura $[1, 0]$, não é o ponto de máximo (máx=5), e sim o menor valor da linha dois, ou seja, o payoff é 2. Portanto, o ganho esperado por Pedro é representado na figura pelo ponto do vértice nomeado como “Minimax”.

□

Exemplo 6.4. Solucione o jogo

2	3
1	5

Tabela 55 – Exemplo 6.4

Inicialmente devemos classificar o jogo em estritamente determinado ou não estritamente determinado. Para isso, aplicaremos o primeiro procedimento visto no início deste capítulo.

2	3	<u>2</u>
1	5	1
<u>2</u>	5	

Tabela 56 – Classificação Exemplo 6.4

Observe que o jogo acima possui o ponto de sela $a_{11} = 2$, logo o jogo é estritamente determinado. Consequentemente, Pedro aplicará a estratégia Maximin pura $[1, 0]$, ou seja, apostará continuamente na primeira linha. De maneira análoga João terá estratégia de Minimax $[1, 0]$, minizando assim a expectativa de ganho de Pedro em 2.

De maneira análoga ao exemplo anterior podemos deduzir a função $G_P(p, q)$ a partir da matriz auxiliar:

		João	
		1-q	q
Pedro	1-p	2	3
	p	1	5

Tabela 57 – Gráfico Emxemplo 6.4

O ganho de Pedro é dado em função de p e q por:

$$G_P(p, q) = (1 - q) \cdot (1 - p) \cdot 2 + p \cdot 1 \cdot (1 - q) + p \cdot 5 \cdot q + (1 - p) \cdot 3 \cdot q$$

$$G_P(p, q) = 2pq - 2p - 2q + 2 + p - pq + 5pq - 3q - 3pq$$

$$G_P(p, q) = 3pq - p + q + 2.$$

O gráfico da situação descrita é dado pela Figura 17.

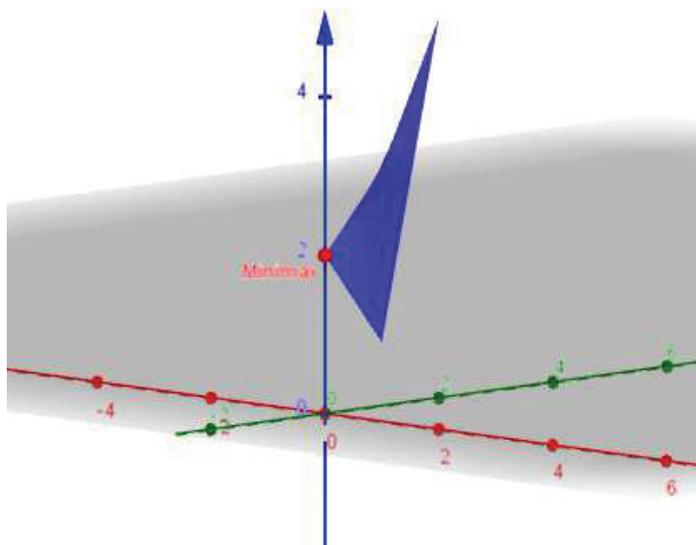


Figura 17 – Exemplo 6.4

Perceba que nesse exemplo a figura não é plana. Mas da mesma maneira que o exemplo anterior, o ponto que representa o ganho esperado de Pedro, ao aplicar a estratégia pura Maximin, é um ponto da borda da figura. De um modo geral, podemos afirmar que um jogo estritamente determinado sempre terá o valor do jogo em uma de suas extremidades. De certa maneira isto já era esperado, uma vez que mostramos nos Lemas 6.2 e 6.3 que um jogo estritamente determinado possui estratégias Minimax e Maximin puras, ou seja, o valor do jogo acontecerá em algum dos vértices da figura.

□

Os jogos não estritamente determinados são sujeitos a um procedimento de solução diferentes, porém tão simples quanto os estritamente determinados. Seja o jogo

		João	
		1-q	q
Pedro	1-p	a_{11}	a_{12}
	p	a_{21}	a_{22}

Tabela 58 – Jogo não determinado

Retomando as funções $g_1(p)$ e $g_2(p)$ deduzidas quando João aplica uma contra-estratégia ideal pura temos:

$$g_1(p) = (1 - p) \cdot 1 \cdot a_{11} + p \cdot 1 \cdot a_{21} = a_{11}(1 - p) + a_{21}p = (a_{21} - a_{11})p + a_{11}$$

$$g_2(p) = (1 - p) \cdot 1 \cdot a_{12} + p \cdot 1 \cdot a_{22} = a_{12}(1 - p) + a_{22}p = (a_{22} - a_{12})p + a_{12}$$

Já sabemos que um jogo não estritamente determinado tem uma estratégia mista que representa o Maximin para Pedro e o Minimax para João. Assim, o valor de p é intersecção dos segmentos $g_1(p)$ e $g_2(p)$. Para encontramos tal valor, basta resolvermos a equação abaixo:

$$g_1(p) = g_2(p)$$

$$(a_{21} - a_{11})p + a_{11} = (a_{22} - a_{12})p + a_{12}$$

$$(a_{21} - a_{11} - a_{22} + a_{12})p = a_{12} - a_{11}$$

$$p = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \quad \text{com} \quad a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \neq 0$$

Conseqüentemente, a estratégia Maximin mista $[1 - p, p]$ para Pedro é dada por

$$\left[\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \right]$$

Portanto, temos um método simples de encontrar a estratégia Maximin para Pedro. Vamos agora resolver alguns exemplos.

Exemplo 6.5. Seja o jogo:

5	-2
1	4

Tabela 59 – Exemplo 6.5

Note inicialmente que o jogo é não determinado, uma vez que a matriz de ganhos não apresenta um ponto de sela. Portanto, deve existir uma estratégia mista para Pedro. Aplicando o método demonstrado acima, temos:

$$\left[\frac{4 - 1}{5 - (-2) - 1 + 4}, \frac{5 - (-2)}{5 - (-2) - 1 + 4} \right] = \left[\frac{3}{10}, \frac{7}{10} \right]$$

Então, $[0, 30; 0, 70]$ representa a estratégia Maximin de Pedro.

De maneira análoga àquela utilizada com Pedro, a estratégia Minimax de João é formada por:

$$\left[\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \right]$$

$$\left[\frac{4 - (-2)}{5 - (-2) - 1 + 4}, \frac{5 - 1}{5 - (-2) - 1 + 4} \right] = \left[\frac{6}{10}, \frac{4}{10} \right]$$

Então, $[0, 60; 0, 40]$ representa a estratégia Minimax de João.

O valor do ganho esperado de um jogo não estritamente determinado pode ser encontrado pelo diagrama auxiliar e pela estratégia encontrada acima

	0,6	0,4
0,3	5	-2
0,7	1	4

Tabela 60 – Valor do Jogo - Exemplo 6.5

Assim, o valor encontrado é

$$0,3 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 = 0,18 + 0,28 = 0,46$$

$$0,3 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 = 0,18 + 0,28 = 0,46$$

Isto significa que Pedro tem uma expectativa de ganho de 2,2 por partida disputada.

Deduzindo a função ganho de Pedro de maneira análoga aos exemplos anteriores, obtemos $G_{\mathcal{P}}(p, q) = 10pq - 4p - 7q + 5$. Ao analisarmos o gráfico da função (ver Figura 18) notamos que o valor do jogo, quando aplicam-se as estratégias de Minimax e Maximin, é representado por um ponto de sela, ou seja, um ponto sobre uma superfície na qual a elevação é máxima numa direção e mínima na direção perpendicular. Nesse momento, é de extrema importância não confundir um ponto de sela do gráfico, com o ponto de sela de um jogo estritamente determinado, o qual é o mínimo das linhas e o máximo das colunas.

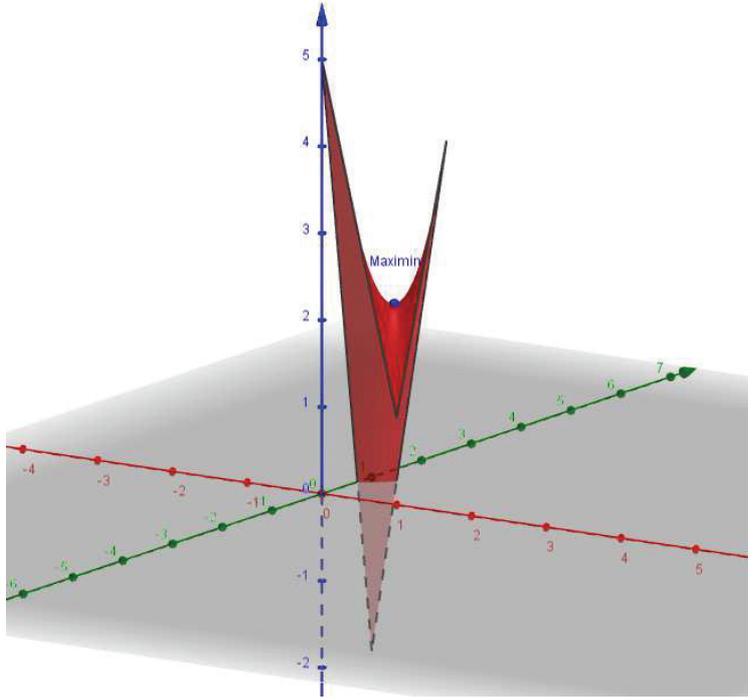


Figura 18 – Exemplo 6.5

□

Exemplo 6.6. Resolva o jogo

1	4
5	2

Tabela 61 – Exemplo 6.6 - I

O diagrama abaixo mostra que o jogo é não estritamente determinado.

1	4	1
5	2	2
5	4	

Tabela 62 – Exemplo 6.6 - II

Agora aplicaremos o procedimento adequado para jogos não estritamente determinados . Assim a estratégia Maximin de Pedro é dada por:

$$\left[\frac{2-5}{1-4-5+2}, \frac{1-4}{1-4-5+2} \right] = \left[\frac{3}{6}, \frac{3}{6} \right] = [0,5; 0,5]$$

Por outro lado, a estratégia Minimax para João é dada por

$$\left[\frac{4-2}{1-4-5+2}, \frac{5-1}{1-4-5+2} \right] = \left[\frac{2}{6}, \frac{4}{6} \right] = \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right]$$

Finalmente, o ganho esperado de Pedro quando ambos aplicam suas respectivas estratégias ideais (Maximin e Minimax) é calculado com

	1/3	2/3
0,5	1	4
0,5	5	2

Tabela 63 – Exemplo 6.6 - III

E seu valor é dado por

$$\begin{aligned} & 0,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + 0,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 0,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 + 0,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = 3 \end{aligned}$$

Uma outra maneira de encontrar o valor esperado do jogo é substituir uma das estratégias puras de João junto com a estratégia Maximin de Pedro, ou uma das estratégias puras de Pedro junto com a estratégia Minimax de João. Tal fato é justificado, pois em um jogo não estritamente determinado, o ponto de máximo de G_P é dado pela intersecção de g_1 e g_2 , ou seja, é comum aos dois gráficos, portanto podemos encontrar o valor usando os diagramas abaixo

	1	0
0,5	1	4
0,5	5	2

Tabela 64 – Exemplo 6.6 - IV

	0	1
0,5	1	4
0,5	5	2

Tabela 65 – Exemplo 6.6 - V

Note que ambos os diagramas fornecem o mesmo resultado

$$0,5 \cdot 1 \cdot 1 + 0,5 \cdot 5 \cdot 1 = 0,5 + 2,5 = 3$$

e

$$0,5 \cdot 1 \cdot 4 + 0,5 \cdot 2 \cdot 1 = 2 + 1 = 3$$

Analogamente, se Pedro aplicar uma das estratégias puras e João responder com sua estratégia Minimax temos o mesmo resultado. Os cálculos seguem abaixo.

	1/3	2/3
1	1	4
0	5	2

Tabela 66 – Exemplo 6.6 - VI

	1/3	2/3
0	1	4
1	5	2

Tabela 67 – Exemplo 6.6 - VII

Observe que os resultados conferem com a resposta.

$$1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$$

e

$$1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 3$$

Calculando a função ganho da mesma maneira que os exemplos anteriores, obtemos assim $G_{\mathcal{P}}(p, q) = -6pq + 4p + 3q + 1$. Observando o gráfico da função ganho de Pedro nesse exemplo (ver Figura 19), notamos mais uma vez que o valor esperado da função, quando os jogadores aplicam as estratégias Minimax e Maximin, é um ponto de sela da superfície.

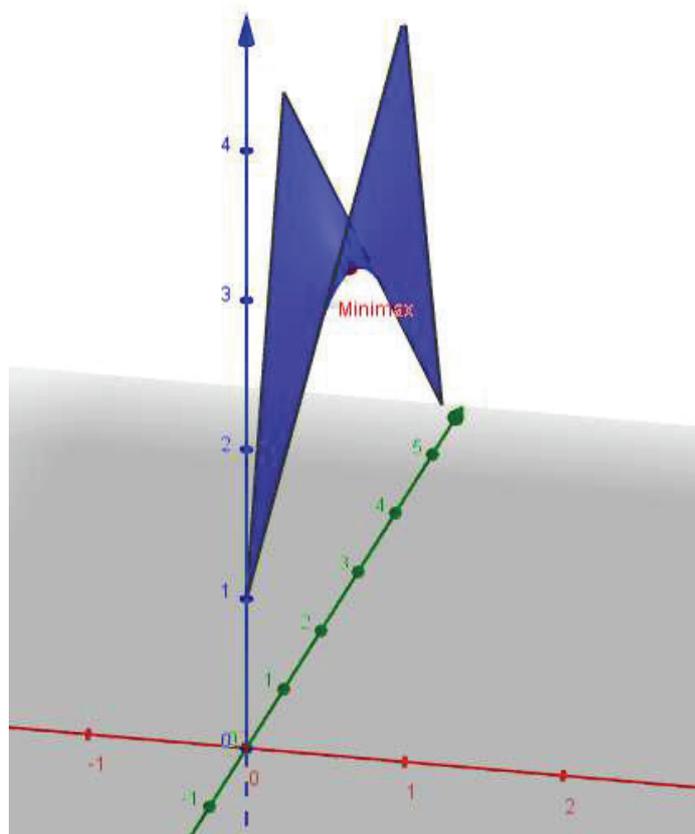


Figura 19 – Exemplo 6.6

Nesse exemplo, bem como no exemplo 6.5, nota-se que para jogos não estritamente determinados o valor esperado da função $G_{\mathcal{P}}$, quando aplicadas as estratégias Maximin e Minimax, é o ponto de sela da superfície. Isto é de muito bom senso, pois na direção p Pedro quer tomar o máximo da função e por outro lado, na direção q João quer minimizar suas perdas. Portanto, podemos afirmar que em um jogo não estritamente determinado o ponto de sela da superfície é o ganho esperado de Pedro. Demonstraremos tal afirmação com o Teorema 6.1.

6.1. Teorema Minimax *Para qualquer jogo de soma-zero 2×2 há um único número v em que:*

- i) a estratégia Maximin de Pedro garante uma expectativa de ganho de mínimo v ;*
- ii) a estratégia Minimax de João garante uma expectativa de ganho a Pedro que não exceda v .*

Demonstração. Caso o jogo venha a ter um ponto de sela, então o Teorema se resume no lemas 6.3 e 6.4. Caso o jogo não tenha um ponto de sela, ou seja, um jogo não estritamente determinado, podemos utilizar a teoria do Cálculo para demonstra-lo.

Suponha que em um jogo qualquer Pedro aplique a estratégia $[1 - x; x]$ e João $[1 - y; y]$. A situação se resume no quadro abaixo:

		João	
		1-y	y
Pedro	1-x	a_{11}	a_{12}
	x	a_{21}	a_{22}

Tabela 68 – Demonstração 6.9

Note então que a função ganho de Pedro é dada por:

$$G_{\mathcal{P}}(x, y) = (1 - x) \cdot (1 - y) \cdot a_{11} + (1 - x) \cdot y \cdot a_{12} + x \cdot (1 - y) \cdot a_{21} + x \cdot y \cdot a_{22}$$

Simplificando a função em termos de x e y , obtemos:

$$G_{\mathcal{P}}(x, y) = xy(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + x(a_{21} - a_{11}) + y(a_{12} - a_{11}) + a_{11}$$

Eventualmente definida para $0 \leq x, y \leq 1$ uma vez que $[1 - x, x]$ e $[1 - y, y]$, são as respectivas estratégias aplicadas por Pedro e João.

Vamos agora encontrar um valor da função $G_{\mathcal{P}}(x, y)$ que seja máximo na direção x e mínimo na direção y , ou seja, um ponto de sela de acordo com a teoria do Cálculo. É importante não confundir ponto de sela do cálculo, com o ponto de sela da teoria dos jogos, ambos são diferentes em suas definições. A figura abaixo mostra um ponto de sela do cálculo em uma curva dada.

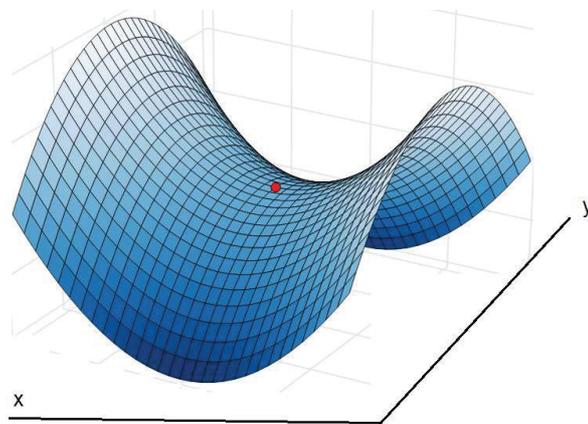


Figura 20 – Ponto Sela Cálculo

Sabemos que o ponto de sela se dá em um dos seus pontos críticos, ou seja, nos pontos em que as derivadas parciais são nulas, isto é:

$$\frac{\partial G_{\mathcal{P}}}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial G_{\mathcal{P}}}{\partial y} = 0.$$

Calculando as derivadas parciais temos:

$$\frac{\partial G_{\mathcal{P}}}{\partial x} = y(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + (a_{21} - a_{11}) = 0,$$

$$\frac{\partial G_{\mathcal{P}}}{\partial y} = x(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + (a_{12} - a_{11}) = 0.$$

Com isso concluímos que:

$$y = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \quad \text{e} \quad x = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

Tendo em mente que um jogo não estritamente determinado admite $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \neq 0$, pois caso contrário, o gráfico de $G_{\mathcal{P}}$ seria um plano e conseqüentemente teria a estratégia Maximin e Minimax em um de seus vértices, conforme visto anteriormente.

Portanto o ponto $\left(\frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \right)$ é um ponto crítico de $G_{\mathcal{P}}$, classifiquemos agora o ponto crítico usando o teste da derivada segunda e a matriz Hessiana.

$$\Delta(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Calculando as derivadas segundas de $G_{\mathcal{P}}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} &= a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}. \end{aligned}$$

Substituindo os valores acima na matriz Hessiana e calculando o determinante temos:

$$\Delta(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} 0 & a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \\ a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(x_0, y_0) = -(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})^2$$

Com isso, mostramos que o determinante da matriz Hessiana é negativo para todo valor de x e y . Assim o ponto de sela

$$\left(\frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \right)$$

representa o máximo na direção x e mínimo na direção y , ou vice-versa, portanto

$$v = G_{\mathcal{P}} \left(\frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \right)$$

representa o Maximin para Pedro e o para João Minimax.

□

Ao analisar o Teorema Minimax, observamos que a função $G_{\mathcal{P}}(p, q)$ sempre possuirá um ponto de sela do cálculo, desde que a condição $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \neq 0$ seja satisfeita. Contudo, o ponto de sela pode estar dentro do domínio da função ou não. Caso esteja dentro, o jogo será não estritamente determinado e conseqüentemente o ponto de sela representa a estratégia Maximin, Minimax e o valor esperado do ganho. Por outro lado, se o ponto de sela estiver fora do domínio, ou $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0$, o que representaria um plano, então, o jogo será estritamente determinado. Assim, a estratégia Minimax e Maximin será dada por um dos vértices do gráfico de $G_{\mathcal{P}}(p, q)$.

Em resumo, a função $G_{\mathcal{P}}(p, q)$:

- Representa um jogo estritamente determinado se:
 - i) Se a função representa um plano, ou seja, $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0$;
 - ii) Se o ponto de sela não pertencer ao domínio da função;
- Representa um jogo não estritamente determinado se:
 - i) Se o ponto de sela pertencer ao quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, ou seja, pertencer ao domínio da função.

7 CONCLUSÃO

Ao propor utilizar jogos de estratégia para analisar quaisquer situações de conflito, Von Neumann e Morgenstein retornaram a uma prática milenar para entender e estudar o mundo. Ao fazer isso, criaram uma ciência com uma grande capacidade de generalização e precisão matemática. A teoria dos jogos está tão presente em nosso cotidiano que, muitas vezes, nem percebemos que uma situação de conflito trata-se de um 'jogo'. Na qual, dependendo da situação, tomamos uma decisão sem notar, ou até mesmo, pensar em como obter uma vantagem sobre o adversário. Ou seja, acreditamos, quase sempre, que um jogo é uma questão de sorte.

A partir de jogos clássicos, como Par ou Ímpar e Pedra-Papel-Tesoura, definimos jogos de soma-zero, jogos nos quais o ganho de um jogador é, exatamente, a perda de seu adversário. Construimos a matriz de ganhos como uma tabela de valores, na qual constam os ganhos para cada um dos jogadores, levando em consideração suas escolhas.

Em uma breve discussão sobre alguns jogos, percebemos que um jogador pode obter alguma vantagem sobre seu oponente, dependendo de suas escolhas. Com isso, definimos o importante conceito de estratégia, bem como sua classificação em: estratégia pura e estratégia mista. Concluimos que a melhor contra estratégia, ou seja, a estratégia que gera um maior ganho é necessariamente a pura.

Nos capítulos quatro e cinco mostramos que cada jogador tem uma estratégia ideal, pelo menos do ponto de vista defensivo. Tais estratégias são denominadas: Maximin e Minimax. Ao aplicar a estratégia Maximin obtém-se o ganho máximo, quando o oponente tenta minimizá-lo, ou seja, um valor 'base'. Por outro lado, a estratégia Minimax gera o ganho mínimo do oponente, quando o mesmo tenta maximizá-lo, ou seja, um 'teto'.

Ao fim do trabalho, mostramos que os jogos de soma-zero 2×2 podem ser classificados em jogos estritamente determinados e não estritamente determinados. Definimos nesse momento, o importante conceito de ponto de sela e mostramos, formalmente, que todo jogo estritamente determinado o possui, e que as estratégias que representam o Maximin e Minimax são puras. Já em jogos não estritamente determinados, mostramos que as estratégias ideais são mistas. Tal afirmação é demonstrada pelo Teorema Minimax.

Por se tratar de uma introdução à teoria dos jogos, essa pesquisa é superficial, considerando a complexidade do tema. Existem muitos

conceitos, teoremas e conclusões os quais não foram objetos de estudo neste trabalho. Porém, o aprofundamento do tema é de extrema importância para a compreensão de outros jogos, como por exemplo: jogos cooperativos, jogos de soma diferente de zero, simultâneos, sequenciais e até jogos infinitamente longos.

ÍNDICE REMISSIVO

C

Contra-estratégia Ideal, 39

E

Estratégia, 29

Estratégia Mista, 33

Estratégia Pura, 33

J

Jogo Cobrança de Pênalti, 21

Jogo de soma-zero, 27

Jogo Estritamente Determinado, 66

Jogo Moora de dois dedos, 19

Jogo Não Estritamente Determinado, 66

Jogo Par ou Ímpar, 16

Jogo Pedra, Papel e Tesoura, 17

M

Matriz de Ganhos, 27

Maximin, 50

Minimax, 62

P

Ponto de Sela, 66

T

Teorema Minimax, 65

REFERÊNCIAS

CONWAY, John H. All games bright and beautiful. American Mathematical Monthly, p. 417-434, 1977.

DUTTA, Prajit K. Strategies and games: theory and practice. MIT press, 1999.

FIANI, Ronaldo. Teoria dos jogos. Elsevier Brasil, 2006.

FUDENBERG, Drew; TIROLE, Jean. Game theory, 1991. Cambridge, Massachusetts, v. 393, p. 12, 1991.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de Cálculo, vol. 2. Grupo Gen-LTC, 2000.

OSBORNE, Martin J.; RUBINSTEIN, Ariel. A course in game theory. MIT press, 1994.

RASMUSEN, Eric; BLACKWELL, Basil. Games and information. Cambridge, MA, v. 15, 1994

SCHELLING, Thomas C. The strategy of conflict. Harvard university press, 1980.

SARTINI, Brígida Alexandre et al. Uma introdução à teoria dos jogos. II Bienal da SBM?Universidade Federal da Bahia, p. 1-61, 2004.

VON NEUMANN, John; MORGENSTERN, Oskar. Theory of games and economic behavior. Princeton university press, 2007.