



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL PROFMAT



AGNALDO FERNANDO PRINA

O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA A PARTIR DA
CONSTRUÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS: UMA APLICAÇÃO
DO GEOGEBRA

Sinop - MT

2017

AGNALDO FERNANDO PRINA

O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA A PARTIR DA
CONSTRUÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS: UMA APLICAÇÃO
DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada como requisito parcial
à obtenção do grau de Mestre em Matemática,
elaborada por Agnaldo Fernando Prina.

Orientador: Prof. Dr. Rogério dos Reis
Gonçalves

Coorientador: Prof. Dr. Oscar Antonio
Gonzalez Chong

Sinop - MT

2017

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

P954e Prina, Agnaldo Fernando.

O ensino de geometria plana a partir da construção de figuras geométricas:
uma aplicação do GeoGebra / Agnaldo Fernando Prina. – Sinop, 2017.
61 p.: il.

Orientador: Dr. Rogério dos Reis Gonçalves.

Co-orientador: Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado de Mato Grosso,
Campus Universitário de Sinop, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas,
Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática.

1. Geometria Plana. 2. *Software* Geogebra. 3. Matemática - Resolução de
Problemas. 4. Mestrado Profissional em Matemática. I. Gonçalves, R. dos
R., Dr. II. Chong, O. A. G., Dr. III. Título. IV. Título: uma aplicação do
GeoGebra.

CDU 514.112:004



ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS.
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT UNEMAT - SINOP



AGNALDO FERNANDO PRINA

**O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA A PARTIR DA CONSTRUÇÃO DE
FIGURAS GEOMÉTRICAS: UMA APLICAÇÃO DO GEOGEBRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT no Campus Universitário de Sinop, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves

Aprovado em: 10/04/2017

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves - UNEMAT


Prof. Dr. André Krindger - UFMT


Prof. Dr. Emivan Ferreira da Silva - UNEMAT

SINOP – ABRIL - 2017



Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática em Rede Nacional
UNEMAT- Sinop Avenida dos Ingás, nº 3001 - Centro – CEP: 78.555-000 – Sinop–
MT.Tel./Fax: (66)9601-8925 – Cx. Postal: 680 – profmat-unemat@unemat-net.br



*Dedico este trabalho aos meus orientadores,
Dr Rogério dos Reis Gonçalves e
Dr Oscar Antonio Gonzalez Chong.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo simples fato de permitir-me;

Ao meu exemplo, meu ídolo, meu eterno professor, cara que a vida me deu de presente, ao colocá-lo em meu caminho, acreditando na minha capacidade e ainda fazendo dele meu super, mega, hiper, orientador, o Senhor, Professor, Doutor, Rogério dos Reis Gonçalves, que sem a sua magnitude, nada disso teria acontecido; Aos meus colegas de curso, que, mesmo eu sendo uma pessoa de difícil convivência, todos, sem exceção, acolheram-me e auxiliaram-me nesta caminhada; Ao mestre dos mestres, o sensacional ser humano, o homem para quem não existe tempo ruim, o cara que deixou seu país por um tempo para prestar seus sábios serviços de aprendizagem a nós, aqui no Brasil, que sempre estava ali, disposto, ativo, desejando somente uma coisa às pessoas que o cercam, o BEM! Gratidão, Professor Doutor Oscar Antonio Gonzalez Chong, por ter acreditado que eu seria capaz!

Aos professores (Mestres e/ou Doutores) que abraçaram a causa do Mestrado Profinat e o fizeram acontecer em nossa abençoada Sinop. Agradeço ao Emivan e Miguel, Geovani e João, Oscar e Milton, Rogério e Chiara, Vera, Rodrigo, Silvio e os demais que a mim não lecionaram, mas fazem parte do corpo docente;

Aos professores (futuros mestres) Dieyson e Fernando, que, em especial, conviveram um pouco mais comigo nesta jornada;

Ao professor Gledson Emiliano, por sempre estar auxiliando-me no que foi preciso; Às minha irmãs Tuty e Tatae a professora Denize Mendonça Rampazzo;

A toda minha “equiPPE” de colaboradores da PPE – Prina Pitt Escola;

A minha família, em especial, minha irmã Cássia e meus pais José Prina e Adélia de Barros Prina, pelo apoio vitalício aos meus estudos;

À família da minha companheira, Mariana, meu Sogro, minha Sogra e meu Cunhado, grato pela compreensão;

À minha companheira Mariana Maldaner Werlang, por aturar-me;

À UNEMAT, a qual devo reconhecimento e respeito pela hospitalidade.

A todos aqueles que, quando me ouviram dizer: “vou desistir dessa porra!!!”. Em seguida me diziam: “não Prina, você já foi até aqui, avante meu jovem!!!”

Aos meus ex, atuais e futuros alunos; sem vocês, eu nem professor seria, GRATIDÃO!!!

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	16
1.2 OBJETIVOS	21
1.2.1 OBJETIVO GERAL	21
1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	21
1.3 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO	21
2. ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DA XI OMU.....	23
2.1 PROBLEMA 1	23
2.2 PROBLEMA 2	29
2.3 PROBLEMA 3	34
2.4 PROBLEMA 4	40
2.5 PROBLEMA 5	43
2.6 PROBLEMA 6	45
2.7 PROBLEMA 7	48
3. APÊNDICE	51
3.1 EXPORTANDO FIGURAS.....	51
3.2 IMPORTANDO FIGURAS PARA O WORD	53
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	55
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	56

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal incentivar os docentes a utilizar o *software* GeoGebra como ferramenta didático-pedagógica em sua prática docente. A metodologia proposta é mostrar como o docente pode fazer uso do *software* para construir figuras geométricas, a fim de utilizá-las na elaboração de problemas, bem como incentivá-los a descrever sua construção em sala de aula junto aos alunos, para estimular o pensamento geométrico, tanto na construção das figuras, quanto na estratégia de resolução. Com isso, a aplicação do *software* terá um “papel” fundamental no ensino de geometria plana, dentre outros temas, e não apenas mais um *software* apresentado aos docentes e discentes que normalmente entra em desuso. Para aplicação deste trabalho, os problemas utilizados foram retirados da segunda fase da XI Olimpíada de Matemática da UNEMAT, da Unidade Regionalizada de Sinop.

Palavras-Chave: GeoGebra, Geometria Plana, Resolução de Problemas, Olimpíadas de Matemática.

ABSTRACT

This paper aims to encourage teachers to make use of GeoGebra software as a didactic-pedagogical tool in their teaching practice. The proposed methodology show how the teacher can make use of the software to construct geometric figures in order to use in the elaboration of problems, as well as encourage them to describe their construction in the classroom altogether with students to stimulate the geometric thinking, both in the construction of geometric figures as well as in the strategy of resolution. Therefore, a software application will have a fundamental "role" in teaching flat geometry and other subjects, not only just a document-oriented software shown to teachers that normally fall into disuse. For this work, the problems were taken from the second phase of the 11th Mathematical Olympiad of UNEMAT, in Portuguese “XI Olimpíadas de Matemática da UNEMAT” of the Campus of Sinop.

Keywords: GeoGebra, Plane Geometry, Problem Solving, Mathematical Olympiads.

1. INTRODUÇÃO

O ser humano é um ser de necessidades e, da necessidade de construir casas, navios, calcular distância etc., surgiu a geometria. Uma das justificativas de ensinar geometria em sala de aula é porque nós a vivenciamos em nossa vida cotidiana e se ela for ensinada de maneira envolvente, facilitará o aprendizado com uma melhor compreensão e, no futuro, os problemas que envolvem teoria com a prática geométrica poderão ter melhores interpretações. Nosso desafio neste trabalho, especificamente com a geometria plana, é mostrar ao docente que podemos usar algo além do ensino tradicional para que o aluno uma vez construindo e, conseqüentemente, visualizando e observando os conceitos de cada passo que se deve dar para obter tal construção, tenha um maior índice de absorção de determinados conteúdos, pois seu interesse aumenta quando é apresentado a ele algo diferente e envolvente.

O uso da tecnologia no processo educacional está crescendo a uma taxa elevada e, em virtude deste crescimento, faz-se necessário que os educadores integrem novas tecnologias nas atividades matemáticas em sala de aula e nas atividades extraclasse. Em geral, muitos vêm discutindo sobre tais avanços e desafios que essas novas tecnologias têm trazido. Entendemos que é relevante sua inserção no meio escolar, mas uma das dificuldades é entender como os professores podem usar os recursos tecnológicos como aliados no ensino-aprendizagem dos alunos.

Nas últimas décadas, muito se fala sobre a importância do uso de *softwares* matemáticos como recurso didático no estudo de determinados temas da matemática e, na literatura especializada, encontram-se diversos trabalhos abordando esse tema. Um destes recursos didáticos é o *software* GeoGebra, muito divulgado entre os pesquisadores da referida área, mas, em geral, a abordagem metodológica não contribui para que os professores se sintam motivados a utilizá-lo no dia a dia como auxílio na construção de figuras para elaboração de problemas, e muito menos em sala de aula, para auxiliar no ensino e aprendizagem. Diante disso, acreditamos que a metodologia proposta neste trabalho trará relevantes contribuições ao ensino de matemática, em especial, ensino de geometria plana, tanto no ensino básico quanto no ensino superior. Cabe aos discentes extrair de tudo o que melhor está em concordância com os objetivos dos conteúdos trabalhados.

Ressaltamos que há várias versões do GeoGebra e que é um *software* livre. Neste trabalho foi utilizado o GeoGebra 5.0. Uma breve apresentação dos principais elementos que compõem o *software* pode ser encontrada em (SOUSA, 2016).

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Sabemos que o GeoGebra é um *software* muito conhecido, porém pouco utilizado, se levarmos em consideração sua importância, além do fácil manuseio. No entanto, na literatura especializada, encontram-se diversos trabalhos propondo o seu uso, tanto no ensino de geometria, quanto em outros temas da matemática. A seguir, apresentaremos alguns trabalhos que fazem uso do GeoGebra e, dentre eles, vários foram produzidos recentemente por alunos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Arbain e Shukor (2014) investigaram a eficácia do uso do *software* GeoGebra na aprendizagem matemática entre 62 estudantes na Malásia. Os resultados mostraram que os alunos têm percepção positiva em relação ao aprendizado e têm melhor desempenho de aprendizagem usando GeoGebra.

Caligaris, Schivo e Romiti (2015) utilizaram o GeoGebra em um curso de Cálculo I na Universidad Regional San Nicolás, Universidade Tecnológica Nacional, Argentina. Foram exploradas diversas animações para ilustrar os conceitos fundamentais do Cálculo, enfatizando a análise de suas interpretações geométricas.

Alves (2016) apresentou uma abordagem sobre o estudo de cônicas e quádras com o objetivo de auxiliar professores e estudantes a ter uma visão mais concreta e dinâmica destes elementos com o *software* de distribuição livre GeoGebra.

Beltrami (2016) apresentou algumas técnicas para contribuir como facilitadoras do entendimento de problemas geométricos relacionados à geometria plana com abordagem em situações variáveis, utilizando funções reais, o conceito de lugar geométrico e o *software* GeoGebra. Foram apresentados dez problemas geométricos relacionados mais intimamente com os conceitos de lugar geométrico, de máximo e mínimo, os quais servirão como referencial para os professores e alunos que desejam explorar o GeoGebra.

Canavezi (2016) apresenta um trabalho relatando a idealização, o planejamento, a construção e a aplicação de atividades para o estudo de funções quadráticas e probabilidade geométrica em duas turmas de 9.º ano do ensino fundamental, nas cidades de Bauru e Agudos, Estado de São Paulo. O objetivo principal das atividades elaboradas foi proporcionar aos alunos uma melhor aprendizagem dos conteúdos e temas abordados, através de uma abordagem lúdica, interativa e motivadora. Os objetivos específicos foram desenvolver a capacidade de traduzir um problema matemático na linguagem matemática, manipular expressões algébricas, fazer estimativas e comparações, desenvolver conhecimentos matemáticos, como saber expressar e calcular a área e o perímetro de figuras planas, calcular probabilidades de ocorrência de eventos aleatórios, resolver equações quadráticas, traçar gráficos de funções quadráticas e manipular o *software* ou o aplicativo GeoGebra. Para alcançar os objetivos, foi criado um jogo de dardos adaptado e fichas de atividades contendo instruções, questões, tabelas, gráficos, exercícios de cálculos, problemas de otimização e roteiros de construções gráficas aplicadas ao GeoGebra.

Cardoso (2016) desenvolveu e propôs uma sequência didática que promovesse o entendimento dos alunos sobre os principais conceitos de geometria analítica abordados no ensino médio, mostrando, por intermédio da resolução de problemas, a ideia geométrica que está por trás de cada desenvolvimento algébrico realizado ao longo das atividades propostas. Buscou-se, também, aliar a tecnologia, com o auxílio do GeoGebra, às atividades que convencionalmente eram trabalhadas em sala de aula, proporcionando uma ampliação da visão conceitual por parte dos alunos. Do ponto de vista do autor, a sequência didática e os resultados apresentados foram pensados e aplicados rigorosamente nas aulas além de terem sido planejados sempre com o objetivo de transformar o aluno em protagonista de seu próprio conhecimento. A proposta foi baseada na Engenharia Didática que alia a visão geométrica com o desenvolvimento algébrico, sem ignorar os conceitos matemáticos que são fundamentais para o desenvolvimento intelectual dos alunos.

Cavalcante (2016) apresenta um trabalho cujo objetivo é contribuir para a facilitação do ensino de geometria espacial, a partir da proposição de atividades de construção, compreensão e cálculos métricos de sólidos geométricos, utilizando o *software* GeoGebra. Este trabalho trouxe uma proposta para o ensino da geometria espacial e o GeoGebra foi aplicado como uma ferramenta facilitadora para o ensino e

aprendizagem de conceitos e cálculos métricos do prisma, da pirâmide, do cilindro, do cone e da esfera.

Cerqueira (2016) fez um estudo sobre isometrias no plano, tendo em vista sua significância na Geometria Plana, com ênfase na utilização de *software* educativo nas aulas de Matemática. Durante o desenvolvimento desse estudo, foi realizada a exposição de algumas aplicações do tema em outras áreas: na Arte, na Música, na Engenharia, entre outras. Foi destacada também a importância do processo histórico na construção dos conteúdos matemáticos. O autor apresentou algumas ferramentas do Geogebra, as mais relevantes ao desenvolvimento das atividades propostas. Além disso, foram apresentadas definições, exemplos e proposições a respeito das isometrias: reflexão, translação, rotação e reflexão com deslizamento. Por fim, foram propostas atividades para serem desenvolvidas na sala de informática, para estudantes do oitavo ano do ensino fundamental da educação básica de ensino, com o auxílio das ferramentas do *software* Geogebra.

Dias (2016) apresentou uma proposta de abordagem do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Básico, de maneira a auxiliar na aprendizagem da Física. Como ferramenta, foi utilizado o *software* de Geometria Dinâmica, o Geogebra, possibilitando, por meio de construção e análise gráfica, trabalhar concepções intuitivas de velocidade, aceleração média e instantânea, formalizar conceitos de taxa de variação média e variação instantânea de funções, entre outros. Segundo o autor, a abordagem sugerida auxilia na compreensão de fenômenos físicos, pois é por meio do Cálculo Diferencial e Integral que definimos as grandezas envolvidas na Cinemática.

Diniz (2016) propôs o uso do GeoGebra para ensinar construções geométricas em substituição ao uso de régua e compasso, sobretudo, no desenvolvimento dos conceitos, das propriedades e dos teoremas de geometria, fundamentais para a compreensão das etapas de construção. A metodologia utilizada foi a de pesquisa experimental, pela qual realizou-se um estudo com o *software* na versão 5.0 e também na versão Grapher 3D.

Furlani (2016) utilizou o GeoGebra para estudar os conceitos vetoriais em geometria analítica no terceiro ano do Ensino Médio. A proposta foi desenvolvida em uma escola estadual, situada na cidade de Itararé, Estado do São Paulo, onde foi sugerida, aos alunos, uma série de atividades desenvolvidas pelo autor e

disponibilizadas no GeogebraBook como ferramenta de construção geométrica e dinâmica, incluindo conceitos de vetores com a finalidade de facilitar o entendimento do assunto.

Moraes (2016) propôs cinco atividades utilizando o *software* GeoGebra, para ajudar os professores de Matemática a trabalhar o assunto de Geometria Analítica no Ensino Médio. A primeira destina-se a familiarizar os alunos com o *software*; as outras quatro envolvem modelos de construção e de animação. Elas incluem conceitos relacionados ao ponto (distância entre dois pontos, o ponto médio de um segmento, alinhamento de três pontos), à reta (equação, posição relativa entre duas retas) e à circunferência (equação e posição relativa entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências). Além das animações, foram incluídas questões acerca dos conceitos de Geometria Analítica.

Pimentel (2016) apresentou uma investigação acerca da importância da utilização de computadores e outras tecnologias de informação e comunicação (as TIC's) no ensino de Matemática. Foi aplicada uma sequência didática com o uso do GeoGebra, para o desenvolvimento do tópico Transformações Geométricas, em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental. A sequência didática foi estruturada dentro das perspectivas da Engenharia Didática e seguiu uma metodologia qualitativa. Segundo o autor, os resultados indicaram que as TIC's contribuem de forma significativa no processo de ensino e aprendizagem; contudo, conclui-se que alguns fatores externos ainda são entraves para a efetiva implementação deste recurso nas escolas.

Rêgo (2016) analisou as possibilidades do ensino de trigonometria através do *software* de geometria dinâmica GeoGebra. O objetivo foi utilizar esta ferramenta para complementar a explicação exposta em sala, por intermédio de construções geométricas. Esta proposta foi aplicada em turmas de 9º ano do ensino fundamental e participaram do trabalho seis turmas do ensino regular, sendo três da rede pública estadual e três da privada, todas de escolas do município de Nova Friburgo (RJ).

São Pedro (2016) apresentou definições, teoremas e suas demonstrações em relação aos temas dos sistemas de equações lineares, matrizes e determinantes, sendo que seu objetivo principal é a análise e o confronto entre os métodos de resolução de sistemas de equações lineares utilizados no Ensino Médio, a saber, regra de Cramer e escalonamento de matrizes, ou eliminação gaussiana. Neste trabalho, foi constatado que

o escalonamento é um recurso mais funcional para resolver sistemas lineares, quando comparado à regra de Cramer. Foi desenvolvido um algoritmo na Planilha de cálculos do GeoGebra que permite escalar, por pivoteamento, sistemas de equações lineares 4×4 e 5×5 , independente dos coeficientes, e o seu diferencial é que proporciona a visualização de cada etapa do processo, o que o torna um recurso didático interessante para ser aplicado em sala de aula. O autor concluiu que a utilização do Geogebra é um facilitador da aprendizagem dos conteúdos estudados, e o algoritmo desenvolvido neste trabalho favoreceu um entendimento mais amplo do escalonamento por pivoteamento.

Thomé (2016) utilizou o GeoGebra para abordar, em sala de aula, a dedução da fórmula da área de um círculo, no ensino fundamental, por aproximação de áreas poligonais, através de atividades em que o aluno vai deduzindo a área do círculo por excesso ou escassez das áreas dos polígonos que o circunscrevem e inscrevem. O público-alvo foram os estudantes do Ensino Fundamental do 9º ano da Escola Antônio de Pádua Martins de Melo. Nesta turma, também foi trabalhado um pouco sobre a história, desde o Egito antigo, da busca que se teve para se chegar à fórmula da área do círculo, incluindo a descoberta do número π .

Xavier (2016) fez uma proposta de uso do *software* GeoGebra no curso de geometria espacial para alunos de 2º ano do ensino médio. Segundo o autor, a escolha deste *software* deu em virtude das suas características didáticas, que tornam a compreensão dos conceitos trabalhados mais acessíveis aos alunos. O *software* foi aplicado, como sugestão, no estudo de poliedros, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

Zachi (2016) apresentou os fundamentos da Programação Linear, em especial, da Programação Linear Geométrica, instrumento importante de otimização para problemas de Economia, gestão de empresas, problemas de transportes, obtenção de misturas ótimas, entre outros. Além disso, foi apresentada uma proposta didática para os professores de educação básica da escola pública, utilizando o *software* GeoGebra como instrumento motivador para o estudo de uma situação de aprendizagem proposta no material de apoio idealizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, abordada no caderno do aluno do 3º ano do Ensino Médio.

Todos os trabalhos apresentados contribuem para que o professor conheça melhor as funcionalidades do GeoGebra, acarretando assim, maior domínio que este torne-se uma ferramenta auxiliar em sua prática docente.

1.2OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Apresentar uma proposta metodológica para a aplicação do *software* GeoGebra no ensino de geometria.

1.2.2OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Aplicar o GeoGebra na construção de figuras planas;
- Aplicar o GeoGebra na resolução dos problemas de geometria plana da segunda fase da XI Olimpíada de Matemática da UNEMAT– Sinop. Com isso, pretendemos também divulgá-la no âmbito nacional.

1.3 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

O caminho percorrido pelo pensamento humano parte da realidade e chega ao pensamento abstrato e, a partir daí, volta ao problema real. O conhecimento matemático não é diferente. Ele percorre a primeira parte do caminho da realidade ao pensamento abstrato (gráfico, numérico e analítico) e, para percorrer este caminho, é necessário o método indutivo. No entanto, o uso da tecnologia pode contribuir para que ocorra este conhecimento matemático.

Um segundo caminho a percorrer é o do pensamento abstrato à prática, para, em seguida, voltar à realidade. Por outro lado, o uso do conhecimento na resolução de problemas pode contribuir na concretização deste caminho.

Uma das contribuições deste trabalho é ajudar os docentes e, conseqüentemente, os discentes, principalmente do ensino básico, a dominarem conceitos geométricos de modo criativo. A tecnologia, em especial, a aplicação do *software* GeoGebra, pode ajudar a fortalecer esse conhecimento teórico, como por exemplo, na construção das figuras, substituindo a régua e o compasso, e na resolução de problemas, fazendo uso de conhecimento de teoremas, propriedades e algumas “sacadas” durante a sua

resolução. Dessa forma, acreditamos que este possui relevantes contribuições em relação ao conhecimento matemático.

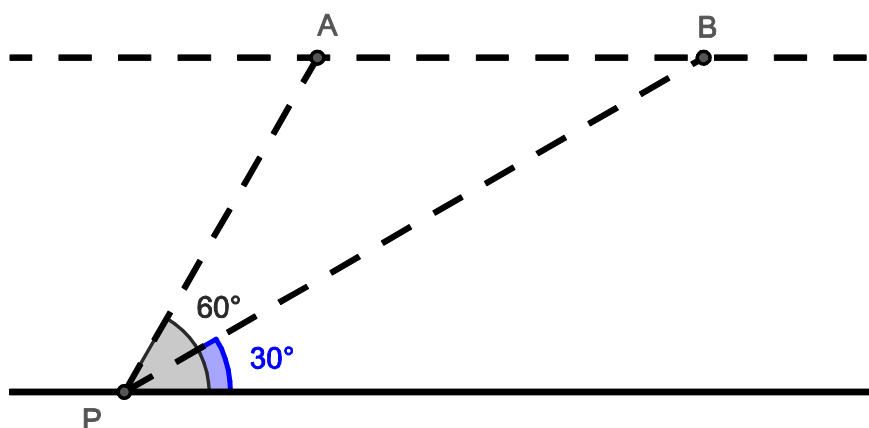
2. ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DA XI OMU

Neste capítulo, apresentaremos alguns passos que podem ser utilizados na construção de figuras geométricas encontradas em problemas das OMU por meio do *software* GeoGebra, considerando, em geral, os conceitos matemáticos necessários para sua construção. Primeiramente, mostraremos a construção das figuras e, posteriormente, a resolução de cada problema.

O objetivo principal deste capítulo é motivar o professor a utilizar o GeoGebra nas aulas de geometria plana, sem perder o foco, que é o ensino de geometria plana. Em geral, a construção das figuras e a resolução dos 7 problemas propostos por meio do *software* contemplarão métodos que priorizarão a aplicação de conceitos de geometria, mas, em alguns casos, daremos maior enfoque para fazer uso das potencialidades do GeoGebra, sem nos preocupar tanto com os conceitos matemáticos envolvidos. Isto se dá, porque um dos objetivos deste trabalho é motivar os docentes a usar essa essencial ferramenta de trabalho. Ressaltamos que o nome dos personagens utilizados nos problemas foi modificado, a fim de homenagear os colegas de turma.

2.1 PROBLEMA 1

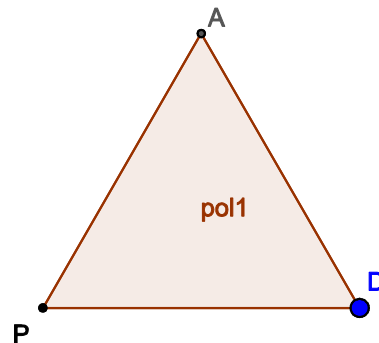
Dieyson voava de helicóptero a uma altitude e velocidade constantes. Denise é uma menina muito curiosa e adora resolver problemas matemáticos. Ela estava no ponto P e observou que, quando o helicóptero estava a 400 m de distância dela, ele podia ser visto sob um ângulo de elevação de 60° e, 1 minuto depois, esse ângulo passou a valer 30° , conforme mostra a figura abaixo.



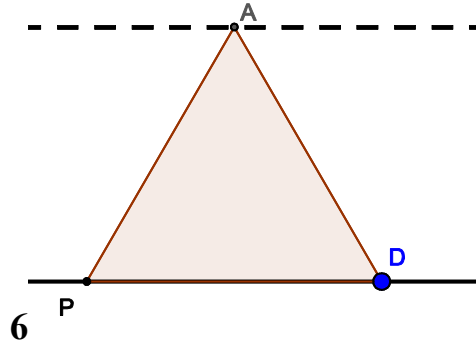
Denise queria calcular, em km/h, a velocidade escalar do helicóptero e, se suas observações estiverem corretas, com que velocidade escalar ele voava?

Uma proposta de construção da figura:

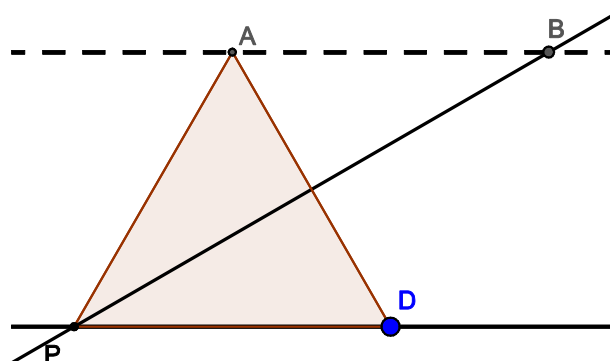
Passo 1: Construa um triângulo equilátero para obter o ângulo de medida igual a 60° (ângulo DPA).



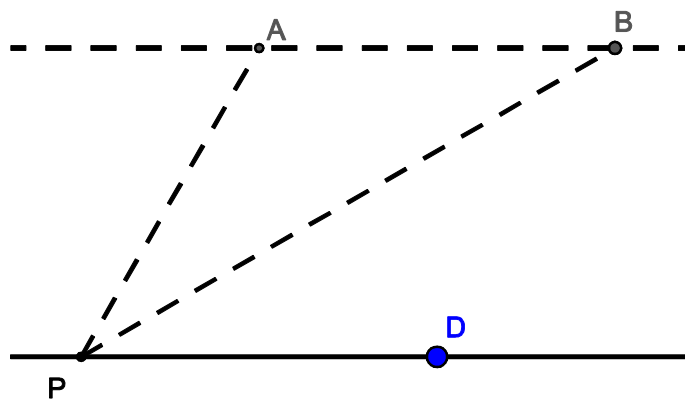
Passo 2: Trace uma reta passando pelos pontos P e D . Em seguida, determine a reta paralela à reta dada, passando pelo ponto A .



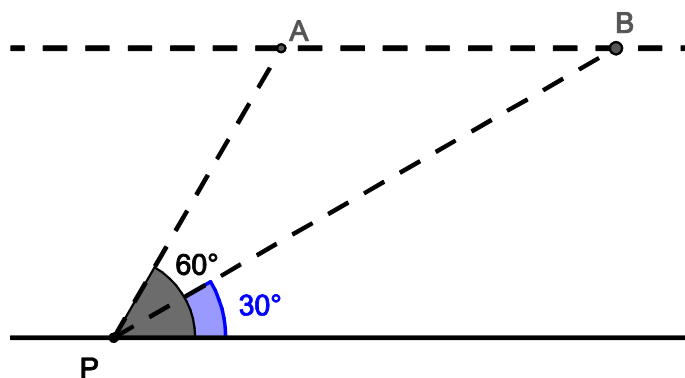
Passo 3: Para obter o ângulo de 30° , basta determinarmos a bissetriz do ângulo DPA . O ponto de intersecção dessa bissetriz com a reta tracejada será denominado ponto B .



Passo 4: Agora ocultamos os elementos auxiliares à construção da figura, a saber, o triângulo equilátero e a reta que passa por P e B . Em seguida, traçamos os segmentos PA e PB . Note que o ponto D foi preservado para a construção dos ângulos, conforme mostra o próximo passo.

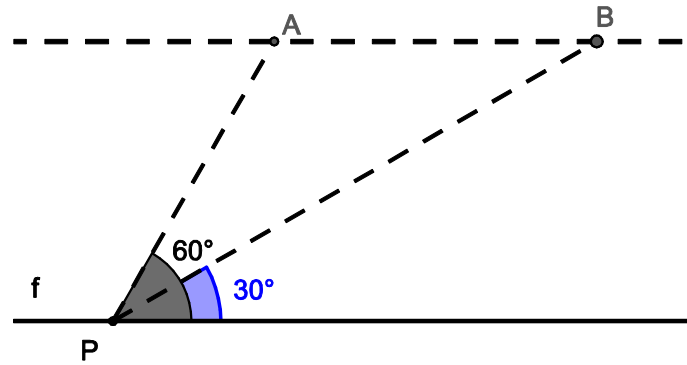


Passo 5: Neste passo, apenas inserimos os ângulos, usando, no GeoGebra, a ferramenta Ângulo e explorando suas propriedades para inserir a cor, seu nível de transparência e estilo.



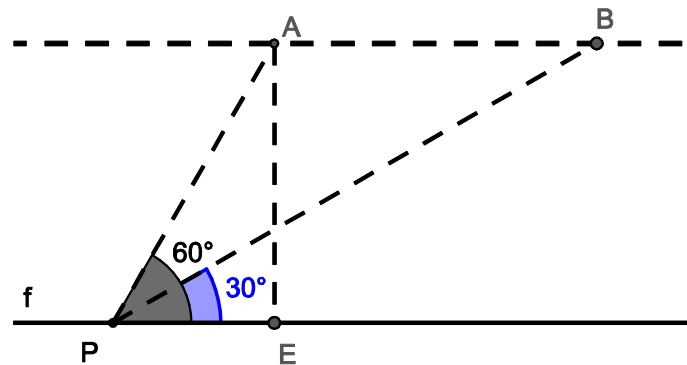
Uma proposta de resolução:

Para calcular a velocidade do helicóptero, precisamos determinar a distância de A a B , pois, sendo a velocidade escalar constante, seu módulo é igual à razão $\frac{AB}{t}$, em que t representa o tempo de voo entre os pontos A e B .



Para isso, seguiremos os passos a seguir:

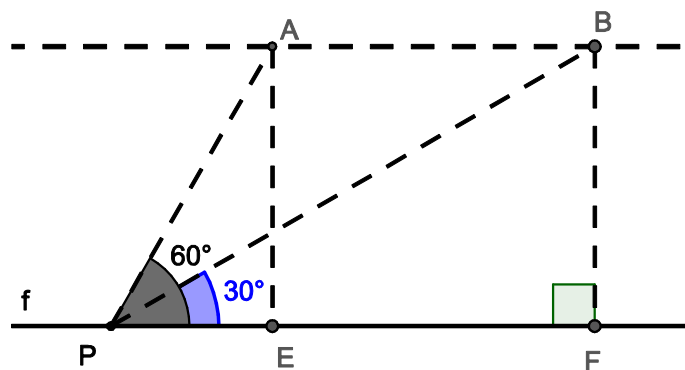
Passo 1: Podemos traçar, a partir do ponto A , um segmento perpendicular à reta f , obtendo, assim, o triângulo retângulo AEP , de hipotenusa AP medindo 400m e ângulo EPA medindo 60° . A partir desses dados e com o auxílio das relações trigonométricas no triângulo retângulo, segue que:



Da relação $\sin 60^\circ = \frac{AE}{AP}$, temos que $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AE}{400}$ e, portanto, $AE = 200\sqrt{3}$ m.

Da relação $\cos 60^\circ = \frac{EP}{AP}$, temos que $\frac{1}{2} = \frac{EP}{400}$ e, portanto, $EP = 200$ m.

Passo 2: De modo análogo ao Passo 1, vamos traçar um segmento perpendicular à reta f a partir do ponto B , obtendo o triângulo retângulo BFP .



Note, na figura, que os segmentos AB e EF possuem mesma medida, pois AB e EF são lados opostos de um retângulo. Analogamente, os segmentos AE e BF também possuem mesma medida. Ainda, a medida de AB é igual a EF , que é igual à diferença entre as medidas dos segmentos FP e EP . Dessa forma, basta determinarmos, no triângulo BFP , a medida do cateto FP .

Da relação $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BF}{FP}$, temos que $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{200\sqrt{3}}{FP}$ e, portanto, $FP = 600$ m.

Logo,

$$AB = FP - EP = 600 - 200 = 400 \text{ m}$$

Passo 3: Neste passo, vamos calcular a velocidade do helicóptero.

A velocidade de helicóptero é igual à razão $\frac{AB}{t} = \frac{400 \text{ m}}{1 \text{ min}} = 400 \text{ m/min}$ ou, como 400 m e

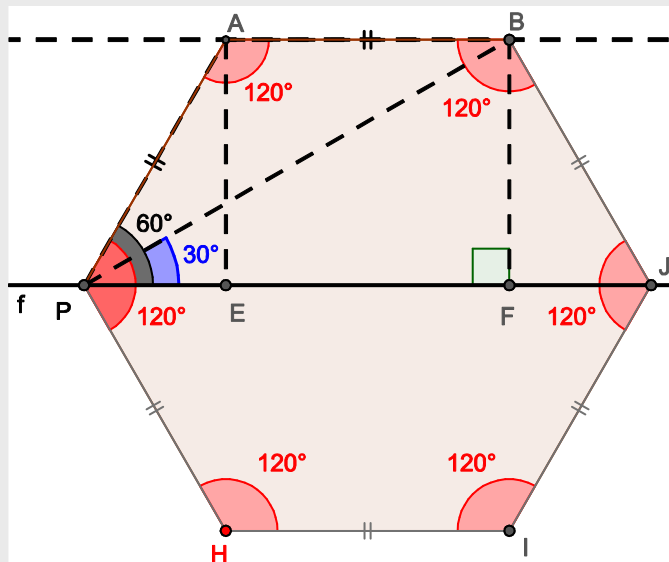
1 min equivalem a 0,4 km e $\frac{1}{60}$ h, respectivamente, segue que 400 m/min equivale a

$$\frac{0,4}{\frac{1}{60}} = 24 \text{ km/h.}$$

Portanto, se as observações de Denise estiverem corretas, o helicóptero voava a 24 km/h.

Comentários sobre o problema: Da última figura e dos resultados encontrados, é interessante que o professor discuta, em sala de aula, não apenas os conceitos matemáticos envolvidos apenas na resolução do problema proposto. É interessante que explore outros conceitos, o que pode contribuir também para motivar os alunos em

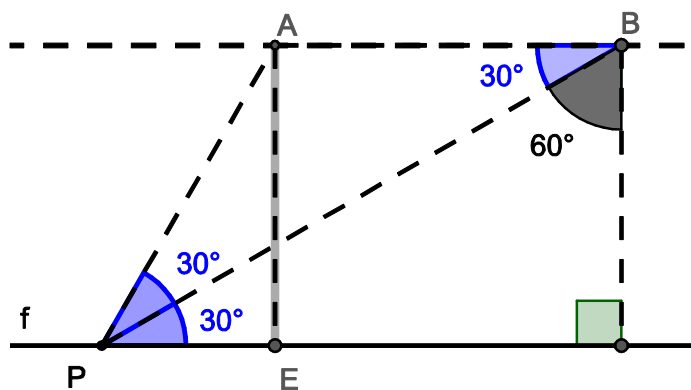
relação ao aprendizado, tanto da geometria, quanto do uso do software. Em particular, com base na última figura, vimos que AP é igual a AB e podemos perceber que o ângulo PAB mede 120° . Isto nos sugere construir um hexágono regular contendo esses lados, conforme figura abaixo:



Esta “brincadeira com o GeoGebra” nos induziu e pode induzir algum aluno a pensar em outro método de resolução para o problema, o que consideramos mais elegante, conforme apresentado a seguir.

Uma proposta de resolução que foi induzida pelo GeoGebra:

Após a construção da figura apresentada no enunciado, vamos traçar o segmento perpendicular à reta f a partir do ponto B , conforme segue:



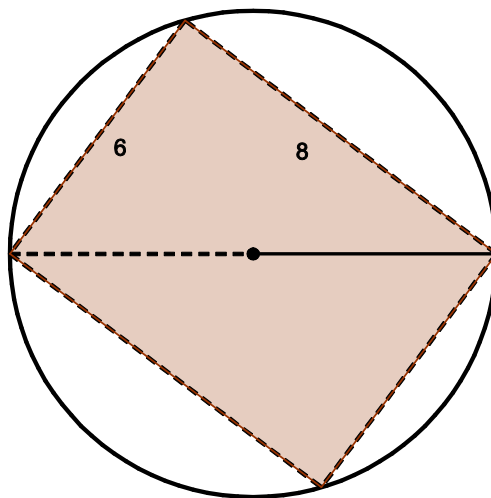
Como o triângulo ABP é isósceles de base BP , segue que AB e AP possuem mesma medida.

Logo, $AB = 400\text{m}$ e, portanto, pelo Passo 3, conclui-se que o helicóptero voava a 24 km/h.

Observação: Não é nosso objetivo, mas podemos perceber que, ao elaborar a construção das figuras respeitando as proporções de suas medidas, ângulos etc., conforme o enunciado, nota-se que muitas vezes a solução do problema poderá ser obtida de forma direta com as ferramentas do GeoGebra. Por exemplo, ao construir a figura do enunciado do problema, o GeoGebra nos revela que as distâncias entre os pontos P e A é igual àquela entre os pontos A e B . Isto pode ser utilizado em sala de aula apenas para verificação dos resultados.

2.2 PROBLEMA 2

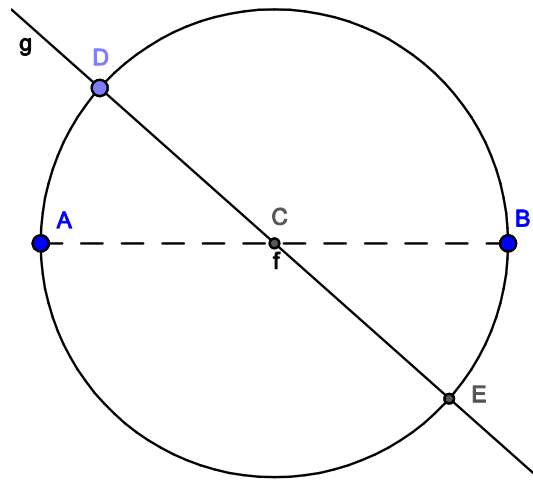
Cleunício é um engenheiro muito astuto. No semestre passado, ele construiu um ginásio de esportes. Dentro deste ginásio, construiu uma quadra retangular situada no interior de uma pista de corridas circular, conforme mostrado na figura.



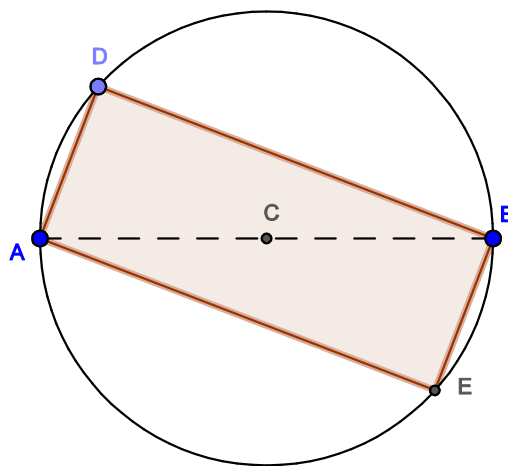
Qual é a área, em metros quadrados, interior à pista, excedente à da quadra retangular?

Uma proposta de construção da figura:

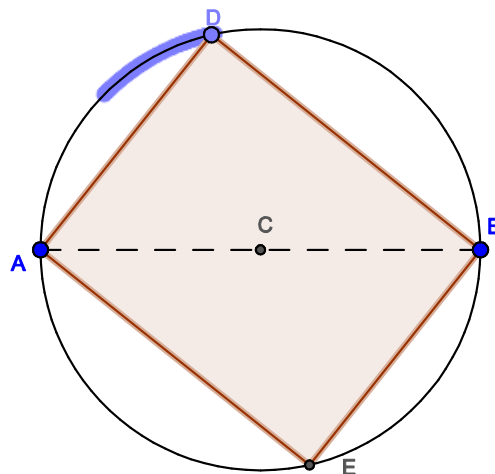
Passo 1: Trace o segmento AB e determine seu ponto médio C . Com a ferramenta Compasso, construa uma circunferência de centro C e raio CB . Insira um ponto D sobre a circunferência e trace uma reta passando por D e C . Esta reta intersecta a circunferência em outro ponto, que denotamos por E .



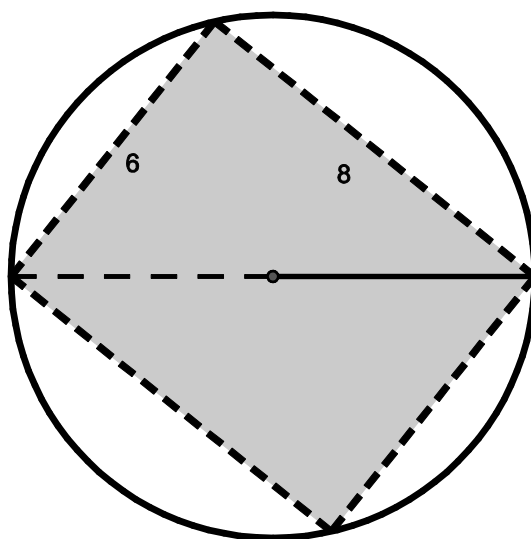
Passo 2: Construa o polígono $ADBE$. Este polígono é um retângulo (propomos ao professor verificar essa afirmação em sala de aula). Além disso, podemos ocultar a reta.



Passo 3: Note que o retângulo $ADBE$ está claramente desproporcional ao retângulo que se encontra no enunciado do problema. Podemos melhorar visualmente essa proporcionalidade, arrastando o vértice D sobre a circunferência, conforme desejado (usamos a ferramenta *Habilitar Rastro* apenas para melhor visualização do passo).

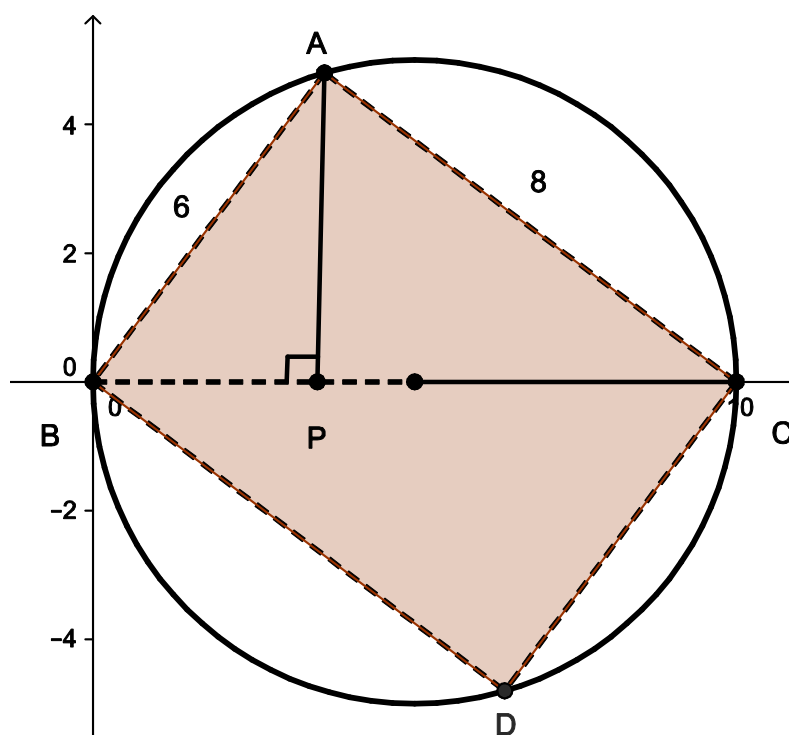


Passo 4: Oculte os vértices do retângulo, insira os números 6 e 8, utilizando a ferramenta *Texto*, e use a ferramenta *Propriedades* para modificar a intensidade da cor do retângulo, dentre outras modificações necessárias.



Uma proposta mais complexa de construção da figura:

A construção da figura apresentada no enunciado do problema foi baseada na seguinte figura:



Apropósito de construção que apresentaremos agora prioriza os conceitos explorados em um triângulo retângulo, além de utilizar outros recursos do GeoGebra. Para isso, primeiramente determinaremos as coordenadas dos vértices do triângulo retângulo ABC inscrito na circunferência.

Note que no GeoGebra definimos o vértice B com origem no sistema de eixos ortogonais, e os vértices A e C , juntamente com o ponto P , foram determinados a partir da aplicação das relações métricas no triângulo retângulo ABC . Observe que este triângulo é retângulo, pois está inscrito em uma semicircunferência.

Sabemos que a medida do cateto AB é igual à média geométrica entre a hipotenusa e a sua projeção sobre a hipotenusa, isto é, $AB^2 = BC \cdot BP$.

Pelo Teorema de Pitágoras, segue que $BC = 10$ e, portanto, $BP = 3,6$.

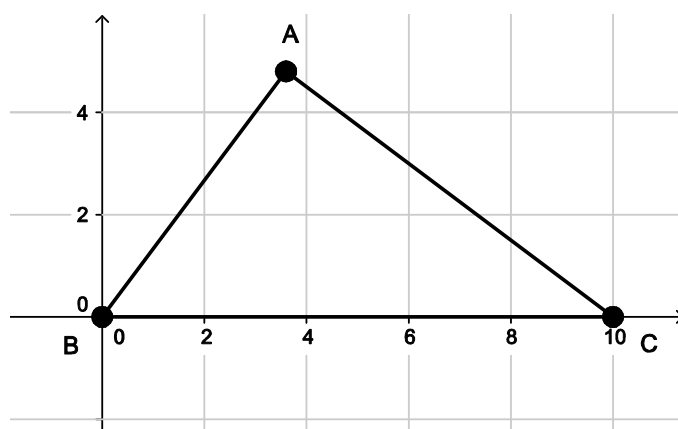
Para encontrarmos as coordenadas do vértice A , basta determinarmos a medida do segmento AP , o que pode ser feito aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo ABP . No entanto, utilizamos o seguinte teorema: “A altura relativa à hipotenusa é igual à média geométrica dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa”.

Logo,

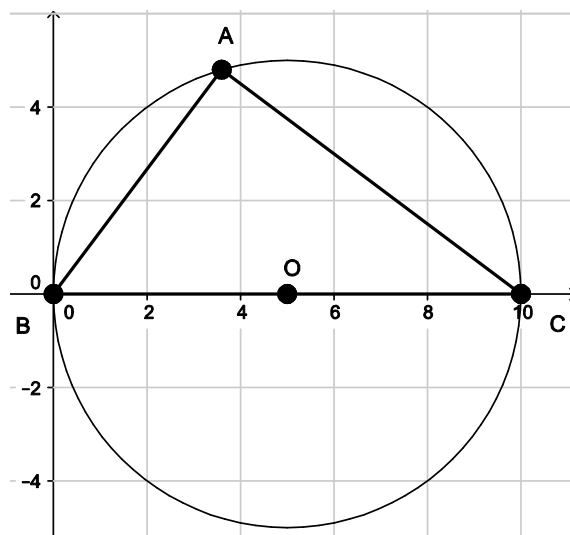
$$AP^2 = BP \cdot PC$$

Como $BC = 10$ e $BP = 3,6$, segue que $PC = 6,4$ e, consequentemente, $AP = 4,8$.

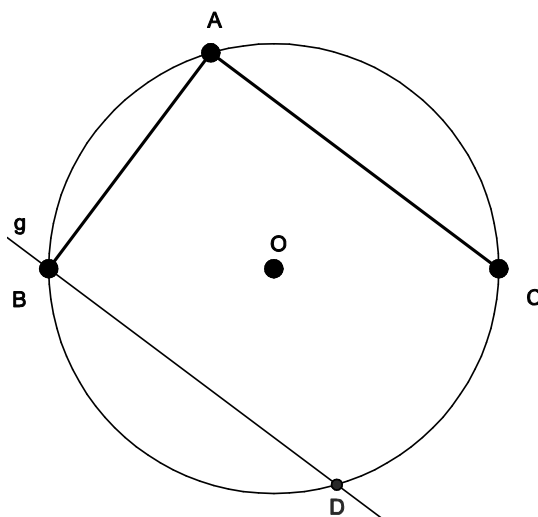
Dessa forma, inserimos no GeoGebra o ponto $A = (4, 4,8)$ e os pontos B e C de coordenadas $(0, 0)$ e $(10, 0)$, respectivamente, conforme mostrado na próxima figura.



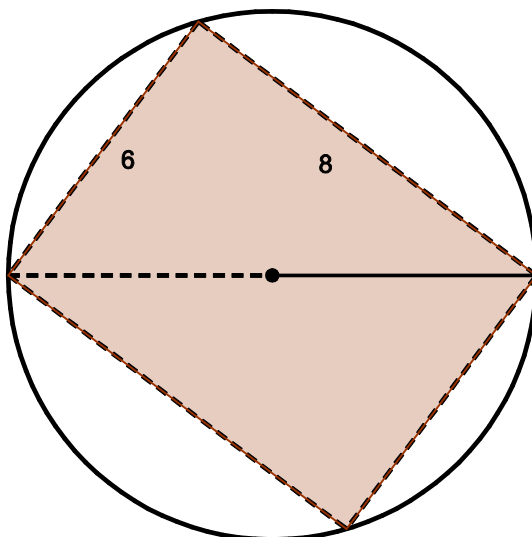
Sabemos que três pontos não colineares determinam uma circunferência, isto é, por três pontos não colineares, existe uma única circunferência passando por eles. No GeoGebra, vá na ferramenta Círculo definido por Três Pontos e construa a circunferência, ou pode também utilizar a ferramenta Compasso de centro O e raio OA .



Para determinar o ponto D , podemos inserir o ponto $D = (6.4, -3.6)$ (essa ideia valoriza a noção de simetria) ou, a partir do vértice B , por exemplo, traçar uma reta paralela ao lado AC . O ponto de intersecção desta reta com a circunferência é o ponto D .



Por fim, construa o retângulo $ABCD$ e os segmentos AO e OC para obter a figura desejada.



Uma proposta de resolução:

Durante a construção da figura, vimos que o diâmetro do círculo é igual a 10m e, portanto, o raio mede 5m. Assim, sua área, em metros quadrados, é dada por:

$$S_{circ} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

Por outro lado, a área da quadra retangular, em metros quadrados, é igual a

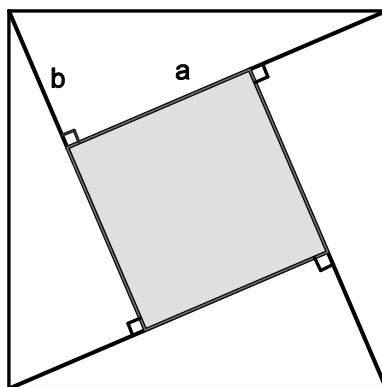
$$S_{quadra} = 8 \cdot 6 = 48$$

Portanto, a área interior à pista, excedente à da quadra retangular é igual a

$$S = S_{circ} - S_{quadra} = 25\pi - 48 \text{ m}^2$$

2.3 PROBLEMA 3

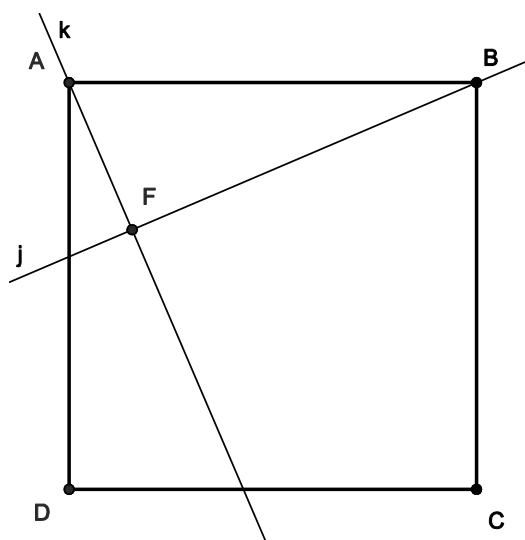
Certo dia, o professor Raul desenhcou no quadro um quadrado congruente ao mostrado na figura abaixo. Ele pediu para que Ednei e Alessandro determinassem a área da região sombreada. Sabendo-se que eles fizeram os cálculos corretos e que os triângulos retângulos são congruentes e possuem catetos com medidas a e b , então, a área da região sombreada em função de a e b determinada por eles foi igual a:



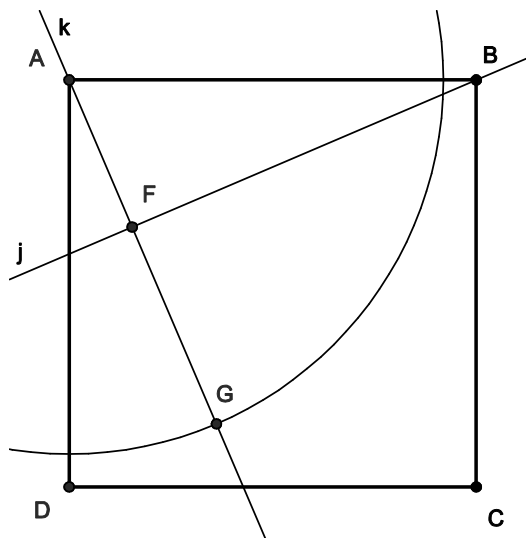
- a) $2ab$
- b) $a^2 + b^2$
- c) $a^2 + 2ab + b^2$
- d) $a^2 - 2ab + b^2$
- e) $a^2 - b^2$

Uma proposta de construção da figura:

Passo1: Construa o quadrado $ABCD$. Em seguida, trace a reta j passando por B e a reta k passando por A e perpendicular à reta j . Dessa forma, obtém-se o ponto F . Assim, o triângulo AFB é retângulo.

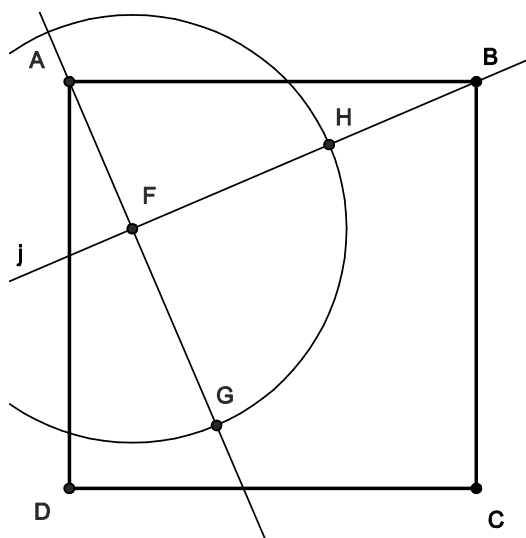


Passo2: Para determinar o segmento AG de medida BF , vamos traçar um arco de circunferência centrado em A , com raio BF . O ponto de intersecção entre a reta k e o

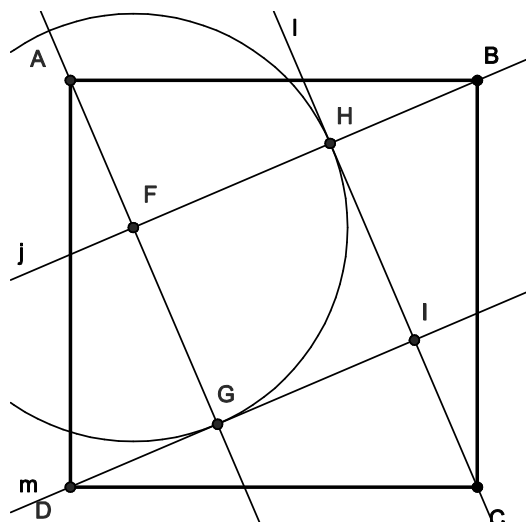


arco de circunferência é o ponto G .

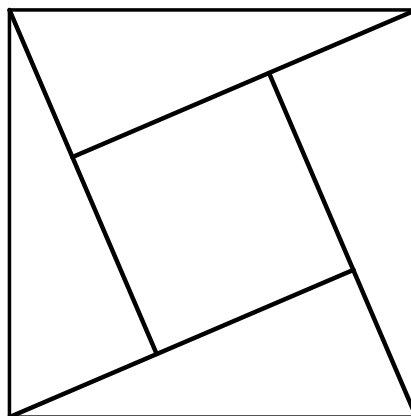
Passo3: Para construirmos os lados do quadrado menor, primeiramente construiremos um arco de circunferência centrado em F de raio FG , tal que tal arco intersekte a reta j . O ponto de intersecção será denominado ponto H . Assim, o ângulo GFH é reto e os lados GF e FH possuem mesma medida. A construção dos outros dois lados será apresentada no próximo Passo 4.



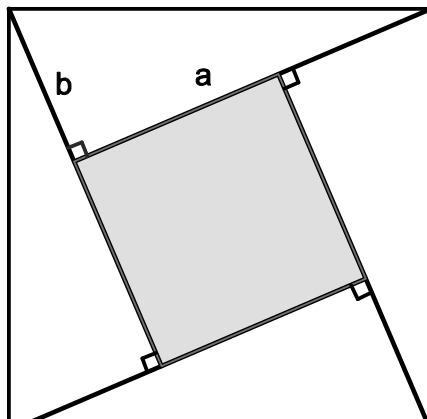
Passo 4: Trace a reta l passando pelo ponto H e paralela à reta k e a reta m passando pelo ponto G e paralela à reta j . O ponto de intersecção dessas retas é o ponto I . Por construção, o quadrilátero $FHIG$ é um quadrado.



Passo 5: Para se obter a próxima figura a partir da figura representada no passo anterior, esconderemos as retas auxiliares j , k , l , m e a circunferência, deixando apenas os pontos que representam os vértices de ambos os quadrados para, em seguida, traçarmos os segmentos necessários para se construir a figura (e). Após isso, retiramos os vértices, a fim de se obter a figura desejada.

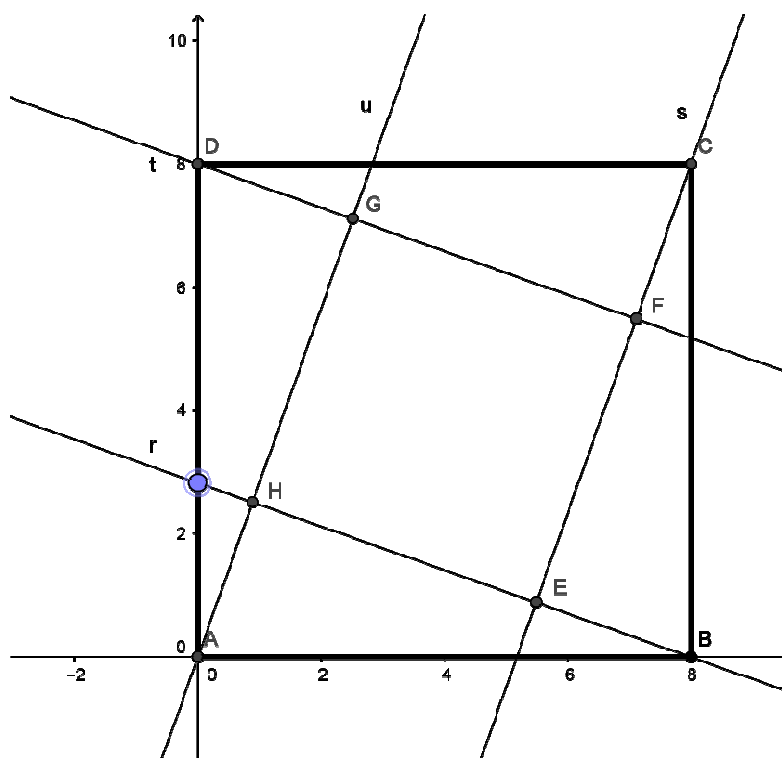


Passo 6: Neste passo apenas inserimos as medidas a e b . Para obter o quadrado destacado, utilizamos a ferramenta Polígono Regular no GeoGebra, construindo o lado GL e escolhendo o número de lados do polígono igual a 4. Além disso, foi desenhado o símbolo dos ângulos retos, conforme mostrado no problema.



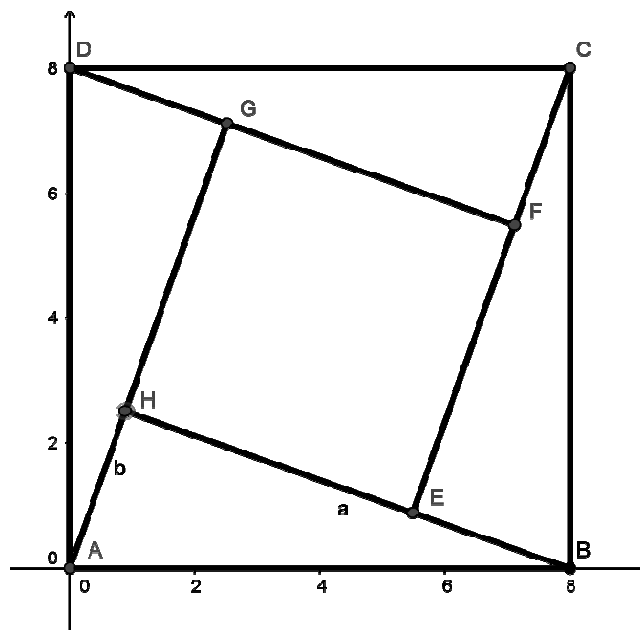
Outra proposta mais simples de construção:

Construa o quadrado $ABCD$. Em seguida, trace a reta r passando por B , intersectando o lado AD em um ponto qualquer. Em seguida, pelo ponto C , trace a reta s perpendicular à r , obtendo o ponto E . Depois, pelo ponto D , trace a reta t perpendicular à s , obtendo o ponto F . Pelo vértice D , trace a reta u perpendicular à t , obtendo o ponto G , e pelo vértice A , trace a reta u perpendicular à t , obtendo o ponto H . Dessa forma, obtêm-se os pontos $EFGH$, que formam um quadrado $EFGH$.



Passo 2: Considerando os pontos de intersecção das 4 retas representadas na figura, podemos dividir o quadrado $ABCD$ em 4 triângulos retângulos (ABH , BCE , CDF e ADG – todos congruentes entre si) e um quadrado $EFGH$. Assim, a soma das áreas

dos 4 triângulos retângulos com a área do quadrado menor resulta na área do quadrado maior.



Observação: A ideia apresentada no Passo 2 sugere uma proposta de resolução do problema e espera-se que alguns alunos percebam isso. Caso contrário, o professor deverá provocá-los a chegar a tal conclusão e fazer sua demonstração em sala de aula. Além disso, é interessante que o professor peça a seus alunos que utilizem o software para verificar que tais triângulos possuem, de fato, a mesma área.

Duas propostas de resolução:

Proposta 1: Primeiramente, note que os triângulos retângulos congruentes (ABH , BCE , CDF e ADG) têm seus catetos maiores medindo a e seus catetos menores medindo b . Assim, pelo teorema de Pitágoras, suas respectivas hipotenusas terão medidas iguais a $\sqrt{a^2 + b^2}$, que é também a medida do lado do quadrado $ABCD$.

A área do quadrado menor ($EFGH$) pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Área}(EFGH) &= \text{Área}(ABCD) - 4\text{Área}(ABH) \\ &= \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 - 4\frac{ab}{2} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \end{aligned}$$

Proposta 2:

Podemos notar que o quadrado $EFGH$ possui lado de medida $a - b$.

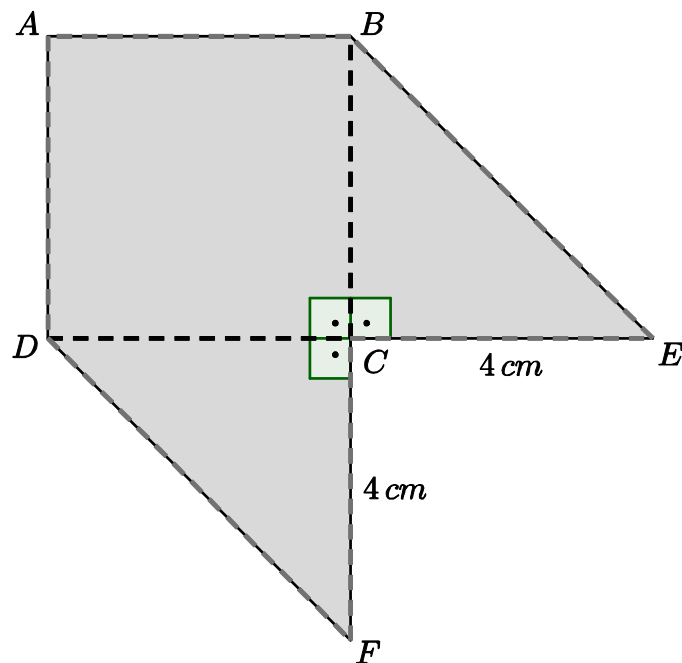
Assim,

$$\text{Área}(EFGH) = (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Resposta correta: item d).

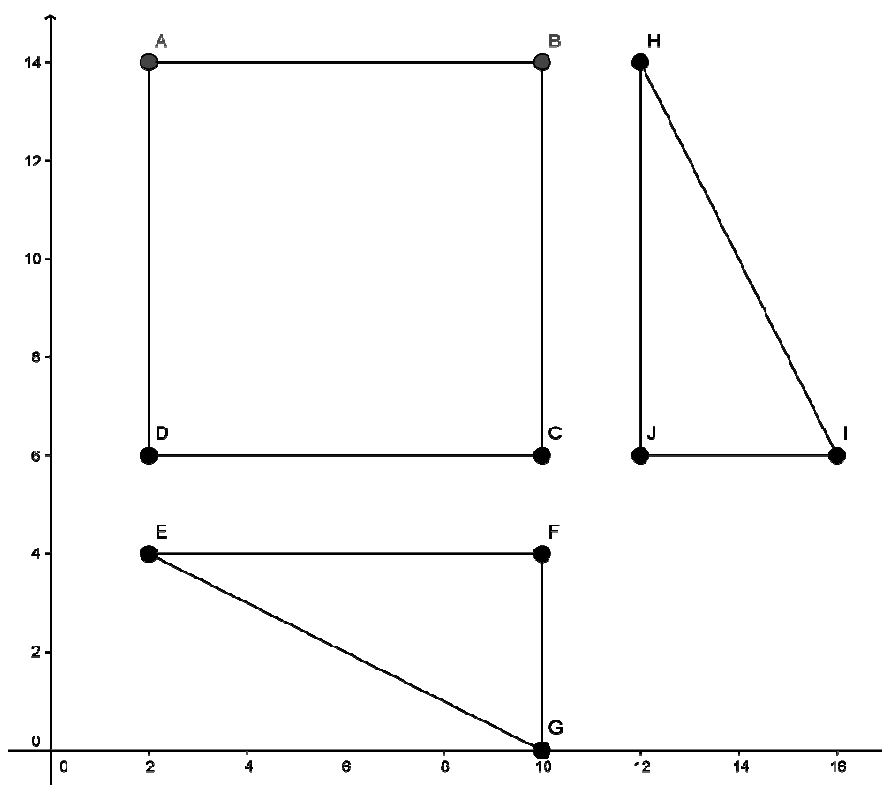
2.4PROBLEMA 4

Luana desenhou, em seu caderno de geometria, uma figura plana congruente à figura abaixo, em que $ABCD$ é um quadrado de área 64 cm^2 e os segmentos CE e CF medem 4 cm . Luana dobrou esta figura nas linhas tracejadas, de tal forma que os pontos E e F se coincidam com um ponto P do espaço. Luana então perguntou a Ricardo: Qual é a distância desse ponto P ao ponto A ?

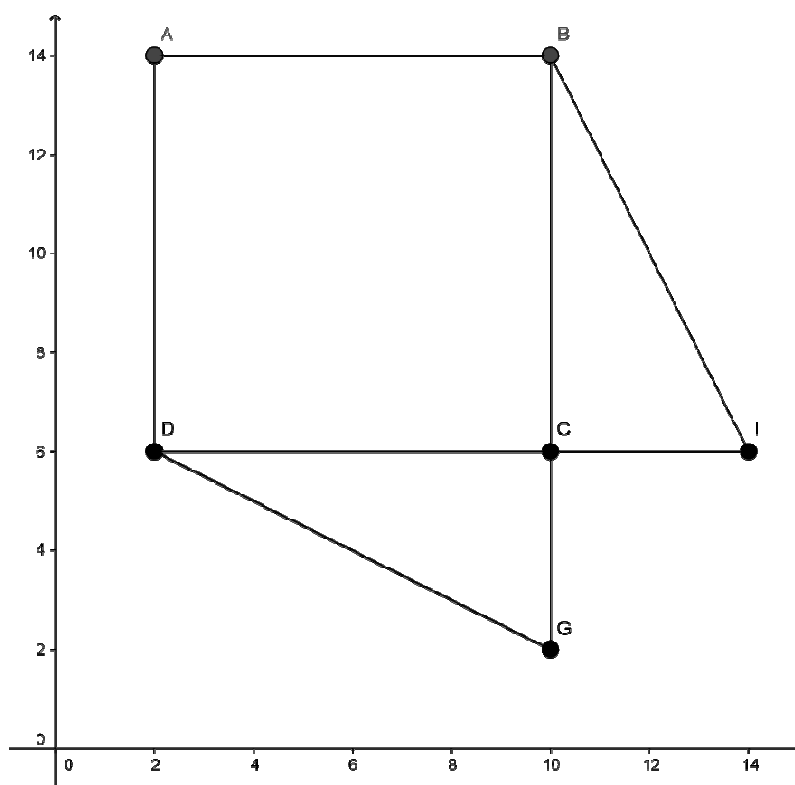


Construção do problema

Passo 1: Construa um quadrado $ABCD$ de lado 8 cm e dois triângulos retângulos EFG e HIJ , com catetos medindo 8 cm e 4 cm , como mostra a figura abaixo.

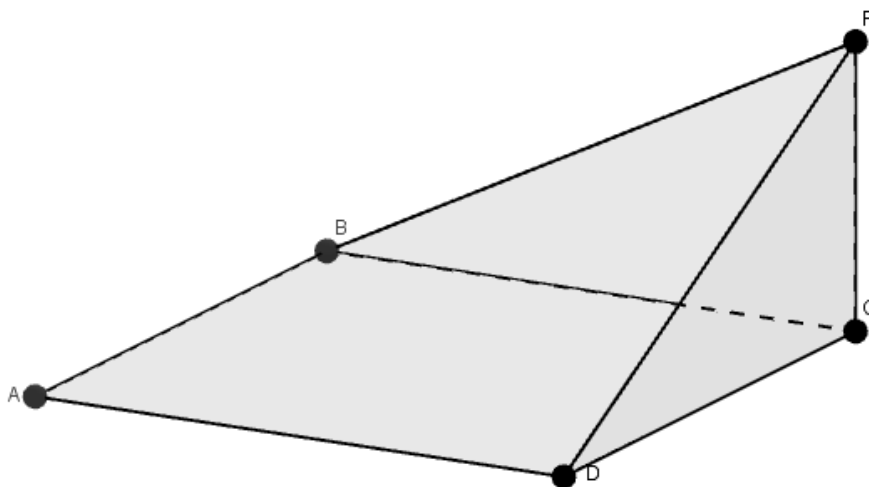


Passo 2: Arrasta-se os triângulos retângulos, fazendo com que os pontos D e E, C e F, C e J, B e H coincidam. Dessa forma, tem-se a figura abaixo.

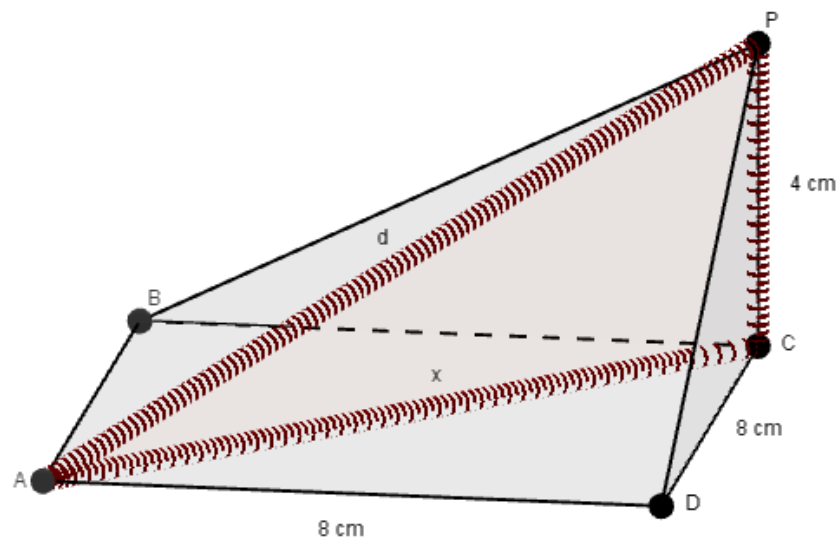


Passo 3: Dobrando parte da figura, sobre BC e CD , até que os pontos I e G coincidam, formando o ponto P, como pede o enunciado, tem-se uma nova figura no espaço. Para

isso, utilizam-se conhecimentos da Geometria Analítica, pois a união dos pontos I e G, após o dobramento, gera um ponto P no espaço de coordenadas $(x, y, z) = (10, 6, 4)$.



Passo 4: Obtendo a figura em 3D, nota-se que a distância entre os pontos A e P pode ser calculada pelo teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo ACP, como mostra a figura abaixo. Note que a medida do lado AC do triângulo citado, o qual denominaremos de x , pode ser obtida pela diagonal do quadrado ABCD.



Como x representa a diagonal do quadrado ABCD, temos que $x = l\sqrt{2}$, em que l representa a medida do lado do quadrado. Assim, $x = 8\sqrt{2}$.

Por outro lado, o triângulo ACP é retângulo de hipotenusa AP . Logo, pela relação de Pitágoras, segue que

$$AP^2 = AC^2 + CP^2$$

Dai,

$$AP^2 = (8\sqrt{2})^2 + 4^2$$

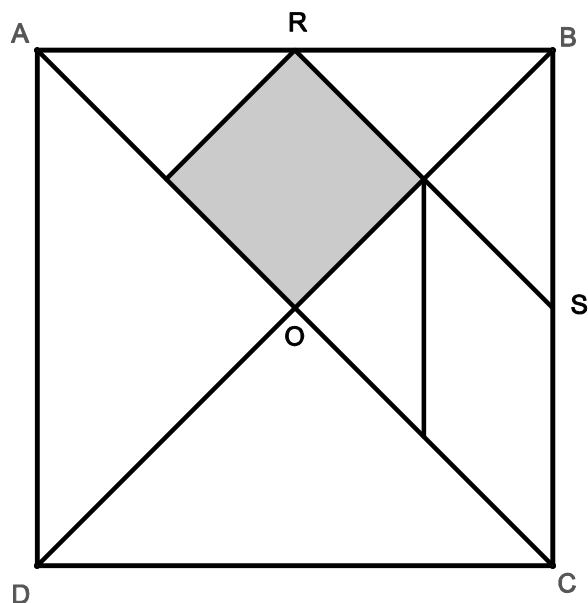
Logo,

$$AP = 12$$

Portanto, a distância pedida é igual a 12cm.

2.5 PROBLEMA 5

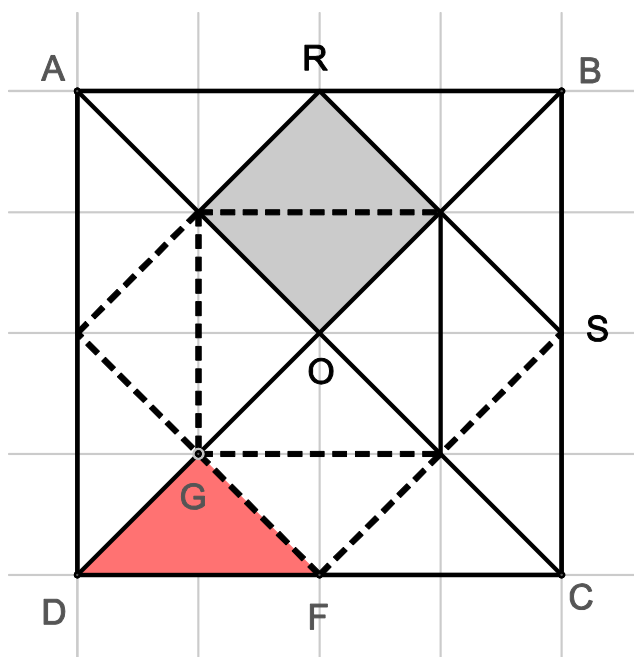
A professora Gracieli gosta muito de passar problemas de geometria para sua filha Isabela. Hoje, Isabela está completando 12 anos de vida e, como presente, recebeu um quebra-cabeça constituído de oito peças. Uma das tarefas da filha de Gracieli foi montar um quadrado com as oito peças deste quebra-cabeça. Ela obteve sucesso, conforme mostrado na figura abaixo. Não contente, Gracieli desenhou o quadrado em uma folha de papel e fez as seguintes considerações: a) A , B , C e D são os vértices do quadrado; b) os pontos R e S são pontos médios dos lados AB e BC , respectivamente; c) O é o encontro das duas diagonais. Gracieli propôs a Isabela que, se ela acertasse qual é a razão entre a área do quadrado pequeno (pintado) e a área do quadrado $ABCD$, receberia, de presente, um quebra-cabeça formado de figuras espaciais. Para que a filha da professora Gracieli ganhe o presente, qual é o valor desta razão que ela deverá encontrar?



A elaboração desta figura com o uso do GeoGebra é bastante simples, visto que sua construção é baseada praticamente em construir segmentos a partir da determinação de pontos médios. Por isso, preferimos apresentar apenas uma proposta de resolução, pois ela já contém os passos necessários para sua construção.

Uma proposta de resolução:

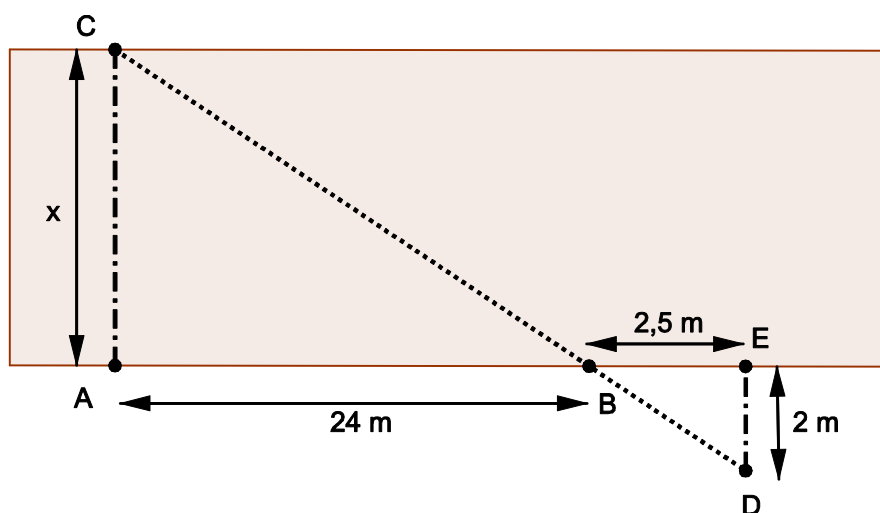
Observando a figura acima, vemos que, traçando alguns segmentos paralelos aos lados e às diagonais do quadrado maior (por alguns pontos médios), podemos obter a seguinte figura:



Da figura anterior, vemos que o quadrado pintado e o maior ($ABCD$) são compostos, respectivamente, por 2 e 16 triângulos congruentes ao triângulo destacado (DFG). Logo, a razão entre a área do quadrado menor e a área do quadrado maior é igual a $2/16$ ou, representando a fração em sua forma irredutível, segue que a razão desejada é igual a $1/8$.

2.6 PROBLEMA 6

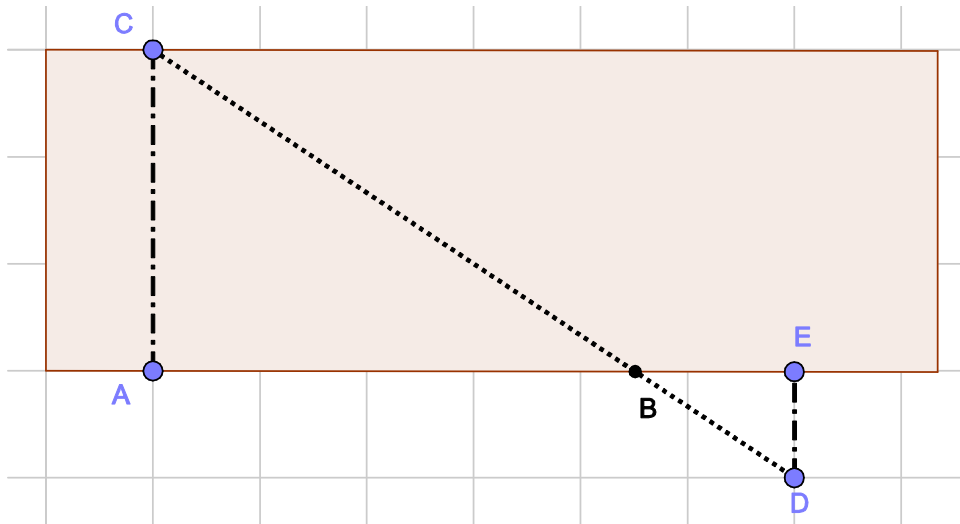
Para medir a largura x de um rio, sem necessidade de cruzá-lo, Marlon fez algumas medições, como mostra a figura abaixo. Calcule a largura x do rio.



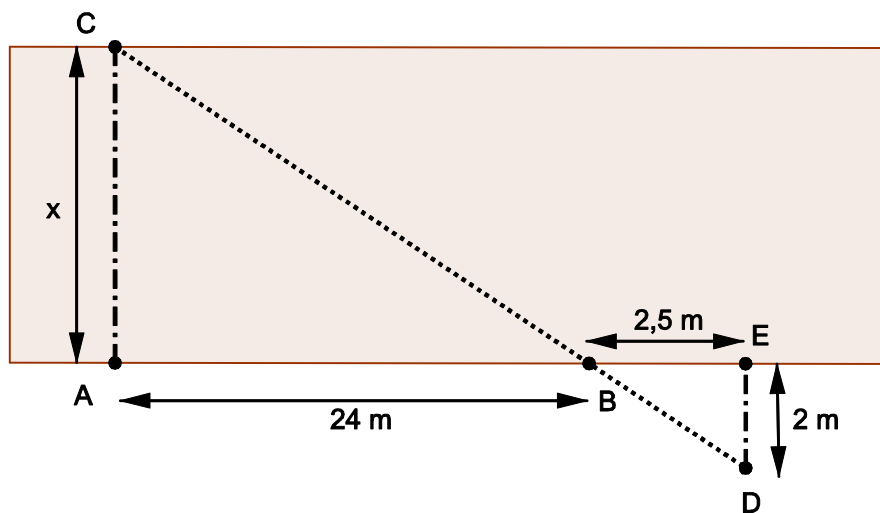
Optamos por construir a figura apresentada no enunciado usando ferramentas auxiliares simples no GeoGebra. Esta opção deve-se também a atender uma das propostas deste trabalho, que também é diversificar os métodos utilizados, tanto em relação aos conceitos matemáticos, quanto à forma de manusear o *software*.

Uma proposta de construção:

Passo 1: No GeoGebra, opte por exibir a *malha* para construir de forma rápida o retângulo destacado na figura anterior. Determine os pontos A , C , D e E e trace os segmentos AC , CD e DE . A intersecção do segmento CD com um dos lados do retângulo é o ponto B .

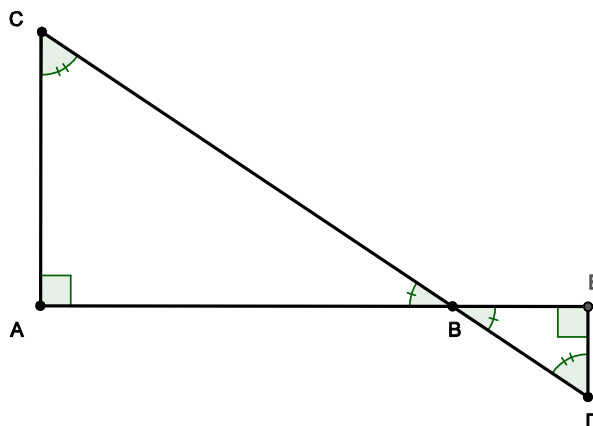


Passo 2: Oculte a malha e insira os dados do problema.



Uma proposta de resolução:

Claramente, por construção, os triângulos BAC e BED são semelhantes, pelo critério de semelhança AA, conforme mostra a figura abaixo.



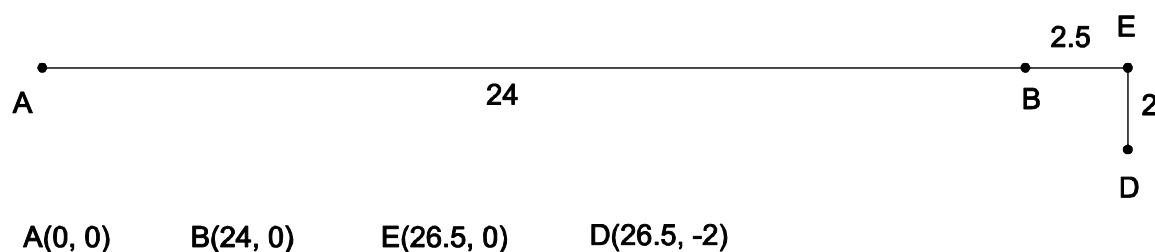
Aplicando o critério de semelhança nos triângulos BAC e BED , temos que $\frac{AC}{ED} = \frac{AB}{EB}$,

isto é, $\frac{x}{2} = \frac{24}{2,5}$.

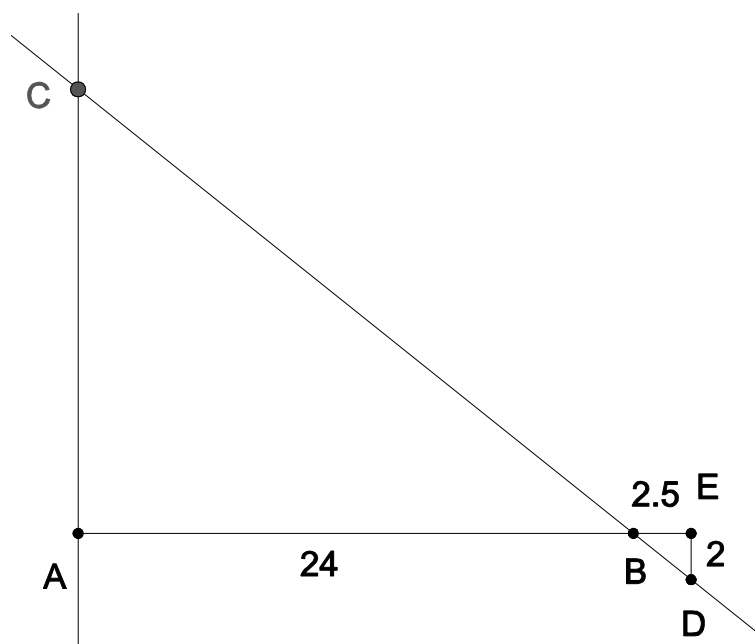
Daí, segue que $x = 19,2$ m.

Verificando a solução com o uso das propriedades do GeoGebra:

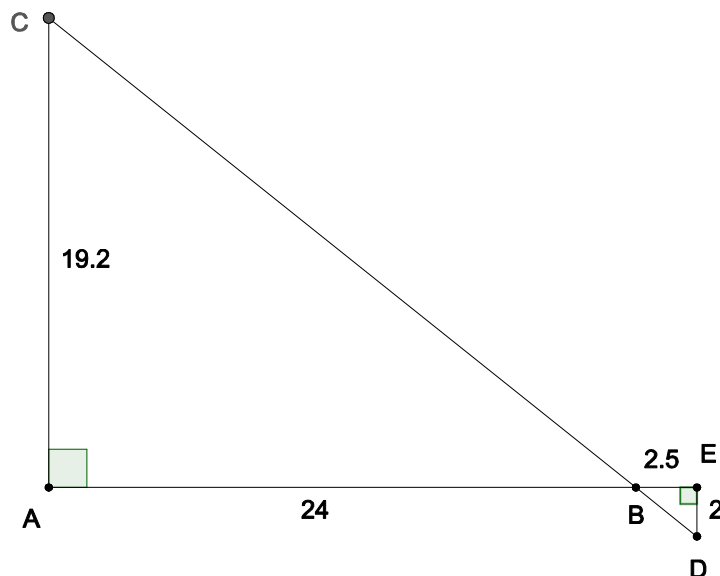
Passo 1: Insira no GeoGebra os pontos A , B e C de coordenadas $(0, 0)$, $(24, 0)$ e $(26.5, 0)$. Dessa forma, as medidas dos segmentos de reta AB , BE e ED serão iguais a 24 e 2,5 e 2 unidades de medida, respectivamente.



Passo 2: Agora, trace uma reta perpendicular ao segmento AB , passando pelo ponto A e, em seguida, trace outra reta, passando pelos pontos B e D . O ponto em que as retas se intersectam é o ponto C .



Passo 3: Exclua as retas auxiliares e insira os segmentos AC , BC e DB . Peça para o *software* exibir o valor do segmento AC . Note que o valor exibido é igual a 19,2 unidades de medida, conforme encontrado na resolução do problema.



Observação: É interessante que o professor discuta em sala de aula as conclusões que podemos tirar quando aplicamos as duas formas de resolução do problema proposto. Uma delas é mostrar que, quando respeitadas as suas proporções, o *software* nos fornece a solução, mas isso só é possível se, na construção da figura, levarmos em consideração os conceitos matemáticos envolvidos, como, por exemplo, a posição dos pontos inseridos para que os segmentos estejam na devida proporção, conforme o enunciado. Por outro lado, deve ficar claro aos alunos que podemos obter a solução do problema, mesmo se as proporções da figura não estiverem de acordo com os dados, o que quase sempre acontece, acarretando, muitas vezes, em um “chute” ruim, quando eles não estão bem preparados. Em resumo, o que importa mesmo são as hipóteses apresentadas no problema e sua resolução dependerá exclusivamente do conhecimento de cada um.

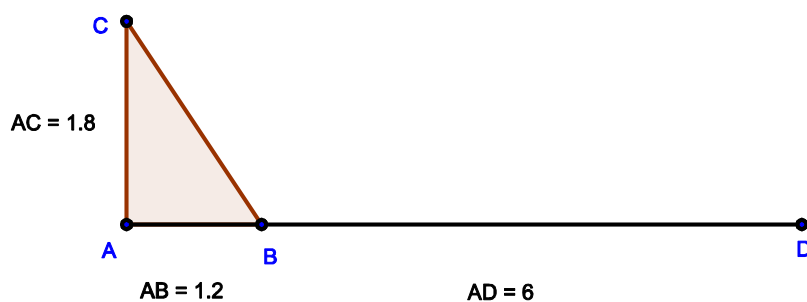
2.7 PROBLEMA 7

Na pista de caminhada ao lado da UNEMAT (Sinop), há uma árvore muito linda e bem alta. Certo dia, Adriano sentou-se debaixo desta árvore, começou a colher algumas lindas flores e ficou pensando em qual era a sua altura. Ele foi à biblioteca, encontrou

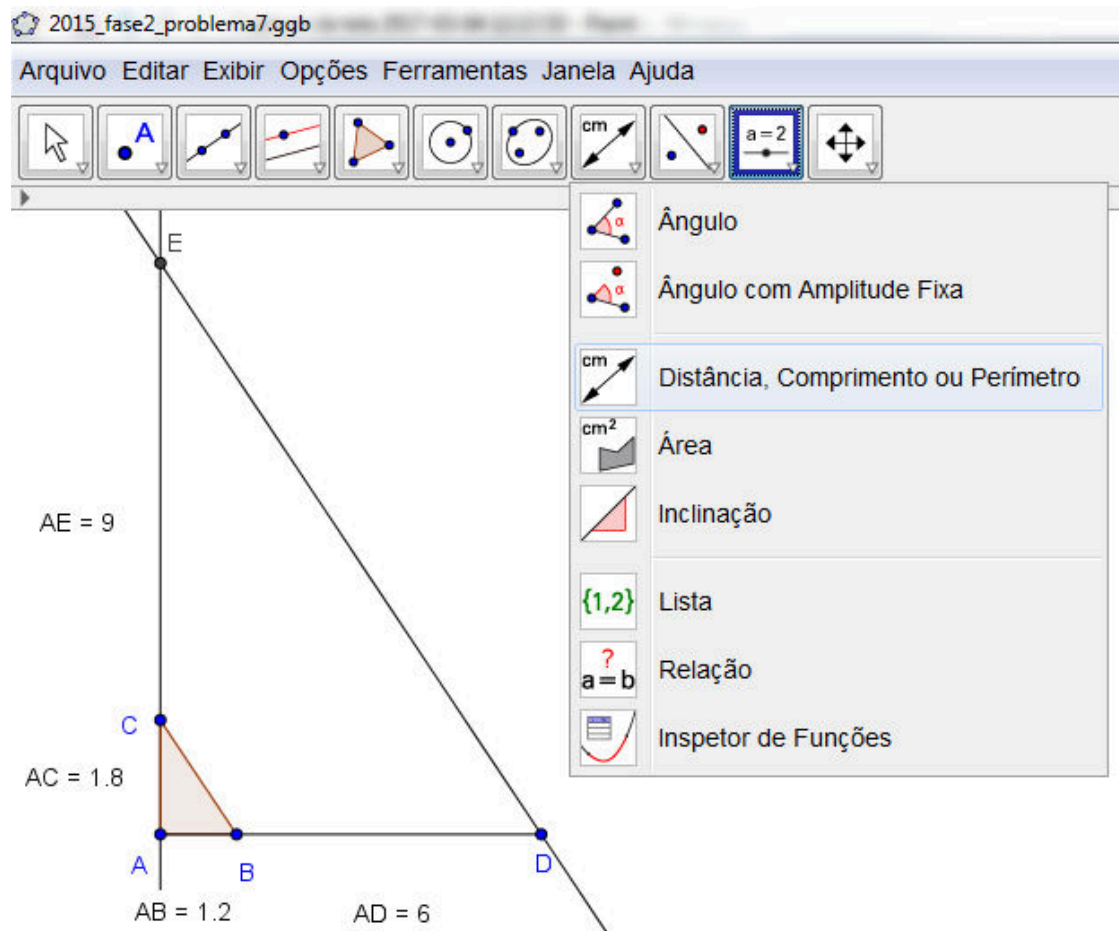
Fernando pediu-lhe para que determinasse a altura daquela árvore. Imediatamente, Fernando utilizou a seguinte estratégia: posicionou-se ao lado da árvore e mediu a sua sombra e a sombra da árvore (projetadas no chão), encontrando, respectivamente, 1,20m e 6,00m. Sabe-se que ele possui 1,80m de altura. Qual é, em metros, a altura da árvore?

Uma proposta de resolução usando as ferramentas do GeoGebra:

Passo 1: Vamos inserir no GeoGebra os pontos A , B , C e D de coordenadas $(0, 0)$, $(1.2, 0)$, $(0, 1.8)$ e $(6, 0)$, respectivamente. Dessa forma, temos que o segmento AC representa a altura do Fernando e AB a medida de sua sombra, enquanto que o segmento AD representa a medida da sombra da árvore. Queremos determinar com exatidão um segmento para representar a altura da árvore e, conseqüentemente, encontrar sua altura com o uso do *software*.



Passo 2: Vamos traçar uma reta r paralela ao segmento BC passando pelo ponto D e uma reta determinada pelos pontos A e C . Denotaremos por E o ponto de intersecção das retas r e s . Dessa maneira, os triângulos ABC e ADE são semelhantes e, portanto, a medida do segmento AE é numericamente igual à altura da árvore. Com a ferramenta Distância Comprimento ou Perímetro, encontra-se a medida do segmento AE , que é igual a 9.

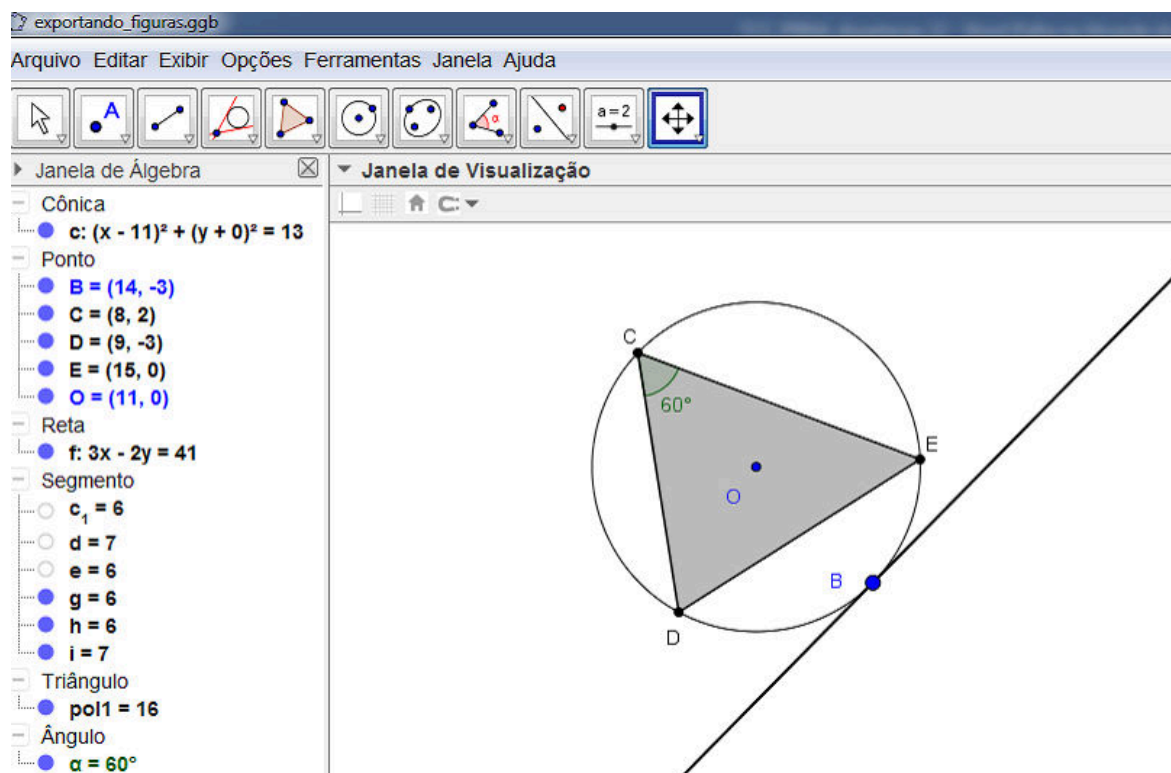


Portanto, a árvore possui 9 metros de altura.

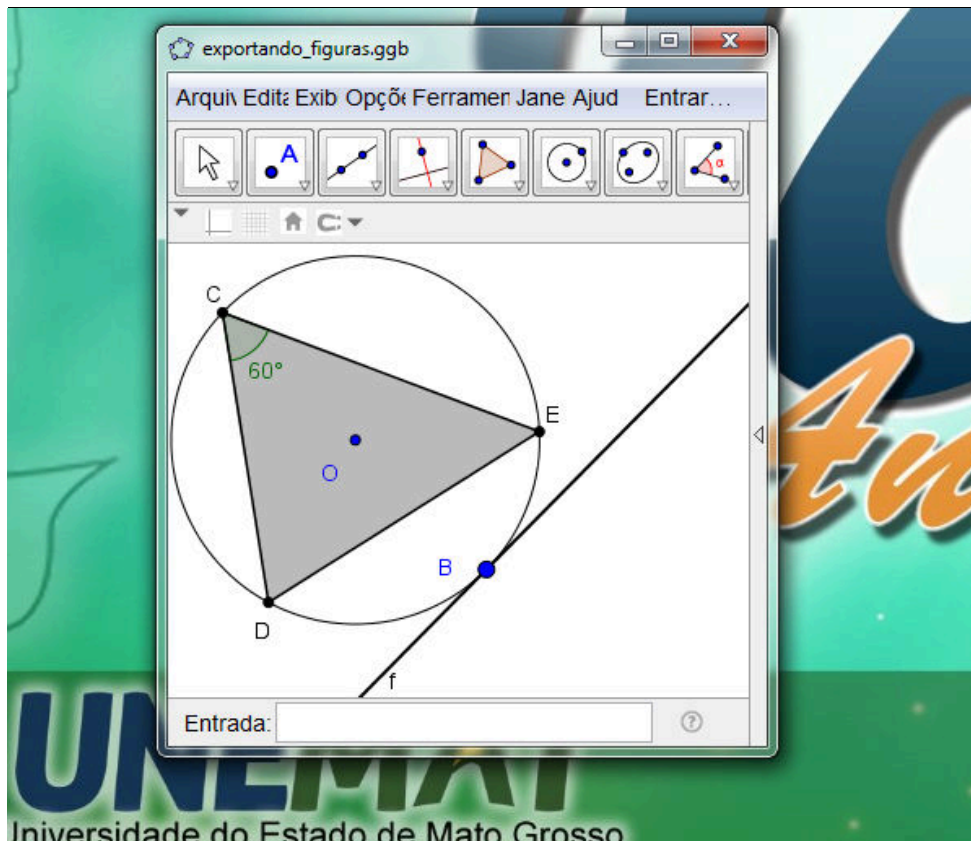
3. APÊNDICE

3.1 EXPORTANDO FIGURAS

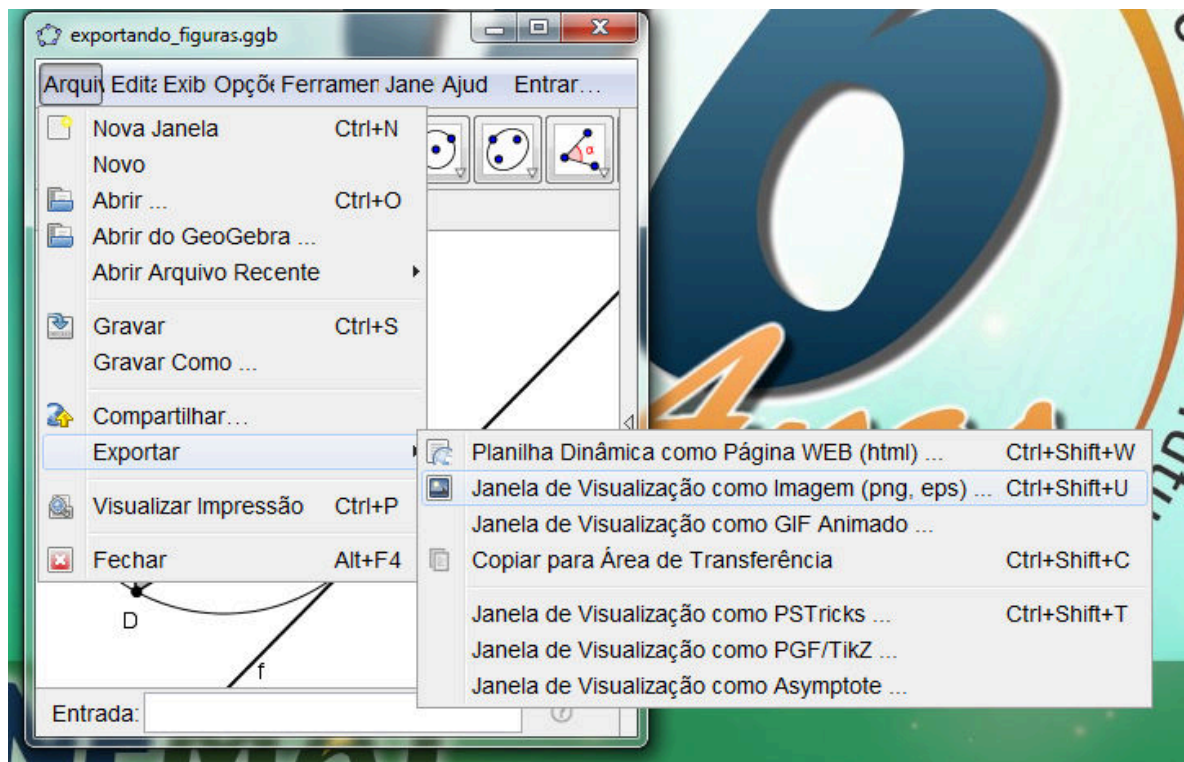
Suponha que você tenha construído no GeoGebra a seguinte figura e deseja salvá-la em algum formato, como, por exemplo, eps ou png.



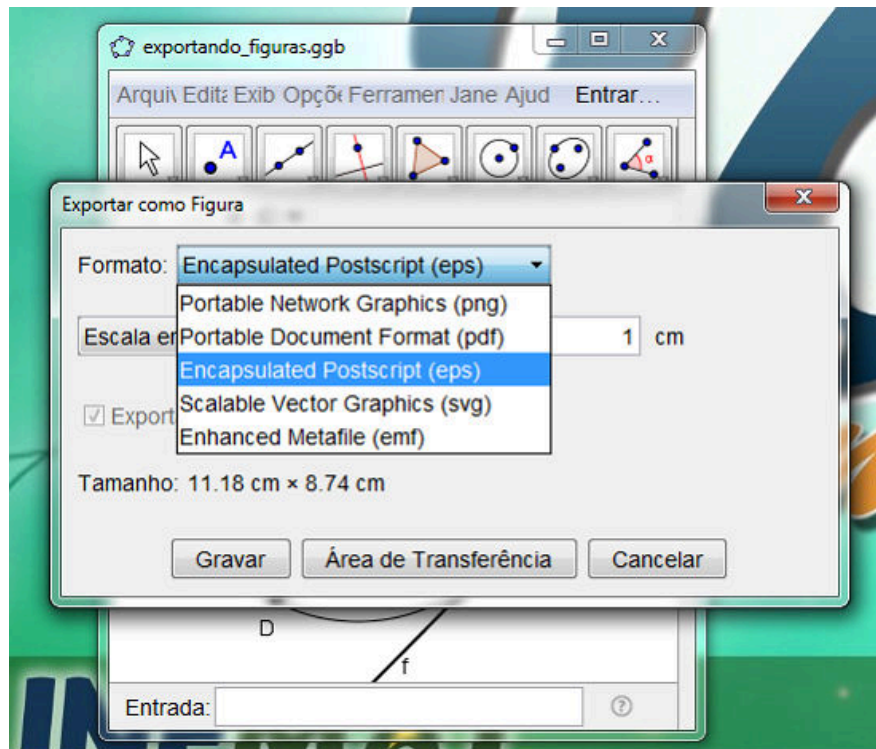
Passo 1: Para delimitar a área da figura, fechamos as janelas que estão abertas (no caso acima, a Janela de Álgebra) e levamos a figura para o canto superior esquerdo. Verifique que restringimos a área de trabalho do GeoGebra, a fim de exportar apenas a região de interesse.



Passo 2: Vá em Arquivo/Exportar/Janela de visualização como imagem (png, eps) ...

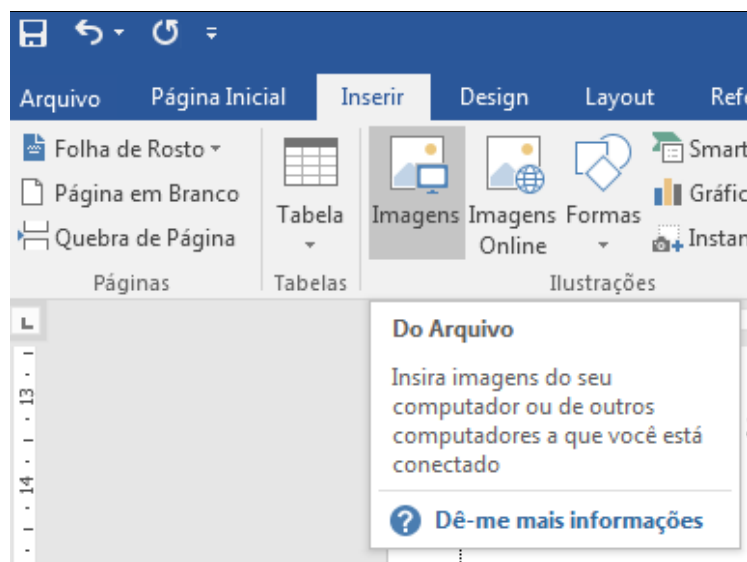


Passo 3: Agora escolha o formato desejado e tecla Gravar.

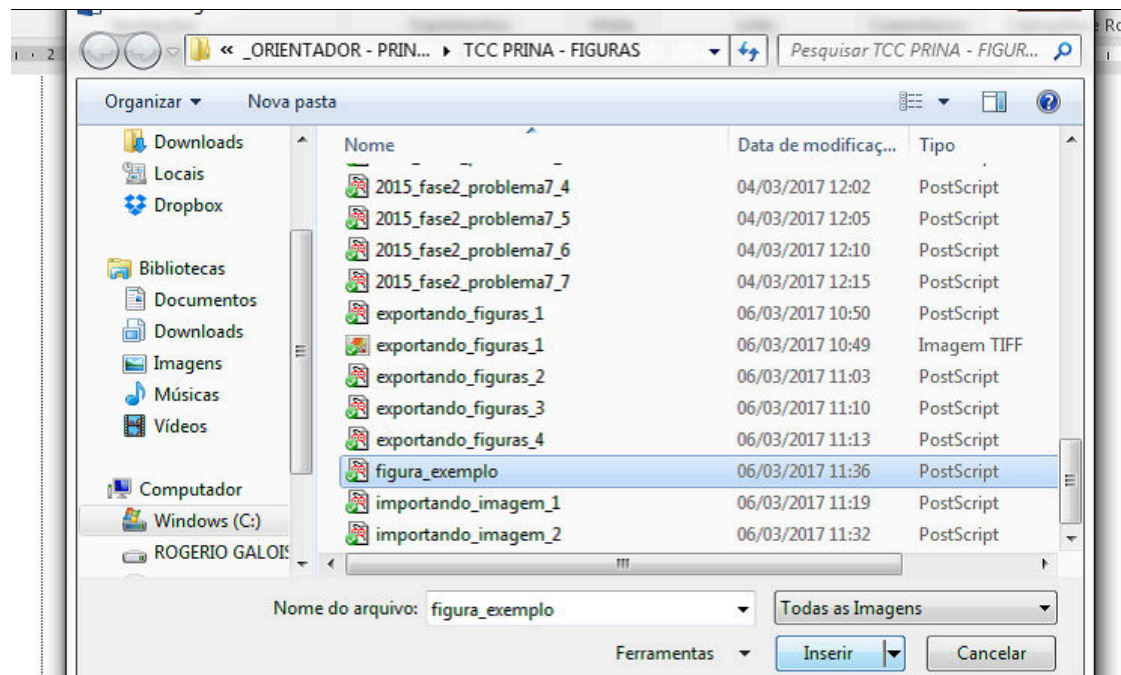


3.2 IMPORTANDO FIGURAS PARA O WORD

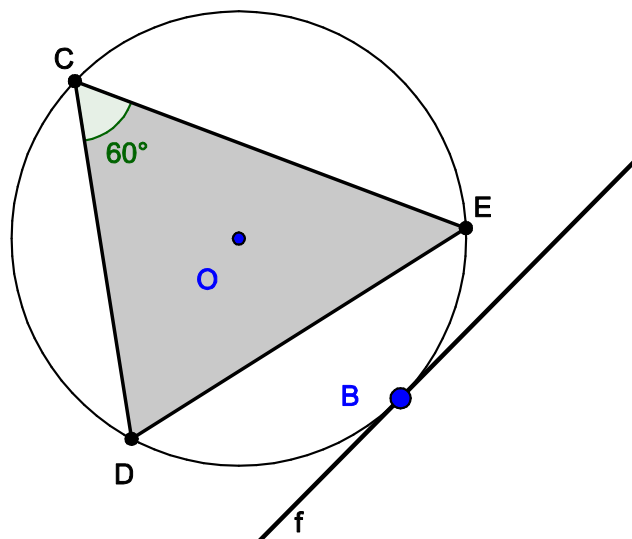
Passo 1: No Word, vá em Inserir/Imagens.



Passo 2: Após a opção Inserir e, em seguida, a opção Imagem, selecione a figura desejada; neste caso, denominamos *figura_exemplo*. Note que esta figura foi salva no formato eps.



Seguindo os passos das duas seções anteriores, a figura importando_imagem_2 aparecerá da seguinte maneira:



4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sou professor de matemática de uma escola particular de Ensino Médio. Após minha aprovação no Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT, comecei a pensar em um tema para escrever minha dissertação de mestrado. Meu orientador me pediu para acessar o site do PROFMAT, a saber, <http://www.profmatsbm.org.br/>, e baixar, principalmente, as dissertações concluídas nos últimos anos para que eu pudesse conhecer melhor os temas que foram abordados. Verifiquei que o GeoGebra foi utilizado em vários trabalhos. No entanto, tive curiosidade em ler pelo menos o resumo e as considerações finais de muitos e, em alguns, fiz uma leitura mais completa. Percebi que muitas vezes os autores mostravam como utilizá-lo, aplicavam o *software* para o ensino de geometria plana e outros tópicos, mas, em geral, não deixavam claro que além de auxiliar o professor na sala de aula, é muito útil na construção de figuras geométricas.

Em conversas com meu orientador, pude perceber que o GeoGebra é uma excelente ferramenta para ser utilizado no dia a dia e de fácil manuseio na construção de figuras que, posteriormente, podem ser exportadas nos formatos PNG e EPS, dentre outros. Neste momento meu orientador me mostrou uma forma de exportar e, posteriormente, importar as figuras para o Word e, com isso, tive enorme interesse no assunto, uma vez que auxiliará a mim e a outros professores nas aulas de matemática, em especial, nas aulas de geometria plana, além de contribuir muito na elaboração de problemas utilizando gráficos e figuras geométricas. Acredito que há muitos professores que não conhecem o *software* e mesmo os que conhecem, alguns não sabem aproveitar suas vantagens.

Diante de tudo o que foi exposto e pela forma simples e clara que este trabalho foi apresentado, acredito que ele se justifica, pois obtive enorme contribuição, que até o início deste, evitava criar problemas de geometria por causa da construção das figuras e, no decorrer deste, não apenas as criavam no GeoGebra, como também já inseri em minhas aulas de matemática. Segundo depoimentos de meus alunos, o resultado é satisfatório.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, L. F. G.; *Uma abordagem do estudo de cônicas e quádras com o auxílio do software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Unesp, Rio Claro, SP, 79 f., 2016.

ARBAIN, N., SHUKOR, N. A.; *The effects of GeoGebra on students achievement*. Procedia - Social and Behavioral Sciences, v. 8, p. 686-693. 2010.

BELTRAMI, R. S.; *Algumas técnicas utilizando o software GeoGebra no processo de resolução de problemas geométricos do ensino básico: situações de máximos e mínimos e lugares geométricos*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Roraima, UFRR, Boa Vista, RR, 139f., 2016.

CALIGARIS, M. G., SCHIVO, M. E. ROMITI, M. R.; *Calculus & GeoGebra, an Interesting Partnership*, Procedia - Social and Behavioral Sciences, v. 174, 2015, p. 1183-1188, ISSN 1877-0428, 2015.

CANAVEZI, L. S.; *Uma proposta lúdica com utilização do GeoGebra para o estudo de funções quadráticas e probabilidade geométrica*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de São Carlos, UFSCar, São Carlos, SP, 151f, 2016.

CARDOSO, C. E.; *Uma proposta para o ensino de geometria analítica através da resolução de problemas e do uso do GeoGebra* (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de São Carlos, UFSCar, São Carlos, SP, 106 f., 2016.

CAVALCANTE, F. R.; *Ensino de Geometria Espacial: uma proposta de atividades com o uso do GeoGebra*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal Rural do Semi-Árido, UFERSA, Mossoró, RN, 106 f., 2016.

CERQUEIRA, L. S.; *Isometrias no plano: Uma proposta de atividades para educação básica com uso do GeoGebra*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, UFRB, Cruz das Almas, 56 f., 2016.

DIAS, A. A. S.; *Cálculo diferencial e integral e GeoGebra: Ferramentas para o ensino da Física na educação básica*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Triângulo Mineiro, UFTM, Uberaba, MG, 90 f., 2016.

DINIZ, J. F. S.; *GEOGEBRA: uma ferramenta dinâmica na aprendizagem da Geometria no Ensino Básico*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Maranhão, São Luiz, MA, 77 f., 2016.

FURLANI, C.; *O Uso de Conceitos Vetoriais em Geometria Analítica no Ensino Médio com o Auxílio do Geogebra*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, 132 f., 2016.

Moraes, C. F.; *Geometria Analítica: Explorando conceitos do ensino médio com o uso de animações no GeoGebra*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Rio Grande, FURG, Instituto de Matemática, Estatística e Física, IMEF, Rio Grande, RS, 153 f., 2016.

PIMENTEL, L. F. G.; *Uma sequência didática para o ensino de transformações geométricas com o GeoGebra*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, São Carlos, SP, 124 f., 2016.

RÊGO, S. A. S.; *O uso do GeoGebra como ferramenta de ensino em trigonometria*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC, Rio de Janeiro, RJ, 42 f., 2016.

SÃO PEDRO, M. A.; *O GeoGebra como uma ferramenta no processo de escalonamento de matrizes e resolução de sistemas lineares*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, UFRB, Cruz das Almas, BA, 77 f., 2016.

SOUSA, F. A. A.; *Utilizando o Geogebra Como Ferramenta Auxiliar no Ensino de Parametrização das Cônicas*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Acre, UFAC, Rio Branco, AC, 120 f., 2016.

THOMÉ, R. F. *O cálculo da área do círculo com o auxílio do software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, São Carlos, SP, 33 f., 2016.

XAVIER, R. G.; *Geometria Espacial - Um Curso Com GeoGebra*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Goiânia, GO, 62 f., 2016.

ZACHI, J. M. *Problemas de Programação Linear: uma proposta de resolução geométrica para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Unesp, Rio Claro, SP, 115f., 2016.