

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Aplicações do Teorema de Pitágoras: Trigonometria Esférica

Elder Abreu Júnior

2013

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Aplicações do Teorema de Pitágoras: Trigonometria Esférica

por

Elder Abreu Júnior

sob orientação do

Prof. Dr. Felix Silva Costa

Fevereiro de 2013

São Luís - MA

Silva, Werbete Mendes da.

Os Teoremas de Hahn-Banach, Limitação Uniforme,
Aplicação Aberta e Gráfico Fechado

/ Werbete Mendes da Silva. - São Luís: 2013.

57f

Impresso por computador (fotocópia)

Orientador: Anselmo Baganha Raposo Júnior

Monografia (Graduação) Universidade Federal do

Maranhão, Curso de Matemática, 2013

1. Limitação uniforme. 2. Aplicação Aberta. 3. Gráfico fechado.

I. Título

CDU: 517.982.22

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Aplicações do Teorema de Pitágoras: Trigonometria Esférica

por

Elder Abreu Júnior

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Aprovada por:

Prof. Dr. Felix Silva Costa - UEMA (Orientador)

Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Maranhão - UFMA

Prof Msc. Elivaldo Rodrigues Macedo - UFMA

*À Deus
a minha família e amigos.*

Agradecimentos

À UFMA e ao IMPA pela oportunidade concedida e aos professores do PROFMAT, em especial, ao professor Félix Costa, meu orientador, e ao professor Anselmo Raposo Júnior (co-orientador), pela orientação e valiosa contribuição em todas as etapas do mestrado.

Aos colegas de mestrado, à minha esposa Ednaise, aos meus filhos e aos meus maiores incentivadores, meu pai Elder Abreu e meu irmão Ivanildo Abreu.

Resumo

A Geometria é vista como uma ciência de natureza lógica e dedutiva, sendo formulada por postulados, axiomas e noções comuns a todos. Assim Euclides formulou e organizou todo o conhecimento sobre Geometria de sua época em seus *Elementos*. Euclides começou o desenvolvimento do seu trabalho utilizando cinco postulados. O quinto postulado, porém, conhecido como postulado das paralelas, causou grande polêmica. Muitos afirmavam que se tratava de um teorema e buscavam uma demonstração. Grandes matemáticos se aventuraram no estudo do quinto postulado e o problema que parecia simples tornou-se uma difícil busca por séculos. Em meio às tentativas de prová-lo foram descobertas novas geometrias nas quais a soma dos ângulos internos de um triângulo não seria mais 180° e sim um valor variando entre 180° e 540° , por dois pontos distintos não passaria uma reta, mas infinitas e etc. Assim iniciava-se uma série de resultados novostão consistentes quanto a Geometria Euclidiana. Esses resultados, apesar de diferentes e distantes de alguns resultados da Geometria Euclidiana, possuem um encadeamento lógico e prático correto, motivando assim a escrita da presente dissertação, que tem por objetivo determinar a distância entre dois pontos na superfície terrestre.

É interessante que os professores de Matemática tenham conhecimento da existência e possíveis aplicações das geometria não euclidianas e compartilhem com seus alunos algumas informações e curiosidades a esse respeito uma vez que nas escolas a geometria ensinada não é suficiente para resolver certos problemas de natureza mais real e prática.

Abstract

Sumário

Sumário	vii
1 Geometria dos Triângulos	1
1.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo	2
1.2 Principais Relações Métricas no Triângulo Retângulo	3
2 A Superfície Esférica e Seus Elementos	9
2.1 Notação e Terminologia	9
2.2 Determinação da Superfície Esférica	14
2.3 Trigonometria Esférica	28
Referências Bibliográficas	38

Introdução

No presente trabalho pretendemos desenvolver o estudo da esfera e seus elementos explorando sua associação com o globo terrestre. Conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitude, longitude e fuso-horários estão baseados em importantes idéias geométricas que, quando trabalhadas neste contexto conduzem o aluno a uma melhor compreensão e aprendizagem da trigonometria esférica.

As relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas constituem a fundamentação matemática necessária para o entendimento de alguns modernos sistemas de navegação por satélites, em especial o GPS.

A utilização do globo terrestre com suas conseqüentes questões envolvendo, por exemplo, cálculo de distância e ângulos sobre a esfera abre o caminho para um interessante trabalho interdisciplinar entre a Matemática e a Geografia.

Capítulo 1

Geometria dos Triângulos

Chama-se de triângulo retângulo ao triângulo que possui um ângulo reto.

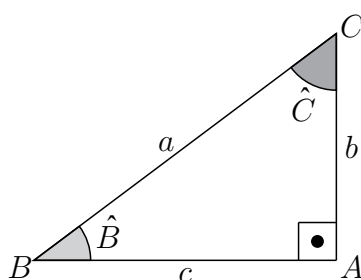


Figura 1

Destacamos os seguintes elementos de um triângulo retângulo:

- \overline{BC} é a hipotenusa do triângulo retângulo;
- \overline{AB} e \overline{AC} são as hipotenusas do triângulo retângulo;
- \hat{B} e \hat{C} são os ângulos agudos do triângulo retângulo. Como em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180° , temos que

$$\hat{B} + \hat{C} + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ,$$

ou seja, os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares;

- Os pontos A , B e C são os vértices do triângulo.

1.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Definição 1.1 O **seno** de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa. Assim, para o triângulo retângulo da Figura 10 acima temos que

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \quad e \quad \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a}.$$

Definição 1.2 O **coseno** de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida da hipotenusa. Assim, para o triângulo retângulo da Figura 10 acima temos que

$$\text{cos } \hat{B} = \frac{c}{a} \quad e \quad \text{sen } \hat{C} = \frac{b}{a}.$$

Definição 1.3 A **tangente** de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida do cateto adjacente ao ângulo. Assim, para o triângulo retângulo da Figura 10 acima temos que

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{cos } \hat{B}} \quad e \quad \text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{c/a}{b/a} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{cos } \hat{C}}.$$

Definição 1.4 A **cossecante** de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida da hipotenusa e a medida do cateto oposto ao ângulo. Assim, para o triângulo retângulo da Figura 10 acima temos que

$$\text{csc } \hat{B} = \frac{a}{b} = \frac{1}{b/a} = \frac{1}{\text{sen } \hat{B}} \quad e \quad \text{csc } \hat{C} = \frac{a}{c} = \frac{1}{c/a} = \frac{1}{\text{sen } \hat{C}}.$$

Definição 1.5 A **secante** de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida da hipotenusa e a medida do cateto adjacente ao ângulo. Assim, para o triângulo retângulo da Figura 10 acima temos que

$$\text{sec } \hat{B} = \frac{a}{c} = \frac{1}{c/a} = \frac{1}{\text{cos } \hat{B}} \quad e \quad \text{sec } \hat{C} = \frac{a}{b} = \frac{1}{b/a} = \frac{1}{\text{cos } \hat{C}}.$$

Definição 1.6 A *cotangente* de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida do cateto oposto ao ângulo. Assim, para o triângulo retângulo da Figura 10 acima temos que

$$\operatorname{ctg} \hat{B} = \frac{c}{b} = \frac{1}{b/c} = \frac{1}{\operatorname{tg} \hat{B}} \quad e \quad \operatorname{ctg} \hat{C} = \frac{b}{c} = \frac{1}{c/b} = \frac{1}{\operatorname{tg} \hat{C}}.$$

1.2 Principais Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Consideremos o triângulo retângulo ABC (Figura 11) retângulo em A . Neste triângulo podemos destacar as seguintes relações:

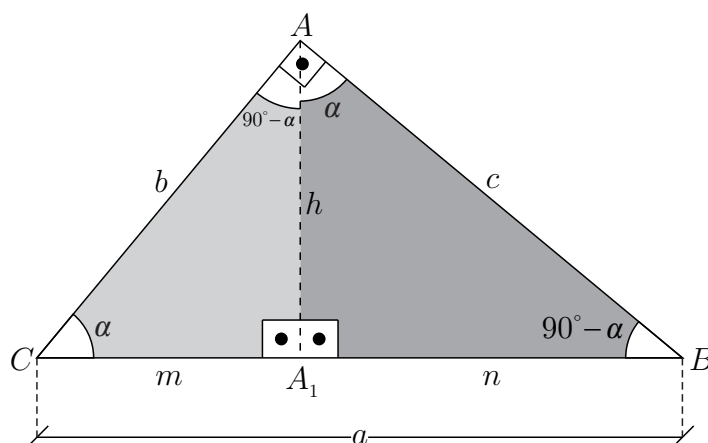


Figura 2

Proposição 1.7 Em todo triângulo retângulo o quadrado de um cateto é igual ao produto de sua projeção sobre a hipotenusa pela hipotenusa, ou seja,

$$b^2 = ma \quad e \quad c^2 = na. \quad (1.1)$$

Demonstração: Como os triângulos AA_1C e ABC são semelhantes, temos que

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = ma$$

e

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \Rightarrow c^2 = na$$

■

Proposição 1.8 *Em todo triângulo retângulo o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, ou seja,*

$$h^2 = mn \tag{1.2}$$

Demonstração: Como os triângulos AA_1C e AA_1B são semelhantes, temos que

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = mn.$$

■

Proposição 1.9 *Em todo triângulo retângulo o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à hipotenusa, ou seja,*

$$bc = ah. \tag{1.3}$$

Demonstração: Como os triângulos AA_1B e ABC são semelhantes, temos que

$$\frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow bc = ah.$$

■

Teorema 1.10 (Teorema de Pitágoras) *Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, ou seja,*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Demonstração: De (1.1) temos que

$$b^2 + c^2 = ma + na = a(m + n).$$

Como $m + n = a$ o resultado segue. ■

Corolário 1.11 (Lei dos Cossenos) *Em um triângulo ABC tem-se*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos \hat{C}$$

Demonstração: (i) O ângulo \hat{C} é reto: Então a afirmação acima é exatamente o Teorema de Pitágoras.

(ii) O ângulo \hat{C} é obtuso:

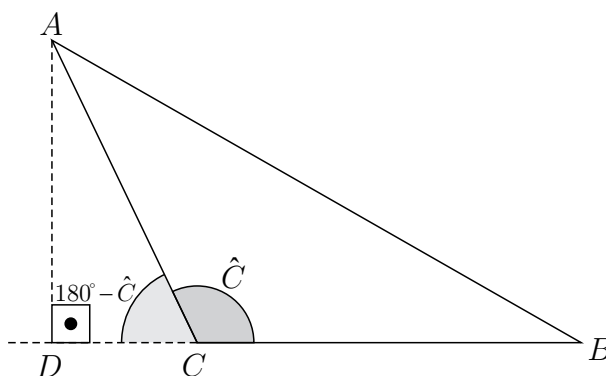


Figura 3

Tracemos por A uma reta que seja perpendicular à reta que contém os pontos C e B . Assim, formamos os triângulos retângulos ACD e ABD . Neste caso,

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 \tag{1.4}$$

e

$$\overline{AB}^2 = (\overline{BC} + \overline{CD})^2 + \overline{AD}^2. \tag{1.5}$$

De (1.4) e (1.5) temos que

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 &= \overline{AB}^2 - (\overline{BC} + \overline{CD})^2 \\ \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CD} - \overline{CD}^2 \\ \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

No triângulo ACD temos que $\cos(180^\circ - \hat{C}) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$, isto é,

$$\overline{CD} = \overline{AC} \cos(180^\circ - \hat{C}) = -\overline{AC} \cos \hat{C}. \quad (1.7)$$

Substituindo (1.7) em (1.8) segue que

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos \hat{C}.$$

(iii) O ângulo \hat{C} é agudo:

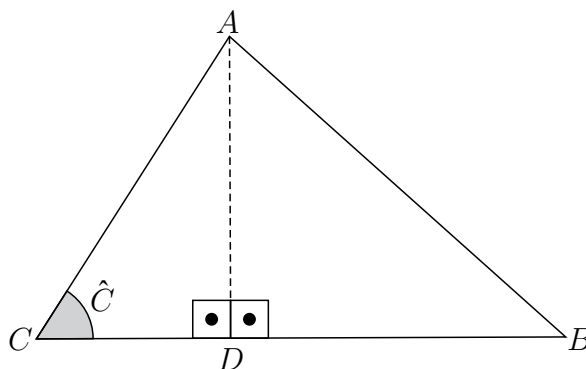


Figura 4

Tracemos por A uma reta que seja perpendicular à reta que contém os pontos C e B . Assim, formamos os triângulos retângulos ACD e ABD . Neste caso,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \quad (1.8)$$

e

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2. \quad (1.9)$$

De (1.8) e (1.9) segue que

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 &= \overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 \\ \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Como $\overline{BC} = \overline{CD} + \overline{BD}$, temos que $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD}$ e, conseqüentemente,

$$\overline{BD}^2 = (\overline{BC} - \overline{CD})^2 = \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{CD}^2. \quad (1.11)$$

Substituindo (1.11) em (1.10), obtemos

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CD}. \quad (1.12)$$

Mas, $\cos \hat{C} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$, ou seja,

$$\overline{CD} = \overline{AC} \cos \hat{C}. \quad (1.13)$$

Substituindo (1.13) em (1.12), obtemos

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos \hat{C}.$$

■

Proposição 1.12 *Se uma reta é tangente a um círculo então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência.*

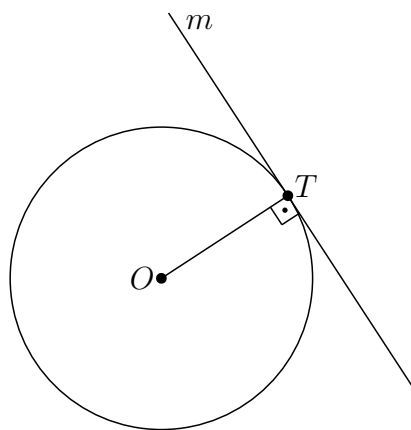


Figura 5

Demonstração: Consideremos um círculo de centro O e uma reta m que lhe seja tangente. Seja T o ponto de tangência. Designemos por P o pé da perpendicular baixada do ponto O à reta m . Gostaríamos de concluir que P e T coincidem. Suponhamos então que P e T sejam pontos distintos. Então OT é a hipotenusa do triângulo retângulo

OPT . Portanto, $\overline{OP} < \overline{OT}$. Como \overline{OT} é um raio, temos que P é um ponto interior ao círculo. Tomemos então um ponto T' sobre a reta m , tal que $\overline{PT} = \overline{PT'}$, com $T \neq T'$. Por congruência de triângulos, concluímos que $OPT = OPT'$. Portanto, $\overline{OT} = \overline{OT'}$. Mas então T' também pertence ao círculo. Logo, a reta m não é tangente. Contradição! Assim, P e T coincidem, OT é perpendicular a m e a proposição fica demonstrada. ■

Capítulo 2

A Superfície Esférica e Seus Elementos

2.1 Notação e Terminologia

Definição 2.1 *A esfera de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que ou igual a r . Em outras palavras, é a reunião de todos os segmentos de reta de origem em O e comprimento r .*

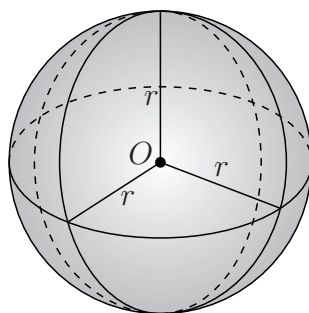


Figura 6

Para efeitos de cálculos consideramos a Terra como esférica, conforme figura abaixo e nela destacamos os pontos N e S chamados, respectivamente, de polos norte e sul. A

reta definida por N e S é chamada de eixo polar.

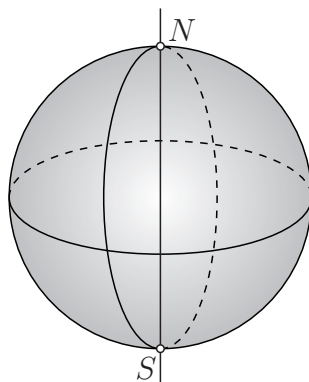


Figura 7

Definição 2.2 O *plano do equador* é o plano que passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao eixo polar. A interseção do plano do equador com a superfície esférica é chamada de *linha do Equador* ou, simplesmente, **Equador**.

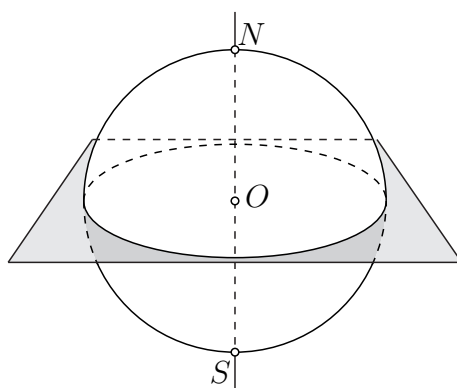


Figura 8

Definição 2.3 Um *hemisfério* é cada uma das duas regiões de uma superfície esférica determinadas por um plano que passa por sua origem. O plano do Equador divide a superfície terrestre em dois hemisférios: o hemisfério norte (que contém o polo norte) e

o hemisfério sul (que contém o polo sul).

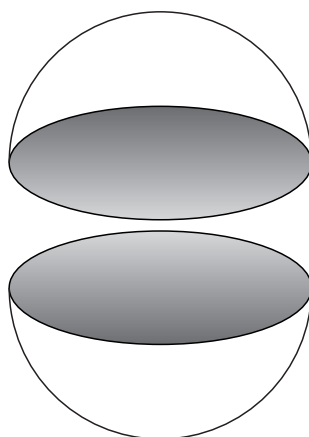


Figura 9

Definição 2.4 Chama-se de **paralelo** qualquer interseção da superfície terrestre com um plano paralelo ao plano do equador.

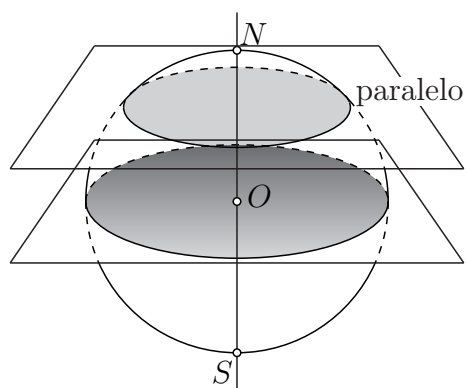


Figura 10

Definição 2.5 Chamamos de **meridiano** a qualquer semicircunferência determinada pelos polos norte e sul através da interseção da superfície terrestre com um plano que

contém o eixo polar.

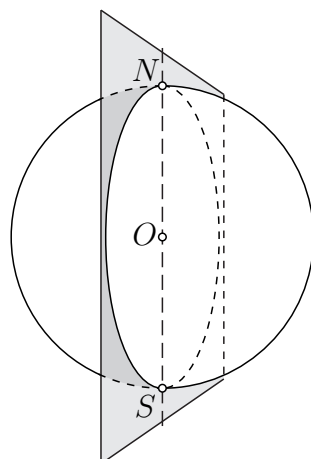


Figura 11

O globo terrestre serve para localizar um determinado ponto ou região da Terra. O aluno deverá ter acesso a um para efetuar esta localização.

Há várias razões práticas para se ultrapassar o estágio da localização ingênua, isto é, apontar o dedo para o local e dizer “é aqui”, sendo necessário criar um sistema de coordenadas para dar a localização precisa de um ponto no globo. Para isso utilizamos as chamadas coordenadas geográficas: **latitude** e **longitude**.

A latitude de um ponto P é a medida do arco de meridiano que passa por P situado entre o paralelo que contém P e o Equador. Ela é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0 a $90^\circ N$ (norte) ou de 0 a $90^\circ S$ (sul).

A longitude de um ponto P é a medida do arco de paralelo que passa por P situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich. É expressa em graus minutos e segundos e se mede de 0 a $180^\circ E$ (leste) ou 0 a $180^\circ W$ (oeste).

Na figura a seguir, temos que $\theta = E\hat{O}P$ é a latitude de P enquanto que $\varphi = G\hat{M}P$ é a longitude de P . Pontos sobre um mesmo paralelo possuem latitudes iguais e pontos sobre

um mesmo meridiano possuem longitudes iguais.

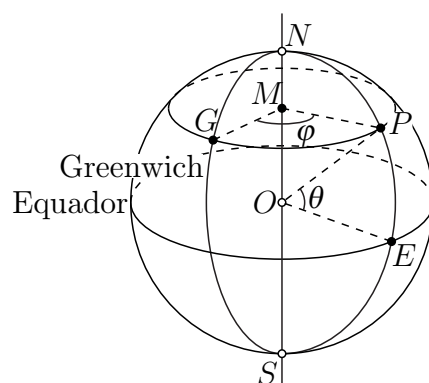


Figura 12

O GPS (Global Positioning System - Sistema de Posicionamento Global) é um equipamento que teve sua origem no departamento de defesa dos Estados Unidos. Sua função é a de identificar a localização de um aparelho chamado de receptor GPS. Os aparelhos receptores são capazes de dar a posição de qualquer ponto na superfície terrestre em função principalmente da longitude e latitude do ponto dado.

Se um plano passa pelo centro de uma esfera S ele a divide em dois hemisférios. A interseção desse plano com S é chamada de **grande círculo** ou **círculo máximo**. Neste caso, o raio de um grande círculo é igual ao raio r de S . Qualquer outro círculo contido em S cujo raio é menor do que r não é um grande círculo.

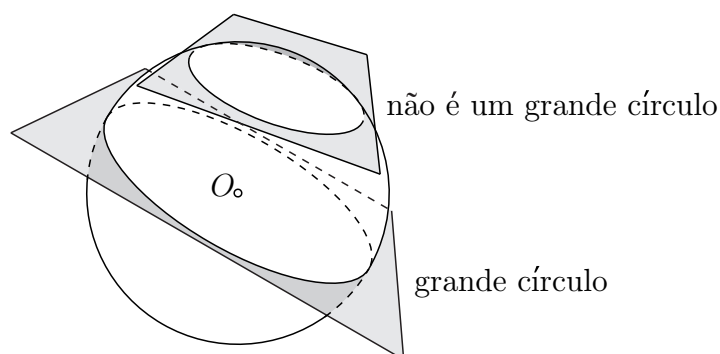


Figura 13

Definição 2.6 Um **diedro** é a reunião de dois semiplanos de mesma origem não contidos num mesmo plano. A origem comum aos dois semiplanos é a aresta do diedro e os

semiplanos são suas faces.

Sejam α e β dois semiplanos de mesma origem r . Para se obter a medida do ângulo formado por estes planos (o **ângulo diedro** ou **ângulo diédrico**) pode-se tomar um ponto P sobre a aresta r do diedro $\alpha r \beta$ e fazer dele a origem de duas semiretas perpendiculares à aresta r tais que uma esteja contida no plano α e a outra no plano β . Desta forma, tem-se que a medida do ângulo $\alpha \hat{r} \beta$ formado pelas semiretas é a medida do ângulo diedro.

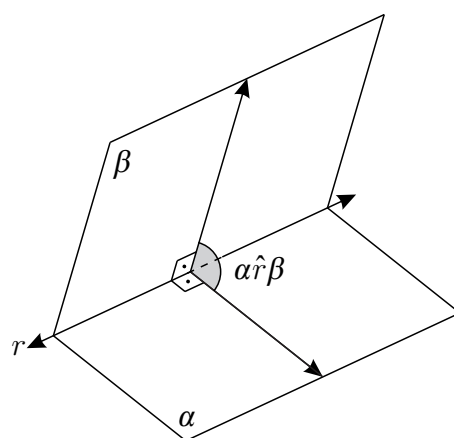


Figura 14

Definição 2.7 *Dadas três semirretas V_a , V_b e V_c de mesma origem V , não coplanares, consideremos os semi-espacos E_1 , E_2 e E_3 como segue.*

E_1 , com origem no plano (bc) e contendo V_a ;

E_2 , com origem no plano (ac) e contendo V_b ;

E_3 , com origem no plano (ab) e contendo V_c .

2.2 Determinação da Superfície Esférica

Teorema 2.8 *Existe um único ponto equidistante de quatro pontos A , B , C e D não coplanares.*

Demonstração:

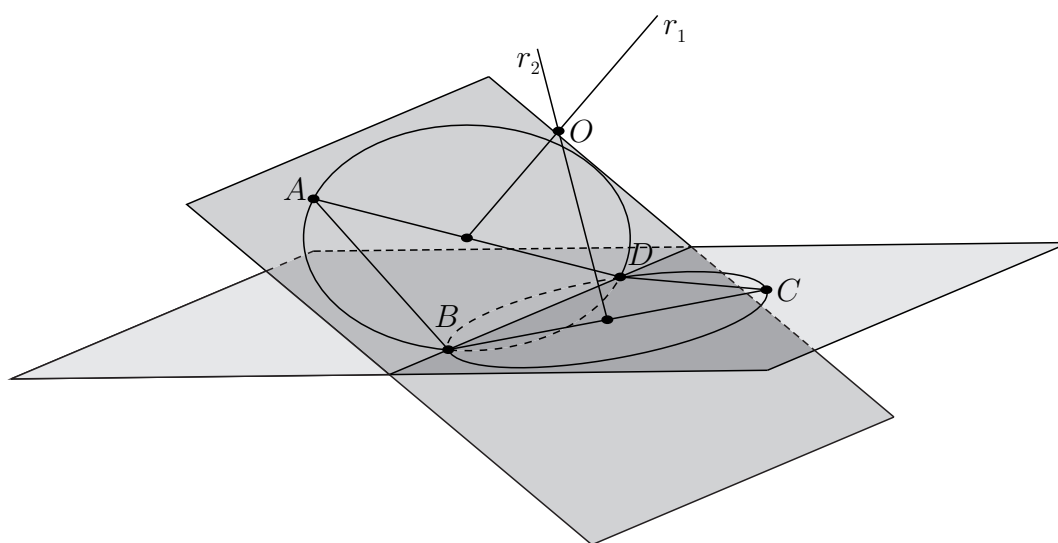


Figura 15

Sejam r_1 e r_2 retas conforme a figura abaixo, tais que r_1 é perpendicular ao plano que contém os pontos A , B e D e passa pelo circuncentro do triângulo ABD e r_2 é perpendicular ao plano que contém os pontos B , C , e D e passa pelo circuncentro do triângulo BCD . As retas r_1 e r_2 são coplanares, pois estão no plano mediador de \overline{BD} e não são paralelas pois A , B , C e D não são coplanares. Logo, r_1 e r_2 são concorrentes. Seja O o ponto de concorrência. Então,

$$O \in r_1 \Rightarrow \text{dist}(O, A) = \text{dist}(O, B) = \text{dist}(O, D),$$

$$O \in r_2 \Rightarrow \text{dist}(O, B) = \text{dist}(O, C) = \text{dist}(O, D),$$

ou seja, o ponto O é equidistante de A , B , C e D .

Seja O_1 um ponto equidistante de A , B , C e D . Neste caso,

$$\text{dist}(O_1, A) = \text{dist}(O_1, B) = \text{dist}(O_1, D) \Rightarrow O_1 \in r_1,$$

$$\text{dist}(O_1, B) = \text{dist}(O_1, C) = \text{dist}(O_1, D) \Rightarrow O_1 \in r_2.$$

Como $O_1 \in r_1$, $O_1 \in r_2$ e $r_1 \cap r_2 = \{O\}$ segue que $O_1 = O$. ■

Note que, em outras palavras, o Teorema 2.8 acima afirma que se A , B , C e D são quatro pontos não coplanares, então existe uma única superfície esférica que contém estes quatro pontos.

Definição 2.9 Quando dois grandes círculos de uma esfera se intersectam em um ponto P , formam entre si um **ângulo esférico**. A medida de um ângulo esférico é igual a medida do ângulo plano entre as retas tangentes em P aos arcos que formam o ângulo esférico. Deste modo, se estas retas possuem vetores diretores v e w , como na figura a seguir, o ângulo entre os vetores v e w é o ângulo esférico.

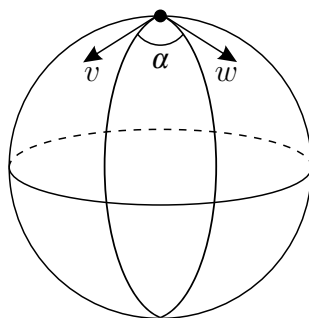


Figura 16

Segue da definição que a medida de um ângulo esférico α é menor do que ou igual a 180° .

Teorema 2.10 O volume de uma esfera de raio r é igual a $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Demonstração: Consideremos um cilindro reto de altura $2r$ cuja base é um círculo de raio r . Imaginemos que a esfera dada repouse sobre o plano horizontal, no qual está

contida a base do cilindro.

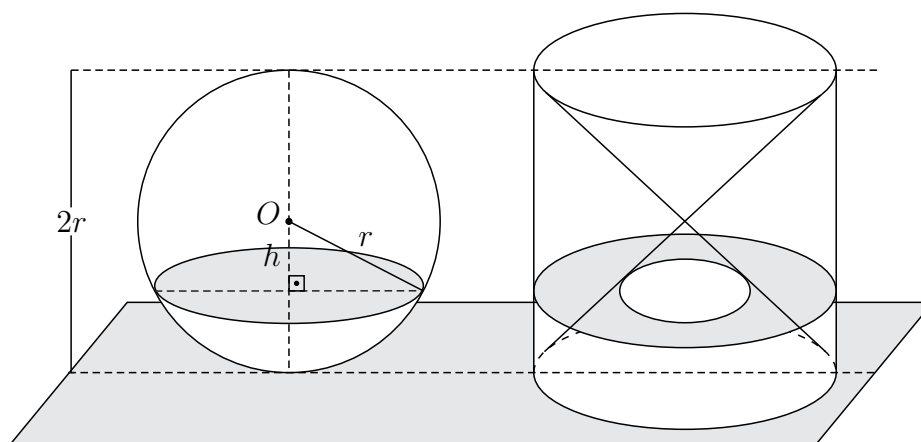


Figura 17

Cortando a esfera por um plano horizontal que dista h do centro, obtemos um círculo cuja área mede $\pi(r^2 - h^2)$. O mesmo plano determina (entre as paredes do cone e do cilindro à direita) um anel circular cuja área também mede $\pi(r^2 - h^2)$.

Com vértice no ponto médio do segmento que liga os centros dos círculos básicos (superior e inferior) do cilindro, construamos dois cones interiores ao cilindro, com bases naqueles dois círculos que limitam o cilindro. Consideremos o sólido T que é limitado exteriormente pela superfície lateral do cilindro e interiormente pelos dois cones.

O volume desse sólido T é igual a diferença entre o volume do cilindro ($2\pi r^3$) e o volume dos dois cones $\left(\frac{2\pi r^3}{3}\right)$, ou seja,

$$\text{vol}(T) = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Assim, o Teorema estará provado se provarmos que o volume da esfera é igual ao volume do sólido T . Para isso, em virtude do princípio de Cavalieri, é suficiente mostrar que a esfera S e o sólido T determinam $\Pi \cap S$ e $\Pi \cap T$ de igual área em cada plano horizontal Π . Dado o plano Π , seja h sua distância ao centro da esfera ou ao vértice comum dos dois cones. Então $\Pi \cap S$ é um círculo de raio $\sqrt{r^2 - h^2}$ enquanto $\Pi \cap T$ é um coroa circular cujo raio externo é igual a r e cujo raio interno é igual a h . Segue-se que a área de $\Pi \cap S$ vale $\pi(r^2 - h^2)$ e a área de $\Pi \cap T$ também e isso conclui a demonstração do teorema. ■

Definição 2.11 Uma *cunha esférica* é a interseção de uma esfera com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém o diâmetro da esfera.

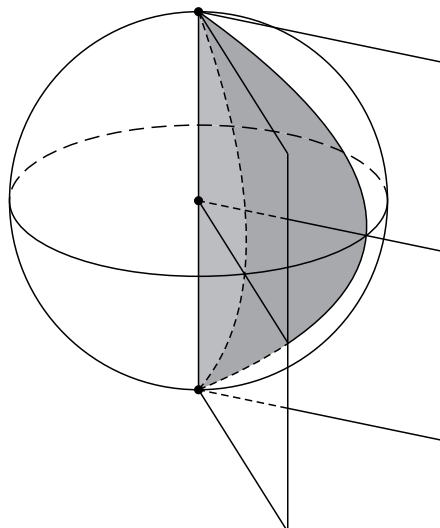


Figura 18

O volume da cunha esférica pode ser obtido por uma regra de três simples e o auxílio do teorema anterior. Sendo α a medida do ângulo diedral e r o raio da circunferência temos

(1) Com α em graus, o volume da cunha esférica é dado por $\frac{\pi r^3 \alpha}{270^\circ}$.

Demonstração:

$$\begin{array}{l} 360^\circ \rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} \\ \alpha \rightarrow \text{vol(cunha)} \end{array} \Rightarrow \text{vol(cunha)} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270^\circ}.$$

■

(2) Com α em radianos o volume da cunha esférica é dado por $\frac{2r^3 \alpha}{3}$.

Demonstração:

$$\begin{array}{l} 2\pi \rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} \\ \alpha \rightarrow \text{vol(cunha)} \end{array} \Rightarrow \text{vol(cunha)} = \frac{2r^3 \alpha}{3}.$$

■

Ao contrário do cilindro e do cone, a esfera não possui uma superfície desenvolvível, isto é, não é possível fazer cortes nela e depois aplicá-la sobre o plano sem dobrar nem es-

ticar. Por isso, para calcular a área de uma superfície esférica, devemos procurar métodos diferentes daquele utilizado nos casos do cilindro e do cone. Para tal precisaremos dos dois lemas a seguir.

Lema 2.12 *A área lateral do tronco de cone é igual ao produto da geratriz pelo comprimento da circunferência média.*

Demonstração: A “circunferência média” é a que tem raio

$$m = \frac{R+r}{2}. \quad (2.1)$$

A semelhança entre o menor e o maior triângulo retângulo na figura abaixo nos fornece

$$\frac{R}{r} = \frac{l+y}{y},$$

isto é,

$$Ry = rl + ry,$$

ou ainda,

$$rl = Ry - ry$$

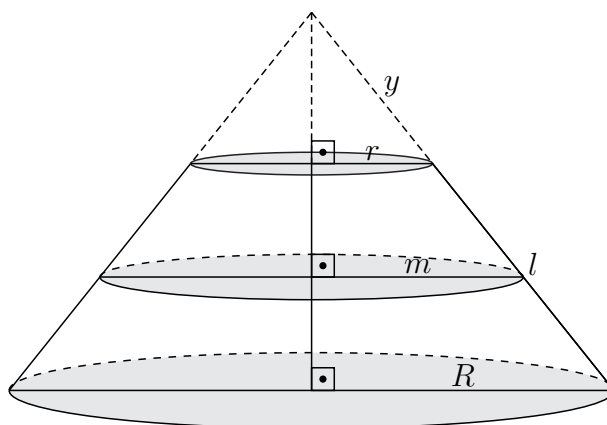


Figura 19

Somando Rl a ambos os membros desta igualdade e multiplicando o resultado por π , resulta

$$\begin{aligned} \pi rl + \pi Rl &= \pi Ry - \pi ry + \pi Rl \\ \pi l(R + r) &= \pi R(y + l) - \pi ry. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Mas, da relação (2.1) segue que $R + r = 2m$ e, portanto, substituindo este valor em (2.2) ficamos com

$$2\pi ml = \pi(R + r) - \pi ry = \text{área lateral do tronco de cone.}$$

■

O próximo lema fornece outra expressão para a área lateral do tronco de cone, a qual se presta melhor ao propósito de determinar a área da esfera.

Lema 2.13 *A área lateral do tronco de cone é igual ao produto $2\pi ah$ do comprimento $2\pi a$ da circunferência que tem como raio a apótema pela altura h do tronco de cone.*

Demonstração:

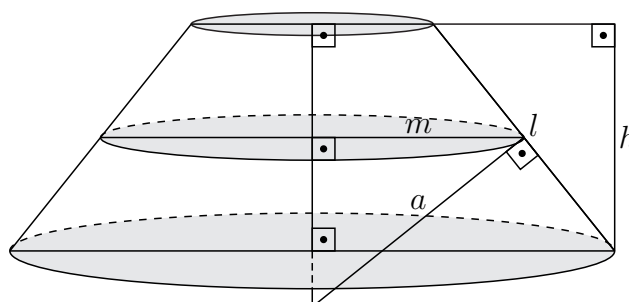


Figura 20

O triângulo retângulo de hipotenusa a e cateto m é semelhante ao triângulo retângulo de hipotenusa l e cateto h como indica a figura acima, pois a é perpendicular a l e m é perpendicular a h . Logo,

$$\frac{m}{a} = \frac{l}{h},$$

ou seja,

$$ml = ah. \quad (2.3)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (2.3) por 2π , temos

$$2\pi ml = 2\pi ah = \text{área lateral do tronco de cone.}$$

■

Teorema 2.14 *A área da superfície esférica de raio r é igual a $4\pi r^2$.*

Demonstração: A ideia é considerar a superfície esférica como obtida pela rotação de uma semicircunferência em torno do seu diâmetro. Inscreve-se nessa semicircunferência a metade de um polígono regular de $2n$ lados. Rotacionando essa poligonal em torno do diâmetro considerado, obtemos uma superfície formada por $n - 2$ troncos de cone mais um cone no topo e outro cone na base (ver Figura 21). Todos estes cones e troncos de cone têm geratrizes de mesmo comprimento l (medida do lado do polígono inscrito). A área desta superfície inscrita é uma aproximação para a área da esfera. Aumentando indefinidamente o número de lados do polígono regular inscrito obtém-se, no limite, a área da esfera.

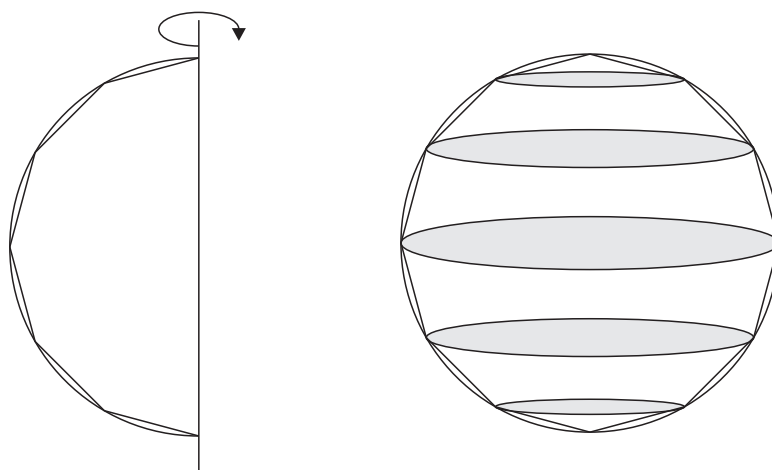


Figura 21

Pelo lema anterior e levando em conta que a soma das alturas dos cones e troncos de cone é $2r$, temos que a área lateral assim obtida é igual a $2\pi a \cdot 2r = 4\pi ar$, onde a é o apótema

do polígono. Quando o número n de lados cresce indefinidamente, a tende para r e a área calculada tende para a área da superfície esférica que é, portanto, igual a $4\pi r^2$. ■

Definição 2.15 *Um **fuso** é a interseção de uma superfície esférica com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém o diâmetro da esfera.*

Equivalentemente, um fuso é uma região da esfera compreendida entre dois círculos máximos. Esses círculos têm dois pontos (diametralmente opostos) em comum chamados os vértices do fuso. O ângulo do fuso é, por definição, o ângulo α entre os dois círculos máximos que constituem os lados do fuso.

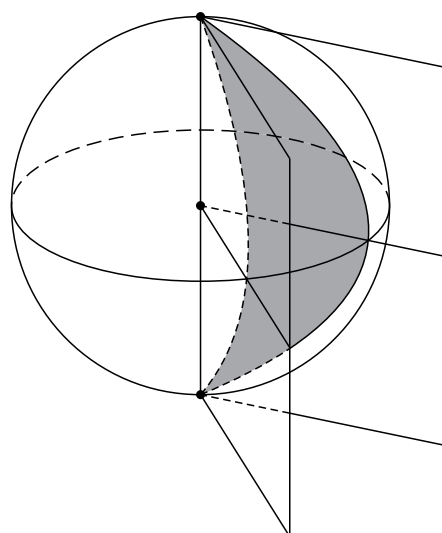


Figura 22

A área do fuso pode ser obtido por uma regra de três simples e o auxílio do teorema anterior. Sendo α a medida do ângulo diedral e r o raio da circunferência temos

(1) Com α em graus, a área do fuso é dada por $\frac{\pi\alpha r^2}{90^\circ}$.

Demonstração:

$$\begin{array}{l} 360^\circ \rightarrow 4\pi r^2 \\ \alpha \rightarrow A(\text{fuso}) \end{array} \Rightarrow A(\text{fuso}) = \frac{\pi\alpha r^2}{90^\circ}.$$

■

(2) Com α em radianos a área do fuso é dada por $2\alpha r^2$.

Demonstração:

$$\begin{array}{l} 2\pi \rightarrow 4\pi r^2 \\ \alpha \rightarrow A(\text{fuso}) \end{array} \Rightarrow A(\text{fuso}) = 2\alpha r^2.$$

■

Definição 2.16 *Um **triângulo esférico** é uma porção da superfície esférica delimitada pelos arcos de três círculos máximos que se interceptam dois a dois.*

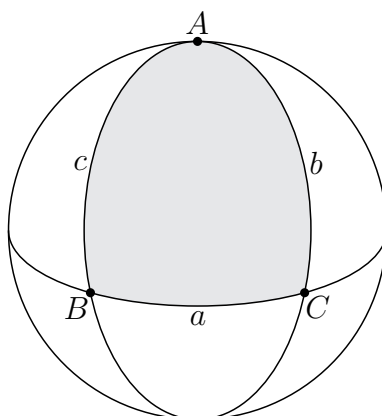


Figura 23

Os arcos acima são chamados de lados e os vértices dos três ângulos esféricos também são os vértices do triângulo esférico. Designam-se usualmente os vértices por A , B e C e os lados opostos correspondentes por a , b e c .

Ligando-se os vértices A , B e C de um triângulo esférico ao centro da esfera, forma-se o triedro $O-ABC$ (Figura 24 abaixo). Os lados a , b e c do triângulo esférico têm assim a mesma medida das faces BOC , COA e AOB daquele triedro. Os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} do triângulo esférico são medidos pelos ângulos diedros formados pelos planos que contém as

faces do triedro.

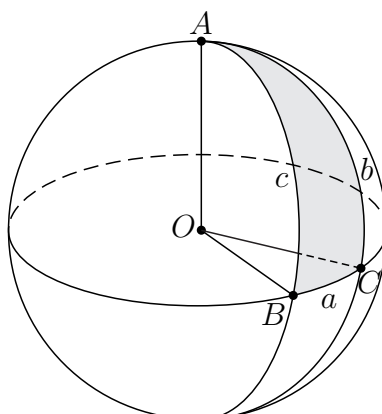


Figura 24

O ângulo \hat{A} é medido pelo ângulo diedro $B-OA-C$, o ângulo \hat{B} é medido pelo ângulo diedro $A-OB-C$ e o ângulo \hat{C} é medido pelo ângulo diedro $A-OC-B$.

No presente trabalho, os triângulos esféricos a serem considerados serão, apenas, aqueles cujo lado e ângulo sejam menores que 180° .

Para tais triângulos valem os resultados que seguem.

Teorema 2.17 *A soma das medidas de quaisquer dois lados de um triângulo esférico é maior do que a medida do terceiro lado.*

Demonstração: O teorema é obviamente verdadeiro se os três ângulos das faces são iguais. Suponha que \widehat{ac} seja o maior do triedro $V(a, b, c)$. Vamos porvar que $\widehat{ac} < \widehat{ab} + \widehat{bc}$.

Para isto, construamos em $a\hat{V}c$ um ângulo $b'\hat{V}c$ tal que

$$\widehat{b'c} = \widehat{bc}. \tag{2.4}$$

Tomando-se um ponto B em b e um ponto B' em b' tais que $\overline{VB} = \overline{VB'}$ e considerando uma seção ABC como indicado na figura abaixo temos

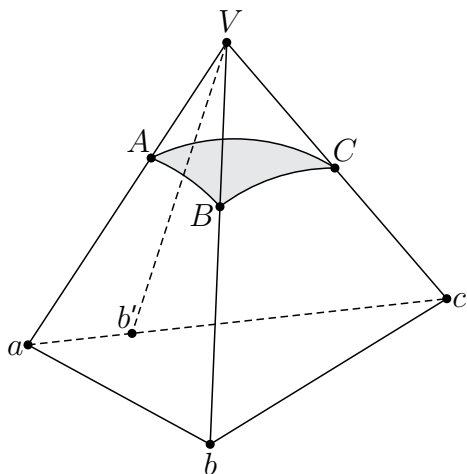


Figura 25

(i) Da congruência dos triângulos $B'VC$ e BVC vem que

$$\overline{B'C} = \overline{BC}. \quad (2.5)$$

No triângulo ABC , pela desigualdade triangular temos que

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC} \quad (2.6)$$

e, como $B \in \overline{AC}$ temos que

$$\overline{AB'} + \overline{B'C} = \overline{AC}. \quad (2.7)$$

De (2.5) e (2.6) segue que

$$\overline{AB'} + \overline{B'C} < \overline{AB} + \overline{BC},$$

Mas, uma vez que de $\overline{B'C} = \overline{BC}$, temos que

$$\overline{AB'} + \overline{BC} < \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB'} < \overline{AB}.$$

Decorre então que

$$\widehat{ab'} < \widehat{ab}. \quad (2.8)$$

De (2.4) e (2.8) temos que

$$\widehat{ab'} + \widehat{b'c} < \widehat{ab} + \widehat{bc}.$$

Mas $\widehat{ac} = \widehat{ab'} + \widehat{b'c}$, o que conclui nossa demonstração. ■

Teorema 2.18 *A soma das medidas dos três lados de um triângulo esférico é menor que 360° .*

Demonstração: Sendo \widehat{ab} , \widehat{ac} e \widehat{bc} as medidas das faces de um triedro $V(a, b, c)$, provemos que

$$\widehat{ab} + \widehat{ac} + \widehat{bc} < 360^\circ.$$

Com efeito, considerando semirreta VA' oposta a VA , observemos que $V(a', b, c)$ e

$$\widehat{bc} < \widehat{ab} + \widehat{ac} \tag{2.9}$$

de acordo com a figura abaixo.

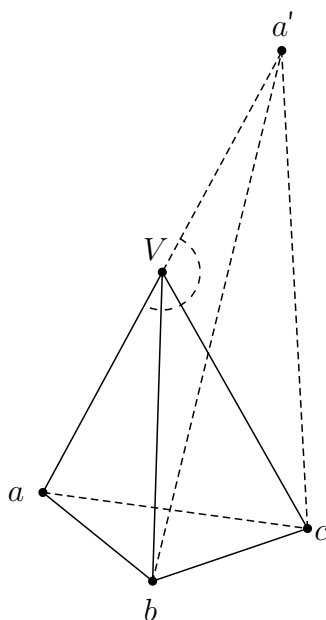


Figura 26

Os ângulos \widehat{ab} e $\widehat{a'b}$ são adjacentes suplementares, o mesmo ocorrendo com \widehat{ac} e $\widehat{a'c}$. Então,

$$\widehat{ab} + \widehat{ac} + \widehat{a'b} + \widehat{a'c} = 360^\circ$$

e, de (2.9) segue que

$$\widehat{ab} + \widehat{ac} + \widehat{bc} < 360^\circ.$$

■

Sejam A , B e C os vértices de um triângulo esférico; construam-se três círculos máximos tendo tais vértices como pólos. Designem-se por A' a interseção dos círculos máximos que possuem B e C como pólos e situados no mesmo hemisfério ou lado de BC , por B' a interseção dos círculos máximos que possuem A e C como pólos e situados no mesmo hemisfério ou lado de AC e por C' a interseção dos círculos máximos que possuem A e B como pólos e situados no mesmo hemisfério ou lado de AB . O triângulo esférico $A'B'C'$ é chamado de **triângulo polar** ou **triângulo suplementar** de ABC . Designaremos por a' , b' e c' os lados do triângulo polar (ver figura baixo).

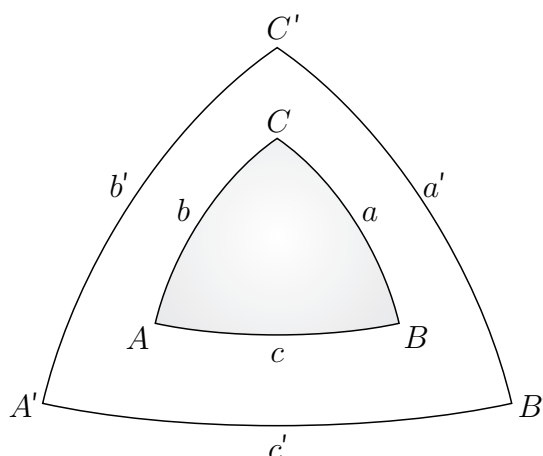


Figura 27

O teoremas fundamentais relativos aos triângulos polares são:

Teorema 2.19 *Se $A'B'C'$ é o triângulo polar de ABC , então ABC é o triângulo polar de $A'B'C'$.*

Demonstração: Uma vez que A é o pólo de $\widehat{B'C'}$ e C o pólo de \widehat{AB} , B' está a distância de um quadrante (90°) de \widehat{AC} . Então B' é o polo de \widehat{AC} . De modo similar verifica-se que A' é o pólo de \widehat{BC} e C' é o pólo de \widehat{AB} . Então o triângulo ABC é um dos oito triângulos formados pelos círculos máximos cujos pólos são A' , B' e C' . Para que ABC seja o triângulo polar de $A'B'C'$ é necessário que A e A' estejam do mesmo lado que $B'C'$,

que B e B' estejam do mesmo lado que $A'C'$ e que C e C' estejam do mesmo lado que $A'B'$. Por definição, B e B' estão do mesmo lado que AC e D está a menos de 180° que qualquer ponto sobre AC . Então, uma vez que B' (pólo de AC') está a 90° de qualquer ponto sobre $A'C'$, B e B' estão do mesmo lado que $A'C'$. Analogamente, verifica-se que A e A' estão do mesmo lado que $B'C'$ e que C e C' estão do mesmo lado que $A'B'$. ■

Teorema 2.20 *Seja $A'B'C'$ o triângulo polar de ABC . Então,*

$$\begin{aligned}\hat{A} &= 180^\circ - a' & \hat{B} &= 180^\circ - b' & \hat{C} &= 180^\circ - c' \\ \hat{A}' &= 180^\circ - a & \hat{B}' &= 180^\circ - b & \hat{C}' &= 180^\circ - c\end{aligned}$$

Demonstração: Para os triângulos polares ABC e $A'B'C'$ (Figura 28) provaremos que $\hat{A}' = 180^\circ - a$. Prolonguem-se $\widehat{A'B'}$ até que encontrem \widehat{BC} em D e E , respectivamente. Então, \widehat{DE} é a medida do ângulo A' . Agora,

$$BE + DC = BC + DE = a + A'$$

e, uma vez que B é o pólo de $A'E'$ e C o de $A'D$, $BE = DC = 90^\circ$. Assim, $a = \hat{A}' + 180^\circ$ e $\hat{A}' = 180^\circ - a$ e, analogamente, demonstra-se as demais expressões. ■

2.3 Trigonometria Esférica

A trigonometria esférica estabelece relações convenientes entre os seis elementos de um triângulo esférico (3 lados e 3 ângulos) tornando possível o cálculo de três destes elementos quando forem conhecidos os outros três.

Definição 2.21 *Um triângulo quadrantal ou esférico retângulo é aquele que tem um lado igual 90° .*

Teorema 2.22 (Lei dos Cossenos para Triângulos Esféricos) *O cosseno de um lado é igual ao produto do cosseno dos outros dois lados mais o produto dos senos dos mesmos lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.*

Demonstração: Consideremos o triângulo esférico na figura abaixo.

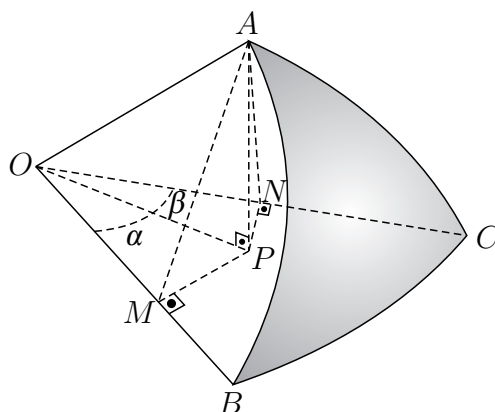


Figura 28

Do triângulo OAN temos que

$$\cos b = \frac{ON}{OA} \quad \text{e} \quad \text{sen } b = \frac{AN}{OA}. \quad (2.10)$$

Do mesmo modo, considerando o triângulo OAM cuja hipotenusa é OA (que é o raio da esfera) obtemos

$$\cos c = \frac{OM}{OA} \quad \text{e} \quad \text{sen } c = \frac{AM}{OA}. \quad (2.11)$$

Observe que os triângulos ONP e OMP possuem OP como hipotenusa. Considerando estes triângulos e escrevendo $M\hat{O}P = \alpha$ e $N\hat{O}P = \beta$ temos que $\alpha + \beta = a$ e

$$\cos \alpha = \frac{OM}{OP}, \quad (2.12)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{MP}{OP}, \quad (2.13)$$

$$\cos \beta = \frac{ON}{OP}, \quad (2.14)$$

$$\text{sen } \beta = \frac{NP}{OP}. \quad (2.15)$$

Podemos então escrever

$$OM = OP \cos \alpha. \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) na expressão (2.11) acima para $\cos c$, temos

$$\begin{aligned} OM &= OA \cos c = OP \cos \alpha = OP \cos (a - \beta) \\ &= OP (\cos a \cos \beta + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \beta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} OA \cos c &= OP \left(\frac{ON}{OP} \cos a + \frac{NP}{OP} \operatorname{sen} a \right) \\ &= ON \cos a + NP \operatorname{sen} a \\ &= OA \cos a \cos b + NP \operatorname{sen} a. \end{aligned}$$

Precisamos agora encontrar uma expressão para NP . Usando o triângulo ANP (retângulo em P e com hipotenusa AN), temos:

$$NP = AN \cos(\hat{N} = AN \cos sC = OA \operatorname{sen} b \cos C$$

onde \hat{N} é o ângulo, com vértice em N , entre os segmentos AN e NP . Mas este ângulo é igual ao ângulo C do triângulo esférico, ou seja, o ângulo entre os planos OAC e OBC . Substituindo na expressão anterior temos então:

$$\begin{aligned} OA \cos c &= AO \cos b \cos a + NP \operatorname{sen} a \\ &= OA \cos b \cos a + OA \operatorname{sen} b \cos C \operatorname{sen} a. \end{aligned}$$

Resulta finalmente em

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C.$$

Esta fórmula também é conhecida como fórmula dos 4 elementos, em que os 3 lados do triângulo esférico são associados a um de seus ângulos. Note que o lado cujo co-seno aparece no lado esquerdo é aquele oposto ao ângulo que entra na fórmula. Analogamente,

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.23 (Fórmula dos Quatro Elementos - Ângulos) *Em todo triângulo esférico de lados a, b e c e ângulos internos \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} valem as seguintes relações:*

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos a;$$

$$\cos \hat{B} = -\cos \hat{A} \cos \hat{C} + \sin \hat{A} \sin \hat{C} \cos b;$$

$$\cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \sin \hat{B} \cos c.$$

Demonstração: Considere o triângulo polar $A'B'C'$ de ABC . Pelo Teorema 2.20 temos que

$$a' = 180^\circ - \hat{A}, \quad b' = 180^\circ - \hat{B}, \quad c' = 180^\circ - \hat{C}.$$

Aplicando a Lei dos Cossenos para triângulos esféricos ao triângulo $A'B'C'$, obtemos que

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \hat{A}'.$$

Assim,

$$\cos(180^\circ - \hat{A}) = \cos(180^\circ - \hat{B}) \cos(180^\circ - \hat{C}) + \sin(180^\circ - \hat{B}) \sin(180^\circ - \hat{C}) \cos(a + 180^\circ)$$

e, portanto,

$$-\cos \hat{A} = (-\cos \hat{B})(-\cos \hat{C}) + \sin \hat{B} \sin \hat{C} (-\cos a),$$

donde

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos a.$$

As demais fórmulas seguem de modo análogo. ■

Teorema 2.24 (Lei dos Senos para Triângulos Esféricos) *Em um triângulo esférico de lados a, b, c e ângulos internos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, vale a seguinte relação:*

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}}.$$

Demonstração: Seja ABC um triângulo esférico qualquer como na figura abaixo.

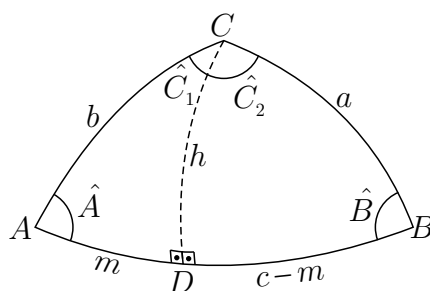


Figura 29

Pelo ponto C foi traçado um círculo máximo que é perpendicular a \widehat{AB} e encontra este arco em D . Seja $\widehat{CD} = h$. No triângulo ACD , levando em conta que $\widehat{D} = 90^\circ$ segue da Lei dos Cossenos que

$$\text{sen } h = \text{sen } b \text{sen } \hat{A}.$$

No triângulo retângulo BCD ,

$$\text{sen } h = \text{sen } a \text{sen } \hat{B}.$$

Das duas igualdades acima temos que

$$\text{sen } a \text{sen } \hat{B} = \text{sen } b \text{sen } \hat{A},$$

ou seja,

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } \hat{B}}.$$

De modo análogo, fazendo-se passar um círculo máximo por B , perpendicular a \widehat{AC} , obtemos

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } \hat{C}}$$

e o resultado segue. ■

Corolário 2.25 *Dois lados de um triângulo esférico são iguais se, e somente se, os ângulos opostos aos lados em questão são iguais.*

Demonstração: Sejam a , b e c os lados de um triângulo esférico opostos, respectivamente, aos ângulos internos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} deste triângulo. Suponha que $a = b$. Então, pela lei

dos senos para triângulos esféricos, temos que

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \hat{B}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \operatorname{sen} \hat{B}. \quad (2.17)$$

De $\cos a = \cos b$ segue da lei dos cossenos para triângulos esféricos temos que

$$\begin{aligned} \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \hat{A} &= \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos \hat{B} \\ &= \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \hat{B} \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \hat{A} = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \hat{B} \Leftrightarrow \cos \hat{A} = \cos \hat{B}. \quad (2.18)$$

De (2.17) e (2.18) segue o resultado. ■

Definição 2.26 Dado um ponto qualquer x em um esfera, seu **antípoda** é o único ponto x' tal que o segmento de reta xx' contém o centro da esfera.

Definição 2.27 Dado um fuso φ na esfera, o conjunto formado pelos antípodas dos pontos de φ é um fuso φ' chamado de **fuso antípoda** de φ . A reunião $\Phi = \varphi \cup \varphi'$ é chamada de **fuso completo**.

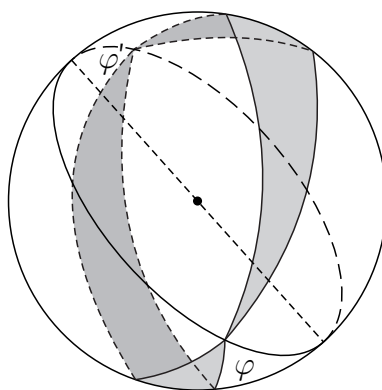


Figura 30

Teorema 2.28 Seja Φ um fuso completo, cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera a decompõe em dois hemisférios H e H' . As partes R e

R' do fuso contidas em cada um desses hemisférios tem a mesma área $2\alpha r^2$, onde α é o ângulo do fuso e r o raio da esfera.

Demonstração: Basta mostrar que R e R' têm a mesma área porque

$$\begin{aligned} \text{área de } \Phi &= (\text{área de } R) + (\text{área de } R') \\ &= 2(\text{área de } R) = 4\alpha r^2. \end{aligned}$$

Ora, R e R' são figuras antípodas, isto é, cada ponto de R' é o antípoda de algum ponto de R e vice-versa. Mais precisamente, $R = s \cup t$ é a reunião de dois triângulos esféricos com um vértice em comum e $R' = s' \cup t'$ é a reunião dos triângulos antípodas de s e t . Basta então mostrar que um triângulo esférico e seu antípoda possuem a mesma área. Consideremos, sem perda de generalidade os triângulos t e t' . Observamos que t e t' têm ângulos iguais e lados congruentes dois a dois, mas t e t' não são congruentes pois não possível, por um movimento rígido, mover um deles no espaço até sobrepor-se exatamente sobre o outro, a menos que t e, conseqüentemente t' , seja isósceles. As figuras abaixo mostram duas tentativas de sobrepor t e t' . Numa delas faz-se coincidir os três vértices e na outra faz-se coincidir um ângulo de t com outro ângulo igual de t' .

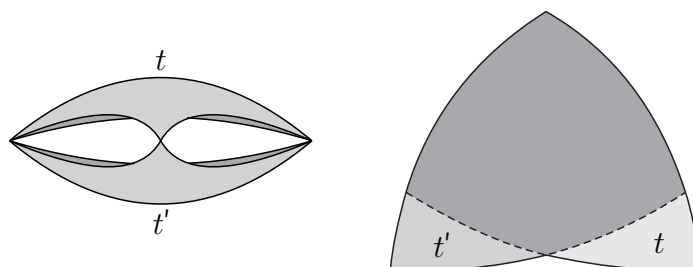


Figura 31

Na segunda tentativa, observamos que se t e, portanto, t' for isósceles então t é congruente ao seu antípoda t' . Logo, estes dois triângulos esféricos têm a mesma área. No caso geral procede-se do modo a seguir. Os vértices A , B e C de t determinam um pequeno círculo e, portanto, uma calota esférica que contém o triângulo t . Seja P o pólo dessa calota (P é o ponto de interseção da calota com a perpendicular do plano ABC que passa pelo centro do círculo). Os arcos de círculo máximo PA , PB e PC têm o mesmo comprimento. Logo,

os triângulos esféricos PAB , PBC e PAC são isósceles. Se o pólo P estiver no interior do triângulo $t = ABC$, teremos

$$\text{área de } t = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PBC) + (\text{área de } PAC).$$

Uma construção absolutamente análoga pode ser efetuada com o triângulo antípoda $t' = A'B'C'$, decompondo-o como reunião justaposta dos triângulos isósceles $P'A'B'$, $P'B'C'$ e $P'A'C'$, cada um deles antípoda do seu correspondente em t . Segue-se que

$$\text{área de } t = \text{área de } t'.$$

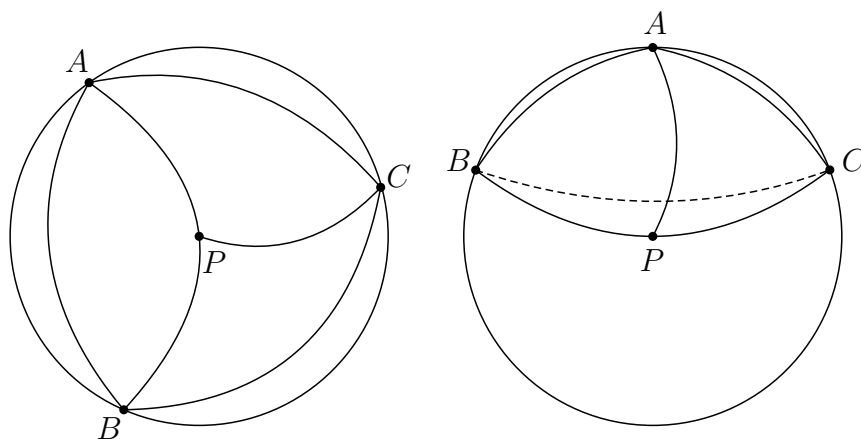


Figura 32

A figura acima mostra que o pólo do triângulo ABC pode estar dentro ou fora de ABC . Pode ocorrer, entretanto, que o pólo P esteja situado fora do triângulo t . Neste caso,

$$\text{área de } t = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PAC) - (\text{área de } PBC).$$

Uma situação análoga ocorre com t' e concluímos, do mesmo modo, que t e t' possuem a mesma área. ■

Teorema 2.29 *Se α , β e γ são os ângulos internos de um triângulo esférico medidos em radianos então*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{St}{r^2},$$

onde St é a área do triângulo esférico e r o raio da esfera que contém o triângulo.

Demonstração: Consideremos um hemisfério H que contenha o triângulo dado. prolongando nos dois sentidos os lados que formam o ângulo α até encontrarem o bordo do hemisfério H , obtemos uma região $R_\alpha \subset H$ cuja área mede $2\alpha r^2$ de acordo com o teorema anterior.

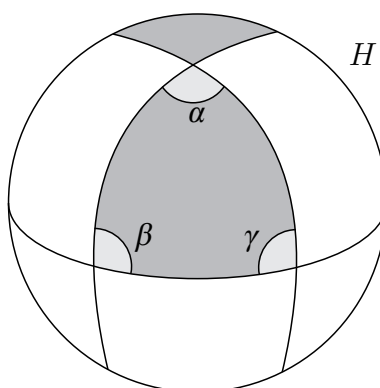


Figura 33

A parte hachurada representa a região R_α . Fazendo o mesmo com os ângulos β e γ obtemos regiões R_β e R_γ , cujas áreas medem, respectivamente, $2\beta r^2$ e $2\gamma r^2$. A reunião dessas três regiões é o hemisfério H , com o triângulo dado sendo contado três vezes. Segue-se que a soma das áreas das regiões R_α , R_β e R_γ é igual a área do hemisfério H mais duas vezes a área St do triângulo esférico dado, ou seja,

$$2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2St.$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por $2r^2$, obtemos

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{St}{r^2},$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 2.30 *A soma dos três ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° e menor que 540° .*

Demonstração: Sejam α , β e γ os ângulos internos, em radianos, de um triângulo esférico contido em uma circunferência de raio r . Do teorema anterior segue que

$$St = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) r^2.$$

Como $St > 0$, temos que $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Utilizando a notação usual para os ângulos internos em graus temos que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ. \quad (2.19)$$

Da definição de triedro, cada diedro é menor que 180° e como cada ângulo do triângulo é medido pelos diedros do triedro, temos

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} < 180^\circ \\ \hat{B} < 180^\circ \\ \hat{C} < 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^\circ. \quad (2.20)$$

De (2.19) e (2.20) segue o resultado. ■

Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, Paulo Ventura. **Geometria Diferencial**. Coleção Matemática Universitária. 2ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2008
- [2] AYRES JR, FRANK. **Trigonometria Plana e Esférica**. Coleção Schaum. São Paulo: McGraw-Hill, 1954.
- [3] BARROS, Abdênago e ANDRADE, Plácido. **Introdução à Geometria Projetiva**. Textos Universitários. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2010.
- [4] DOLCE, Osvaldo e POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial - Posição e Métrica**. São Paulo: Editora Atual, 1977.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**. Coleção do Professor de Matemática. 4ª Edição. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. Coleção do Professor de Matemática. 5ª Edição. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2008.
- [7] TAGLIARO, Antônio. **Trigonometria Plana e Esférica**. 6ª edição. São Paulo: Editora FTD, 1966.