UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

IRLÃ SILVA SANTOS

MÁXIMOS E MÍNIMOS COM USO DE FERRAMENTAS DO ENSINO MÉDIO E NOÇÕES DE CÁLCULO DIFERENCIAL

JUAZEIRO DO NORTE
2017

IRLÃ SILVA SANTOS

MÁXIMOS E MÍNIMOS COM USO DE FERRAMENTAS DO ENSINO MÉDIO E NOÇÕES DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora:
Profa. Dra. Maria Silvana A. Costa.

JUAZEIRO DO NORTE
2017

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Máximos e Mínimos com Uso de Ferramentas do Ensino Médio e Noções de Cálculo Diferencial

Irlã Silva Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 21 de junho de 2017.

Banca Examinadora

Maria Silvana Alcântara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa - UFCA

Orientadora

Plácido Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade -UFCA

Paulo César Cavalcante de Oliveira

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira – URCA

Dedico este trabalho a minha esposa, aos meus filhos, a minha mãe e, especialmente, ao meu pai (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder saúde e disposição necessárias para concluir este trabalho.

A meus amigos da UFCA pela ajuda e companheirismo.

A professora Silvana, por todo apoio, incentivo e orientação.

A todos os professores da URCA e da UFCA que contribuíram direta e/ou indiretamente para a conclusão deste curso e deste trabalho.

Finalmente, a CAPES pelo suporte financeiro e ao PROFMAT pelo aprimoramento profissional.

"A matemática compara os mais diversos fenômenos e descobre as analogias secretas que os unem".

Joseph Fourier (1768-1830)

RESUMO

No Ensino Médio, os problemas vistos sobre o estudo máximos e mínimos de funções, são restritos ao tópico de funções polinomiais de 2º grau, ou seja, à funções quadráticas. Como sabemos tais valores ocorrem sempre nas coordenadas do ponto que representa o vértice da parábola. A nossa intenção é apresentar outras ferramentas que permitam estudar outros tipos de funções e resolver alguns problemas interessantes que surgem no dia-a-dia. Assim apresentaremos noções de Cálculo Diferencial, uma ferramenta poderosa nesse contexto. Hoje são muitas as áreas do conhecimento que se utilizam de tais ferramentas, como exemplo podemos citar, a Economia, a Química, a Biologia e muitas outras. Ao mesmo tempo que tentaremos relembrar algumas ferramentas da matemática básica estudada no Ensino Médio, acrescentaremos algumas ferramentas elementares do Cálculo Diferencial, as quais eliminam certas dificuldades encontradas em alguns problemas. Apresentaremos dois temas principais, referentes ao Cálculo Diferencial, Taxas de variação: média e instantânea, que nos leva ao conceito de Derivada de uma função, e um importante teorema do Cálculo, conhecido como Teorema do Valor Médio, o qual estabelece em algum momento uma relação entre taxas de variação média e instantânea. Concluiremos nosso trabalho com algumas aplicações desses temas na resolução de problemas sobre máximos e mínimos de funções reais de uma variável. Tais problemas são conhecidos como problemas de otimização. Além disso, nos restringiremos aos estudo de funções polinomiais e/ou racionais de modo que este trabalho torne-se acessível a estudantes do Ensino Médio.

Palavras-chave: Funções. Máximos. Mínimos. Taxas de variação. Cálculo Diferencial.

ABSTRACT

In High School, the problems seen on the study of maximum and minimum functions, are restricted to the topic of polynomial functions of 2 degree, that is, to quadratic functions. As we know such values always occur in the coordinates of the point representing the vertex of the parabola. Our intention is to present other tools that allow us to study other types of functions and solve some interesting problems that arise in everyday life. Thus we will introduce notions of Differential Calculus, a powerful tool in this context. Today there are many areas of knowledge that use such tools, such as Economics, Chemistry, Biology and many others. While we will try to recall some of the tools of basic mathematics studied in High School, we will add some elementary tools of Differential Calculus, which eliminate certain difficulties encountered in some problems. We present two main themes, referring the Differential Calculus, Average and instantaneous rates of change, which leads us to the concept of a Derivative of a function, and an important theorem of the Calculus, known as the Average Value Theorem, which establishes at some point a relation Between average and instantaneous rates of change. We will conclude our work with some applications of these themes in solving problems on maxima and minima of real functions of a variable. Such problems are known as optimization problems. In addition, we will restrict ourselves to the study of polynomial and / or rational functions so that this work becomes accessible to students of the High School.

Keywords: Functions. Maxima. Minima. Rates of change. Differential Calculus.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O tema principal abordado neste trabalho, máximos e mínimos, faz parte do currículo da disciplina de Matemática no Ensino Básico desde o 9º ano do Ensino Fundamental, logo após o primeiro contanto dos estudantes com os conceitos de equações do 2° grau e funções. Uma das grandes dificuldades que encontramos dentro da sala de aula são as frequentes perguntas sobre quando e onde usar os conceitos matemáticos presentes no currículo. Pesando nisso, este trabalho procura responder algumas dessas questões, por meio da resolução de situações interessantes no nosso dia-a-dia. Sempre que conveniente procuramos acrescentar uma ilustração para enriquecer o texto e ajudar na visualização da solução obtida.

No primeiro capítulo são apresentados alguns problemas que podem ser resolvidos utilizando apenas conhecimentos adquiridos no Ensino Básico. Discutimos alguns problemas interessantes sobre funções quadráticas e alguns casos especiais sobre funções racionais que podem ser resolvidos de um modo bem elegante, usando a desigualdade das médias aritméticas e geométricas entre números reais positivos.

Nos três capítulos seguintes apresentamos resultados que nos permitem expandir as situações apresentadas anteriormente, eliminado as barreiras encontradas no Ensino Médio.

No último capítulo apresentamos várias situações que, para serem solucionadas, exigem o conhecimento do Cálculo Diferencial. Contudo nosso maior interesse é levar este trabalho a estudantes do Ensino Básico e mostrar a importância da Matemática na vida humana, através dos problemas propostos utilizando as ideias aqui apresentadas.

2 VALORES EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO

É comum, em diversas situações do dia-a-dia, nos depararmos com situações que, quando modeladas pela Matemática, se traduzem em problemas que podem ser resolvidos quando determinamos os valores extremos de uma função, máximo ou mínimo. Vejamos um exemplo.

Quando tossimos, a traqueia se contrai e aumenta a velocidade do ar que passa. Isso levanta questões sobre quanto ela deveria se contrair para maximizar a velocidade e se ela realmente se contrai tanto assim quando tossimos. Considerando algumas hipóteses razoáveis sobre a elasticidade da parede da traqueia e de como a velocidade do ar próximo as paredes é reduzida pelo atrito, é possível estimar que a velocidade média v do fluxo de ar pode ser modelada pela equação $v = c(r_0 - r)r^2$, em m/s, e $r_0/2 \leq r \leq r_0$, onde r_0 é o raio, em centímetros, da traqueia em repouso e c é uma constante positiva cujo valor depende, em parte, do comprimento da traqueia. Vamos mostrar mais adiante que v é máxima quando $r = 2/3r_0$, ou seja, quando a traqueia está cerca de 33% contraída. O impressionante é que imagens de raio X confirmam que a traqueia se contrai assim durante a tosse.

Note que, $v = v(r) = -cr^3 + cr_o r^2$ é uma função em r. São problemas desse tipo que iremos abordar.

2.1 Máximos e mínimos

Como motivação para a definição de máximos e mínimos observemos os gráficos abaixo e analisemos alguns de seus pontos.

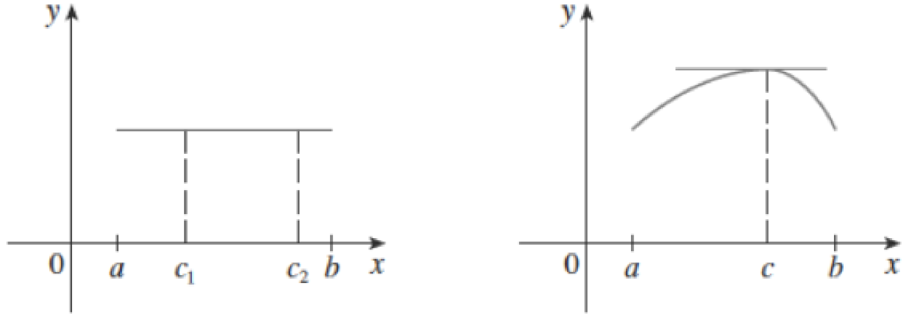

Figura 1: Máximos e Mínimos (a).
Fonte: [14]

O primeiro gráfico representa uma função constante, e seu gráfico não apresenta pontos mais alto ou mais baixos no intervalo $[a, b]$ em relação ao eixo x (pontos cujos valores assumidos pela função são maiores ou menores do que os valores assumidos nos demais).

No segundo gráfico, no ponto de abscissa c está acima dos demais pontos $(x, f(x))$, no intervalo $[a, b]$. Assim, c será chamado de ponto de máximo local e $f(c)$ de valor de máximo local.

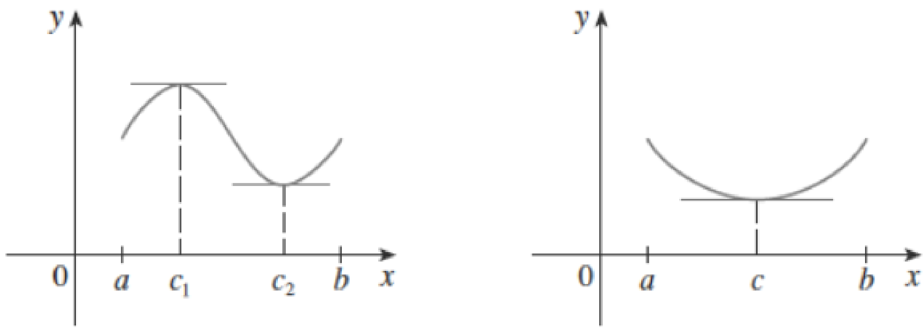

Figura 2: Máximos e Mínimos (b).
Fonte: [14]

Na figura 2, no primeiro gráfico, o ponto de abscissa c_1 é o mais alto e o ponto de abscissa c_2 é o mais baixo entre todos os pontos $(x, f(x))$ para $x \in [a, b]$. No segundo, o ponto de abscissa c é o mais baixo no intervalo $[a, b]$.

As ordenadas desses pontos, os valores $f(c)$, são os chamados *valores extremos da função.* Queremos estudar onde esses valores ocorrem numa função polinomial e/ou racional, pois os problemas discutidos aqui são modelados por esses tipos de funções. Feito isso, teremos como estudar situações bem mais abrangentes do que aquelas vistas no Ensino Básico.

Nas figuras apresentadas, vemos que esses valores ocorrem em números onde a função muda de crescente para decrescente e vice-versa.

Observe ainda que, as inclinações das retas que tocam os gráficos nesses pontos é horizontal, tal fato será muito importante em nosso estudo.

Do exposto acima, temos as seguintes definições. Denotaremos por D_f o domínio de uma função f.

Definição 1 *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in D_f$. Dizemos que $f(x_0)$ é um valor* ***máximo absoluto*** *de f em D_f, se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in D_f$. O ponto x_0 será chamado de ponto de máximo absoluto.*

Analogamente, temos:

Definição 2 *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in D_f$. Dizemos que $f(x_0)$ é um valor **mínimo absoluto** de f em D_f, se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in D_f$. O ponto x_0 será chamado de ponto de mínimo absoluto.*

Nas mesmas condições das definições anteriores temos as seguintes.

Definição 3 *Se $f(x_0) \geq f(x)$ apenas para valores de x próximos de x_0, por ambos os lados, diremos que $f(x_0)$ um **máximo local** de f. O ponto x_0 será chamado de ponto de máximo local.*

Definição 4 *Se $f(x_0) \leq f(x)$ apenas para valores de x próximos de x_0, por ambos os lados, diremos que $f(x_0)$ um **mínimo local** de f. O ponto x_0 será chamado de ponto de mínimo local.*

Veremos mais adiante que há uma classe de funções que definidas em um intervalo fechado, admitem um máximo absoluto e um mínimo absoluto nesse intervalo.

2.2 Máximos e mínimos de funções quadráticas

Consideremos inicialmente as definições a seguir.

Definição 5 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

*onde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais, com $a_n \neq 0$, é chamada de **função polinomial** de grau n com $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 6 *Uma função polinomial da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, será chamada simplesmente de **função quadrática**.*

Vamos determinar onde ocorre seus valores extremos. Note que

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.
\end{aligned}$$

Fazendo $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, obtemos

$$f(x) = a(x - m)^2 + k. \tag{2.1}$$

Esta é chamada de *forma canônica* da função quadrática. Note que o valor $(x - m)^2$ é sempre não-negativo.

Quando $a > 0$ temos $a(x - m)^2 \geq 0$, que implica, $a(x - m)^2 + k \geq k$. Assim, o *menor* valor de $f(x)$ é igual a k e ocorre para $x = m$, ou seja, a função assume um valor *mínimo absoluto* em $f(m) = k$.

Analogamente, quando $a < 0$ temos $a(x-m)^2 \leq 0$, que implica, $a(x-m)^2+k \leq k$. Assim, o *maior* valor de $f(x)$ é igual a k e ocorre para $x = m$, ou seja, a função assume um valor *máximo absoluto* em $f(m) = k$.

A forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$, nos ajuda a obter os *valores extremos* da função quadrática de um modo mais fácil, os quais ocorrem sempre no ponto $V(m, k)$ denominado *vértice da parábola*, curva que representa o gráfico da função. Observe a figura 3.

Figura 3: Vértice da parábola.
Fonte: [3]

Vamos agora examinar alguns problemas.

Exemplo 1 *Um prédio de primeiro andar, de forma retangular, com lados proporcionais a 3 e 4, vai ser construído. O imposto predial é de 7 reais por metro quadrado, mais uma taxa fixa de 2500 reais. A prefeitura concede um desconto de 60 reais por metro linear do perímetro, como recompensa pela iluminação externa e pela calçada em volta do prédio. Quais devem ser as medidas dos lados para que o imposto seja o mínimo possível?*

Solução Observe a figura 4. Como os lados são proporcionais a 3 e 4, então denotemos por $3x$ e $4x$ as medidas dos lados não paralelos do terreno, assim a área é dada por

$$A(x) = 3x \cdot 4x$$

e o perímetro é dado por

$$p(x) = 14x.$$

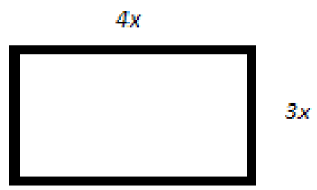

Figura 4: Forma geométrica do terreno do prédio.
Fonte: Autor

Logo função que expressa o valor do imposto é

$$I(x) = 7 \cdot 3x \cdot 4x + 2500 - 60 \cdot 14x.$$

Ou seja,

$$I(x) = 84x^2 - 840x + 2500.$$

Como $a = 84 > 0$, então a função assume um valor mínimo em

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{840}{2 \cdot 84} = 5.$$

Daí, as medidas dos lados que minimizam o imposto são $15m$ e $20m$. $\diamond$

Exemplo 2 *Supondo que a soma de dois números reais x e y é constante, qual é o maior valor que o produto dos dois pode assumir?*

Solução Denotemos a soma por $s = x + y$ então o produto é dado por

$$P(x) = xy = x(s - x),$$

ou seja,

$$P(x) = -x^2 + sx.$$

Como $a = -1 < 0$, então $p(x)$ assume um máximo quando

$$x = -\frac{s}{2 \cdot (-1)} = \frac{s}{2}.$$

Logo

$$y = \frac{s}{2} = x.$$

Assim, para que o produto seja máximo basta tomar dois números iguais. Logo $P(x) = x^2$ é máximo. $\diamond$

Do exemplo anterior concluímos que, considerando todos os retângulos de lados x e y, e perímetro fixo, dado por $2x + 2y$, o de maior área é um quadrado.

2.3 Estudando valores extremos de funções racionais em casos especiais

Considere a seguinte definição.

Definição 7 *Uma **função racional** f é uma função dada por $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ onde p e q são duas funções polinomiais e o domínio de f é o conjunto do números reais x tais que $q(x) \neq 0$.*

O que discutiremos a seguir nos permite enunciar um interessante resultado, o qual usaremos no estudo de alguns problemas que envolvem funções racionais.

Na seção anterior, poderíamos ainda interpretar o Exemplo 2 da seguinte forma: Se x e y são números reais positivos, que expressam as medidas dos lados de um retângulo qualquer, então o perímetro deste retângulo, dado por $2x + 2y$, é igual ao perímetro de um quadrado de lado $\dfrac{(x+y)}{2}$, dado por $4\dfrac{(x+y)}{2} = 2x + 2y$.

Pelo o último parágrafo da seção anterior concluímos que, a área deste retângulo é menor ou igual do que a área deste quadrado. Ou seja,

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

A desigualdade acima pode ser escrita da seguinte forma

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \tag{2.2}$$

conhecida como *Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica* de x e y. Como definidas abaixo. Note ainda que, a igualdade só ocorre quando temos $x = y$.

Definição 8 *Sejam $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ números reais positivos. O número real*

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

*é a **média aritmética** de $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.*

Analogamente

Definição 9 *Sejam $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ números reais positivos. O número real*

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

*é a **média geométrica** de* $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

Enunciaremos o caso geral do Teorema da Desigualdade das Médias, sem demonstrá-lo. Ao leitor interessado indicamos [6]. A seguir faremos a prova para o caso $n = 2$.

Teorema 2.3.1 (Desigualdade das Médias) *Se* $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ *são números reais positivos, então vale a seguinte desigualdade*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \tag{2.3}$$

As médias são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$.

Prova (caso $n = 2$) Primeiramente mostremos que a desigualdade é verdadeira. Dado x e y reais positivos devemos mostrar que

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Sabemos que

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0.$$

Desenvolvendo o primeiro lado temos

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 &\geq 0 \\ x - 2\sqrt{xy} + y &\geq 0 \\ x + y &\geq 2\sqrt{xy}. \end{aligned}$$

De onde segue

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Para a segunda parte note que, se tivermos

$$\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2},$$

então

$$x + y = 2\sqrt{xy}.$$

Daí,

$$x - 2\sqrt{xy} + y = 0.$$

Que podemos reescrever como

$$(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 = 0.$$

De onde segue que

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0,$$

ou seja, $\sqrt{x} = \sqrt{y}$. Portanto, $x = y$.

Reciprocamente, se tivemos $x = y$, então vale que

$$\sqrt{x} = \sqrt{y},$$

pois os mesmos são positivos. Daí,

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0.$$

Logo

$$\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 = 0,$$

que resulta em

$$x - 2\sqrt{xy} + y = 0$$

$$x + y = 2\sqrt{xy}.$$

De onde segue que

$$\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2}.$$

$\square$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3 *Considere a função racional* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *onde* $f(x) = \dfrac{x^6+2}{x^2}$*. Determine o seu valor mínimo absoluto.*

Solução Note que,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^6+2}{x^2} \\ &= x^4 + \frac{2}{x^2} \\ &= x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade das médias para os números x^4, $\dfrac{1}{x^2}$ e $\dfrac{1}{x^2}$, que são positivos, temos

$$\frac{x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{3} \geq \sqrt[3]{x^4 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}}.$$

De onde segue que

$$\begin{aligned} f(x) = x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} &\geq 3\sqrt[3]{x^4 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}} \\ &= 3\sqrt[3]{1} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Daí, $f(x) \geq 3$, portanto seu valor mínimo é $f(x_0) = 3$, que ocorre quando temos a igualdade das médias, ou seja, quando os números x^4, $\dfrac{1}{x^2}$ e $\dfrac{1}{x^2}$ são iguais. Assim, se

$$x^4 = \frac{1}{x^2},$$

então $x^6 = 1$, ou seja, $x = 1$, pois $x > 0$. Portanto $f(1) = 3$ é o valor mínimo absoluto de $f(x)$. $\diamond$

Ver gráfico de $f(x)$ a seguir.

Figura 5: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^6+2}{x^2}$.
Fonte: Autor

Exemplo 4 *[16] Pediram a você que projetasse uma lata de um litro com a forma de um cilindro reto. Que dimensões exigirão menos material ? Adote* $\pi = 3,14$.

Solução Observe a figura a seguir.

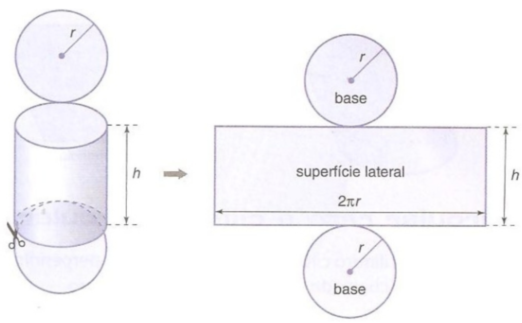

Figura 6: Forma geométrica da lata e planificação da superfície total.
Fonte: [3]

Sabemos que o raio r e a altura h, em cm, da lata são números positivos. Da geometria plana e espacial concluímos que, o volume da lata é dado por

$$V = \pi r^2 h.$$

E área da superfície é dada por

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

A equação anterior representa a quantidade de material usado na produção da lata. Como o volume da lata vale $1l = 1000cm^3$, então $\pi r^2 h = 1000$, ou seja,

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Substituindo em $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, vem que

$$\begin{aligned} A(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{1000}{r} + \frac{1000}{r}. \end{aligned}$$

Como $2\pi r^2$ e $\dfrac{1000}{r}$ são positivos então, podemos usar a desigualdade das médias. Temos

$$\frac{2\pi r^2 + \frac{1000}{r} + \frac{1000}{r}}{3} \geq \sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{1000}{r} \cdot \frac{1000}{r}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} A(r) &= 2\pi r^2 + \frac{1000}{r} + \frac{1000}{r} \\ &\geq 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{1000}{r} \cdot \frac{1000}{r}} \\ &= 3\sqrt[3]{2000000\pi}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A(r) \geq 300\sqrt[3]{2\pi}.$$

Ou seja, o menor valor que a função $A(r)$ pode assumir é $300\sqrt[3]{2\pi} \cong 553,48$, o qual ocorre quando os números $2\pi r^2$ e $\dfrac{1000}{r}$ são iguais. Assim, se

$$2\pi r^2 = \frac{1000}{r},$$

temos

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \cong 5,42cm.$$

Como

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Então

$$h = \frac{1000}{\pi(5,42)^2} \cong 10,84cm.$$

Portanto, usamos menos material quando a lata de 1 litro tem altura igual ao dobro do raio, com $r \cong 5,42cm$ e $h \cong 10,84cm$. $\diamond$

Observe a gráfico da função que representa a quantidade de material abaixo.

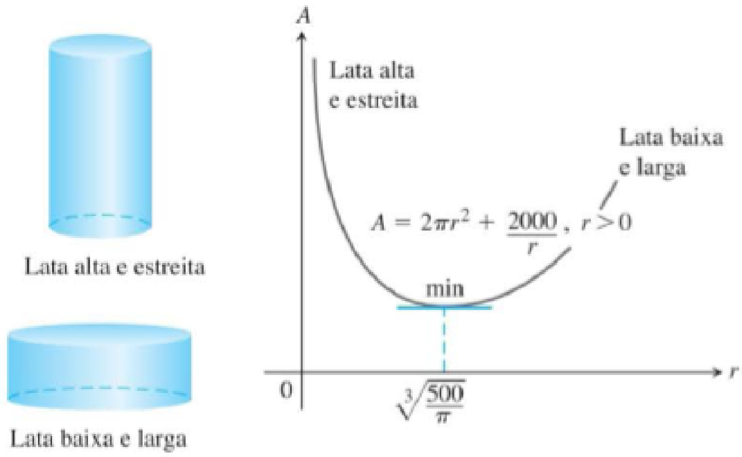

Figura 7: Gráfico de $A(r)$.
Fonte: [16]

Cabe aqui uma reflexão. Nem sempre podemos usar a desigualdade das médias. Quando se trata de funções, a primeira restrição é que devemos trabalhar com números positivos, outra é que a manipulação dos termos na lei de formação da função nem sempre é óbvia ou possível.

Então como superar essas dificuldades de tal forma que possamos encontrar os valores extremos de quaisquer funções, como aqueles da função $v(r) = -cr^3 + cr_o r^2$, discutida no início deste capítulo?

Tais perguntas serão respondidas nos capítulos seguintes, onde usaremos o conceito de *derivada* de uma função, uma ferramenta poderosa da matemática. Obter a derivada das funções que veremos aqui, se dá por um processo que pode ser facilmente manipulado por estudantes de nível médio, eliminando assim as dificuldades aqui encontradas. Para isso, vamos começar por suas origens, a ideia de *limite*.

3 A IDEIA DE LIMITE

A ideia de limite é muito antiga, surgiu a mais de dois mil anos, mas foi no século XVII, com matemáticos como Pierre de Fermat (1601-1677), Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1642-1716), que se desenvolveram as principais ideias do Cálculo Diferencial que usamos hoje. Antes de apresentarmos a definição de limite de uma função, vamos considerar a situação a seguir.

Exemplo 5 *(Paradoxo de Zenão) Imagine que um maratonista deva percorrer uma distância de* $1km$ *de uma estrada. Para isso, ele percorre metade dessa distância, restando* $1/2km$ *a ser percorrido. Em seguida ele percorre metade de* $1/2km$*, restando agora* $1/4km$ *a ser percorrido. Imagine que ele mantenha esse processo, ou seja, ele tenta completar a tarefa. A pergunta que surge é: O corredor percorrerá a distância total de* $1km$ *?*

Examinemos a situação:

1. Na 1ª etapa ele percorre $\frac{1}{2}km$
2. Na 2ª etapa ele percorre mais $\frac{1}{4}km$
3. Na 3ª etapa ele percorre mais $\frac{1}{8}km$
4. Na 4ª etapa ele percorre mais $\frac{1}{16}km$

Logo a distância total percorrida em km será

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots.$$

Restando sempre a percorrer uma distância igual a percorrida na última etapa. Como sabemos, intuitivamente, que a soma acima deve ser igual a 1, pois o comprimento do percurso é de $1km$, dizemos que 1 é o limite dessa soma, no entanto sem atingir esse valor e escrevemos assim

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1.$$

Vamos agora a uma definição de limite que atende aos propósitos deste trabalho, encontrada em [14] p.81. Uma outra definição, que foge ao nosso interesse, o leitor interessado pode encontrá-la em [8].

3.1 Limite de uma função

Definição 10 *Seja f uma função, tal que $f(x)$ está definida para valores próximos do número real x_0, ou seja, f é definida em um intervalo aberto que contém x_0, exceto possivelmente o próprio x_0. Dizemos que, o* ***limite*** *de $f(x)$ quando x tende a x_0 é igual a L, se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, tornando x suficientemente próximos de x_0, por ambos os lados, mas não igual a x_0. Denotamos isso, escrevendo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Observe a figura abaixo:

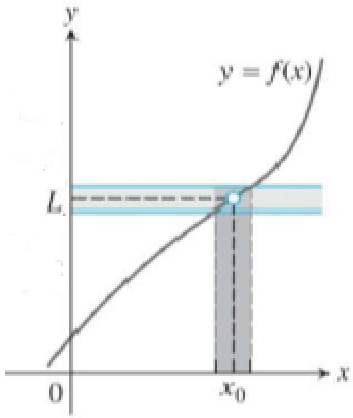

Figura 8: Limite de uma função.
Fonte: [16]

A definição acima nos diz que, quando diminuímos a largura da faixa vertical, pintada de cinza na figura 7, simultaneamente é diminuída a altura da faixa horizontal, pintada de azul. Expliquemos tal aproximação através de um exemplo.

Exemplo 6 *Considere o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$.*

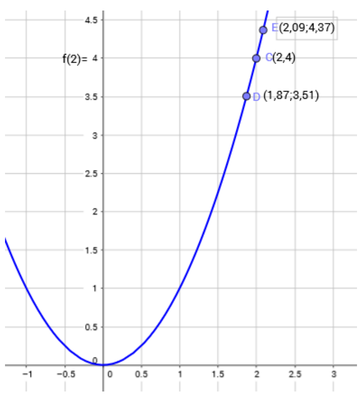

Figura 9: Gráfico de $f(x) = x^2$.
Fonte: Autor

Observe que, quando nos aproximamos de $x = 2$ por valores menores ou maiores que 2, $f(x)$ se aproxima de $f(2) = 4$ por valores menores ou maiores, respectivamente.

Observe também a tabela 3.1. Note que, quanto mais próximo x está de $x_0 = 2$ os valores assumidos pela função $f(x) = x^2$, são mais próximos de $f(2) = 4$.

Tabela 3.1: Aproximações pela esquerda e direita de $f(2) = 4$

x	$1,00$	1,50	1,87	2,00	2,09	2,50	3,00
$f(x) = x^2$	1,00	2,25	3,51	4,00	4,37	6,25	9,00

Dizemos que o limite de $f(x) = x^2$ quando x tende a 2 pela esquerda é igual a 4, e escrevemos

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4.$$

Analogamente, dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a 2 pela direita é igual a 4, e escrevemos

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4.$$

Os limites acima, são chamados de *limite lateral à esquerda e limite lateral à direita*, respectivamente. Note que,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 = \lim_{x \to 2^+} f(x).$$

Quando isso acontece, dizemos que o limite existe e escrevemos

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

A definição acima merece algumas observações.

1. Se o limite existir ele é único.
2. Nem sempre os limites laterais são iguais, quando isso acontece dizemos que o limite da função não existe.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 7 *Considere o gráfico na figura 10, da função real* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *onde*

$$g(x) = \begin{cases} x - 5, \ \textit{para} \ x < 1 \\ 3, \ \textit{para} \ x = 1 \\ 1 - 2x, \ \textit{para} \ x > 1. \end{cases}$$

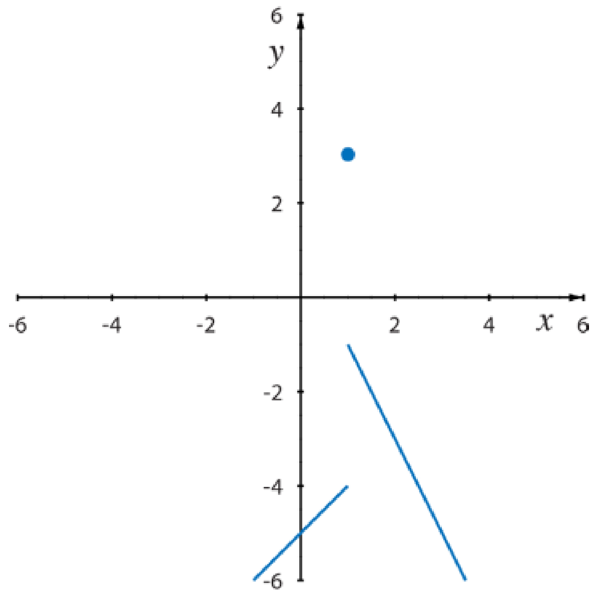

Figura 10: Gráfico de $g(x)$.
Fonte: [11]

Note que, quando nos aproximamos de $x = 1$ pela esquerda (valores menores), temos

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -4$$

e quando nos aproximamos de $x = 1$ pela direita (valores maiores), temos

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

e que ambos são diferentes de $g(1) = 3$. Assim $\lim_{x \to 1} g(x)$ não existe.

Apresentaremos a seguir as regras básicas de operações com limites de funções , as quais admitiremos sem demonstrá-las, ao leitor interessado indicamos [14].

Teorema 3.1.2 (Álgebra com limites) *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$, funções de domínio real, x_0 e k números reais com $x_0 \in D$. As seguintes afirmações são verdadeiras, quando $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existem.*

1. $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$.

2. $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$.

3. $\lim_{x \to x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$.

4. $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$.

5. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, *se* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

3.2 Funções contínuas

Vamos estabelecer agora o conceito de função contínua. No Exemplo 6 obtivemos que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4 = f(2)$. Na verdade isso sempre acontece quando a função é contínua. Graficamente uma função contínua não apresenta "saltos"ou "buracos". Observe.

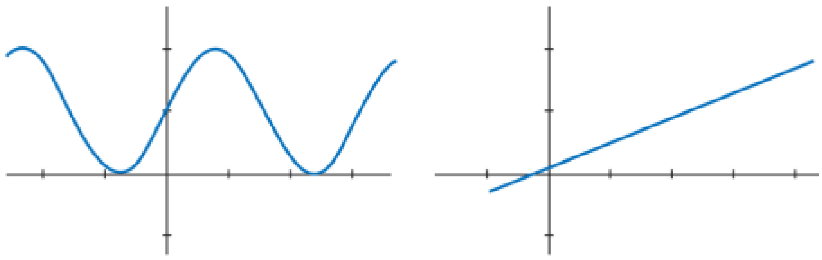

Figura 11: Gráfico de funções contínuas.
Fonte: [11]

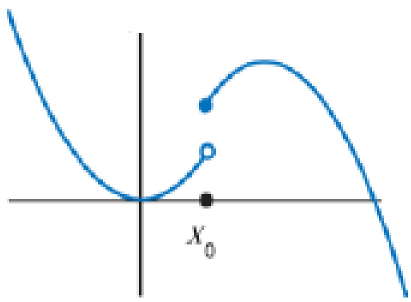

Figura 12: Gráfico de função descontínua (que não é contínua).
Fonte: [11]

Vamos a definição.

Definição 11 *Uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **contínua** em um ponto x_0 de seu domínio, se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dizemos que uma função é contínua quando o for em todos os pontos de seu domínio.

A definição acima nos diz que quando x se aproxima de x_0 então, $f(x)$ se aproxima de $f(x_0)$. Neste trabalho, como já dissemos, nos limitaremos ao estudo de funções polinomiais e racionais que são exemplos de funções contínuas. Assim o processo do cálculo de limites de tais funções é bastante simples.

Exemplo 8 *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é uma função real tal que $f(x) = 2x^2 + x + 3$, então $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2(1)^2 + 1 + 3 = 6$.*

Observação Pode-se demonstrar que a *soma*, a *diferença*, o *produto* e o *quociente* de funções contínuas é ainda uma função contínua. Nesse texto admitiremos esse fato como verdade.

Exemplo 9 *Considere a função real, $f : D_f \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+1}$, então*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+2}{x^2+1} = \frac{0^3+2}{0^2+1} = \frac{2}{1} = 1.$$

O teorema abaixo nos mostra a importância do conceito de função contínua e garante a existência de valores extremos em diversos problemas. Não faremos tal demonstração, pois as ferramentas necessárias foge ao nosso interesse, indicamos ao leitor [14].

Teorema 3.2.3 (Weierstrass) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua cujo domínio é um intervalo fechado, então f admite um valor máximo e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$.*

Observe o gráfico da função $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$.

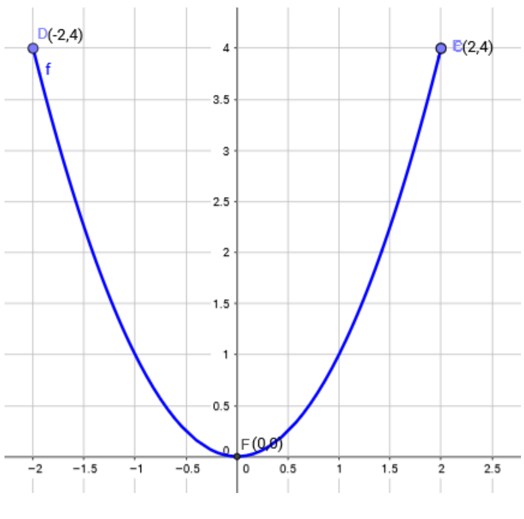

Figura 13: Gráfico de $f(x) = x^2$ definida de $[-2, 2]$.
Fonte: Autor

Note que $f(0)$ é mínimo absoluto em $[-2, 2]$ e $f(-2) = f(2)$ são máximos absolutos em $[-2, 2]$.

Usaremos o Teorema de Weierstrass para provar alguns outros resultados que veremos nos capítulos seguintes.

4 TAXAS DE VARIAÇÃO

São muitas as situações em diversas áreas do conhecimento que quando modeladas pela Matemática se traduzem em um único conceito. A velocidade, a densidade, a corrente elétrica na Física, a taxa de reação e a compressibilidade na Química, a taxa de crescimento e o gradiente da velocidade do sangue na Biologia, o custo e o lucro marginal na Economia, a taxa de desenvolvimento na Psicologia, a taxa de divulgação de um boato na Sociologia, todos esses são casos de um tipo muito especial de limite, a *Derivada*.

4.1 Taxa de Variação Média

Considere a grandeza física, temperatura de um ambiente medida em graus Celsius, variando no decorrer do tempo medido em horas, conforme a tabela abaixo.

Tabela 4.2: Variação de uma grandeza no decorrer do tempo.

	$t(h)$	$T(°C)$
t_1	5	25
t_2	6	27
t_3	7	29
t_4	8	31

De acordo com os dados, a variação de temperatura ΔT no intervalo de tempo $[t_1,t_3]$ é dado por $\Delta T = 29 - 25 = 4°C$ e o intervalo de tempo é $\Delta t = 7 - 5 = 2h$.

Note que a cada $1h$ a temperatura varia de $2°C$, assim podemos escrever que a taxa de variação média de temperatura nesse ambiente no intervalo $[t_1,t_3]$ é dada por

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{4°C}{2h} = 2°C/h.$$

Também podemos interpretar a velocidade média v_m, a aceleração média a_m, como a razão entre a variação da grandeza em um intervalo de tempo decorrido. Assim podemos escrever:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t};$$

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Onde ΔS e Δv representam a variação de posição S e variação de velocidade v, respectivamente.

De modo geral temos a seguinte definição.

Definição 12 *Sejam X e Y duas grandezas. Definimos a* ***taxa de variação média*** *ϕ_m, de Y em relação a X, como*

$$\phi_m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{4.4}$$

onde ΔY e ΔX representam a variação das grandezas Y e X, respectivamente.

Geometricamente o quociente $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ representa a inclinação da reta secante ao gráfico de uma função $f(x) = y$, que contem os pontos $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$, ou seja, $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = tg\theta_s$, como mostra a figura abaixo:

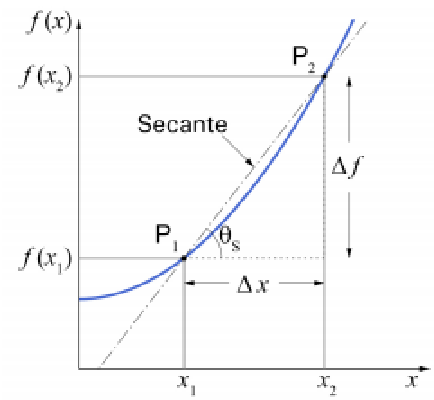

Figura 14: Taxa de variação média em $f(x) = y$

Fonte: [11]

4.2 Taxa de Variação Instantânea

Agora faremos o uso do importante conceito de limite na variação de uma grandeza, o qual nos levará ao conceito mais importante do Cálculo Diferencial, a *derivada*.

Definição 13 *Sejam X e Y duas grandezas. Definimos a* ***taxa de variação instantânea*** *ϕ, de Y em relação a X, como*

$$\phi = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}, \tag{4.5}$$

onde ΔY e ΔX representam a variação das grandezas Y e X, respectivamente.

Assim, a taxa de variação instantânea de uma grandeza é definida como sendo limite da taxa de variação média dessa grandeza.

Portanto, a velocidade instantânea v, a aceleração instantânea a, são definidas como sendo o limite da velocidade média e aceleração média, respectivamente. Daí, podemos escrever:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_m;$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} a_m.$$

Onde ΔS e Δv representam a variação de posição S e variação de velocidade v, respectivamente.

4.2.1 Interpretação geométrica da taxa de variação instantânea

Considere os pontos P e Q, na curva representada no gráfico abaixo. Note que, quando tomamos as abscissas de Q mais próximas de x_0, o ponto Q se aproxima do ponto P, e as retas secantes, para cada valor tomado, vão se aproximando de uma posição limite, que é a posição da reta, denominada ***reta tangente*** a curva no ponto P. Desta forma, a noção intuitiva, nos diz que a inclinação da reta tangente em P é igual ao limite das inclinações das retas secantes, quando fazemos Q se aproximar de P.

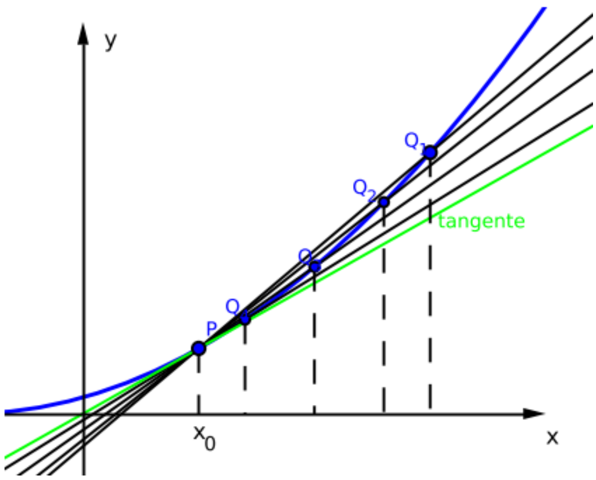

Figura 15: Aproximação das retas secantes
Fonte: [15]

Como a inclinação da reta secante que contem os pontos P e Q, representa a taxa de variação média, da mesma forma diremos que a inclinação da reta tangente em P, representa a taxa de variação instantânea no ponto x_0.

Note que, quando x_0 sofre uma variação de Δx, temos um novo valor de x, que é dado por $x = x_0 + \Delta x$. O valor $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ expressa a variação que $f(x)$ sofreu no intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

Vamos agora a definição formal de derivada.

4.2.2 Derivada de uma função

Definição 14 *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função de domínio real. A* ***derivada*** *de f no ponto x_0, denotada por $f'(x_0)$, é dada por*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{4.6}$$

se esse limite existir.

Assim, pelo que foi dito na seção anterior, $f'(x_0)$ expressa a *inclinação da reta tangente* ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$. A função é dita derivável, quando o for em todos os pontos de seu domínio.

Observação Note que, quando $\Delta x \to 0$, pela equação $x = x_0 + \Delta x$, temos que $x \to x_0$. Assim, podemos reescrever (4.6) como

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{4.7}$$

4.2.3 A Derivada como uma função

Definição 15 *A* ***função derivada*** *de f, denotada por f', é a função cujo domínio está contido no domínio de f, a qual associa a cada valor $f'(x)$ o limite*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Observação Pode ser demonstrado em livros específicos de Cálculo Diferencial que *toda função derivável é contínua.*

Definição 16 *A* ***função derivada segunda*** *de f, denotada por f", é a função cujo domínio está contido no domínio de f', a qual associa a cada valor f"(x) o limite*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Exemplo 10 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, tal que $f(x) = c$, com c constante. Mostremos que $f'(x) = 0$.*

Solução Usando a definição

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{x-x_0} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{x-x_0} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

◇

Exemplo 11 *Seja f uma função real, tal que $f(x) = x^n$, com n natural. Mostremos que $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Solução Usando a definição $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, temos

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}.$$

Como

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1},$$

pois,

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}).$$

Logo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}$$

Como as funções polinomiais são contínuas, segue que

$$f'(x_0) = \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \cdots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}}_{\text{n termos}}.$$

Portanto,

$$f'(x_0) = nx_0^{n-1}.$$

Como x_0 pode ser qualquer valor do domínio de f, então podemos escrever

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

◇

Veremos agora as principais regras operacionais com derivadas de funções que serão usadas em nosso trabalho. Demonstraremos o item 1, os demais são análogos, ao leitor interessado indicamos [14] ou [16].

Teorema 4.2.4 (Regras de derivação) *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ funções deriváveis, com $D \subset \mathbb{R}$, e k um número real. Então*

1. *$f + g$ é derivável e $(f + g)' = f' + g'$.*

2. *$f - g$ é derivável e $(f - g)' = f' - g'$.*

3. *$k \cdot f$ é derivável e $(k \cdot f)' = k \cdot f'$.*

4. *$f \cdot g$ é derivável e $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.*

5. *$\dfrac{f}{g}$ é derivável e $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, sempre que $g \neq 0$.*

Prova de 1 Pela definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned} [f(x) + g(x)]' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Como o limite da soma é soma dos limites, pois os mesmos existem, então

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

E ainda f e g são deriváveis, segue que

$$(f + g)' = f' + g', \quad \forall x \in I.$$

Como queríamos mostrar. □

Exemplo 12 *Seja f uma função polinomial de domínio real, definida por*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde n é um número natural. Derivemos $f(x)$.

Solução Pelos dois exemplos anteriores e os itens 1 e 3 do teorema anterior, temos que se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$, então

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n - 1) a_{n-1} x^{n-2} + (n - 2) a_{n-2} x^{n-3} + \cdots + a_1. \tag{4.8}$$

◇

Obervações

1. A fórmula acima, nos diz como derivar uma função polinomial. É possível provar que

ela também vale para n real, aqui vamos aceitar esse fato sem demonstrá-lo.

2. Para derivar uma função racional, basta acrescentarmos o item 5 do teorema anterior.

Exemplo 13 *Para $f(x) = x^4 + 6x^3 - 2$, calculemos $f'(x)$.*

Solução Note que f é uma função polinomial. Usando a fórmula (4.8) temos que

$$f'(x) = 4x^3 + 18x^2.$$

$\diamond$

Exemplo 14 *Calcule a derivada de $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^4 + 1}$.*

Solução Usando o teorema anterior, vem que

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 2x)' \cdot (x^4 + 1) - (x^3 - 2x) \cdot (x^4 + 1)'}{(x^4 + 1)^2}.$$

Daí,

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2) \cdot (x^4 + 1) - (x^3 - 2x) \cdot 4x^3}{(x^4 + 1)^2}.$$

Fazendo os cálculos, obtemos

$$f'(x) = \frac{-x^6 - 10x^4 + 3x^2 - 2}{x^8 + 2x^4 + 1}.$$

$\diamond$

Para encerrar este capítulo apresentaremos um importante teorema, o qual facilita a procura por valores extremos de uma função. É com ele que começamos a enxergar como a derivada simplifica os nossos cálculos.

Teorema 4.2.5 (Fermat) *Se uma função possui valor extremo local em ponto c de seu domínio, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Prova Suponha que f tem um máximo local em c, ou seja, que existe um intervalo aberto $(a, b) \subset D_f$ que contenha c, tal que

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in (a, b) \subset D_f.$$

Logo

$$f(x) - f(c) \leq 0, \quad \forall x \in (a, b) \subset D_f.$$

Temos dois casos a examinar.

i) Se $x > c$ então, $x - c > 0$. Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $x - c$, temos

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0.$$

Tomando o limite à direita, vem que

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

Como $f'(c)$ existe então,

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0.$$

Ou seja,

$$f'(c) \leq 0. \tag{4.9}$$

ii) Se $x < c$ então, $x - c < 0$. Analogamente, temos

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0.$$

Tomando o limite à esquerda, vem que

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

Novamente, como $f'(c)$ existe, então

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0.$$

Ou seja,

$$f'(c) \geq 0. \tag{4.10}$$

Como as desigualdades (4.9) e (4.10) são ambas verdadeiras, segue que $f'(c) = 0$.

O caso em que c é um mínimo local é provado de forma análoga. Concluímos a demonstração. □

Observação Vale ressaltar que a recíproca do Teorema de Fermat não é verdadeira. Vejamos um exemplo.

Exemplo 15 *Considere o gráfico da função $f(x) = x^3$ a seguir:*

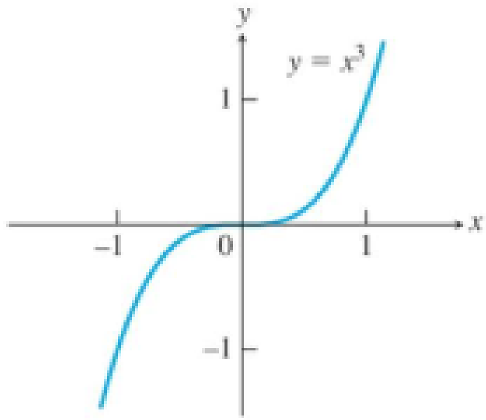

Figura 16: Gráfico de $f(x) = x^3$.
Fonte: [16]

Note que $f'(0) = 0$, mas em $x = 0$ a função não assume nem máximo nem mínimo.

Nas condições do teorema acima, temos a seguinte definição.

Definição 17 *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in D_f$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Chamamos c de* ***ponto crítico****.*

O Teorema de Fermat diz que devemos começar a procura por pontos críticos de uma função derivável, pelas ***raízes de sua derivada***. O próximo capítulo fornecerá resultados suficientes para isso.

5 TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Alguns dos problemas que encontramos em diversas áreas do conhecido podem ser traduzidos para a linguagem matemática por meio de uma função e muitas vezes a resolução destes problemas depende apenas dos pontos onde a função assume um valor extremo, máximo ou mínimo. Tais problemas são chamados de *Problemas de Otimização*. Veremos que o resultado central que nos ajudará neste processo é o Teorema do Valor Médio (TVM), um dos mais importantes do Cálculo Diferencial.

A grosso modo, o Teorema do Valor Médio diz que: Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no aberto (a,b), então existe um ponto em (a,b), cuja taxa de variação instantânea é igual a taxa de variação média nos extremos do intervalo. Vemos assim que tal teorema relaciona os dois temas do capítulo anterior.

5.1 Teorema de Rolle e o TVM de Lagrange

Enunciaremos inicialmente o Teorema de Rolle, o qual pode ser visto como um caso particular do TVM. Provaremos este teorema e como consequência obtemos o TVM.

Teorema 5.1.6 (Rolle) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e tal que $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Observe a figura abaixo, nela podemos visualizar a situação enunciada acima.

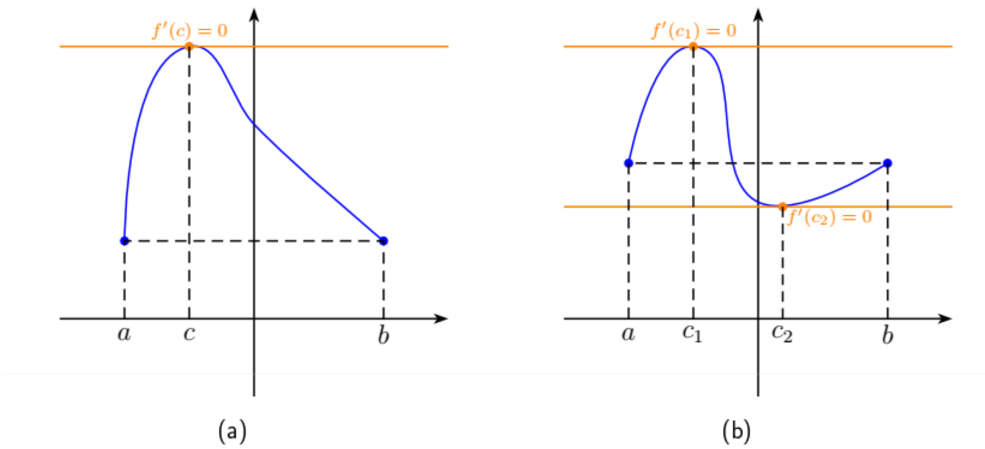

Figura 17: Visualizando o Teorema de Rolle.
Fonte: [15]

Observe ainda que pode existir um ponto c ou mais. Vamos então à prova.

Prova Por hipótese $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então o Teorema de Weierstrass garante que f assume um máximo e um mínimo em $[a,b]$. Sejam M e m os valores máximo e mínimo absolutos assumidos por f em $[a,b]$, respectivamente.

Se tivermos $m = f(a)$ e $M = f(b)$. Como $f(a) = f(b)$ (hipótese), então o máximo é igual ao mínimo, e isso só acontece se f for constante, logo $f'(x) = 0$ para todo valor de x em $[a,b]$, o que prova o teorema nesse caso.

Se o máximo ou o mínimo absoluto de f não ocorrer nos extremos de $[a,b]$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c)$ é o máximo ou mínimo de f, pelo Teorema de Fermat $f'(c) = 0$ ($f'(c)$ existe por hipótese).

Desta forma concluímos a prova do teorema. □

Teorema 5.1.7 (TVM de Lagrange) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{5.11}$$

Observe que, geometricamente o TVM é o teorema de Rolle quando as retas tangentes ao gráfico da f assumem outras posições além da horizontal, isto é, quando $f(a) \neq f(b)$.

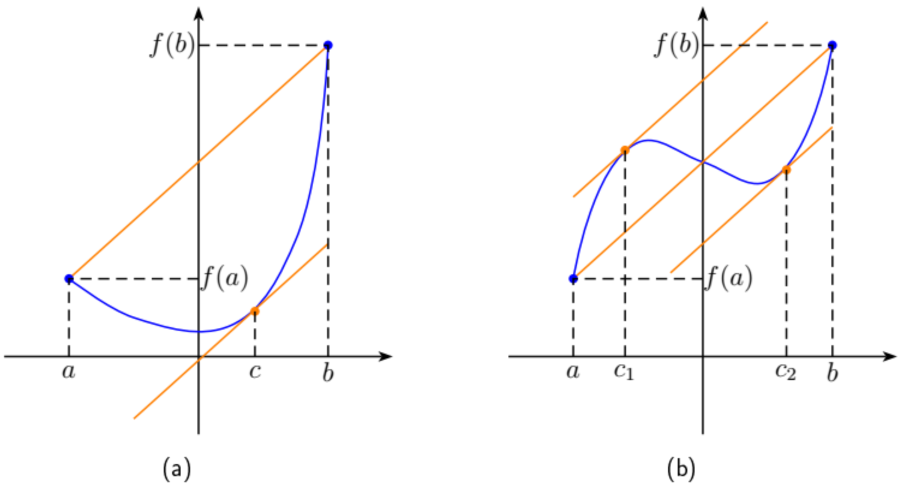

Figura 18: Visualizando o TVM.
Fonte: [15]

Prova Considere a figura 18(a). Note que a reta secante que contem os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ representa o gráfico de uma função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(a) + m(x - a),$$

onde

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Note ainda que $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$.

Seja $h : [a, b] \to \mathbb{R}$; $h(x) = f(x) - g(x)$. Assim,

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Observe que h é contínua no intervalo $[a, b]$, pois é uma diferença de duas funções contínuas em $[a, b]$ e é derivável em (a, b) pois é uma diferença de funções deriváveis em (a, b). Além disso,

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = 0$$

e

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0.$$

Ou seja,

$$h(a) = h(b).$$

O Teorema de Rolle garante que existe um $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Como

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

então

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Donde segue que,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como queríamos mostrar. □

5.2 Derivadas, TVM e os Valores Extremos

Apresentaremos nesta seção algumas consequências do TVM, que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Antes de tudo, vejamos as seguintes definições.

Definição 18 *Uma função f é dita* ***crescente*** *em seu domínio, se para quaisquer x_1 e x_2 de seu domínio, tais que $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.*

Analogamente temos a definição para função decrescente.

Definição 19 *Uma função f é dita* ***decrescente*** *em seu domínio, se para quaisquer x_1 e x_2 de seu domínio, tais que $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.*

Veremos agora a primeira consequência do TVM que usaremos na prova de outras mais adiante.

Teorema 5.2.8 (Teste do crescimento/decrescimento) *Seja f uma função derivável em um intervalo $I \subset D_f$, temos*

1. *Se $f'(x) > 0$ em I, então f é crescente em I.*

2. *Se $f'(x) < 0$ em I, então f é decrescente em I.*

Prova. 1. Como f é derivável em I, então é contínua em I. Tomando quaisquer $x_1, x_2 \in I$ de modo que $x_1 < x_2$, tem-se que f é derivável em (x_1, x_2). O **TVM** garante que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $x_1 < x_2$ implica $(x_2 - x_1) > 0$ e $f'(c) > 0$ (hipótese), então

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0.$$

Assim $f(x_1) < f(x_2)$, ou seja, f é crescente em qualquer intervalo de I, portanto é crescente em I.

2. A prova do item 2 é análoga a anterior. □

Uma consequência imediata deste resultado é o seguinte.

Teorema 5.2.9 (Teste da primeira derivada para extremos locais) *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b) e $x_0 \in [a, b]$ um ponto crítico de f. Temos*

1. *Se f' muda de positiva para negativa em x_0, então $f(x_0)$ é um **máximo local** de f.*

2. *Se f' muda de negativa para positiva em x_0, então $f(x_0)$ é um **mínimo local** de f.*

3. *Se f' não muda de sinal em x_0, então $f(x_0)$ não é um valor extremo de f.*

Observe a figura 19, onde podemos visualizar o teorema.

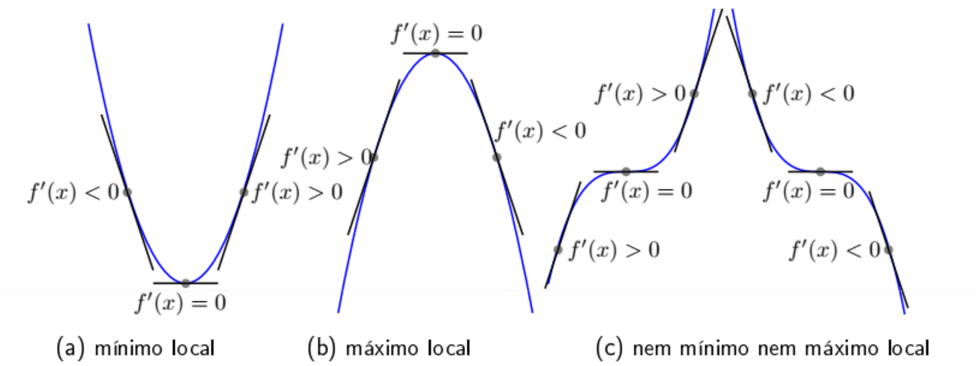

Figura 19: Encontrando máximos e mínimos pelo sinal da derivada

Fonte: [15]

Para finalizar as noções de Cálculo aqui apresentadas, enunciaremos um último resultado, o qual do ponto de vista algébrico, se mostra mais fácil de ser manipulado em um nível básico.

Teorema 5.2.10 (Teste da segunda derivada para extremos locais) *Seja f uma função que possui derivada segunda contínua próximo de $x_0 \in D_f$. Se*

1. $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(x_0) < 0$, *então* $f(x_0)$ *é um* ***máximo local*** *de* f.
2. $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(x_0) > 0$, *então* $f(x_0)$ *é um* ***mínimo local*** *de* f.
3. $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(x_0) = 0$, *o teste é inconclusivo a respeito de* $f(x_0)$.

Prova. **1.** Se $f''(x_0) < 0$, então $f''(x) < 0$ próximo de x_0, pois a função é contínua , o que implica f' ser decrescente em algum intervalo aberto que contenha x_0. Como $f'(x_0) = 0$, o sinal de f' muda de positivo para negativo em x_0, pelo teorema anterior, $f(x_0)$ é um **máximo local** de f. □

2. A prova do item 2 é análoga a anterior.

3. O teste é inconclusivo. Observe as situações apresentadas nos gráficos da figura 20:

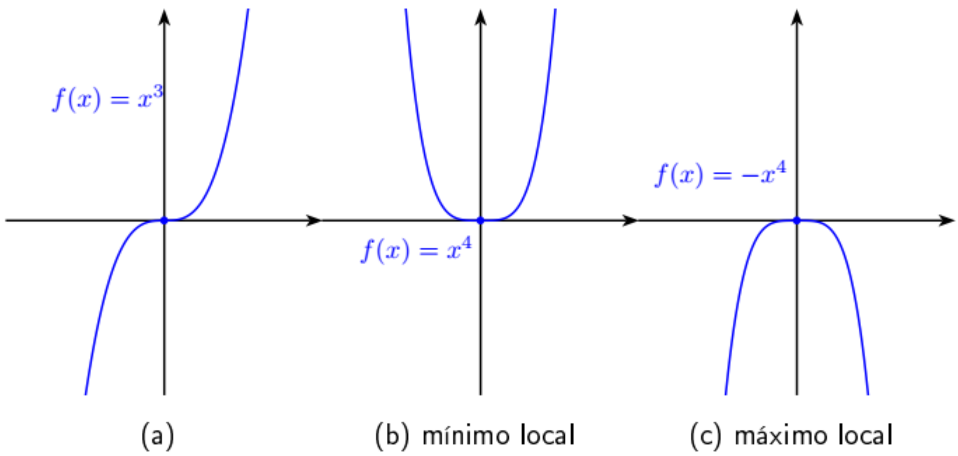

Figura 20: Gráficos de $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$ e $f(x) = -x^4$.
Fonte: [15]

Note que, em cada caso $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 0$, mas no primeiro $f(0)$ não é nem máximo nem mínimo, no segundo é mínimo e no último é máximo.

Agora temos as ferramentas necessárias para encontrar os valores extremos de funções. Como dito anteriormente nos limitaremos ao estudo de funções polinomiais e racionais.

6 ENCONTRANDO VALORES EXTREMOS COM USO DO CÁLCULO

Neste capítulo veremos como a derivada é útil na resolução de muitos problemas em diversas áreas do conhecimento. Na primeira situação que nos deparamos veremos que a maior dificuldade é determinar a lei de formação que expressa a função em termos de uma só variável. Para tal situação, devemos inicialmente identificar as variáveis do problema, as grandezas envolvidas e os intervalos para os quais as variáveis são válidas para o problema. Encontrada a função, basta usar os testes das derivadas vistos no capítulo anterior para encontrar os valores extremos.

Em outras situações, já é dada a expressão que define a função a ser estudada no problema. Isso se deve ao fato de que, para obter tal expressão precisaríamos antes considerar alguns conceitos e hipóteses não-triviais para um nível básico, fugindo assim do nosso objetivo maior, que é tratar do assunto máximos e mínimos de funções.

Em algumas das situações que vamos discutir, trataremos com funções contínuas definidas em intervalos abertos (a, b), porém um intervalo desse tipo está contido no intervalo fechado $[a, b]$, assim o Teorema de Weiertrass garante que encontraremos máximos e mínimos absolutos, obtendo assim as soluções procuradas para os problemas.

Sempre que possível acrescentamos uma ilustração para enriquecer o texto e facilitar a visualização da solução encontrada.

Por fim, devemos esclarecer ao leitor que a maioria dos problemas aqui apresentados foram retirados de nossas referências, em alguns fizemos alterações em seu enunciado, de modo que este trabalho torne-se acessível ao estudante do Ensino Médio.

6.1 Aplicações à Indústria

1. Maximizando o volume na produção de embalagens. Dispondo de $12m^2$ de material para fazer uma embalagem na forma de uma caixa com base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

Solução Observe a figura 21. Sabemos da geometria que o volume da caixa é dado por

$$V = x^2y.$$

A área de sua superfície sem tampa é dada por

$$A = x^2 + 4xy.$$

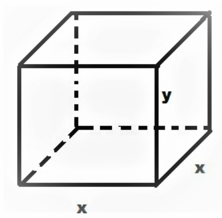

Figura 21: Dimensões da caixa.
Fonte: [3]

Note que a equação anterior representa a quantidade de material que será usado na construção da caixa, onde x e y são números positivos.

Pelos dados do problema devemos ter $A = x^2 + 4xy = 12$. Daí,

$$y = \frac{12 - x^2}{4x}.$$

Substituindo em

$$V = x^2 y,$$

obtemos a função que representa o volume, em função apenas da variável x é

$$\begin{aligned} V(x) &= x^2 \left(\frac{12 - x^2}{4x} \right) \\ &= -\frac{1}{4}x^3 + 3x \\ &= x \left(\frac{-x^2}{4} + 3 \right). \end{aligned}$$

Sabemos que o volume é uma grandeza positiva, assim devemos ter

$$\begin{aligned} x \left(\frac{-x^2}{4} + 3 \right) > 0 &\implies \frac{-x^2}{4} + 3 > 0 \\ &\implies \frac{x^2}{4} < 3 \\ &\implies x^2 < 12 \\ &\implies 0 < x < \sqrt{12} \cong 3,46. \end{aligned}$$

Logo, o nosso problema consiste em encontrar o valor máximo de uma função polinomial do 3° grau, definida no intervalo $(0, \sqrt{12})$. Note que $V(x)$ é derivável em todo o seu domínio, assim seus números críticos serão obtidos em pontos onde a derivada existe. Vamos usar o Teste da segunda derivada. Temos

$$V'(x) = \frac{-3x^2}{4} + 3$$

e

$$V''(x) = -\frac{3x}{2}.$$

Os possíveis pontos críticos de $V(x)$ são assumidos nas raízes de sua primeira derivada, ou seja, quando

$$-\frac{3}{4}x^2 + 3 = 0.$$

Resolvendo esta equação do 2º grau, obtemos $x = -2$ ou $x = 2$, porém o primeiro valor deve ser descartado, pois está fora do domínio da função.

Daí, o único ponto crítico da função é $x = 2$. Calculando $V''(2)$ temos $V''(2) = -3$, portanto o teste da segunda derivada garante que $V(2) = 4$ é um ponto de máximo de $V(x)$.

Logo o maior volume possível para a caixa é $4m^3$, como podemos ver no gráfico abaixo. ◇

Figura 22: Gráfico de $V(x)$.
Fonte: Autor

2. Minimizando a área total de um reservatório. Será construído um reservatório de água em formato de um cilindro reto sem a tampa superior, com um volume total de $8\pi m^3$, cerca de 25000 litros. Encontre os valores da altura h e raio da base r que minimizam a quantidade de material usada na construção desse reservatório. Adote $\pi = 3,14$.

Solução Primeiramente note que, a quantidade de material usada é dada pela área da superfície total do reservatório. Observe a figura 23.

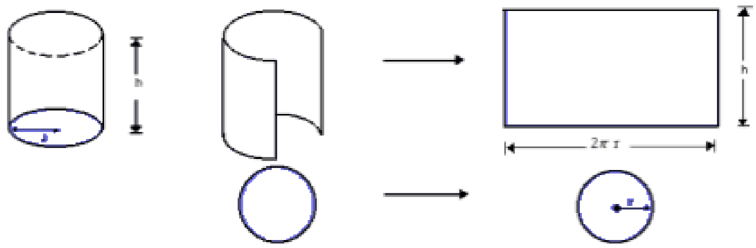

Figura 23: Forma do reservatório e planificação da superfície total.
Fonte: [3]

Sabemos da geometria que a superfície lateral do cilindro é

$$S = 2\pi r h$$

e a área da base é

$$A_b = \pi r^2,$$

logo a superfície total sem a tampa fica sendo

$$A_t = S + A_b = 2\pi r h + \pi r^2.$$

Sabemos que o volume é dado por

$$V = \pi r^2 h.$$

Como o volume total é $8\pi m^3$, tem-se que

$$\pi r^2 h = 8\pi \Longrightarrow h = \frac{8}{r^2}.$$

Substituindo o valor de h encontrado acima na equação

$$A_t = 2\pi r h + \pi r^2,$$

obtemos a função da área dependendo apenas de r

$$\begin{aligned} A_t(r) &= 2\pi r \frac{8}{r^2} + \pi r^2 \\ &= \frac{16\pi}{r} + \pi r^2. \end{aligned}$$

Note que $A_t(r)$ é uma função racional. Assim, podemos usar o teste da segunda derivada para obtermos o ponto que maximiza essa função.

Temos que

$$A_t'(r) = 2\pi r - \frac{16\pi}{r^2}$$

e

$$A_t''(r) = 2\pi + \frac{16\pi}{r^3}.$$

Os pontos críticos de $A_t(r)$ são as raízes de

$$\begin{aligned} 2\pi r - \frac{16\pi}{r^2} = 0 \implies & \; 2\pi r = \frac{16\pi}{r^2} \\ \implies & \; r^3 = \frac{16\pi}{2\pi} = 8. \end{aligned}$$

Como $r > 0$, então $r = 2$. Assim o único ponto crítico de $A_t(r)$ é $r = 2$.

Temos que $A_t''(2) = 4\pi > 0$, portanto $A_t(2) = 12\pi \cong 37,68$ é mínima. Substituindo $r = 2$ em $h = \frac{8}{r^2}$, obtemos $h = 2$, ou seja, a altura deve ser igual ao raio da base para que a quantidade de material usada em tal reservatório seja mínima. ◇

6.2 Aplicações à Física

1. Aceleração mínima em lançamentos espaciais. O telescópio espacial *Hubble* foi colocado em órbita em 24 de abril de 1990 pelo ônibus espacial *Discovery*. Um modelo para a velocidade do ônibus durante essa missão, do lançamento em $t = 0$ até a ejeção do foguete auxiliar em $t = 126s$, é dado por $v(t) = 0,0003968t^3 - 0,02752t^2 + 7,196t - 0,9397$, em m/s. Usando este modelo, estime a aceleração mínima do ônibus espacial entre esses instantes, de modo a garantir a subida.

Solução O problema é bem simples, pois $v(t)$ é uma função polinomial de 3° grau. Como vimos

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

Assim temos que

$$a(t) = v'(t) = 0,0011904t^2 - 0,05504t + 7,196.$$

As derivadas de $a(t)$ são

$$a'(t) = 0,0023808t - 0,05504$$

e

$$a''(t) = 0,0023808.$$

Seus pontos críticos são as raízes de

$$0,0023808t - 0,05504 = 0 \Longrightarrow t \cong 23,12s.$$

Como $a''(t) > 0$ para todo valor de t no intervalo $[0, 126]$ então, o teste da segunda derivada nos diz que $a(23,12) \cong 6,56 m/s^2$ é a aceleração mínima que o ônibus deve manter entre os instantes $t = 0$ e $t = 126s$. $\diamond$

Vejamos o gráfico de $a(t)$ na figura a seguir.

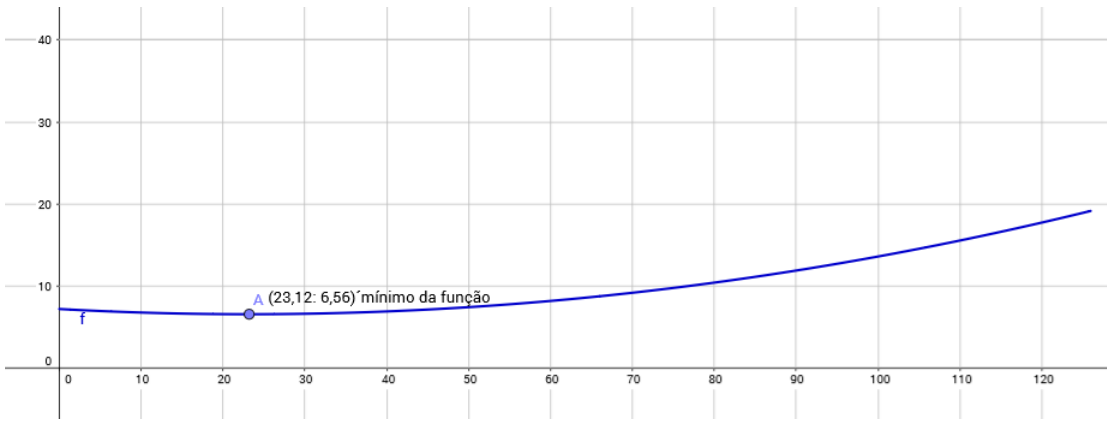

Figura 24: Gráfico de $a(t)$.

Fonte: Autor

2. Corrente elétrica mínima em um circuito elétrico. A carga elétrica, em coulombs, transmitida através de um circuito varia de acordo com a função $q(t) = t^4 - 4t^3$. Determine o tempo t, em segundos, quando a corrente elétrica $i = q'(t)$ atinge seu valor mínimo.

Solução Dos dados do problema temos

$$i(t) = q'(t) = 4t^3 - 12t^2.$$

Note que t deve ser maior que zero (quando $t = 0$ não há carga no circuito). Note também que, em $t = 3$, a carga no circuito também é nula. Desse modo, o intervalo de interesse da função polinomial $i(t)$ será $(0, 3)$.

As derivadas de $i(t)$ são

$$i'(t) = 12t^2 - 24t$$

e

$$i''(t) = 24t - 24.$$

Os pontos críticos de $i(t)$ são as raízes de $i'(t)$, ou seja, de

$$12t^2 - 24t = 0,$$

cujas soluções são $t = 0$ e $t = 2$, o primeiro valor deve ser descartado, por não ser útil ao problema. Assim $t = 2$ é o único ponto critico de $i(t)$.

Como $i''(2) = 24 > 0$, o teste da segunda derivada nos diz que $t = 2s$ é o instante onde a corrente é mínima. ◇

Observe o gráfico de $i(t)$ na figura a seguir.

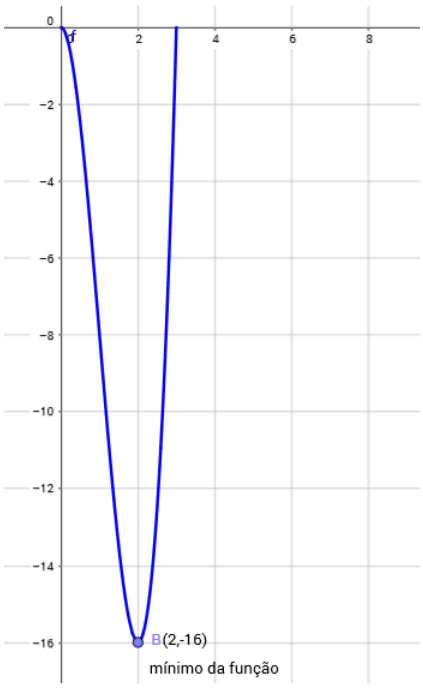

Figura 25: Gráfico de $i(t)$.
Fonte: Autor

6.3 Aplicações à Economia

1. Minimizando o custo médio de produção. Suponha que $c(x) = 3x^4 - 96x + 2000$ expresse a função que representa o custo médio da produção de x mil unidades diárias de um certo produto, em reais. Determine o nível de produção que minimize o custo médio nessa produção.

Solução Note que o custo é mínimo quando a função assumir um valor mínimo para x positivo. Embora x seja um número natural, vamos considerar a função $c(x)$ como sendo contínua e derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ com $x > 0$.

Sendo assim, temos

$$c'(x) = 12x^3 - 96x$$

e

$$c''(x) = 36x^2.$$

Os pontos críticos de $c(x)$ são as raízes de

$$12x^3 - 96x = 0 \Longrightarrow x = 2.$$

Como $c''(2) = 144 > 0$, temos pelo teste da segunda derivada que, em $x = 2$, o custo na produção é mínimo, ou seja, em uma linha de produção que produza dois mil itens deste produto por dia, o custo será mínimo. ◇

2. Maximizando o lucro de produção. Suponha que $r(x) = 9x$ represente a receita na produção de x mil unidades de um produto por semana e o custo de produção dos mesmos seja dado por $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, em reais. Qual deve ser a produção semanal para se obter o maior lucro possível.

Solução Note que a função que representa o lucro na produção é dada por

$$L(x) = r(x) - c(x) = -x^3 + 6x^2 - 6x,$$

pois numa linha de produção o lucro é obtido pela a diferença entre a receita e custo de produção.

Novamente, vamos considerar que $L(x)$ é uma função contínua e derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ com $x > 0$. Assim, podemos usar o teste da segunda derivada para encontrar o valor máximo da função $L(x)$.

Temos

$$L'(x) = -3x^2 + 12x - 6$$

e

$$L''(x) = -6x + 12.$$

Os pontos críticos de $L(x)$ são as raízes de

$$-3x^2 + 12x - 6 = 0.$$

Daí, $x = 2 - \sqrt{2}$ ou $x = 2 + \sqrt{2}$.

Como

$$L''(2 - \sqrt{2}) = 6\sqrt{2} > 0$$

e

$$L''(2 + \sqrt{2}) = -6\sqrt{2} < 0,$$

temos que o lucro é máximo quando a produção semanal for de $2 + \sqrt{2} \cong 3,414$ mil produtos, ou seja, de 3414 por semana. ◇

Observe o gráfico de $L(x)$ a seguir.

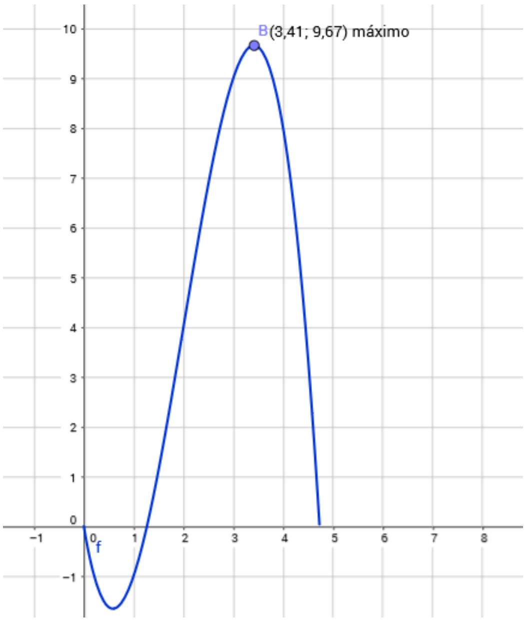

Figura 26: Gráfico de $L(x)$.
Fonte: Autor

6.4 Aplicações à Geometria

1. Maximizando medidas em Geometria Espacial. Encontre as dimensões do cone de máximo volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio R.

Solução Observe a figura abaixo.

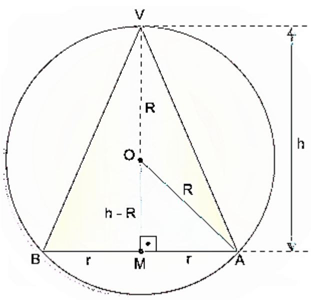

Figura 27: Representação plana do cone inscrito na esfera.
Fonte: [3]

Considere o ponto O, centro da esfera de raio $R = OA$, $h = VM$ é a altura do cone e $r = MA$ é o raio da base do cone. Note que todos esses valores são positivos.

Sabemos da geometria que o volume do cone é dado por

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

Podemos considerar o caso em que o cone é reto, pois se a base é fixa o cone reto é o de maior altura e portanto o de maior volume.

Observe agora o triângulo OMA, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$R^2 = (h - R)^2 + r^2.$$

Logo

$$r^2 = R^2 - (h - R)^2 = 2hR - h^2,$$

substituindo na equação do volume obtemos

$$\begin{aligned} V(h) &= \frac{\pi}{3}(2hR - h^2)h \\ &= -\frac{\pi}{3}h^3 + \frac{2\pi R}{3}h^2. \end{aligned}$$

A expressão acima é uma função polinomial do 3º grau em função da altura h do cone. Assim podemos usar o teste da segunda derivada para obter seu valor máximo.

As derivadas de $V(h)$ são

$$V'(h) = -\pi h^2 + \frac{4\pi R}{3}h$$

e

$$V''(h) = -2\pi h + \frac{4\pi R}{3}.$$

Os pontos críticos de $V(h)$ são as raízes de

$$-\pi h^2 + \frac{4\pi R}{3}h = 0,$$

que implica $h = \frac{4}{3}R$ ou $h = 0$. Como h é positivo temos que $h = \frac{4}{3}R$ é o único ponto crítico da função e

$$V''\left(\frac{4}{3}R\right) = -\frac{4\pi}{3}R < 0$$

então, o volume do cone é máximo quando $h = \frac{4}{3}R \Longrightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R.$ ◇

2. Minimizando distâncias entre dois pontos do plano. Encontre o ponto do gráfico de $f(x) = x^2$ mais próximo do ponto $A(0, 2)$.

Solução Sabemos da geometria analítica que a distância entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \geq 0.$$

Assim, a função que expressa a distância a ser minimizada no problema é

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2},$$

que em termos da variável x é dada por

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-2)^2},$$

pois $y = x^2$. Fazendo os cálculos obtemos

$$d(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}.$$

Note que x pode assumir qualquer valor real. Vamos agora usar um artifício que simplificará os nossos cálculos, fazendo

$$D(x) = [d(x)]^2 = x^4 - 3x^2 + 4,$$

pois quando $D(x)$ assumir um valor mínimo a função $d(x) = \sqrt{D(x)}$ também assume. Pois se $D(x_0)$ for o valor mínimo de $D(x)$, então $D(x_0) \leq D(x)$ para todo x real. Note que, $D(x_0) \leq D(x) \Longrightarrow d(x_0) \leq d(x)$.

Assim, nosso problema se reduz a minimizar uma função polinomial do 4° grau dada por $D(x) = x^4 - 3x^2 + 4$, para x variando nos reais. Vamos usar o Teste da segunda derivada para isso.

As derivadas de $D(x)$ são

$$D'(x) = 4x^3 - 6x$$

e

$$D''(x) = 12x^2 - 6.$$

Os pontos críticos de $D(x)$ são as raízes de

$$4x^3 - 6x = 0 \Longrightarrow 2x(2x^2 - 3) = 0.$$

Daí, $x = 0$, $x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ e $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Como $D''(0) = -6 < 0$, então o teste da segunda derivada diz que $D(0)$ é um máximo de $D(x)$.

Da mesma forma temos que $D''\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = D''\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 12 > 0$, implica que os valores mínimos de $D(x)$ são assumidos quando $x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ e $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Note que $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$. Logo, temos dois pontos que satisfazem o problema $B\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e $C\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Isso se deve ao fato de que a parábola que representa o gráfico de $f(x) = x^2$ ser simétrica em relação ao eixo OY. $\diamond$

Observe o gráfico de $f(x) = x^2$ abaixo.

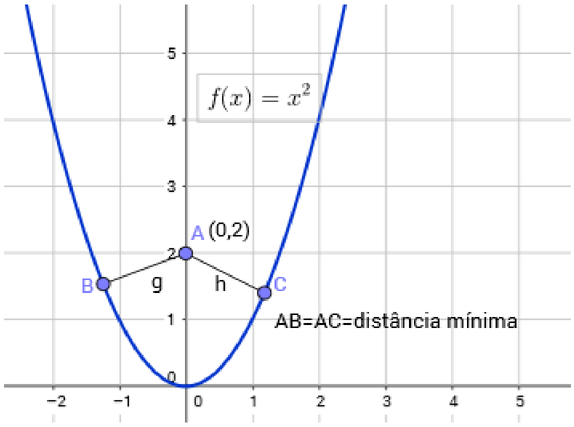

Figura 28: Distância mínima do gráfico de $f(x) = x^2$ ao ponto $A(0, 2)$.
Fonte: Autor

6.5 Aplicações à Medicina

1. Sensibilidade a quantidade de medicamentos. [16] A resposta R do corpo à uma dose de um medicamento as vezes é representada por uma função da forma

$$R = m^2\left(\frac{c}{2} - \frac{m}{3}\right),$$

onde c é uma constante positiva que depende em parte do medicamento e m é a quantidade de medicamento absorvida pelo sangue. Se a resposta esperada for uma variação na pressão sanguínea, então R deverá ser medido em milímetros de mercúrio, se a resposta for uma variação de temperatura, R será medido em gruas centígrados e assim por diante. Calcule a quantidade de medicamento à qual o organismo é mais sensível, determinando o valor de m que maximiza a derivada $R'(m)$, chamada de sensibilidade do corpo ao medicamento.

Solução Note que

$$R(m) = m^2\left(\frac{c}{2} - \frac{m}{3}\right) = -\frac{m^3}{3} + \frac{c}{2}m^2.$$

Assim, $R(m)$ é uma função polinomial do 3° grau. Vamos usar o teste da segunda derivada para maximizar tal função.

As derivadas de $R(m)$ são

$$R'(m) = -m^2 + cm$$

e

$$R''(m) = -2m + cm.$$

Os pontos críticos da função são as raízes de

$$-m^2 + cm = 0,$$

que implica $m = 0$ ou $m = c$. Como a quantidade m deve ser positiva, temos que o único número crítico de $R(m)$ é $m = c$. Temos que $R''(c) = -c < 0$. Portanto a quantidade máxima do medicamento no organismo deve ser igual a c. $\diamond$

Para encerrar nosso trabalho apresentamos a solução do nosso primeiro problema, proposto no início do capítulo 2.

2. Contração da traqueia. [16] Quando tossimos, a traqueia se contrai e aumenta a velocidade do ar que passa. Isso levanta questões sobre quanto ela deveria se contrair para maximizar a velocidade e se ela realmente se contrai tanto assim quando tossimos. Considerando algumas hipóteses razoáveis sobre a elasticidade da parede da traqueia e de como a velocidade do ar próximo as paredes é reduzida pelo atrito, é possível estimar que a velocidade média v do fluxo de ar pode ser modelada pela equação $v = c(r_0 - r)r^2$, em m/s, e $r_0/2 \leq r \leq r_0$, onde r_0 é o raio, em centímetros, da traqueia em repouso e c é uma constante positiva cujo valor depende, em parte, do comprimento da traqueia. Mostre que v é máxima quando $r = 2/3r_0$, ou seja, quando a traqueia está cerca de 33% contraída. O impressionante é que imagens de raio X confirmam que a traqueia se contrai assim durante a tosse.

Solução Note que

$$v(r) = c(r_0 - r)r^2 \Longrightarrow v(r) = -cr^3 + cr_0r^2.$$

Então o problema é bem simples, basta maximizar uma função polinomial de 3º grau em r. Vamos usar novamente o teste da segunda derivada para isso.

As derivadas de $v(r)$ são

$$v'(r) = -3cr^2 + 2cr_0r$$

e

$$v''(r) = -6cr + 2cr_0.$$

Fazendo $v'(r) = 0$, vem que

$$-3cr^2 + 2cr_0 r = 0,$$

logo $r = 0$ ou $r = \dfrac{2}{3}r_0$, o primeiro valor deve ser descartado, pois o raio é positivo. Assim o único ponto crítico de $v(r)$ é $r = \dfrac{2}{3}r_0$.

Como $v''\left(\dfrac{2}{3}r_0\right) = -2cr_0$ e ainda c e r_0 são positivos, então

$$v''\left(\frac{2}{3}r_0\right) = -2cr_0 < 0.$$

Assim o teste da segunda derivada garante que $v(r)$ é máxima quando $r = \dfrac{2}{3}r_0$, no intervalo de interesse $[\frac{r_0}{2}, r_0]$, ou seja, a velocidade é máxima quando a traqueia esta 33% contraída. Como queríamos mostrar. $\diamond$

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que, com este trabalho possamos eliminar algumas das dificuldades encontradas no Ensino Médio, como por exemplo, resolver problemas cuja solução em determinar os valores extremos de uma função polinomial de grau maior que 2, pois algumas das ferramentas vistas aqui são úteis no estudo, sobre valores extremos, de quaisquer funções contínuas vistas no Ensino Médio. Além disso, esperamos incentivar jovens estudantes a conhecerem o quanto a matemática é abrangente e importante em diversas áreas do conhecimento, pois ela está presente em inúmeras situações do seu dia-a-dia. Para um melhor entendimento e mais situações indicamos as nossas referências.

REFERÊNCIAS

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. vol. 1. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.

[2] GIOVANNI, José Ruy.; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa**. vol. 3. 2. ed.renov. São Paulo: FTD, 2005.

[3] GOOGLE, https://www.google.com.br/search?q

[4] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Limite, Derivadas e Noções de Integral. vol.8. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[5] LIMA, Elon Lages; et al. **A Matemática do Ensino Médio**. vol. 1. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[6] LIMA, Elon Lages; et al. **A Matemática do Ensino Médio**. vol. 2. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[7] LIMA, Elon Lages; et al. **A Matemática do Ensino Médio**. vol. 4. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[8] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. vol.1. 13. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2011.

[9] LIMA, Elon Lages. **Temas e Problemas Elementares**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias** . 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[11] MARQUES, Gil da Costa, **Fundamentos de Matemática I**. 1. ed. São Paulo: USP/Univesp/Edusp, Licenciatura em ciências, 2014.

[12] MUNIZ NETO, Antonio Caminha, **Fundamentos de Calculo**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2015.(Coleção PROFMAT).

[13] OLIVEIRA, Helano Leom Maia de. **Aplicações de Matemática Básica em Problemas de Modelagem e Otimização**. 65f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal do Cariri, 2017.

[14] STEWART, James. **Cálculo**. Tradução: EZ2Translate. vol. 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

[15] SBM, Resumos do Profmat MA22, **Fundamentos de Cáculo** 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[16] THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo**. Tradução: Kleber Pedroso e Regina Simille de Macedo. vol. 1. 11. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

[17] WAGNER, Eduardo. **Revista do Professor de Matemática** nº18. Rio de Janeiro: SBM, 1991.