UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

BRUNO SERAFIM DE SOUZA

APLICAÇÕES DA DERIVADA: UMA ABORDAGEM PARA PARTICIPANTES DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

JUAZEIRO DO NORTE
2017

BRUNO SERAFIM DE SOUZA

APLICAÇÕES DA DERIVADA: UMA ABORDAGEM PARA PARTICIPANTES DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva.

JUAZEIRO DO NORTE
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

S729a Souza, Bruno Serafim de.

Aplicações da derivada: uma abordagem para participantes das olímpiadas de matemática/ Bruno Serafim de Souza – 2017.

77 f.: il.; enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2017.

Orientação: Prof . Dr. Juscelino Pereira Silva.

1. Limites. 2. Derivadas. 3. Aplicações. 4. Olímpiadas de Matemática. I. Silva, Juscelino Pereira. II. Título.

CDD 515.3

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Aplicações da Derivada: Uma Abordagem Para Participantes das Olimpíadas de Matemática

Bruno Serafim de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 30 de junho de 2017.

Banca Examinadora

Profa. Dr. Juscelino Pereira Silva - UFCA

Orientador

Maria Silvana Alcantara Costa

Prof. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa - UFCA

Placido Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade -UFCA

Dedico este traballho
a Cristo meu Mestre e meu Senhor.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pelas bênçãos e maravilhas sem medidas que tens me concebido nessa baixa terra e pelas promessas cumpridas em minha vida.

À minha mãe, Maroli Vitalina Serafim por me ajudar a compreender que somente através dos estudos poder superar limites e barreiras.

À minha esposa Fabiana Rodrigues dos Santos pela força que me destes nos momentos mais difíceis em toda trajetória da minha vida. Também por acreditar no meu potencial e sobretudo, pela compreensão da minha ausência em prol à dedicação incansável para concluir este curso.

Ao meu filho Pedro Arthur Rodrigues Serafim por sua simples existência.

Aos professores Luiz Eduardo Landim Silva e Mario de Assis Oliveira por todo incentivo durante à graduação e mais ainda, por nunca duvidarem da minha capacidade para conquistar este espaço.

Aos meus colegas de trabalho da escola Professor José Teles de Carvalho: Osmar Freire do Nascimento Filho, pelo seu companheirismo em todo curso e também por ajudar-me na correção e inclusão dos recursos gráficos presentes no texto; Edjan Fernandes dos Santos, pela concessão de referências que me possibilitou a aprovação em várias disciplinas; Jardel Pereira da Silva, pela sua disposição incomparável na correção e normatização desse trabalho; e por fim, ao professor Dalvan José de Sousa, pela tradução dos textos em inglês encontrados nesse trabalho.

A todos os colegas do mestrado desta instituição pelo companheirismo de uns para com os outros em todas as lutas que enfrentamos juntos, e principalmente pelas conquistas ao longo de todo o curso.

À coordenadora acadêmica institucional do PROFMAT, campus UFCA, Juazeiro do Norte-CE, Maria Silvana Alcântara Costa pelo seu testemunho enquanto profissional e principalmente como pessoa e exemplo a ser seguido.

Aos professores do programa: Plácido Francisco de Assis Andrade de Oliveira e Clarice Dias de Albuquerque por se mostrarem excelentes profissionais, e consequentemente, fazerem o curso ter alto nível.

Em especial, ao professor Juscelino Pereira Silva não somente pela brilhante orientação desse trabalho, mas também pela sua presença como pesquisador a contribuir significativamente para o desenvolvimento da pesquisa em Matemática.

Por fim, à Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

"A gravidade explica os movimentos dos planetas, mas não pode explicar quem colocou os planetas em movimento. Deus governa todas as coisas e sabe tudo que é ou que pode ser feito."
(Isaac Newton)

RESUMO

O Cálculo Diferencial é uma disciplina básica da Análise Matemática, a qual versa sobre Derivadas. O conceito de Derivada está associado às ideias de retas tangentes à uma curva e à taxas de variação. Matemáticos como Issac Newton $(1643 - 1727)$ e Pierre de Fermat $(1601 - 1665)$ contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo, porém deve-se principalmente a Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646 - 1716)$ a relação entre derivada e integral. O Cálculo Diferencial contribui com a construção de conceitos e resultados das ciências em geral, em especial, a Engenharia; Medicina; Economia; Administração; Física; Química; Biologia e etc. Desta forma, este trabalho apresentará resultados sobre limites e derivadas, entre eles um estudo sobre máximos e mínimos de funções, de forma a construir uma base sólida de conhecimentos básicos, pois os mesmos serão necessários na resolução das aplicações propostas no capítulo 04. Tais aplicações estão distribuídas em dois grupos, algumas ligadas a prática, outras um pouco mais teóricas, e tem como propósito despertar o interesses de alunos, participantes de olimpíadas de matemática, pela disciplina de Cálculo.

Palavras-chave: Limites. Derivadas. Aplicações. Olimpíadas de Matemática.

ABSTRACT

The Differential Calculationis a basic discipline of Mathematics Analysis, which deals with Derivatives. The concept of Derivative is associated with ideas of tangent line to a curve and to rate of variation. Mathematicians like Issac Newton $(1643 - 1727)$ and Pierre de Fermat $(1601 - 1665)$ contributed for the development of Calculation, but the main responsible for the relationship between Derivate and Integral was Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646 - 1716)$. The Differential Calculation applications contribute with the construction of concepts and results of science in general, including Engineering; Medicine; Economy; Management; Physical; Chemistry; Biology and etc. There fore, this work will present the results about limits and derivatives, among them a study about Maximums and minimums of functions in order to build a solid base of basic knowledge, because they will be necessary to resolutions of applications given in chapter 04. These applications are distributed in two groups, some linked to practice, others to theory, and they aims to arouse the interests of students, participants in the Olympic Mathematics, through Calculation Discipline.

Key-words: Differential Calculation. Limits. Derivative. Appications. Math Olympics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Segundo Geraldo Ávila (2006), *"Descartar o Cálculo no ensino médio é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual"* [2]. Para Ávila, a exclusão do Ensino de Cálculo torna-se um fator predominante no desenvolvimento educacional dos alunos, e consequentemente, na integração ao convívio com as inúmeras situações presentes em nosso meio. Portanto, faz-se necessário a aprendizagem dos principais fundamentos oferecidos por essa disciplina, pois sem os mesmos os usuários certamente terão dificuldades em disciplinas que necessitam deste conhecimento como aluno de Graduação.

Precisou-se de pouco tempo dedicado ao projeto OBMEP na ESCOLA do Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA para que pudesse perceber o alto nível dos alunos participantes do projeto. Portanto, acredita-se ser acessível uma abordagem sobre aplicações da derivada para participantes das olimpíadas de matemática, pois assegurado o conhecimento das principais ferramentas do Cálculo Diferencial muitos dos problemas de Matemática podem ser solucionados naturalmente.

O ano 2005, foi histórico, para o desenvolvimento da Matemática na Educação Pública, pois a partir deste ano, as regiões mais carentes, norte e nordeste, passam a ter uma política pública de valorização da disciplina com a oferta de material didático. O Ministério da Educação - MEC através do Fundo Nacional de Desenvolvimento - FNDE distribuíram livros didáticos de Matemática nas escolas públicas, nos quais pode-se destacar uma abordagem bastante peculiar sobre o Cálculo Diferencial na terceira série do Ensino Médio.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN'S, 2002 *"o currículo do Ensino Médio deve ser estruturado de modo a assegurar ao aluno a possibilidade de ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental de forma integrada com outras áreas do conhecimento"* [16]. É sabido que existem diversas áreas tais como Medicina, Engenharia, Física, Química, Biologia, Economia, Administração entre outras que necessitam quase sempre de conceitos e resultados advindos diretamente das aplicações de Derivadas.

Exemplificando, na Medicina se necessita do Cálculo Diferencial para determinar o ângulo ótimo na ramificação dos vasos sanguíneos para maximizar a circulação. Já na Engenharia Civil utiliza-se a derivada na teoria da elasticidade para dimensionar colunas, vigas e lajes. O desenvolvimento da cinemática, dos gases perfeitos e das previsões do crescimento ou decrescimento populacional requerem o uso de Derivada, ou seja, em Física, Química e Biologia, respectivamente, precisa-se do Cálculo Diferencial. Por fim, na Economia se emprega a análise marginal que depende exclusivamente de Derivada, e na Administração se utiliza as chamadas receitas marginais.

Este trabalho é composto por cinco capítulos com o objetivo de ampliar o conhecimento dos alunos participantes das olimpíadas de matemática. No primeiro capítulo, foi apresentado o objeto desse trabalho para garantir o entendimento central da temática. No segundo capítulo será abordado o assunto de Limite que poderá ser omitido em uma primeira leitura por aqueles que já possuem certa experiência sobre o tema. Porém, o mesmo faz-se importante para a garantia dos principais conceitos da derivada.

O terceiro capítulo versará sobre Derivada, onde serão apresentados os principais conceitos e resultados para garantir suas aplicações em problemas de Matemática. No quarto capítulo será alcançado o objetivo do trabalho, pois serão exibidas as aplicações da derivada ao nível dos alunos mencionados acima.

Por fim, conclui-se este trabalho com as considerações finais, que explanam as aplicações do Cálculo Diferencial.

2 LIMITE

"Se as etapas da evolução do homem estivessem embutidas num livro, com certeza o método dos limites seria uma das páginas mais belas, onde a inteligência humana deixou marcas significativas. Mas nem por isso deve ser entendido como fruto de uma cabeça privilegiada, e sim como resultado de muitas incertezas, tentativas, discordâncias e contribuições convincentes."

Revista Ciências Hoje (n. 79, p. 33)

Neste capítulo abordaremos os conceitos de limite e continuidade de funções de uma variável real. Entende-se por funções f de uma variável real aquelas cujo domínio D_f é um intervalo ou união de subintervalos. Portanto, sempre que for mencionado sobre o domínio de tais funções f e nada seja dito ao contrário, ficará implícito que seu domínio D_f será um intervalo ou uma união de subintervalos reais neste trabalho.

A Derivada de uma função real é um limite. Portanto, para alcançar o objetivo proposto neste trabalho, julga-se necessário estudar os principais conceitos e resultados do limite.

2.1 Limite de uma função real

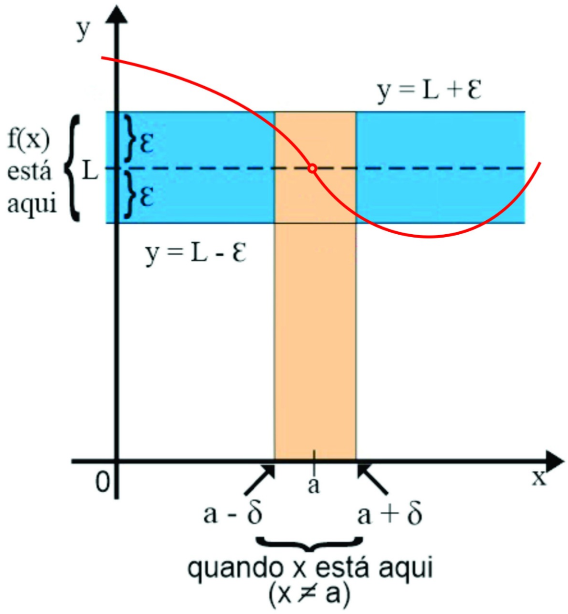
Nesta seção, abordaremos o *limite* de funções de uma variável real através da sua definição, seguida de uma interpretação geométrica e finalizaremos com a apresentação de dois teoremas comum ao assunto.

Definição 2.1.1 *Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $\boldsymbol{a}$ um elemento de D_f ou uma extremidade de algum dos intervalos de D_f. Diz-se que o limite de f quando x tende para $\boldsymbol{a}$ é o número real L, e escreve-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$ existir algum $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{2.1}$$

Conceitua-se "o limite de $f(x)$ quando x tende para $\boldsymbol{a}$ é igual a L," significando que é sempre possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo ao L quanto se queira, desde que $x \in D_f$ seja tomado suficientemente próximo ao $\boldsymbol{a}$, mas não necessariamente igual a $\boldsymbol{a}$. Para uma melhor compreensão da definição do limite de uma função real considera-se a Figura 1, p. 14.

Figura 1: Gráfico da definição de limite.



Fonte: Construída pelo autor.

Uma vez que se deseja calcular o valor da inclinação ou coeficiente angular de uma reta tangente $\boldsymbol{t}$ à curva $y = f(x)$ em um ponto $\boldsymbol{a}$ pertencente ao domínio de f, se deve primeiramente fazer o incremento na variável x, simbolizado por $\Delta x = x - a$ tender a zero e, consequentemente, o incremento na variável y, simbolizado por $\Delta y = f(x) - f(a)$ também tenderá a zero. Por outro lado, a razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a inclinação de cada reta secante determinada pelos pontos $P = (a, f(a))$ e $Q = (x, f(x))$ ver Figura 1. Dessa forma se percebe que tais retas secantes aproximam-se de uma posição limite, e a essa reta limite $\boldsymbol{t}$ dar-se o nome de reta tangente à curva f no ponto $P = (a, f(a))$. A inclinação dessa reta tangente no ponto $\boldsymbol{a}$ é o limite das inclinações das retas secantes determinadas pelos pontos P e Q. Portanto, a inclinação da reta tangente $\boldsymbol{t}$ no ponto $\boldsymbol{a}$ é o limite da razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando Δx tende a zero ou equivalente quando x tende a $\boldsymbol{a}$. Contudo, define-se a razão incremental ou quociente de Newton de y em relação a x como sendo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Uma vez que m é o limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando x tende para $\boldsymbol{a}$, diz-se que o valor desse limite caso exista é a Derivada da função $f(x)$ no ponto $\boldsymbol{a}$, fato este que será tratado com mais rigor no Capítulo 3, especificamente na seção 3.1.

Simbolicamente escreve-se,

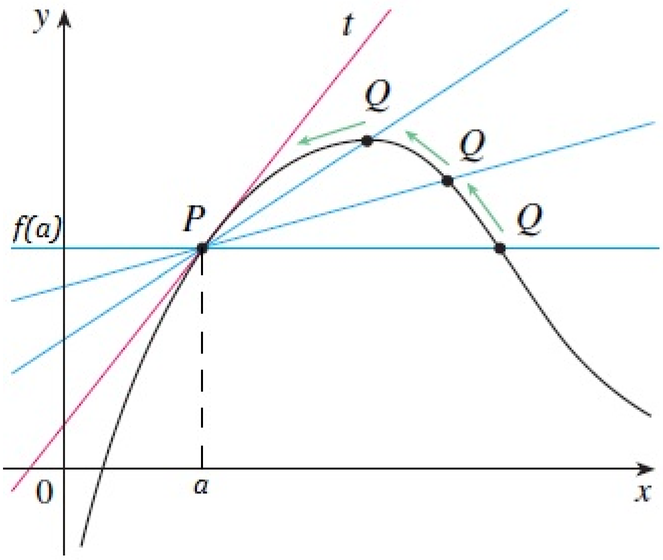
$$m = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2.2}$$

Definição 2.1.2 *Seja f uma função representada pela curva de equação $y = f(x)$. Chama-se reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$, a reta cuja equação é*

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a),$$

onde $f'(a)$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto P.

Figura 2: Gráfico da reta tangente $\boldsymbol{t}$ à curva f no ponto $\boldsymbol{a}$.



Fonte: STEWART (2014. p. 131).

Contudo, faz-se necessário uma ilustração do cálculo do limite de uma função por meio de uma conjectura para que o mesmo nos permita refletir sobre a necessidade existente tanto de uma definição precisa de limite de uma função quanto para o conjunto de suas propriedades em prol da resolução de variados problemas relacionados a limite de uma função real qualquer.

Exemplo 2.1.1 *Conjecture o valor para limite de função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ quando $x \to 1$.*

Solução. Perceba que f não está definida para $x = 1$. Porém, sabemos pela Definição 2.1.1, p. 13 que isso não afeta no cálculo do limite, pois x tende para 1, mas não é necessariamente deva ser igual a 1.

Logo, existe

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right).$$

Tabela 1: Conjectura do limite da função f.

$x < 1$	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$	$x > 1$	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
$0,5$	$1,5$	$1,5$	$2,5$
$0,9$	$1,9$	$1,1$	$2,1$
$0,99$	$1,99$	$1,01$	$2,01$
$0,999$	$1,999$	$1,001$	$2,001$
$0,9999$	$1,9999$	$1,0001$	$2,0001$

Fonte: Construída pelo autor.

Portanto, de acordo os valores da função f conforme Tabela 1, conjetura-se o valor do limite em questão como sendo

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2.$$

Por fim, percebe-se que além da dificuldade encontrada em aproximar as imagens $f(x)$ ao valor conjecturado 2 quando os valores de x se aproximam de 1, esse método não nos permite afirmar com absoluta certeza sobre o tal valor conjecturado, pois para esse fato basta ver [21]. Porém, uma vez que se dispõe de propriedades dos limites na seção 2.2, se poderá afirmar com convicção sobre o resultado alcançado.

Vale ainda apresentar a definição de limite através de intervalos reais, pois a mesma é usada em várias demonstrações e ajudará na interpretação geométrica do limite conforme Figura 1. Isto é,

$$\begin{aligned}
0 < |x-a| < \delta &\Rightarrow |x-a| < \delta \\
&\Rightarrow -\delta < x-a < \delta,\ x \neq a \\
&\Rightarrow a-\delta < x < a+\delta,\ x \neq a \\
&\Rightarrow x \in (\delta - a, \delta + a)\,,\ x \neq a \\
&\quad e \\
|f(x)-L| < \epsilon &\Rightarrow -\epsilon < f(x)-L < \epsilon \\
&\Rightarrow L-\epsilon < f(x) < L+\epsilon \\
&\Rightarrow f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)\,.
\end{aligned}$$

Percebe-se pela Definição 2.1.1, p. 13 que se existir tal limite é sempre possível tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto se queira, desde que os valores de x sejam tomados suficientemente próximos de $\boldsymbol{a}$, conforme Figura 1.

A seguir se apresentará o **Teorema da Unicidade do Limite** de uma função, o qual é um importante resultado para o desenvolvimento da teoria.

Teorema 2.1.1 ***(Unicidade do Limite).*** *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = M$*, então* $L = M$*.*

Demonstração. Supondo, por absurdo, que $L \neq M$.
Considere $\epsilon = \left|\frac{L-M}{2}\right| > 0$. Então, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x-a| < \delta_1, x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L| < \left|\frac{L-M}{2}\right|; \tag{2.3}$$

$$0 < |x-a| < \delta_2, x \in D_f \Rightarrow |f(x) - M| < \left|\frac{L-M}{2}\right|. \tag{2.4}$$

Pela propriedade da desigualdade triangular vale que

$$\begin{aligned} |M-L| &= |(f(x)-L) + (M - f(x)| \\ &\leq |f(x)-L| + |M-f(x)| \\ &= |f(x)-L| + |f(x)-M|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|M-L| \leq |f(x)-L| + |f(x)-M|.$$

Tomando-se $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ tem-se pelas relações 2.3 e 2.4 que, dado $\epsilon = \left|\frac{L-M}{2}\right| > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |M-L| &\leq |f(x)-L| + |f(x)-M| \\ &< \left|\frac{L-M}{2}\right| + \left|\frac{L-M}{2}\right| \\ &= 2 \cdot \left|\frac{L-M}{2}\right| = |L-M|, \end{aligned}$$

Logo,

$$|M-L| < |M-L|,$$

o que é uma contradição. Portanto, $L = M$. ∎

O teorema supracitado garante que, se existir o limite de uma função, então necessariamente ele é único.

Antes de se apresentar as propriedades operatórias dos limites, julga-se necessário enunciar e demonstrar dois lemas que serão importantes para a obtenção dos resultados desejados como veremos a seguir.

Lema 2.1.1 $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a} [f(x) - L] = 0$*.*

Demonstração. De fato,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente, tem-se que existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |f(x) - L| < \epsilon \;&\Leftrightarrow\; |(f(x) - L) - 0| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow\; \lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0. \end{aligned}$$

Fato que demonstra o resultado. ■

Lema 2.1.2 *Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais, com $D_f, D_g \subset \mathbb{R}$ e $D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L$, então $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = 0$.*

Demonstração. Pela hipótese temos,

$$\lim_{x \to a} g(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0; x \in D_g, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - L| < \epsilon. \tag{2.5}$$

Daí, percebe-se pela expressão 2.5 que se pode escrever

$$|g(x)| = |(g(x) - L) + L| \leq |g(x) - L| + |L| < \epsilon + |L|. \tag{2.6}$$

Por outro lado, tem-se pela hipótese que dado $\epsilon > 0$ qualquer existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0; x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)| < \frac{\epsilon}{\epsilon + |L|}. \tag{2.7}$$

Tomando-se $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ teremos pelas relações 2.6 e 2.7 que

$$|f(x) \cdot g(x) - 0| < \frac{\epsilon(\epsilon + |L|)}{(\epsilon + |L|)} = \epsilon.$$

Demonstrando assim, o resultado. ■

2.2 Propriedades dos limites

A seguir apresentaremos algumas propriedades dos limites de funções reais, as quais serão bastante úteis em demonstrações de teoremas, proposições, lemas e em várias soluções de problemas de Matemática e sobretudo, nas propriedades e aplicações da Derivada.

Proposição 2.2.1 ***(Propriedades dos limites).*** *Sejam a, C, L e M números reais e $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, onde $D_f, D_g \subset \mathbb{R}$ e $D_f \cap D_g \neq \emptyset$, funções reais tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Nestas condições temos que:*

1. $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M.$
2. $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M.$

3. $\lim\limits_{x\to a} C = C$.

4. $\lim\limits_{x\to a}[C \cdot f(x)] = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = C \cdot L$.

5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right) = L \cdot M$.

6. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

Demonstração.
1. Pela hipótese temos, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2};$$
$$x \in D_g, 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando-se $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ segue que ambas as relações acima são satisfeitas, e portanto, teremos que

$$\begin{aligned} |(f(x)+g(x)) - (L+M)| &= |(f(x)-L)| + (g(x)-M)| \\ &\leq |(f(x)-L)| + |(g(x)-M)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Provando-se assim, o resultado do item 1.

2. Pela hipótese temos que dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2};$$
$$x \in D_g, 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando-se $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ segue que ambas as relações acima são satisfeitas, e portanto, teremos que

$$\begin{aligned} |(f(x)-g(x)) - (L-M)| &= |(f(x)-L) + (M-g(x))| \\ &\leq |f(x)-L| + |M-g(x)| \\ &= |f(x)-L| + |g(x)-M| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Demonstrando-se assim, o resultado do item 2.

3. Seja $f(x) = C$ para todo $x \in D_f$. Então, dado $\epsilon > 0$ arbitrário é trivial perceber que sempre existirá $\delta > 0$ qualquer tal que

$$x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow 0 = \left| \underbrace{|f(x)}_{=C} - C \right| < \epsilon$$

Concluindo-se assim, o resultado do item 3.

4. Se $C = 0$, então $Cf(x) = C = 0$. Logo, se prova o resultado pelo item 3.

Supondo-se que $C \neq 0$. Então, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, segue-se pela hipótese que, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|C|} \Rightarrow |Cf(x) - CL| < \epsilon.$$

Provando assim, o resultado do item 4.

5. Para provar o resultado desejado, basta mostrar utilizando o Lema 2.1.1, p. 17 que

$$\lim_{x \to a} [f(x)g(x) - LM] = 0.$$

Somando e subtraindo $Lg(x)$ a $f(x)g(x) - LM$ se obtém

$$f(x)g(x) - LM = g(x)(f(x) - L) + L(g(x) - M).$$

Como por hipótese $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$. Então, segue imediatamente pelo lema citado que

$$\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0 \; e \lim_{x \to a} [g(x) - M] = 0.$$

Logo, pelas relações obtidas acima obtém-se que

$$\lim_{x \to a} [f(x)g(x) - LM] = g(x) \lim_{x \to a} [(f(x) - L)] + \lim_{x \to a} L[(g(x) - M)] = 0.$$

Demonstrando com isso, o resultado do item 5.

6. A princípio se propõe o quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ da seguinte forma:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

Como $M \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D_g$ obedecendo $|x - a| < \delta$.

Perceba que, pelo resultado do item 5 bastará provar que:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}.$$

Para isso, faz-se

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M-g(x)}{Mg(x)}\right| = \frac{1}{|Mg(x)|}\cdot|g(x)-M|. \tag{2.8}$$

Uma vez que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, teremos que dado $0 < \epsilon < \frac{|M|}{2}$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_g, 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)-M| < \epsilon < \frac{|M|}{2}.$$

Por outro lado, nota-se que

$$\begin{aligned} |M| = |g(x) + (M-g(x))| &\leq |g(x)| + |g(x)-M| \\ &< |g(x)| + \frac{|M|}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Desta forma, segue-se pelas relações 2.8 e 2.9 que

$$x \in D_g, 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \frac{2\,|g(x)-M|}{M^2}. \tag{2.10}$$

Utilizando mais uma vez o fato de $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ tem-se que dado $\epsilon > 0$ qualquer, existirá $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_g, 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-M| < \frac{\epsilon M^2}{2}. \tag{2.11}$$

Tomando-se $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ teremos pelas relações 2.10 e 2.11 que

$$x \in D_g, 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \frac{2}{M^2}\cdot\frac{\epsilon M^2}{2} = \epsilon.$$

Logo, utilizando o resultado do item 5 segue-se que

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right] = \left(\underbrace{\lim_{x\to a} f(x)}_{=L}\right)\cdot\left(\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}}_{=\frac{1}{M}}\right) = \frac{L}{M}.$$

Com isso, concluí-se a demonstração. ∎

2.3 Aplicações das propriedades do limite

Nesta seção se exibirá algumas aplicações das propriedades do limite visto anteriormente, com o objetivo de aperfeiçoar essas ferramentas, pois julga-se necessário para a compreensão dos fundamentos do Cálculo. Para isso, foram selecionados alguns problemas elementares que muitas das vezes são considerados como exercícios, propriedades e até mesmo como teoremas, os quais virão acompanhados de suas respectivas soluções ou demonstrações.

A princípio apresentaremos a solução do Exemplo 2.1.1, p. 15 através do uso das propriedades do limite. Resultado este que apenas se tinha conjecturado um valor para o limite da função f e agora comprovaremos que tal conjectura é verdadeira.

Exemplo 2.3.2 *Determine o valor do* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$.

Solução. Seja $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Perceba que a função f não está definida para $x = 1$, porém pela definição de limite isso não importa, pois devemos tomar valores de x próximos a 1, mas não necessariamente iguais a 1. Portanto, reescrevendo a função f teremos:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} &= \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)} \\ &= x+1, x \neq 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}(x+1) \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 1} x}_{=1} + \underbrace{\lim_{x\to 1} 1}_{=1} = 2. \end{aligned}$$

Concluindo assim, o resultado. ■

Admitiu-se na última linha da solução acima que $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$. Porém, é trivial perceber a veracidade dessa afirmação pela Definição 2.1.1, p. 13, bastando para isso tomar $\delta = \epsilon > 0$ para todo $\epsilon > 0$ dado.

Salienta-se que o resultado descrito acima comprova a conjectura estabelecida no Exemplo 2.1.1, p. 15.

Exemplo 2.3.3 *Mostre que* $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$, *com* $a > 0$.

Solução. Devemos mostrar que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| < \epsilon.$$

Perceba que:

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

Assim, desejamos encontrar algum $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| < \epsilon.$$

Note que

$$\sqrt{x}+\sqrt{a} > \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon \cdot \sqrt{a}$, então

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \epsilon\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}} = \epsilon.$$

Provando assim, o resultado. ∎

Teorema 2.3.2 *Prove que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = L$.

Demonstração. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon.$$

Perceba que, tomando-se $x = a+h$, com h suficientemente pequeno teremos,

$$x \in D_f, 0 < |h| < \delta \Rightarrow 0 < |(a+h)-a| < \delta \Rightarrow |f(a+h)-L| < \epsilon.$$

Logo, pela definição de limite segue que

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = L.$$

Reciprocamente, se $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = L$, então dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f, 0 < |h| < \delta \Rightarrow |f(a+h)-L| < \epsilon.$$

Portanto, segue pela expressão acima que

$$x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f((a+x)-a))-L| = |f(x)-L| < \epsilon.$$

Provando assim, o resultado. ∎

Teorema 2.3.3 *Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ funções reais, com $D_f, D_g \subset \mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Se $L < M$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$.*

Demonstração. Considere a princípio o número real $A = \dfrac{L+M}{2} < \dfrac{M+M}{2} = M$. Tomando-se

$$\epsilon = A - L = M - A > 0.$$

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta_1 &\Rightarrow 0 < |f(x) - L| < \epsilon \\ &\Rightarrow L - \epsilon < f(x) < \underbrace{\epsilon + L}_{=A} \\ &\Rightarrow f(x) < A \\ & \quad e \\ 0 < |x-a| < \delta_2 &\Rightarrow 0 < |g(x) - M| < \epsilon \\ &\Rightarrow \underbrace{M - \epsilon}_{=A} < g(x) < \epsilon + M \\ &\Rightarrow A < g(x). \end{aligned}$$

Tomando-se $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, teremos pelas relações acima que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x).$$

Isso, prova o teorema. ∎

Exemplo 2.3.4 *Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que*

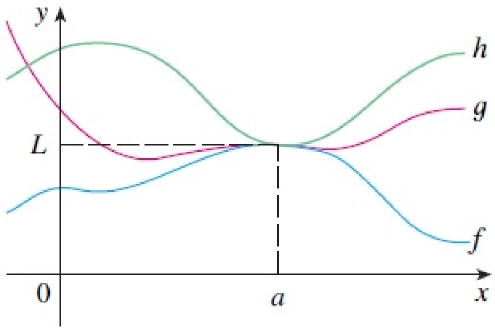
$$x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < 0.$$

De fato, basta considerar $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R};\ g(x) = 0$ para todo $x \in D_g$. Daí, segue que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, e portanto, pelo Teorema 2.3.3 segue o resultado.

Teorema 2.3.4 ***(Teorema do Confronto).*** *Sejam $f, g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funções reais tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$. Se $f(x) < g(x) < h(x)$ para todo $x \in D$, então*

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Figura 3: Teorema do Confronto.



Fonte: Construída pelo autor.

Demonstração. Por hipótese, dado $\epsilon > 0$ qualquer, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x \in D, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

e

$$x \in D, 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Tomando-se $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ teremos que ambas as relações acima são satisfeitas, e portanto, segue que

$$\begin{aligned} x \in D, 0 < |x - a| < \delta \quad &\Rightarrow \quad L - \epsilon < f(x) < g(x) < h(x) < L + \epsilon \\ &\Rightarrow \quad L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. ∎

O Teorema do confronto também conhecido como Teorema do sanduíche será relevante em diversos resultados que se encontrará neste trabalho, em particular ele será aplicado na demonstração do limite trigonométrico fundamental, resultado importante para o Cálculo Diferencial.

Exemplo 2.3.5 *Seja f uma função real tal que $|f(x)| \leq x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

(a) *Calcule:* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$*;*

(b) *Conclua que* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$*.*

Solução.
Item (a). Temos,

$$|f(x)| \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq f(x) \leq x^2.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} (-x^2) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, segue pelo Teorema 2.3.4, p. 24 que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Item (b). Pelo resultado do item (a), bastará mostrar que $f(0) = 0$. De fato, note que

$$|f(x)| \leq x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

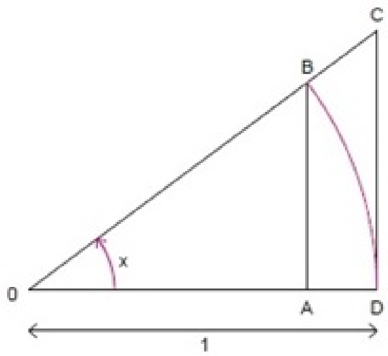
Tomando-se $x = 0$ vale que $|f(0)| \leq 0$. Logo, conclui-se que $f(0) = 0$. ■

A seguir, se enunciará e demonstrará um limite existente no Cálculo chamado por limite trigonométrico fundamental. Ressalta-se que o teorema do confronto supracitado será utilizado na demonstração.

Exemplo 2.3.6 ***(Limite trigonométrico fundamental).*** *Mostre que*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Figura 4: Limite trigonométrico fundamental.



Fonte: Construída pelo autor.

Solução. Considere primeiramente $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Seja x a medida do arco $\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ conforme Figura 4, desta forma tem-se que

$$\operatorname{sen} x = \overline{AB} < x \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Percebe-se que a área do setor circular BOD é dada $\dfrac{x}{2}$, pois o raio do círculo é igual a $\overline{OD} = 1$. Além disso, à área do triângulo OCD é igual a $\dfrac{\overline{CD}}{2} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}$, e portanto, $x < \operatorname{tg} x$, ou seja, $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Daí, segue-se que

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Uma vez que as funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ são pares, garantirá que todas as

relações obtidas anteriormente ainda continuam válidas para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
Como a função f é contínua, então segue que

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1 \ e \lim_{x\to 0} 1 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Portanto, pelo Teorema do Confronto teremos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
Provando assim, o resultado. ■

Pode-se observar através da solução do exemplo a seguir, o uso direto do limite trigonométrico fundamental.

Exemplo 2.3.7 *Determine o* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Solução. Perceba que:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{x^2\cdot(1+\cos x)} \\
&= \frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)} \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\cos x}\right) \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{1+\cos x}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)\right] \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\lim_{x\to 0}(1+\cos x)} \\
&= 1^2\cdot\frac{1}{1+\cos 0} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

■

2.4 Limites laterais

São conhecidas várias funções reais definidas em uma união de intervalos que muitas das vezes oferecem um grau maior de dificuldades ao tentar obter o valor de um determinado limite de tais funções. Porém, existe o conceito de limites laterais que poderá reduzir significativamente os obstáculos e dificuldades provocados no cálculo de tais limites.

Definição 2.4.3 ***(Limite lateral à esquerda).*** *Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $\boldsymbol{a}$ um elemento de D_f ou uma extremidade de algum dos intervalos que formam D_f. Diz-se que o limite de f quando x tende para $\boldsymbol{a}$ pela esquerda é o número real L, e escreve-se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$ existir algum $\delta > 0$ tal que*

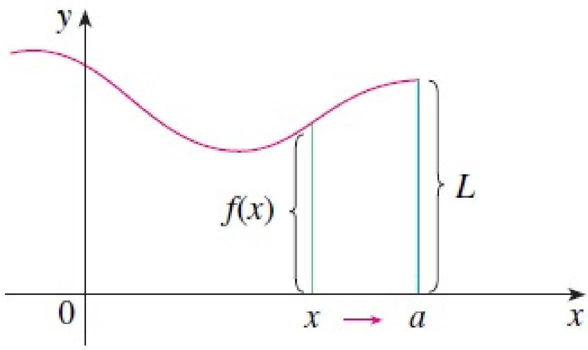
$$x \in D_f, 0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Simbolicamente pode-se ainda escrever o resultado supracitado da seguinte forma:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in D_f \cap (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para uma melhor compreensão da definição acima considera-se a Figura 5.

Figura 5: Limite lateral à esquerda.



Fonte: Construída pelo autor.

Definição 2.4.4 ***(Limite lateral à direita).*** *Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $\boldsymbol{a}$ um elemento de D_f ou uma extremidade de algum dos intervalos que formam D_f. Diz-se que o limite de f quando x tende para $\boldsymbol{a}$ pela direita é o número real L, e escreve-se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$ existir algum $\delta > 0$ tal que*

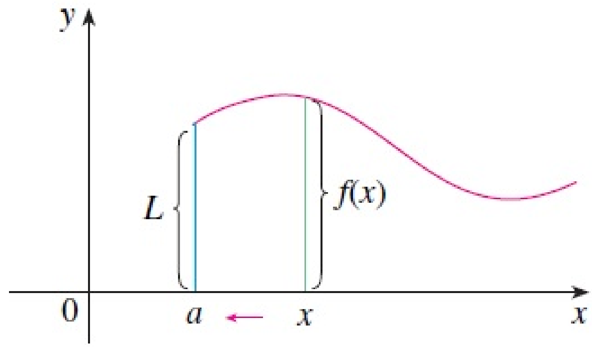
$$x \in D_f, 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Simbolicamente temos,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in D_f \cap (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para uma melhor compreensão da definição acima considera-se a Figura 6.

Figura 6: Limite lateral à direita.



Fonte: Construída pelo autor.

Portanto, é de fácil percepção que uma condição necessária e suficiente para que exista $\lim_{x\to a} f(x)$ e seja igual a L é que ambos os limites laterais também existam e sejam iguais a L. Isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ se, e somente se, } \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Veja através deste exemplo o uso da explanação anterior.

Exemplo 2.4.8 *Mostre que não existe o limite da função* $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ *quando* $x \to 0$.

Solução. De fato, basta mostrar a não igualdade dos limites laterais. Isto é,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

obtém-se o resultado.

Na seção a seguir será apresentado a Continuidade de funções reais, fato essencial para a compreensão dos principais teoremas do Capítulo 3.

2.5 Funções contínuas

Nesta seção apresentamos uma classe de funções reais, chamadas funções contínuas, esta muito comum no estudo do Cálculo Diferencial, porém na maioria das vezes não se percebe que se faz uso.

Cita-se também alguns tipos de funções contínuas bastante comuns tais como Polinomiais; Exponenciais; Logarítmicas; Trigonométricas. Apresenta-se a seguir, algumas definições, proposições e teoremas sobre funções contínuas para deduzir resultados da Derivada.

Definição 2.5.5 ***(Função contínua).*** *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D_f \subset \mathbb{R}$. Diz-se que a função f é contínua em D_f se para todo $\boldsymbol{a} \in D_f$ tivermos que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Diz-se simplesmente que é f é contínua, se for contínua em todos os pontos do seu domínio D_f. Todavia, sabe-se que os fenômenos físicos tais quais deslocamento, velocidade e aceleração variam continuamente com o tempo.

A seguir usaremos a definição de função contínua para demonstrar algumas proposições, principalmente àquelas que se referem as propriedades da Derivada apresentada no próximo capítulo. Além disso, as mesmas formarão um conjunto de funções contínuas que se apresentam com frequência em diversos problemas e teoremas relativos à Derivada.

Exemplo 2.5.9 *Mostre que a função constante é contínua.*

Solução. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função constante. Então, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Perceba que pela Proposição 2.2.1, item 3, p. 18 vale que

$$\lim_{x \to p} f(x) = k = f(p) \text{ para todo } p \in \mathbb{R}.$$

Concluindo assim, o resultado. ■

Exemplo 2.5.10 *Mostre que a função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax + b$, com a e b constantes reais, é contínua.*

Solução. Se $a = 0$ então $f(x) = b$. Portanto, não há o que provar.
Suponha que $a \neq 0$, então temos que:

$$|f(x) - f(p)| = |ax + b - ap - b| = |a| \cdot |x - p|.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ arbitrário teremos,

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \Rightarrow |a| \cdot |x - p| < \epsilon \Rightarrow |x - p| < \frac{\epsilon}{|a|}.$$

Tomando-se $\delta = \dfrac{\epsilon}{|a|}$ segue que

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Como p foi tomado de modo arbitrário, decorre que f é contínua em todo p real.

Isso prova a continuidade de f. ■

Exemplo 2.5.11 *Mostre que a função modular é contínua.*

Solução. Seja a função modular $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Considere $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Assim, devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.
Perceba que

$$||x| - |a|| \leq |x - a| < \delta \text{ e } |f(x) - f(a)| = ||x| - |a|| < \epsilon.$$

Portanto, tomando-se $\delta \leq \epsilon$ teremos que

$$x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow ||x| - |a|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Portanto, a função modular é contínua. ■

Exemplo 2.5.12 *Mostre que as funções seno e cosseno são contínuas.*

Solução. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fixe inicialmente $a \in \mathbb{R}$. Assim, devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos a| &= 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)\right|, \end{aligned}$$

pois $|\operatorname{sen} \alpha| \leq 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que a função seno é ímpar, ou seja, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, sabe-se que $|\operatorname{sen} y| \leq |y|$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Portanto, segue-se pela expressão acima que

$$|\cos x - \cos a| \leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x - a|.$$

Tomando-se $\delta \leq \epsilon$ teremos que dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\cos x - \cos a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$, e por definição segue que a função cosseno é contínua. ■

A demonstração para a continuidade da função seno é análoga.

Conforme Exemplo 2.3.3, p. 22, a função raiz quadrada $f(x) = \sqrt{x}$, com $x > 0$ é contínua, pois

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

Exemplo 2.5.13 *Mostre que a função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*;*

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right); se\ x \neq 0 \\ 0; se\ x = 0 \end{cases}$$

é contínua no ponto $x = 0$*.*

Solução. Supondo-se inicialmente que $x > 0$.

Perceba que

$$\begin{aligned} \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad \left|x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x \\ &\Rightarrow \quad -x \leq x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x, x > 0. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} (-x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ segue imediatamente pelo teorema confronto que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

O caso $x < 0$ é inteiramente análogo. ■

Diz-se que uma função $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ é descontínua em $a \in D_f$ quando não for contínua em $\boldsymbol{a}$.

Proposição 2.5.2 *Sejam* $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções contínuas em* $\boldsymbol{a}$*, então*

(a) $f + g$ *é contínua em* a*;*

(b) $f - g$ *é contínua em* a

(c) $f \cdot g$ *é contínua em* a*;*

(d) $\dfrac{f}{g}$ *é contínua, se* $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in D_g$*.*

Demonstração.

Item (a). Pela hipótese temos,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Daí, pela Proposição 2.2.1, item 1, p. 18 segue-se que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\\ &= f(a)+g(a)\\ &= (f+g)(a).\end{aligned}$$

Provando assim, o resultado do item (a).

Item (b). Pela hipótese temos,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Daí, pela Proposição 2.2.1, item 2, p. 18 segue-se que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] &= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)\\ &= f(a)-g(a)\\ &= (f-g)(a).\end{aligned}$$

Provando assim, o resultado do item (b).

Item (c). Pela hipótese temos,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Daí, pela Proposição 2.2.1, item 5, p. 18 segue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] &= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\\ &= f(a)\cdot g(a)\\ &= (fg)(a).\end{aligned}$$

Provando com isso, o resultado do item (c).

Item (d). Pela hipótese temos,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Daí, pela Proposição 2.2.1, item 6, p. 18 segue que

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a).$$

Demonstrando assim, a Proposição 2.5.2. ∎

Proposição 2.5.3 *Se $f : D_f \longrightarrow D_g$ e $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, com $D_f, D_g \in \mathbb{R}$, então a função $h = g \circ f : D_g \longrightarrow \mathbb{R}; h(x) = g(f(x))$ também é contínua.*

Demonstração. Considere $x_0 \in D_f$ tal que $y_0 = f(x_0) \in D_g$.

Como pela hipótese a função g é contínua segue que

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0).$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in D_g, 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon. \tag{2.12}$$

Se f também contínua pela hipótese, então tem-se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Assim, dado $\delta > 0$ arbitrário, existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_f, 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta. \tag{2.13}$$

Portanto, temos pelas relações 2.12 e 2.13 que

$$x \in D_f, 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon.$$

Demonstrando-se o resultado. ■

Exemplo 2.5.14 *Mostre que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x^2 \cos(x^2) + 1}$ é contínua.*

Solução. A função f é a composta da função raiz quadrada (que é contínua) com a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = x^2 \cos(x^2) + 1$. Portanto, pela Proposição 2.5.2, p. 32 basta mostrar a continuidade da função g.

Perceba que a função g é a soma entre as funções $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; h(x) = x^2 \cos(x^2)$ e a função constante $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; w(x) = 1$, onde as mesmas são contínuas.

Logo, g é contínua, e portanto segue o resultado. ■

Por fim, apresenta-se alguns teoremas encontrados no estudo do Cálculo Diferencial que retratam a aplicabilidade de funções contínuas. No decorrer deste trabalho haverá um aprofundamento da temática.

A seguir será apresentado o Teorema de Bolzano conhecido como Teorema do Anulamento e o Teorema do valor intermediário (TVI).

Teorema 2.5.5 ***(Teorema de Bolzano).*** *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [6]. Ele estabelece que, se uma função contínua f tem imagens com sinais contrários em seus valores extremos, então ela possui pelo menos uma raiz real no interior desse intervalo.

Se utilizará esse resultado para demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.5.6 ***(Teorema do Valor Intermediário - TVI).*** *Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Se $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$ ou $f(a) > g(a)$ e $f(b) < g(b)$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = g(c)$. Em particular, se $d \in (f(a), f(b))$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Seja $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$; $h(x) = f(x) - g(x)$ contínua. Pois, as funções f e g são contínuas por hipótese.

Suponha que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$, o outro caso é similar. Assim, note que

$$h(a) \cdot h(b) = \left(\underbrace{f(a) - g(a)}_{<0}\right) \cdot \left(\underbrace{f(b) - g(b)}_{>0}\right) < 0.$$

Daí, pelo Teorema de Bolzano existe $c \in (a,b)$ tal que $h(c) = 0$.
Logo,

$$h(c) = 0 \Rightarrow f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c).$$

Concluindo assim, o resultado. ■

Exemplo 2.5.15 *Seja $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ uma função contínua. Mostre que existe um número real $0 \leq c \leq 1$ tal que $f(c) = c$.*

Solução. Se $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, não há o que demonstrar.

Supondo que $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Considere a função contínua $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$; $g(x) = x$.

Perceba que

$$f(0) > 0 = g(0) \Rightarrow f(0) > g(0)$$

e

$$f(1) < 1 = g(1) \Rightarrow f(1) < g(1).$$

Portanto, pelo TVI existe $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = g(c)$, o que faz $f(c) = c$.
Provando assim, o resultado. ■

Exemplo 2.5.16 *Mostre que a função $f(x) = x^3 - 4x + 2$, admite-se três raízes reais e distintas.*

Solução. Perceba que f é contínua pela Proposição 2.5.2, p. 32.
Por outro lado, é trivial notar que

$$f(0) = 2 \text{ e } f(1) = -1 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0.$$

Portanto, pelo Teorema de Bolzano existe $c_1 \in (0, 1)$ tal que $f(c_1) = 0$. Além disso, vale que

$$f(2) = 2 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0.$$

E de modo análogo existe $c_2 \in (1, 2)$, tal que $f(c_2) = 0$.
Por fim, perceba que

$$f(-3) = -13 \text{ e } f(-2) = 2 \Rightarrow f(-3) \cdot f(-2) < 0.$$

e mais uma vez existe $c_3 \in (-3, -2)$ tal que $f(c_3) = 0$.
Provando assim, o resultado. ■

3 DERIVADA

"Seja o que for que imaginemos, é finito. Portanto não existe qualquer ideia, ou concepção, de algo que denominamos infinito. (...) Quando dizemos que alguma coisa é infinita, queremos apenas dizer que não somos capazes de conceber os limites e fronteiras da coisa designada, não tendo concepção da coisa, mas de nossa própria incapacidade."

Hobbes (1588 – 1679)

Neste capítulo, apresentar-se-á as Derivadas de funções de uma variável real acompanhada por alguns teoremas que asseguram os resultados deste trabalho, e significativo para o Cálculo Diferencial. Deseja-se neste capítulo que se conheça verdadeiramente as noções básicas de Derivada para aplicá-las em problemas de Matemática do Ensino Médio, fato abordado no Capítulo 4.

3.1 Definição de derivada

Assegurado o entendimento dos principais conceitos de limite apresentados no Capítulo 2, a seguir se estabelecerá a ferramenta oferecida pelo Cálculo Diferencial conhecida como Derivada.

Definição 3.1.6 *Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $p \in (a,b)$ e $h \in \mathbb{R}$, com $p+h \in [a,b]$. Define-se a derivada de f no ponto p como sendo:*

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}, \tag{3.14}$$

quando tal limite existe.

É trivial perceber que tomando-se $h = x - p$ tem-se imediatamente que $x \to p$ quando $h \to 0$ e a Equação 3.14 torna-se equivalente a

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}. \tag{3.15}$$

Esta outra maneira de expressar a Derivada de uma função no ponto p se fará bastante útil na demonstração da Derivada de algumas funções como veremos posteriormente na seção 3.2 e também nas demonstrações de algumas propriedades da Derivada de funções reais apresentadas na seção 3.3.

Uma vez que $f'(p)$ existe diz-se que f é diferenciável ou derivável em p. Sendo f derivável em todos os pontos do seu domínio diz-se simplesmente que f é diferenciável ou derivável. Entretanto, ressalta-se que na seção 2.1, o resultado já havia sido interpretado como o coeficiente angular de uma reta tangente $\boldsymbol{t}$ passando por um ponto P pertencente à curva $y = f(x)$.

Além disso, é fácil encontrar aplicações da Derivada, isto é:

(a) O coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ de uma reta tangente $\boldsymbol{t}$ a uma curva $y = f(x)$ no ponto $P = (p, f(p))$ é igual a Derivada $f'(p)$, a qual representa a taxa de variação das retas secantes à curva $y = f(x)$ em relação a posição x no ponto P;

(b) Na determinação da velocidade instantânea $v(t)$ de um determinado veículo, tem-se que $v(t) = s'(t)$ representando a taxa de variação do espaço $\boldsymbol{s}$ em relação ao tempo $\boldsymbol{t}$ no ponto $(t, s(t))$;

(c) A obtenção do instante $\boldsymbol{t}$ que certo objeto muda de sentido quando o mesmo está em movimento retilíneo uniformemente variado. Nesse caso, tem-se que $s'(t)$ indica que a velocidade é nula em tal instante, ou seja, a velocidade $v(t) = s'(t) = 0$;

(d) No cálculo da vazão $V(t)$ de uma certa torneira em um dado instante $\boldsymbol{t}$, no qual temos a Derivada $v'(t)$, representando a variação do volume $v(t)$ em relação ao tempo t, e portanto, $V(t) = v'(t)$;

(e) Na determinação da corrente elétrica $\boldsymbol{i}$, tem-se que a Derivada $q'(t)$ representa a variação da quantidade de carga elétrica $q(t)$ em relação ao tempo t, dando assim, $i = q'(t)$.

Apresenta-se algumas aplicações da Derivada com o objetivo de instigar o uso dessa ferramenta que tanto nos ajudará na resolução de vários problemas de Matemática acessíveis a alunos participantes das Olimpíadas de Matemática.

Pelo fato da Derivada ser frequentemente utilizada em vários áreas do conhecimento como Física, Engenharia, Arquitetura e Economia, existem diversas maneiras simbólicas para representá-las. Mostra-se a seguir, as notações mais usuais da Derivada de uma função f. Isto é,

$$f'(p),\ \frac{df}{dx}(p),\ Df(p),\ \dot{f}(p).$$

No texto se fará em maior frequência, o uso das duas primeiras notações para representar a Derivada de uma função. Contudo, essas simbologias têm a sua particularidade dependendo da área específica estudada, como por exemplo, os físicos têm preferência pelas notações $\dot{f}(p)$ e $\dfrac{df}{dx}$, porém a maioria dos livros didáticos de Matemática se depara com as duas primeiras, estas também escolhidas aqui.

No que se refere a construção da teoria, ressalta-se duas observações úteis para a desenvolvimento e obtenção dos resultados da Derivada.

A primeira chama-se Derivada lateral à direita em p. Se $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, então

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

caso o limite exista. A segunda poderá ser definida de forma inteiramente análoga a primeira, a qual chama-se Derivada lateral à esquerda em p. Se $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, então

$$f'_-(b) = \lim_{x \to p^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b},$$

caso tal limite exista.

Desta forma, uma vez afirmado que uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável, ficará implícito que as Derivadas laterais existem e são iguais a $f'(p)$ para todo $p \in [a, b]$.

Enfim, faz-se uma primeira abordagem sobre as principais propriedades da Derivada de uma função real, através da apresentação de um teorema comum ao estudo do Cálculo Diferencial e um exemplo clássico referente à continuidade de funções, e sobretudo garantir que a derivabilidade de uma função implica em sua continuidade.

Teorema 3.1.7 *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $p \in [a, b]$, então f é contínua em p.*

Demonstração. Perceba que tomando-se $x \in [a, b] \setminus \{p\}$ teremos,

$$f(x) = f(p) + \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right) \cdot (x - p).$$

Por outro lado, pela hipótese f é derivável em $p \in [a, b]$. Daí, tem-se que

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right) \cdot (x - p) \right] \\ &= \lim_{x \to p} f(p) + \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right) \cdot \lim_{x \to p} (x - p) \\ &= f(p) + f'(p).0 = f(p). \end{aligned}$$

Logo, pela Definição 2.5.5, p. 29 garante-se a continuidade de f em p. ■

A seguir, faz-se convite ao leitor a demonstrar e com isso, se apropriar de um problema clássico sobre função contínua. Será perceptível que nem sempre é válida a recíproca do teorema anterior, ou seja, se uma função é contínua, então nem sempre é derivável em certos pontos do seu domínio.

Exemplo 3.1.17 *Mostre que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = |x|$ é contínua em todo o seu domínio mas não é derivável em $x = 0$.*

3.2 Derivada de algumas funções

Nesta seção, serão enunciadas e demonstradas a Derivada de algumas funções. Contudo, ressalta-se que tais funções sejam elas Polinomiais, Trigonométricas, Exponenciais e Logarítmicas apresentam suas particularidades no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e sobretudo, nas resoluções de problemas de Matemática.

Proposição 3.2.4 *Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função constante, então f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Considere $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, pela definição de derivada temos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \\ &= \lim_{x \to p} \frac{c - c}{x - p} \\ &= \lim_{x \to p} \frac{0}{x - p} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, fica demonstrado o resultado. ■

A proposição acima assegura que toda reta $\boldsymbol{r}$ paralela ao eixo das abscissas tem inclinação $f'(x) = 0$.

Proposição 3.2.5 *Sejam n um número natural e $f(x) = x^n$, então*

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Demonstração. Pela fórmula do binômio de Newton tem-se que

$$(x+h)^n - x^n = \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + ... + \binom{n}{n-1} x h^{n-1} + h^n.$$

Assim pela definição de derivada e pela expressão acima obtém-se o resultado:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - h^n}{h} = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Provando assim, o resultado. ■

Existe uma generalização do resultado acima para $n \in \mathbb{R}$. Isto é, se $f(x) = x^n$, com $x > 0$ então $f'(x) = nx^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{R}$.

A seguir, apresenta-se alguns exemplos e suas respectivas soluções através do uso da definição de Derivada como limite de uma função.

Exemplo 3.2.18 *Se* $f(x) = \operatorname{sen} x$, *então* $f'(x) = \cos x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Pela fórmula trigonométrica do seno da soma de dois arcos temos,

$$\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \operatorname{sen} h \cdot \cos x.$$

Daí, pela definição de Derivada segue que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}\right] \\ &= \operatorname{sen} x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{=1}\right) \\ &= \operatorname{sen} x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Perceba que, $(\cos h + 1) \neq 0$ quando $h \to 0$. Daí, temos

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= -\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{(\cos h + 1)} \\ &= (-1)\cdot\frac{\operatorname{sen} 0}{(\cos 0 + 1)} = \frac{(-1).0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Logo, pela Equação 3.16 segue que $f'(x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Pela definição de derivada, pode-se demonstrar os seguintes resultados.

Tabela 2: Derivada de funções trigonométricas.

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\sec x \cdot \operatorname{tg} x$
$\operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cossec}^2 x$
$\operatorname{cossec}' x$	$-\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x$

Fonte: Construída pelo autor.

3.3 Propriedades da derivada

Existem várias propriedades da Derivada, as quais apresentam-se como a Derivada da soma, produto e do quociente entre duas funções, pois as mesmas facilitam o cálculo algébrico e permitem obter resultados intrínsecos relativos ao trabalho.

Nessa perspectiva se demonstraram duas propriedades da Derivada, as quais são conhecidas respetivamente como a Derivada da soma e Derivada da diferença entre duas funções.

Proposição 3.3.6 *Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções reais e deriváveis no ponto $p \in (a, b)$. Então as funções $(f \pm g)$ são deriváveis em p, com $(f \pm g)'(p) = f'(p) \pm g'(p)$.*

Demonstração. Se provará que $(f + g)$ é derivável em p e $(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p)$, pois a demonstração do caso $(f - g)$ é inteiramente análogo.

Perceba que

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(p)}{x - p} = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} + \frac{g(x) - g(p)}{x - p},$$

para qualquer $x \in (a, b) \setminus \{p\}$.

Como, por hipótese, f e g são deriváveis em p, segue imediatamente que

$$\begin{aligned}
(f+g)'(p) &= \lim_{x \to p} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(p)}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} + \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right) \\
&= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} + \lim_{x \to p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \\
&= f'(p) + g'(p).
\end{aligned}$$

Demonstrando-se o resultado. ■

Se estabelece então de acordo com a proposição acima, que a Derivada da soma entre duas funções diferenciáveis em p é igual soma das Derivadas de cada uma dessas funções em p. Veja um exemplo que configura o uso da propriedade acima.

Exemplo 3.3.19 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função polinomial*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$.

Utilizando-se repetidas vezes as Proposição 3.3.6, p. 42 tem-se que f é derivável em $\mathbb{R}$, com $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ também polinomial tal que

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + 2 a_2 x + a_1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Apresenta-se outra propriedade da Derivada, conhecida como a Derivada do produto entre duas funções.

Proposição 3.3.7 *Se $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções reais e deriváveis no ponto $p \in (a, b)$, então a função $f \cdot g$ é derivável em p e $(f \cdot g)'(p) = f'(p) \cdot g(p) + g'(p) \cdot f(p)$.*

Demonstração. Somando-se e subtraindo-se $f(x) \cdot g(p)$ ao numerador da expressão:

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(p) \cdot g(p)}{x - p},$$

obtém-se

$$g(p) \cdot \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right) + f(p) \cdot \left(\frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right),$$

para todo $x \in (a, b) \setminus \{p\}$.

Pela hipótese as funções f e g são deriváveis em p. Assim, pela definição de Derivada segue que

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(p) &= \lim_{x \to p} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(p)}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(p) \cdot g(p)}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p} \left[g(p) \cdot \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right) + f(p) \cdot \left(\frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right) \right] \\
&= g(p) \cdot \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} + f(p) \cdot \lim_{x \to p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \\
&= f'(p) \cdot g(p) + g'(p) \cdot f(p).
\end{aligned}$$

Logo, $f \cdot g$ é derivável em p e $(f \cdot g)'(p) = f'(p) \cdot g(p) + g'(p) \cdot f(p)$. ∎

Proposição 3.3.8 *Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável, então*

$$[cf(x)]' = cf'(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Pela Proposição anterior temos,

$$[cf(x)]' = \underbrace{c'}_{=0} \cdot f(x) + f'(x) \cdot c = cf'(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ∎

Exemplo 3.3.20 *Sejam as funções* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ *e* $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = \operatorname{sen} x$. *Daí, segue-se que a Derivada do produto entre* f *e* g *pode ser obtida assim,*

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x) &= (x^2)' \cdot \operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x)' \cdot x^2 \\ &= 2x \cdot \operatorname{sen} x + (\cos x) \cdot x^2 \\ &= x(2 \operatorname{sen} x + x \cos x). \end{aligned}$$

Proposição 3.3.9 *Sejam* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *duas funções reais e deriváveis no ponto* $p \in (a, b)$. *Então, se* $g(p) \neq 0$ *temos que* $\dfrac{f}{g}$ *é derivável em* p *e;*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p) \cdot g(p) - f(p) \cdot g'(p)}{[g(p)]^2}.$$

Demonstração. Note que ao somar e subtrair $\dfrac{f(p)}{g(x)}$ ao numerador da expressão:

$$\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(p)}{g(p)}}{x - p},$$

obtém-se

$$\left(\frac{1}{g(p) \cdot g(x)}\right) \left[g(p) \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p}\right) - f(p) \left(\frac{g(x) - g(p)}{x - p}\right)\right],$$

para todo $x \in (a, b) \setminus \{p\}$.

Pela hipótese as funções f e g são deriváveis em p. Daí, pela definição de Derivada segue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(p) &= \lim_{x \to p} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(p)}{x - p} \\ &= \lim_{x \to p} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x - p} \\ &= \lim_{x \to p} \left\{\left(\frac{1}{g(p) \cdot g(x)}\right) \cdot \left[g(p) \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p}\right) - f(p) \left(\frac{g(x) - g(p)}{x - p}\right)\right]\right\} \\ &= \lim_{x \to p} \left(\frac{1}{g(p) \cdot g(x)}\right) \cdot \left\{\lim_{x \to p} \left[g(p) \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p}\right) - f(p) \left(\frac{g(x) - g(p)}{x - p}\right)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{g(p)} \left(\lim_{x \to p} \frac{1}{g(x)}\right) \cdot \left[g(p) \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p}\right) - f(p) \lim_{x \to p} \left(\frac{g(x) - g(p)}{x - p}\right)\right] \\ &= \frac{f'(p) \cdot g(p) - f(p) \cdot g'(p)}{[g(p)]^2}. \end{aligned}$$

Portanto $\dfrac{f}{g}$ é derivável em p e $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(p) = \dfrac{f'(p)\cdot g(p) - f(p)\cdot g'(p)}{[g(p)]^2}$. ■

Exemplo 3.3.21 *Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Determine os pontos do gráfico de f em que as retas tangentes, nestes pontos, sejam paralelas ao eixo X.*

Solução. Pela Proposição 3.2.4, p. 40 deve-se primeiramente resolver $f'(x) = 0$. Isto é,

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 \ &\Rightarrow\ \frac{(x)'\cdot(x^2+1) - (x^2+1)'\cdot x}{(x^2+1)^2} = 0\\
&\Rightarrow\ \frac{1\cdot(x^2+1) - 2x\cdot x}{(x^2+1)^2} = 0\\
&\Rightarrow\ \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0\\
&\Rightarrow\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.
\end{aligned}$$

Portanto, os pontos procurados são $\left(\pm 1, \pm\frac{1}{2}\right)$. ■

3.4 Regra da cadeia

Nesta seção, será apresentada uma regra para derivar funções compostas, conhecida por *regra da cadeia*. É fato que muitos estudantes ao iniciar o estudo sobre a **regra da cadeia** apresentam certas dificuldades, pois as regras de derivação de funções mais simples deixam cômoda a busca por outras soluções com o limite.

Supondo que necessita-se derivar a função $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. Certamente muitos pensam como resposta $f'(x) = \cos(x^2)$, entendimento incorreto. Assim, é trivial perceber que o conjunto das regras de derivação existentes até o momento não são suficientes para obter-se a Derivada da função composta f. Portanto, para tal finalidade faz-se necessário a abordagem de uma nova regra de derivação conhecida como regra da cadeia.

Nota-se que $f = g \circ h$, na qual $u = h(x) = x^2$ e $f(u) = g(u) = \operatorname{sen} u$, é de fato uma função composta. Além disso, afirma-se que sua Derivada f' é dada pelo produto entre as Derivadas de g e h, fato que será demonstrado pelo Teorema 3.4.8, p. 47.

Fazendo-se $y = f(u)$ teremos que

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\
&= (\operatorname{sen} u)'\cdot\left(x^2\right)'\\
&= \cos u \cdot 2x\\
&= 2x\cos(x^2).
\end{aligned}$$

Sendo $y = f\circ g\circ h$ tal que $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ sejam funções deriváveis. Então, para obter-se a Derivada de y em relação a x deve-se utilizar a regra da cadeia duas vezes. Isto é,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}. \tag{3.17}$$

Uma vez que deseja-se calcular a Derivada da função composta $y = \operatorname{tg}(\operatorname{sen}(x^3))$ em relação a x deve-se primeiramente tomar $y = \operatorname{tg} u$, $u = \operatorname{sen} v$ e $v = x^3$. Por fim, usa-se a Equação 3.20 para determinar $\frac{dy}{dx}$ como segue adiante,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sec^2 u \cdot \cos v \cdot 3x^2 \\ &= \sec^2(\operatorname{sen} v) \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 \\ &= 3x^2 \cdot \cos(x^3) \cdot \sec^2(\operatorname{sen}(x^3)). \end{aligned}$$

A seguir demonstra-se a regra da cadeia, esta que durante seu processo usará-se em alguns artifícios que poderá fugir um pouco dos objetivos deste trabalho. Porém, julga-se necessário saber manejar essa ferramenta por nos possibilitará obter resultados fundamentais sobre Derivada, e sobretudo aumentar o entendimento sobre Cálculo Diferencial. Antes, fará-se algumas observações que certamente ajudarão na obtenção do resultado crucial desta seção a regra da cadeia.

Observação 1 *Seja $y = f(x)$. Ao variar x de p para $p + \Delta x$, obtém-se uma variação Δy chamada incremento em y e*

$$\Delta y = f(p + \Delta x) - f(p).$$

Portanto,

$$f'(p) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Observação 2 *Considere o número real ϵ igual a diferença entre o quociente de Newton e a Derivada de f em p. Isto é,*

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(p). \tag{3.18}$$

Daí, tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(p) \right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} f'(p) \\ &= f'(p) - f'(p) = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Observação 3 *Se $\epsilon = 0$ quando $\Delta x = 0$, então ϵ torna-se uma função contínua em Δx. Portanto, sendo f diferenciável segue-se pela Equação 3.18 que*

$$\Delta y = f'(p)\Delta x + \epsilon \Delta x, \tag{3.20}$$

no qual $\epsilon \to 0$ quando $\Delta x \to 0$, com ϵ é uma função contínua de Δx.

Enfim, demonstra-se adiante a regra da cadeia.

Teorema 3.4.8 ***(Regra da Cadeia)***. *Se g for derivável em x e f for derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$ definida por $F(x) = f(g(x))$ é derivável em x e F', é dada pelo produto*

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Demonstração. Sejam $u = g(x)$ derivável em p, $y = f(u)$ derivável em $\alpha = g(p)$.

Considerando os incrementos Δx, Δu e Δy em relação a x, u e y, respectivamente. Então, para o incremento em u tem-se pela Equação 3.20 que

$$\Delta u = g'(p)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x = (g'(p) + \epsilon_1)\,\Delta x, \tag{3.21}$$

no qual $\epsilon_1 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$.

Analogamente para o incremente em y tem-se

$$\Delta y = f'(\alpha)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u = (f'(\alpha) + \epsilon_2)\,\Delta u, \tag{3.22}$$

no qual $\epsilon_2 \to 0$ quando $\Delta u \to 0$.

Substituindo-se a Equação 3.21 em 3.22 obtém-se

$$\Delta y = (f'(\alpha) + \epsilon_2)\,(g'(p) + \epsilon_1)\,\Delta x.$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (f'(\alpha) + \epsilon_2)\,(g'(p) + \epsilon_1)\,. \tag{3.23}$$

Se $\Delta x \to 0$, então $\Delta u \to 0$ pela Equação 3.21. Além disso, $\epsilon_1 \to 0$ e $\epsilon_2 \to 0$.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(f'(\alpha) + \epsilon_2 \right) \left(g'(p) + \epsilon_1 \right) \right] \\
&= f'(\alpha) g'(p) \\
&= f'(g(p)) g'(p).
\end{aligned}
$$

Demonstrando então, a regra da cadeia. ■

3.5 Pontos críticos e valores extremos

Nesta seção será apresentada a definição de Derivadas em ordem superior, a definição de pontos críticos e como consequência calcular-se alguns valores extremos de algumas funções reais. Salienta-se, que nesse momento será abordado alguns teoremas que são responsáveis pelas mais variadas aplicações do Cálculo Diferencial.

Definição 3.5.7 ***(Derivadas de ordem superior).*** *Seja f uma função derivável em (a, b). Define-se a Derivada de f' como sendo a Derivada segunda ou Derivada de segunda ordem de f e a denotara-se por $f'' = (f')' = f^{(2)}$.*

De modo inteiramente análogo a definição acima, tem-se que a Derivada de f'' é dita Derivada terceira ou Derivada de ordem três de f e a indicamos por $f''' = (f'')' = f^{(3)}$. Portanto, se a Derivada de ordem $(n-1)$ de f é uma função derivável, então sua Derivada é chamara-se de Derivada n-ésima de f e será indicada por $\left(f^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}$.

Entretanto, pode-se perceber que a definição da Derivada de segunda ordem de uma função real f, como sendo a função $f'' : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f''(p) = \lim_{x \to p} \frac{f'(x) - f'(p)}{x - p}.$$

Na disciplina de física por exemplo, ao se estudar Movimento Retilíneo Uniformemente Variado - MRUV, a velocidade instantânea em t é dada por $v(t) = s'(t)$, no qual $s(t)$ representará a função posição de uma determinada partícula. Portanto, a obtenção da aceleração nesse mesmo instante, isto é, $a(t)$ é igual a variação da velocidade instantânea nesse mesmo instante t, e portanto $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Por fim, seguirá um exemplo clássico de MRUV que servirá de motivação para o leitor ao tentar resolver problemas de física ligados ao assunto exposto acima.

Exemplo 3.5.22 *A altura (em metros) de um projétil lançado verticalmente para cima de um ponto a 2 m acima do nível do solo com velocidade inicial de $24,5$ m/s é dada por:*

$$h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2,$$

após t segundos.

(a) *Encontre a velocidade após* $2\ s$ *e* $4\ s$.

(b) *Quando o projétil alcançará sua altura máxima?*

(c) *Qual é a altura máxima alcançada pelo projétil?*

(d) *Quando ele atinge o solo?*

(e) *Com qual velocidade ele atinge o solo?*

Solução.
Item (a). Devemos calcular as velocidades instantâneas $v(t)$ para $t = 2\ s$ e $t = 4\ s$.
Temos,

$$v(t) = h'(t) = 24,5 - 9,8t.$$

Portanto, $v(2) = 4,9\ m/s$ e $v(4) = -14,7\ m/s$.

Item (b). O projétil alcançará a altura máxima no instante t tal que $v(t) = 0$.
Isto é,

$$24,5 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 2,5\ s.$$

Item (c). Pelo item (b) a altura é máxima no instante $t = 2,5\ s$.
Portanto,

$$h_{max} = h(2,5) = 32,625\ m.$$

Item (d). O projétil atingirá o solo no instante $t > 0$ tal que $h(t) = 0$.
Isto é,

$$\begin{aligned} h(t) = 0 &\Leftrightarrow 2 + 24,5t - 4,9t^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{-24,5 \pm \sqrt{24,5^2 - 4\cdot(-4,9)\cdot 2}}{2\cdot(-4,9)} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{-24,5 \pm \sqrt{24,5^2 - 4\cdot(-4,9)\cdot 2}}{-9,8} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{-24,5 \pm \sqrt{639,45}}{-9,8} \\ &\Leftrightarrow t \cong 5,08 \text{ ou } t \cong -0,08. \end{aligned}$$

Logo,

$$t \cong 5,08\ s.$$

Item (e). Pelo item (d) o projétil atingirá o solo com velocidade adquirida em $t \cong 5,08\ s$. Daí,

$$v_{solo} \cong v(5,08) \cong -25,3\ m/s.$$

Com isso, conclui-se a solução. ■

A seguir, se conhecerá um conceito responsável na determinação dos pontos de máximos e de mínimos locais de uma função f diferenciável, e consequentemente, contínua em D_f, tal conceito chamaremos *pontos críticos* de uma função. Além disso, afirmaremos que os fundamentos expostos a seguir, justamente com o *Teorema de Fermat* fundam a tese desta teoria por permitir encontrar os valores extremos de uma função derivável.

Definição 3.5.8 ***(Pontos críticos).*** *Seja* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável em* $p \in (a,b)$. *Chama-se* p *um ponto crítico para a função* f *se* $f'(p) = 0$.

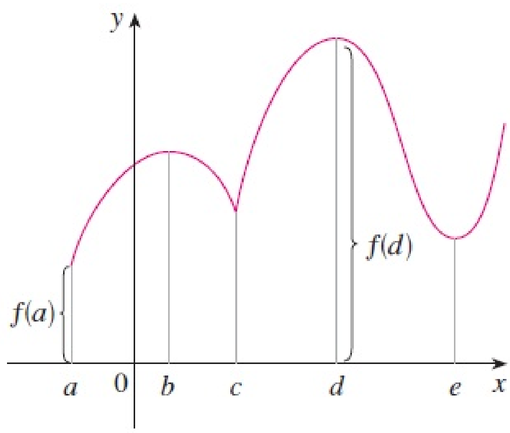
Em geral, na definição de pontos críticos de uma função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, são considerados também aqueles pontos $p \in (a,b)$ tais que $f'(p)$ não existe. Porém, nesse texto chamaremos de pontos críticos somente aqueles que obedecem a Definição 3.5.8.

Definição 3.5.9 *Uma função* $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *possui um valor de máximo absoluto (respectivamente mínimo absoluto) em* $p \in D_f$ *se,* $f(p) \geq f(x)$ *para todo* $x \in D_f$ *(respectivamente se,* $f(p) \leq f(x)$ *para todo* $x \in D_f$*).*

Conforme Figura 7, percebe-se que a função $f : [a,e] \longrightarrow \mathbb{R}$ assume valor de máximo absoluto em $\boldsymbol{d}$, enquanto seu mínimo absoluto em $\boldsymbol{a}$, ou seja, $f(d)$ é o valor de máximo absoluto, enquanto $f(a)$ é o mínimo absoluto de f em seu domínio. Além disso, é notório que o ponto $(d, f(d))$ é o ponto mais alto no gráfico de f e o ponto $(a, f(a))$ é o mais baixo.

Aos valores de máximo e de mínimo absoluto da função f serão chamados valores extremos de f.

Figura 7: Valores de máximos e mínimos absolutos.



Fonte: STEWART (2014. p. 248).

A seguir, enunciara-se as definições sobre valor de máximo e mínimo local de uma função f.

Definição 3.5.10 *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que $p \in (a,b)$ é um ponto de máximo local (respectivamente mínimo local) para f se existir algum $\delta > 0$ tal que $f(p) \geq f(x)$ para todo $x \in (p-\delta, p+\delta)$ (respectivamente $f(p) \leq f(x)$ para todo $x \in (p-\delta, p+\delta)$).*

De acordo com a definição acima, percebe-se pela Figura 7 que $f(b)$ e $f(d)$ são valores de máximos locais para f e $f(c)$ e $f(e)$ são valores de mínimos locais para f.

Prova-se um teorema útil na obtenção dos pontos de máximo e mínimo local para uma função f, e por conseguinte seus respectivos valores de máximos e mínimos locais para f.

Teorema 3.5.9 ***(Teorema de Fermat)***. *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $p \in (a,b)$ um máximo ou mínimo local para f. Se $f'(p)$ existir, então $f'(p) = 0$.*

Demonstração. Seja $p \in (a,b)$, um máximo local para f. Daí, segue que existe algum número real $\delta > 0$, tal que $f(p) \geq f(x)$ para todo $x \in (p-\delta, p+\delta)$. Se $f'(p)$ existir, então $f'_-(p) = f'_+(p)$, ou seja, vale que

$$\begin{aligned} f'_-(p) &= \lim_{x \to p^-} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \\ &= \lim_{x \to p^+} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \\ &= f'_+(p). \end{aligned}$$

Por outro lado, $f(x) - f(p) \leq 0$ para todo $x \in (p-\delta, p+\delta)$. Portanto, temos que

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \geq 0$$

quando $x \to p^-$.

E,

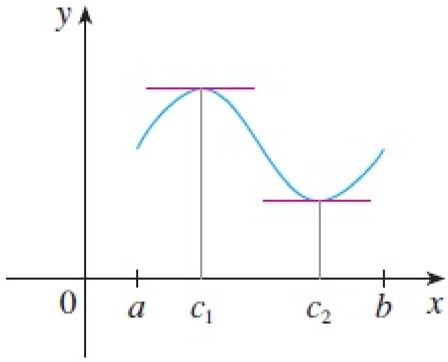
$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \leq 0$$

quando $x \to p^+$.

Daí, seguirá imediatamente que $f'_-(p) \geq 0$ e $f'_+(p) \leq 0$, ou seja, $f'(p) \geq 0$ e $f'(p) \leq 0$. Logo, $f'(p) = 0$.

O caso $p \in (a,b)$, um mínimo local para f é inteiramente análogo. ■

Figura 8: Teorema de Fermat.



Fonte: STEWART (2014. p. 257).

Pelas definições aluzidas, conclui-se que teremos um valor de máximo local quando existe algum $\delta > 0$, tal que $I = (p - \delta, p + \delta)$ tem-se $f(p) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. De modo semelhante, teremos um valor mínimo local quando existe algum $\beta > 0$, tal que para $J = (p - \beta, p + \beta)$ tem-se $f(p) \leq f(x)$ para todo $x \in J$. Porém, valerá ainda observar que, se p é um ponto de máximo absoluto, então p é também um ponto máximo local, já a recíproca nem sempre á verdadeira e, novamente essa informação funcionará de forma análoga para os pontos de mínimos absolutos/locais.

A seguir, listaremos alguns casos que se aplicam os resultados dos teoremas acima supracitados. Todavia, salienta-se que a existência de um ponto crítico nem sempre acarretará um ponto de máximo ou de mínimo, e como definido anteriormente ser ponto de máximo ou mínimo não implicará necessariamente ser o ponto crítico.

1. A função linear $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 2x$ tem mínimo em $x = -2$ e máximo em $x = 2$. Todavia, nenhum desses pontos são críticos, pelo fato de ambos os pontos serem extremidades do domínio de f.

2. A função $g = |x|$, com $x \in \mathbb{R}$ possui um mínimo em $x = 0$, porém o mesmo não é crítico uma vez que $f'(0)$ não existe.

3. A função $h(x) = x^3$, com $x \in \mathbb{R}$ admitirá como primeira derivada a função $h'(x) = 3x^2$. Daí, resolvendo-se a equação $h'(x) = 0$ obtém-se $x = 0$ como ponto crítico, porém o tal ponto nem é de máximo, nem de mínimo, mas sim de inflexão, o qual será justamente nesse ponto que a concavidade do gráfico da função muda de sinal.

3.6 Teorema de Rolle e teorema de Lagrange

A seguir, apresenta-se dois teoremas responsáveis por diversas aplicações do Cálculo Diferencial: o *Teorema de Rolle*, se apresentará de forma crucial na demonstração do *Teorema de Lagrange*, este último é conhecido como *Teorema do Valor Médio ou TVM.*

A seguir, o *Teorema de Weierstrass*, resultado crucial na demostração do Teorema de Rolle.

Teorema 3.6.10 ***(Teorema de Weierstrass).*** *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existem $\alpha, \beta \in [a, b]$ tais que $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ para todo $x \in [a, b]$.*

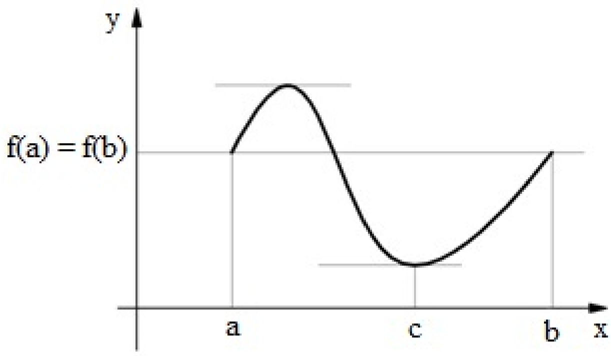
O Teorema de Weierstrass garante que toda função contínua em um intervalo admitirá em seu domínio valores extremos. Além disso, não apresentara-se uma demonstração para o tal teorema, pois fugirá dos objetivos desse trabalho, porém para o leitor interessado poderá constatar tal fato em [13].

Teorema 3.6.11 ***(Teorema de Rolle).*** *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Se f for uma função constante, ou seja, $f(x) = k$, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos $f(a) = f(b) = k$. Portanto, $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, provando o resultado.

Supondo-se que f não seja constante. Então, como f é contínua em $[a, b]$ segue pelo Teorema de Weierstrass, que existirá $\alpha, \beta \in [a, b]$ tais que $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$, para todo $x \in [a, b]$. Ou seja, α e β são pontos de máximo e mínimo, respectivamente. Perceba que $f(\alpha) \neq f(\beta)$, pois f não é constante, e portanto, α ou β pertence ao intervalo (a, b). Logo, $f'(\alpha) = 0$ ou $f'(\beta) = 0$ pelo Teorema de Fermat. ■

Figura 9: Teorema de Rolle.



Fonte: Construída pelo autor.

Se demonstrará a seguir, o principal teorema deste capítulo, o qual é conhecido por **Teorema do valor médio - TVM**. Além disso, se perceberá em sua demonstração que ele é de fato, uma consequência imediata do Teorema de Rolle, e ainda poderá constatar-se a equivalência existente entre os teoremas.

Teorema 3.6.12 ***(Teorema do Valor Médio - TVM).*** *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Seja $g(x)$ a função cujo gráfico é a reta determinada pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, conforme Figura 10. Assim, $g(x)$ possuirá a seguinte expressão:

$$g(x) = f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \cdot (x - a).$$

Defina $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$; $h(x) = f(x) - g(x)$. É trivial perceber que

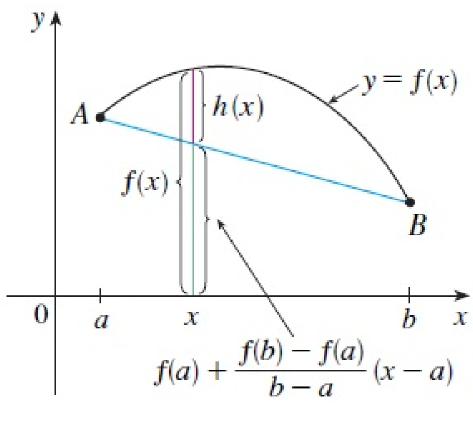
$$h(a) = h(b) = 0.$$

Por outro lado, sendo $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), seguirá imediatamente que h também é contínua em $[a, b]$ e derivável (a, b). Então, nessas condições tem-se pelo Teorema de Rolle que existirá $c \in (a, b)$, tal que $h'(c) = 0$. Além disso, teremos $h'(x) = f'(x) - g'(x)$, e portanto, tomando-se $x = c$ segue que

$$h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = g'(c) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Obtendo-se assim, o resultado. ∎

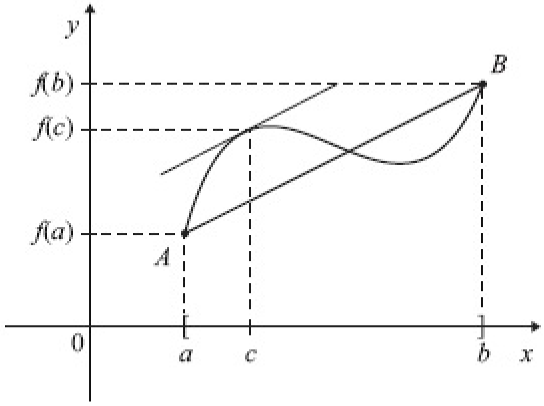
Figura 10: Gráfico da função $g(x)$.



Fonte: STEWART (2014. p. 258).

Como aplicação do Teorema do valor médio, se mostrará que entre os extremos a e b do domínio da função f sempre existirá pelo menos um c real tal que à reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$, é paralela à reta secante ao gráfico de f, determinada pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Figura 11: Teorema do Valor Médio - TVM.



Fonte: Construída pelo autor.

O teorema a seguir, será essencial na resolução dos problemas apresentados no capítulo 4.

Teorema 3.6.13 ***(Teste da derivada segunda)***. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) até a segunda ordem, com derivadas f' e f'' também contínuas em (a, b). Seja $p \in (a, b)$ um ponto crítico para f. Nessas condições teremos*

I. Se $f''(p) < 0$, então p é um ponto de máximo local para f;

II. Se $f''(p) > 0$, então p é um ponto de mínimo local para f.

Demonstração. Uma demonstração para o teorema acima pode ser obtido em [20]. ■

Finalizará a seção através de exemplos importantes, que servirão como aplicações do Teorema de Rolle e do TVM.

Exemplo 3.6.23 *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Mostre que f é constante se, e somente se, $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$.*

Solução. Para mostrar que: se f é constante, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, veja Proposição 3.2.4, p. 40. Suponha que $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $x \in (a, b]$, então pelo TVM existirá $c \in (a, x)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pela hipótese temos que $f'(c) = 0$. Portanto, segue-se

$$f'(c) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a) = k.$$

para todo $x \in [a, b]$, com k constante, provando o resultado. ■

Exemplo 3.6.24 *Se $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b) e $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$, então $f(x) = g(x) + k$, com k constante.*

Solução. Seja $x \in (a, b)$, então pelo TVM existirá $c \in (a, x)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e

$$g'(c) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Pela hipótese $g'(c) = f'(c)$, assim teremos $f(x) - f(a) = g(x) - g(a)$, ou seja,

$$f(x) = g(x) + k,$$

com $k = f(a) - g(a)$. Concluindo assim, o resultado. ■

Teorema 3.6.14 ***(Teorema de Cauchy)****. Se $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

com $g(b) \neq g(a)$ e $g'(c) \neq 0$.

Demonstração. Defina $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x).$$

Daí, pela continuidade das funções f e g em $[a, b]$ e a derivabilidade delas em (a, b) seguirá que h também é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).

Por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned} h(a) &= (f(b) - f(a)) \cdot g(a) - (g(b) - g(a)) \cdot f(a) \\ &= f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b) + f(a) \cdot g(a) \\ &= f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h(b) &= (f(b) - f(a)) \cdot g(b) - (g(b) - g(a)) \cdot f(b) \\ &= f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(b) + f(b) \cdot g(a) \\ &= f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b). \end{aligned}$$

Conclui-se que $h(a) = h(b)$. Então, pelo Teorema de Rolle, existirá $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, e consequentemente, segue que

$$\begin{aligned} (f(b) - f(a)) \cdot g'(c) &= (g(b) - g(a)) \cdot f'(c) \\ &\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \end{aligned}$$

Provando o resultado. ■

Exemplo 3.6.25 *Para* $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *mostre que* $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geq |x - y|$.

Solução. Se $x = y$, então não há o que provar.

Considere por sua vez $x < y$. Assim, segue pelo TVM que existe $c \in (x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}'(c) &= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x - y} \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}'(c)\,(x - y) \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \left(\sec^2 c\right)(x - y) \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{1}{\cos^2 c}\,(x - y)\,. \end{aligned}$$

Como $|\cos c| \leq 1$ implica em $\left|\frac{1}{\cos c}\right| \geq 1$, ou ainda, $\frac{1}{\cos^2 c} \geq 1$, e portanto, seguirá

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| = \frac{1}{\cos^2 c}\,|x - y| \geq |x - y|\,.$$

Provando o resultado. ■

4 PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

"Não basta ensinar ao homem uma especialidade. Porque se tornará assim uma máquina utilizável, mas não uma personalidade. É necessário que se adquira um senso prático daquilo que vale a pena ser empreendido, daquilo que é belo, do que é moralmente correto. A não ser assim, ele se assemelhará, com seus conhecimentos profissionais, mais a um cão ensinado do que uma criatura harmoniosamente desenvolvida. Deve aprender a compreender as motivações dos homens, suas quimeras e suas angústias para determinar com exatidão seu lugar exato em relação a seus próximos e à comunidade. Os excessos do sistema de competição e de especialização prematura, sob o falacioso pretexto da eficácia, assassinam o espírito, impossibilitam qualquer vida cultural e chegam a suprimir os progressos nas ciências do futuro. É preciso, enfim, tendo em vista a realização de uma educação perfeita, desenvolver o espírito crítico na inteligência do jovem."

Albert Einstein (1879 - 1955)

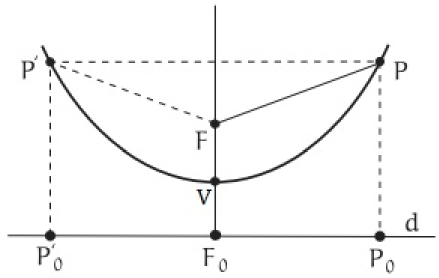
Neste capítulo, será apresentado algumas aplicações da Derivada através de problemas de Matemática. Esses problemas forram subdivididos em dois grupos: o Grupo 1 será formado por problemas robustos, porém entendíveis, mas só conseguiremos solucioná-los através do uso de Derivada. O Grupo 2 será formado por problemas cuja solução de cada um se dará em duas versões, a primeira através de ferramentas de Matemática Básica, enquanto a segunda pelo uso de Derivada.

4.1 Noções de geometria analítica

Nesta seção, serão abordados alguns conceitos e resultados de geometria analítica.

Definição 4.1.11 ***(Parábola).*** *Seja* **d** *uma reta e* ***F*** *um ponto fora dela. No plano determinado por* **d** e ***F***, *chama-se parábola de foco* ***F*** *e diretriz* **d** *ao conjunto dos pontos equidistantes de* **d** e ***F***.

Figura 12: Parábola de foco ***F*** e diretriz ***d***.



Fonte: LIMA (2014, P. 115).

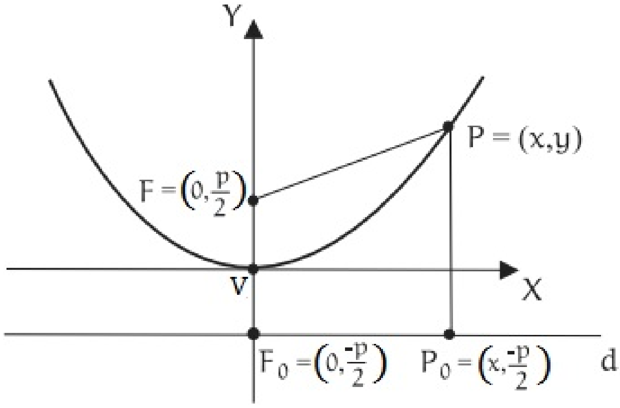
Perceba que a distância do ponto P à reta d é igual a distância de P ao ponto P_0, pé da perpendicular baixada de P sobre d. Se F_0 é o pé da perpendicular baixada de F sobre d, a reta FF_0 é um eixo de simetria da parábola. Se P pertence a parábola e P' é o seu simétrico em relação a reta FF_0, então P' também pertence à parábola.

Sejam p o comprimento e V o ponto médio do segmento FF_0. A distância de V à reta d é igual a $\frac{p}{2}$, o mesmo que o comprimento de AF. Logo, V pertence à parábola e chama-se o seu *vértice*.

Exemplo 4.1.26 *Mostre que a equação da parábola de foco F e diretriz d, com $p > 0$ representando a distância de F a d é $y = \dfrac{x^2}{2p}$.*

Solução. Considere um sistema de eixos ortogonais XY cuja origem coincide com o vértice V da parábola e cujo eixo vertical coincida com eixo de simetria da parábola, ver figura abaixo.

Figura 13: Equação da parábola.



Fonte: LIMA (2014, p. 116).

Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola. A distância de P à diretriz d é igual a $\left(y + \dfrac{p}{2}\right)$. Além disso, a distância de P ao foco F é igual a $\sqrt{x^2 + \left(y - \dfrac{p}{2}\right)^2}$. Como P pertence à parábola tem-se que

$$
\begin{aligned}
y + \frac{p}{2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad 2py = x^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2p}.
\end{aligned}
$$

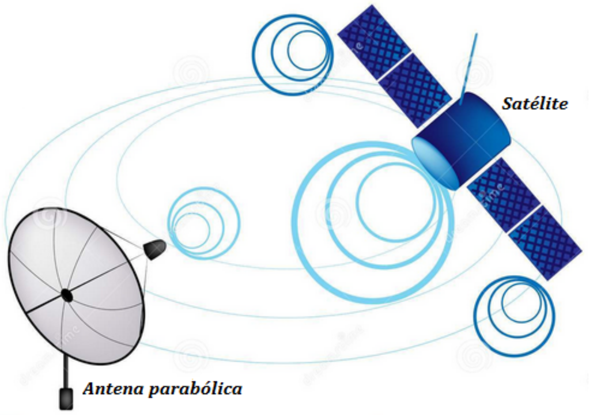
■

O leitor pode constatar esses resultados sobre geometria analítica em [14].

Ao girarmos uma parábola em torno do seu eixo, ela irá gerar uma superfície chamada *parabolóide de revolução*, também conhecida como *superfície parabólica*. Essa superfície possui inúmeras aplicações interessantes, todas decorrentes da seguinte propriedade geométrica da parábola: quando um raio incide sobre uma superfície refletora, o ângulo de *incidência* é igual ao ângulo de *reflexão*, tal resultado será abordado primeiro problema do Grupo 1. Nesse contexto, a superfície parabólica pode ser substituída pela parábola que é a intersecção dessa superfície com o plano que contém o raio incidente, o raio refletido e o eixo de rotação.

Um resultado recente sobre superfícies parabólica advém das antenas parabólicas, empregados na rádio-astronomia, bem como em nosso dia-a-dia dos aparelhos de televisão, refletindo os débeis sinais provenientes de um satélite sobre sua superfície, fazendo-os convergir para um único ponto, o foco F.

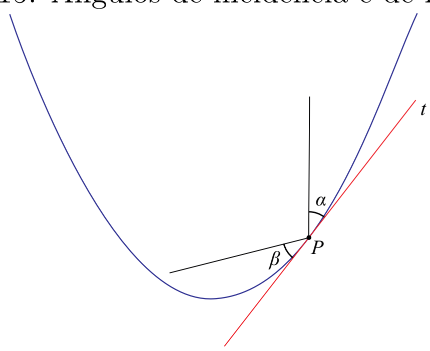
Figura 14: Antenas parabólicas captando sinais via satélite.



Fonte: Construída pelo autor.

Definição 4.1.12 *O ângulo entre uma reta e uma curva que se intersectam no ponto P é o ângulo entre essa reta e a tangente à curva traçada pelo ponto de intersecção.*

Figura 15: Ângulos de incidência e de reflexão.



Fonte: Construída pelo autor.

Pela Figura 15 pode-se interpretar que α é o ângulo de *incidência* e β é o ângulo de *reflexão*.

Teorema 4.1.15 *Se $P(x_0, y_0)$ é um ponto da parábola dada pelo gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, então a reta tangente à parábola no ponto P é a reta que passa por P e tem inclinação $2ax_0 + b$.*

Demonstração. Pela equação 2.2, p. 14 temos que

$$m = f'(x_0) = (ax^2 + bx + c)' = 2ax_0 + b.$$

■

Lema 4.1.3 *Se $P(x, y)$ é um ponto da parábola dada pelo gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e Q o pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz d, então a inclinação da reta FD é $-\dfrac{1}{2ax+b}$.*

Demonstração. Se o ponto $P(x, y)$ coincidir com o vértice $V = (x_v, y_v)$ da parábola, então a reta FQ será vertical e a reta tangente horizontal (inclinação zero) provando assim, o Lema.

Suponhamos agora que o ponto P não coincida com o vértice $V = (x_v, y_v)$. Assim, temos que

$$x \neq x_v \Rightarrow x \neq -\frac{b}{2a} \Rightarrow 2ax + b \neq 0.$$

Por outro lado, para obtermos a inclinação da reta FQ observe que

$$F\left(x_v, y_v + \frac{1}{4a}\right) \text{ e } Q\left(x_v, y_v - \frac{1}{4a}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} m_{FQ} &= \frac{y_v - \frac{1}{4a} - \left(y_v + \frac{1}{4a}\right)}{x - x_v} = \frac{y_v - \frac{1}{4a} - y_v - \frac{1}{4a}}{x + \frac{b}{2a}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2a}}{\frac{2ax+b}{2a}} = \frac{-1}{2ax+b} \therefore m_{FQ} = \frac{-1}{2ax+b}. \end{aligned}$$

■

Por fim, percebe-se pelo Teorema 4.1.15 e pelo Lema 4.1.3 que a reta tangente à parábola no ponto P é perpendicular a reta determinada pelo pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz e o foco F, pois o produto das respectivas inclinações é igual a -1.

O leitor pode constatar esses resultados sobre Parábola em [15].

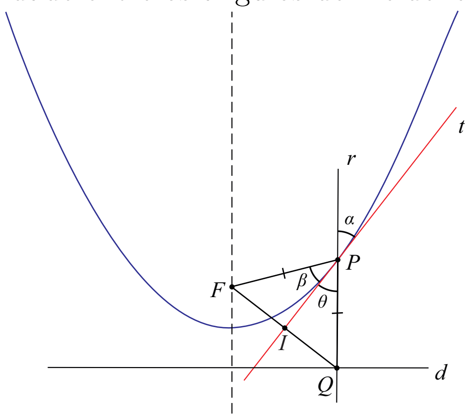
4.2 Aplicações da derivada

Apresentaremos a seguir, algumas aplicações da Derivada através de problemas de Matemática voltados a alunos participantes das Olimpíadas da Matemática. Tais problemas se dividirão em dois grupos: o Grupo 1 será composto por problemas a nível do Ensino Médio, nos quais mostraremos duas soluções, a primeira através de ferramentas da Matemática Básica elementares e a segunda através do uso das de Derivadas. O Grupo 2 será formado por problemas robustos, porém entendíveis, mas conseguimos solucioná-los através do uso da Derivada.

Grupo 1

Problema 1 *Mostre que a reta tangente à parábola num ponto P faz ângulos iguais com a paralela ao eixo e com a reta que une o foco F a esse ponto.*

Figura 16: Igualdade entre os ângulos de incidência e de reflexão.



Fonte: Construída pelo autor.

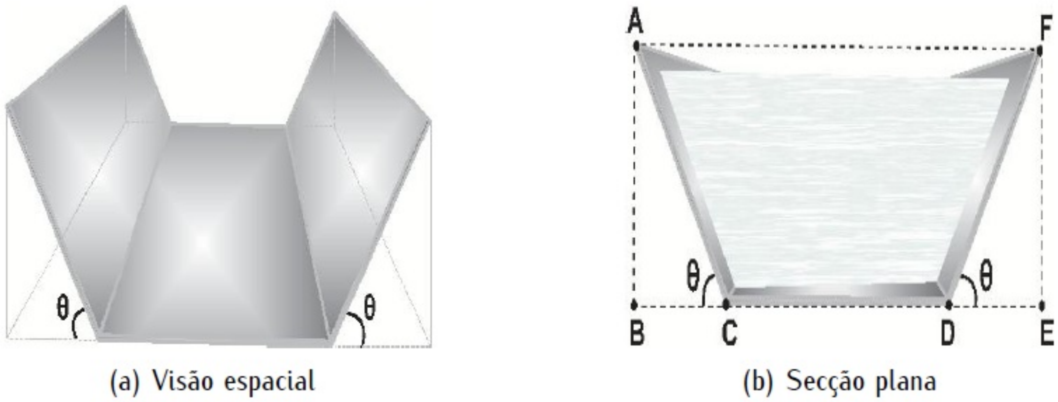
Solução. Sejam r uma reta paralela ao eixo da parábola, t a reta tangente à parábola no ponto P, Q o pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz d e $I = t \cap FQ$. De acordo com a Figura 16 devemos mostrar que $\alpha = \beta$.

Pela definição da parábola tem-se que $PF = PQ$, logo o triângulo PFQ é isósceles de base $\overline{FQ}$. Além disso, pelo Teorema 4.1.15, p. 61 e pelo Lema 4.1.3, p. 61 temos que a reta QF é perpendicular a reta tangente t, logo PI é altura do triângulo isósceles PFQ relativa a sua base $\overline{FQ}$ e também é bissetriz. Portanto, os ângulos $F\hat{P}I = \beta$ e $Q\hat{P}I = \theta$ são iguais. Além disso, os ângulos α e θ são Opostos Pelo Vértice (OPV), e portanto, são iguais. Daí, segue que $\alpha = \beta$. ■

O Prolema 1 pode ser encontrado em [15].

Problema 2 ***(A calha de chuva ideal).*** *Uma calha de chuva deve ser construída com uma folha de metal e largura* ***l*** *metros, dobrando-se para cima* $\frac{1}{3}$ *da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo* θ *com a horizontal. Mostre que tomando-se* $\theta = \frac{\pi}{6}$ *obtém-se a calha com maior capacidade de carregar a água.*

Figura 17: Calha de chuva.



Fonte: Silva (2012, p. 46).

Solução. Temos que a área A_{ACDF} da seção transversal $ACDF$ é dada por

$$A_{ACDF} = \frac{(CD + AF) \cdot AB}{2}, \tag{4.24}$$

e notando que $AF = CD + 2 \cdot BC$ tem-se, substituindo em 4.24

$$A_{ACDF} = (CD + BC) \cdot AB, \tag{4.25}$$

agora substituindo $CD = \dfrac{x}{3} \cdot \cos\theta$ e $AB = \dfrac{x}{3} \cdot \operatorname{sen}\theta$ em 4.25, temos

$$A_{ACDF} = A(\theta) = \frac{x^2}{9} \cdot (1 + \cos\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta.$$

E ainda podemos escrever $A : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$A(\theta) = \frac{x^2}{9} \cdot \left(\operatorname{sen}\theta + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right). \tag{4.26}$$

Derivando 4.26 obtemos a seguinte expressão

$$A'(\theta) = \frac{x^2}{9} \cdot (\cos\theta + \cos 2\theta). \tag{4.27}$$

Fazendo $A'(\theta) = 0$, no intuito de encontrar os pontos críticos temos que

$$\cos\theta + \cos 2\theta = 0, \tag{4.28}$$

e chegamos a equação quadrática, na variável $\cos\theta$ dada por

$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0 \tag{4.29}$$

que possui soluções

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \ e \ \cos\theta = -1. \tag{4.30}$$

Daí, em virtude de $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, segue que

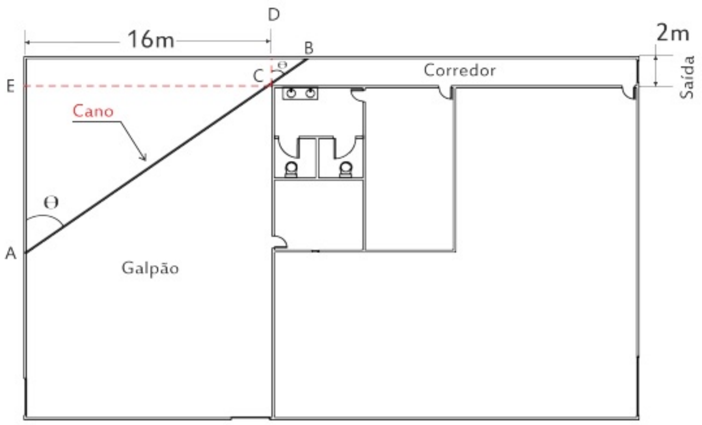
$$\cos\theta = \frac{1}{2},$$

e portanto tem-se que $\theta = \frac{\pi}{3}$ implicando que $A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{x^2}{9}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$. Usando o fato de que $A''(\theta) = -A(\theta) - \frac{x^2 \operatorname{sen} 2\theta}{6} < 0,\ \forall\ \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e que $A(0) = 0$ e $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{x^2}{9}$ concluímos que tal ponto $\theta = \frac{\pi}{3}$ é de máximo absoluto. ■

O Prolema 2 pode ser encontrado em [20].

Problema 3 ***(O cano no corredor em "L").*** *Um cano de metal está sendo carregado através de uma passagem com 16 metros de largura. No fim da parede há uma curva em ângulo reto, passando-se para uma passagem de 2 metros de largura. Mostre que o comprimento do cano mais longo que pode ser carregado horizontalmente em torno do canto é de $10\sqrt{5}$ metros.*

Figura 18: Visão superior.



Fonte: Silva (2012. p. 47).

Solução. O cano mais longo deverá fazer a seguinte configuração com as paredes (veja a Figura 18). O comprimento $AB = AC + CB$ e percebendo-se que

$$AC = 16 \operatorname{cossec} \theta \text{ e } CB = 2 \sec \theta,$$

e portanto, o comprimento AB em função do ângulo θ é $C : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$;

$$C(\theta) = 16 \operatorname{cossec} \theta + 2 \sec \theta,$$

cuja derivada é

$$C'(\theta) = -16 \operatorname{cossec} \theta \operatorname{cotg} \theta + 2 \sec \theta \operatorname{tg} \theta$$

e ainda,

$$C''(\theta) = 16 \operatorname{cossec}^3 \theta + 16 \operatorname{cossec} \theta \operatorname{cotg}^2 \theta + 2 \sec^3 \theta + 2 \sec \theta \operatorname{tg}^2 \theta.$$

Fazendo $C'(\theta) = 0$, temos a equação

$$\sec \theta \operatorname{tg} \theta = 8 \operatorname{cossec} \theta \operatorname{cotg} \theta,$$

que é equivalente a

$$\operatorname{tg}^3 \theta = 8 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 2.$$

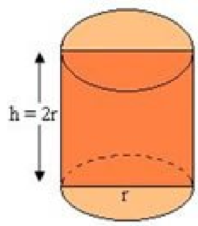
Daí, tem-se que $\sec \theta = \sqrt{5}$ e $\operatorname{cossec} \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Como $C''(\theta) > 0$, $\forall\ \theta$, o comprimento máximo do cano será $C_{max} = C(\operatorname{arc\,tg} 2) = 10\sqrt{5}\ m$. ■

O Prolema 3 pode ser encontrado em [20]

Grupo 2

Problema 4 *Dentre todos os cilindros circulares retos de área total constante, mostre que o de maior volume é o equilátero.*

Figura 19: Cilindro equilátero.



Fonte: Construída pelo autor.

Solução 1. Sejam r o raio da base e h a altura de um cilindro circular reto. Assim, o volume do cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, e portanto, deve-se provar que $h = 2r$ quando sua área for constante, isto é:

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = A,$$

com $r > 0$, $h > 0$ e $A > 0$.
Perceba que

$$\begin{aligned} V = \pi r^2 h \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{V}{\pi} = r^2 h \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{V}{\pi}\right)^2 = r^4 h^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\left(\frac{V}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{4} r^4 h^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{V}{2\pi}\right)^2 = r^2 \left(\frac{rh}{2}\right)\left(\frac{rh}{2}\right). \end{aligned}$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética A e geométrica G teremos para $a, b, c > 0$ que

$$\begin{aligned} G \leq A \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3, \end{aligned}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $a = b = c$.
Tomando-se $a = r^2$, $b = c = \frac{rh}{2}$, teremos pela equação acima que

$$\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2 = r^2 \left(\frac{rh}{2}\right)\left(\frac{rh}{2}\right) \quad \leq \quad \left(\frac{r^2 + \frac{rh}{2} + \frac{rh}{2}}{3}\right)^3.$$

Daí, nota-se que $\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2$ é máximo, quando V for máximo, ocorrendo $r^2 = \frac{rh}{2}$, ou seja, $r = \frac{h}{2}$, ou ainda, $h = 2r$.

Solução 2. Temos,

$$h = \frac{k - r^2}{r} \Rightarrow \frac{V}{\pi} = -r^3 + kr = f(r), k = \frac{A}{2\pi}.$$

Daí, seguirá: $f'(r) = -3r^2 + k$ e $f''(r) = -6r < 0$.
Resolvendo-se $f'(r) = 0$, se obtém: $k = 3r^2$. Então, $hr = 2r^2$, ou seja, $h = 2r$.

Problema 5 *No casamento de Osmar e Naura, foi contratado um buffet para a realização de uma festa para* 200 *convidados. O buffet cobrará R\$* 36,00 *por pessoa, se todos os convidados comparecerem; caso contrário, para cada convidado que faltar será acrescentada a quantia de R\$* 0,50 *por convidado que comparecer.*

Quantos convidados precisam comparecer para que a receita do buffet seja a maior possível?

Solução 1. Seja x a quantidade de convidados que faltaram a festa. Assim, estão presentes na festa $(200 - x)$ convidados.

Considere $y = f(x)$, o valor da receita adquirida pelo *buffet* com esta festa. Então, para cálculo da receita y devemos nos atentar as seguintes passagens de enunciado.

"caso contrário, para cada convidado que faltar será acrescentada a quantia de R\$ $0,50$ por convidado que comparecer."

Essa passagem do enunciado é tida como ponto principal da questão. Pois, o *caso contrário* não ausentará os $(200 - x)$ convidados presentes do pagamento inicial de R\$ $36,00$, ou seja, R\$ $36(200 - x)$ para a receita e além disso, no qual se tem "para cada convidado que faltar será acrescentada a quantia de R\$ $0,50$ por convidado que comparecer" deve-se entender que o valor de R\$ $0,50$ se repetirá em x vezes entre os $(200 - x)$ convidados presentes, e portanto, será acrescentado R\$ $0,50x(200 - x)$ para a receita do *buffet*. Portanto, no fim das contas a refeita será igual a:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0,50x(200 - x) + 36(200 - x) \\ &= -\frac{x^2}{2} + 64x + 7200. \end{aligned}$$

Daí, sendo os coeficientes de f iguais a $a = -\frac{1}{2}$, $b = 64$ e $c = 7200$, tem-se que $a = -\frac{1}{2} < 0$, e portanto f assumirá um valor de máximo no ponto dado por:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{64}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 64.$$

Logo, precisam comparecer: $200 - 64 = 136$, convidados para que a receita do *buffet* seja a máxima possível.

Solução 2. Temos,

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 64x + 7200 \Rightarrow f'(x) = -x + 64 \Rightarrow f''(x) = -1 < 0.$$

Logo, f assumirá seu valor máximo no ponto x tal que $f'(x) = 0$, ou seja, $x = 64$, ficando 136 convidados como resposta.

Problema 6 *Determine os parâmetros* a, b *e* $c \in \mathbb{R}$*, com* $3a - b - c = 2$ *tais que a reta* $y = 3x$ *tangencia à parábola* $y = ax^2 + bx + c$ *no ponto de abscissa* 2 *e passe pelo ponto* $(-1, 0)$.

Solução 1. Como o ponto $(-1, 0)$ deve pertencer à parábola de equação

$$y = ax^2 + bx + c,$$

então seguirá que $a - b + c = 0$.

Por outro lado, como a parábola deve tangenciar à reta de equação $y = 3x$ no ponto de abcissa 1, então conclui-se que $x = 2$ e $y = 6$, ou seja, o ponto $(2, 6)$ é comum à reta e à parábola. Daí, conclui-se

$$4a + 2b + c = 6.$$

Portanto, temos o seguinte sistema a solucionar:

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 3a - b - c = 2 \end{cases}.$$

Usa-se a *regra de Cramer* para resolver tal sistema. Isto é, a matriz dos coeficientes é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Daí, para o cálculo do determinante da matriz A, usa-se o desenvolvimento de *Laplace* como segue

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 - 4 - 6 + 1 - 4 = -18 \neq 0.$$

Portanto, o sistema é possível e determinado, ou seja, possuirá solução única.

Veja:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 6 - 4 + 0 - 6 = -18;$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6+0+8-18-2+0 = -18;$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-18+0+0+6+8 = 0.$$

Logo, $a = \frac{det(A_1)}{det(A)} = 1$, $b = \frac{det(A_2)}{det(A)} = 1$ e $c = \frac{det(A_3)}{det(A)} = 0$.

Solução 2. Tem-se que o coeficiente angular da reta $y = 3x$ é $m_1 = 3$ e o coeficiente angular da reta tangente é $m_2 = y'(1) = 2a + b$. Como $m_1 = m_2$ seguirá que: $2a + b = 3$. Portanto,

$$4a + 2b + c = 6 \Rightarrow 2(2a + b) + c = 6 \Rightarrow 2 \cdot 3 + c = 6 \Rightarrow c = 0.$$

Daí, segue-se:

$$\begin{cases} 3a - b = 2 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1.$$

Problema 7 *Determine uma equação da reta tangente à circunferência*

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0,$$

no ponto $A = (5, 1)$.

Solução 1. Usa-se o método de completar quadrados para determinar o centro e o raio da circunferência. Isto é,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 &\Leftrightarrow \left(x^2 - 4x\right) + \left(y^2 + 6y\right) = 12 \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(y^2 + 6y + 9\right) = 12 + 4 + 9 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que à circunferência tem centro $C = (2, -3)$ e raio é $R = 5$. Desta forma sabe-se que à reta determinada pelos pontos $C = (2, -3)$ e $A = (5, 1)$ é perpendicular à reta tangente à circunferência no ponto A.

Seja r a reta determinada pelos pontos A e C. Assim, o coeficiente angular de r é dado por

$$m_r = \frac{1-(-3)}{5-2} = \frac{4}{3}.$$

Portanto, como r possui coeficiente angular $m_r = \frac{4}{3}$ e passa pelo ponto A teremos imediatamente que sua equação é dada por

$$y - 1 = \frac{4}{3}(x-5) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3}.$$

Seja t à reta tangente à circunferência no ponto A. Então, valerá

$$m_t = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}.$$

Como à reta t possui coeficiente angular $m_t = -\frac{3}{4}$ e passa pelo ponto $A = (5, 1)$, então uma equação para t pode ser obtida como

$$y - 1 = -\frac{3}{4}(x-5) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{19}{4}.$$

Solução 2. Derivando em ambos os lados a equação da circunferência em relação a x,

$$2x + 2yy' - 4 + 6y' = 0 \Rightarrow (2y+6)y' = 4 - 2x \Rightarrow y' = \frac{4-2x}{2y+6}.$$

Tomando-se $x = 5$ e $y = 1$, teremos que $m_t = y' = -\frac{3}{4}$. Daí, como $A \in t$ seguirá

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{19}{4}.$$

Problema 8 *Prove que:*

(a) *Dentre todos os retângulos de perímetro constante P, o de maior área A é o quadrado.*

(b) *Dentre todos os retângulos de área constante A, o de menor perímetro P é o quadrado.*

Solução.
Item (a). Sejam x e y as dimensões de um retângulo qualquer cujo perímetro é igual a P. Então, sua área A é dada por

$$A = xy.$$

Por outro lado, sendo P o perímetro do retângulo teremos

$$P = 2(x + y).$$

Usando-se a desigualdade entre as médias geométricas $G(x, y)$ e aritméticas $A(x, y)$ teremos

$$\begin{aligned} G(x,y) \leq A(x,y) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad A \leq \left(\frac{P}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto, a área de um retângulo de perímetro P, é menor do que ou igual a $\left(\frac{P}{4}\right)^2$, ou seja, sua área é máxima quando $A = \left(\frac{P}{4}\right)^2$.
Isto é,

$$\begin{aligned} A = \left(\frac{P}{4}\right)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad xy = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad 4xy = x^2 + 2xy + y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2xy + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x - y)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |x - y| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

Logo, conclui-se o resultado.

Item (b). Sejam x e y as dimensões de um retângulo qualquer cuja área é igual a A. Então, seu perímetro P é dado por

$$P = 2(x + y).$$

Por outro lado, sendo A à área do retângulo, teremos ainda

$$A = xy.$$

Usando-se a desigualdade entre as médias geométricas $G(x, y)$ e aritméticas $A(x, y)$

teremos

$$\begin{aligned} G(x,y) \leq A(x,y) &\Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{xy} \leq 2(x+y) \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{A} \leq P. \end{aligned}$$

Portanto, o perímetro de um retângulo de área A, é maior do que ou igual a $4\sqrt{A}$, ou seja, seu perímetro é mínimo quando $4\sqrt{A} = P$.

Isto é,

$$\begin{aligned} 4\sqrt{A} = P &\Leftrightarrow 4\sqrt{xy} = 2(x+y) \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{xy} = x+y \\ &\Leftrightarrow 4xy = x^2 + 2xy + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |x-y| = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Logo, conclui-se o resultado.

Item (a'). Temos,

$$P = 2(x+y) \Rightarrow x+y = \frac{P}{2} \Rightarrow y = \frac{P}{2} - x.$$

Substituindo esse último resultado em $A = xy$, obtém-se

$$A = xy = x\left(\frac{P}{2} - x\right) = \frac{P}{2}x - x^2. \tag{4.31}$$

Assim, $A' = \frac{P}{2} - 2x$ e $A'' = -2 \leq 0$, para todo x real, então A é máxima no ponto x, tal que $A' = 0$, ou seja, $x = \frac{P}{4}$. Como $y = \frac{P}{2} - x$ seguirá $y = x = \frac{P}{4}$.

Concluindo-se o resultado.

Item (b'). Temos,

$$A = xy \Rightarrow y = \frac{A}{x}.$$

Substituindo esse último resultado em: $P = 2(x+y)$ obtém-se

$$P = 2(x+y) = 2\left(x + \frac{A}{x}\right).$$

Assim, $P' = 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right)$ e $P'' = \frac{4A}{x^3} \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, então P é mínimo no ponto x, tal que $P' = 0$, ou seja, $x = \sqrt{A}$. Como $y = \frac{A}{x}$ seguirá $y = x = \sqrt{A}$.

Concluindo-se o resultado. $\blacksquare$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Cálculo Diferencial é uma das partes mais importante da Matemática, pois sua utilidade torna-se um fator predominante no desenvolvimento educacional dos alunos, e consequentemente, na integração ao convívio com as inúmeras situações presentes em nosso meio. Além disso, ele é responsável pelo desenvolvimento de várias áreas como: Medicina; Engenharia; Astronomia; Economia; Administração e outras.

Foram abordados neste trabalho resultados referentes a limite e derivada de uma função real, no qual se conheceu: notações, simbologias, propriedades, lemas e teoremas oferecidas por estes conceitos. Ademais, demostrou-se quase todos os resultados expostos no texto com a finalidade de garantir aos alunos participantes das olimpíadas de matemática o conhecimento das principais ferramentas do Cálculo Diferencial para facilitar a resolução de problemas de Matemática.

Portanto, deseja-se sucesso aos leitores do texto no alcance do objetivo desse trabalho. Por fim, finaliza-se esta dissertação ciente da contribuição ofertada à Educação Básica do nosso país ao disponibilizar este material didático sobre aplicações da derivada para o público alvo supracitado.

REFERÊNCIAS

[1] ÁVILA, Geraldo. Limites e Derivadas no Ensino Médio? **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro. nº 60, 2006.

[2] ÁVILA, Geraldo. O Ensino de Cálculo no 2º grau **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro. nº 18, 1991.

[3] CARNEIRO, José Paulo; WAGNER, Eduardo. Vale a Pena Estudar Cálculo? **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro. nº 53, 2004.

[4] CRISSAFF, Lhaylla; DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia. **Geometria Analítica**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013. (Coleção PROFMAT).

[5] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto e Aplicações. vol. 3. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

[6] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. vol. 1. 5ª ed. São Paulo: LTC, 2011.

[7] HOBBES, Thomas. **Do Cidadão**. 3ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

[8] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Complexos, Polinômios, Equações. vol. 6. 6ªed. São Paulo. Atual, 1993.

[9] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Analítica. vol. 7. 7ª ed. São Paulo. Atual, 2005.

[10] IEZZI, Gelson; MACHADO, Nilson José; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, Derivadas e Noções de Integral**. vol. 8. 6ª ed. São Paulo: ATUAL. 2011.

[11] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. vol. 1. 3ª ed. São Paulo: Harbra, 1994.

[12] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. vol. 1. 10ª ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2009.

[13] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. vol. 1. 12ª ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2009.

[14] LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. vol. 1. 1ª ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2014.

[15] LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. vol. 1. 1ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2014.

[16] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio (PCN-EM)**. Brasil. MEC/SEMTEC - Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília, 2002.

[17] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Fundamentos de Cálculo**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2015. (Coleção PROFMAT).

[18] OLIVEIRA, Helano Leom Maia de. **Aplicações de Matemática Básica em Problemas de Modelagem e Otimização**. 65f. Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT), Universidade Federal do Cariri, 2017.

[19] **REVISTA CIÊNCIAS HOJE**. Rio de Janeiro: FGV Editora. vol. 14. n. 79. p. 33, jun. 1995.

[20] SILVA, Juscelino Pereira. **A Derivada e Algumas Aplicações**. Teresina, Edufpi, 2012.

[21] STEWART, James. **Cálculo**. vol. 1. 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

[22] THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo**. Tradução: Kleber Pedroso e Regina Simille de Macedo. vol. 1. 12ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.