Funções aritméticas

Camila Lopes Montrezor

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

Camila Lopes Montrezor

Funções aritméticas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro

USP – São Carlos
Junho de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Montrezor, Camila Lopes
MM811f Funções aritméticas / Camila Lopes Montrezor; orientador Hermano de Souza Ribeiro. -- São Carlos, 2017.
68 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Triângulo de Pascal. 2. Binômio de Newton. 3. Progressões Aritméticas e Geométricas. 4. Funções Aritméticas. 5. Funções Aritméticas Totalmente e Fortemente Multiplicativas. I. de Souza Ribeiro, Hermano, orient. II. Título.

Camila Lopes Montrezor

Arithmetic functions

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate/Master Program in Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *FINAL VERSION*

Area: Mathmatics

Advisor: Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro

USP – São Carlos
June 2017

Dedico este trabalho a minha família, mãe, pai e irmã, que muito me incentivaram a realizar este sonho. Ao meu namorado, melhor amigo e companheiro, Orlando Augusto Carnevali, pela compreensão a pelas inúmeras palavras de apoio e incentivo. E aos meus amigos que me acompanharam nesta conquista.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelo dom da vida, por tantas graças e proteção e por iluminar meus caminhos.

Aos meus pais e irmã que, em inúmeras vezes, me confortaram e incentivaram. Sem o apoio da minha família não conseguiria realizar esta conquista.

Tenho muito a agradecer ao meu muito amado namorado Orlando, pela compreensão e muito carinho a mim dedicado. Não conseguiria chegar tão longe sem que me ajudasse. E também a Angela, irmã de coração, por muito me encorajar no início dessa etapa.

Devo agradecer também aos meus professores do Programa Profmat, em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro, pela paciência e todo tempo dedicado a mim, e também por todo ensinamento que dele recebi.

Agradeço aos meus amigos André e Débora, pelo apoio e pouso durante todo o tempo que necessitei.

E aos meus colegas de mestrado, em especial a Reginaldo, Marília e Wiviane, por todas os dias de estudo e muito auxílio na realização desse trabalho.

Conteúdo

Resumo

MONTREZOR, C. L. **Funções aritméticas**. 2017. 68 p. Dissertação (Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017

Neste estudo, apresentamos conteúdos matemáticos adaptáveis tanto para os anos finais do ensino fundamental quanto para o ensino médio. Iniciamos com um conjunto de ideias preliminares: indução matemática, triângulo de Pascal, Binômio de Newton e relações trigonométricas, para a obtenção de fórmulas de somas finitas, em que os valores das parcelas são computados sobre números inteiros consecutivos, e da técnica de transformação de soma finita em telescópica. Enunciamos Progressões Aritméticas e Geométricas como sequências numéricas e suas propriedades, obtendo a soma de seus n primeiros termos, associando com propriedades do triângulo de Pascal. Por fim, descrevemos Funções Aritméticas, Funções Aritméticas Totalmente Multiplicativas e Fortemente Multiplicativas, como sequências de números naturais, com suas operações e propriedades, direcionando ao objetivo de calcular o número de divisores naturais de n, a soma de todos os divisores naturais de n, e assim por diante. Como consequência, exibimos a fórmula de contagem do número de polinômios mônicos irredutíveis.

Palavras chaves: Triângulo de Pascal, binômio de Newton, progressões aritméticas, progressões geométricas, funções aritméticas

Abstract

MONTREZOR, C. L. **Arithmetic functions**. 2017. 68 p. Dissertação (Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017

In this study, we present mathematical content that is adaptable to both of the final years of elementary school and to high school. We start with a set of preliminary ideas: mathematical induction, Pascal's triangle, Newton's binomial and trigonometric relations, to obtain finite sum formulas, where the parts are computed on consecutive integers, and the technique for transforming a finite sum in telescopic one. We state the Arithmetic and Geometric Progressions as numerical sequences and study their properties, obtaining the sum of their n first terms, associating with properties of the Pascal's triangle. Finally, we describe the Arithmetic, Totally Multiplicative and Strongly Multiplicative Arithmetic Functions, as sequences of natural numbers, with their operations and properties, as a way to calculating the number of natural divisors of n, the sum of all natural divisors of n, and so on. As a consequence, we obtain the counting formula of the number of irreducible mononical polynomials.

Key words: Pascal's triangle, Newton's binomial, arithmetic progressions, geometric progressions, arithmetic functions

Introdução

A dissertação é composta por três capítulos, cujos conteúdos são adaptáveis tanto para os anos finais do Ensino Fundamental quanto para as séries do Ensino Médio.

O primeiro capítulo, denominado Preliminares, estabelece com os pré-requisitos necessários para a abordagem do assunto. É enunciado o princípio da indução matemática, um dos axiomas na construção dos números naturais, e é construído o triângulo de Pascal, constituído pelos números binomiais segundo a relação de Stiefel, os quais estão presentes tanto na fórmula do binômio de Newton quanto nas fórmulas das funções trigonométricas seno e cosseno para arcos duplos, triplos e assim por diante. Estes assuntos, apresentados na segunda série do ensino médio, são fortemente relacionados: progressões aritméticas de ordem n em que o nésimo termo é calculado através de uma função polinomial de grau n. A obtenção das fórmulas da soma finita dos n primeiros números naturais, da soma finita dos quadrados e dos cubos dos n primeiros números naturais são consequências de um lado do teorema das colunas para números binomiais e, por outro lado, da técnica de transformação de uma soma finita em uma soma finita telescópica. O cálculo de somas finitas para termos consecutivos de sequências polinomiais de ordens arbitrárias é corolário do exposto.

O segundo capítulo trata de progressões aritméticas e geométricas, cujos elementos são números reais (a extensão do conteúdo do capítulo para progressões aritméticas e geométricas complexas é imediata). Progressões aritméticas reais de primeira, segunda e terceira ordens são sequências de números reais em que o n-ésimo termo da sequência é uma função polinomial de grau um, dois e três respectivamente. No contexto de progressões aritméticas reais de ordem qualquer, o n-ésimo termo da sequência é determinado pelos termos iniciais da progressão aritmética e por números binomiais da linha anterior à linha de número n do triângulo de Pascal. Este conjunto de ideias pode ser aplicado para alunos do oitavo ano do ensino fundamental juntamente com o conteúdo Problemas de Contagem. Progressões geométricas reais, fundamentais em matemática financeira, no cálculo de juros compostos e no valor de prestação em financiamentos bancários e progressões aritmético-geométricas, encerram o capítulo juntamente com a fórmula da somação por partes válida para duas sequências arbitrárias de números reais ou complexos.

O capítulo final, funções aritméticas com valores inteiros (a extensão do conteúdo do capítulo para valores reais ou complexos é inteiramente análoga), discorre sobre sequências de números inteiros relacionadas com a teoria de divisibilidade para números inteiros: as funções aritméticas clássicas calculam o número de divisores naturais de um número natural, a soma de todos os divisores naturais de um número natural, a soma dos quadrados e dos cubos de todos os divisores de um número natural e assim por diante bem como o produto de todos os divisores naturais de um número natural. Ao contrário da consideração de somas finitas sobre termos consecutivos, realizada nos capítulos iniciais, as somas consideradas são restritas aos divisores naturais do número natural e as fórmulas de inversão de Möbius estabelecem uma equivalência entre funções aritméticas em que o valor de uma delas no número natural n é soma finita dos valores da outra calculadas nos divisores naturais d do número natural n. Em nível avançado, uma consequência das fórmulas de inversão é a fórmula da contagem do número de polinômios irredutíveis de grau arbitrário com coeficientes em um corpo finito, fortemente relacionadas com as progressões aritméticas de ordem n.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

A compreensão do conteúdo do capítulo das preliminares permite o cálculo da soma dos n primeiros números naturais, o cálculo da soma dos quadrados dos n primeiros números naturais e a soma dos cubos dos n primeiros números naturais, além do cálculo da soma dos n primeiros números ímpares, da soma dos quadrados dos n primeiros números ímpares e da soma dos cubos dos n primeiros números ímpares.

1.2 Pré Requisitos

O princípio da indução matemática é um dos axiomas na construção do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ dos números naturais.

1.2.1 Princípio da Indução Matemática

Seja A um subconjunto não vazio do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ dos números naturais com as propriedades:

i $1 \in A$.

ii Se $n \in A$, então $n + 1 \in A$.

Então, $A = \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$.

1.2.2 O Triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal é construído a partir dos números binomiais: para números naturais n e k com $k \in \{1, 2, ..., n\}$, os números binomiais são definidos como

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!},$$

em que $k!$ é o produto dos k primeiros números naturais, e com as convenções de que, para cada número natural n, $\binom{n}{0} = 1$ e, quando $n < k$, $\binom{n}{k} = 0$.

1.2.3 Propriedades Fundamentais dos Números Binomiais

i Para números naturais n e k, com $k \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

ii Relação de Stiefel: para números naturais n e k,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Assim, o triângulo de Pascal, constituído dos números binomiais, é construído a partir da relação de Stiefel.

$$\begin{array}{ccccc} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \vdots \end{array}$$

A segunda linha com os números $1, 2, 1$ indica que, para $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

e para as funções trigonométricas seno e cosseno: se $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

na soma

$$\sin(2x) + \cos(2x) = -\sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x).$$

A terceira linha com os números $1, 3, 3, 1$ indica que, para $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

e para as funções trigonométricas seno e cosseno: se $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(3x) = \sin(2x + x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$$

$$\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$$

na soma

$$\sin(3x) + \cos(3x) = -\sin^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin(x) + \cos^3(x).$$

A quarta linha com os números $1, 4, 6, 4, 1$ indica que, para $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

e para as funções trigonométricas seno e cosseno: se $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(4x) = 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$$

$$\cos(4x) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x)$$

na soma

$$\sin(4x)+\cos(4x) = \sin^4(x)-4\cos(x)\sin^3(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)+4\cos^3(x)\sin(x)+\cos^4(x).$$

O princípio da indução matemática estabelece a validade da fórmula do binômio de Newton.

1.2.4 Binômio de Newton

Para cada número natural n e para número real x,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Como consequência, no caso particular em que $x = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

e, no caso particular em que $x = -1$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$$

resultados que são conhecidos como o Teorema das Linhas do Triângulo de Pascal.

Corolário 1. Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ e $x \in \mathbb{R}$, valem

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k &= nx\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} \\ &= nx(1+x)^{n-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k &= n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} \\ &= n(n-1)x^2(1+x)^{n-2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k \\ &= nx(1+x)^{n-1} + n(n-1)x^2(1+x)^{n-2}.\end{aligned}$$

O Teorema das Colunas do Triângulo de Pascal estabelece a fórmula da soma finita dos números binomiais de uma coluna do triângulo.

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

Como consequência do teorema das colunas tem-se o teorema das diagonais do Triângulo de Pascal

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k},$$

pois

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Outra consequência do teorema das colunas do Triângulo de Pascal é que, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, tem-se

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \frac{(n+1)n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = 2! \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3},$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)k = 2! \sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) = 3! \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 3! \sum_{k=1}^{n} \binom{k+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

e assim por diante.

Das identidades válidas para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 = x(x-1) + x$$

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$$

$$x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x,$$

cujas provas são deduzidas sem artifícios do seguinte modo:

Admita que

$$x^5 = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + ax(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-1)(x-2) + cx(x-1) + dx,$$

então, no caso particular em que $x = 1$, temos que $d = 1$; no caso particular em que $x = 2$, temos que $c = 15$; no caso particular em que $x = 3$, temos que $b = 25$ e, no caso particular em que $x = 4$, temos que $a = 10$.

Tem-se que: a soma dos quadrados de n termos

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a soma dos cubos de n termos

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) + 3\sum_{k=1}^{n} k(k-1) + \sum_{k=1}^{n} k = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

e o mesmo resultado para $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ é obtido a partir do binômio de Newton:

para $x \in \mathbb{R}$,

$$(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

para $x = 1$,

$$2^4 - 1^4 = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$

para $x = 2$,

$$3^4 - 2^4 = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$$

e assim por diante, para $x = n$.

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

e, assim, somando membro a membro,

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^4 - 1 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k - n.$$

A técnica de transformar uma somatória em uma soma telescópica é dada a seguir:

Para $x \in \mathbb{R}$, da expressão

$$(x+1)x - x(x-1) = 2x$$

e, em consequência, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)k - k(k-1)] = (n+1)n.$$

Para $x \in \mathbb{R}$, da expressão

$$(x+1)x(x-1) - x(x-1)(x-2) = 3x(x-1)$$

e, em consequência, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$3\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2)] = (n+1)n(n-1).$$

Para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

e, em consequência, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq -2$,

$$\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

e, em consequência, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Capítulo 2

Progressões Aritméticas Reais e Progressões Geométricas Reais

2.1 Progressões Aritméticas Reais

Uma *progressão aritmética* real f é uma sequência f de números reais, isto é, uma função f cujo domínio de definição é o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ dos números naturais e cujo conjunto de valores é um subconjunto não vazio do corpo $\mathbb{R}$ dos números reais com a propriedade de que, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$f(n+1) - f(n) = r$$

para alguma constante real r denominada *razão* da progressão aritmética real.

Segue de imediato da definição que, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$f(2) - f(1) = r$$

$$f(3) - f(2) = r$$

$$\cdots$$

$$f(n+1) - f(n) = r$$

vem, somando membro a membro,

$$f(n+1) = f(1) + nr.$$

As progressões aritméticas reais f de primeira ordem são definidas para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ por

$$f(n) = an + b,$$

em que a e b são números reais com $a \neq 0$ e são, de fato, progressões aritméticas reais com razão igual a a, pois, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$f(n+1) - f(n) = a.$$

A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética real f é

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \frac{1}{2}n\left[f(1) + f(n)\right],$$

pois

$$f(1) + f(n) = f(2) + f(n-1) = f(3) + f(n-2) = \ldots = f(n) + f(1).$$

Uma observação relevante é que, para uma progressão aritmética real f de primeira ordem da forma $f(n) = an + b$, o valor de f no número natural n pode ser expressa em termos de números binomiais

$$f(n) = \binom{n-1}{0}f(1) + \binom{n-1}{1}g(1)$$

em que, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$g(n) = f(n+1) - f(n) = a.$$

As progressões aritméticas reais f de segunda ordem são definidas para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ por

$$f(n) = an^2 + bn + c$$

em que a, b e c são números reais com $a \neq 0$. Definindo para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ as sequências de números reais

$$g(n) = f(n+1) - f(n) = a(2n+1) + b = 2an + a + b$$

$$h(n) = g(n+1) - g(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 2a,$$

o valor de f no número natural n é expressa em termos de números binomiais

$$f(n) = \binom{n-1}{0}f(1) + \binom{n-1}{1}g(1) + \binom{n-1}{2}h(1).$$

Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, a soma $S(n)$ dos n primeiros termos de uma progressão aritmética real de segunda ordem é uma progressão aritmética de terceira ordem.

As progressões aritméticas reais f de terceira ordem são definidas para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ por

$$f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$$

em que a, b, c e d são números reais com $a \neq 0$. Definindo para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ as sequências de números reais

$$g(n) = f(n+1) - f(n) = a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n+1) + c = 3an^2 + (3a+2b)n + (a+b+c),$$

$$h(n) = g(n+1) - g(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 3a(2n+1) + (3a+2b) = 6an + (6a+2b)$$

e

$$k(n) = h(n+1) - h(n) = f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 6a,$$

o valor de f no número natural n é expressa em termos de números binomiais

$$f(n) = \binom{n-1}{0} f(1) + \binom{n-1}{1} g(1) + \binom{n-1}{2} h(1) + \binom{n-1}{3} k(1).$$

Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, a soma $S(n)$ dos n primeiros termos de uma progressão aritmética real de terceira ordem é uma progressão aritmética de quarta ordem.

Exemplo 1 Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, o número $f(n)$ de regiões planas determinadas por n retas distintas do plano em posição geral (duas retas quaisquer não são paralelas entre si e três retas quaisquer não se interceptam em um mesmo ponto) tem como primeiros termos

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 7, f(4) = 11$$

e

$$f(2) - f(1) = 2, f(3) - f(2) = 3, f(4) - f(3) = 4,$$

o que sugere a conjectura que f é uma progressão aritmética real de segunda ordem: o valor de f no número natural n é

$$\begin{aligned} f(n) &= \binom{n-1}{0} f(1) + \binom{n-1}{1} [f(2) - f(1)] + \binom{n-1}{2} [f(3) - 2f(2) + f(1)] \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + n + 2). \end{aligned}$$

Exemplo 2 Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, o número $f(n)$ de regiões planas determinadas por n circunferências distintas em um mesmo plano em posição geral (a intersecção de quaisquer duas circunferências distintas apresenta dois pontos diferentes) tem como primeiros termos

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8, f(4) = 14$$

e

$$f(2) - f(1) = 2, f(3) - f(2) = 4, f(4) - f(3) = 6,$$

o que leva a conjectura que f é uma progressão aritmética real de segunda ordem: o valor de f no número natural n é

$$\begin{aligned} f(n) &= \binom{n-1}{0} f(1) + \binom{n-1}{1} [f(2) - f(1)] + \binom{n-1}{2} [f(3) - 2f(2) + f(1)] \\ &= n^2 - n + 2. \end{aligned}$$

Exemplo 3 Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, seja $S(n)$ a soma dos n primeiros termos da sequência cujos primeiros termos são

$$1 \cdot 4, 3 \cdot 7, 5 \cdot 10, 7 \cdot 13, \ldots,$$

então, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)(3k+1) = 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1)(2n+1) - \frac{n(n+1)}{2} - n.$$

Como a soma dos elementos de uma progressão aritmética real de segunda ordem é uma progressão aritmética real de terceira ordem,

$$\begin{aligned} S(n) = \binom{n-1}{0} S(1) + \binom{n-1}{1}[S(2) - S(1)] + \binom{n-1}{2}[S(3) - 2S(2) + S(1)] \\ + \binom{n-1}{3}[S(4) - 3S(3) + 3S(2) - S(1)], \end{aligned}$$

com $S(1) = 4, S(2) = 25, S(3) = 75$ e $S(4) = 166$.

2.2 Progressões Geométricas Reais

As progressões geométricas reais de razão real $q \neq 0$ são as sequências f de números reais com as propriedades:

- Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, $f(n) \neq 0$
- $\frac{f(n+1)}{f(n)} = q$.
  Em consequência,

$$\begin{aligned} f(2) &= qf(1) \\ f(3) &= qf(2) = q^2 f(1) \\ &\ldots \\ f(n) &= qf(n-1) = q^{n-1} f(1). \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, a soma $S(n)$ dos n primeiros termos de uma progressão geométrica real de razão real $q \neq 1$ é

$$S(n) = f(1)\left[1 + q + \ldots + q^{n-1}\right] = f(1)\left[\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}\right].$$

2.3 Progressões Aritmético-Geométricas Reais

As progressões aritmético-geométricas reais de razão aritmética real r, com $r \neq 0$, e com razão geométrica q, com $q \neq 0$ e $q \neq 1$, são as sequências de números reais r definidas para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ por

$$f(n) = [a + (n-1)r]q^{n-1},$$

em que a é um número real igual a $f(1)$ (se $r = 0$, f é uma progressão geométrica real de razão q e, se $q = 1$, f é uma progressão aritmética real de razão r).

Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, a soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmético-geométrica real f é igual a

$$S_n = a + [a + r]q + [a + 2r]q^2 + \ldots + [a + (n-1)r]q^{r-1}$$

e

$$qS_n = aq + [a + r]q^2 + [a + 2r]q^3 + \ldots + [a + (n-1)r]q^r$$

e, então, para $q \neq 1$,

$$S_n = a\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right] + \frac{rq}{(1-q)^2}[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n].$$

Em consequência, para cada $q \in \mathbb{R}$, com $q \neq 0$ e $q \neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kq^k &= \sum_{k=1}^{n}(k-1)q^{k-1} + nq^n \\ &= \frac{q}{(1-q)^2}\left[1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}\right].\end{aligned}$$

Para o cálculo de $\sum_{k=1}^{n} k^2 q^k$, em que q é um número real, com $q \neq 0$ e $q \neq 1$, é utilizada a fórmula de somatória por partes, dada a seguir:

Sejam F e G sequências de números reais definidas para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ por

$$F(n) = n^2$$

$$G(n) = \frac{q^n}{q-1},$$

assim,

$$F(n+1) - F(n) = 2n + 1$$

$$G(n+1) - G(n) = q^n.$$

Então, pela fórmula da somatória por partes apresentada na sequência (Subseção 2.4.1),

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 q^k &= \sum_{k=1}^{n} F(k)[G(k+1)-G(k)] \\ &= F(n+1)G(n+1) - F(1)G(1) - \sum_{k=1}^{n} G(k+1)[F(k+1)-F(k)] \\ &= \frac{q}{1-q}[1-(n+1)^2 q^n] + \frac{1}{1-q}\sum_{k=1}^{n} q^{k+1}(2k+1) \\ &= \frac{q}{1-q}[1-(n+1)^2 q^n] \\ &+ \frac{2q^2}{(1-q)^3}[1-(n+1)q^n + nq^{n+1}] \\ &+ \frac{q^2}{(1-q)^2}[1-q^n].\end{aligned}$$

2.4 Sequências de Números Reais

Em geral, sequências f de números reais não apresentam fórmulas para o valor de f no número natural n: por exemplo, a sequência p de números naturais cujo valor no número natural n é o n-ésimo número natural primo e a sequência π de números naturais cujo valor no número natural n é a quantidade de números naturais primos menores ou iguais ao número natural n não tem fórmulas conhecidas.

A sequência harmônica H de números racionais definida para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ por

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

e, para cada $r \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, a sequência harmônica H_r de ordem r definida para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ por

$$H_r(n) = 1 + \frac{1}{2^r} + \ldots + \frac{1}{n^r}$$

também são sequências de números reais cujos valores no número natural n não apresentam fórmulas adequadas. Entretanto, com a fórmula da somatória por partes dada a seguir, é possível calcular somatórias envolvendo as sequências harmônicas.

Exemplo 1 Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, seja S a sequência de números racionais definida, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, por

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{H(k)}{k(k+1)}.$$

Para a obtenção do valor de S no número natural n, seja a sequência G de números racionais com a propriedade de que, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$G(n+1) - G(n) = \frac{1}{n(n+1)},$$

o que implica que

$$G(n) = -\frac{1}{n}$$

e, então, pela fórmula da somatória por partes,

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{k=1}^{n} H(k)[G(k+1) - G(k)] \\
&= G(n+1)H(n+1) - G(1)H(1) \\
&- \sum_{k=1}^{n} G(k+1)[H(k+1) - H(k)] \\
&= 1 - \frac{H(n+1)}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \\
&= H_2(n+1) - \frac{H(n+1)}{n+1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2 Para cada $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ fixado, seja S_m a sequência de números racionais definida para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ por

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H(k).$$

Para a obtenção do valor de S_m no número natural n, seja a sequência G_m de números racionais com a propriedade de que, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$G_m(n+1) - G_m(n) = \binom{n}{m},$$

o que implica que

$$G_m(n) = \binom{n}{m+1}$$

pela Relação de Stiefel para números binomiais e, então,

$$\begin{aligned}
S_m(n) &= \sum_{k=1}^{n} H(k)[G_m(k+1) - G_m(k)] \\
&= G_m(n+1)H(n+1) - G_m(1)H(1) \\
&- \sum_{k=1}^{n} G_m(k+1)[H(k+1) - H(k)] \\
&= \binom{n+1}{m+1} H(n+1) - \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \\
&= \binom{n+1}{m+1} \left[H(m+1) - \frac{1}{m+1} \right]
\end{aligned}$$

pelo Teorema das Colunas do Triângulo de Pascal.

Exemplo 3 Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, deseja-se obter a fórmula da soma $S(n)$ dos n primeiros termos da sequência f de números reais definida para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ por

$$f(n) = \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)^3}{(2n-1)^4 + 4},$$

então $S(1) = \frac{1}{5}; S(2) = \frac{-2}{17}; S(3) = \frac{3}{37}; S(4) = \frac{-4}{65}; S(5) = \frac{5}{101}$.

Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, a conjectura é a de que o numerador de $S(n)$ é $(-1)^{n+1}n$, enquanto os denominadores dos cinco primeiros termos são $5, 17, 37, 65, 101$, cujas diferenças são $12, 20, 28, 36$, cujas diferenças são constantes (iguais a 8), que indica que os denominadores são termos de uma progressão aritmética natural de segunda ordem e, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, o valor do denominador de $S(n)$ no número natural n é

$$5\binom{n-1}{0} + 12\binom{n-1}{1} + 8\binom{n-1}{2} = 4n^2 + 1.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$S(n) = \frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2 + 1},$$

e esta fórmula pode ser provada pelo princípio da indução matemática.

Exemplo 4 Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, o objetivo é a obtenção do valor da sequência S de números naturais definida por $S(1) = 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}],$$

em que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ indica o maior inteiro menor ou igual a x.

Então, $S(1) = 0, S(2) = 3, S(3) = 13, S(4) = 34, S(5) = 70, S(6) = 125$.

Definindo para cada n a sequência de números naturais

$$T(n) = S(n+1) - S(n)$$

$$U(n) = T(n+1) - T(n)$$

$$V(n) = U(n+1) - U(n,)$$

tem-se que

$$T(1) = 3, T(2) = 10, T(3) = 21, T(4) = 36, T(5) = 55$$

$$U(1) = 7, U(2) = 11, U(3) = 15, U(4) = 21$$

$$V(1) = V(2) = V(3) = 4.$$

A conjectura a ser feita é que U é uma progressão aritmética natural de razão 4, o que implica que T é uma progressão aritmética natural de segunda ordem e que S é uma progressão aritmética natural de terceira ordem.

Então, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

$$\begin{aligned} S(n) &= \binom{n-1}{0} S(1) + \binom{n-1}{1} T(1) + \binom{n-1}{2} U(1) + \binom{n-1}{3} V(1) \\ &= 3(n-1) + \frac{7}{2}(n-1)(n-2) + 4\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}. \end{aligned}$$

2.4.1 A Fórmula de Somatória por Partes

Sejam f e g duas sequências de números reais. Então,

$$f(1)\big[g(2) - g(1)\big] = \big[f(2)g(2) - f(1)g(1)\big] - g(2)\big[f(2) - f(1)\big]$$

$$f(2)\big[g(3) - g(2)\big] = \big[f(3)g(3) - f(2)g(2)\big] - g(3)\big[f(3) - f(2)\big]$$

e assim por diante até

$$f(n)\big[g(n+1) - g(n)\big] = \big[f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n)\big] - g(n+1)\big[f(n+1) - f(n)\big],$$

daí resulta que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\big[g(k+1) - g(k)\big] = f(n+1)g(n+1) - f(1)g(1) - \sum_{k=1}^{n} g(k+1)\big[f(k+1) - f(k)\big],$$

que é a fórmula de somatória por partes.

Aplicação

Cálculo de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2}\binom{k}{5}$.

Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, sejam f e g duas sequências de números inteiros definidas por $f(n) = \binom{n}{2}$ e $g(n+1) - g(n) = \binom{n}{5}$; logo, $g(n) = \binom{n}{6}$ e $f(n+1) - f(n) = \binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} = n$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2}\binom{k}{5} &= \sum_{k=1}^{n} f(k)\big[g(k+1) - g(k)\big] \\ &= f(n+1)g(n+1) - f(1)g(1) - \sum_{k=1}^{n} g(k+1)\big[f(k+1) - f(k)\big] \\ &= \binom{n+1}{2}\binom{n+1}{6} - \sum_{k=1}^{n} k\binom{k+1}{6}. \end{aligned}$$

Para o cálculo de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{k+1}{6}$, sejam as sequências F e G, definidas para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, por $F(n) = n$ e $G(n)$ deve ser tal que $G(n+1) - G(n) = \binom{n+1}{6}$, logo $G(n) = \binom{n+1}{7}$ e $F(n+1) - F(n) = 1$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{k+1}{6} &= \sum_{k=1}^{n} F(k)\big[G(k+1) - G(k)\big] \\
&= F(n+1)G(n+1) - F(1)G(1) - \sum_{k=1}^{n} G(k+1)\big[F(k+1) - F(k)\big] \\
&= (n+1)\binom{n+2}{7} - \sum_{k=1}^{n} \binom{k+2}{7} \\
&= (n+1)\binom{n+2}{7} - \binom{n+3}{8}.
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

Funções Aritméticas com Valores Inteiros

Uma função aritmética f com valores inteiros é uma sequência f de números inteiros, ou seja, f é uma função cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e cujo conjunto de valores é um subconjunto não vazio do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

As seções 3.1, 3.2 e 3.3 apresentam e estudam três importantes funções aritméticas com valores inteiros.

3.1 Funções Características

A função característica χ de um subconjunto S do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é a função aritmética com valores naturais que é igual a um quando o número natural n é um elemento de S e é igual a zero quando o número natural n não pertence a S.

A função característica χ_P do subconjunto P dos números primos é a função aritmética definida para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ por $\chi_P(n) = 1$ quando $n \in P$ e $\chi_P(n) = 0$ quando $n \notin P$.

As funções características de subconjuntos do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais são funções aritméticas cujos valores pertencem ao subconjunto $\{0, 1\}$ de $\mathbb{Z}$. Por exemplo, a função aritmética θ constante igual a zero é a função característica do subconjunto vazio de $\mathbb{N}$; a função aritmética I_0 constante igual a um é a função característica de $\mathbb{N}$ e a função aritmética E definida para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ por $E(n) = 1$ quando $n = 1$ e $E(n) = 0$ quando $n = 2, 3, \ldots$ é a função característica do subconjunto unitário $\{1\}$ do conjunto dos números naturais.

3.2 A Função Aritmética de Möbius

A função aritmética μ de Möbius é a função aritmética cujos valores pertencem ao subconjunto $\{-1, 0, 1\}$ de $\mathbb{Z}$ e μ é definida como

- $\mu(1) = 1$

E, para cada $n \in \{2, 3, \ldots\}$

- $\mu(n) = 0$ quando n é um múltiplo natural de um número natural quadrado perfeito diferente de um (por exemplo, $\mu(4) = \mu(8) = \mu(9) = \mu(16) = \mu(20) = 0$).
- $\mu(n) = -1$ quando n é produto de um número ímpar de números naturais primos distintos dois a dois (por exemplo, $\mu(2) = \mu(3) = \mu(7) = \mu(30) = \mu(105) = -1$).
- $\mu(n) = 1$ quando n é produto de um número par de números naturais primos distintos dois a dois (por exemplo, $\mu(6) = \mu(10) = \mu(14) = \mu(21) = 1$).

3.2.1 Propriedades Fundamentais da Função de Möbius

1. Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{quando } n = 1 \\ 0, & \text{quando } n \in \{2, 3, \ldots\} \end{cases}$$

em que a somatória é considerada sobre todos os divisores naturais de n.

2. Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \begin{cases} 1, & \text{quando } n = 1 \\ \prod_{j=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right), & \text{quando } n \in \{2, 3, \ldots\} \end{cases}$$

em que a somatória é considerada sobre todos os divisores naturais de n e $p_1, p_2, \ldots, p_s$ são os divisores naturais primos de n distintos dois a dois.

3. Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^{\omega(n)}$, em que $\omega(1) = 0$ e, para cada $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $\omega(n)$ é o número de divisores naturais primos distintos do número natural n.

Demonstração. seja a *fatoração canônica do número natural n distinto de um* como produto de potências naturais de todos os divisores naturais primos $p_1, p_2, \ldots, p_s$ do número natural n, ou seja,

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s}$$

em que $p_1, p_2, \ldots, p_s \in P$, subconjunto dos números naturais primos de $\mathbb{N}$ e

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_s$$

e

$$s, a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}.$$

1. $\sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1) = 1$ e, para cada $n \in \{2, 3, \ldots\}$, utilizando a fatoração canônica do número natural n distinto de um Então

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} = (1-1)^s = 0$$

pelo Teorema do Binômio de Newton: para cada $x \in \mathbb{R}$ e para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j.$$

2. $\sum_{d|1} \frac{\mu(d)}{d} = \mu(1) = 1$ e, para cada $n \in \{2, 3, \ldots\}$, utilizando a fatoração canônica do número natural n distinto de um, então, para cada $j = \{1, 2, \ldots, s\}$,

$$\frac{\mu(p_j)}{p_j} = \frac{-1}{p_j};$$

para cada par de números naturais distintos $i, j = \{1, 2, \ldots, s\}$,

$$\frac{\mu(p_i p_j)}{p_i p_j} = \frac{1}{p_i p_j};$$

para cada terna de números naturais distintos $i, j, k = \{1, 2, \ldots, s\}$,

$$\frac{\mu(p_i p_j p_k)}{p_i p_j p_k} = \frac{-1}{p_i p_j p_k}$$

e assim por diante, o que resulta

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{j=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right).$$

3. $\sum_{d|1} |\mu(d)| = \mu(1) = 1$ e, para cada $n \in \{2, 3, \ldots\}$, utilizando a fatoração canônica do número natural n distinto de um, então

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = \sum_{j=0}^{s} |(-1)^j| \binom{s}{j} = (1+1)^s = 2^s$$

pelo Teorema do Binômio de Newton: para cada $x \in \mathbb{R}$ e para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j.$$

$\square$

3.3 A Função Aritmética de Euler

A função aritmética ϕ de Euler é a função aritmética definida como

$$\phi(1) = 1$$

e, para cada $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $\phi(n)$ é o número de elementos do seguinte subconjunto dos números naturais:

$$\{k \in \{1, 2, \ldots, n\} : \text{mdc}(k, n) = 1\}$$

que é igual ao número de frações próprias irredutíveis da forma $\dfrac{k}{n}$ com $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ com denominador igual a n e numerador igual a k tal que o máximo divisor comum de k e n é 1.

Por exemplo, para $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $\phi(n) \leq n - 1$ e, para cada número natural primo p, $\phi(p) = p - 1$.

Quando tomamos a fatoração canônica do número natural n diferente de um o valor de ϕ em n é igual a

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \\
&= n \prod_{j=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)
\end{aligned}$$

devido ao princípio da inclusão-exclusão no caso em que o conjunto universo U é definido como $\{1, 2, \ldots, n\}$ e, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, o subconjunto A_j de U é constituído por todos os $\dfrac{n}{p_j}$ múltiplos naturais de p_j e, em sendo assim, para números naturais distintos $i, j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, o número de elementos da intersecção $A_i \cap A_j$ de A_i e A_j é $\dfrac{n}{p_i p_j}$ e, para números naturais distintos dois a dois $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, s\}$, o número de elementos da intersecção $A_i \cap A_j \cap A_k$ de A_i e A_j e A_k é $\dfrac{n}{p_i p_j p_k}$ e assim por diante, o que resulta que, para cada $n \in \{2, 3, \ldots\}$, o valor de ϕ em n é igual a

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s)^c| \\
&= |U| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s| \\
&= n - \sum_{j=1}^{s} \frac{n}{p_j} + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \frac{n}{p_i p_j} + \ldots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_s} \\
&= n \prod_{j=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \\
&= n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.
\end{aligned}$$

3.3.1 Propriedade Fundamental da Função de Euler

Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

$$\sum_{d|n} \phi(d) = \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) = n$$

Demonstração.

$$\sum_{d|1} \phi(d) = \phi(1) = 1$$

e, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $n \neq 1$, se $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, o máximo divisor comum d de k e n é um divisor natural de n e a quantidade de números naturais $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ com $\mathrm{mdc}(k, n) = d$, isto é, $m = dm_1$ e $n = dn_1$ com $\mathrm{mdc}(m_1, n_1) = 1$ é, por definição, igual a $\phi(n_1) = \phi\left(\frac{n}{d}\right)$ o que mostra que $\sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) = n$. □

Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ e, para cada número natural $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\left[\frac{n}{k}\right]$ indica a quantidade de números naturais múltiplos de k que são menores ou iguais ao número natural n, em que $[x]$ para cada $x \in \mathbb{R}$ é o maior inteiro menor ou igual a x.

Teorema 1. *Seja f uma função aritmética com valores inteiros e seja F uma função aritmética com valores inteiros definida para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ por*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} F(k) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] f(k).$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f(k) &= \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{d|k} f(d)\right] \\ &= \sum_{d=1}^{n} \left[f(d) \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{d}\right]} 1\right] \\ &= \sum_{d=1}^{n} \left[\frac{n}{d}\right] f(d). \end{aligned}$$

□

Em consequência, como, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, o valor da função τ no número natural n que, por definição, é igual ao número de divisores naturais de n, ou seja,

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1$$

e, então,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \tau(k) &= \sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{2n}{k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{2n}{k}\right] + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{2n}{n+k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{2n}{k}\right] + n.
\end{aligned}$$

Em consequência, como a função σ no número natural n é a soma de todos os divisores naturais do número natural n, ou seja,

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

então,

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] k.$$

Em consequência, pela propriedade fundamental da função de Euler,

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n,$$

então,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \phi(k) \left[\frac{n}{k}\right] = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3.4 As Fórmulas de Inversão de Möbius

- Sejam f e g funções aritméticas com valores inteiros de modo que, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

  $$f(n) = \sum_{d|n} g(d).$$

  Então, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

  $$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

  em que μ é função aritmética de Möbius.

- Sejam f e g funções aritméticas com valores inteiros de modo que, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

em que μ é função aritmética de Möbius. Então, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d).$$

Demonstração. (a) Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, por hipótese

$$\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) = \sum_{d|n} \left[\mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{d_1|d} g(d_1)\right] = \sum_{d_1|n} \left[g(d_1) \sum_{d_2|\frac{n}{d_1}} \mu(d_2)\right]$$

e a última somatória apresenta uma única parcela não nula: a parcela correspondente a $d_1 = n$ devido às propriedades da função de Möbius e, assim,

$$\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) = g(n).$$

(b) Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, por hipótese

$$\sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} \left[\sum_{d_1|d} \mu\left(\frac{n}{d_1}\right) f(d_1)\right] = \sum_{d_1|n} \left[f(d_1) \sum_{d_2|\frac{n}{d_1}} \mu(d_2)\right]$$

e a última somatória apresenta uma única parcela não nula: a parcela correspondente a $d_1 = n$ devido às propriedades da função de Möbius e, assim,

$$\sum_{d|n} g(d) = f(n).$$

Observação: Para melhor entendimento da última somatória da prova (a), considere o caso em que $n = 12$ e a somatória

$$\begin{aligned}
\sum_{d|12}\left[\mu\left(\frac{12}{d}\right)\sum_{d_1|d} g(d_1)\right] &= \mu(12)g(1) \\
&+ \mu(6)\big[g(1)+g(2)\big] \\
&+ \mu(4)\big[g(1)+g(3)\big] \\
&+ \mu(3)\big[g(1)+g(2)+g(4)\big] \\
&+ \mu(2)\big[g(1)+g(2)+g(3)+g(6)\big] \\
&+ \mu(1)\big[g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(6)+g(12)\big] \\
&= g(1)\big[\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\mu(4)+\mu(6)+\mu(12)\big] \\
&+ g(2)\big[\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\mu(6)\big] \\
&+ g(3)\big[\mu(1)+\mu(2)+\mu(4)\big] \\
&+ g(4)\big[\mu(1)+\mu(3)\big] \\
&+ g(6)\big[\mu(1)+\mu(2)\big] \\
&+ g(12)\big[\mu(1)\big] \\
&= \sum_{d|12}\left[g(d)\sum_{d_1|\frac{12}{d}}\mu(d_1)\right].
\end{aligned}$$

$\square$

Três operações binárias internas são consideradas no conjunto A de todas as funções aritméticas com valores inteiros.

A operação binária interna de adição termo a termo de funções aritméticas é definida como: dadas f e g funções aritméticas com valores inteiros, a soma $f+g$ de f e g é a função aritmética de valores inteiros definida para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ como

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n).$$

Se $-f$ indica a função aritmética de valores inteiros definida para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ por

$$(-f)(n) = -f(n)$$

vem que

$$f + (-f) = (-f) + f = \theta$$

em que θ é a função aritmética identicamente nula.

Assim, devido à associatividade e à comutatividade da operação binária interna da adição, a propriedade de θ ser o elemento neutro para a adição, isto é, para cada função aritmética f com valores inteiros $f + \theta = \theta + f = f$ e a propriedade de que, para cada função aritmética com valores inteiros, existe a função aritmética $-f$ com valores inteiros tal que

$$f + (-f) = (-f) + f = \theta$$

tem-se que **o conjunto das funções aritméticas com valores inteiros munido da operação binária interna da adição é um grupo comutativo**.

A operação binária interna da multiplicação termo a termo de funções aritméticas é definida como: dadas duas funções aritméticas f e g com valores inteiros, o produto fg é a função aritmética com valores inteiros definida para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ como

$$(fg)(n) = f(n)g(n).$$

Devido à associatividade, à comutatividade da operação binária interna da multiplicação e à propriedade de I_0, a função característica dos números naturais, ser o elemento neutro para a multiplicação, isto é, para cada função aritmética f com valores inteiros

$$fI_0 = I_0f = f$$

tem-se que **o conjunto das funções aritméticas com valores inteiros munido da operação binária interna da multiplicação é um monóide comutativo e o conjunto das funções aritméticas f com valores inteiros com a propriedade de que, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $f(n) \in \{-1, 1\}$ é um grupo comutativo cujo elemento neutro é a função aritmética** I_0, porque, para cada função aritmética f com valores inteiros, $ff = I_0$.

A operação binária interna do produto de convolução de Dirichlet de funções aritméticas é definida como: dadas duas funções aritméticas f e g com valores inteiros, o produto de convolução de Dirichlet $f \star g$ de f e g é a função aritmética com valores inteiros definida para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ por

$$\begin{aligned}(f \star g)(n) &= \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)g(d)\end{aligned}$$

em que a somatória é considerada sobre todos os divisores naturais do número natural n.

Teorema 2. *A operação binária interna do produto de convolução de Dirichlet é associativa e comutativa no conjunto de todas as funções aritméticas com valores inteiros.*

A função aritmética τ com valores naturais definida para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$ como número de divisores naturais de n, ou seja,

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} I_0(d)I_0\left(\frac{n}{d}\right).$$

Então, a função aritmética τ com valores naturais é o produto de convolução de Dirichlet $I_0 \star I_0$, em que I_0 é a função característica do conjunto dos números naturais, isto é,

$$\tau = I_0 \star I_0.$$

A função aritmética σ com valores naturais definida para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$ como a soma de todos os divisores naturais do número natural n, ou seja,

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} I_1(d) I_0\left(\frac{n}{d}\right).$$

Então, a função aritmética σ com valores naturais é o produto de convolução de Dirichlet $I_1 \star I_0$ de I_1 e I_0, em que I_1 é definido para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$ como $I_1(n) = n$, isto é,

$$\sigma = I_1 \star I_0 = I_0 \star I_1.$$

O produto de convolução de Dirichlet $\sigma \star I_0$ de σ e de I_0 é igual ao produto de convolução de Dirichlet $I_1 \star \tau$ de I_1 e de τ. De fato,

$$\sigma \star I_0 = (I_1 \star I_0) \star I_0 = I_1 \star (I_0 \star I_0) = I_1 \star \tau.$$

Em outros termos, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{d|n} \sigma(d) = n \sum_{d|n} \frac{\tau(d)}{d}.$$

A função aritmética ϕ de Euler com valores naturais é o produto de convolução de Dirichlet $I_1 \star \mu$, em que μ é a função aritmética de Möbius, isto é,

$$\phi = I_1 \star \mu = \mu \star I_1.$$

De fato, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$(I_1 \star \mu)(n) = \sum_{d|n} I_1(n) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} I_1\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} \mu(d) = \phi(n)$$

pela propriedade fundamental da função de Euler.

A função característica E do subconjunto unitário $\{1\}$ do conjunto dos números naturais é o produto de convolução de Dirichlet $\mu \star I_0$, em que μ é a função aritmética de Möbius, isto é,

$$E = \mu \star I_0 = I_0 \star \mu.$$

De fato, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$E(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n} I_0\left(\frac{n}{d}\right) = (\mu \star I_0)(n)$$

pela propriedade fundamental (a) da função μ de Möbius.

A função característica I_0 do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é o produto de convolução de Dirichlet $\mu \star \tau$ de μ e de τ, em que μ é a função aritmética de Möbius. De fato,

$$\mu \star \tau = \mu \star (I_0 \star I_0) = (\mu \star I_0) \star I_0 = E \star I_0 = I_0.$$

Em outros termos, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{d|n} \mu(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right) = 1.$$

A função aritmética σ com valores naturais é o produto de convolução de Dirichlet $\phi \star \tau$, em que ϕ é a função de Euler, isto é,

$$\sigma = \phi \star \tau = \tau \star \phi.$$

De fato,

$$\phi \star \tau = (I_1 \star \mu) \star (I_0 \star I_0) = (I_1 \star I_0) \star (\mu \star I_0) = (I_1 \star I_0) \star E = I_1 \star I_0 = \sigma.$$

A função produto $I_1\tau$ de I_1 e de τ é o produto de convolução de Dirichlet $I_1 \star I_1$. De fato, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$(I_1 \star I_1)(n) = \sum_{d|n} I_1(d) I_1\left(\frac{n}{d}\right) = n \sum_{d|n} 1 = (I_1\tau)(n).$$

A função produto $I_1\tau$ de I_1 e de τ é o produto de convolução de Dirichlet $\phi \star \sigma$ da função ϕ de Euler e de σ. De fato,

$$\begin{aligned}
\phi \star \tau &= (I_1 \star \mu) \star (I_0 \star I_1) \\
&= I_1 \star I_1 \\
&= I_1\tau.
\end{aligned}$$

Em outros termos, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{d|n} \phi(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right) = n\tau(n).$$

O produto de convolução de Dirichlet $I_1 \star \sigma$ de I_1 e de σ é o produto de convolução de Dirichlet $I_1\tau \star I_0$ de $I_1\tau$ e de I_0. De fato,

$$I_1 \star \sigma = I_1 \star (I_1 \star I_0) = (I_1 \star I_1) \star I_0 = I_1\tau \star I_0.$$

Em outros termos, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{d|n} \frac{n}{d}\sigma(d) = \sum_{d|n} d\tau(d).$$

O produto de convolução de Dirichlet $I_2 \star I_1$ de I_2 e de I_1 (em que, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$, $I_2(n) = n^2$) é igual a função produto $I_1\sigma$ de I_1 e de σ. De fato, par cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}(I_2 \star I_1)(n) &= \sum_{d|n} I_2(d) I_1\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} I_2(d)\frac{n}{d} \\ &= n\sum_{d|n} d \\ &= (I_1\sigma)(n).\end{aligned}$$

O produto de convolução de Dirichlet $I_2 \star \sigma$ de I_2 e de σ é o produto de convolução de Dirichlet $(I_1\sigma) \star I_0$ de $I_1\sigma$ e de I_0. De fato,

$$I_2 \star \sigma = I_2 \star (I_1 \star I_0) = (I_2 \star I_1) \star I_0 = I_1\sigma \star I_0.$$

Em outros termos, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{d|n} d\sigma(d) = \sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^2 \sigma(d).$$

O produto de convolução de Dirichlet $\sigma \star \sigma$ é igual ao produto de convolução de Dirichlet $I_1\tau \star \tau$ de $I_1\tau$ e de τ. De fato,

$$\begin{aligned}\sigma \star \sigma &= (I_1 \star I_0) \star (I_1 \star I_0) \\ &= (I_1 \star I_1) \star (I_0 \star I_0) \\ &= I_1\tau \star \tau.\end{aligned}$$

Em outros termos, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{d|n} \sigma(d)\sigma\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d\tau(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right).$$

Para cada $r \in N = \{1, 2, \ldots\}$, o produto de convolução de Dirichlet $I_r \star I_r$ (em que, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$, $I_r(n) = n^r$) é igual à função produto $I_r\tau$ de I_r e de τ.

De fato, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}(I_r \star I_r)(n) &= \sum_{d|n} I_r(d) I_r\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= n^r \sum_{d|n} 1 \\ &= (I_r\tau)(n).\end{aligned}$$

Para cada $r \in N = \{1, 2, \ldots\}$, o produto de convolução de Dirichlet $\sigma_r \star \sigma_r$ (em que σ_r é a função sigma de ordem r) é igual ao produto de convolução de Dirichlet $(I_1\tau) \star \tau$ de $I_1\tau$ e de τ.

De fato, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}\sigma_r \star \sigma_r &= (I_r \star I_0) \star (I_r \star I_0) \\ &= (I_r \star I_r) \star (I_0 \star I_0) \\ &= (I_1 \tau) \star \tau.\end{aligned}$$

Em outros termos, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{d|n} \sigma_r(d) \sigma_r \left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d^r \tau(d) \tau \left(\frac{n}{d}\right).$$

Para números naturais r e s, com $r > s$, o produto de convolução de Dirichlet $I_r \star I_s$ é igual à função produto $I_s \sigma_{r-s}$. De fato, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}(I_r \star I_s)(n) &= \sum_{d|n} I_r(d) I_s \left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} d^r \left(\frac{n}{d}\right)^s \\ &= n^s \sum_{d|n} d^{r-s} \\ &= (I_s \sigma_{r-s})(n).\end{aligned}$$

Para números naturais r e s, com $r > s$, o produto de convolução de Dirichlet $I_r \star \sigma_s$ é o produto de convolução de Dirichlet $(I_s \sigma_{r-s}) \star I_0$. De fato,

$$\begin{aligned}I_r \star \sigma_s &= I_r \star (I_s \star I_0) \\ &= (I_r \star I_s) \star I_0 \\ &= I_s \sigma_{r-s} \star I_0.\end{aligned}$$

Em outros termos, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{d|n} d^s \sigma_{r-s}(d) = \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^r \sigma_s(d).$$

A função característica E do subconjunto unitário $\{1\}$ do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é o produto de convolução de Dirichlet $\lambda \star |\mu|$ da função λ de Liouville (que está definida na página 44)e da função módulo $|\mu|$ da função de Möbius.

De fato, para cada número natural primo p e $a \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}(\lambda \star |\mu|)(p^a) &= \lambda(p^a)|\mu|(1) + \lambda(p^{a-1})|\mu|(p) \\ &= (-1)^a + (-1)^{a-1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Teorema 3 (Teorema da Existência e Unicidade da Função Inversa de uma Função Aritmética com Valores Inteiros em Relação ao Produto de Convolução de Dirichlet). *Seja f uma função aritmética com valores inteiros, tal que $f(1) \in \{-1, 1\}$. Então existe uma única função aritmética f^{-1} com valores inteiros com a propriedade:*

$$f \star f^{-1} = f^{-1} \star f = E$$

em que E é a função característica do subconjunto unitário $\{1\}$ do conjunto dos números naturais.

Demonstração. A condição

$$(f \star f^{-1})(1) = f(1)f^{-1}(1) = E(1) = 1$$

implica que

$$f^{-1}(1) = f(1),$$

a condição

$$(f \star f^{-1})(2) = f(1)f^{-1}(2) + f(2)f^{-1}(1) = E(2) = 0$$

implica que

$$f^{-1}(2) = -f(2)f^{-1}(1)f(1) = -f(2)f(1)f(1),$$

a condição

$$(f \star f^{-1})(3) = f(1)f^{-1}(3) + f(3)f^{-1}(1) = E(3) = 0$$

implica que

$$f^{-1}(3) = -f(3)f^{-1}(1)f(1) = -f(3)f(1)f(1),$$

a condição

$$(f \star f^{-1})(4) = f(1)f^{-1}(4) + f(2)f^{-1}(2) + f(4)f^{-1}(1) = E(4) = 0$$

implica que

$$f^{-1}(4) = -f(1)\big[f(2)f^{-1}(2) + f(4)f^{-1}(1)\big],$$

assim por diante para cada número natural $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$ computados os valores $f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(n)$; o valor de f^{-1} em $n+1$ é

$$f^{-1}(n+1) = -f(1)\left[\sum_{\substack{d|n+1,\\ d\neq n+1}} f(d)f^{-1}\left(\frac{n+1}{d}\right)\right],$$

em que a somatória é considerada sobre todos os divisores naturais de $n+1$, exceto o divisor natural igual a $n+1$. □

No contexto das funções aritméticas com valores reais ou com valores complexos, a única ressalva a ser feita é o teorema a seguir.

Teorema 4 (Teorema da Existência e Unicidade da Função Inversa de uma Função Aritmética com Valores Reais ou Complexos em Relação ao Produto de Convolução de Dirichlet)**.** *Seja f uma função aritmética com valores reais ou com valores complexos, tal que $f(1) \neq 0$. Então existe uma única função aritmética f^{-1} com valores inteiros com a propriedade:*

$$f \star f^{-1} = f^{-1} \star f = E$$

em que E é a função característica do subconjunto unitário $\{1\}$ do conjunto dos números naturais.

Demonstração. Computados os valores $f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(n)$; o valor de f^{-1} em $n+1$ é

$$f^{-1}(n+1) = -\frac{1}{f(1)}\left[\sum_{\substack{d|n+1,\\ d\neq n+1}} f(d)f^{-1}\left(\frac{n+1}{d}\right)\right],$$

em que a somatória é considerada sobre todos os divisores naturais de $n+1$, exceto o divisor natural igual a $n+1$. □

Corolário 2. Sejam f e g funções aritméticas com valores inteiros tais que $f(1), g(1) \in \{-1, 1\}$. Então, a função inversa $(g \star f)^{-1}$ do produto de convolução de Dirichlet de $g \star f$ é igual a $g^{-1} \star f^{-1} = f^{-1} \star g^{-1}$ em que f^{-1} e g^{-1} são as funções inversas em relação ao produto de convolução de Dirichlet de f e de g, respectivamente.

Outra demonstração das Fórmulas de Inversão de Möbius De fato, $f = g \star I_0$ é equivalente

$$f \star \mu = (g \star I_0) \star \mu = g \star (I_0 \star \mu) = g \star E = g.$$

A função inversa τ^{-1} em relação ao produto de convolução de Dirichlet da função aritmética τ com valores inteiros é o produto de convolução de Dirichlet $\mu \star \mu$, em que μ é a função de Euler, ou seja, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\tau^{-1}(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

e, para cada número natural primo p e para cada $a \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\tau^{-1}(p^a) = \mu(1)\mu(p^a) + \mu(p)\mu(p^{a-1})$$

que é igual a -2 quando $a = 1$, é igual a 1 quando $a = 2$ e é igual a 0 quando $a = 3, 4, \ldots$.

A função inversa ϕ^{-1} em relação ao produto de convolução de Dirichlet da função ϕ de Euler é uma função artimética com valores inteiros definida para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$ por

$$\phi^{-1}(n) = \sum_{d|n} \mu(d)d$$

e, para cada número natural primo p e $a \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(p^a) &= \sum_{d|p^a} \mu(d)d \\ &= \mu(1) + \mu(p)p \\ &= 1 - p.\end{aligned}$$

Para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\phi^{-1}(n) = \prod_{p|n}(1 - p).$$

De fato,

$$\phi^{-1} = (I_1 \star \mu)^{-1} = \mu I_1 \star I_0.$$

Para cada $r \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, a função inversa σ_r^{-1} em relação ao produto de convolução de Dirichlet da função aritmética σ_r com valores inteiros é igual a $\mu I_r \star \mu$, em que μ é função de Möbius e I_r é função potência de ordem r.

Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}\sigma_r^{-1}(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) I_r(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} d^r \mu(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right).\end{aligned}$$

Em particular,

$$\sigma^{-1}(n) = \sum_{d|n} d\mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

e, para cada número natural primo p e $a \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sigma^{-1}(p^a) = \mu(1)\mu(p^a) + p\mu(p)\mu(p^{a-1}),$$

que é igual a $-(1 + p)$ quando $a = 1$, é igual a p quando $a = 2$ e é igual a 0 quando $a = 3, 4, \ldots$.

Para cada $r \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, a função inversa I_r^{-1} em relação ao produto de convolução de Dirichlet é igual à função produto μI_r de μ e de I_r pelo fato de I_r ser uma função aritmética totalmente multiplicativa com valores inteiros, dada na próxima seção.

Para cada número natural primo p e para cada $a \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$I_r^{-1}(p^a) = \mu(p^a) I_r(p^a),$$

que é igual a $-p^a$ quando $a = 1$ e é igual a 0 quando $a = 2, 3, \ldots$.

O conjunto das funções aritméticas com valores inteiros com a operação binária interna do produto de convolução de Dirichlet é um monóide comutativo, cujo elemento neutro para a operação do produto de convolução de Dirichlet é a função característica E do subconjunto unitário $\{1\}$ do conjunto dos números naturais.

O conjunto das funções aritméticas f com valores inteiros com a propriedade $f(1) \in \{-1, 1\}$ com a operação binária interna do produto de convolução de Dirichlet é um grupo comutativo, cujo elemento neutro é a função característica E do subconjunto unitário $\{1\}$ do conjunto dos números naturais.

O conjunto das funções aritméticas f com valores inteiros com a propriedade $\{f(n) : n = 1, 2, \ldots\} \subset \{-1, 1\}$ com a operação de multiplicação é um grupo comutativo, cujo elemento neutro é a função aritmética I_0 constante igual a um e, para cada f, a função inversa de f em relação a operação binária de multiplicação é a própria f.

Como são válidas as leis distributivas da multiplicação e do produto de convolução de Dirichlet em relação a operação de adição, isto é, para f, g, h funções aritméticas com valores inteiros $(f+g)h = fh + gh$ e $(f+g) \star h = f \star h + g \star h$, **o conjunto das funções aritméticas com valores inteiros munido das operações de adição e de multiplicação é um anel comutativo** com elemento unidade e o **conjunto das funções aritméticas com valores inteiros munido das operações de adição e do produto de convolução de Dirichlet é um anel comutativo** com elemento unidade.

3.5 Funções Aritméticas Multiplicativas

Uma função aritmética multiplicativa f com valores inteiros é uma função aritmética com valores inteiros com as propriedades

$$f(1) = 1$$

e, para cada par de números naturais m e n relativamente primos, isto é, quando o máximo divisor comum $\mathrm{mdc}(m, n)$ é igual a um,

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Se f é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros não identicamente nula, existe um número natural n tal que $f(n) \neq 0$ e, como $\mathrm{mdc}(1, n) = 1$,

$$f(n) = f(n)f(1),$$

o que implica que $f(1) = 1$ e a condição $f(1) = 1$ é redundante na definição.

Isto significa que, para cada n natural, $n \neq 1$, o valor de uma função aritmética multiplicativa f com valores inteiros em n é univocamente determinado pelos valores de f calculados em potências naturais de números primos.

Quando tomamos a fatoração canônica do número natural n diferente de um, temos

$$f(n) = f(p_1^{a_1})f(p_2^{a_2})\ldots f(p_s^{a_s}).$$

A função característica χ_S de um subconjunto S do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ dos números naturais com as propriedades:

- $1 \in S$ e
- se $a, b \in S$ e mdc $(a, b) = 1$, então $ab \in S$

é uma função aritmética multiplicativa com valores naturais.

Por exemplo, as funções características E e I_0, respectivamente, do subconjuto unitário $\{1\}$ do conjunto dos números naturais e do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ dos números naturais são funções aritméticas multiplicativas com valores naturais e as funções características, respectivamente, dos subconjutos $\{1, 2\}$ e $\{1, 3, 9\}$ do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ dos números naturais também são funções aritméticas multiplicativas com valores naturais. A função característica do subconjunto $\{1, 2, 5\}$ do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ dos números naturais não é uma função aritmética multiplicativa com valores naturais.

As seguintes funções aritméticas também são funções aritméticas multiplicativas com valores naturais:

1. A função aritmética ϕ de Euler cujo valor no número natural n, $n \neq 1$, é

   $$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

   em que o produtório é considerado sobre todos os divisores naturais primos p do número natural n, e

   $$\phi(1) = 1.$$

2. As funções σ e τ cujos valores no número natural n são, respectivamente, a soma de todos os divisores naturais e o número de todos os divisores naturais do número natural n.

   Quando tomamos a fatoração canônica do número natural n diferente de um

   $$\begin{aligned}\sigma(n) &= (1 + p_1 + \ldots + p_1^{a_1})(1 + p_2 + \ldots + p_2^{a_2}) \ldots (1 + p_s + \ldots + p_s^{a_s}) \\ &= \frac{1 - p_1^{a_1+1}}{1 - p_1} \frac{1 - p_2^{a_2+1}}{1 - p_2} \ldots \frac{1 - p_s^{a_s+1}}{1 - p_s} \\ \sigma(1) &= 1\end{aligned}$$

   e

   $$\begin{aligned}\tau(n) &= (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_s + 1) \\ \tau(1) &= 1.\end{aligned}$$

   Em consequência, $\tau(n)$ é um número natural ímpar se, e somente se, n é um número natural quadrado perfeito.

Dessa forma, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\left(\prod_{d|n} d\right)^2 = \left(\prod_{d|n} d\right)\left(\prod_{d|n} \frac{n}{d}\right) = \prod_{d|n} n = n^{\tau(n)}$$

e, como $\prod_{d|n} d$ é um número natural, $n^{\tau(n)}$ é um número natural quadrado perfeito.

Para cada $r \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\left(\prod_{d|n} d^r\right)^2 = \prod_{d|n} d^r \prod_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^r = \prod_{d|n} n^r = (n^r)^{\tau(n)}$$

e, como $\prod_{d|n} d^r$ é um número natural, $n^{\tau(n)}$ é um número natural quadrado perfeito.

3. As funções sigma de ordem superior: para cada $r \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, a função aritmética σ_r de ordem r é definida como: para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $n \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\sigma_r(n) &= \sum_{d|n} d^r \\
&= (1 + p_1^r + \ldots + p_1^{ra_1})(1 + p_2^r + \ldots + p_2^{ra_2}) \ldots (1 + p_s^r + \ldots + p_s^{ra_s}) \\
&= \frac{1 - p_1^{r(a_1+1)}}{1 - p_1^r} \frac{1 - p_2^{r(a_2+1)}}{1 - p_2^r} \ldots \frac{1 - p_s^{r(a_s+1)}}{1 - p_s^r},
\end{aligned}$$

quando tomamos a fatoração canônica do número natural n diferente de um

$\sigma_r(1) = 1$.

Em consequência, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, a soma dos recíprocos de todos os divisores naturais do número natural n e a soma dos recíprocos dos quadrados de todos os divisores naturais do número natural n são, respectivamente,

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d = \frac{1}{n}\sigma_1(n) = \frac{1}{n}\sigma_2(n),$$

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{d|n} \frac{n^2}{d^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{d|n} d^2 = \frac{1}{n^2}\sigma_1(n^2) = \frac{1}{n^2}\sigma_2(n^2)$$

e assim por diante são determinados a soma de todas as potências r-ésimas de todos os divisores naturais de n e a soma de todos os recíprocos das potências r-ésimas de todos os divisores naturais de n.

4. A função aritmética ω cujo valor no número natural n, $n \neq 1$, é o número dos divisores naturais primos p de n.

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1$$

e

$$\omega(1) = 0$$

assim como a função aritmética ρ cujo valor no número natural n é igual a

$$\rho(n) = 2^{\omega(n)}.$$

5. A função aritmética μ de Möbius cujo valor no número natural n, $n \neq 1$, é

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{quando } n \text{ é um múltiplo de um número quadrado perfeito diferente de um} \\ (-1)^{\omega(n)}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mu(1) = 1$$

6. A função artimética λ de Liouville cujo valor no número natural n é

$$\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$$

em que a função aritmética Ω calculada no número natural n, $n \neq 1$ é igual a

$$\Omega(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_s$$

$$\Omega(1) = 0,$$

quando tomamos a fatoração canônica do número natural n diferente de um.

7. A função aritmética γ cujo valor no número natural n, $n \neq 1$, é

$$\gamma(n) = \prod_{p|n} p$$

em que o produtório é considerado sobre todos os divisores naturais primos de n.

$$\gamma(1) = 1.$$

Teorema 5. *Uma condição necessária e suficiente para que uma função aritmética f com valores inteiros tal que $f(1) = 1$ seja uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros é que, para números naturais m e n,*

$$f([m, n])f((m, n)) = f(m)f(n),$$

em que $[m, n]$ e (m, n) indicam, respectivamente, o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum de m e n.

Demonstração. Admitindo que f é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros, sejam os números naturais m e n e $p_1, p_2, \dots, p_t$ a lista de todos os divisores naturais primos de m e de n; então,

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$$

$$n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t},$$

em que $t \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ e $a_1, a_2, \dots, a_t, b_1, b_2, \dots, b_t$ são números inteiros não negativos. Assim, o mínimo múltiplo comum $[m, n]$ de m e n é igual a

$$[m, n] = p_1^{a_1 \vee b_1} p_2^{a_2 \vee b_2} \dots p_t^{a_t \vee b_t}$$

e o máximo divisor comum (m, n) de m e n é igual a

$$(m, n) = p_1^{a_1 \wedge b_1} p_2^{a_2 \wedge b_2} \dots p_t^{a_t \wedge b_t},$$

em que, para números inteiros a e b, $a \vee b$ e $a \wedge b$ são, respectivamente, o máximo e o mínimo dos números a e b.

Dessa forma,

$$f([m,n])f((m,n)) = f(p_1^{a_1 \vee b_1}) f(p_2^{a_2 \vee b_2}) \dots f(p_t^{a_t \vee b_t}) f(p_1^{a_1 \wedge b_1}) f(p_2^{a_2 \wedge b_2}) \dots f(p_t^{a_t \wedge b_t})$$

e

$$f(m)f(n) = f(p_1^{a_1}) \dots f(p_t^{a_t}) f(p_1^{b_1}) \dots f(p_t^{b_t}),$$

o que mostra que os dois números inteiros acima são iguais (por exemplo, se $a \leq b$, então $f(p^{a \vee b}) = f(p^b)$ e $f(p^{a \wedge b}) = f(p^a)$).

Admitindo a igualdade válida para números naturais m e n

$$f([m,n])f((m,n)) = f(m)f(n).$$

Se $(m, n) = 1$, então $[m, n] = mn$ e, assim,

$$f([m,n])f((m,n)) = f(mn)f(1) = f(m)f(n),$$

o que prova que f é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros. □

Teorema 6. *Sejam f e g funções aritméticas multiplicativas com valores inteiros. Então,*

(a) O produto termo a termo fg de f e g é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros.

(b) O produto de convolução de Dirichlet $f \star g$ de f e g é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros.

Veja a prova de (b) abaixo.

Demonstração. Como $g = (g \star f) \star f^{-1}$ e, como g e f^{-1} são funções aritméticas multiplicativas com valores inteiros, segue, pelo teorema anterior, que $g \star f$ é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros. □

Corolário 3. Seja f uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros. Então, a função aritmética F com valores inteiros definida para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$ por

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros.

Demonstração.

$$F = f \star I_0.$$

□

Corolário 4. Seja f uma função aritmética com valores inteiros e seja F uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros definida para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$ por

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Então f é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros.

Demonstração. De $F = f \star I_0$, pela associatividade do produto de convolução de Dirichlet,

$$F \star \mu = (f \star I_0) \star \mu = f \star (I_0 \star \mu) = f \star E = f.$$

□

Corolário 5. Se f é uma função aritmética multiplicativa, então f^{-1} é uma função aritmética multiplicativa

Demonstração. Temos que $E = f \star f^{-1}$ e f são funções ariméticas multiplicativas, o que implica que f^{-1} é uma função aritmética multiplicativa. □

Corolário 6. Sejam f e g funções aritméticas multiplicativas, então $f \star g$ é uma função aritmética multiplicativa

Demonstração. Temos que f^{-1} é multiplicatica, pelo Corolário anterior, e $g = (g \star f) \star f^{-1}$ é multiplicativa, o que implica que $g \star f$ é uma função aritmética multiplicativa □

Teorema 7. *Sejam f e g funções aritméticas com valores inteiros. Se g é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros e $h = f \star g$ é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros. Então f é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros.*

Demonstração. Admitindo que f não é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros, existem números naturais m e n, com $(m,n)=1$, de tal maneira que o produto mn é mínimo tal que $f(mn) \neq f(m)f(n)$, isto é, para números naturais m_1 e n_1 cujo produto m_1n_1 é menor do que o produto mn, $f(m_1n_1) = f(m_1)f(n_1)$, porque o produto mn é maior do que um (se $mn = 1$, significa que $f(1) \neq f(1)f(1)$, o que implica que $f(1) \neq 1$ e, então, $h(1) = f(1)g(1) = f(1) \neq 1$, o que contraria a hipótese de que h é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros). Então, $h(mn) \neq h(m)h(n)$. De fato,

$$\begin{aligned}
h(mn) = (f \star g)(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) g\left(\frac{mn}{d}\right) \\
&= \sum_{\substack{a|m,\\ b|n,\\ ab<mn}} f(ab) g\left(\frac{mn}{ab}\right) + f(mn)g(1) \\
&= \sum_{\substack{a|m,\\ b|n,\\ ab<mn}} f(a)f(b) g\left(\frac{m}{a}\right) g\left(\frac{n}{b}\right) + f(mn) \\
&= \left[\sum_{a|m} f(a) g\left(\frac{m}{a}\right)\right] \left[\sum_{b|n} f(b) g\left(\frac{n}{b}\right)\right] - f(m)f(n) + f(mn)
\end{aligned}$$

e, como $f(mn) \neq f(m)f(n)$, $h(mn) \neq h(m)h(n)$, o que contraria a hipótese de que h é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros.

□

Teorema 8 (Teorema da Função Inversa em Relação ao Produto de Convolução de Dirichlet de Funções Aritméticas Multiplicativas com Valores Inteiros)**.** *Seja f uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros. Então a função inversa f^{-1} de f, se existir, em relação ao produto de convolução de Dirichlet é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros.*

Demonstração. Como $f^{-1} \star f = E$ e, como E e f são funções aritméticas multiplicativas com valores inteiros, pelo teorema anterior, a função f^{-1} é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros.

□

3.6 Funções Aritméticas Totalmente Multiplicativas com Valores Inteiros

Uma função aritmética totalmente multiplicativa f, com valores inteiros, é uma função aritmética com valores inteiros tal que $f(1) = 1$ e, quando m e n são números naturais, $f(mn) = f(m)f(n)$.

Isto significa que, para cada n natural, $n \neq 1$, o valor de uma função aritmética totalmente multiplicativa f com valores inteiros é univocamente determinado pelos valores de f calculados em números naturais primos.

Quando a fatoração canônica do número natural n diferente de um como produto de potências naturais de todos os divisores naturais primos $p_1, p_2, \ldots, p_s$ do número natural n, ou seja,

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s}$$

em que $p_1, p_2, \ldots, p_s \in P$, subconjunto dos números naturais primos de $\mathbb{N}$ e

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_s$$

e

$$s, a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\},$$
$$f(n) = f(p_1)^{a_1} f(p_2)^{a_2} \ldots f(p_s)^{a_s}.$$

A função característica $\chi(S)$ de um subconjunto S do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ dos números naturais com as propriedades:

- $1 \in S$.
- $a \in S$ e $b \in S \Leftrightarrow ab \in S$.

é uma função aritmética totalmente multiplicativa com valores naturais.

A função característica χ_O do subconjunto O dos números naturais ímpares é uma função aritmética totalmente multiplicativa com valores naturais.

A função característica χ_E do subconjunto E dos números naturais pares não é uma função aritmética totalmente multiplicativa com valores naturais:

$$\chi_E(6) \neq \chi_E(2)\chi_E(3)$$

assim como a função característica χ_Q do subconjunto Q dos números naturais que são quadrados perfeitos:

$$\chi_Q(4) \neq \chi_Q(2)\chi_Q(2).$$

As seguintes funções aritméticas também são funções aritméticas totalmente multiplicativas com valores naturais:

1. As funções características E e I_0, respectivamente, do subconjunto unitário $\{1\}$ e do conjunto $N = \{1, 2, \ldots\}$ dos números naturais são funções aritméticas totalmente multiplicativas com valores naturais.

2. A função potência de ordem superior: para cada $r \in N = \{1, 2, \ldots\}$, a função potência de ordem r I_r é definida como: para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$ e $I_r(n) = n^r$.

Teorema 9. *Seja f uma função aritmética com valores inteiros. Uma condição necessária e suficiente para que f seja uma função aritmética totalmente multiplicativa com valores inteiros é que a função inversa f^{-1} de f em relação ao produto de revolução de Dirichlet é tal que, para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$, $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$, em que μ é a função aritmética de Möbius.*

Demonstração. Admitindo que f é uma função aritmética totalmente multiplicativa com valores inteiros. Para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}(\mu f \star f)(n) &= \sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= f(n)\sum_{d|n}\mu(d) \\ &= f(n)E(n) \\ &= E(n).\end{aligned}$$

Admitindo que a função inversa f^{-1} em relação ao produto de convolução de Dirichlet é igual à função produto μf de μ e de f.

Para cada número natural primo p,

$$(\mu f \star f)(p^2) = E(p^2) = 0$$

e, assim,

$$\mu(1)f(1)f(p^2) + \mu(p)f(p)f(p) = 0$$

que é equivalente a

$$f(p^2) = (f(p))^2;$$

de modo análogo,

$$f(p^3) = (f(p))^3$$

e assim por diante, o que prova que f é uma função aritmética totalmente multiplicativa com valores inteiros. □

A função inversa I_0^{-1} em relação ao produto de convolução de Dirichlet da função característica I_0 do conjunto dos números naturais é igual à função produto μI_0 de μ e de I_0 e, para cada $r \in N = \{1, 2, \ldots\}$, a função inversa I_r^{-1} em relação ao produto de convolução de Dirichlet da função potência I_r de ordem r é a função produto μI_r.

Em consequência,

- $I_0^{-1} = \mu I_0^{-1} = \mu$;
- Para cada $r \in N = \{1, 2, \ldots\}$, $I_r^{-1} = \mu I_r$;
- A função inversa λ^{-1} da função aritmética totalmente multiplicativa λ de Liouville é igual a $\lambda^{-1} = \mu\lambda$.

3.7 Funções Fortemente Multiplicativas com Valores Inteiros

Uma função aritmética fortemente multiplicativa f com valores inteiros é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros com a propriedade: para cada número natural primo p e para cada número natural $a \in N = \{1, 2, \ldots\}$,

$$f(p^a) = f(p).$$

As funções seguintes são funções aritméticas fortemente multiplicativas com valores inteiros:

1. A função γ é uma função aritmética fortemente multiplicativa com valores naturais, pois $\gamma(1) = 1$ e, para cada número natural n, $n \neq 1$,

$$\gamma(n) = \prod_{p|n} p$$

em que o produtório é considerado sobre todos os divisores naturais primos do número n.

2. A função ρ, definida para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$, por

$$\rho(n) = 2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} |\mu(d)|$$

em que μ é a função de Möbius e ω é a função aritmética com valores naturais definida como $\omega(1) = 0$ e, para cada $n \in N = \{2, 3, \ldots\}$,

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1$$

que é o número de divisores naturais primos distintos do número natural n.

3. Se f é uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros, então a função g, definida para cada $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$, por

$$g(n) = \sum_{d|p^a} \mu(d)\mu(d)f(d) = \mu(1)\mu(1)f(1) + \mu(p)\mu(p)f(p)$$

$$= \sum_{d|p} \mu(d)\mu(d)f(d)$$

é uma função aritmética fortemente multiplicativa com valores inteiros.

Seja f uma função aritmética multiplicativa com valores inteiros, então, para cada número natural n,

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\mu(d)f(d) &= 1-\sum_{j=1}^{s}f(p_j)+\sum_{1\le i\le j\le s}f(p_i)f(p_j)+\ldots+(-1)^s f(p_1)f(p_2)\ldots f(p_s)\\ &= \prod_{p|n}(1-f(p))\end{aligned}$$

e, no caso particular,

$$\sum_{d|n}\mu(d)\phi(d)=\prod_{p|n}(1-\phi(p))=\prod_{p|n}(2-p).$$

3.8 Outras Propriedades da Função de Euler

Propriedade 1. Para cada $n\in\{3,4,5,\ldots\}$, $\phi(n)$ é um número par.

Quando $n=2^j\in\{3,4,5,\ldots\}$, $\phi(n)=\phi(2^j)=2^{j-1}$
Quando n tem pelo menos um fator primo ímpar

$$\phi(n)=n\prod_{p|n}\frac{p-1}{p}=\frac{n}{\prod\limits_{p|n}p}\prod_{p|n}(p-1)$$

é o número par, pois $\prod\limits_{p|n}(p-1)$ é um número par e $\dfrac{n}{\prod\limits_{p|n}p}$ é um número natural.

Propriedade 2. Para cada $m,n\in\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$, $\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)\dfrac{d}{\phi(d)}$ em que $d=(m,n)$

$$\begin{aligned}\phi(mn) &= mn\prod_{p|mn}\left(1-\frac{1}{p}\right)\\ &= mn\frac{\prod\limits_{p|m}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod\limits_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)}{\prod\limits_{p|(m,n)}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\\ &= mn\frac{\frac{\phi(m)}{m}\frac{\phi(n)}{n}}{\frac{\phi(d)}{d}}\end{aligned}$$

$$= \phi(m)\phi(n)\frac{d}{\phi(d)}$$

lembrando que os divisores primos do produto mn ou são divisores primos de m e não de n ou são divisores primos de n e não de m ou são divisores primos de m e n simultaneamente.

Propriedade 3. Para cada $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ se $m|n$ então $\phi(m)|\phi(n)$

Se $m|n$ então existe $q \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $n = qm$. Se $m = 1$ então $\phi(m) = \phi(1) = 1$ divide $\phi(n)$. Se $d = (q, m)$ então

$$\phi(n) = \phi(qm) = \phi(q)\phi(m)\frac{d}{\phi(d)}$$

O princípio de indução completa aplicado ao conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\} : m|n \to \phi(m)|\phi(n)\}$ prova o resultado pois a hipótese de indução é que $1 \in X, 2 \in X, \ldots, (n-1) \in X$ e, como $q \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $q \in X$ o que significa que, por hipótese, $\phi(d)$ divide $\phi(q)$ e, logo,

$$\phi(n) = d\frac{\phi(d)}{\phi(d)}\phi(q)$$

em que $d\dfrac{\phi(d)}{\phi(d)}\phi(q)$ é um número natural.

Propriedade 4. Seja p um número natural primo ímpar com a propriedade de que $2p + 1$ também é um número primo. Então $\phi(4p + 2) = \phi(4p) + 2$

Como p é um número primo ímpar $(p, 4) = 1$ e, como ϕ é uma função aritmética multiplicativa,

$$\phi(4p) = \phi(4)\phi(p) = 2(p-1)$$

Como $2p + 1$ é um número primo ímpar $(2p + 1, 2) = 1$

$$\phi(4p + 2) = \phi(2)\phi(2p + 1) =$$

$$= 2p = 2(p-1) + 2 = \phi(4p) + 2$$

Propriedade 5. Se $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ então $\phi(8n + 4) = 2\phi(4n + 2)$

Como $(2, 8n + 4) = 2$

$$\phi(8n + 4) = \phi(2)\phi(4n + 2)\frac{2}{\phi(2)} = 2\phi(4n + 2)$$

Note que $\phi(4) = 2\phi(2)$

Propriedade 6. Se $a, b \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ são tais que a divide b, então $\phi(a^2n + ab) = a\phi(an + b)$ e $\phi(abn + a^2) = a\phi(bn + a)$

De fato, $\phi(a^2n+ab) = \phi[a(an+b)] = \phi(a)\phi(an+b)\dfrac{a}{\phi(a)} = a\phi(an+b)$, pois $a = (a, b)$. E ainda, $\phi(abn+a^2) = \phi[a(a+bn)] = \phi(a)\phi(a+bn)\dfrac{a}{\phi(a)} = a\phi(a+bn)$, pois $a = (a, b)$.

Propriedade 7. Se $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ é da forma $n = 2^a F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_r$ em que $a \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ e $F_1, F_2, \ldots, F_r$ são números primos de Fermat, então $\phi(n)$ é uma potência de 2.

Temos que, $F_1 = 2^2 + 1$, $F_2 = 2^{2^2} + 1$, ..., $F_r = 2^{2^r} + 1$ são primos. Assim

$$\phi(F_1) = 2^2$$

$$\phi(F_2) = 2^{2^2}$$

$$\vdots$$

$$\phi(F_r) = 2^{2^r}$$

e ainda

$$\phi(2^a) = 2^1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{a-1}$$

Propriedade 8. Se $n \in \{2, 3, \ldots\}$, então $2^{\omega(n)-1}$ divide $\phi(n)$ em que $\omega(n)$ é o número de fatores primos distintos de n

Se $n \in \{2, 3, \ldots\}$, considerando a fatoração canônica de n em fatores primos distintos de um

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right) \\ &= \frac{n}{p_1p_2\cdots p_s}(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1)\ldots(p_s - 1)\end{aligned}$$

Caso $p_1 = 2$, o produto $(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1)\ldots(p_s - 1)$ é multiplo de 2^{s-1}, o que implica que $\phi(n)$ é multiplo de $2^{s-1} = 2^{\varpi(n)-1}$. Caso $p_1 \neq 2$, o produto $(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1)\ldots(p_s - 1)$ é multiplo de 2^s, o que ocorre implica que $\phi(n)$ é multiplo de $2^{s-1} = 2^{\varpi(n)-1}$

3.9 Uma Generalização da Função de Euler

Seja P uma função polinomial cujos coeficientes são números inteiros e, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, seja

$$\phi_P(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (n,P(k))=1}}^{n} 1$$

Como $\phi_P(1) = 1$, para provar que ϕ_P é uma função aritmética multiplicativa com valores naturais, sejam $m, n \in \{2, 3, 4, ...\}$, com $(m, n) = 1$, e escrevam os primeiros mn números naturais na forma

1	2	$\dots$	$(m-1)$	m
$m+1$	$m+2$	$\dots$	$m+(m-1)$	$m+n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(n-1)m+1$	$(n-1)m+2$	$\dots$	$(n-1)m+(m-1)$	nm

e existem $\phi_P(mn)$ números naturais $k \in \{1, 2, ..., mn\}$ com $(nm, P(k)) = 1$.

Em cada uma das linhas da tabela, existem $\phi_P(m)$ números naturais $k \in \{1, 2, ..., mn\}$ com $(m, P(k)) = 1$.

Em cada uma das colunas existem $\phi_P(n)$ números naturais $k \in \{1, 2, ..., n\}$ com $(n, P(k)) = 1$.

Em consequência, entre os mn primeiros números naturais existem $\phi_P(m)\phi_P(m)$ números naturais $k \in \{1, 2, ..., mn\}$ tal que $(m, P(k)) = (n, P(k)) = 1$, isto é, $(nm, P(k)) = 1$ o que permite a conclusão de que

$$\phi_P(mn) = \phi_P(m)\phi_P(n)$$

quando $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ com $(m, n) = 1$.

Como ϕ_P é uma função arirtmética multiplicativa com valores naturais, para o cálculo de $\phi_P(n)$ quando $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, basta o cálculo de $\phi_P(p^a)$ em que p é um número natural primo e $a \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

$$\begin{aligned}
\phi_P(p^a) &= \sum_{\substack{k=1 \\ (p,P(k))=1}}^{p^a} 1 \\
&= p^a - \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)\equiv 0 mod p}}^{p^a} 1 \\
&= p^a - p^{a-1}b_p \\
&= p^a\left(1 - \frac{b_p}{p}\right)
\end{aligned}$$

em que b_p é o número de valores $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(p)$ que são divisíveis pelo número primo p. Em consequência, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

$$\phi_P(n) = n\prod_{p|n}\left(1 - \frac{b_p}{p}\right)$$

Como uma aplicação do resultado acima, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, o número de termos da sequência

$$1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots, n \cdot (n+1)$$

que são relativamente primos com n é igual a

$$n\prod_{p|n}\left(1 - \frac{2}{p}\right)$$

onde $P(1) = 1 \cdot 2$, $P(2) = 2 \cdot 3$, ..., $P(p-1) = (p-1) \cdot p$, $P(p) = p \cdot (p+1)$.

E, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, o número de termos da sequência

$$1 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 4, \ldots, n \cdot (n+1) \cdot (n+2),$$

que são relativamente primos com n, é igual a

$$n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{3}{p}\right)$$

quando n é um número natural ímpar e é igual a zero quando n é um número natural par.

3.10 A Fórmula de Contagem dos Polinômios Mônicos Irredutíveis de Grau N com Coeficientes em um Corpo Finito

Uma das aplicações importantes das fórmulas de inversão de Möbius é a fórmula da contagem do número de polinômios irredutíveis (polinômios que não são produtos de dois polinômios com graus maiores ou igual a um) mônicos (polinômios com coeficientes dominantes um) de grau n cujos coeficientes são elementos de um corpo finito de p elementos (p é um número natural primo).

Por exemplo, para cada número natural primo p, $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ com as operações usuais de adição e de multiplicação é um corpo finito com p elementos: a soma de dois elementos em $\mathbb{Z}_p$ é o resto da divisão por p da soma comum dos dois números e o produto de dois elementos de $\mathbb{Z}_p$ é o resto da divisão por p do produto comum dos dois números.

Para a obtenção da fórmula da contagem do número $N(n)$ de polinômios irredutíveis mônicos de grau n com coeficientes em um corpo finito com p elementos, considere a enumeração de todos os polinômios irredutíveis mônicos cujos coeficientes pertencem ao corpo finito:

$$p_1(x), p_2(x), p_3(x), \ldots$$

cujos graus são respectivamente os números naturais $d_1, d_2, d_3, \ldots$. Para cada sequência de números inteiros não negativos $j_1, j_2, j_3, \ldots$ de modo que, exceto para um número finito de termos da sequência, os demais termos da sequência são nulos é construído um polinômio mônico

$$p(x) = p_1(x)^{j_1} p_2(x)^{j_2} p_3(x)^{j_3} \ldots$$

e, pelo teorema da fatoração única de um polinômio em polinômios irredutíveis, fica determinada uma correspondência biunívoca entre polinômios mônicos de grau n com coeficientes no corpo finito e sequência de números inteiros não negativos $j_1, j_2, j_3, \ldots$ sequências estas em todos os termos são nulos, exceto para um número finito deles, tal que

$$n = d_1 j_1 + d_2 j_2 + d_3 j_3 + \ldots.$$

O número de polinômios mônicos de grau n com coeficientes em um corpo finito de p elementos é igual a p^n, que é o coeficiente de x^n na expansão formal

$$(1-px)^{-1} = 1 + px + p^2x^2 + \ldots + p^nx^n + \ldots.$$

O número de sequências de números inteiros não negativos $j_1, j_2, j_3, \ldots$ com $n = d_1j_1 + d_2j_2 + d_3j_3 + \ldots$ é o coeficiente de x^n na expressão formal

$$(1 + x^{d_1} + x^{2d_1} + \ldots)(1 + x^{d_2} + x^{2d_2} + \ldots)\ldots,$$

o que leva a conclusão de que

$$(1-px)^{-1} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-x^{d_j})^{-1} = \prod_{d=1}^{\infty}(1-x^d)^{-N(d)},$$

lembrando que $N(d)$ é o número de polinômios irredutíveis mônicos de grau d com coeficientes no corpo finito de p elementos.

Considerando o logaritmo em ambos os membros, sabendo a expansão forma do logaritmo

$$\log(\frac{1}{1-z}) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \ldots,$$

obtem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(px)^n = \sum_{d=1}^{\infty}N(d)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^{jd}}{j}.$$

A comparação dos coeficientes em x^n

$$\frac{p^n}{n} = \sum_{d|n}N(d)\frac{1}{n/d}$$

ou

$$p^n = \sum_{d|n}dN(d)$$

e, pela fórmula da inversão de Möbius,

$$N(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})p^d,$$

o que mostra que, para cada número natural n, há um número $N(n)$ não nulo de polinômios irredutíveis mônicos de grau n com coeficientes em um corpo finito de p elementos.

O número de polinômios irredutíveis mônicos de grau n com coeficientes no corpo finito $\mathbb{Z}_p$ (p é um número natural primo) é dado abaixo para alguns valores de n e p.

- Caso $p = 2$

$$\begin{aligned}
N(n) &= \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})2^d \\
N(1) &= \mu(1)2^1 = 2 \\
N(2) &= \frac{1}{2}\big[\mu(1)2^2 + \mu(2)2^1\big] = 1 \\
N(3) &= \frac{1}{3}\big[\mu(1)2^3 + \mu(3)2^1\big] = 2 \\
N(4) &= \frac{1}{4}\big[\mu(1)2^4 + \mu(2)2^2 + \mu(4)2^1\big] = 3
\end{aligned}$$

- Caso $p = 3$

$$\begin{aligned}
N(n) &= \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})3^d \\
N(1) &= \mu(1)3^1 = 3 \\
N(2) &= \frac{1}{2}\big[\mu(1)3^2 + \mu(2)3^1\big] = 3 \\
N(3) &= \frac{1}{3}\big[\mu(1)3^3 + \mu(3)3^1\big] = 8 \\
N(4) &= \frac{1}{4}\big[\mu(1)3^4 + \mu(2)3^2 + \mu(4)3^1\big] = 18
\end{aligned}$$

O número de polinômios irredutíveis mônicos de grau um e de grau dois, com coeficientes no corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, é infinito; no entanto, o número de polinômios irredutíveis mônicos de grau superior a dois, com coeficientes reais, é nulo, isto é, não existem polinômios irredutíveis de grau superior a dois com coeficientes reais.

O número de polinômios irredutíveis mônicos de grau um com coeficientes no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, é infinito; no entanto, o número de polinômios irredutíveis mônicos de grau superior a um, com coeficientes complexos, é nulo, isto é, não existem polinômios irredutíveis de grau superior a um com coeficientes complexos.

Capítulo 4

Considerações Finais

O objetivo desse trabalho foi associar conteúdos matemáticos de ensino fundamental, ensino médio e graduação.

No primeiro capítulo, sugerimos a ligação de trigonometria (apresentado no primeiro bimestre da segunda série do ensino médio) com triângulo de Pascal e Binômio de Newton (apresentados no terceiro bimestre desta mesma série), onde observamos que cada linha do triângulo de Pascal pode ser obtida a partir dos números binomiais e o conjunto de números presente em cada uma das linhas se encontra na soma trigonométrica de arcos (duplos, triplos, e assim por diante).

Tendo em vista que a primeira ideia de soma finita é dada no ensino fundamental (mais expecificamente no oitavo ano), temos facilmente a associação com progressões aritméticas e geométricas (ministrado no primeiro bimestre do primeiro ano do ensino médio) apresentado no segundo capítulo deste trabalho. Continuando nesta mesma linha de raciocínio, é possível agregar com o conjunto de ideias de funções (oferecido ao primeiro ano do ensino médio, no segundo bimestre).

Por fim, ainda com o pensamento ligado a funções, apresentamos funções aritméticas com valores inteiros, também associado a Teoria dos Números, conectando, de certa forma, todos os assuntos aqui relacionados.

Consideramos de extrema importância essas correlações de conteúdos para descaracterizar a idealização dos alunos de que a matemática é desvinculada e segmentada.

De modo a exemplificar, faremos alguns cálculos para o número natural 1000. Para isso, consideremos sua fatoração: $1000 = 2^3 5^3$, onde $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $e_1 = 3 = e_2$

1. O número de divisores de 1000

$$\tau(1000) = (3+1)(3+1) = 16$$

2. A soma dos divisores de 1000

$$\sigma(1000) = \left(\frac{1-2^{3+1}}{1-2}\right)\left(\frac{1-5^{3+1}}{1-5}\right) = 2.340$$

3. A soma dos quadrados dos divisores de 1000

$$\sigma_2(1000) = \left(\frac{1-2^{2(3+1)}}{1-2}\right)\left(\frac{1-5^{2(3+1)}}{1-5}\right) = 24.902.280$$

4. A soma dos cubos dos divisores naturais de 1000

$$\sigma_3(1000) = \left(\frac{1-2^{3(3+1)}}{1-2}\right)\left(\frac{1-5^{3(3+1)}}{1-5}\right) = 249.938.963.820$$

5. A soma dos recíprocos dos divisores de 1000

$$\frac{1}{1000}\sigma(1000) = 2,340$$

6. A soma dos recíprocos dos quadrados dos divisores de 1000

$$\frac{1}{1000}\sigma_2(1000) = 24,902280$$

7. A soma dos recíprocos dos cubos dos divisores naturais de 1000

$$\frac{1}{1000}\sigma_3(1000) = 249,938963820$$

8. O número de frações irredutíveis próprias cujo denominador é 1000

$$\phi(1000) = 1000\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 1000 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 400$$

Referências

do Estado de São Paulp, G., **Caderno Do Professor Matemática**. IMESP, Volume 1 2014-2017.

GOIA, A. A., **The Theory of Numbers: An Introduction**. Markhem Publishun Company Chicago, 1970.

KONINCK, J. M., **1001 Problems in Classical Number Theory**. American Mathematical Society AMS, 2007.

LOPES, L.; **Manual de Progressões**. Editora Interciência, 1998.

LOPES, L.; **Sequências e Séries**. Editora Interciência, 1992.

LOPES, L.; **Manual de Indução Matemática**. Editora Interciência, 1998.

ROSEN, K. H., **Number Theory and its Applications**. Addinm-Wesley Publishung Company, 1993.

VAN LINT, J.H. and R.M. Wilson **A Course in Combinatorics** Cambridge University Press, 2nd edition, 2001.