UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANKLIN BERG ALMEIDA DA COSTA

GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO: UM QUESTIONAMENTO DIDÁTICO AO PRINCÍPIO DE CAVALIERI.

MOSSORÓ-RN
2017

FRANKLIN BERG ALMEIDA DA COSTA

GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO: UM QUESTIONAMENTO DIDÁTICO AO PRINCÍPIO DE CAVALIERI.

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-graduação stricto sensu para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica (PROFMAT), da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-graduação da Universidade Federal Rural do semiárido (UFERSA) como requisito final para obtenção de título de mestre em Matemática.

Orientador: Antônio Gomes Nunes.

C474g Costa, Franklin Berg Almeida.
Geometria Espacial no Ensino Médio: um questionamento didático ao Princípio de Cavalieri. / Franklin Berg Almeida Costa. - 2017.
74 f. : il.

Orientador: Antônio Gomes Nunes.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2017.

1. Geometria Espacial. 2. Princípio de Cavalieri. 3. didática. I. Gomes Nunes, Antônio , orient. II. Título.

FRANKLIN BERG ALMEIDA DA COSTA

GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO: UM QUESTIONAMENTO DIDÁTICO AO PRINCÍPIO DE CAVALIERI.

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 26 / 05 / 2017

BANCA EXAMINADORA

Dr. Antonio Gomes Nunes - UFERSA
Presidente

Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA
Membro interno

Dr. Luiz Antonio da Silva Medeiros - UFCG
Membro externo

MOSSORÓ/RN, 2017.

À maior educadora da minha vida, minha mãe,
Maria da Conceição Almeida da Costa.
(in memorian).

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível graças a todos aqueles que acreditaram em meu esforço durante toda a elaboração desse feito. Diante de toda contribuição dada para realização deste trabalho, gostaria de agradecer, como forma de reconhecimento:

Primeiramente a Deus, que concedeu a realização deste projeto dissertativo, pois sem ele, sentir-me-ia impotente para construção deste trabalho árduo e criterioso.

No âmbito da gratidão, também gostaria de enaltecer a minha esposa Flávia Sonaley de Azevedo que diante das minhas exaustões sempre esteve ao meu lado para contorná-las.

Aos meus irmãos, Francisco José e Fábio Almeida, e ao meu pai, Raimundo Gomes da Costa, que sempre me apoiaram nos meus objetivos.

Aos meus primos maternos Daniel Solano de Almeida e Samuel Solano de Almeida, que sempre me apoiaram para meu avanço social e por me verem como um grande professor.

Em meio a esses agradecimentos, não poderia deixar de agradecer a uma pessoa primordial na elaboração deste documento, meu orientador, Dr. Antônio Gomes Nunes, que, pela importância que ele atribuiu a este trabalho, motivou-me cada vez mais a desenvolvê-lo, enxergando-me um ser potencial e promissor.

Muito obrigado!

E que é próprio do entendimento humano a tendência à divisão da natureza em partes e buscar certos princípios elementares e originários cujas diversas combinações expliquem a enorme diversidade que existe na natureza.

Meliujin

ALMEIDA, Franklin Berg. **Geometria Espacial no Ensino Médio:** um questionamento didático ao Princípio de Cavalieri. Mossoró, dissertação de mestrado: Programa de pós-graduação em Matemática CCEN/UFERSA, 2017.

RESUMO

Em algumas épocas da história da humanidade, a curiosidade pela origem de todas as coisas aguçou o espírito investigador de muitos. Nesse estímulo surgiu no século XVII, a discussão sobre o “indivisível”, inquietando vários expoentes do conhecimento que lançaram mãos sobre a infinidade dos entes existentes na natureza, podendo destacar nesse âmbito: Johannes Kepler, Galileu Galilei e Bonaventura Cavalieri. Este publica em 1615 uma obra que define os indivisíveis na sua concepção, *Geometria Indivisibilis Continuorum*, onde mostra sua teoria da indivisibilidade. Além do apanhado histórico sobre a vida e obra de Cavalieri, será mostrado o seu postulado, O Princípio de Cavalieri, que parece ser aceitável sem nenhuma discussão no ensino da Matemática elementar. A fim de desvencilhar algumas dúvidas que suscitam no estudo desse postulado, alguns subsídios clarificadores compõem essa pesquisa, os sólidos generalizados. Com todo aparato estabelecido, o trabalho estende-se também para uma discussão didática, e consequentemente, delineia a uma análise documental nos livros didáticos da 2ª série do ensino médio. Por fim, será tirado um extrato de uma aula inédita realizada no ambiente escolar, cuja finalidade é transparecer em que momento é admitido as paridades estabelecidas pelo Princípio de Cavalieri, tema abordado em anexo ao estudo da Geometria Espacial na educação básica.

Palavras-chaves: Geometria Espacial, Princípio de Cavalieri, didática.

ALMEIDA, Franklin Berg. **Spatial Geometry In High School:** a didactic questioning of the Cavalieri principle. Mossoró, Master's thesis: Postgraduate Program in Mathematics CCEN/ UFERSA, 2017.

ABSTRACT

In some epochs of human history, curiosity for the origin of all things has increased the investigative spirit of many researchers. In the 17th century, the discussion about the "indivisible" arose, disquieting various exponents of knowledge who laid hands on the infinity of beings existing in nature, including Johannes Kepler, Galileo Galilei and Bonaventura Cavalieri. This one publishes in 1615 a work that defines the indivisibles in its conception, Geometric Indivisibilis Continuorum, where it shows his theory of the indivisibility. In addition to the historical record on the life and work of Cavalieri, his postulate, The Cavalieri Principle, appears to be acceptable without any discussion in elementary mathematics teaching. In order to remove some doubts that arise in the study of this postulate, some clarifying subsidies compose this research, the generalized solids. With all the established apparatus, the work also extends to a didactic discussion, and consequently, it delineates to a documental analysis in the textbooks of the second grade of high school. Finally, an extract from an unprecedented class will be taken in the school environment, whose purpose is to show when the parities established by the Cavalieri Principle, an issue addressed in the annex to the study of Space Geometry in basic education, are admitted.

Keywords: Spatial Geometry, Cavalieri’s Principle, didactics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O conhecimento floresce questionamentos, aprimora o que já existe e faz com que paradigmas sejam quebrados e substancia significantemente a formação de outros. Nessa configuração, o conhecimento discorre em um “fio condutor”, onde por meio de uma extremidade consegue-se chegar a outra, transparecendo assim, numa complementariedade integrada por sentido.

Desde o início da Idade Moderna, vários pensadores, filósofos e pesquisadores tentam integrar diversas partes do conhecimento científico com uma única finalidade: unir o conhecimento humano de forma que essas ciências compactuem-se, tornando um conhecimento articulado e unificado. Em contrapartida, a existência perene da fragmentação acarreta fraturas na compreensão dos indivíduos, conduzindo, portanto, ao estudo desconexo e compartimentalizado das ciências; do conhecimento.

Nessa perspectiva, a necessidade da compreensão da realidade exige que os saberes não se processem de forma fragmentada, mas sim que tais fragmentos sejam religados, a fim de que haja uma efetiva compreensão do todo, e não somente uma explicação ou mera informação depositária.

> Há complexidade quando elementos diferentes são inseparáveis constitutivos do todo (como o econômico, o político, o sociológico, o psicológico, afetivo, o mitológico), e há um tecido interdependente interativo e inter-retroativo entre o objeto de conhecimento e seu contexto, as partes e o todo, o todo e as partes, as parte entre si.” (MORIN, 2002, p.38).

Portanto, frente a uma sociedade complexa, é emergente a compreensão do conhecimento enquanto um todo, pois dessa maneira evidenciam-se informações contextualizadas, denotando assim, a existência de correlação entre os segmentos constituintes do mesmo, dando numa determinada abordagem, formação conceitual.

Nessa noção, estendendo-se para o campo científico e educacional, surge o termo interdisciplinaridade[1], o que equivale à necessidade de superar a visão fragmentada da produção do conhecimento e articular suas partes com a finalidade de resultar em um todo

---

[1] O termo interdisciplinaridade surgiu no final do século passado a partir da necessidade de justificar a fragmentação imposta pelas disciplinas; essa prática consiste em restabelecer o conhecimento de forma relacional. (Revista Urutágua - *revista acadêmica multidisciplinar centro de estudos sobre intolerância*- Maurício Trandenberg, Departamento de Ciências Sociais- Universidade Estadual de Maringá-UEM).

coerente capaz de atender as necessidades do homem diante de uma sociedade que emana constantes informações dispersas.

> A respeito, portanto, da integração em relação a interdisciplinaridade conclui-se em favor da necessidade da integração como momento, como possibilidade de atingir-se uma interação, uma interdisciplinaridade com vistas a novos questionamentos, novas buscas, enfim, para uma mudança na atitude de compreender e entender. (FAZENDA, 2002, p.49).

Nesse âmbito, a interdisciplinaridade não pode ser vista de forma justaposta, pois, mediante a justaposição não funcional, o conhecimento reproduzir-se-á mecanicamente. Para isso se faz necessário que as ciências e as partes intrínsecas das mesmas, antes de relacionar, relacionem-se[2].

Atualmente vários pesquisadores em educação matemática concordam com a importância de se ensinar matemática explorando os seus diversos campos com o objetivo de uni-los, potencializando a aprendizagem dessa disciplina.

Com o propósito de transparecer uma plausível transposição didática[3], esta pesquisa acadêmica limitar-se-á ao campo tridimensional e o seu desenvolvimento geométrico. Nesse entendimento, tratar-se-á de sólidos geométricos (poliedros e corpos redondos), bem denotados por um dos alicerces da geometria, a geometria espacial.

Não obstante a tal fragmentação, destaca-se o emprego da geometria, onde a mesma é tratada de maneira discreta, isolada no currículo escolar. Todavia, é um grande aporte para associação da realidade e dos outros campos constituintes da matemática.

Nesses termos, enxerga-se nos currículos escolares de matemática, uma aparente dispersão nas literaturas escolares, onde os campos que se estruturam, aritmética, álgebra e geometria[4] encontram-se alheios no processo de "ensino aprendizagem".

Apesar de tal postura, a perpetuação da fragmentação ainda mostra-se presente no processo educativo, tornando o saber matemático carente cada vez mais de compreensão sólida, capaz de superar a disseminação excludente transparecida nesse processo.

Como disciplina inserida no currículo escolar, o ensino da matemática desperta preocupações nos especialistas, pois desde os primeiros movimentos em educação

---

[2] COSTA, F. B.A. A unidade aritmética e geometria na matemática: como essa questão é tratada nos livros didáticos de matemática e em que ela pode melhorar a aprendizagem do aluno? (monografia 2012. 65f)..

[3] Instrumento através do qual se transforma o conhecimento científico em conhecimento escolar, para que possa ser ensinado pelos professores e aprendido pelos alunos. (MENEZES, Ebenezer Takuno de; SANTOS, Thais Helena dos. Verbete transposição didática. *Dicionário Interativo da Educação Brasileira - Educabrasil*. São Paulo: Midiamix, 2001.

[4] No estudo da geometria, a trigonometria mostra-se também como parcela desse campo matemático. (Lorenzato, Sérgio. Para aprender matemática. Ed. Autores Associados. Campinas, SP, 2006).

matemática é debatida a sua fragmentação, e ao mesmo tempo, a unidade nos seus campos, buscando, portanto, propostas no âmbito integrador, já que essas são retratadas de forma isoladas, presas em si, como fossem autossuficientes.

Entretanto, vista sua relevância do uso da geometria no processo de aprendizagem, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's argumenta que é possível perceber que a geometria é um campo produtivo que desperta interesse nos aprendizes, pois através dela o indivíduo consegue descrever, interpretar o mundo em sua volta, sendo no foco desse contexto, relacionadora com os campos componentes da Matemática e do meio circundante. Portanto, é desejável que enfatize o seu ensino, coibindo o seu rejeito escolar, pois a imagem é um instrumento de informação inteligível onde consegue associar o abstrato ao concreto e vice-versa.

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1997, p.55).

Nessa égide dada a Geometria, esta pesquisa abordará a definição do Princípio de Cavalieri nos livros didáticos da educação básica, dando ênfase a presença dos contornos geométricos nas porções sólidas como forma relutante a conceituação existente nas literaturas didáticas, onde comumente, a crítica geométrica subjacente é banida no desenvolvimento do tratado volumétrico axiomático.

Nesses termos, o que se aborda é um ensino inerente a algoritmos, seja para obtenção de áreas ou volumes de "sólidos simples", advindos de uma formulação partida de pressupostos, com pouco rigor de argumentação matemática. Em meio a obscuridade, o intelectual milanês deu no seu argumento um conjunto de premissas (proposições), denunciadas suficientemente a congruência de áreas e alturas nas porções tridimensionais, onde a corroboração é a igualdade dos volumes dos sólidos em comparação.

2. MATEMÁTICA E A IDADE MODERNA

Este capítulo é devotado à vida e obra do matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), sendo expressa sua carreira nos altares acadêmicos e eclesiásticos, onde em concomitância, desenvolveu teorias de grande relevância para matemática renascentista. Diante das teorias acadêmicas, merece destaque a *Geometria Indivisibilis Continuorum Nova* (1635), nela será mostrada sua conceituação sobre os indivisíveis, e paralelamente, a contribuição prestada ao desenvolvimento do cálculo diferencial integral a partir da teoria da indivisibilidade. E por fim, lançam-se mãos no postulado de equiparidade de sólidos para obtenção de volumes e áreas, o princípio de Cavalieri, o qual também será tratado em forma de teoremas no âmbito do cálculo integral, evidenciando a mesma proporcionalidade denunciada no seu princípio.

2.1 MATEMÁTICA E A IDADE MODERNA: CONTRIBUIÇÃO DE FRANCESCO BONAVENTURA CAVALIERI: VIDA E OBRA

O período do Renascimento[5] ocorreu na Europa entre 1300 a 1650, tendo maior manifestação na Itália. Neste marco histórico, toda influência iluminista perfazia o continente, tanto nas artes, literatura, e nas variadas ciências conceituadas na época, onde o homem tornou-se um agente curioso e pensante na busca de respostas lógicas, desprezando assim, as concepções divinas pregadas na idade média junto ao feudalismo[6]. Consoante a esta conjuntura, Mol (2013) afirma:

> Esse panorama sofreu uma mudança significativa no decorrer do século XV. No período que ficou conhecido como Renascimento, a Europa vivenciou um redespertar das atividades criativas, assistindo ao florescimento de diversas áreas, entre as quais a literatura, a arte e a ciência. O conhecimento clássico, revalorizado e revigorado, passou a ser um instrumento no questionamento dos padrões de autoridade vigentes. (MOL 2013, p.83)

[5] O Renascimento foi uma nova visão de mundo estimulada pela burguesia em ascensão. Suas principais características eram o racionalismo (em oposição à fé), o antropocentrismo (em oposição ao teocentrismo) e o individualismo. http://procampe.blogspot.com.br/2007/05/o-renascimento.html.

[6] O feudalismo foi um modo de organização sócio-político baseado nas relações servo-contratuais (servis). Tem suas origens na decadência do Império Romano. Predominou na Europa durante a Idade Média. ARRUDA, J. Jobson - *História Antiga e Medieval* - Ed. Ática - 1982

Desta forma, durante a renascença a Matemática dominou as esculturas, pinturas e arquiteturas, onde a simetria era um elemento geométrico associado, nesse âmbito, suscitaram em várias regiões italianas o interesse pelo raciocínio matemático aplicado, levando tal raciocínio ao caráter científico, onde neste exalta-se em território milanês, o matemático Francesco Bonaventura Cavalieri. Ilustração na Figura 1 do clérigo.

Figura 1: Imagem de Francesco Cavalieri (nome de batismo)

Fonte: https://upload.wikimedia.org

Matemático e astrônomo italiano, nascido em 1598 na cidade de Milão, Bonaventura Cavalieri tornou-se notabilizado por uma grande contribuição dada a Matemática moderna e por grandes influências entre as patentes religiosas do clero italiano.

O mestre em seu percurso ocupou cargos diversos, seja de natureza acadêmica ou eclesiástica. Foi professor da universidade da Bologna, por volta de 1635, inventou o método dos indivisíveis, iniciando uma nova era para geometria e simultaneamente, o esplendor para o cálculo integral. Segundo relatos, no âmbito eclesiástico, Cavalieri ingressa na ordem dos jesuados em Milão (1615), já no ofício de padre transferiu-se para o monastério de Pisa (1616), onde intensificou o seu interesse por Matemática após conhecer Galileu Galilei (1564-1642), por intermédio do também padre Benedito Castelli (1577-1644), que veio a torna-se seguidor.

Visto suas ocupações, é salutar afirmar que o sábio flertou formalmente com seu ministério a sua outra habilidade, professor. Lecionou Teologia, em monastérios e por volta 1623, foi intitulado prior de São Pedro em Lodi. Após três anos em Lodi, foi para o monastério de Parma, sendo nomeado para cadeira de matemática em Bolonha (1629), quando ainda estava desenvolvendo a polêmica teoria dos indivisíveis, que apresentou posteriormente na sua obra *Geometria indivisibilis continuorum* (1635). Obra esta, que revela o limiar do Princípio de Cavalieri e do cálculo infinitesimal.

Ao que diz respeito a obra, pouco pode ser dito, pois ninguém sabia ao que era atribuído o conceito dos indivisíveis. Infere-se que o termo (indivisíveis) tinha atribuição prestada a cordas em uma porção plana e para os sólidos, acredita-se que era a região seccionada por um plano nos sólidos, obtendo uma espécie de discos empilhados.

Em pormenores, a Geometria dos indivisíveis argumentava: fazendo deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à original, uma vez que ambas são formadas pelas mesmas cordas. Ao que tange a áreas nos sólidos, numa abordagem hipotética, tratava-se de secções interceptadas por um mesmo plano em corpos diferentes, resultava em áreas congruentes.

Entretanto, é importante frisar que a teoria dos indivisíveis já era do conhecimento Arquimedes (287-212 a. C) e Demócrito (460- 370 a. C), que utilizam para obter volumes de sólidos, apesar de não possuir uma organização algébrico-geométrica, contrastando com a matemática moderna e contemporânea.

Além do método que consistia em divisão infinita de um sólido, outras contribuições foram ofertadas a matemática pelo gênio. A saber: foi responsável pela introdução na Itália, do logaritmo trigonométrico, usado no estudo das funções trigonométricas, e também sendo empregados para cálculos astronômicos, estes bem enfatizados no livro *Directorium Generale Uranometricum* de sua autoria.

Cavalieri estendeu para estudos e investigações sobre seções cônicas, trigonometria, ótica, astronomia e astrologia. Correspondeu-se diversas vezes, por cartas e diálogos com muitos outros matemáticos da época, merecem mencionar: *Mersènne, Renieri, Rocca, Torricelli e Viviani*.

Umas das suas últimas edições foi o *Trattato della ruota planetaria perpetua* (1646), seu mais famoso discípulo foi *Stefano Degli Angeli* que supostamente tinha assim como ele ligação com o clero milanês. Em 1647 Cavalieri publicou a obra *Exercitationes Geometricae sex* com o desígnio de desobscurecer um dos seus postulados (o Princípio de Cavalieri), tornando esta uma grande fonte para matemáticos do século XVII, embora que na busca de se retratar, o sábio continuou sendo alvo de críticas.

No mesmo ano, 1647, após exaustivas publicações, a história faz menção do seu falecimento, sem causa definida, sendo seu sepultamento ancorado com condecorações religiosas em Bologna, em Estados Papais, Itália.

2.2 SÉCULO XVII: A TEORIA DOS INDIVISÍVEIS NA ABORDAGEM DE CAVALIERI E GALILEU

Questionamentos sobre o infinito afincam grandes discussões desde a antiguidade. Tentando compreender a matéria, o homem na sua curiosidade busca enxergar racionalmente as partes constituintes de um todo, suas divisões e subdivisões; ver a que ponto encerra o fracionamento de um objeto, buscando resultar numa parte que não se divide. Diante confronto filosófico-científico, expandiu-se a formulação de teorias que explicavam a natureza na sua extensão infinita. Vale salientar a teoria atomista[7].

Registros marcantes surgiram no século XVII, a incessante busca de compreender a natureza na infinidade, separação entre Filosofia e Teologia; liberdade de questionar sobre a bíblia, e os impulsos da filosofia em campos políticos nos mais variados regimes. Neste momento da História com ideais iluministas na alma científica, destacam-se grandes influências: Johannes Kepler, Galileu Galilei e Bonaventura Cavalieri. Nesses suscita uma parcial definição dos "indivisíveis", objeto de estudo dessa subseção.

Restringindo a discussão do infinito em tudo que se divide, o primeiro a expressar suas tímidas ideias, remete Johannes Kepler (1571-1630)[8], nele encontra os aspectos dos infinitésimos numa abordagem não tão distante do que se ver hoje no cálculo diferencial integral.

> A fim de calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário e os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho[9] (Stereometriadolorium, 1615), porém, utilizava os métodos que Arquimedes consideraria heurísticos e não utilizava o método de exaustão com o rigor que este requeria.

---

[7] A Teoria atômica havia sido proposta por filósofos, como Descartes, antes dela ter uma base experimental. Havia, desde os tempos antigos, duas hipóteses sobre a composição da matéria: ou ela seria formada por partículas que não poderiam ser mais divididas, ou não haveria nenhum limite à divisibilidade da matéria. (Alexander William Williamson *Chemistry, for students*; Clarendon Press, 1868, *Introduction* p.3)

[8] Howard Eves. *Introdução a história da Matemática* (Campinas: Ed. Unicamp, Campinas, 1995). p.424

[9] Ibid.422

Nessa perspectiva, Kepler considerava que o círculo era formado a partir de um polígono cujos lados se dividiam infinitamente, dando como dedução o limite ser uma circunferência. Com efeito, era possível obtermos a área do círculo planetário varrido por um raio R, enunciando a assim a segunda Lei de Kepler[10]. Ao que tange a obtenção da área, era determinada por uso da divisão de um polígono regular em triângulos, cuja base era o lado do dado polígono, assim ao realizar o semiproduto das bases pela altura (o próprio raio), resultaria numa boa aproximação para área circular. Nesses termos, quanto mais tendia a subdivisão dos lados melhor tornaria a área deste lugar geométrico, apesar de que o sábio utilizaria o cálculo de exaustão.

No mesmo século, surge uma nova abordagem sobre a teoria dos indivisíveis. Galileu Galilei apoiado no conceito da "roda de Aristóteles", onde o mesmo pregava que a divisão das partes de um objeto tinha seu limite, o indivisível. Concluindo aí seu conceito de infracionários. Em contraversão, o físico especulava que o contínuo na divisão aristotélica é formado por uma infinidade de indivisíveis, que lançando mãos sobre uma dada linha, enunciou que todo seu contínuo, sempre terá uma divisão em partes que por sua vez, permitem-se serem divididas indefinidamente. Nessa ótica não aristotélica, o contínuo formado por partes divisíveis chegariam a "indivisíveis", assim, todo o contínuo compunha-se de partes encerradas por divisão. Diante disso, promulgou Galileu: "a natureza possui uma infinidade de indivisíveis"[11].

Diante desse tratamento da matéria com os indivisíveis, Galileu não postulou em nenhuma de suas obras, seja de natureza física ou geométrica, pois a sua teoria era apenas manipulativa, não possuindo nenhum olhar criterioso, sendo essas as possibilidades de não ter promulgado. Outra, o mestre via que não era da capacidade humana a divisibilidade do que é muito pequeno, ficando seus estudos no âmbito das hipóteses.

Nesse entendimento, o seu discípulo, Cavalieri, expressou nitidamente que o infinito está ontologicamente dividido em absurdos, concluindo ser algo incompreensivo para nós.

Em 21 de junho de 1639, Cavalieri escreve a Galileu:

---

[10] A Segunda Lei de Kepler trata da velocidade com que um planeta orbita em torno do sol, relacionando as áreas com os períodos. Questões analíticas a parte, Kepler enunciou a lei das áreas:

[11] Carl B. Boyer, *História da Matemática*. (São Paulo: Edgard Blücher, 1974), 226.

> Pode-se dizer que com a proteção da boa geometria e graças a vosso elevadíssimo espírito que ultrapassa as montanhas, vós pudestes navegar com sucesso através do imenso oceano dos indivisíveis, dos vazios, de infinito, de luz e de mil outras coisas tão rudes ou tão distantes, que cada uma delas seria suficiente para fazer naufragar mesmo o maior espírito. Como o mundo vos será devedor por haverdes aplainado a estrada para coisas tão novas e tão delicadas... Quanto a mim, não vos ficarei pouco obrigado, pois os indivisíveis de minha Geometria encontrar-se-ão indivisivelmente ilustrados pela nobreza e a clareza de vossos indivisíveis[12].

Neste escrito, o padre Cavalieri deduz uma preocupação em dar clareza ao estudo dos indivisíveis, denotando simultaneamente, o estudo num cunho geométrico organizado, que será transparecido posteriormente em uma das suas obras, cuja gênese parte da concepção da indivisibilidade do seu mestre.

Não se limitando a especulações sobre os indivisíveis, o padre descreve o seu conceito diante de uma geometria com precisão algébrica razoável, onde no seu corpo, prenuncia à integração das partes. Entretanto, mesmo num olhar mais criterioso a cerca do estudo, Bonaventura demonstrou certa insatisfação ao que diz respeito a conjuntura da época sobre os "últimos quocientes".

. Não conseguindo convencer, o clérigo na mesma carta enviada em 21 de junho de 1639 desnorteia, parcialmente, as concepções da indivisibilidade dos entes naturais, até então discutidos.

> Quanto a mim, não me arrisquei a dizer que o contínuo seja composto por indivisíveis, mas mostrei que a proporção existente entre os contínuos não difere da existente entre os amontoados de indivisíveis (desde que sejam tomados paralelos, quando falamos de linhas retas e de superfícies planas, as quais são os indivisíveis particulares que considerei)[13].

Visto a minuciosidade na análise do sábio, o mesmo estabelece uma diferença entre a sua teoria a de Galileu, buscando uma sistematização e postulando. Neste propósito, a sua teoria não se limita a obtenção imediata de resultados, mais também como subsídio para comprovação de teoremas. Logo, o aluno reconheceu a sabedoria do seu mestre, porém, não reproduziu seu posicionamento acerca da temática.

---

[12] Galileu Galilei, *Opere*, apud François De Gandt, "Nascimento e Metamorfose de uma Teoria Matemática: A Geometria dos Indivisíveis na Itália (Galileo, Cavalieri, Torricelli)". *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* (1986), 37.

[13] Ibid.

2.3 A GEOMETRIA DOS INDIVISÍVEIS

Com uma metodologia sistematizada e apoiada com os alicerces dos indivisíveis, manuseado por Galileu, Francesco Cavalieri elabora em 1635 sua geometria, *Geometria Indivibilibus Continuorum Nova,* sendo esta intitulada a sua obra mais conhecida e discutida até hoje.

Neste livro, o padre milanês revela que se valeu das ideias de Johannes Kepler (*Stereometria dolorium*, 1615), onde foram desenvolvidos os estudos sobre logaritmos, óptica e quantidades infinitamente pequenas.

Kepler no estudo dos volumes (volumes dos barris de vinho) permeou o campo dos indivisíveis, onde o qual existe a possibilidade de Cavalieri ter conhecimento o trabalho do mesmo para estruturação da sua teoria. Entretanto, no prefácio do seu tratado geométrico, Cavalieri esclarece que tomou conhecimento das contribuições de Kepler após ter consolidado sua teoria.

Mesmo com a desconfiança, a obra de Bonaventura transmitiu originalidade, pois nela se encontra um desprezo a constituição do contínuo e dá ênfase a relação proporcional entre o contínuo e os átomos da grandeza envolvida. Nesses termos, a proporção entre o conjunto de indivisíveis pode se transmitir às grandezas contínuas que encerram esses polêmicos indivisíveis.

Na sua geometria, o intelectual usava o termo “indivisível”. Para ele, tal teoria servia apenas de raciocínio para sua, pois o mesmo atribuiu, analogicamente, a algo mais puro e com maior rigor de compreensão. Dessa forma, o termo era visto como uma linha reta e uma superfície plana, estes eram os indivisíveis utilizados nas demonstrações de Cavalieri.

Assim, ao se pensar em uma área, subjaz que seja formada por segmentos, nesse olhar, o tratamento também foi estendido para as figuras tridimensionais, a fim de resultar volumes. Com a necessidade de clarificar, pode-se exemplificar, da seguinte maneira: duas ou mais figuras planas têm a mesma área se estão entre os mesmos segmentos paralelos e se qualquer linha reta paralela a estas figuras planas cortam-nas tais figuras em segmentos iguais.

Diante dos seus indivisíveis, Cavalieri defendia que uma linha é um conjunto infinito de pontos; uma superfície um conjunto infinito de linhas equidistantes, e para o volume, uma infinidade de planos. Nesse entendimento, Cavalieri sai da linha intrínseca do indivisível e preocupa-se com algo mais externo do estudo, podendo obter equivalência de grandezas na sua geometria. Nessa lógica, era suficiente e necessário para determinar uma área, por exemplo, bastava somente saber quantas linhas compunha a outra superfície em comparação.

Nessa compreensão imediata, onde áreas podem ser obtidas entre linha paralelas que seccionam figuras, chegando a áreas equivalentes, o mestre não hesitou para obtenção de volumes nos sólidos. Desta maneira, pode-se resumir sua geometria em dois conceitos básicos:

1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.

2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos, secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

Mediante essa dimensão, para saber áreas e volumes, é simplesmente obter para aquela, a razão entre os agregados[14] das linhas que cortam as porções planas (contínuo); e no plano tridimensional, é salutar ter-se planos que interceptam os sólidos em paridade, sendo que o mesmo seja paralelo a um dado precedentemente, assim se as secções planas descrever áreas iguais implica-se em volumes iguais. Assim Boyer (1974, p.101) ressalta: “Ele considerou uma região plana como sendo a união de linhas paralelas a uma reta dada e uma região sólida como uma união de secções planas paralelas a um plano fixado”.

Todavia, em meio a essa conclusão imediatista, suscitou críticas, pois para alguns o mestre não deu uma coerência adequada. Nesse contexto, na obra *Introdução à História da Matemática,* o autor Howard Eves denomina o tratado de Bonaventura Cavalieri de “prolixo” e “com pouca clareza”, e afirma que é deturpado saber o que ele entendia por indivisível, já que sua obra parte somente da visão proporcional unitária. Porém, no artigo de François de Gandt, a teoria Bonaventura Cavalieri é mencionada como rigorosa, mas não afirmou obscuridade existente. Entretanto, a tensão entre os autores mostra que o método dos

[14] Os agregados estabelecidos por Cavalieri são grandezas que têm uma proporção entre si. Os agregados de linhas de uma determinada figura não é infinito, de modo absoluto, mas apenas infinito sob um certo aspecto. Assim sendo, a infinidade está no interior do contorno da figura limitada. Como as figuras são comparáveis, também são comparáveis os agregados, pois os planos como indivisíveis são formados pelas mesmas.

indivisíveis é incompreensível para comunidade científica e exige mais debruçamento sobre o estudo e investigação.

O método usado por Cavalieri foi bastante hostilizado para época, por não apresentar maior rigorosidade matemática, esta falta está relacionada ao texto esparso da sua obra, o qual sai da essência do estudo, contrariando o rigor que seu mestre empregava, Galileu. No entanto, por bastante criticado, Bonaventura responde as duras críticas em sua obra *Exercitationes Geometricae sex*, onde buscou dá uma explicação mais coerente.

François de Gandt [15]afirma que a filosofia, à primeira vista, aparece como uma barreira ao estudo dos indivisíveis de Cavalieri e que o matemático se esquivou da discussão afirmando: “Minha teoria é válida, quer componhais o contínuo por pontos, quer recuseis esse tipo de composição.” Não incomodado, é tão pouco enxergando um pecado, o padre matemático bania a Filosofia para atender seus resultados inconsistentes.

Visto que não diluía opiniões ostensivas, foi estabelecido um postulado de equiparidade de grandezas, como área e volumes, onde o trato infinitesimal passa a ser abordado em corpos finitos numa demonstração infinita do contínuo, pré-julgado por Bonaventura - O Princípio de Cavalieri.

2.4 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI COMO CONSEQUÊNCIA DOS INDIVISÍVEIS: O ESPLENDOR DO CÁLCULO INTEGRAL

Apático à filosofia inerente do que é “o indivisível” na concepção dos seus antecessores, o mestre milanês elabora um postulado no seu tratado geométrico, que o indivisível é apenas um elemento metafísico, servindo tão somente como epicentro para sua teoria de comparação de grandezas. Assim, o mesmo configura a soma dos indivisíveis por meio de um método que relaciona áreas e volumes de figuras, denotando uma proporcionalidade nas grandezas na relação. Vale mencionar que Cavalieri caracterizou os elementos infinitesimais como a decomposição de planos para sólidos.

Ciente da dificuldade de realizar a soma dos indivisíveis adotada por ele, o mesmo promulgou que seu método vinculava-se apenas em obter variáveis (grandezas) onde os indivisíveis segue uma razão constante entre as figuras, delineando assim, para áreas e volumes. Este aspecto também é comentado por Boyer (2013), realça: O milanês Bonaventura

[15] François De Gandt, “Nascimento e Metamorfose de uma Teoria Matemática: A Geometria dos Indivisíveis na Itália (Galileu, Cavalieri, Torricelli)”. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* (1986), 37.

Cavalieri (1598-1647), discípulo de Galileu, foi também professor de matemática em Bolonha e desenvolveu um método para operar com indivisíveis no cálculo de áreas e volumes na sua concepção, não seguindo nenhum critério filosófico para o olhar dos seus contemporâneos.

Perante a matemática contemporânea, o olhar dado aos indivisíveis é resumido numa integração de partes infinitas. Portanto, quando Cavalieri por via de seu método, efetuou o cálculo da quadratura de $y = x^n$, com n inteiro e $n \neq -1$, o mesmo resultado evidencia hoje numa linguagem mais "encorpada" pelo cálculo diferencial integral na forma iterada.

A despeito disso, as porções mencionadas são decomposições em retângulos infinitesimais, onde A = $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ai$. (áreas de uma superfície por soma de Rieman).

$$\int_0^a x^n\, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Ao referir-se a tal assunto, eclode a produção das integrações vista no cálculo diferencial por uso das funções reais contínuas. Neste critério, emerge a necessidade de comprovação matemática por meio de teoremas que subsistem no cálculo de áreas e volumes enunciado na postulação de Francesco Bonaventura- O Princípio de Cavalieri.

2.4.1 O PRINCÍPIO COMO TEOREMA DE ÁREAS

Suponha-se um plano num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais *Oxy*, e seja *R* a região delimitada por $y = 0$, $y = b > 0$ e pelos gráficos das funções reais contínuas $x_1 = f_1(y)$ e $x_2 = f_2(y)$, $0 \leq y \leq b$, com $f_1(y) \leq f_2(y)$ para todo *y*. Seja *S* a região plana delimitada por $y = 0$, $y = b$ e pelos gráficos das funções contínuas $x_1 = g_1(y)$ e $x_2 = g_2(y)$, $0 \leq y \leq b$, com $g_1(y) \leq g_2(y)$ para todo *y*. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $f_2(y) - f_1(y) = k\,[g_2(y) - g_1(y)]$ para todo *y*. Então $a(R) = k\, a(S)$, com efeito, tem-se a proporcionalidade em áreas.

Demonstração pelo processo de integração das funções contínuas:

$$a(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} dxdy = \int_0^b \left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} dx\right] dy = \int_0^b [f_2(y) - f_1(y)]\, dy =$$

$$= \int_0^b k\,[g_2(y) - g_1(y)]\, dy = k \int_0^b [g_2(y) - g_1(y)]\, dy = \cdots = ka(\mathcal{S})$$

(c.q.d)

2.4.2 O PRINCÍPIO COMO TEOREMA DE VOLUMES

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas *Oxyz*, e seja P um sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x; z)$ e $x = g(y; z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja Pt a interseção de P com o plano $z = t$. Seja Q outro sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x; z)$ e $x = g(y; z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja Qt a interseção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $a(Pt) = ka(Qt)$ para todo t. Então $v(P) = kv(Q)$.

Por integração, temos:

$$v(\mathcal{P}) = \iiint_{\mathcal{P}} dxdydz = \int_0^c \left[\iint_{\mathcal{P}_z} dxdy \right] dz = \int_0^c a(\mathcal{P}_z)dz =$$

$$= \int_0^c ka(\mathcal{Q}_z)dz = k\int_0^c a(\mathcal{Q}_z)dz = \cdots = kv(\mathcal{Q})$$

(c.q.d).

O uso da integração tripla iterada descreve a proporcionalidade entre porções limitadas, muito embora que seja de grande utilidade, o que se discute é o postulado de Cavalieri na atmosfera escolar.

3. GEOMETRIA ESPACIAL: O PRINCÍPIO DE CAVALIERI NO ENSINO MÉDIO

Esta parte do trabalho terá como base o estudo do Princípio de Cavalieri num apanhado didático que mostra, simultaneamente, a paridade dos sólidos e discute até que ponto há relevância no postulado do padre milanês, para que não haja confusão, a pesquisa sempre se reportará ao postulado, integrado ao cálculo de volumes de sólidos geométricos. Entendido o propósito, o trabalho estender-se-á para uma análise documental, onde será visto a sua disposição ao que diz respeito ao postulado nos textos didáticos de algumas literaturas matemáticas, denunciando nesse âmbito, o equívoco gerado de tal teoria em livros didáticos que, diga-se de passagem, são aceitos sem nenhuma discussão pelos educandos, sendo exposto aos mesmos por via de fórmulas-aplicáveis, em detrimento ao tratamento geométrico, banido no estudo deste Princípio tão utilizado no estudo da Geometria espacial no campo da matemática elementar de nível médio.

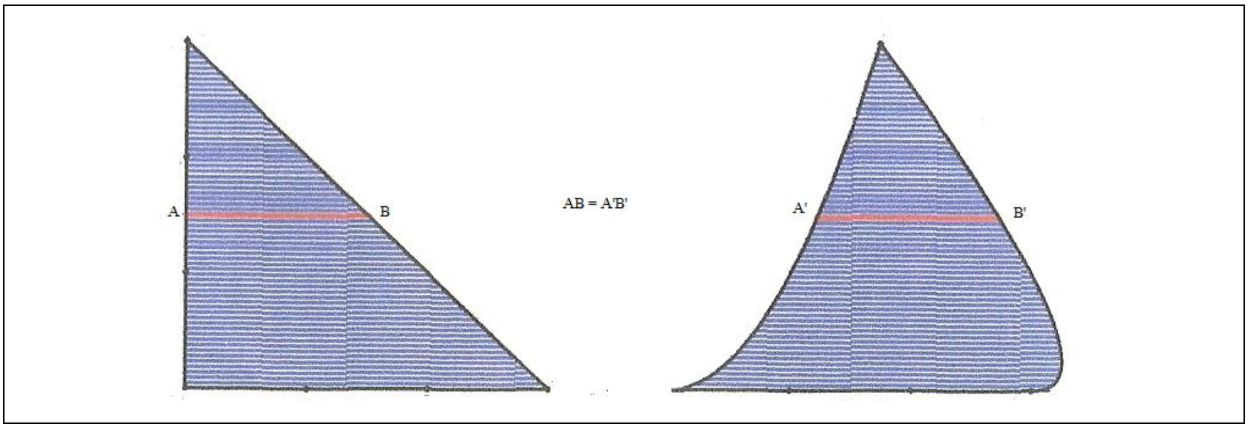
3.1 OS PRINCÍPIOS DE CAVALIERI NUMA PERSPECTIVA DIDÁTICA

O cálculo de áreas e volumes está bastante presente no cotidiano, desde os simples cálculos obtidos no estudo de áreas para superfícies de terrenos até obtenção de volumes e capacidades cúbicas em recipientes, sendo estes obtidos por algoritmos pré-definidos. Nessa perspectiva, a fim de resultar volumes e áreas de corpos de fronteiras geométricas mais complexas, a Matemática moderna lança mãos numa paridade de sólidos obtida nos viés do Princípio de Cavalieri, temática de grande destaque no estudo da Geometria Espacial. Mediante a esse postulado, a sua operalização algebrista é direta e dá ênfase a poucos critérios para comparação entre sólidos, fazendo com que o seu tratamento didático no ensino médio não seja questionador, discorrendo tão somente a mecanização.

No estudo da Geometria espacial, conteúdo executado 2ª série do ensino médio, o cálculo de áreas e volumes tem como base os Princípios de Cavalieri, onde tal postulado versa que é suficiente ter-se uma razão constante entre o comprimento dos segmentos que cruzam duas regiões planas, acarretando proporcionalidade nas áreas dessas porções; e para sólidos, a obtenção de razões constantes se dá nas áreas das secções que cortam os sólidos, mediante um paralelismo a outro plano dado, implicando assim, uma relação proporcional entre volumes nestes. O que pode ser mais bem explicado diante de uma linguagem demonstrativa:

Princípio de Cavalieri para áreas: Dadas R (à esquerda) e *S* (à direita) regiões limitadas de um plano, e seja *r* uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta *s* paralela a *r*, as interseções de R e S com *s* sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante em toda extensão das porções relacionadas. Então a razão entre as áreas de R e S é essa mesma constante, na proposição válida que sempre as regiões esboçam segmentos paralelos, Figura 2.

Figura 2: Representação de regiões com mesmas áreas

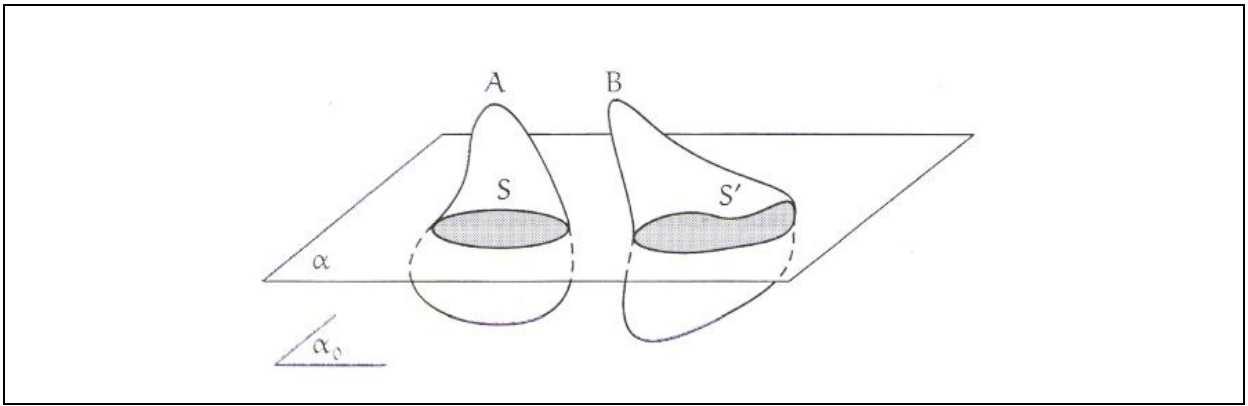


Fonte: GARAVELLO, G. P. **Cálculo de volumes pelo Princípio de Cavalieri.** 2013. 41f. Dissertação (mestrado profissional em matemática-PROFMAT), Universidade Federal do ABC, São Paulo, 2013, p.4.

Mediante o esboço acima, os segmentos preenchem ambos os contornos, caracterizando a proporcionalidade entre áreas. Com efeito, se AB = A'B', delineando a igualdade entre áreas, isto é, R = S, cujo fator de proporcionalidade é 1. Neste mesmo raciocínio, caso tenha AB ≠ A'B', implica na proporcionalidade, R = *k* S; 0 ≠ k >1, onde k é o coeficiente de proporcionalidade nessa relação direta.

Princípio de Cavalieri para volumes: Sejam A e B sólidos limitados, e seja α_o um plano. Considere que, para todo plano α paralelo a α_o, as interseções de A e B com α sejam vazias ou regiões tais que a razão entre suas áreas é constante. Então a razão entre os volumes de A e B relaciona-se potencialmente a essa mesma constante. Com efeito, se $S = S'$ e alturas iguais (distância entre α e α_o), então $V_{A=} V_B$, sendo esta a condição suficiente e necessária, como mostra a Figura 3 a seguir.

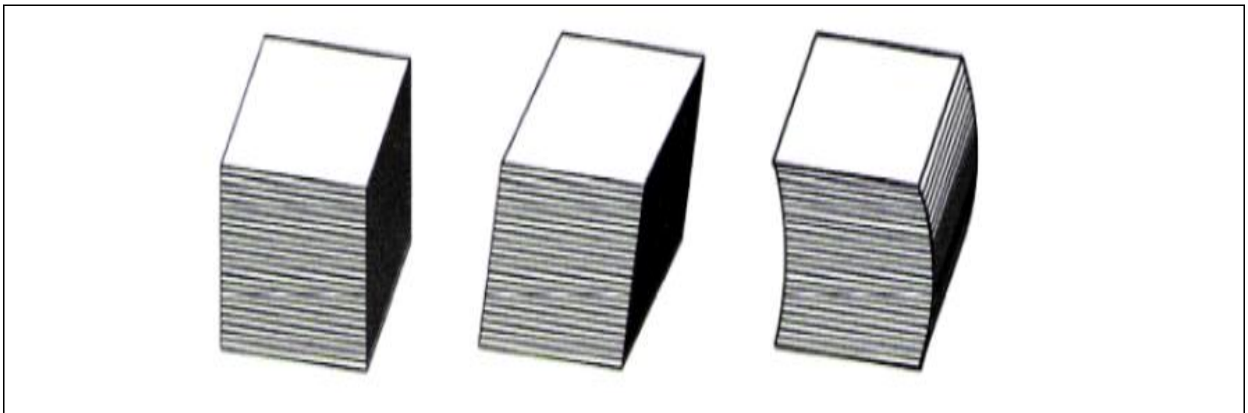
Figura 3: Representação comparativa de sólidos geométricos



Fonte: GARAVELLO, G. P. **Cálculo de volumes pelo Princípio de Cavalieri.** 2013. 41f. Dissertação (mestrado profissional em matemática-PROFMAT), Universidade Federal do ABC, São Paulo, 2013, p.3.

Partindo de um olhar mais compreensível, a comparação acima pode ser melhor explicada com o uso de um sólido com contornos laterais mais comuns, estabelecendo neste, cortes de fatias delgadas horizontalmente dispostas por justaposição, objetivando nessa estruturação geométrica, correspondência isocórica[16]. Assim sendo, ver Figura 4:

Figura 4: Representação de sólidos com o mesmo volume



Fonte: GARAVELLO, G. P. **Cálculo de volumes pelo Princípio de Cavalieri.** 2013. 41f. Dissertação (mestrado profissional em matemática-PROFMAT), Universidade Federal do ABC, São Paulo, 2013, p.3.

Notavelmente os arranjos acima descrevem mesmo volumes, pois é perceptível que as x fatias que se apresentam em cada arranjo discorrem em sólidos com a mesma altura. Dessa forma, as fatias justapõem-se em mesma quantidade, o que torna

[16] A palavra isocórica vem da junção de dois termos gregos: *isso,* que significa “igual”, e *coros,* que é “volume”, ou seja, é uma transformação em que o volume permanece igual ou constante. FOGAÇA, Jennifer Rocha Vargas. "Transformação Isocórica"; *Brasil Escola*. Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/quimica/transformacao-isocorica.htm>.

evidente a equivalência geométrica. Partindo dessa noção intuitiva, a teoria de Cavalieri expande para outras paridades no estudo da Geometria Espacial tratada no ciclo básico (ensino fundamental e médio).

Com a noção apanhada nas proporcionalidades unitária de áreas e volumes, a conjuntura comparativa de Bonaventura, dá margem que sólidos aleatórios que denotam áreas e alturas congruentes entre os corpos em comparação, respectivamente, permanecem volumetricamente iguais.

Diante dessa visão esparsa, enunciada pelo mestre milanês, o estudo da geometria espacial abre seção para inclusão do Princípio de Cavalieri nos textos didáticos do ensino médio, sendo este apresentado sem nenhuma discussão e com uma transposição aceitável pelo alunado. Diante disso, o que se infere é que poucos aprendem o postulado geometricamente, limitando-se ao estudo, apenas por via algebrista.

Em detrimento a vertente geométrica, o teorema se constitui tão somente em sentenças que se relacionam por uso de uma igualdade de razões, ficando obsoletas as discussões que se guardam subjacentemente ao estudo, pois sem nenhum questionamento e ao mesmo tempo pela facilidade de operá-lo, o teorema de Cavalieri, evidencia uma popular aceitação até os dias de hoje nos ambientes escolares.

Todavia, esta noção é suplantada sem nenhum questionamento e sem nenhum encadeamento lógico precedente para que venha resultar na postulação de Cavalieri. Nessa linha, as proporções que surgem entre as grandezas áreas e volumes só são possíveis constatarem por meio do uso do cálculo integral, conforme mencionado, ferramenta que não pertencia aos matemáticos do século XVII.

Perante a essa postura limitada, uma análise documental será lançada sobre os livros didáticos em que é pregado o Princípio de Cavalieri no âmbito do estudo da geometria tridimensional (conteúdo abordado na 2º série do ensino médio). Vale mencionar que a menção empregada aqui será a definição que o princípio afirma nas literaturas didáticas matemáticas e o comparativo que se esboça entre os corpos, dando assim, um prognóstico sobre a temática expressa no processo de ensino e aprendizagem.

A fim de não remeter a sentenças complexas de integração (cálculo diferencial integral), o Princípio de Cavalieri trabalhado nos textos didáticos é exposto sem nenhuma demonstração a fim de evitar dificuldades. Dessa forma, a sua conceituação, restringe-se tão somente a uma proporcionalidade entre grandezas das porções limitadas, desenvolvida precipitadamente pelo próprio Cavalieri a partir da concepção dos indivisíveis.

3.2 A RELEVÂNCIA DA GEOMETRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Convicto da pouca ênfase que se dá a Geometria, o estudo de alguns temas torna-se pouco claro; incompreensíveis diante do arraigamento à fórmulas-aplicáveis e distanciado de uma integração conceitual que poderia favorecer a totalidade de uma dada compreensão matemática. Consequentemente, o aspecto geométrico é visto com pouco ou razoável merecimento no processo de ensino e aprendizagem na componente curricular matemática.

Em contrapartida, o ensino da geometria aguça a percepção do alunado, as formas transparecem mais compreensão, denota um campo mais harmonioso e fértil da Matemática, onde é possível integrar todos os entes geométricos que se revelam no ensino ao meio circundante do discente, suscitando dessa forma, a curiosidade e estímulo para compreendê-lo.

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. (BRASIL, 1997, p.39).

Conforme apoiado o seu uso, a geometria perfaz caminhos cognitivos que desperta habilidades, muitas vezes guardadas no aluno por não ser instigadas, além de clarear abordagens apenas algebristas ou aritméticas. Nessa perspectiva, Lorenzato (1995, p.7) realça: “conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz”.

Portanto, é notório que a geometria é um campo que fomenta os educandos, pois sempre é possível encontrar a sua presença no cotidiano, e nele relacionar a geometria escolar ofertada. Nesse âmbito, torna–se preciso uma abordagem singular no cenário escolar, onde possa integrar o conhecimento matemático-geométrico ao meio perene dos alunos, valorizando assim, as formas no geral e substanciando “definições apenas algebristas”. Com propriedade no contexto, Lorenzato (2006, p.59) faz menção: “Por mais conhecimentos sobre outras partes da matemática que alguém possua, eles não serão suficientes para resolver questões que demandem percepção e raciocínio geométrico”.

Nesse critério, enxerga-se que a vertente geométrica necessita está imbricada a outros campos do saber matemático, onde a complementariedade totaliza um olhar perceptivo, sensível; indutor daquilo que se estuda, seja algebrista ou aritmeticamente, para uma dimensão lógica-visual e integrada, favorecendo resolução de problemas e conceituações que se expressam muitas vezes sem entes geométricos.

Carecendo da sua relevância no ambiente escolar, a Geometria numa linhagem epistemológica[17], relacionava-se, expressivamente, a outros campos da Matemática (aritmética e álgebra), onde consoantes ligações aproximavam de um entendimento mais palpável do que abstrato.

> Visto que a matemática antiga foi, frequentemente, desenvolvida de forma concreta, é, geralmente, fácil usar seus conceitos em conjunção com materiais concretos em sala de aula. Os resultados são atividades empolgantes que proporcionam exercícios de fixação não rotineiros, bem como atividades que promovam o desenvolvimento do pensamento crítico e as habilidades metacognitivas. (FOSSA, 2006, p.182).

Em suma, a importância dos caminhos geométricos no estudo de temáticas no ensino da matemática além de ser defendida por documentos e teóricos no assunto, é consensual admitir a relevância dos mesmos no desvencilhamento de objetos de estudo, que por vez mostram-se prolixos no espaço escolar, não sendo capaz de motivar a criticidade existente no conhecimento matemático. Com o propósito de dá relevo a Geometria no cenário pedagógico, Lorenzato (2006) defende que todos os campos da matemática previstos no currículo da Educação Básica devem ser ensinados e de forma integrada.

Nessa perspectiva, suscita alguns questionamentos que eclodem na vivência escolar, onde evidencia um olhar criterioso a fim de preencher lacunas abertas, que diante de uma dada abordagem deixam-se de lado questionamentos minuciosos que há no conhecimento matemático, e restritamente ao estudo da geometria. Em contraposição, haja vista a importância do processo integral da aprendizagem no contexto, fala-se em campo conceitual numa perspectiva interativa para o conhecimento numa criticidade genérica.

> A idéia de campo conceitual (G. Vergnaud) insiste no fato de que o conhecimento deve ser desmembrado não em áreas focalizadas, mas ao contrário, em áreas bastante amplas, correspondendo uma a um 'espaço de situações-problemas cujo tratamento implica conceitos e procedimentos em estreitas conexões'. (citado por ASTOLFI e DELEVAY, 2008, p.71).

[17] A epistemologia estuda a origem, a estrutura, os métodos e a validade do conhecimento, e também é conhecida como teoria do conhecimento e relaciona-se com a metafísica, a lógica e a filosofia da ciência. É uma das principais áreas da filosofia, compreende a possibilidade do conhecimento, ou seja, se é possível o ser humano alcançar o conhecimento total e genuíno, e da origem do conhecimento. (https://www.significados.com.br/epistemologia)

Ao que diz respeito ao ato de ensinar matemática com seus ramos distanciados um do outro, torna-se impossível estabelecer uma visão de conceitos. Portanto, é viável que se valorize a unidade do conhecimento matemático para formação do campo conceitual defendido por Gérard Vergnaud[18].

Com o propósito de transparecer uma plausível transposição didática[19], este texto limitar-se-á ao campo tridimensional do seu desenvolvimento geométrico. Nesse entendimento, tratar-se-á de sólidos geométricos (poliedros e corpos redondos), bem denotados por um dos alicerces da geometria, a geometria espacial ao que se vincula a sentença de Cavalieri.

Assim sendo, este trabalho se voltará para o Princípio de Cavalieri nessa perspectiva de valorização geométrica, questionando algumas comparações dos sólidos na visão de Cavalieri. Nesses termos, todos os contornos e fronteiras dos mesmos são levados em pauta para conceituação deste postulado tão popular no tratamento didático da geometria.

3.3 PRINCÍPIO CAVALIERI: UMA DISCUSSÃO GEOMÉTRICA PARA VOLUMES DAS PORÇÕES TRIDIMENSIONAIS

Visto que o aspecto geométrico é secundário no estudo do postulado de Cavalieri, suscita nesse âmbito a discussão que deveria ser levada em conta no processo de ensino e aprendizagem do teorema: as fronteiras laterais dos sólidos geométricos. Despercebidamente, o Princípio de Cavalieri emprega uma linguagem que transparece uma autonomia para a comparação de porções tridimensionais limitadas quaisquer, denunciando simultaneamente, um questionamento polêmico na Geometria tradicional.

Todavia, é salutar mencionar que há possibilidade que a paridade entre as porções limitadas em comparação sejam aceitáveis, porém ao mesmo tempo, a visão do princípio estende-se ao contínuo o contraria o seu ensino nas na ótica da Matemática Elementar. Ficando esta atrelada às igualdades entre bases e alturas, respectivamente, desprezando a visão extensiva do contínuo (toda porção tridimensional).

---

[18] A idéia de campo conceitual (G. Vergnaud) insiste no fato de que o conhecimento deve ser desmembrado não em áreas focalizadas, mas ao contrário, em áreas bastante amplas, correspondendo uma a um 'espaço de situações-problemas cujo tratamento implica conceitos e procedimentos em estreitas conexões'. (citado por ASTOLFI e DELEVAY, 2008, p.71).

[19] Instrumento através do qual se transforma o conhecimento científico em conhecimento escolar, para que possa ser ensinado pelos professores e aprendido pelos alunos. MENEZES, Ebenezer Takuno de; SANTOS, Thais Helena dos. Verbete transposição didática. *Dicionário Interativo da Educação Brasileira - Educabrasil*. São Paulo: Midiamix, 2001. Disponível em: <http://www.educabrasil.com.br/transposicao-didatica/>.

A geometria espacial, ramo que trata as peculiaridades das figuras tridimensionais (áreas, volumes, capacidades), é ofertada no ensino médio como uma componente que se vincula a fórmulas eficazes para obtenções de grandezas inerentes. Assim sendo, deixam-se de lado os contornos e formas, termos de grande relevância para o estudo, e dá-se espaço ao caráter algebrista que comumente vem sendo executado nas aulas de geometria no espaço.

Entretanto, quando se lança um olhar às fronteiras dos sólidos, é possível estabelecer comparações entre sólidos, caracterizando algumas igualdades imediatas, onde quais necessitam de uma ótica mais perspicaz para semelhante conceituação. Nesse contexto, a essa igualdade algébrica ditada no ensino, é estabelecida por meio do Princípio de Cavalieri, o qual prega uma definição simples à qual incomoda visualmente: áreas de bases iguais e alturas iguais implicam em volumes iguais ($V_1 = V_2$). Nesses termos, se desperta um olhar mais intrínseco sobre tal formulação promulgada pelo clérigo-matemático italiano.

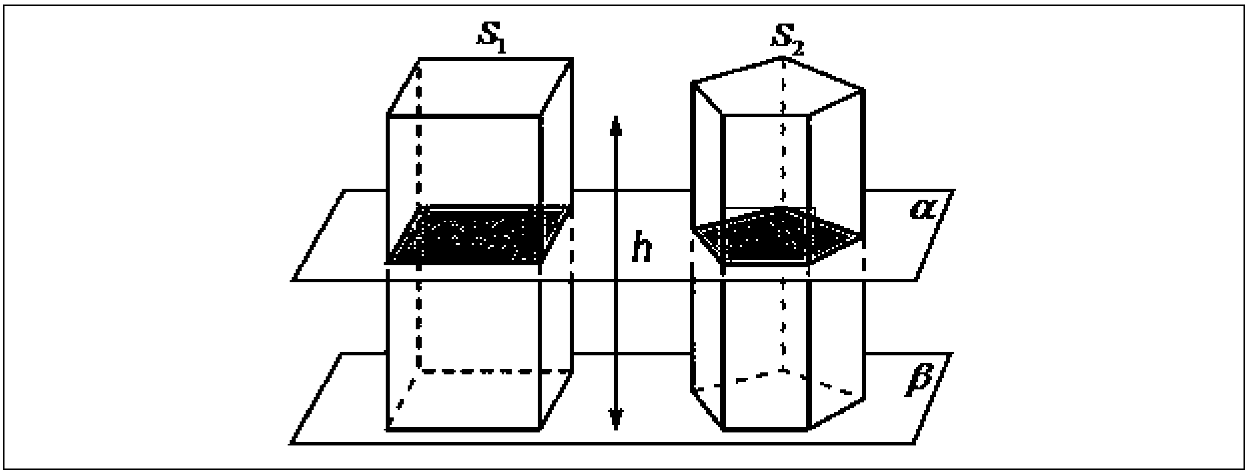
Nessa perspectiva, suscitam alguns questionamentos que eclodem na vivência escolar, onde estes buscam preencher lacunas abertas, que diante do ensino deixam-se de lado questionamentos minuciosos que há no conhecimento matemático, e restritamente ao estudo da geometria.

Na insistência de um olhar didático com mais detalhes, este projeto destacará o estudo da Geometria Espacial associado ao Princípio de Cavalieri, onde discussões pertinentes emergem na linha do seu ensino, fazendo-se preciso uma abordagem cautelosa, a fim de clarificar a confusão que existe na postulação de tal princípio que se enuncia em algumas literaturas didáticas.

Diante disso, as proporções estabelecidas entre grandezas (áreas e alturas) não configuram erros no seu campo de resolução (aritmo-algébrico), mas há denúncia geométrica que aparece no processo de algumas comparações, pejorativamente. No entanto, vale frisar que embora que as paridades deixem aspectos geométricos obsoletos no seu tratamento, também se espelham em algumas comparações a possibilidade real para tal, mesmo dando pouco relevo a esses aspectos.

Nessa postura, onde o acaso pode ter sentido, a relação entre as porções finitas discorre comparativos plausíveis ou não. Com efeito, o que deve ser visto concomitantemente para a validação geométrica do princípio de Cavalieri, além de cálculos imediatistas, é saber em qual momento tem-se um bom diálogo com a geometria. Nesse propósito a Figura 5:

Figura 5: Representação do Princípio de Cavalieri usado entre prismas

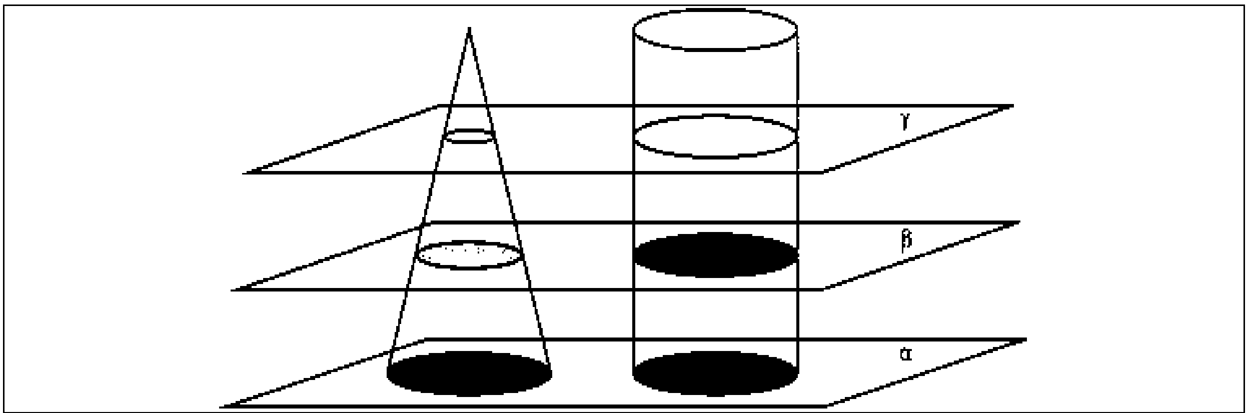


Fonte: https://www.google.com.br/search? q=imagens+de+bonaventura+cavalieri&cliente

Diante dessa ilustração, mostrada pela Figura-5 é possível a legitimidade do teorema, pois podemos obter áreas equivalentes para os polígonos seccionados, acarretando igualdade volumétrica. Mas será que a validação é geral? Será que o postulado de Cavalieri atende todas as comparações? Ainda em indagação, é possível a uma igualdade entre as superfícies das bases, porém a extensão lateral valida a igualdade volumétrica?

Nesses termos, veem-se em textos didáticos, enunciação genérica para qualquer par de sólidos, porém, em meio a uma análise mais criteriosa não é possível ter-se o postulado em casos gerais, pois demonstra fraturas por meio das formas tridimensionais em comparativo. Questionando a falta de averiguação geométrica, ver-se em alguns sólidos que suas arestas não seguem paralelismo algum, seja de arestas com arestas ou de arestas com geratrizes de corpos redondos. Ver Figura 6.

Figura 6: Comparação entre corpos redondos: cone e cilindro



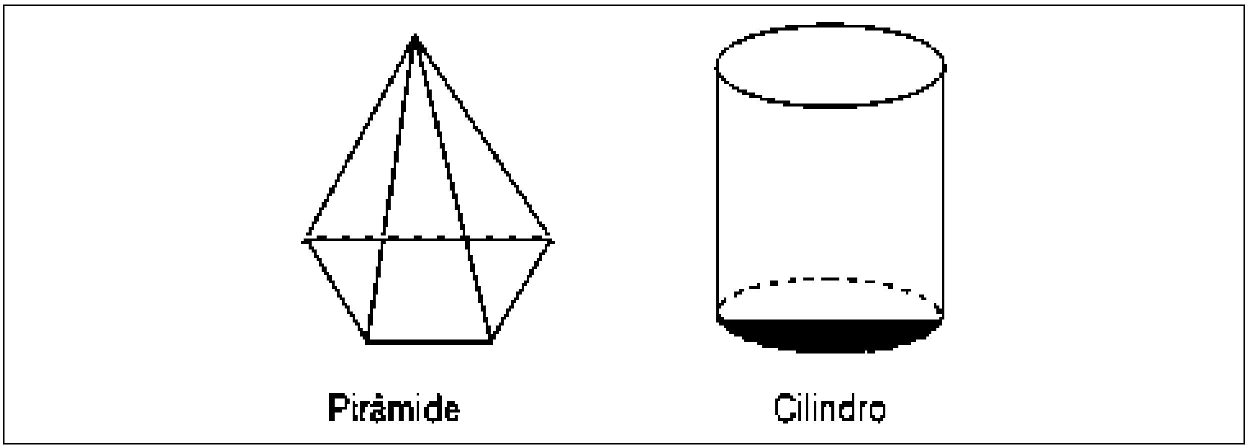
Fonte: https://www.google.com.br/search? q=imagens+de+bonaventura+cavalieri&client

É notória a possibilidade das bases possuírem áreas iguais em cada secção transversal, entretanto, as secantes dos corpos aos planos α, β e γ não são ambas perpendiculares aos planos paralelos (α // β // γ), demonstrando o não paralelismo das geratrizes dos sólidos acima. Dessa forma, o Princípio de Cavalieri se equivoca em sua conceituação, pois os contornos laterais não são os mesmos, dando assim permissão para uma desigualdade de volumes.

Numa perspectiva mais didático-metodológica, a acareação vista na figura-6, permite que caiba com folga o cone no cilindro, justapondo as bases congruentes inferiores e com mesmas alturas, os corpos redondos em relação não propícia a mesma capacidade, pois ao preencher ambos com fluidos, difere veementemente as quantidades utilizadas, deduzindo nesse experimento, uma desconfiguração volumétrica contrastante com o fito da definição comparativa de Cavalieri.

Presume-se que Bonaventura não tenha exaltado os critérios que a geometria oferece para sua conceituação, sendo esta direta e passível de restrição ao que diz respeito ao uso do postulado que se permeia nas literaturas didáticas. Ainda na mesma intenção, onde se compara sólidos quaisquer (sejam poliedros com corpos redondos ou corpos redondos com redondos), tem-se uma pirâmide regular reta hexagonal com um cilindro reto em relação, como mostra Figura 7.

Figura 7: Representação comparativa entre pirâmide e cilindro



Fontehttps://www.google.com.br/search? q=imagens+de+bonaventura+cavalieri&cliente

Nesta figuração (Figura-7), embora que se permita que as áreas das bases expressem mesmo aferimento, o poliedro (pirâmide) e o corpo redondo (cilindro) contrastam nos contornos laterais, sendo evidente que não há paralelismo das arestas daquele com a geratriz deste em relação ao plano α arbitrário. Nessa ótica, temos que o postulado torna-se fracassado numa concepção nivelar, pois não obterá o que se enuncia no princípio em discussão, não logrando assim, sucesso para a efetiva equivalência que é comumente efetuada nos livros didáticos.

Em meio à discussão acentuada que se estampa nesse trabalho, faz-se precoce ter uma discrição mais conceitual para uma adequada aplicação do Princípio de Cavalieri, denotando em que momento admite-se emparelhar as porções sólidas. Na tentativa de estabelecer um raciocínio que ombreie os corpos em estudo por uso do postulado em questão, a pesquisa estende-se para uma correlação convincente dos contornos poliédricos multiplanos, onde por natureza geométrica aproximam-se por lapidamento. A saber: sólidos generalizados no espaço tridimensional.

3.4 SÓLIDOS GENERALIZADOS: UM BREVE APANHADO

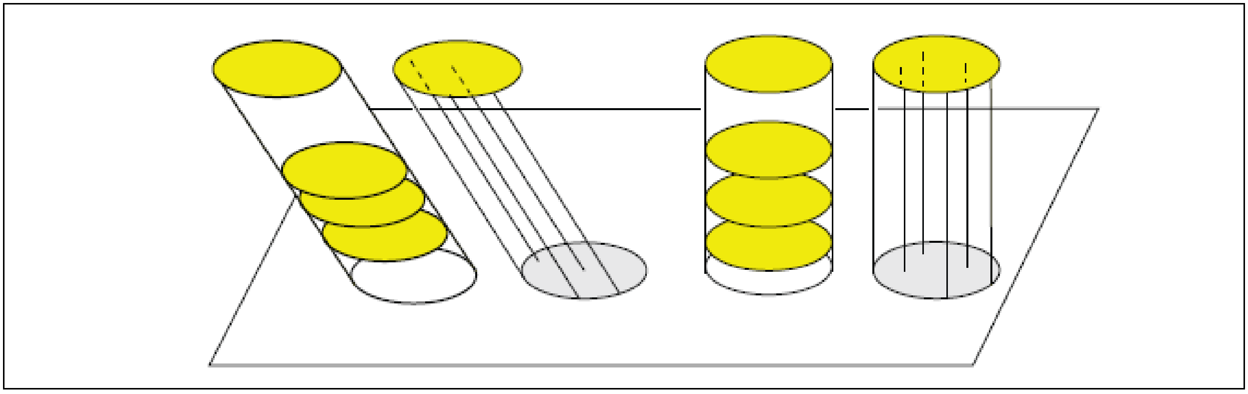
Na miríade de questionamentos que existem na formulação do postulado de Cavalieri, é consensual uma diretriz que permita sua relação comparativa entre sólidos dispostos num plano, mesmo levando em consideração alturas e bases congruentes destes, respectivamente, dos sólidos emparelhados.

Nesse objetivo, é necessário subsidiar didaticamente um caminho convincente sobre o axioma em questão, pois ainda sendo muito aceito o seu conceito no ambiente escolar, desmitificá-lo é uma ação coerente nos altares pedagógico, onde a transmissão hipotética não deixa clareza. Dessa forma, esta pesquisa lança mãos sobre alguns sólidos que por meio de peculiaridades a outros, denominam-se de “sólidos generalizados”, sendo breve na temática, o conteúdo será tratado de forma simples sem demonstrações exaustivas, fazendo melhor menção, a amplidão geométrica.

3.4.1 CILINDROS GENERALIZADOS

A princípio, no intuito de defini-los, temos o cilindro partindo de um empilhamento de discos e ao mesmo tempo sua formação advinda do paralelismo de geratrizes (entre elas), onde se ver a seguintes formações abaixo seja por forma reta ou oblíqua, dependendo do comportamento da geratriz em relação ao plano que assenta os corpos redondos (cilindros), Figura 8:

Figura 8: Esquema que representa cilindros em formação, como reunião de círculos paralelos à base, ou como reuniões de segmentos apoiados sobre uma base circular plana.

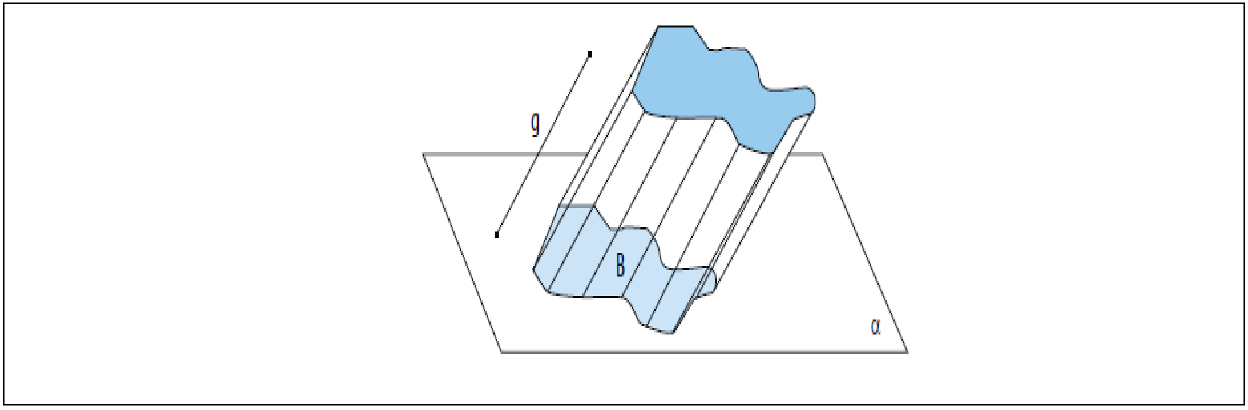


Fonte: MANUAL DO CURSISTA: módulo II. – Cuiabá, MT: Central de texto 2013. – (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio), p.430.

Baseados nas observações feitas pode-se definir uma figura espacial com propriedades inerentes e semelhantes ao cilindro tradicional, mas que abrange uma diversidade mais ampla de figuras espaciais. Tais figuras são intituladas de cilindros generalizados, onde relações de pertinência nesses sólidos são suficientes para intitulá-los.

Nessa perspectiva, tem-se uma plausível definição dessa generalização espacial para o cilindro: Firme uma região plana qualquer B. Denomina-se de α o plano que a contém. O plano α divide o espaço em dois subespaços, ambos tendo em comum o plano α, onde um dos subespaços fica acima do plano, o outro abaixo. Seja g um segmento que não esteja contida no plano α e nem paralelo ao mesmo. O *cilindro generalizado*, de base B e geratriz g, é o sólido C, formado por todos os segmentos paralelos e congruentes a g. conforme mostra o esboço, Figura 9 a seguir.

Figura 9: Representação genérica do cilindro generalizado de base B, sobre um plano α.

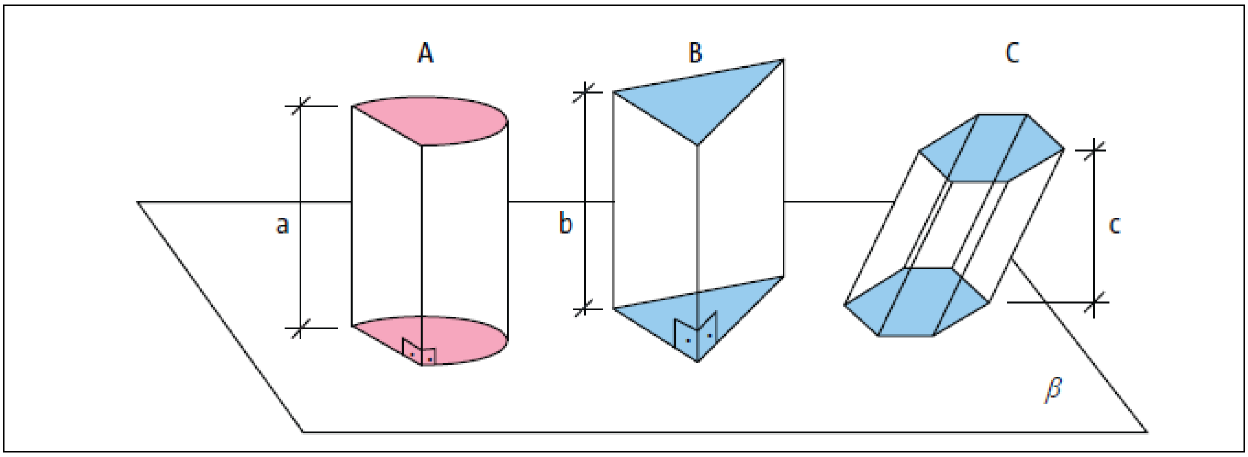


Fonte: MANUAL DO CURSISTA: módulo II. – Cuiabá, MT: Central de texto 2013. – (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio), p.430.

Com as geratrizes pertencentes ao mesmo subespaço, e limitado pela base B e sua projeção, é notório na figura acima que uma das extremidades de g está fixada na base em α , de tal forma que todos os segmentos paralelos, também estão contidos no mesmo subespaço, ou seja, todos no mesmo lado de α, caracterizando um sólido em repouso num plano arbitrário.

Um cilindro generalizado pode ser classificado de duas maneiras quando se leva em consideração a posição de sua geratriz. Assim sendo, se a geratriz do cilindro generalizado for ortogonal à base β, ou seja, formando um ângulo de 90° com o plano β (implica também dizer que forma um ângulo reto com duas arestas concorrentes contidas no plano β), denomina-se de *cilindro generalizado reto*, no contrário, onde não ortogonalidade da geratriz com o plano β; *cilindro generalizado oblíquo*, conforme Figura 10 a seguir.

Figura 10: Os dois primeiros cilindros (A e B) são retos e o terceiro (cilindro C), inclinado.



Fonte: MANUAL DO CURSISTA: módulo II. – Cuiabá, MT: Central de texto 2013. – (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio), p.433.

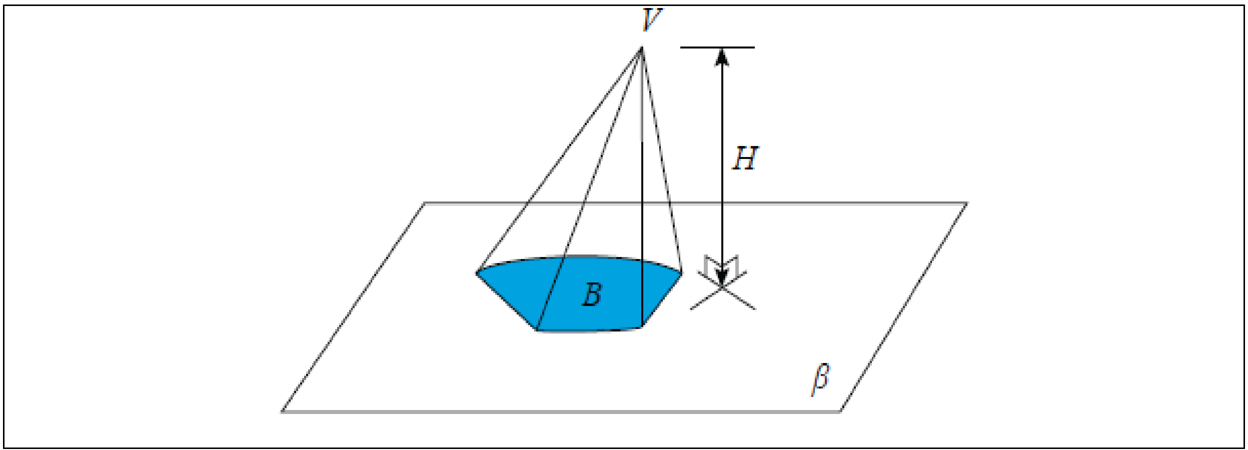
Os cilindros generalizados A e B são cilindros generalizados retos. O cilindro C é um cilindro generalizado oblíquo, pois suas geratrizes não formam 90° com o plano β. Percebe-se que os cilindros acima possuem características comuns, pois cada geratriz sempre liga as bases dos mesmos formando uma superfície prismática que por generalização denota tipos cilindros.

Nesse contexto, é importante também distinguir que um cilindro generalizado de base circular, ele é chamado simplesmente de cilindro. Se um cilindro generalizado tem como base uma região poligonal ele é chamado de prisma, conforme mencionado.

3.4.2 CONES GENERALIZADOS

Diante da conceituação genérica de sólidos, esta subseção faz alusão aos cones generalizados. O cone generalizado com base B e vértice V é o sólido obtido pela junção de todos os segmentos de reta que unem V aos pontos da base, ou seja, todos os segmentos que partem do vértice ao contorno (linha fechada) da base B, como destaca Figura 11.

Figura 11: Representação de um cone generalizado (pirâmide) cuja base B é uma região poligonal.



Fonte: MANUAL DO CURSISTA: módulo II. – Cuiabá, MT: Central de texto 2013. – (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio), p.441.

Na ilustração acima, a pirâmide é um cone generalizado, pois o poliedro segue as condições definidoras da generalização cônica.

Diante dos elementos representativos desse esboço, tem-se a distância do vértice do cone generalizado ao plano β, o qual contém sua base, é chamada de altura do cone generalizado, identificado por H. essa distância é o comprimento de um segmento perpendicular ao plano β, com uma das extremidades fixada no vértice V e outra na linha poligonal da base.

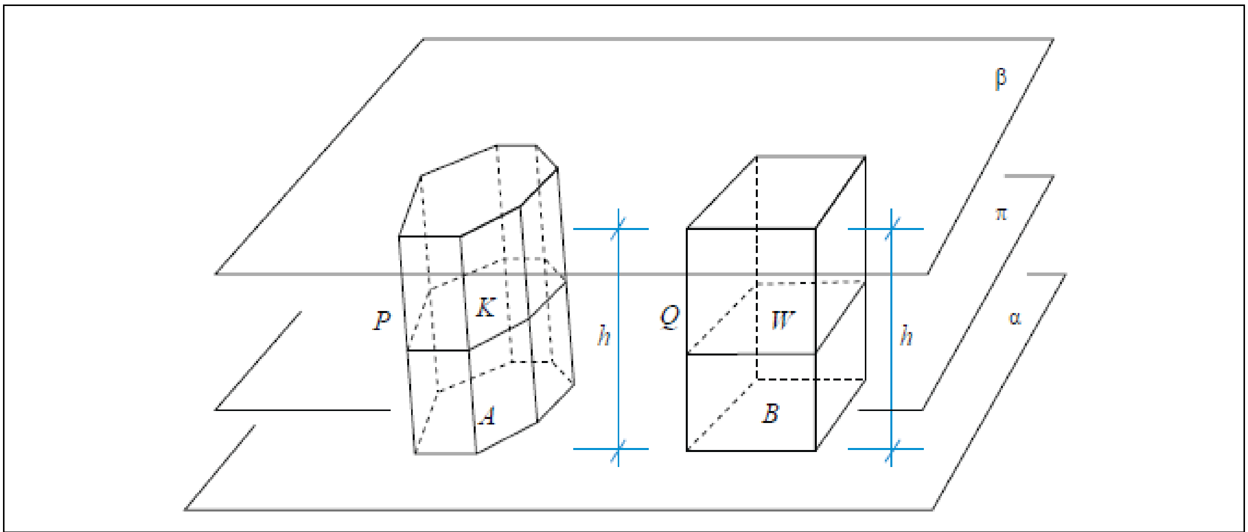
Nesses pilares de sólidos generalizados, é relevante uma conceitual classificação. A nomenclatura dos cones generalizados depende do formato da sua base, isto é, um *cone generalizado,* no qual a base B é um círculo, é definido comumente como cone ou cone circular (podendo ser reto ou oblíquo). Já um cone generalizado, cuja base é uma região poligonal, é denominado pirâmide, conforme denunciado (vide Figura 11).

3.5 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI NA CONCEPÇÃO DE SÓLIDOS GENERALIZADOS

Alicerçados pela definição da subseção anterior, afunila-se a paridade dos sólidos pregada pelo princípio de Cavalieri, onde acarreta a igualdade volumétrica entre os sólidos. Porém, alguns questionamentos eclodem diante de tal postulado, onde por sensibilidades geométricas algumas comparações são aceitas; outras não.

Deduzindo por exemplo dois poliedros convexos, é possível a satisfação do postulado de Cavalieri. Dessa forma, dado um prisma P que tem como base um polígono A e cuja altura mede h. Seja Q um prisma retangular reto, cuja base é um quadrado B com área congruente a área da base A e com altura h para ambos os sólidos correferidos, como mostra Figura 12 abaixo:

Figura 12: Esquema que mostra dois sólidos que repousam nos mesmos planos.



Fonte: MANUAL DO CURSISTA: módulo II. – Cuiabá, MT: Central de texto 2013. – (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio), p.475

Conforme ilustração (Figura 12), a base A do prisma e a base B do prisma Q repousam sobre o mesmo plano α. Como altura dos prismas é a mesma, tem-se que as outras bases (topos) dos dois prismas estão ambas num mesmo plano β, o qual é paralelo ao plano α. Qualquer outro plano intermediário π, paralelo a α, deverá interceptar o prisma P num polígono K, congruente à base de P e, consequentemente, com mesma área que essa base poligonal. Da mesma forma, o mesmo plano π interceptará o prisma Q em um quadrado W com área igual à área da base de Q. Portanto, suscita à conclusão que a área de intersecção entre o plano intermediário π e o sólido P é igual à área de interseção entre o plano intermediário π e o sólido Q, que por sua vez também é igual à área dos polígonos $K, A, B\ e\ W$, assim, descreve algebricamente:

$$Área\ (\pi \cap P) = A\ (K) = A\ (A) = A(B) = A\ (W) = área\ (\pi \cap Q)$$

Visto que o plano π é tomado arbitrariamente, segue do Princípio de Cavalieri que P e Q possuem o mesmo volume. Suponha-se que s seja o lado do quadrado B, que é base do prisma Q, cujo volume $V(Q) = s.s.h$, que é precisamente o produto da área da base (igual a s^2) pela altura h; logo, decorre que o volume do sólido P é dado por:

$$V(P) = V(Q) = (área\ de\ B).h = (área\ de\ A).h$$

(c.q.d)

Vale ressaltar que, se no lugar do prisma P, fosse utilizado um cilindro generalizado C qualquer, cuja base possui área igual à área de A e altura igual à altura h de P da ilustração acima (Figura 12). Procedendo de forma análoga à dedução que se desenvolve é a mesma conclusão obtida entre os poliedros, pois $V(C) = (área\ de\ A).h$. Sumariando os resultados obtidos aqui, delineia algebricamente: Se P é um prisma ou um cilindro generalizado, cuja base é uma figura plana A, e cuja altura é igual a h, então, o volume de P é dado por:

$$V(P) = (área\ de\ A).h$$

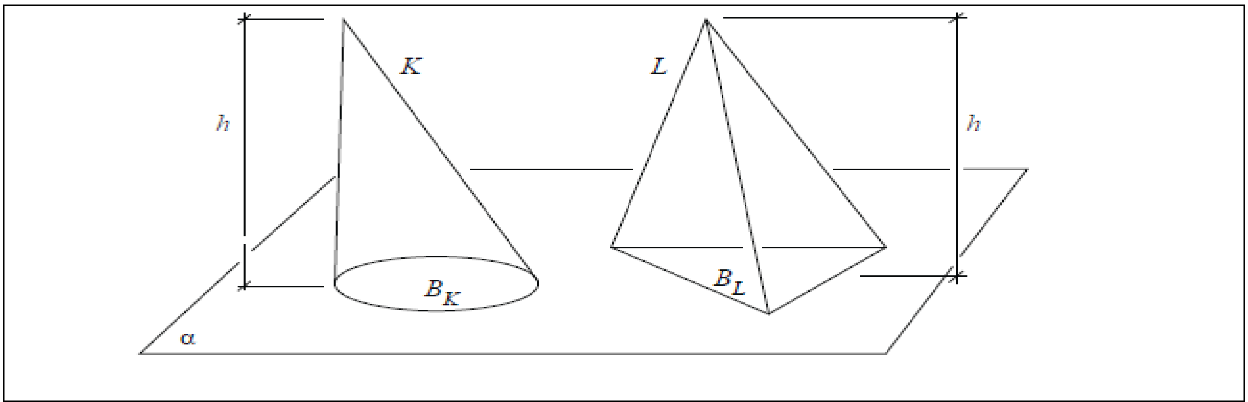
Mediante as possibilidades de paridades dos sólidos por via da concepção de Cavalieri, ficou detalhado e claro que a uso do teorema apregoado pelo padre milanês é mais bem ordenado nos seguintes critérios de comparação, onde consiste a aceitação da igualdade das porções boa aproximação:

I. Entre poliedros de bases poligonais, onde sempre exista projeção ortogonal da mesma no espaço (os poliedros podem ser tanto retos como oblíquos);
II. Entre cilindro e cilindro generalizado (tanto retos como oblíquos);
III. Entre cone circular e cone generalizado (tanto retos como oblíquos).

Diante desses parâmetros adotados, é possível didaticamente transferir o postulado numa abordagem clara, não transgredindo a percepção geométrica que ainda é pouca notada no ensino da matemática. Com o apoio da tipologia legitimada (sólidos generalizados), a correspondência entre os corpos torna-se aceitável e não confusa como a definição do Princípio de Cavalieri se apresenta em alguns textos (livros didáticos), requerendo mais elementos para uma eventual tese.

Para efeito de exemplificação, eis a paridade: Considera-se um cone K e uma pirâmide L, tais que suas bases B_k e B_L possuam áreas iguais, e suponha-se, também, que suas alturas h_k e h_L, relativas às bases B_k e $B_{L,}$ tenham a mesma medida h. Então, K e L possuem o mesmo volume. Lembrando que a mesma relação intrínseca vale também para duas pirâmides que tenham a mesmas áreas nas bases e alturas aferidas congruentemente, conforme Figura 13.

Figura 13: Representação de um cone K e a uma pirâmide L com mesmas áreas de bases iguais e alturas de mesmo comprimento



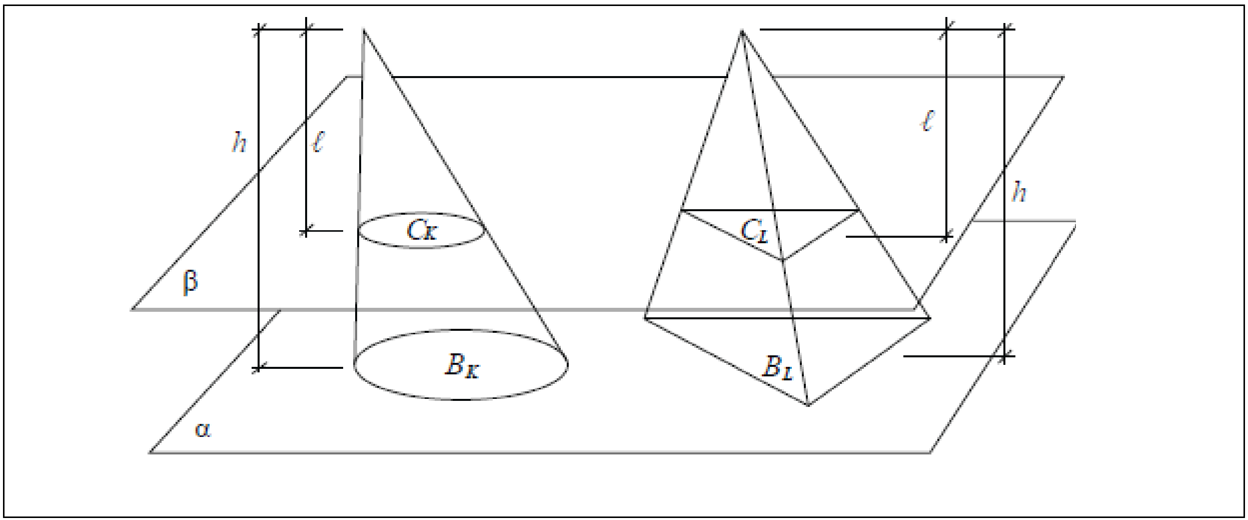
Fonte: MANUAL DO CURSISTA: módulo II. – Cuiabá, MT: Central de texto 2013. – (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio), p.493.

Para demonstrar o teorema de Cavalieri nesse pensamento associativo de sólidos numa base generalista, dando o devido emparelhamento, tem-se:

Dado um plano α fixado, onde repousam o cone K e a pirâmide L, por suas bases, sobre esse plano. Seja β um plano paralelo ao plano α, situado entre as bases e os vértices de K e L. Tal plano determina, mediante secções transversais paralelas as bases de K e L, um cone e uma pirâmide com bases C_k e C_L, respectivamente, e altura ℓ. Segue que a razão entre as áreas das bases do cone maior e do cone menor, bem como a razão entre as bases das pirâmides maior e menor, é igual a razão entre os quadrados das respectivas alturas. Veja a Figura 14 a seguir.

$$\frac{área(B_k)}{área\ (C_k)} = \frac{k^2}{l^2} = \frac{área(B_L)}{área\ (C_L)}$$

Figura 14: Representação do corte pelo plano β, paralelo a α, que determina um cone e uma pirâmide de bases C_k e C_L, e alturas iguais a ℓ.



Fonte: MANUAL DO CURSISTA: módulo II. – Cuiabá, MT: Central de texto 2013. – (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio), p.494.

Por hipótese, $área\ (B_k)\ =\ área\ (B_L)$, do que, pela igualdade anterior, concluímos que $área\ (C_k)\ =\ área\ (C_L)$.

Algebricamente:

$$Área\ (\beta \cap K)\ =\ área\ (C_k)\ =\ área\ (C_L)\ =\ área\ (\beta \cap L)$$

Como β é um plano arbitrário, tomado paralelamente a α, segue do Princípio de Cavalieri que o volume do cone K é igual ao volume da pirâmide L. Como consequência, duas pirâmides que têm alturas iguais a h e bases com mesmas áreas B, então, elas têm o mesmo volume, pois ambas terão volumes iguais a de um cone de altura h e base circular de área B.

Desse modo, cones generalizados e cilindros generalizados imbricam ao Princípio de Cavalieri denotando uma maior transparência comparativa. É importante ressaltar que a pesquisa se dirige a conceituação do axioma nas linhas didático-pedagógicas que desemboca sobre o ensino da matemática elementar escolar.

4. O POSTULADO DE CAVALIERI NOS LIVROS DIDÁTICOS NAS ESCOLAS PÚBLICAS DE MOSSORÓ: UMA ANÁLISE DOCUMENTAL DOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesta seção será feita uma ponte entre todo o material teórico/histórico abordado anteriormente acerca do Princípio de Cavalieri, temática vinculada aos livros da 2º série do ensino médio e uma breve historicidade do livro didático de matemática, posteriormente, será feita uma abordagem desse conteúdo em três livros didáticos utilizados nas escolas públicas mossoroenses por meio de uma análise documental cautelosa que visa investigar a definição desse postulado ofertado associado ao estudo da Geometria Espacial.

4.1 A POLÍTICA-PEDAGÓGICA DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

Os primeiros livros didáticos de matemática foram utilizados para a formação dos alunos da Academia Militar do Rio de Janeiro, sendo a maior parte traduções de livros estrangeiros. Foi a partir da década de trinta que os brasileiros passaram a escrever seus próprios livros, editando um leque de textos didáticos matemáticos que com o passar do tempo incorporaram-se no contexto escolar.

O uso do livro didático de matemática passou a ser tema frequente nos trabalhos em educação matemática, pois o seu papel na aprendizagem é de grande importância cultural e intelectual. Portanto, enfatizar o seu uso obedece a algumas regras que são estabelecidas por órgãos educacionais no país.

O livro didático de matemática, antes de chegar às escolas, passa por diversas análises, cuja intenção é medir a qualidade dos conteúdos que o compõem. Nesse propósito, o Ministério da Educação e Cultura (MEC) elaborou decretos em prol dos livros didáticos, obedecendo a alguns objetivos impostos que não vem catalogar aqui neste trabalho.

A preocupação com os textos didáticos de matemática em nível oficial no Brasil iniciou-se com a legislação de livro didático, implantada em 1938 pelo decreto-lei 1006[20]. Nesse período, o livro era uma ferramenta de educação com características políticas e ideológicas e estava limitado aos conteúdos, vinculado apenas a essas características. Os

[20] Decreto-Lei nº 1.006, de 30 de Dezembro de 1938. Estabelece as condições de produção, importação e utilização do livro didático. Nessa época o livro didático era um instrumento da educação política e ideológica, sendo o Estado caracterizado como censor no uso desse material didático.

professores, conforme esse decreto fazia a escolha do livro didático através de uma lista predefinida de editoras publicadoras de livros de matemática.

A diretriz jurídica que regulamenta legalmente a questão do livro didático no país é o decreto 9154/85[21] que implantou o programa do livro didático, o qual, no artigo 2°, estabelece a avaliação rotineira desses livros mediante competências educacionais. Da data sancionada para essa regulamentação até hoje, o Ministério da Educação e Cultura (MEC) criou várias comissões nesse propósito.

Diante dos vários programas criados pelo MEC, pode-se destacar o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)[22]. Esse programa tem como finalidade avaliar os livros didáticos e dicionários de língua portuguesa para subsidiar o processo de ensino e aprendizagem no país.

A escolha do livro didático de matemática ou de qualquer outra disciplina é feita em parceria com universidades públicas que se responsabilizam em selecionar os editoriais e mandar para as secretarias de educação de cada estado da federação.

Diante da escolha do livro, o PNLD considera importante alguns quesitos que devem constar no livro didático. Ele deve oferecer informações e explicações sobre o conhecimento matemático que interfere e sofre interferências das práticas sociais do mundo contemporâneo e do passado. Também devem conter uma proposta pedagógica que leve em conta o conhecimento prévio e o nível de escolaridade do aluno, além de uma linguagem de boa acessibilidade. Nesse entendimento os Parâmetros Curriculares reconhece:

> O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento. (BRASIL, 1998, p.67)

Ao que diz respeito às atividades, é importante que incentivem os alunos a participar ativamente de sua aprendizagem e interagir os conteúdos em questão com os

[21] O mecanismo jurídico que regulamenta o livro didático é o Decreto n. 9.154/85, que instituiu o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

[22] O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica. O programa é executado em ciclos trienais alternados. Assim, a cada ano o MEC adquire e distribui livros para todos os alunos de um segmento, que pode ser: anos iniciais do ensino fundamental, anos finais do ensino fundamental ou ensino médio. À exceção dos livros consumíveis, os livros distribuídos deverão ser conservados e devolvidos para utilização por outros alunos por um período de três anos.

demais, possibilitando, ao mesmo tempo, relações entre os ramos da matemática (aritmética álgebra e geometria). Dessa maneira, o livro didático de matemática mostrará textos integrados, capazes de exprimir uma matemática global e relacional com o cotidiano do aluno.

Reconhecida à devida importância dos livros didáticos de matemática, é perceptível que o mesmo é um dos diversos influenciadores do processo de educação matemática escolar. Dessa forma, aparece no âmbito da aprendizagem da matemática a necessidade de uma análise contínua desses livros, levando sempre a uma reflexão metodológica.

Ao que tange a esse olhar criterioso, a análise desta pesquisa se direcionará às informações que o Princípio de Cavalieri transfere nessas literaturas didáticas ao que diz respeito na determinação de áreas e volumes de sólidos, podendo deixar margem para questionamentos, assim como também pode render nessa análise, textos didáticos que expresse verossimilhança sobre assunto, satisfatório.

Nessa perspectiva, três livros de editoras e autores distintos serão vistos minuciosamente, dando ênfase sempre a temática envolvida neste trabalho. Dessa forma, a temática inerente ao estudo da Geometria espacial será vista em termos de conceituação e esboçamento de figuras em comparação geométrica, simultaneamente.

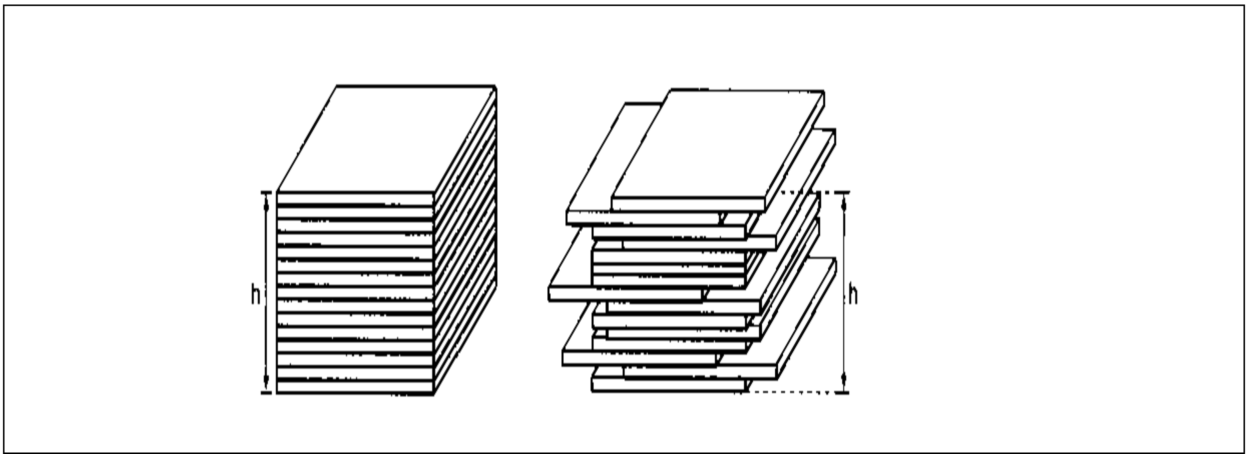
Com o afunilamento para os livros adotados pelas escolas públicas mossoroenses, serão analisados três literaturas usadas em anos recentes e atuais no ensino da matemática na série vigente (2º série do ensino médio). Seguem os diagnósticos da avaliação aos livros didáticos (LD):

4.2 ANÁLISE DOCUMENTAL: LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA (2ª SÉRIE).

Com objetivo de questionar o Princípio de Cavalieri no âmbito didático, esta parte da pesquisa retém-se a um crivo nos textos didáticos ofertados na segunda série do ensino médio acerca da formulação de Cavalieri, conceito integrado ao estudo da geometria tridimensional.

O primeiro livro analisado, **Matemática: Ciências e Aplicações (2010),** de autoria consagrada de Gelson Iezzi, Osvaldo Dulce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, o Princípio de Cavalieri é tratado resumidamente como uma seção no estudo da Geometria Espacial, onde inicialmente é posto a noção intuitiva de chapas retangulares justapostas sobre um plano arbitrário. Nessa estruturação sólida, algumas chapas deslizam diante da porção finita exemplificada na Figura 15.

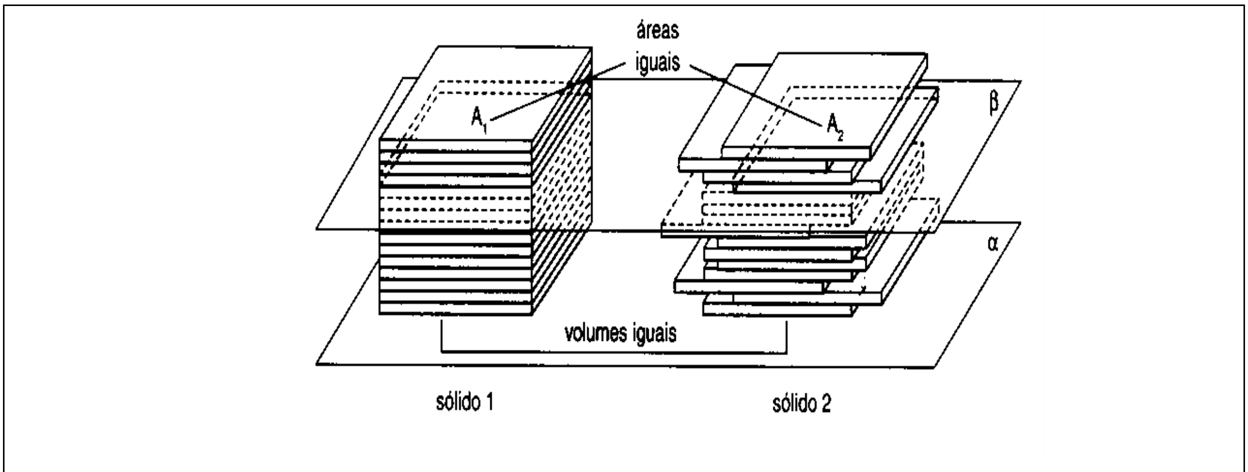
Figura 15: Representação de empilhamento de chapas retangulares



Fonte: IEZZI, Gelson... [et al]. **Matemática Ciências e aplicações**, 2:ensino médio, 6.ed –São Paulo: Saraiva, 2010, p.192.

Considerando o arranjo acima com a mesma coleção de chapas, é evidente a equivalência volumétrica, sem nenhum questionamento aparente esboçado no encabeçamento do assunto. Com efeito, os autores apenas aclaram secções de planos paralelos para resultar nas porções limitadas semiespaços determinados pelos planos α *e* β (β secante), denotando na distância entre os planos, a própria altura do novo empilhamento. Assim sendo, a comparação expressa igualdade volumétrica. Conforme mostra Figura 6 a seguir.

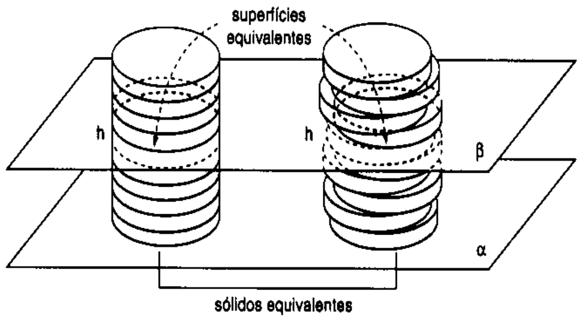
Figura 16: Representação de chapas retangulares deformada (à direita)



Fonte: IEZZI, Gelson... [et al]. **Matemática Ciências e aplicações**, 2:ensino médio, 6.ed –São Paulo: Saraiva, 2010, p.192.

A mesma ideia também pode ser empregada concretamente para justaposição de moedas sobre o tampo de uma mesa, admitindo este como o plano α como mostra a Figura 17 a seguir.

Figura 17: Arranjos geométricos com moedas



Fonte: IEZZI, Gelson... [et al]. **Matemática Ciências e aplicações**, 2:ensino médio, 6.ed –São Paulo: Saraiva, 2010, p.193.

Após esses esboços, os autores expõem a definição do Princípio de Cavalieri partindo da forma intuitiva, expressada até então, vinculada a um contorno lateral homogêneo (com a possibilidade de mover-se livremente sobre uma rampa), que consequentemente as partes constituintes apenas desalinham-se, mantendo a mesma porção. Nessa perspectiva, não suscitam discussões coerentes sobre a comparação de demais sólidos, sendo assim apresentados como suficientes para a postulação de Cavalieri, conforme é mostrada na definição da obra vigente, Figura 18 a seguir.

Figura 18: Definição do Princípio de Cavalieri

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).

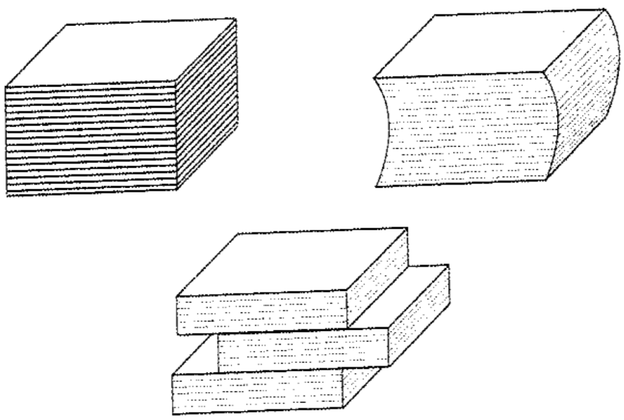
Fonte: IEZZI, Gelson... [et al]. **Matemática Ciências e aplicações**, 2:ensino médio, 6.ed –São Paulo: Saraiva, 2010, p.193.

Mesmo possuindo uma riqueza de detalhes didáticos, ao que tange a formulação da conceituação do axioma de Cavalieri, é notória a abertura dada na definição, dando uma conjuntura errônea dos sólidos, dando emprego para quaisquer paridades, sendo condicionados somente a obedecer as seguintes condições: áreas iguais e alturas congruentes. Com essas premissas, a implicação é direta para concluir sólidos equiparados com o mesmo volume. Visto isso, o Princípio de Cavalieri é usado no auxílio para calcular volumes de figuras espaciais comuns como prismas, pirâmides, cones e cilindros.

A segunda obra periciada é atualmente utilizada pelas escolas públicas do município (Mossoró-RN), **Matemática: contextos e aplicações (2013)**, cuja autoria é pertencente a Luiz Roberto Dante, grande expoente no ensino da Matemática. A sua literatura possui uma contextualização rica nos mais variados conteúdos, sempre interdisciplinando com outras áreas do conhecimento, fortalecendo sempre que possível, a conjunção que a matemática possui com outras fronteiras.

Todavia, remetendo a investigação proposital desta pesquisa, o postulado de Cavalieri no texto didático presente dá uma abordagem mais especificada, com inserção de uma linguagem de conjuntos que permite uma compreensão momentaneamente aceitável. A definição imbrincada ao corpo do estudo da Geometria Espacial apresenta-se de forma objetiva e imediata, restringindo-se tão somente a porções com áreas iguais repousadas sobre um plano α e seccionado paralelamente pelo plano β, concluindo por essa dedução uma igualdade volumétrica, conforme Figura 19.

Figura 19: Pilha de papel em três estruturações

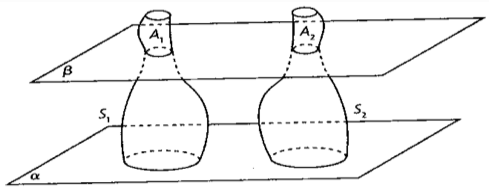


Fonte: DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante – 2. Ed – São Paulo: Ática, 2013. Matemática: Ciências e Aplicações, 2: ensino médio/ Gelson Iezzi ...[et al] . –6. Ed.—São Paulo: Saraiva, 2010, p.200.

Partindo da justaposição de folhas de papel, o autor desenvolveu intuitivamente o conceito de Cavalieri. Ordenando e desordenando as folhas da pilha acima, objetivando a equivalência de volumes das estruturas formadas com as n folhas.

Frente a essa percepção, a obra em análise realça a situação acima num caráter com maior rigor geométrico, configurando nesse olhar a conceituação do Princípio de Cavalieri. Mediante a argumentação ofertada pelo texto avaliado, o autor considerou inicialmente dois sólidos s_1 e s_2, seccionando um plano $\beta//\alpha$, conforme mostra a Figura 20.

Figura 20: Representação de porções quaisquer em paridade



Nessas condições, podemos afirmar que, **se para todo plano β temos $A_1 = A_2$**, então:

volume S_1 = volume S_2

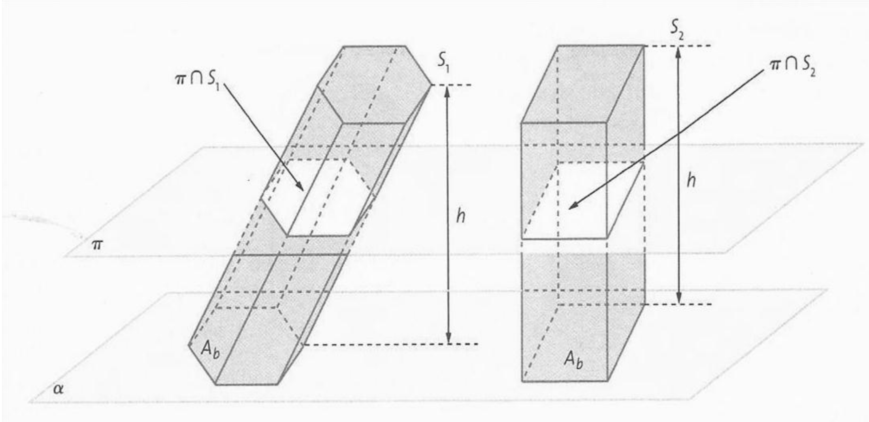
É possível demonstrar o princípio de Cavalieri, mas aqui vamos considerá-lo verdadeiro sem fazer sua demonstração. Veremos que esse princípio simplifica muito o cálculo de volumes.

Fonte: DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante – 2. Ed – São Paulo: Ática, 2013. Matemática: Ciências e Aplicações, 2: ensino médio/ Gelson Iezzi ...[et al] . –6. Ed.—São Paulo: Saraiva, 2010, p.200.

As áreas que resultaram da interseção ($s_1 \cap$ β e $s_2 \cap$ β) estabelecem igualdades conforme o a ilustração, e daí imediatamente descreve a proposição: Se A_1 = A_2, então V_1 = V_2, afirmando o Princípio de Cavalieri, onde o que foi desenvolvido inicialmente apenas por meio de uma amostragem de folhas empilhadas de papel, não levando a conceituação axiomática para uma discussão e nem tampouco estabelecendo critérios de aplicação adequada, dando uma ênfase final tão somente como uma verdade feita e imutável!

Embora a pesquisa esteja direcionada a conceituação do parecer de Cavalieri, é notado numa comparação para obtenção de volumes de prismas, uma comparação entre porções limitadas que podem ser possível as linhas pregadas no postulado, pois o autor ao expandir para comparação entre poliedros, ele denotou geometricamente dois prismas, (oblíquo de base hexagonal e reto de base quadrada), garantindo a postulação em análise. É consensual que se pode ocorrer congruências entre suas áreas, e as fronteiras laterais conduzir a comparação abaixo para uma equivalência de volumes, pois por boa aproximação a equivalência se efetiva, com o precedente da semelhança dos contornos circundos, Figura 21 a seguir.

Figura 21: Representação comparativa entre prisma de base hexagonal e paralelepípedo



Fonte: DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante – 2. Ed – São Paulo: Ática, 2013. Matemática: Ciências e Aplicações, 2: ensino médio/ Gelson Iezzi ...[et al] . –6. Ed.—São Paulo: Saraiva, 2010, p.201.

A ilustração estampa a obtenção do volume de um prisma, tendo como suporte uns paralelepípedos em paridade, ambos repousados sobre um plano α.

Como $(\pi \cap s_1) = A_b$ e área $(\pi \cap s_2) = A_b$, para qualquer plano horizontal π, tem-se:

$$Área\ (\pi \cap s_1)\ =\ área\ (\pi \cap s_2)$$

Pelo o Princípio de Cavalieri:

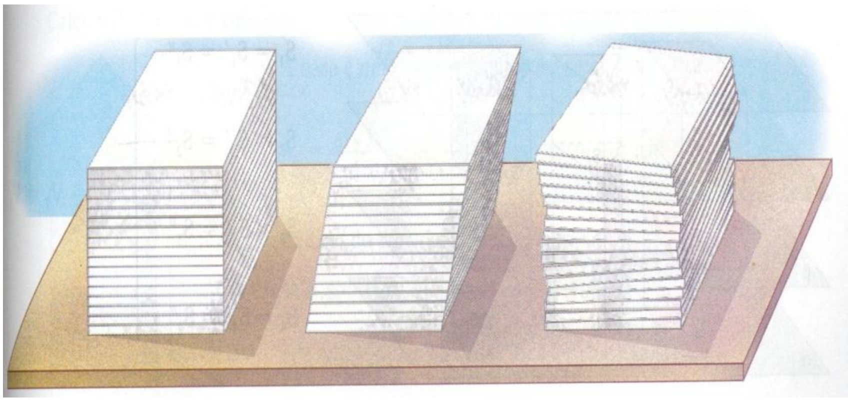
$$Volume\ do\ prisma\ =\ volume\ do\ paralelepípedo\ retângulo$$

Todavia, o que se enuncia como postulado de Cavalieri denota fragilidade e desprezo pelas fronteiras dos sólidos.

A terceira e última análise dos livros didáticos, remete a obra: **Matemática: uma nova abordagem (2000)**, autoria assumida pelos exímios matemáticos, José Ruy Giovanni & José Roberto Bonjorno. A obra avaliada é bastante ilustrativa, permeia satisfatoriamente os temas transversais pregado nos Parâmetros Curriculares, mostrando sempre contextualidade dos conteúdos com as variantes que surgem no cotidiano do aluno, em fim, atende a relação existente entre as outras áreas do conhecimento interdisciplinando consideravelmente.

Com o propósito da análise em pauta, o Princípio de Cavalieri está associado ao corpo da Geometria Espacial de forma bem sucinta, estando integrado especificamente ao estudo dos volumes dos sólidos, sendo neste, o aspecto limiar de tal estudo. Nessa perspectiva, o esboço intuitivo parte do repouso de três pilhas de isopor sobre uma mesa, adotada como um plano α arbitrário. Nas composições abaixo as folhas de isopor deslizam dando contornos laterais irregulares, porém possuem a mesmas alturas e cada fatia; a mesma espessura, conforme mostra a Figura 22 a seguir.

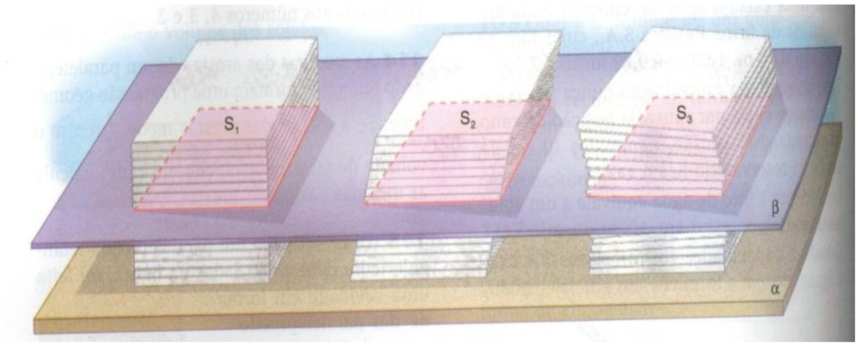
Figura 22: Representação de pilhas de folhas de isopor justapostas



Fonte: GIOVANNI, José Ruy, 1937- **Matemática: uma nova abordagem**, vol.2: versão progressões / José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno. – São Paulo: FTD, 2000 - (coleção matemática uma nova abordagem), p.271.

Trançando um plano β paralelo ao tampo (plano α), é mostrado as áreas seccionadas pelo mesmo, sendo estas denotadas respectivamente por S_1, S_2 e S_3, implicando na igualdade: S_1 = S_2 = S_3 (áreas congruentes), conforme ilustra o enfileiramento vertical a seguir, Figura 23.

Figura 23: Composições geométricas com áreas iguais

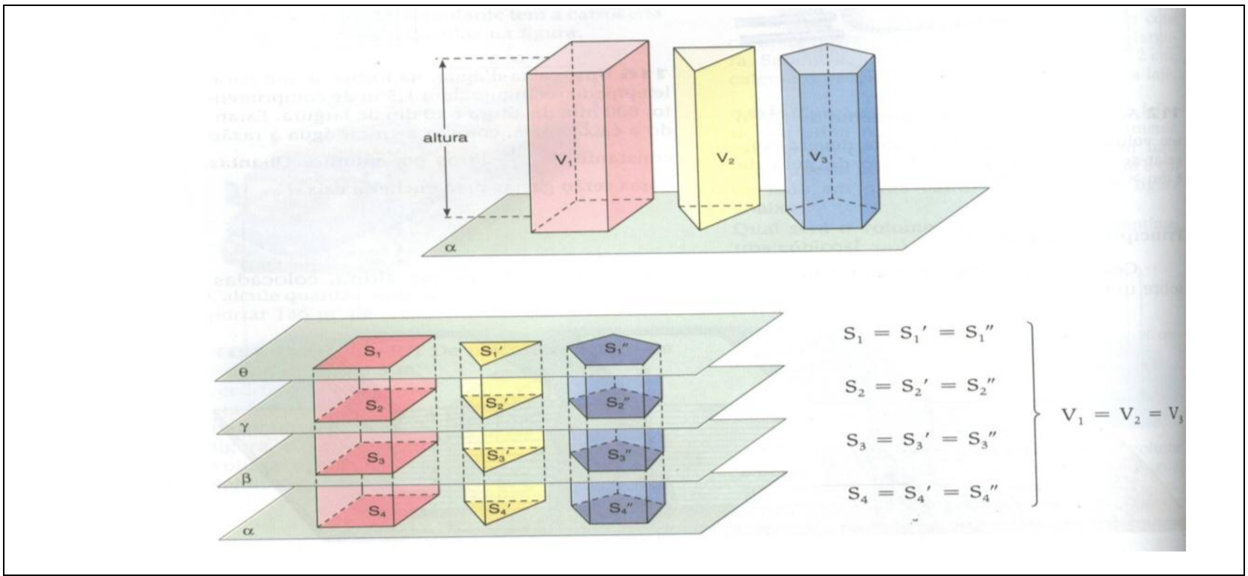


Fonte: GIOVANNI, José Ruy, 1937- **Matemática: uma nova abordagem**, vol.2: versão progressões / José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno. – São Paulo: FTD, 2000 - (coleção matemática uma nova abordagem), p.272.

Dessa forma, o autor delineou o conceito de Cavalieri, afirmando que basta terem-se dois ou mais sólidos apoiados sobre um plano α, de forma que todo plano paralelo a este, determina nesses sólidos com secções planas de mesma área, corroborando para as porções apresentarem o mesmo volume. (o autor usa prisma com bases poligonal distintas, denotando sempre a igualdade nas superfícies das bases).

Nessas relações entre prismas de bases convexas, foram seccionados os planos β, γ e θ, com β // γ // θ, que delineia: α // β // γ // θ. Nessa perspectiva, o autor se rende a uma figuração comparativa apenas entre prismas, conforme se tem espacialmente, Figura 24.

Figura 24: sólidos geométricos com bases formadas por polígonos



Fonte: GIOVANNI, José Ruy, 1937- **Matemática: uma nova abordagem**, vol.2: versão progressões / José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno. – São Paulo: FTD, 2000 **-** (coleção matemática uma nova abordagem), p.272.

Seguindo as entrelinhas da análise, mostra mais uma vez, o aspecto esparso da definição do Postulado em questão, dando olhares restritos algumas comparações, e afastando-se de algumas possibilidades que pode a vir destorcer a postulação do Padre Cavalieri. Todavia, os sólidos apresentado (vide Figura 23), pode possibilitar a conjectura de Cavalieri, porém, a definição didática condiciona ao limite de áreas e alturas iguais, respectivamente.

O interessante exposto acima mostra geometricamente possiblidades, mas a obra não expressa uma definição textual, fazendo tão somente amostras de figuras espaciais em paridade (apenas superfícies prismáticas).

Outro fator importante das análises, é que ao tratar da temática, ela se apresenta resumidamente em muitas literaturas, não vendo casos de exceções, sendo transferida pelos seus textos de forma direta e generalista, garantido a equivalência aleatória de sólidos em paridade.

Embora denote esboços didáticos na linha intuitiva, não é satisfatório o salto que se dá para a definição pregada, pois o que se vê é um procedimento em uma mesma estrutura (pilhas de papéis, de chapas ou isopor), onde ao admitir os deslizamentos de alguns elementos do arranjo geométrico exposto no encabeçamento do assunto, é suficiente a caracterização da igualdade volumétrica.

Nesses termos, o tema que é passado para o alunado no processo de ensino e aprendizagem não mostra clareza, vindo a pedir mais subsídios para sua compreensão, pois, nessa ótica, o Princípio de Cavalieri será visto como um axioma totalizado em sua noção intuitiva, não sendo capaz de estabelecer consonância demonstrativa no âmbito da Geometria.

4.3. AULA EXPOSITIVA COM USO DE MATERIAS CONCRETOS (SÓLIDOS GEOMÉTRICOS)

Muitas são as aplicabilidades da geometria em nosso dia-a-dia, principalmente àquelas que são estudadas no Ciclo Básico, compreendidas entre o Ensino Fundamental e Médio, porém muitos desses conceitos que são apresentados aos alunos não possuem uma base sólida, sendo ensinados de forma estanque, carecendo de integração entre os campos da matemática para um efetivo entendimento.

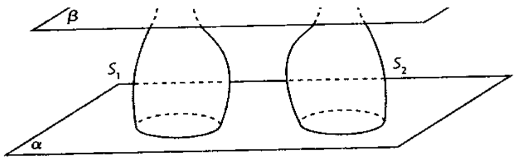
Nesses termos, o fruto dessa pesquisa se detém ao emprego do Princípio de Cavalieri nos pilares da didática do seu ensino. Nesse intuito, uma aula inédita foi realizada em uma escola pública (Escola Diran Ramos do Amaral, 29 alunos), abordando a temática deste trabalho numa discussão geométrica, onde busca a aplicabilidade consistente de tal axioma.

Nessa perspectiva, a aula foi iniciada com a exposição precedente do postulado estabelecido na literatura didática adotada pelas escolas públicas do estado do Rio Grande do Norte, **Matemática: contextos e aplicações (2013),** como precedente para um posterior questionamento do enunciado de Cavalieri.

Na tentativa de transparecer a comparação de sólidos sobre um plano aleatório, a aula foi subsidiada por materiais geométricos concretos que apoiaram a discussão sobre a paridade pregada pelo conceito do princípio nos livros didáticos que permeiam o cenário escolar no estudo da Geometria Espacial na segunda série do Ensino Médio.

Nessa esfera, primeiramente foi exposto a definição do postulado de Cavalieri do livro didático deles, que, diga-se de passagem, também foi avaliado nesse trabalho. Com efeito, menciona-se a conceituação na Figura 25 a seguir.

Figura 25: Reportamento a definição didática do Princípio de Cavalieri.



Nessas condições, podemos afirmar que, **se para todo plano β temos $A_1 = A_2$**, então:

volume S_1 = volume S_2

É possível demonstrar o princípio de Cavalieri, mas aqui vamos considerá-lo verdadeiro sem fazer sua demonstração. Veremos que esse princípio simplifica muito o cálculo de volumes.

Fonte: Fonte: DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante – 2. Ed – São Paulo: Ática, 2013. Matemática: Ciências e Aplicações, 2: ensino médio/ Gelson Iezzi ...[et al] . –6. Ed.—São Paulo: Saraiva, 2010, p.200.

Diante das premissas que enuncia o Princípio do mestre milanês no L.D vigente, foi discutido em primeiro momento os aspectos geométricos inerentes, assim sendo, fala-se em equivalência de áreas. Nessa perspectiva, foram mostrados palitos paralelos justapostos sobre um plano, mostrando porções bidimensionais, ou seja, regiões planas distintas, apreciando a ocupação dos mesmos sobre um plano arbitrário. Com efeito, esboça-se a Figura 26.

Figura 26: Representação de emparelhamento de palitos

Fonte: o autor

Com a visão geométrica de igualdade de áreas assimilada, os discentes concluíram que a quantidade de palitos usadas numa porção plana, for também usada em outra; é suficiente para ter-se um equiparidade entre superfícies, atendendo o pressuposto da proposição (vide Figura 24).

Frente às linhas gerais da definição acima, foi posto em mesa dois maços de baralhos de 48 cartas, o primeiro empilhado regularmente (reto), o outro; exposto deformadamente. Ajustado a definição do texto didático, o propósito inicial foi comprovar geometricamente. Assim sendo, Figura 27 a seguir.

Figura 27: Representação de estruturas formadas com baralhos

Fonte: o autor

Após sair da noção intuitiva que recursa bem a definição do Princípio de Cavalieri no livro em pauta, estendeu para comparação de sólidos de mesma altura e porções seccionadas. Nesse processo, foi posto para os alunos dois sólidos sobre o tempo da mesa. Ambos com áreas de base iguais e alturas congruentes, conforme Figura 28 a seguir.

Figura 28: Representação de paridade entre cubo e cilindro reto

Fonte: o autor

Frente o comparativo exposto (vide Figura 28), tem a irracionalidade emergente, pois ao comparar a área circular com uma área quadrada, acarreta uma irracionalidade o que sai do âmbito da proporcionalidade por meio da presença do irracional π. Dessa forma, suscita mais ainda a permanência de critérios comparativos exigentes.

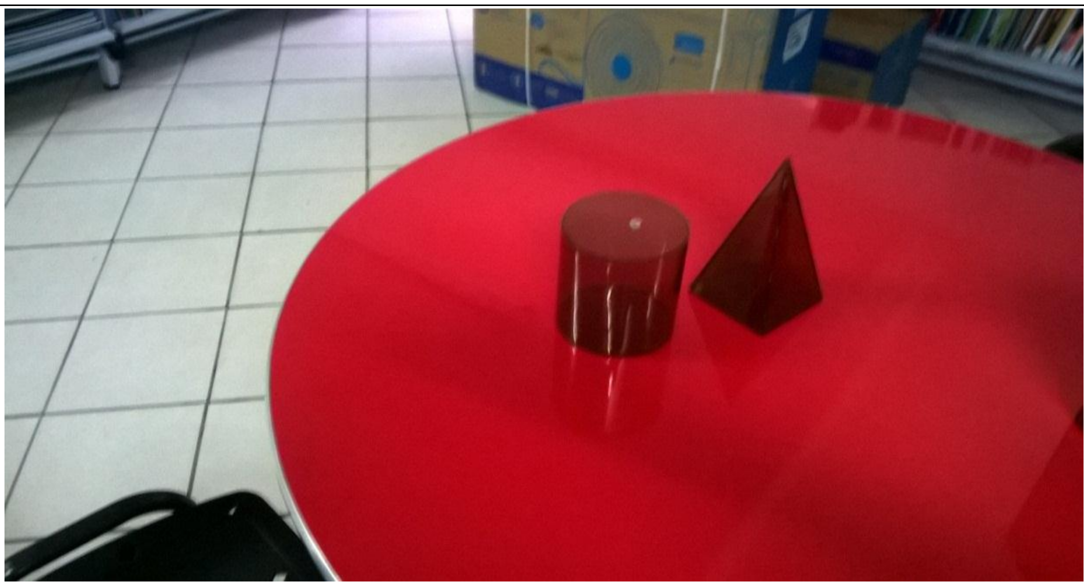
Diante de uma boa acuidade geométrica, os discentes admitiram que pode acontecer de uma área poligonal (base prismática) coincidir-se com uma área circular (base cilíndrica). Dessa forma, tem-se um prisma e cilindro com áreas de bases e alturas iguais, que boa aproximação, efetiva-se a equivalência volumétrica, o que vem calhar bem com o conceito em questão. Visto a veracidade dessas premissas, é admitido nesta situação o Princípio de Cavalieri. Nessa perspectiva, deu-se também apreço ao cone e uma pirâmide, admitida a congruência entre as respectivas áreas e alturas, como efigia a Figura 29.

Figura 29: Representação de paridade entre cone e pirâmide de base triangular

Fonte: o autor

Mantendo o âmbito, foi colocada no lugar do prisma uma pirâmide com aceitação prévia que ambos os sólidos possuem mesma área de base e alturas com mesmo aferimento. Com isso, antecedentemente, remeteu-se a definição exposta para uma discussão da comparação na Figura 30 abaixo:

Figura 30: Representação da comparação entre cilindro e pirâmide base quadrada

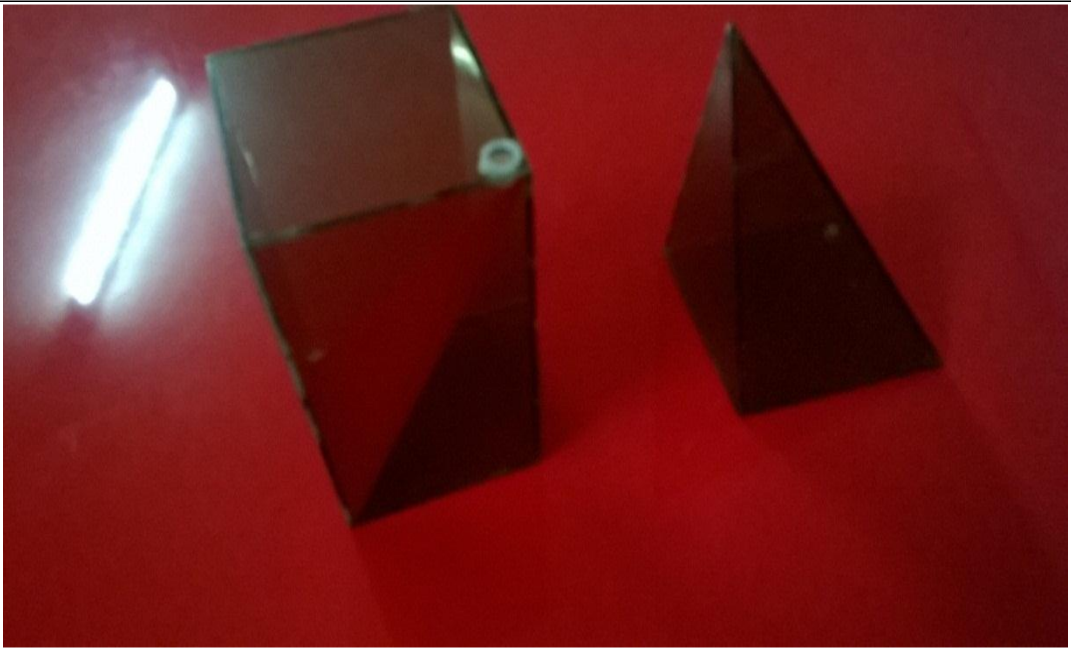


Fonte: o autor

Entretanto, perceptivelmente, foi levantando por um dos alunos o cuidado com as fronteiras laterais, pois segundo o mesmo, caso houvesse um estreitamento (afunilamento), o postulado perderia aceitação, tanto na análise total dos dois sólidos quanto as porções limitadas pelos planos arbitrários.

Com esse posicionamento, ilustrou-se a comparação entre alguns sólidos onde, era razoável selar, áreas de bases iguais com alturas iguais, com a finalidade de arrematar o Princípio de Cavalieri. Com efeito, foi ilustrado um prisma e uma pirâmide, conforme Figura 31 abaixo:

Figura 31: Representação da comparação entre prisma e pirâmide



Fonte: o autor

Nessa visão, surge o questionamento didático sobre tal postulado: será que o principio pode ser aceito sem considerar as fronteiras laterais dos sólidos? Quaisquer sólidos em paridade obedecem às linhas gerais da conceituação de Cavalieri?

Diante do questionamento, outras comparações foram ilustradas. Nesse propósito, põe-se em um plano um cilindro e um cone com a mesma área circular nas bases, com isso pergunta-se: é possível concernir o comparativo de Cavalieri? E o olhar nas fronteiras laterais sobrepõe a definição do postulado em discussão? Existe alguma restrição no emparelhamento? Ver Figura 32.

Figura 32: Representação entre corpos redondos emparelhados sobre um plano

Fonte: o autor

Mediante a análise feita nos sólidos geométricos acima, os corpos redondos que descansam sobre o tampo da mesa, possuem mesma superfície na base e alturas côngruas, porém, ao lançar uma investigação em todas suas extensões, notoriamente, a especulação geométrica reincide, pois as condições dadas não são convincentes para conclusão imposta por Cavalieri. Desse modo, é sugestivo um olhar mais criterioso ao que diz respeito as comparações, pois quando há inserção geométrica, o Princípio desenvolvido junto a Geometria Espacial apresenta “falhas”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho dissertativo intitulado: **Geometria Espacial no Ensino Médio: um questionamento didático ao Princípio de Cavalieri.** Exigência do curso de pós-graduação, mestrado PROFMAT, do Centro de Ciências Exatas e Naturais – CCEN (UFERSA) para obtenção do título de mestre. A investigação desenvolvida é resultado de uma pesquisa que teve como ponto de partida o questionamento sobre “o comparativo adotado” ao que diz respeito ao Princípio formulado pelo mestre italiano, Francesco Cavalieri. Com efeito, as indagações foram brotadas a partir da percepção que se teve do tratamento encontrado nas linhas didáticas, acerca do Princípio de Cavalieri.

Nessa consonância, a pesquisa desenvolvida no exposto trabalho é uma fonte de investigação matemática surpreendente, pois diante de algumas temáticas trabalhadas na educação básica, torna-se necessário uma razoável perícia para transferência didática das mesmas no âmbito do ensino da matemática.

Haja vista a disparidade que existe entre os campos da matemática, é importante frisar que a clarificação geométrica fomenta uma melhor compreensão no universo cognitivo dos educandos. Nessa perspectiva, o vigente trabalho delineou-se para um notório postulado que, no geral, está sempre inerente ao estudo da Geometria Espacial – O Princípio de Cavalieri, figurando a correlação isovolumétrica firmada na sua definição.

Em contextualização, foi prestado um apanhado sobre a vida e obra do padre milanês, Bonaventura Francesco Cavalieri, onde em breve relato, mostrou-se a correlação que o mestre tinha entre o clero e o suposto fascínio pela matemática, o qual contribui na contemporaneidade para fulgência do cálculo diferencial integral.

No intuito de transparecer a aplicação do Princípio de Cavalieri, associado a sua definição encontrada nas literaturas escolares, foi explorado de forma satisfatória e coerente, o estudo dos *sólidos generalizados*, que serviu de critério organizacional para a comparação assegurada por Cavalieri, desmitificando assim, o comparativo entre os sólidos que a definição abraça sem nenhuma demonstração.

Por fim, na terceira parte deste trabalho, a aplicação daquilo que até agora foi refletido teoricamente, desembocou na necessidade de uma análise documental, deleitada sobre os livros didáticos da 2ª série da Educação Básica, levando nitidamente em consideração a lacuna aberta do tema existente nestes.

Embora com grande aceitação no meio escolar, o postulado não se realça de uma discussão que fomente a percepção geométrica dos discentes, sendo por muitas vezes, a ênfase prestada a fórmulas-aplicáveis, deixando a impressão que: ora é desnecessário o aguçamento por alguns professores; ora por desconfigurar a definição imposta nas mais diversas bibliografias. Na incessante busca de clarear, a pesquisa usou de esboços para inferências diante das paridades postas sobre um plano arbitrário.

Mantendo um encadeamento lógico, a metodologia adotada deu-se com a extensão de equiparidade das porções finitas, pondo em mesa prismas com cilindros, cones com pirâmides, e entre sólidos com bases poligonais. Nessa abordagem, foram levantadas uma espécie de possibilidades que alça a definição ditada.

Posteriormente, em anexação, uma aula seguindo todo apanhado desenvolvido na investigação do axioma de Cavalieri foi realizada numa sala de aula de escola pública de Mossoró com alunos da segunda série do nível médio, fortalecendo os pontos de investigação levantados no corpo do trabalho e simultaneamente levantando indagações para uma sólida compreensão da temática.

Nas dificuldades encontradas, enxergava-se que a curiosidade pelo objeto de estudo, perfazia caminhos que imbricava a discussão definida, inquietando o intelecto com maneiras plausíveis para enriquecimento do trabalho aqui apresentado. Dessa forma, surge uma reflexão didática, que por razões secundárias deixam de ser pautados nos aspectos pedagógicos do ensino, os questionamentos sobre temas do currículo escolar da Educação Básica.

Assim sendo, é evidente que existam transposições didáticas dentro do próprio didatismo do ensino da matemática, não somente da matemática científica para a Matemática elementar escolarizada, mas também dentro do próprio círculo da matemática ensinada. Entretanto, comumente, o que se ver é a prescrição de algoritmos, formulações; conceitos e etc..., vinculados a estaticidade corriqueira que muitas vezes subsiste o teor algebrista.

Inquietada, a pesquisa buscou atender as indagações impostas, e viu-se que é notório um cuidado didático no que é denunciado pelo Princípio de Cavalieri em finco didático, pois os as igualdades volumétricas não são sempre aceitáveis. Todavia, a conivência pelo alunado constitui numa mácula compreensiva sobre a temática investigada.

Nessa moldura, o axioma trabalhado em sala de aula não o traz as suas compreensões primeiras, embora que não haja um rigor demonstrativo sobre a obra de

Cavalieri, faz-se necessário compreender a definição do “contínuo” e sua aplicação nos sólidos geométricos.

REFERÊNCIAS

ASTOLFI, Jean-Pierre; DELEVAY, Michel. A didática das ciências. 12. Ed. Tradução Magda S. S. Fonseca – Campinas, SP: Papirus, 2008.

BOYER, Carl. B. História da Matemática. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, V. 2. Brasília: MEC / SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Educação Fundamental. Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Decreto-lei nº 1.006, de 30 de dezembro 1938. Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-1006-30-dezembro-1938-350741-publicacaooriginal-1-pe.html, acessado dia 13 de Abril de 2017.

CARL B. Boyer, História da Matemática. (São Paulo: Edgard Blücher, 1974), 226.

COSTA, F. B.A. A unidade aritmética e geometria na matemática: como essa questão é tratada nos livros didáticos de matemática e em que ela pode melhorar a aprendizagem do aluno? 2012. 65f. Monografia (Departamento de Matemática Estatística). Universidade Estadual do Rio Grande do Norte. Mossoró, RN, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações / Luiz Roberto Dante – 2. Ed – São Paulo: Ática, 2013. Matemática: Ciências e Aplicações, 2: ensino médio/ Gelson Iezzi ...[et al] . –6. Ed.— São Paulo: Saraiva 2010.
_____Outros autores: Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida.

DE GANDT, François. "Teoria e Metamorfose de uma teoria Matemática: A geometria dos Indivisíveis na Itália (Galileo, Cavalieri e Toriceli)". Cadernos de História e Filosofia da Ciência, 1986, vol.10, pp. 27 – 59.

EVES. Howard. Introdução a história da Matemática. Trad. H.H Domingues. Campinas: Ed. Unicamp, Campinas, 1995.

FAZENDA, Ivani C.A. Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro: efetividade ou ideologia? – 5. Ed. - Ipiranga, SP: Edições Loyola, 2002.

FOSSA, John A. Recursos pedagógicos para o ensino da matemática a partir de dois 7890-matemáticos da antiguidade. In: MENDES, Iran Abreu, FOSSA, John A., VALDÉS, Juan E. Nápoles. A história como agente de cognição na educação matemática. Porto Alegre: Sulina, 2006.

GARAVELLO, G. P. Cálculo de volumes pelo Princípio de Cavalieri. 2013. 41f. Dissertação (mestrado profissional em matemática-PROFMAT), Universidade Federal do ABC, são Paulo, 2013.

GIOVANNI, José Ruy, 1937- Matemática: uma nova abordagem, vol.2: versão progressões / José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno. – São Paulo: FTD, 2000 - (coleção matemática uma nova abordagem).

IEZZI, Gelson... [et. al]. Matemática Ciências e aplicações, 2:ensino médio, 6.ed –São Paulo: Saraiva, 2010.

LORENZATO, Sérgio. Para aprender matemática. Ed. Autores Associados. Campinas, SP, 2006.
_____ . Por que não ensinar Geometria? Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Blumenau: SBEM, ano III, nº 4, p. 3–13, 1995.

MANUAL DO CURSISTA: módulo II. – Cuiabá, MT: Central de texto 2013. – (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio).

MORIN, Edgar. Problemas enfrentados pelo homem na sociedade diversificada. In: LÜCK, Heloísa. Pedagogia interdisciplinar: fundamentos teórico-metodológicos. 9. Ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

ROONEY, ANNE. História da Matemática. Disponível em: <http://www.suapesquisa.com/matematica> acesso em Fevereiro de 2017.

SARAIVA, J.C.V., O volume do elipsoide no ensino médio, Revista do professor de Matemática, úmero 52 (2003), página 21 a 24, Sociedade Brasileira de Matemática.

WIKIPEDIA, internet. Disponível em: <https://upload.wikimedia.org> acesso em maio de 2017.

www.google.com.br/search? q=imagens+de+bonaventura+cavalieri&cliente.

ANEXOS

ANEXO A - Disposição de sólidos geométricos sobre um plano

Figura 33: Mesa de poliedros

Fonte: O autor

APÊNDICES

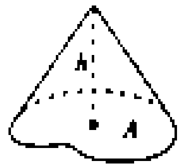
APÊNDICE A: Algoritmos da Geometria Espacial

Quadro 1: Algoritmos associados a áreas e volumes de sólidos geométricos

Cone

(A = area of base)

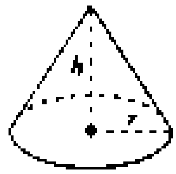
Volume $= \dfrac{Ah}{3}$



Right Circular Cone

Volume $= \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

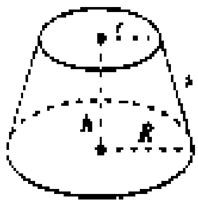
Lateral Surface Area $= \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



Frustum of Right Circular Cone

Volume $= \dfrac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$

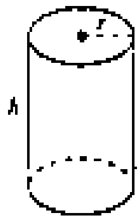
Lateral Surface Area $= \pi s(R + r)$



Right Circular Cylinder

Volume $= \pi r^2 h$

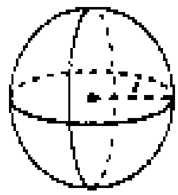
Lateral Surface Area $= 2\pi rh$



Sphere

Volume $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

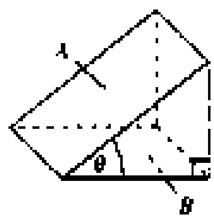
Surface Area $= 4\pi r^2$



Wedge

(A = area of upper face,
B = area of base)

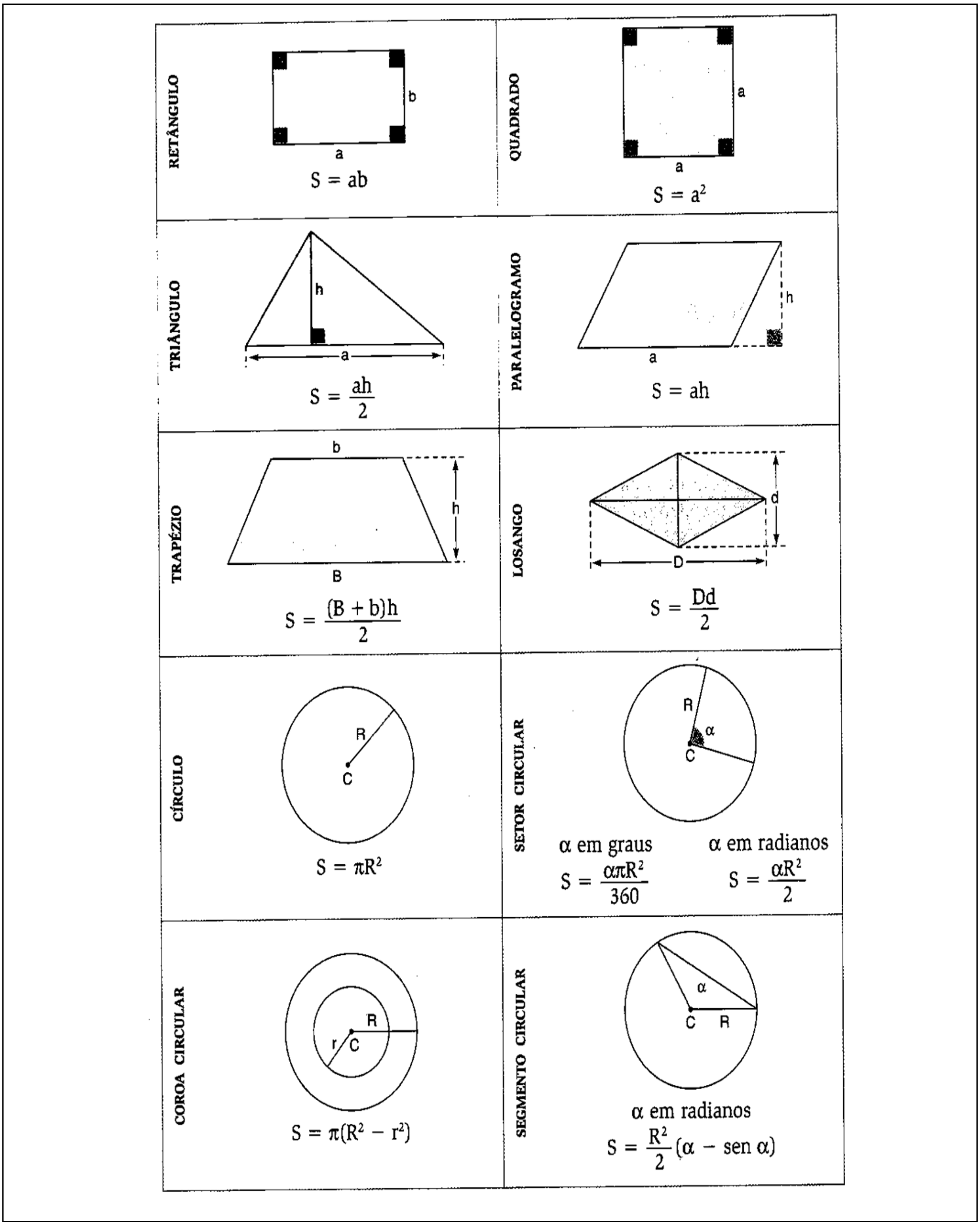
$A = B \sec\theta$



Disponível em: https://www.google.com.br/search

APÊNDICE B: Algoritmos da Geometria plana

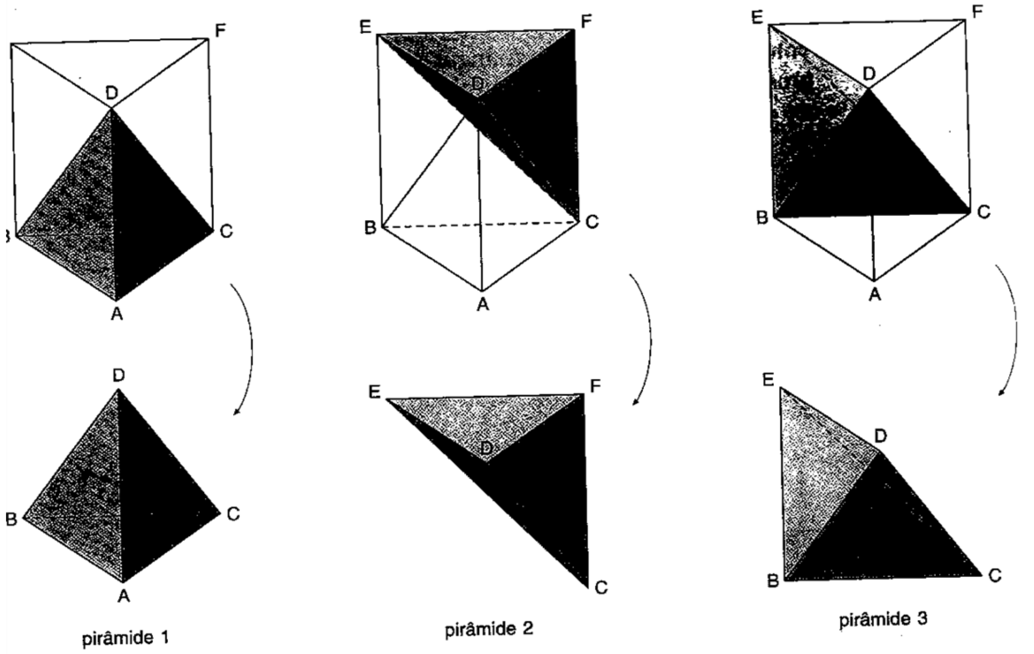
Quadro 2: Áreas das principais figuras planas



Fonte: GIOVANNI, José Ruy, 1937- **Matemática: uma nova abordagem**, vol.2: versão progressões / José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno. – São Paulo: FTD, 2000 - (coleção matemática uma nova abordagem), p.246.

APÊNDICE C: Relação geométrica entre prisma e pirâmide

Quadro 3: Decomposição de um prisma em pirâmides



Lembrando:

A pirâmide 1 tem o mesmo volume que a pirâmide 2:

- 1 e 2 têm bases congruentes ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$, pois cada triângulo é uma base do prisma).
- 1 e 2 têm a mesma altura (a do prisma).

A pirâmide 2 tem o mesmo volume que a pirâmide 3:

- 2 e 3 têm bases congruentes ($\triangle CEF \cong \triangle BCE$, pois cada um desses triângulos é a metade do retângulo BCFE).
- 2 e 3 têm a mesma altura (em relação às bases consideradas, a altura é a distância do ponto *D* ao retângulo BCFE).

A pirâmide 1 tem o mesmo volume que a pirâmide 3, pela propriedade transitiva.

Todo prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares de volumes iguais.

Designemos por:

V': volume do prisma triangular dado

V : volume de cada pirâmide triangular

Então, $3V = V'$

$$V = \frac{1}{3}V' \quad \left(\text{volume de cada pirâmide} = \frac{1}{3} \text{ do volume do prisma}\right)$$

Fonte: GIOVANNI, José Ruy, 1937- **Matemática: uma nova abordagem**, vol.2: versão progressões / José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno. – São Paulo: FTD, 2000 - (coleção matemática uma nova abordagem), p.287.

APÊNDICE D: aplicabilidade de integrais para volumes

Quadro 4: Volume de um elipsóide por integrais

Volume do elipsoide O volume do elipsoide de semieixos a, b e c é $\frac{4}{3}\pi abc$.

Demonstração. Suponhamos $c \geq b \geq a > 0$, e consideremos o semielipsóide $\mathcal{P}$ definido por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad z \geq 0$$

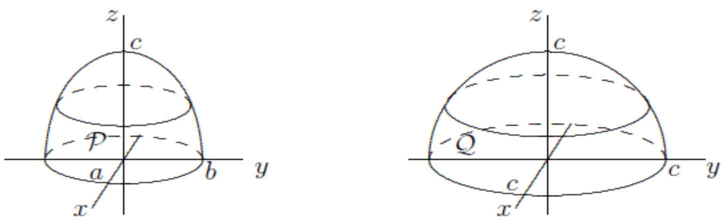


Figura 2: Volume do elipsoide

Note que esse sólido é delimitado pelos planos $z = 0$, $z = c$ e pelos gráficos de duas funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ (ou do tipo $x = g(y, z)$). Além disso, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a interseção $\mathcal{P}_t$ de $\mathcal{P}$ com o plano $z = t$ é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{t^2}{c^2} = \frac{c^2 - t^2}{c^2}$$

Seja $d = \sqrt{(c^2 - t^2)/c^2} = (1/c)\sqrt{c^2 - t^2}$. Então $\mathcal{P}_t$ é uma região elíptica dada por

$$\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} \leq 1$$

e, em virtude do resultado anterior, sua área é

$$\pi(ad)(bd) = \pi abd^2 = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2)$$

Consideremos agora a semiesfera $\mathcal{Q}$ definida por

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2, \quad z \geq 0$$

É fácil ver que esse sólido é delimitado pelos planos $z = 0$, $z = c$ e pelos gráficos de duas funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ (ou do tipo $x = g(y, z)$). Além disso, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a interseção $\mathcal{Q}_t$ de $\mathcal{Q}$ com o plano $z = t$ é dada por

$$x^2 + y^2 + t^2 \leq c^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq c^2 - t^2$$

Seja $r = \sqrt{c^2 - t^2}$. Então $\mathcal{Q}_t$ é dado por

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

e sua área é $\pi r^2 = \pi(c^2 - t^2)$.

Notemos que, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$,

$$a(\mathcal{P}_t) = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2) = \frac{ab}{c^2}a(\mathcal{Q}_t)$$

Estamos assim em condições de aplicar o Princípio de Cavalieri para volumes com $k = ab/c^2$, sendo α o plano $z = 0$. Temos então

$$v(\mathcal{P}) = kv(\mathcal{Q}) = \frac{ab}{c^2}\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi c^3 = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi abc$$

Esse é o volume do semielipsoide. Duplicando, segue o resultado desejado.

Fonte: SARAIVA, J.C.V., **O volume do elipsoide no ensino médio,** Revista do professor de Matemática, número 52 (2003), Sociedade Brasileira de Matemática, p. 22.