UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT

Denise Aparecida Perini Fernandes

LUGARES GEOMÉTRICOS NAS GEOMETRIAS EUCLIDIANA × TÁXI : CONCEITOS E POSSIBILIDADES DE ABORDAGEM NO ENSINO

Sinop/MT

2017

Denise Aparecida Perini Fernandes

LUGARES GEOMÉTRICOS NAS GEOMETRIAS EUCLIDIANA $\times$ TÁXI : CONCEITOS E POSSIBILIDADES DE ABORDAGEM NO ENSINO

Dissertação apresentada à Coordenação Intitucional do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso, Campus de Sinop como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof[a]. Dr[a]. Vera Lúcia Vieira de Camargo
Orientadora

Prof[a]. M[a]. Chiara Maria Seidel Luciano
Coorientadora

Sinop/MT

2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Fernandes, Denise Aparecida Perini .
LUGARES GEOMÉTRICOS NAS GEOMETRIAS EUCLIDIANA $\times$ TÁXI : Conceitos e Possibilidades de Abordagem no Ensino / Denise Aparecida Perini Fernandes. -- Sinop/MT: [s.n.], 2017
111 f. : il.

- Universidade do Estado de Mato Grosso. Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas. Área de conhecimento: Matemática, 2017

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Vera Lúcia Vieira de Camargo
Coorientadora: Prof^{a}. M^{a}. Chiara Maria Seidel Luciano
Inclui bibliografia

1. Geometria. 2. não-Euclidiana. 3. Geometria do taxi. 4. sequência didática. 5. Geogebra.

Este trabalho é dedicado a minha avó Maria Oliveira Barbosa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, e também a todos os educadores da UNEMAT de Sinop pela dedicação e pelos ensinamentos ao longo do curso.

Gostaria de agradecer também a Profa. Dra. Vera Lucia Vieira de Camargo, minha orientadora e a Profa Ma. Chiara Maria Seidel Luciano, minha co-orientadora, pela orientação, carinho dedicação, atenção e encorajamento durante meus estudos de mestrado.

Agradeço também ao Prof. Dr. Silvio Cesar Garcia Granja pela ajuda para a produção deste no formato Latex.

Meus agradecimentos aos membros da banca examinadora pelas contribuições.

Aos colegas que tanto me ajudaram, ensinaram e tiveram paciência comigo o meu agradecimento. Em especial, os amigos, Gracieli Perdromo Fernandes e Adriano Babiski, eu gostaria de agradecer por todo apoio que sempre me deram, sem vocês teria sido mais difícil a jornada.

À minha família que tanto me apoiou e incentivou, minha cunhada Debora, meu irmão Luís Fernando, meu pai Francisco, minha mãe Pedrolina e os dois homens da minha vida, Igor e Pedro, obrigado, amo vocês.

“Ninguém ignora tudo.
Ninguém sabe tudo.
Todos nós sabemos alguma coisa.
Todos nós ignoramos alguma coisa.
Por isso aprendemos sempre.”
(Paulo Freire)

“A Matemática é o mais maravilhoso instrumento criado pelo gênio do homem para a descoberta da verdade.”
(Laisant)

GOVERNO DE
IATO GROSSO
TADO DE TRANSFORMAÇÃO

ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCAIS EXATAS E TECNOLÓGICAS.
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT UNEMAT - SINOP

DENISE APARECIDA PERINI FERNANDES

LUGARES GEOMÉTRICOS NAS GEOMETRIAS EUCLIDIANA X TÁXI:
CONCEITOS E POSSIBILIDADES DE ABORDAGEM NO ENSINO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT no *Campus* Universitário de Sinop, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profª. Dra. Vera Lúcia Vieira de Camargo

Aprovado em: 11/04/2017

BANCA EXAMINADORA:

Profª. Dra. Vera Lúcia Vieira de Camargo - UNEMAT

Prof. Dr. Eberson Paulo Trevisan - UFMT

Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves - UNEMAT

SINOP – ABRIL - 2017

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar os resultados do estudo realizado sobre os conceitos de uma Geometria não euclidiana denominada Geometria do Táxi, em conjunto com uma proposta de sequência didática destinada a alunos e professores de Matemática da Educação Básica abordando o tema em contextos de situações-problema e atividades com o uso dos recursos do *Software Geogebra*. Os conceitos envolvidos desta geometria são de fácil compreensão e favorecem o estabelecimento de conexões com problemas de localização e movimentação no espaço, lugares geométricos e modelagem das trajetórias de deslocamentos nas ruas e avenidas de uma cidade com o intuito de motivar os alunos para a área de Matemática considerando situações problema interdisciplinares e próximas de sua realidade. Ao longo do trabalho é apresentado um comparativo dos principais aspectos conceituais da Geometria do Táxi e da Geometria Euclidiana.

Palavras chave: Geometria; não-Euclidiana; Geometria do Táxi; sequência didática; *Geogebra*.

ABSTRACT

This work aims to present the results of the study carried out on the concepts of a non-Euclidean geometry called Taxi Geometry, according to a didactic proposal of following teaching for students and teachers of Mathematics of Basic Education approaching the theme in contexts of problem situations and activities using the resources of the Geogebra Software. The concepts involved in this geometry are easy to understand and favor the establishment of connections with problems of location and movement in space, geometric places and modeling of the trajectories of displacements in the streets and avenues of a City in order to motivate students to the area of Mathematics considering interdisciplinary problem situations and close to their reality. Throughout this work, a comparison of the main conceptual aspects of Taxi Geometry and Euclidean Geometry is presented.

Keywords: Geometry; Non-Euclidean; Geometry of the Taxi; Following teaching, Geogebra.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria é uma parte da Matemática muito importante para o ensino desta disciplina devido a relevância de seus conceitos e das possibilidades de conexão que seus conteúdos permitem com problemas de contextualização e aplicações. Assim, o estudo da geometria favorece condições para que os alunos desenvolvam atitudes favoráveis frente à Matemática e com habilidades em resolução de problemas com vistas a uma aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental (1998) destacam que:

> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. (PCN, BRASIL, 1997, p.82)

Os currículos atuais na parte da geometria no contexto da Educação Básica estão organizados de forma a direcionar o ensino desta disciplina para uma abordagem quase que exclusiva de conteúdos da Geometria Euclidiana (GE), e assim dificilmente as geometrias não-euclidianas são estudadas, fazendo com que a maioria dos alunos nunca tenha sequer ouvido falar na existência de uma outra geometria que não seja a de Euclides. Em relação a abordagem de conceitos das geometrias não-euclidianas nos cursos de formação de professores a pesquisa de Barreto e Tavares (2005) constatou que em 43 cursos de Licenciatura em Matemática de diferentes instituições pesquisadas, somente cinco delas possuíam em suas matrizes curriculares conteúdos referentes às geometrias não-euclidianas. Considerando as possibilidades de aplicações das geometrias não-euclidiana em diversos contextos, acreditamos que há a necessidade de se ampliar as discussões no âmbito do ensino para possíveis inserções de tópicos destas outras geometrias, para que alunos e professores tenham contato com novos saberes e ampliem seus horizontes de conhecimento que permitam uma melhor compreensão do mundo que os cercam.

Na nossa vivência como professora de Matemática, hoje mais de 17 anos em sala de aula percebemos que a única geometria que é trabalhada durante todo o Ensino Básico é a euclidiana, por isso acreditamos que, a visão dos alunos e até mesmo de alguns professores de que só há uma geometria, e este fato é chamado por Davis e Hersh (1985) de “mito de Euclides”, conforme mostra o texto dos autores a seguir:

> É a crença de que os livros de Euclides têm verdades sobre o universo, claras e indubitáveis. Partindo de verdades evidentes, por si próprias e procedendo por demonstrações rigorosas, Euclides chega a conhecimento certo, objetivo e eterno. Mesmo agora parece que a maior parte das pessoas com instrução acredita no mito de Euclides. Até o meio ou fim do século dezenove, o mito reinava sem desafios. Todos acreditavam nele... (DAVIS e HERSH, 1985, p.366)

No âmbito das pesquisas em nível de pós-graduação, podemos encontrar várias pesquisas sobre geometrias não-euclidianas, como a esférica, hiperbólica e do Táxi e possibilidades de articulação de seus conceitos na Educação Básica.

Tratando da geometria esférica no ensino podemos encontrar os trabalhos de Reis (2006), Dueli (2013), Zanella (2013) e Gomes (2014). A pesquisa de Reis (2006) buscou estudar o uso de materiais manipuláveis e recursos pedagógicos no ensino da Geometria Esférica, utilizando como recurso o software *Cinderella*, caleidoscópio e bola de isopor para atingir seus objetivos durante um curso em nível de graduação sobre geometria esférica. O trabalho de Dueli (2013) buscou rever os conhecimentos de Geometria Euclidiana realizando uma sequência de atividades e fazendo um comparativo com a geometria esférica associado com os conceitos de Cartografia. Zanella (2013) propôs atividades de ensino sobre Geometria esférica com enfoque na navegação sobre a superfície da Terra. Já Gomes (2014) realizou um estudo sobre o surgimento da Geometria não euclidiana a partir da tentativa de prova do quinto postulado de Euclides, propondo também atividades destinadas a Educação Básica relacionada a Geometria Esférica com aplicações na área de Geografia.

Abordando a Geometria hiperbólica encontramos os trabalhos como o de Arcari (2008), Marcondes (2014) e Santos (2014). Arcari (2008) baseou-se no Modelo Euclidiano do Disco de Poincaré para Geometria Hiperbólica com o objetivo de produzir um material didático em nível de graduação sobre este conteúdo. Marcondes (2014) busca em sua pesquisa apresentar a geometria hiperbólica no Ensino Médio utilizando o *Geogebra*. Santos (2014) apresenta a trigonometria hiperbólica fazendo conexão com a trigonometria circular.

A abordagem sobre a Geometria do Táxi (GT) destinadas ao ensino é encontrada nos trabalhos de Fava Neto (2013) e César (2010) que estabelecem um paralelo entre as distâncias entre dois pontos e os conceitos de Cônicas nas Geometrias Euclidiana e do Táxi. Utilizando resolução de problemas, Caldato (2013) apresenta uma sequência de atividades de Análise Combinatória utilizando a Geometria do Táxi. Loiola (2012) abordou a Geometria do Táxi como um modelo para a geografia urbana, utilizando como recursos o *Google Maps* e, sugeriu uma dinâmica para se trabalhar a Geometria do Táxi. Cruz (2013) propôs um trabalho com a elipse da Geometria do Táxi direcionado para o ensino básico.

Em geral, todos os trabalhos mencionados abordam a história da Geometria não euclidiana e sugerem atividades que possam ser desenvolvidas na Educação Básica. Os trabalhos de Reis (2006), Dueli (2013), Zanella (2013) e Gomes (2014) propuseram uma abordagem interdisciplinar da Geometria Esférica com a área de Geografia. O trabalho de Reis (2006), além de tratar teoricamente o assunto, desenvolveu uma variedade de recursos para as atividades propostas.

Em especial, a Geometria do Táxi é uma boa possibilidade para aos alunos de diversos níveis de escolaridade conhecer uma Geometria não Euclidiana, pois é de fácil compreensão e aplicação e se constitui como um modelo apropriado para a geografia urbana. Pode ser trabalhada desde o Ensino Fundamental através de atividades práticas e divertidas e sua abordagem nas salas de aula pode proporcionar aos alunos uma variedade de novos conhecimentos geométricos presentes em seu dia-a-dia cuja a utilização dos conceitos da Geometria Euclidiana não seja adequada.

Diante da revisão da literatura realizada sobre o assunto, apresentamos neste trabalho os conceitos da GT estabelecendo um comparativo entre o conceito de distância do Táxi e distância euclidiana com uma sequência didática contendo atividades destinadas a Educação Básica sobre o assunto, utilizando o software *Geogebra* como recurso, com o intuito de colaborar com alunos e professores com um texto que possa contribuir para a transposição didática destes conteúdos para o contexto escolar.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 2 apresentamos um pouco da história do surgimento das Geometrias não-euclidianas à partir da tentativa de prova do *quinto postulado* de Euclides e definimos a Geometria do Táxi como uma Geometria não euclidiana, um comparativo entre o conceito de distância nas geometrias Euclidiana e do Táxi e os Lugares Geométricos nas duas geometrias e suas características.

Apresentamos no Capítulo 3 uma discussão sobre as possibilidades da resolução de problemas aliada ao uso do *Geogebra* como perspectiva metodológica para o ensino da Matemática.

No Capítulo 4 apresentamos uma sequência didática com sugestões de atividades lúdicas para se trabalhar os conceitos de Lugares Geométricos nas Geometrias Euclidiana e do Táxi fazendo uso do software *Geogebra* e utilizando a resolução de problemas como suporte metodológico.

Nas considerações finais apresentamos as conclusões acerca do trabalho desenvolvido, buscando verificar se os nossos objetivos foram alcançados e quais suas contribuições para o ensino da Matemática e para a nossa formação de professor.

2 A GEOMETRIA DO TÁXI E SUAS RELAÇÕES COM A GEOMETRIA EUCLIDIANA

2.1 UM BREVE HISTÓRICO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

De acordo com Eves (2011), o grego Euclides de Alexandria, considerado o pai da Geometria, foi um professor matemático criador da famosa escola de Alexandria, que contribuiu em várias áreas como: Astronomia, Música, Mecânica, dentre outras. Seu trabalho mais famoso foi na área de Matemática com a obra *Os Elementos*, composta de treze livros que reúnem e sistematizam grande parte do conhecimento matemático da época (entre os anos de 330 e 320 a.C.). A ciência e a própria história da humanidade foram influenciadas pela obra *Os Elementos*, pois trouxe contribuições relativas ao modo de elaboração do conhecimento matemático e foi um dos livros mais reproduzidos e estudados no mundo ocidental e sendo também utilizado como único livro para se ensinar Matemática por um longo período. Os treze volumes que constituem a sua obra, foram utilizados por inúmeros filósofos e matemáticos de todos os países e de todos os tempos, devido à sua simplicidade de estilo e clareza. Em sua obra, Euclides apresenta a geometria como um sistema lógico: definições, axiomas, postulados, proposições e demonstrações organizadas de forma ordenada e articulada.

De acordo com Melo (2014), mais tarde a geometria como apresentada em *Os Elementos* de Euclides foi revista e a primeira revisão se deve a Hilbert (1862-1943), um dos mais brilhantes matemáticos de todos os tempos, que em 1899 escreveu uma obra fazendo uma releitura dos axiomas de Euclides, propondo uma forma de definição mais precisa de cada axioma e questionando quais eram os axiomas necessários para estruturar uma geometria axiomática. Hilbert estruturou toda a sua geometria com base em 21 axiomas, que mais tarde foi revisada e estruturada com 20 axiomas.

Na obra original de Euclides, os primeiros postulados apresentados a seguir, segundo Eves (2011) são abstrações derivadas de experiências com régua, compasso e transferidor:

- P_1: *É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.*

- P_2: *É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.*

- P_3: *É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.*

- P_4: *Todos os ângulos retos são iguais entre si.*

- P_5: *Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.*

O postulado P_5 apresentado, foi muito investigado por Euclides e por matemáticos que vieram posteriormente como Cláudio Ptolomeu (85 a.C. -165 d.C), Proclus (410-485 d.C), Nasîr-Eddîn (1201-1274), John Wallis (1616-1703) que tentaram prová-lo. A princípio chegou-se a cogitar a hipótese de que talvez não se tratasse de um postulado e sim de um teorema e, que assim, fosse possível ser demonstrado por meio dos demais postulados apresentados.

A versão mais conhecida do quinto postulado é de John Playfair (1748-1 819): "Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta". (EVES, 2011, p.539)

Legendre (1752-1833) contribuiu para popularizar o quinto postulado com sua obra *Elementos da Geometria*, que foi publicado em 1794 e foi o texto elementar principal sobre o tema durante muitos anos no qual apresentava uma prova de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que ou igual a dois ângulos retos.

Na tentativa de demonstrar o postulado em questão, o italiano Gerolamo Saccheri (1667-1733), jesuíta da Universidade de Pádua utilizou o método de redução ao absurdo, desenvolvendo assim, o "quadrilátero de Saccheri". No entanto, ele não conseguiu chegar a uma contradição e nem a conclusões substanciais e o problema continuou aberto por muitos anos, sendo chamado por D'Alembert de "O escândalo de elementos de geometria"[1]. Deste modo percebia-se que havia uma espécie de paradoxo implícito no quinto postulado.

De acordo com Ruiz (1999), quando se começou a pensar que a geometria não teria que corresponder aos objetos do mundo que nos cerca e que os axiomas de Euclides não são verdades absolutas, a história começa a mudar e inicia-se uma nova maneira de se conceber a geometria. Nesse sentido, o autor menciona que um advogado dedicado à Matemática chamado Ferdinand Schweikart (1780-1859), concluiu que existiam duas geometrias, uma Euclidiana e outra que ele chamou de geometria astral por acreditar que ela se dava no espaço estrelar.

Nesse contexto, alguns matemáticos como Lobachevski (1792-1856), Bolyai (1802-1860), Gauss (1777-1855) e Riemann (1826-1866) obtiveram grande destaque no desenvolvimento das Geometrias não-Euclidianas, mesmo recebendo críticas, por de seus pares. Os motivos que levaram esses grandes matemáticos a iniciar um trabalho nesta área foi o fato de não considerarem o quinto postulado de Euclides como verdade absoluta.

Nessa direção, duas negações do 5º postulado fazem surgir duas geometrias não-Euclidianas a hiperbólica e a elíptica. Para o referido postulado surgem então duas novas versões:

Na versão Hiperbólica: Por um ponto, não pertencente a uma dada reta, passam no mínimo duas retas paralelas à dada reta.

e

Na versão Elíptica ou esférica: Duas retas sempre se intersectam.

[1] Considerando os problemas envolvidos na busca de boas definições, D'Alembert chega a se referir à definição e às propriedades da linha reta e das linhas paralelas como tropeço e escândalo dos elementos de Geometria (D'ALEMBERT, 1986, p. 318).

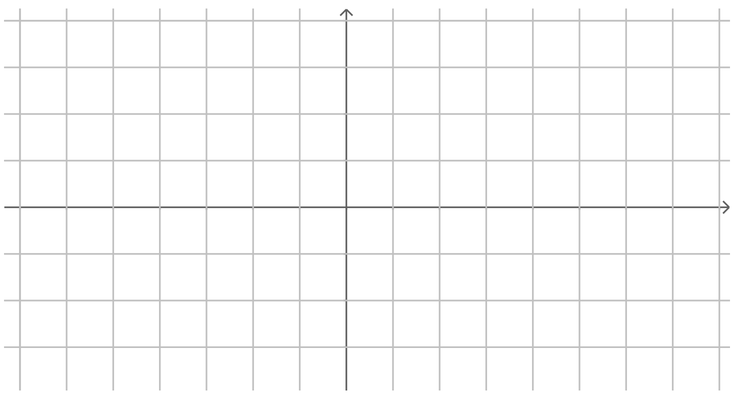
Depois deste período que foi definido por Eves (2011) como a "libertação da geometria", surgem novas geometrias, denominadas de *Geometrias não-Euclidianas*.

Nesse contexto, de acordo com Krause (1986), surge com o russo Hermann Minkowski (1864-1909) uma outra Geometria não Euclidiana denominada de *Geometria do Táxi*, bastante intuitiva conforme será abordada na próxima seção.

2.2 A GEOMETRIA DO TÁXI

Criada pelo matemático e físico russo Hermann Minkowski (1864 – 1909), que também foi o criador dos conceitos da quarta dimensão que permitiu a Albert Einstein (1879-1955) elaborar sua teoria da relatividade, a Geometria do Táxi, também denominada *Métrica de Manhattan, Geometria Urbana, Métrica do quarteirão*, dentre outras denominações, foi apresentada pelo matemático austríaco Karl Menger (1902-1985) em uma exposição no Museu de Ciência e Indústria de Chicago, momento em que ele distribuiu um livreto intitulado "Você gostará de Geometria" e o termo "Táxi" foi usado pela primeira vez. De uma forma ilustrativa a Geometria do Táxi é constituída de um plano cartesiano coberto com malhas quadriculadas na qual as linhas horizontais e verticais nos dão a ideia de ruas de uma cidade ideal (onde todas as quadras têm as mesmas dimensões). Tal geometria nos fornece um modelo para a geometria urbana que para se deslocar de um ponto a outro só pode ser por trajetos que envolvam trechos horizontais e verticais.

Figura 1 – Plano na Geometria do Táxi



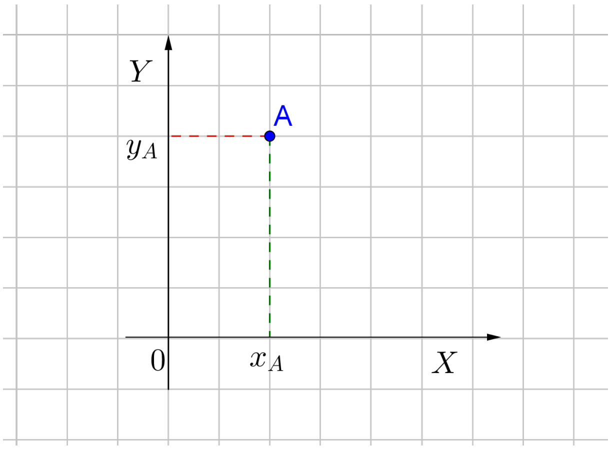
Fonte: Próprio Autor.

Embora se tenha utilizado uma malha quadriculada, isto não significa que na Geometria do Taxista os pontos devem ter necessariamente coordenadas inteiras. Este recurso será utilizado com objetivo de simplificar a medição da distância na GT e, a menos que se diga o contrário, adotaremos tal procedimento.

2.2.1 Distância entre Dois Pontos

De acordo com Eves (2011) a Geometria Analítica teve origem graças as contribuições de Pierre de Fermat (1601 - 1665). O Plano Cartesiano é a representação geométrica que permite o estudo de Lugares geométricos bidimensionais. No plano, Ox determina o eixo das abscissas e Oy, o eixo das ordenadas. Cada ponto do plano está associado a uma abscissa e uma ordenada, sendo representado por um par ordenado do tipo (x,y), onde x e y são chamadas coordenadas cartesianas.

Figura 2 – Representação do Plano Cartesiano



Fonte: Próprio Autor

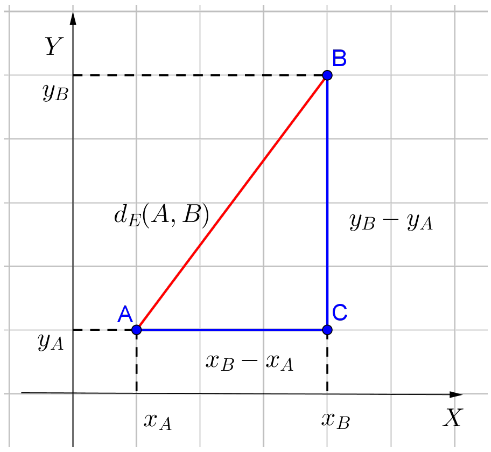
Para se calcular a distância entre dois pontos, segundo a Geometria Euclidiana, pode-se considerar os pontos $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$, cada um destes pontos poderia ser designados quer por uma letra maiúscula, ou por um par ordenado de números reais (as "coordenadas" do ponto) como mostra na Figura 2.

Sendo a distância euclidiana $d_E(A,B)$ entre os pontos A e B a medida do segmento AB, e tomando um ponto $C \notin AB$ podemos construir um triângulo retângulo ABC como o da Figura 3.

Aplicando o Teorema de Pitágoras a distância euclidiana entre os pontos A e B pode ser obtida pela Equação (1)

$$d_E = \sqrt{|x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2} \tag{1}$$

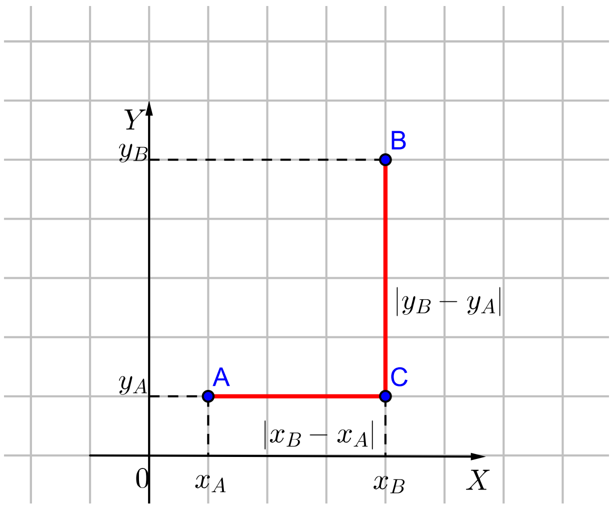
Figura 3 – Representação da d_E entre pontos no plano



Fonte: Próprio Autor.

A distância do táxi de A para B $d_T(A,B)$, não é determinado em linha reta como na GE, mas sim como a trajetória de um táxi, ou seja, são quantificadas as unidades horizontalmente e verticalmente para se ir de A para B, como mostra a Figura 4

Figura 4 – Representação da distância do Táxi



Fonte: Próprio Autor.

Nessa perspectiva, a distância do Táxi do ponto A até B pode ser obtida pela equação:

$$d_T = |x_B - x_A| + |y_B - y_A| \tag{2}$$

A Geometria do Táxi utiliza os mesmos conceitos de pontos, linhas e medidas de ângulos da GE e se difere na forma de como é definida a distância entre os pontos. Na GT a menor distância entre dois pontos é medida como em uma corrida de táxi nas ruas de uma cidade sendo sempre maior ou igual à distância entre os pontos da GE, conforme demonstração para o caso do espaço bidimensional apresentada a seguir:

Sejam $d_E(A,B)$ e $d_T(A,B)$ as ditâncias na geometria euclidiana e geometria do Táxi entre os pontos A e B, respectivamente:

Mostraremos a seguir que a $d_E(A,B) \leq d_T(A,B)$ valendo a igualdade apenas quando ambos os pontos possuírem as coordenadas correspondentes iguais, ou seja, os pontos possuam valores de abscissas e/ ou valores de ordenadas iguais.

Sejam os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Temos que: $2.|x_B - x_A|.|y_B - y_A| \geq 0$,

Somando em ambos os lados da desigualdade $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ temos:

$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + 2.|x_B - x_A|.|y_B - y_A| \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

Reescrevendo a equação temos:

$(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|)^2 \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

Como os dois membros da inequação são não-negativos, ao se extrair as raízes quadradas de ambos, a desigualdade continua válida:

$\sqrt{(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|)^2} \geq \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

O que resulta:

$|x_B - x_A| + |y_B - y_A| \geq \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Portanto:

$d_T(A,B) \geq d_E(A,B)$.

2.3 MÉTRICA E ESPAÇOS MÉTRICOS

As definições a seguir estão baseadas em Lima (1977). Uma métrica num dado conjunto $M \neq \emptyset$ é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, a qual associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, que é denominado distância de x a y satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $x,y,z \in M$:

i. $d(x,x) = 0$; (nulidade) .

ii. $d(x,y) > 0, se x \neq y$ (positividade) .

iii. $d(x,y) = d(y,x)$; (simetria) .

iv. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$; (desigualdade triangular) .

Um conjunto munido de uma métrica é chamado de espaço métrico (M,d). As distâncias, euclidiana e do táxi, são exemplos particulares de métricas sobre $\mathbb{R}^2$.

Dados $x = (x_1,x_2...,x_n)$ e $y = (y_1,y_2...,y_n)$, as três maneiras mais usuais de se definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$ são:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{(distância euclidiana),}$$

$$d'(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| \text{ (distância de Manhattan) e}$$

$$d''(x,y) = max\{|x_1 - y_1|,...,|x_n - y_n|\} = max_{1\leq\ i\ \leq n}|x_i - y_i| \text{ (distância máxim).}$$

Para mais detalhes sugerimos Lima (1977).

Para Janssen (2007), a distância euclidiana precisa satisfazer as quatro condições apresentadas anteriormente para ser considerada uma métrica. Apresentamos a seguir a prova de que a distância euclidiana é uma métrica e para isso utilizamos o caso do espaço bidimencional.

Dados $P(x_P,y_P)$, $Q(x_Q,y_Q)$ e $R(x_R,y_R) \in \mathbb{R}^2$.

Prova:

- Condições i. e ii.:

  Se $P = Q$ então, $d(P,Q) = d(P,P) = \sqrt{(x_P - x_P)^2 + (y_P - y_P)^2} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2} = 0$.

  Se $P \neq Q$, então $x_P \neq x_Q$ ou $y_P \neq y_Q$.

  E também $(x_P - x_Q)^2 > 0$ ou $(y_P - y_Q)^2 > 0$.

  Supondo $x_P \neq x_Q$

  Temos: $\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2} = |x_P - x_Q| > 0$.

  Assim sendo, $\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} > 0$.

- Condição iii.: $d(P,Q) = d(Q,P)$

  $d(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

  $= \sqrt{((-1)(-x_P + x_Q))^2 + ((-1)(-y_P + y_Q))^2}$

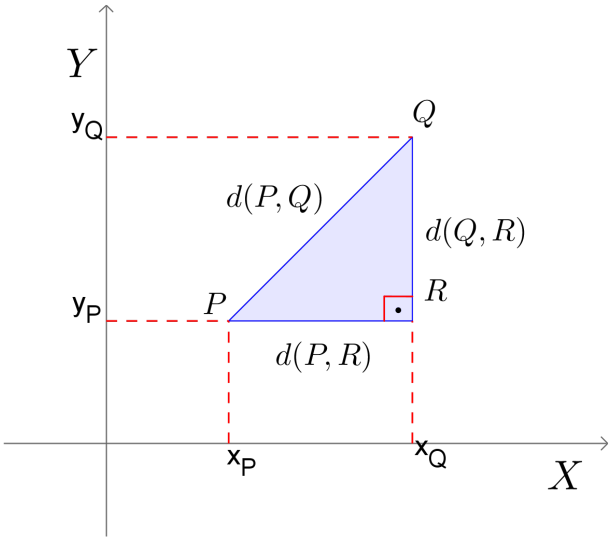
  $= \sqrt{(-1)^2(-x_P + x_Q)^2 + (-1)^2(-y_P + y_Q)^2}$

  $= \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

  $= d(Q,P)$

- Condição iv.: $d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$

Figura 5 – Desigualdade triangular



Fonte: Próprio Autor.

Tomando os pontos P, Q e R como representados na Figura 5, temos que:

$d(P,Q)+d(Q,R) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} + \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2}$

e $d(P,R) = \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2}$

De sorte que, pela desigualdade triangular "A soma dos comprimentos de quaisquer dois lados de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado".

$\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} + \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2} \geq \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2}$

Então, $d(P,Q)+d(Q,R) \geq d(P,R)$.

De acordo com Janssen (2007), sejam $P(x_P,y_P)$, $Q(x_Q,y_Q)$ e $R(x_R,y_R) \in \mathbb{R}^2$. A distância do taxista, cuja fórmula é dada pela Equação (2), também é uma métrica.

Prova:

- Condições i. e ii.:

  $d_t(P,Q) \geq 0$ e $d_t(P,Q) = 0$ se e somente se $P = Q$. Se $P = Q$, então, $d_t(P,Q) = d_t(P,P)$ Deste modo, temos que

  $d_t(P,Q) = |x_P - x_P| + |y_P - y_P|$

  = $|0| + |0|$

  = 0.

  Por outro lado, se $d_t(P,Q) = d_t(P,P)$, por definição, temos:

  $0 = d_t(P,Q)$

$= |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|$

Logo,

$x_P = x_Q$ e $y_P = y_Q$

Então:

$P = Q$.

A seguir, mostremos que $d_t(P,Q) \geq 0$. Em verdade, se $P \neq Q$, então $x_P \neq x_Q$ ou $y_P \neq y_Q$, de modo que, pela definição de $d_t(P,Q)$, resulta em $|x_P - x_Q| > 0$ ou $|y_P - y_Q| > 0$. Se $x_P \neq x_Q$ (caso análogo para $y_P \neq y_Q$), observe que

$|x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| \geq |x_P - x_Q| > 0$,

ou seja, $d_t(P,Q) = |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| \geq 0$.

- Condição iii.: $d_t(P,Q) = d_t(Q,P)$

  Temos que

  $d_t(P,Q) = |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|$

  $= |(-1)(-x_P + x_Q)| + |(-1)(-y_P + y_Q)|$

  $= |(-1)(x_Q - x_P)| + |(-1)(y_Q - y_P)|$

  $= |(-1)||(x_Q - x_P)| + |(-1)||(y_Q - y_P)|$

  $= |x_Q - x_P| + |y_Q - y_P|$

  $= d_t(Q,P)$.

- Condição iv.: $d_t(P,Q) + d_t(Q,R) \geq d(P,R)$

  Temos, pela desigualdade triangular modular ($|A| + |B| \geq |A+B|$), que:

  $d(P,Q) + d(Q,R) = |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| + |x_Q - x_R| + |y_Q - y_R|$

  $= (|x_P - x_Q| + |x_Q - x_R|) + (|y_P - y_Q)| + |y_Q - y_R|)$

  $= |x_P - x_R| + |y_P - y_R|$

  $= d(P,R)$.

  Consequentemente: $d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$.

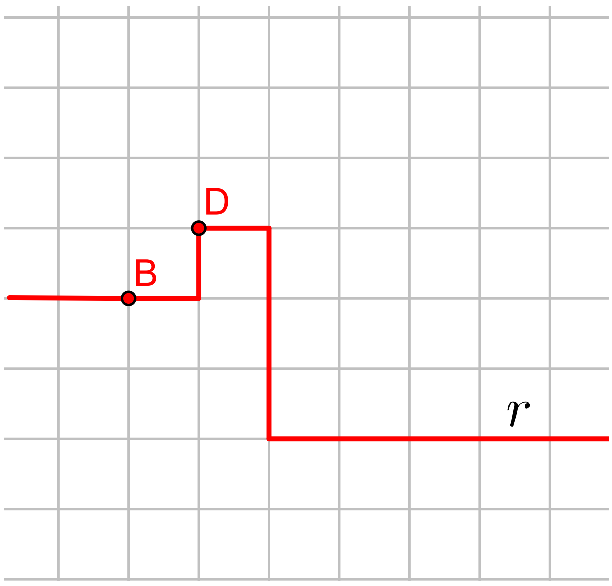
Diante dos resultados obtidos, temos então que as distância euclidianas e do táxi são métricas no espaço bidimensional, se estendendo para o caso n-dimensional. A métrica euclidiana dominou a concepção de métrica ideal para mensurar distâncias do mundo natural por muito tempo, porém, em algumas situações esta métrica pode não ser apropriada para calcular a distância a ser percorrida entre duas localidades de uma cidade, por exemplo. A métrica do táxi calcula a distância entre dois pontos a partir de linhas horizontais e verticais. Ou seja, a táxi-distância mínima entre dois pontos pode ser determinada traçando qualquer um dos caminhos que liga um ponto a outro na malha.

2.4 A RETA NA GEOMETRIA DO TÁXI

> Em geometria euclidiana, reta é um conceito primitivo, ou seja, sem definição formal. Em geometria do táxi: a reta é a união de viagens diretas, ou seja, é uma viagem estendida, no sentido de que se considera sempre o caminho mais curto entre dois pontos quaisquer dessa viagem. (ABREU; BARROSO; MIRANDA, 2005).

Na GT, o conceito de retas paralelas continua sendo o mesmo utilizado em geometria euclidiana, ou seja, retas paralelas são retas que não se interceptam.

Figura 6 – Representação de uma reta na GT

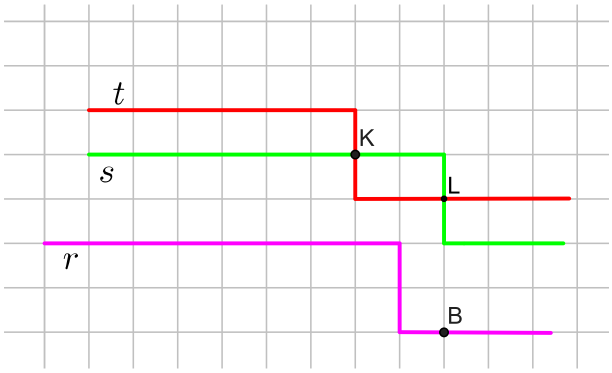


Fonte: Próprio Autor.

A GT é considerada como Geometria não euclidiana porque contradiz o V Postulado, e em seu lugar considera que, por um ponto dado P exterior à reta r, ambos em um mesmo plano, existem mais de uma reta paralela a esta reta r." (CRUZ 2015, p.17)

Na Figura 7 podemos observar que pelo ponto K fora da reta r passam as retas t e s, paralelas a r.

Figura 7 – Representação de retas no plano da GT

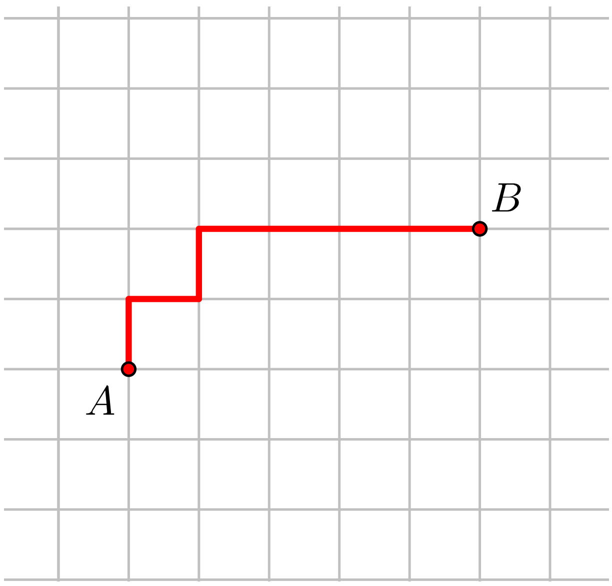


Fonte: Próprio Autor.

Para definirmos segmentos e triângulos na GT, precisamos definir dois conceitos básicos desta geometria:

- Viagem Direta: é o caminho que possui a menor distância entre dois pontos, conforme ilustrado na Figura 8

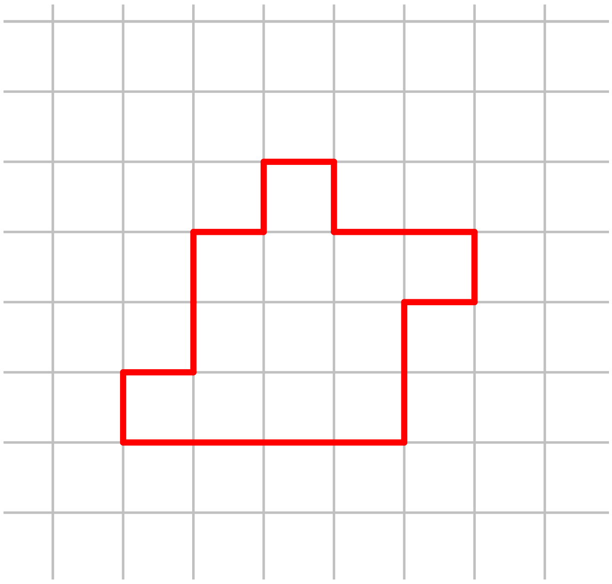
Figura 8 – Representação de uma viagem direta de A para B



Fonte: Próprio Autor, baseado em Miranda (1999)

- Viagem redonda: também chamada de “curva fechada”, é um conjunto de blocos tal que cada bloco do conjunto seja incidente com exatamente 2 outros, ou seja, não existem "pontas soltas", como podemos observar na Figura 9

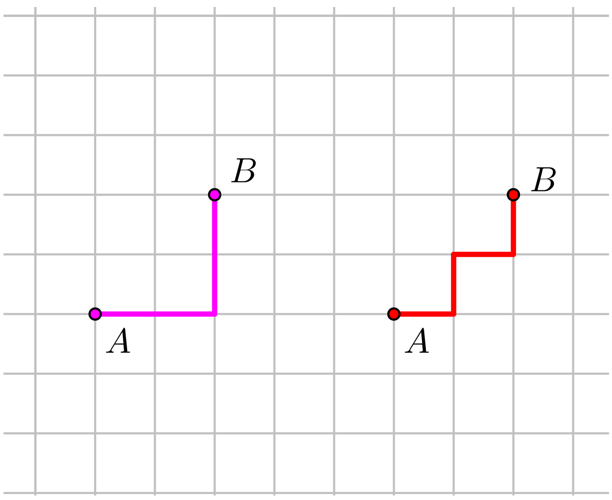
Figura 9 – Representação de uma viagem redonda



Fonte: Próprio Autor, baseado em Miranda (1999)

O segmento de reta na GE é único, sendo obtido pela união das extremidades do segmento com os pontos entre as extremidades. Na GT, um segmento de reta é o conjunto de blocos que ligam esses pontos através de uma viagem direta. Existem vários segmentos de reta, pois não há apenas uma viagem direta entre dois pontos, como vemos na Figura 10,

Figura 10 – Duas representações de segmento de reta AB na GT

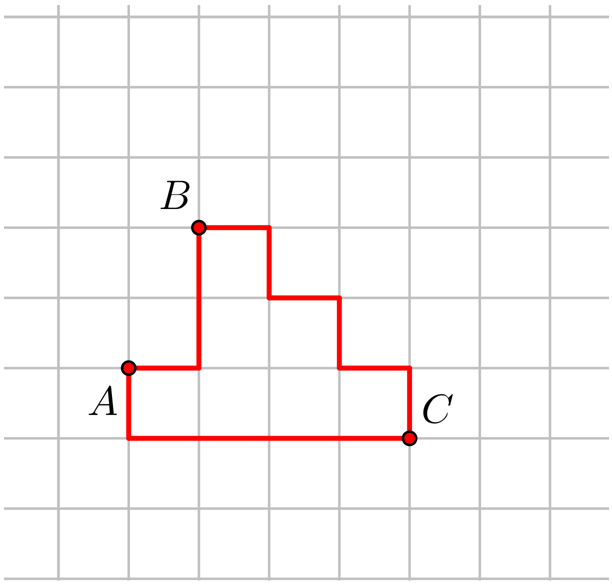


Fonte: Próprio Autor.

2.5 TRIÂNGULO NA GEOMETRIA DO TÁXI

De acordo com MIRANDA, 1999, “O triângulo táxi é formado pela união de 3 viagens diretas e essa união é uma viagem redonda”.

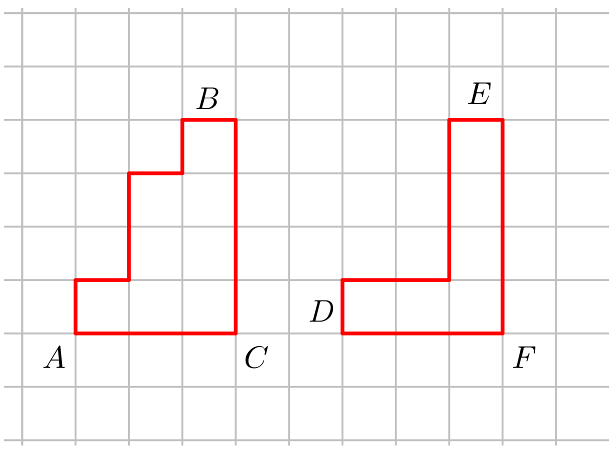
Figura 11 – Representação do triângulo ABC na GT



Fonte: Próprio Autor, baseado em Miranda (1999)

Como as mesmas medidas dos ângulos internos de um triângulo são retos (90°), os lados congruentes não serão suficiente para que dois triângulos sejam congruentes, ou seja, o Axioma Lado Ângulo Lado não é válido para todos os casos como ilustra um contraexemplo na Figura 12.

Figura 12 – Contraexemplo do caso de congruência de triângulos L.A.L na GT



Fonte: Próprio Autor, baseado em Miranda (1999)

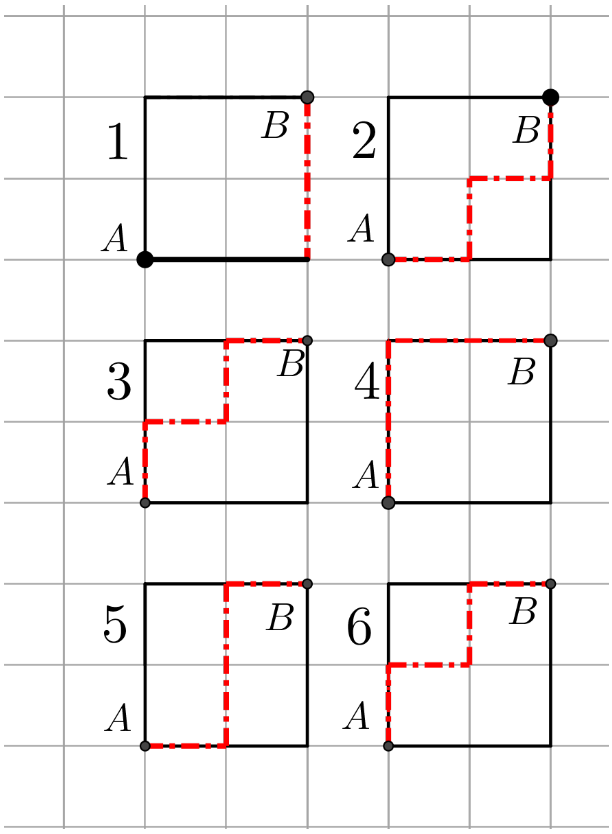
Analisadas as equivalências entre as métricas, trataremos a seguir do número de possíveis caminhos entre dois pontos na GT

2.6 A GEOMETRIA DO TÁXI E SUA RELAÇÃO COM A ANÁLISE COMBINATÓRIA

Embora haja apenas um menor caminho na GE de A para B, na GT existem vários caminhos de distância mínima entre estes pontos. O número de trajetos mínimos entre pontos na Geometria do Táxi, pode ser obtido pelas combinações de possíveis trajetos de A para B.

Por exemplo, se for dada uma grade $2X2$, podemos encontrar 6 caminhos diferentes com mesma distância, como pode ser observado na Figura 13:

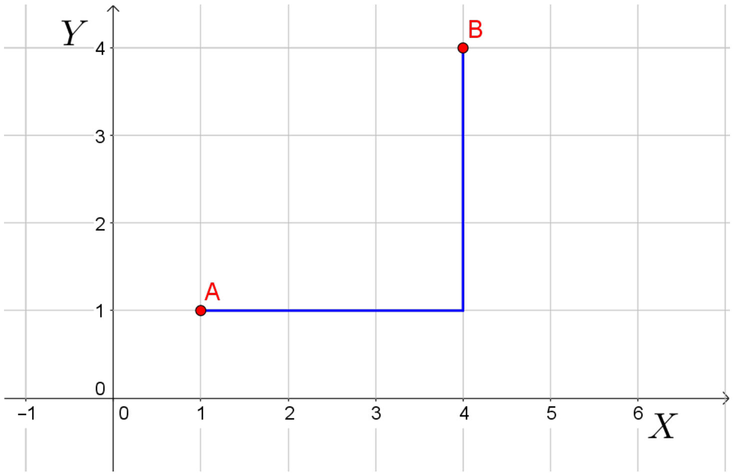
Figura 13 – Caminhos diferentes de A para B na GT



Fonte: Próprio Autor.

Para facilitar nosso trabalho na busca pelo número de caminhos da distância do Táxi de um ponto a outro por meio da menor distância recorremos a elementos da Análise Combinatória com o objetivo de responder problemas envolvendo métodos de contagem.

Figura 14 – Caminho entre os pontos A e B



Fonte: Próprio Autor.

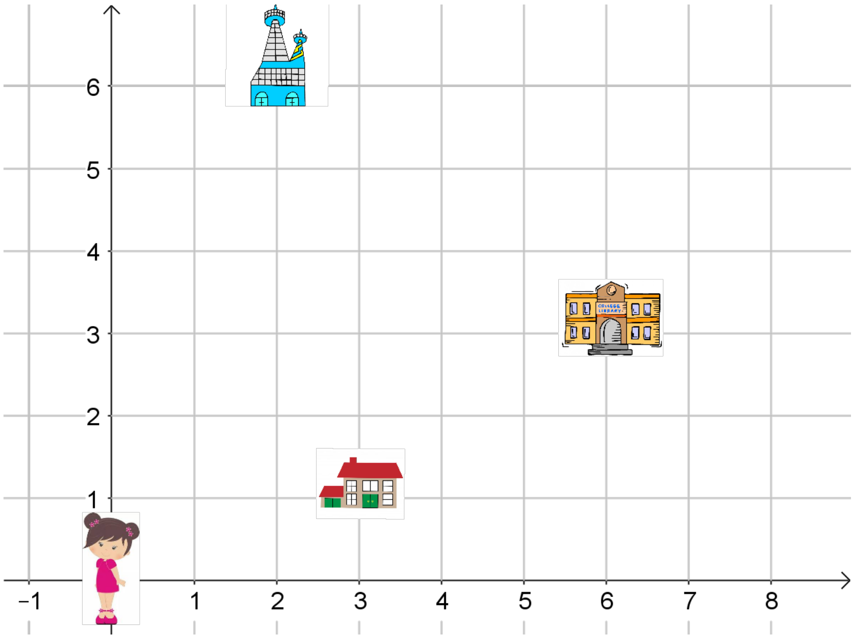
Na GT existem vários outros caminhos que correspondem a $d_T(A,B)$, que é um problema de contagem e pode ser explorado de forma simples ou até em situações mais complexas, pela Equação (3), onde o menor caminho a ser percorrido para se deslocar de A até B for n quadras com p quadras horizontais e q verticais. O número de caminhos com menor distância entre dois pontos pode ser determinado pela combinação simples de n elementos distintos tomados p a p, conforme expressão da Equação 3:

$$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!q!} = \frac{n!}{(n-q)!q!} = C_q^n \tag{3}$$

Qualquer outro caminho direto de A a B , na Figura 14, resulta em valores iguais de d_T. Na GE apenas um caminho entre A e B, precisamente o segmento AB, corresponde ao caminho de menor distância.

Exemplo 1: De acordo com a Figura 15, Maria encontra-se no ponto de coordenadas (0,0). Qual o número de trajetos diferentes para Maria ir até a escola com menor distância? (locomovendo-se apenas para a direita e para cima).

Figura 15 – Figura referente ao Exemplo 1

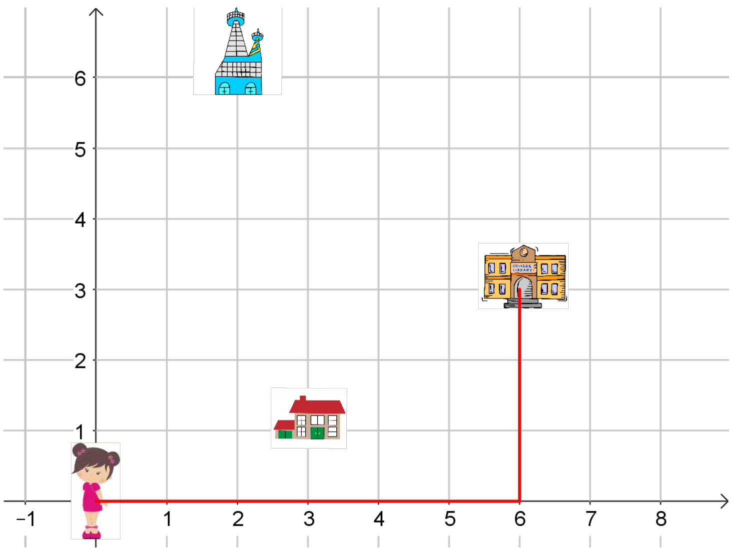


Fonte: Próprio Autor.

$C_6^9 = \dfrac{9!}{6!3!} = 84$ trajetos diferentes

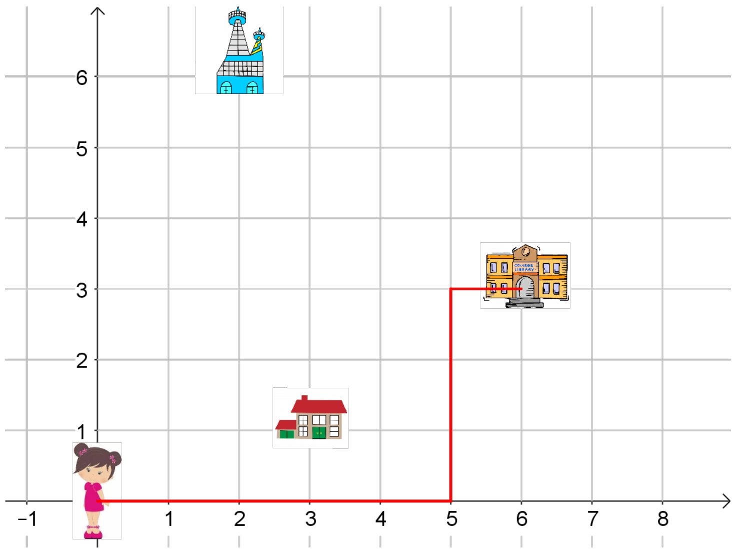
Três possíveis caminhos com distância mínima do ponto de origem à escola para o exemplo dado seriam: (Figura 16) $HHHHHHVVV$, (Figura 17) $HHHHHVVVH$, (Figura 18) $HHHHHVHVV$ e assim por diante.

Figura 16 – Caminho $HHHHHHVVV$



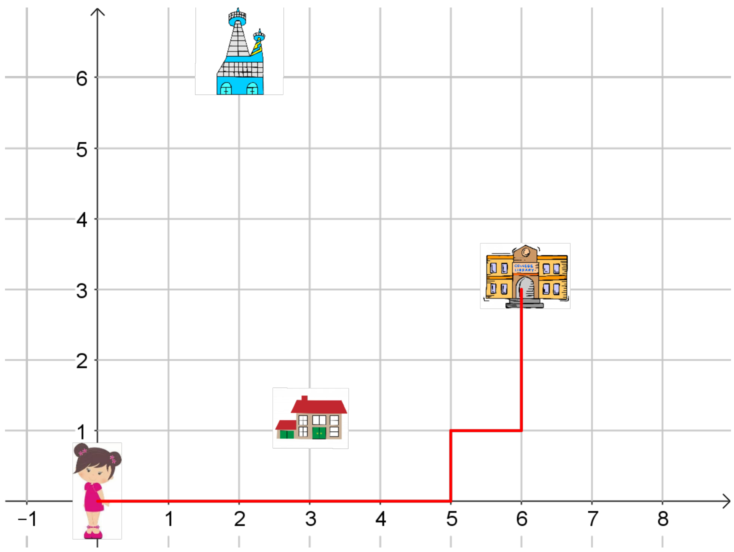
Fonte: Próprio Autor.

Figura 17 – Caminho $HHHHHVVVH$



Fonte: Próprio Autor.

Figura 18 – Caminho $HHHHHVHVV$



Fonte: Próprio Autor.

A distância entre Maria e sua escola pode ser obtida pela fórmula da distância do táxi d_T de A até B:

$d_T = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$=

$d_T = |6-0| + |3-0|$=

$d_T = |6| + |3|$=

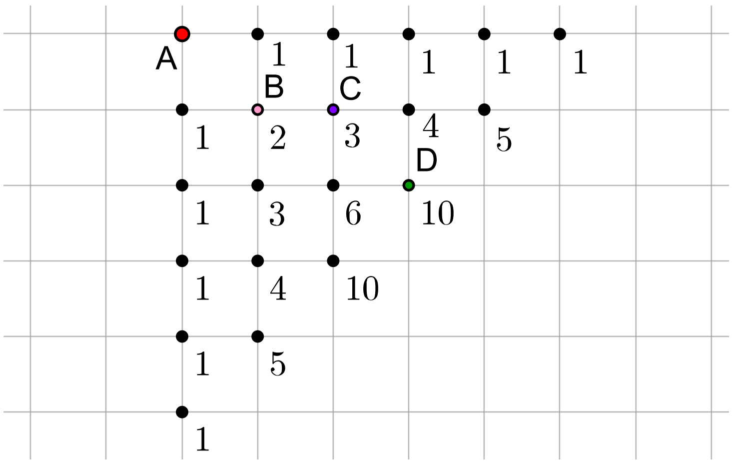
$d_T = |9|$=

$d_T = 9$

2.6.1 O Número de Caminhos com Distância Mínima na GT

Ainda utilizando a malha quadriculada como as quadras de uma cidade, o número de caminhos a partir de um ponto A pode ser encontrado utilizando uma versão girada do triângulo de Pascal em que cada valor de uma linha é obtido pela soma dos dois valores mais próximos da linha anterior, como mostra a Figura 19. Como ponto de partida, em cada "vértice "colocamos o valor associado ao número de menores caminhos possíveis para se chegar de A até o ponto desejado.

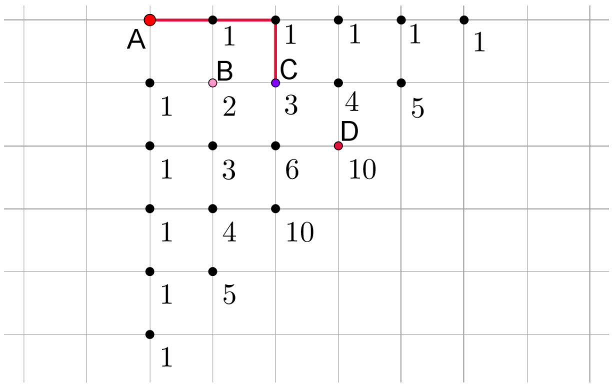
Figura 19 – Número de possibilidades de caminhos na GT partindo do ponto A com distância mínima



Fonte: Próprio Autor.

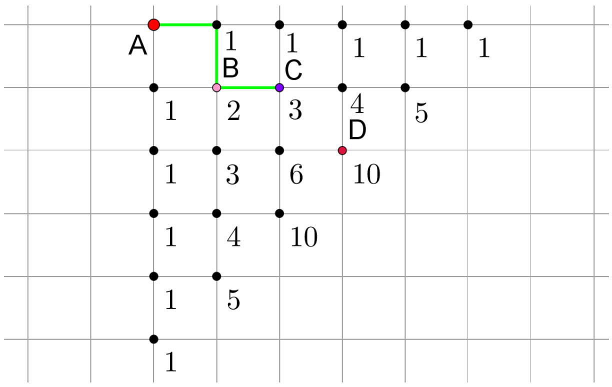
Por exemplo: Movimentando-se sempre pela direita e para baixo, de A até B, , temos 2 possibilidades com menor distância, para ir de A até C, temos 3 possibilidades. Para ir de A até D temos 10 possibilidades. No entanto, podemos utilizar o mesmo triângulo de Pascal da versão girada em outra posição, como ilustram as Figuras 20, 21 e 22.

Figura 20 – Representação do Triângulo de Pascal girado para determinar o número de possibilidades de caminhos de A a C (I)



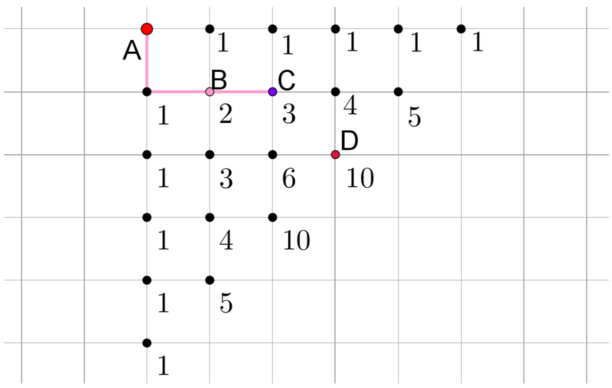
Fonte: Próprio Autor.

Figura 21 – Representação do Triângulo de Pascal girado para determinar o número de possibilidades de caminhos de A a C (II)



Fonte: Próprio Autor.

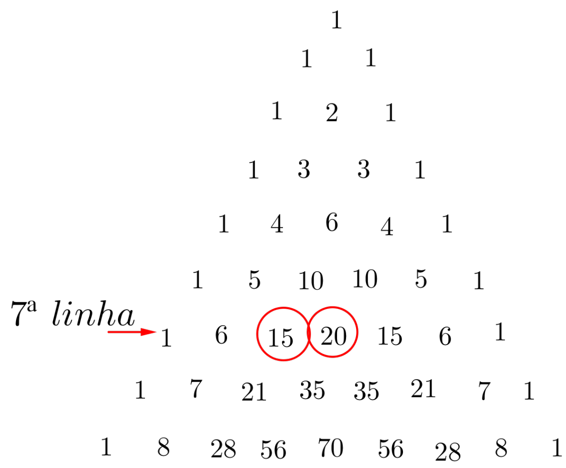
Figura 22 – Representação do Triângulo de Pascal girado para determinar o número de possibilidades de caminhos de A a C (III)



Fonte: Próprio Autor.

Dada uma grade pXq, é possível encontrar o número de menores caminhos somando os valores de $p+q$. Supondo $p=3$ e $q=4$, assim $p+q=7$, logo o número de caminhos de A à B com menor distância será a soma do terceiro e quarto elemento da sétima linha do triângulo de Pascal, como ilustra a Figura 23.

Figura 23 – Triângulo de Pascal



Fonte: Próprio Autor.

Desta forma há 35 diferentes caminhos com o valor de $d_T = 7$

Diante disto, concluímos que ao contrário da GE em que há apenas um caminho entre dois pontos de menor tamanho,na GT há várias possibilidades de caminhos para se chegar de um ponto a outro com a mesma distância mínima.

2.7 LUGARES GEOMÉTRICOS

Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o lugar geométrico (LG) dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satistaz duas propriedades:

1. *Todo ponto de L possui a propriedade P.*
2. *Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a L.*

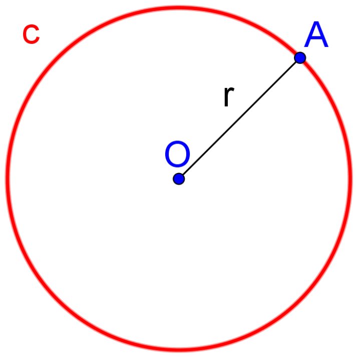
A seguir apresentamos os seguintes lugares geométricos: Circunferência, Elipse, Hipérbole, Parábola e Mediatriz.

2.7.1 Circunferência

Definição 2.7.1: Dados um real positivo r e um ponto O do plano, o $L.G.$ dos pontos do plano que estão à distância r do ponto O é a circunferência de centro O e raio r, como ilustra a Figura

24.

Figura 24 – Circunferência euclidiana



Fonte: Próprio Autor.

Assim, dados os pontos $A(x,y)$ e $O(a,b)$, tal que A pertence a circunferência de centro O , então $d(A,O) = r$.

Porém, como os conceitos de distância são diferentes na Geometria do Táxi e na Geometria Euclidiana, teremos formatos diferentes das circunferências em cada uma das geometrias.

O conjunto de todos os pontos que estão à mesma distância euclidiana a partir de um único ponto O, C_E pode ser expresso por:

$C_E = \{A(x,y) \in \mathbb{R}^2 / d_E(O,A) = r\}$

Ainda podemos escrever a formúla algébrica para a circunferência euclidiana com a Equação (4):

$$C_E = \sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2} = r \tag{4}$$

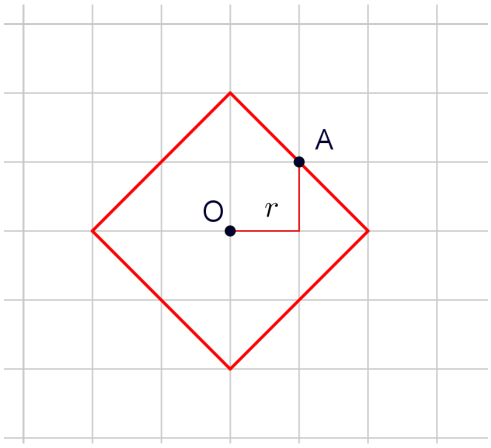
Se a circunferência c_E estiver centrada na origem $(0,0)$ do sistema de coordenadas cartesianas, então a expressão da circunferência na Geometria Euclidiana será:

$$C_E = |x|^2 + |y|^2 = r^2 \tag{5}$$

Na geometria do táxi uma circunferência consiste de quatro segmentos congruentes de inclinação ± 1, como podemos observar na Figura 25. O conjunto de todos os pontos que estão com a mesma distância do táxi a partir de um único ponto O pode ser representado como:

$c_T = \{A(x,y) \in \mathbb{R}^2 / d_T(O,A) = r\}$

Figura 25 – Circunferência do táxi



Fonte: Próprio Autor.

E, portanto, a expressão analítica que representa a circunferência do táxi C_T

$$C_T = |x-a| + |y-b| = r \tag{6}$$

Se a circunferência C_T estiver centrada na origem $(0,0)$ do sistema de coordenadas cartesianas, então a expressão da circunferência na GT será:

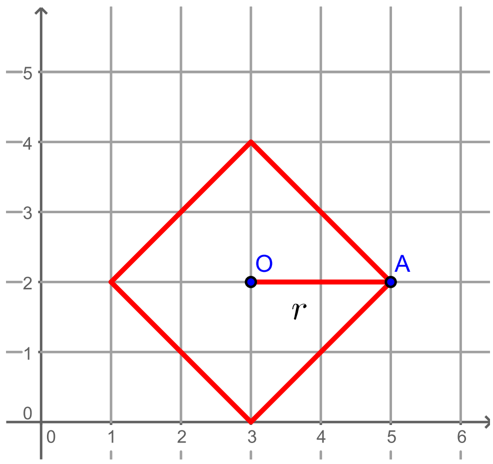
$$C_T = |x| + |y| = r \tag{7}$$

Análise da equação: $C_T = |x-a| + |y-b| = r$

Tabela 1 – Análise da Equação (6)

Para $\lvert y-b \rvert$ / Para $\lvert x-a \rvert$	$x-a$, se $x \geq a$	$-x+a$, se $x < a$
$y-b$, se $y \geq b$	$x-a+y-r-b=0$	$-x+a+y-b-r=0$
$-y+b$, se $y < b$	$x-a-y+b-r=0$	$-x+a-y+b-r=0$

Figura 26 – Circunferência do táxi definidos o centro e o raio



Fonte: Próprio Autor.

A Figura 26 nos mostra um exemplo de uma táxi-circunferência de centro O (3,2) e raio 2.

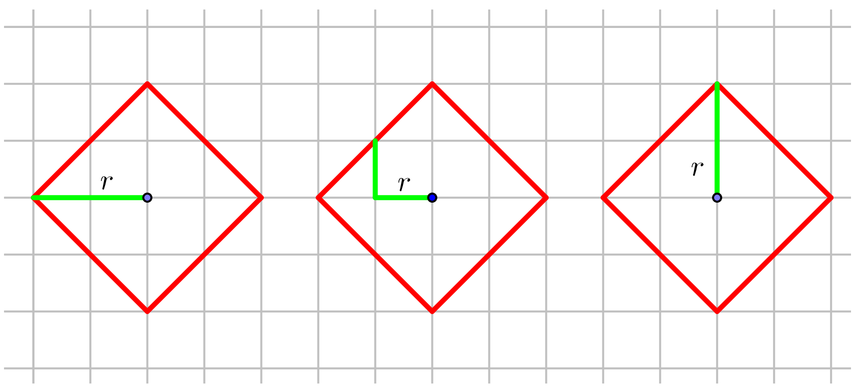
A seguir, faremos uma análise da equação: $C_T = |x-3|+|y-2| = 2$:

Tabela 2 – Análise da Equação da circunferência de centro (3,2) e raio 2

Para $\|y-2\|$ \ Para $\|x-3\|$	$x-3$, se $x \geq 3$	$-x+3$, se $x < 3$
$y-2$, se $y \geq 2$	$x+y-7=0$	$-x+y-1=0$
$-y+2$, se $y < 2$	$x-y-3=0$	$-x-y+3=0$

2.7.1.1 *Táxi-circunferência de raio r*

Figura 27 – Raio r da táxi-circunferência



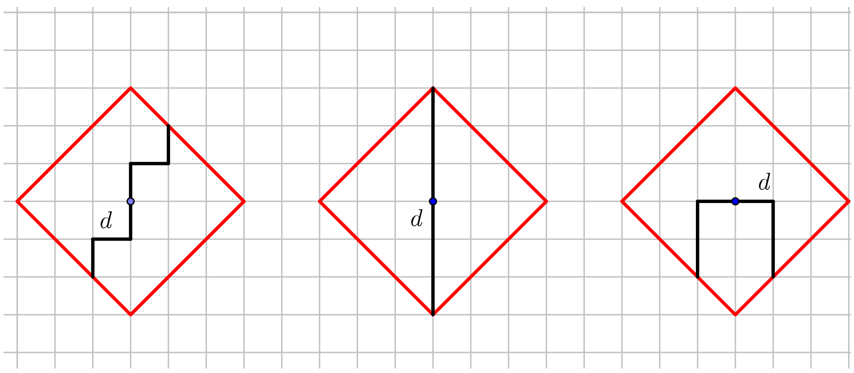
Fonte: Próprio Autor.

Na C_T, o raio não consiste em um único segmento, mas na soma do comprimento de vários segmentos horizontais e verticais. Por exemplo, se o raio de uma circunferência do táxi é 2, a circunferência consiste do ponto que está a 2 unidades de distância horizontalmente, verticalmente ou 1 unidade de distância vertical e 1 unidade de distância horizontal, como podemos observar na Figura 27.

2.7.1.2 Diâmetro da circunferência do Táxi

O diâmetro d da circunferência do Táxi é uma corda fixa no centro que não necessariamente é um segmento de reta e corta a circunferência em duas partes congruentes como ilustra a Figura 28.

Figura 28 – Diâmetro da circunferência do Táxi



Fonte: Próprio Autor.

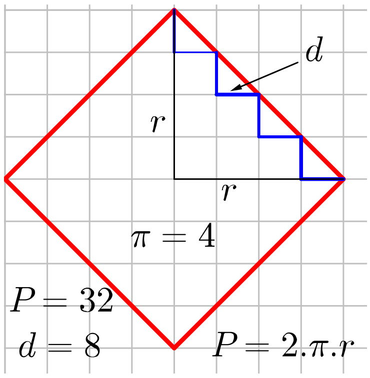
2.7.1.3 O π_T da Geometria do Táxi

Definição 2.7.1.3: π é a razão entre o perímetro de um círculo e seu diâmetro.

Na Geometria Euclidiana $\pi \cong 3{,}14159...$ e na Geometria do Táxi, o valor de π_T obtido com a mesma razão vale 4.

Vamos determinar o valor do π_T do Táxi das circunferências da Figura 29.

Figura 29 – Perímetro da circunferência do táxi



Fonte: Próprio Autor.

$d = r + r$

Logo, o perímetro é: $4 * d = 8r$

$\pi_T = \dfrac{P}{d} = \dfrac{8r}{2*r} = 4$

Diante dos resultados apresentados podemos concluir que, na Geometria do Táxi, o valor de π_T também é constante e igual a 4.

Assim, podemos obter a área do círculo do Táxi calculando: $A_{cT} = \dfrac{r.r.4}{2} = \dfrac{\pi_T r^2}{2}$.

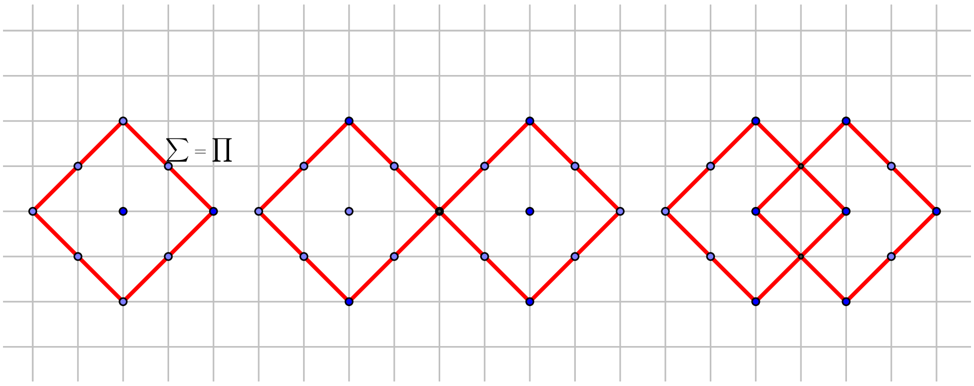
Portanto:

$$A_{cT} = \frac{\pi_T r^2}{2} \tag{8}$$

2.7.1.4 Interseção entre duas circunferências

Assim como na GE, duas táxi-circunferências com raios iguais podem se cruzar em todos os pontos, em um ponto, como as circunferências euclidianas como ilustram os exemplos da Figura 30, respectivamente.

Figura 30 – Interseção entre circunferências do Táxi



Fonte: Próprio Autor.

Outro teorema euclidiano que a Geometria do Táxi apresenta contraexemplo é o que afirma que duas circunferências não podem se cruzar em mais de dois pontos, podendo intersectar-se em um número finito de pontos, o qual depende do raio da circunferência. Nesta mudança de ponto de vista, redefine-se a interseção destes lugares geométricos e podemos então escrever que duas circunferências do Táxi com raios diferentes pode se cruzar em mais de dois pontos, como podemos observar na Figura 31.

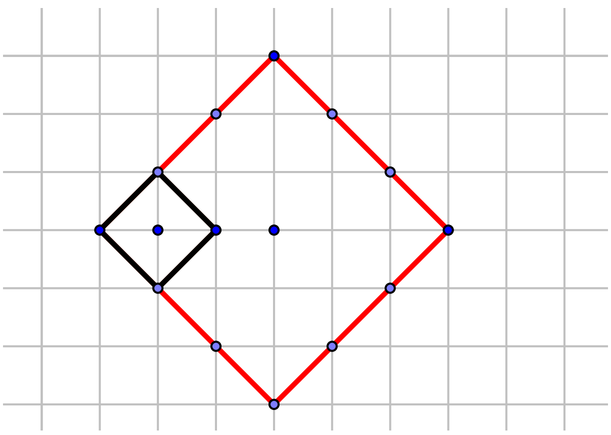
Nesta posição, o número de pontos comuns "n"é dado por :

$$n = 2r + 1 \tag{9}$$

para r < R.

Onde n é o número de pontos, r é o raio da circunferência menor e R é o raio da circunferência maior.

Figura 31 – Interseção entre circunferências do Táxi com raios R e r diferentes

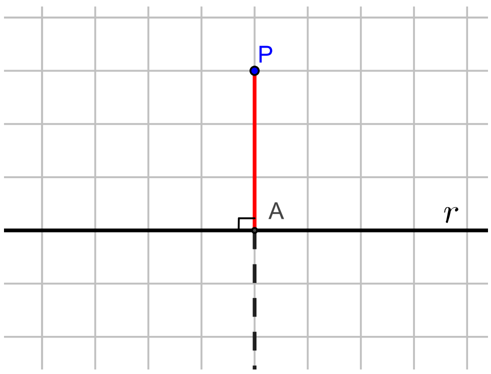


Fonte: Próprio Autor, baseado em Gardner 1997.

2.7.1.5 Distância entre ponto e reta

Na Geometria Euclidiana, a distância de um ponto $P(x,y)$ do plano a uma reta t é determinada construindo uma reta perpendicular a t e que contém P. Então, a distância do segmento de linha partindo do ponto P até a intersecção da reta perpendicular e t seria a menor distância de P para t, como ilustrado na Figura 32:

Figura 32 – Distância $d = AP$entre ponto e reta na GE



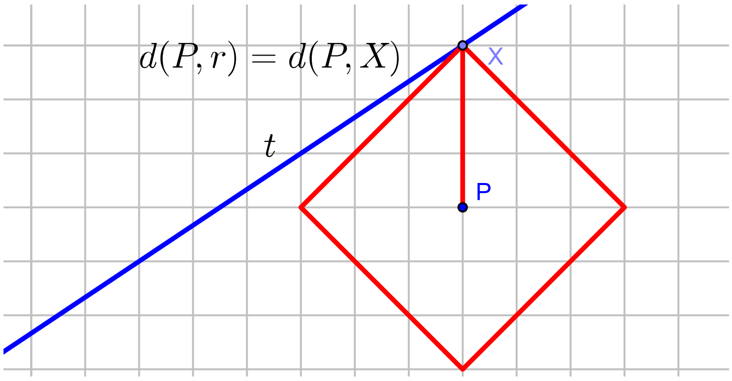
Fonte: Próprio Autor.

Na GT para determinarmos a distância de P até r construimos uma táxi-circunferência em torno de P e, a seguir determina-se o ponto em que a táxi-circunferência intercepta primeiro a reta t. Existem três casos a serem considerados de acordo com a inclinação m da reta t:

1º caso: $-1 < m < 1$

Táxi-circunferência centrada em P vai tocar a reta t primeiro em um ponto acima ou abaixo de P. Para encontrar o ponto X em t que será mais próximo de P, constrói-se uma linha vertical através de P passando por X que será o ponto em que a linha vertical interseptar a reta t. Ou seja, teremos uma circunferência centrada no ponto P que irá primeiro interceptar t em um dos seus vértices, como pode ser observado na Figura 33. A distância da reta t a táxi-circunferência é a medida do segmento PX.

Figura 33 – Distância entre ponto e reta com $-1 < m < 1$

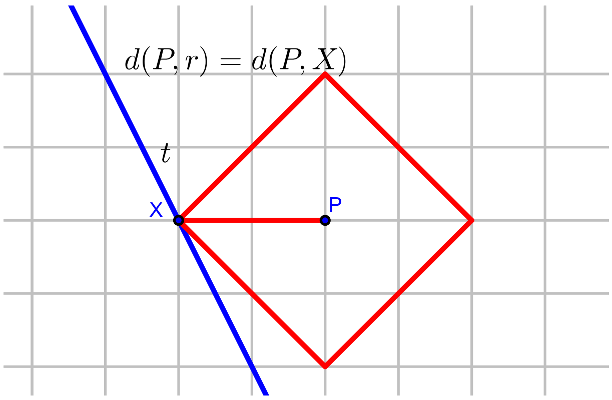


Fonte: Próprio Autor, baseado em Fossa (2003)

2º caso: $|m| > 1$

Inicialmente constrói-se uma circunferência centrada em P que tocará a reta t primeiro a esquerda ou a direita de P. Para encontrar o ponto X em t que será mais próximo de P, constrói-se uma linha horizontal através P passando por X que será o ponto em que a linha vertical intersepta a reta t.

Figura 34 – Distância entre ponto e reta com inclinação $|m| > 1$

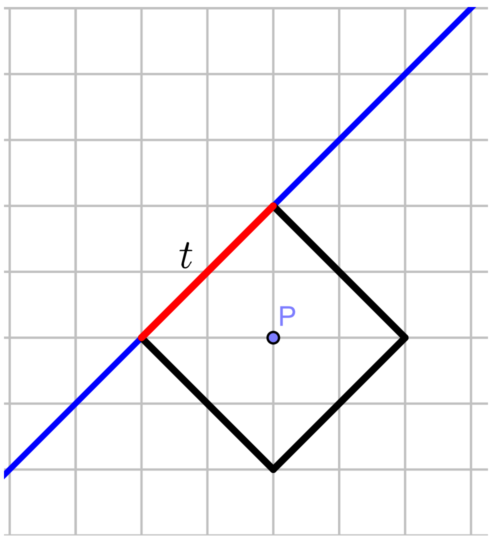


Fonte: Próprio Autor, baseado em Fossa (2003)

3º caso: $m = \pm 1$

Como os lados da táxi-circunferência têm inclinação 1 e -1, nesse caso teremos um segmento de reta contendo pontos os quais a distância de P à t é mínima, como ilustra a Figura 35:

Figura 35 – Distância entre ponto e reta com inclinação $m = \pm 1$



Fonte: Próprio Autor, baseado em Fossa (2003)

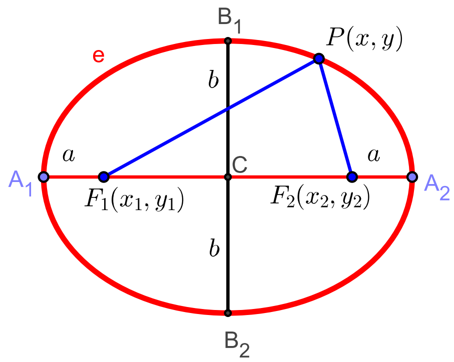
Como a distância do táxi envolve comprimentos de segmentos horizontais e/ou verticais, a distância será menor quando for medida horizontalmente ou verticalmente.

2.7.2 Elípse

Definição 2.7.2: Uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$, ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1,F_2) = 2c$. Como mostra a Equação 10

$$\mathcal{E}^{E}_{F_1,F_2} = \{d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a\}, \tag{10}$$

Figura 36 – Representação da táxi-elípse-hexágono



Fonte: Próprio Autor.

Representação gráfica da elipse euclidiana

Tomemos um ponto P genérico $P(x,y)$ e chamemos os focos de $F_1(x_1,y_1)$ e $F_2(x_2,y_2)$. Utilizando a distância euclidiana, a equação geral da elipse, de acordo com a definição é:

$$\mathcal{E}^{E}_{F_1,F_2} = \sqrt{|x-x_1|^2+|y-y_1|^2} + \sqrt{|x-x_2|^2+|y-y_2|^2} = 2a \tag{11}$$

Na GT, de acordo com a definição de elipse (2.7.2) temos:

$$\mathcal{E}^{T}_{F_1,F_2} = \{d_T(P,F_1) + d_T(P,F_2) = 2a\} \tag{12}$$

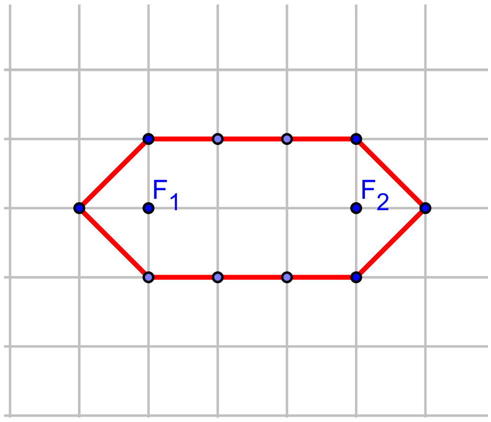
E assim a táxi-elipse tem equação geral da seguinte forma:

$$\mathcal{E}^{T}_{F_1,F_2} = |x-x_1| + |y-y_1| + |x-x_2| + |y-y_2| = 2a \tag{13}$$

Na GT, a elipse pode assumir formas geométricas de um hexágono ou de octógono, dependendo das posições relativas dos focos, conforme abordado a seguir:

1ª Situação: Se os focos F_1 e F_2, estiverem na mesma horizontal ou vertical, a táxi-elipse apresenta a forma de um hexágono como mostra o exemplo da Figura 37.

Figura 37 – Representação da táxi-elípse na forma hexagonal

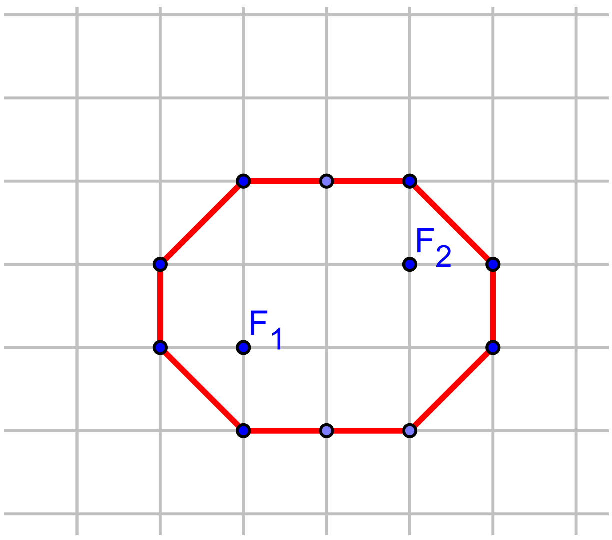


Fonte: Próprio Autor.

Pode-se observar que se desejarmos reproduzir uma elipse com formato hexagonal basta tomarmos as é-simas coordenadas, ou seja, $y(F_1) = y(F_2)$ ou $x(F_1) = x(F_2)$.

2ª Situação: Caso os focos F_1 e F_2, não estejam localizados na mesma horizontal ou vertical, ou seja, $y(F_1) \neq y(F_2)$ e $x(F_1) \neq x(F_2)$ a táxi-elipse terá então a forma de um octógono como ilustrado no exemplo da Figura 38.

Figura 38 – Representação da táxi-elípse-octógono

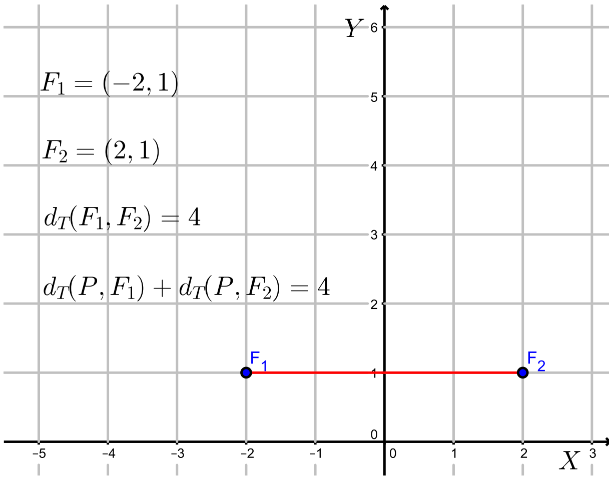


Fonte: Próprio Autor.

Seja d uma constante resultante da soma das táxi-distâncias entre um ponto qualquer da táxi-elipse e os seus dois pontos de foco. Quando $d = d_T(F_1,F_2)$, tem-se elipses degeneradas conforme os casos apresentados a seguir:

1º Caso: Se $y(F_1) = y(F_2)$ e $|x(F_1) - x(F_2)| = d$ ou, se $x(F_1) = x(F_2)$ e $|y(F_1) - y(F_2)| = d$ temos uma elipse degenerada. A Figura 39, mostra um exemplo deste caso.

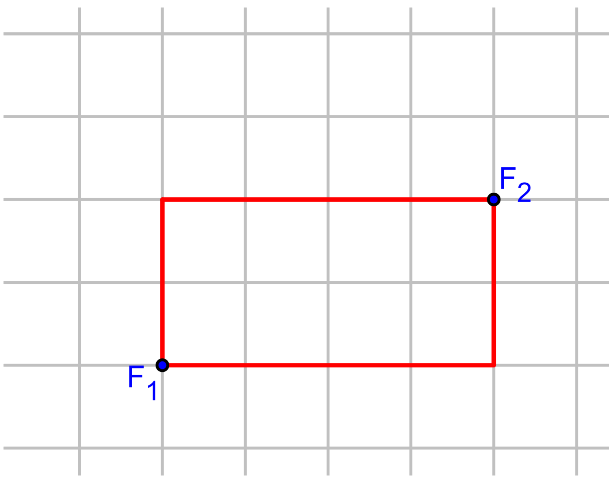
Figura 39 – Representação da táxi-elípse degenerada 1º caso



Fonte: Próprio Autor.

2º Caso: Se $y(F_1) \neq y(F_2)$ e $x(F_1) \neq x(F_2)$ obtemos uma figura na forma retangular, sendo que cada ponto está a d unidades de distância dos focos.

Figura 40 – Representação da táxi-elípse degenerada 2º caso



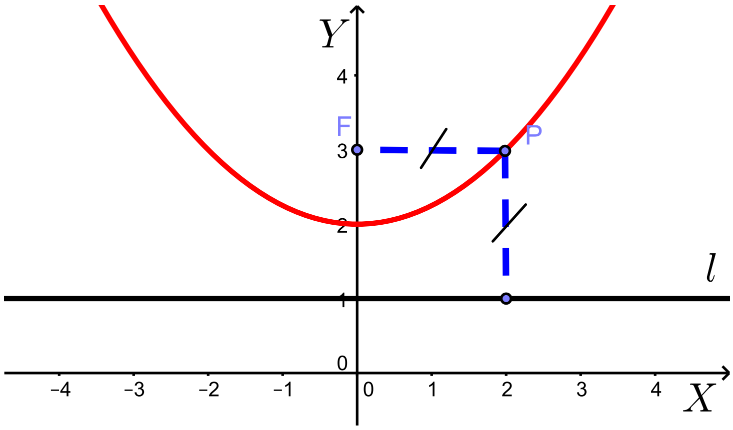
Fonte: Próprio Autor.

A medida em que $y(F_1)$ se aproxima de $y(F_2)$ e $x(F_1)$ se aproxima de $x(F_2)$ a táxi-elipse fica mais parecida com a táxi-circunferência, como o exemplo ilustrado pela Figura 40.

2.7.3 Parábola

Definição 2.7.3: Dados uma reta l e um ponto $F \notin l$, que chamamos de diretriz e foco, respectivamente, definimos uma parábola como sendo o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias à F e a l são iguais.

Figura 41 – Representação gráfica de uma parábola euclidiana



Fonte: Próprio Autor.

Dada uma diretriz $l : mx + ny + c = 0$ e $F(a,b) \notin l$, conforme ilustra a Figura 41 parábola P_E é definida por:

$$P_E = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 / d_E(P,F) = d_E(P,l)\}$$

A distância da reta l a um ponto $P(x,y)$ não pertencentea l é a menor das distâncias de P a qualquer ponto L pertencente l.

$$d_E(P,l) = \frac{|mx + ny + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}}; \tag{14}$$

$$d_E(P,L) = min\{d_E(P,l) : L \in l\} \tag{15}$$

Assim a equação da parábola P_E é dada por:

$$P_E = \sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2} = \frac{|mx + ny + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}} \tag{16}$$

Sendo m o coeficiente de x, n o coeficiente de y e c o termo independente da reta l e a e b as coordenadas do foco.

Devido as diferentes maneiras de se calcular a distância entre um ponto e uma reta na GT, uma parábola pode assumir diversas formas, dependendo do declive da diretriz.

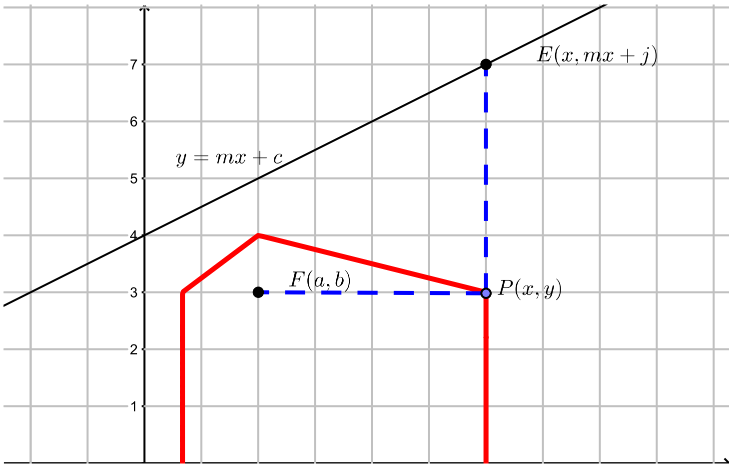
Temos três casos:

1º Caso

- $|m| < 1$

  Neste caso a parábola é formada pela reuinião de dois segmentos de reta e duas semi-retas verticais como ilustrado na Figura 42. Na GT estes tipos de linhas são comumente conhecidas como linhas graduais, segundo Fossa (2003).

Figura 42 – Representação gráfica da táxi-parábola com $|m| < 1$



Fonte: Próprio Autor.

Chamando a equação da diretriz de $y = mx + c$ e como estamos usando a distância vertical, então o ponto que se situa nessa distância da parábola pertence a reta $y = mx + j$, onde a diferença entre os valores de j e c é igual a distância comum do ponto do foco e da diretriz. Utilizando a definição de parábola (2.7.3), temos:

$d_T(P,F) = d_T(P,E)$, com $E \in$ diretriz

$|x-a|+|y-b| = |x-x|+|y-(mx+j)|$, o que dá a fórmula algébrica da táxi-parábola para $|m| < 1$ em:

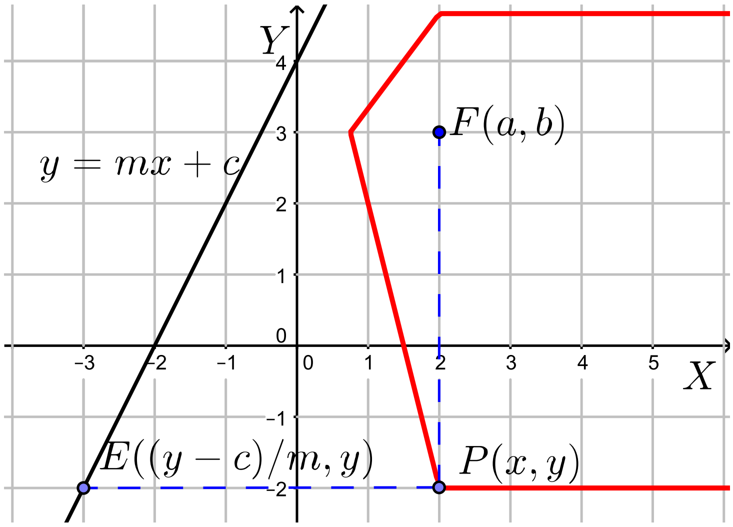
$$P_T = |x-a|+|y-b| = |y-(mx+j)| \tag{17}$$

2º Caso

- $|m| > 1$

  Neste caso, a táxi-parábola resultante é a reunião de dois segmentos de reta e por duas semi-retas horizontais, como exemplo apresentado na Figura 43. Estes tipos de linhas são conhecidas como linhas íngremes.

Figura 43 – Representação gráfica da táxi-parábola com declive da diretriz superior a 1



Fonte: Próprio Autor.

Com a equação da diretriz de $y = mx + c$ e agora usando a distância horizontal, temos que o valor de x pode ser obtido por: $x = (y-c)/m$, e, pela definição de parábola (2.7.3) resulta em:

$d_T(P,F) = d_T(P,E)$, com $E \in$ diretriz

$|x-a| + |y-b| = \left|x - \dfrac{(y-c)}{m}\right| + |y-y|$, o que resulta na fórmula algébrica da táxi-parábola para $|m| > 1$

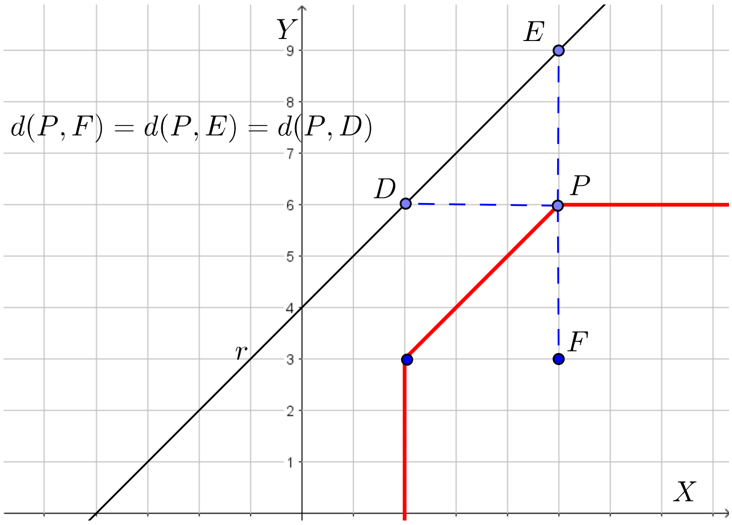
$$P_T = |x-a| + |y-b| = \left|x - \frac{(y-c)}{m}\right| \tag{18}$$

3º Caso

- $|m| = 1$

O terceiro caso ocorre quando a distância horizontal e vertical entre o foco e a diretriz são as mesmas, ou seja, a reta diretriz possui declive igual a 1 ou -1. Neste caso a táxi-parábola é formada pela reunião de um segmento de reta paralelo à diretriz e por duas semi-retas (uma horizontal e outra vertical), conforme mostra a Figura 44.

Figura 44 – Representação gráfica da táxi-parábola com declive da diretriz ± 1



Fonte: Próprio Autor, baseado em Fossa (2003)

Neste caso, a distância de $(P,F) = (P,D) = (P,E)$ e pode-se usar qualquer uma das expressões anteriores.

Na forma como a distância entre dois pontos é medida na GT temos que:

$P_T = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 / d_T(P,F) = d_T(P,l)\}$

$d_T(P,F) = |x-a| + |y-b|$

$d_T(P,L) = min\{d_T(P,l) : L \in l\}$

$d_T(P,r) = \dfrac{|mx+ny+c|}{\max\{|m|,|n|\}}$

Assim, P_T representa o modo algébrico da táxi-parábola.

$$P_T = |x-a| + |y-b| = \frac{|mx+ny+c|}{\max\{|m|,|n|\}} \tag{19}$$

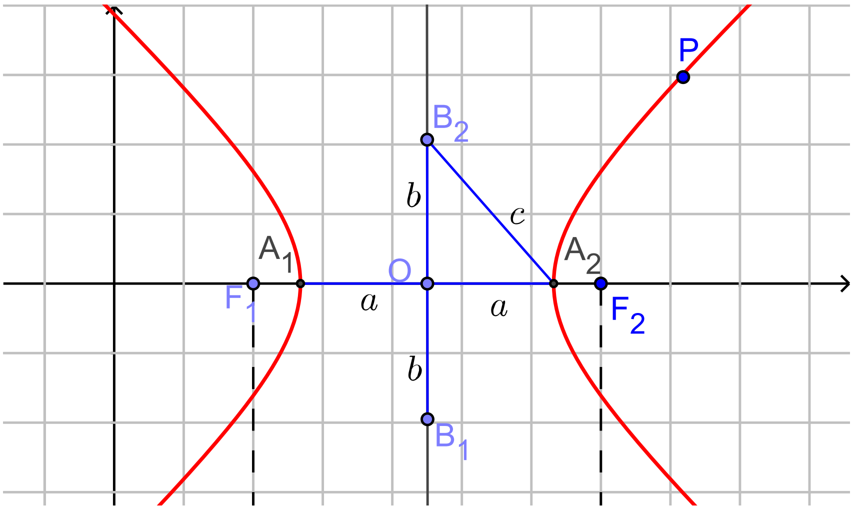
2.7.4 Hipérbole

Definição 2.7.4: Uma hipérbole H de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $d > 0$, menor do que a distância entre os focos. $H = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 | d(P,F_1) - d(P,F_2)| = d\}$,

Sejam $F_1(a,b)$ e $F_2(g,h)$, com $0 < a < c$ e $d(F_1,F_2) = d$, então a Equação (20) é a representação algébrica da hipérbole na Geometria Euclidiana:

$$H_E = \left| \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - \sqrt{(x-g)^2 + (y-h)^2} \right| = d \tag{20}$$

Figura 45 – Representação gráfica da hipérbole euclidiana



Fonte: Próprio Autor.

Pela definição de hipérbole (2.7.4) e a maneira como se determina a distância na GT, a representação algébrica da táxi-hiperbole é:

$$H_T = |(x-a)+(y-b)-(x-g)+(y-h)| = d \tag{21}$$

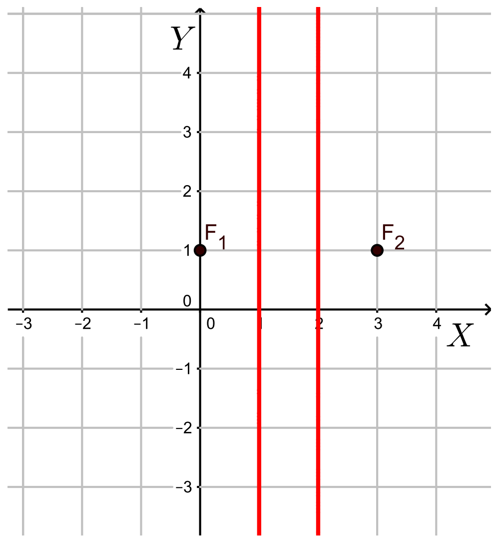
A táxi-hipérbole pode assumir diversos formatos, assim como ocorreu para o caso da táxi-elipse, também depende das posições relativas dos focos. A seguir apresentamos 3 casos para discução da hipérbole.

Sejam $F_1(a,b)$ e $F_2(g,h)$ os focos da hipérbole.

1º Caso: Focos posicionados na mesma horizontal ou na mesma vertical

a) Se $b = h$, as ordenadas dos focos são iguais, o segmento F_1F_2 está posicionado na direção horizontal. Neste caso, a táxi-hiperbole é formada por duas retas verticais paralelas, como mostra a Figura **??**.

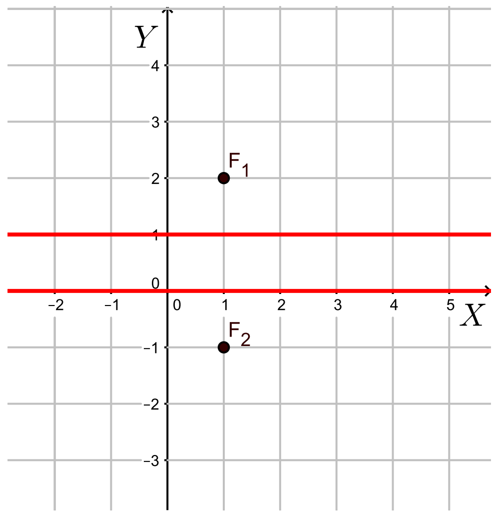
Figura 46 – Representação gráfica da táxi-ipérbole-1º Caso (a)



Fonte: Próprio Autor, baseado em http://www.atractor.pt

b) Se $a = g$, ou seja, as abscissas do focos são iguais, temos que o segmento F_1F_2 está posicionado na direção vertical. Dessa forma, a táxi-hipérbole é formada por duas retas horizontais paralelas, como ilustrado na Figura 47.

Figura 47 – Representação gráfica da táxi-hipérbole-1º Caso (b)



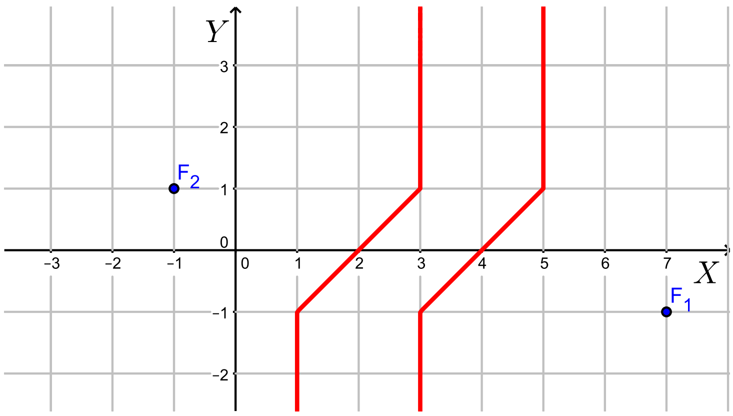
Fonte: Próprio Autor, baseado em http://www.atractor.pt

2º Caso: Se o segmento F_1F_2 não estiverem posicionado na direção horizontal nem vertical, ou seja, $a \neq g$ e $b \neq h$, temos dois casos:

a) Se $||a-g|-|b-h|| \neq d$, a táxi-hipérbole é formada por dois segmentos de reta que fazem um ângulo de 45° com a horizontal e por quatro semi-retas, que são verticais com

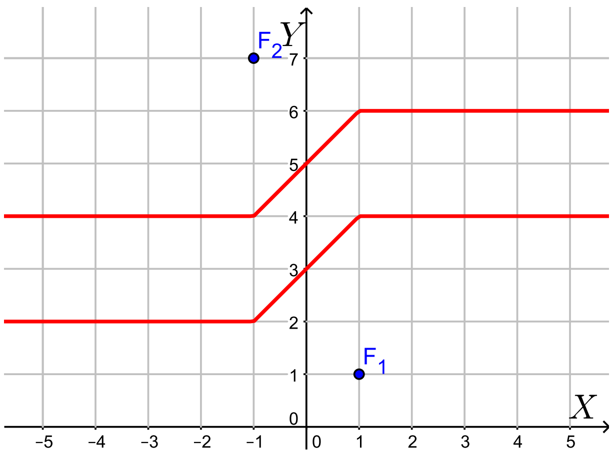
$|b-h| < |a-g|$ conforme exemplo apresentado na Figura 48 e horizontalmente se $|b-h| > |a-g|$ como ilustrado pela Figura 49.

Figura 48 – Representação gráfica da táxi-hipérbole-2º Caso (a)-$|b-h| < |a-g|$



Fonte: Próprio Autor, baseado em http://www.atractor.pt

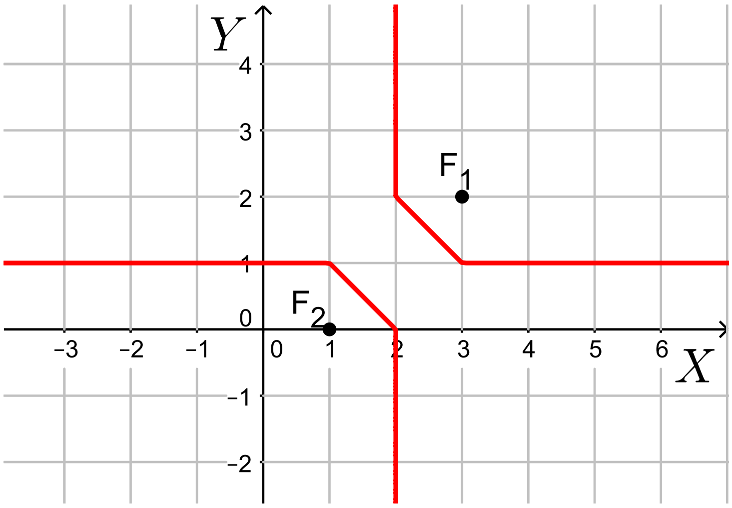
Figura 49 – Representação gráfica da táxi-hipérbole-2º Caso (a)-$|b-h| > |a-g|$



Fonte: Próprio Autor, baseado em http://www.atractor.pt

b) Se $|b-h| = |a-g|$ a táxi-hipérbole será formada por duas retas verticais e duas horizontais. Como na Figura 50.

Figura 50 – Representação gráfica da táxi-hipérbole 2º Caso (b)

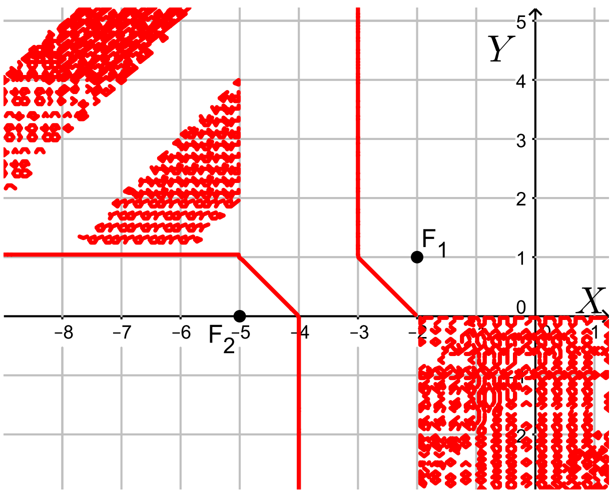


Fonte: Próprio Autor, baseado em http://www.atractor.pt

3º Caso: Se $||a-g|-|b-h|| = d$, a táxi-hipérbole é formada por dois segmentos de reta que fazem um ângulo de 45° com a horizontal e por:

a) Duas semi-retas que são verticais quando $|b-h| < |a-g|$ como mostra o exemplo da Figura 51.

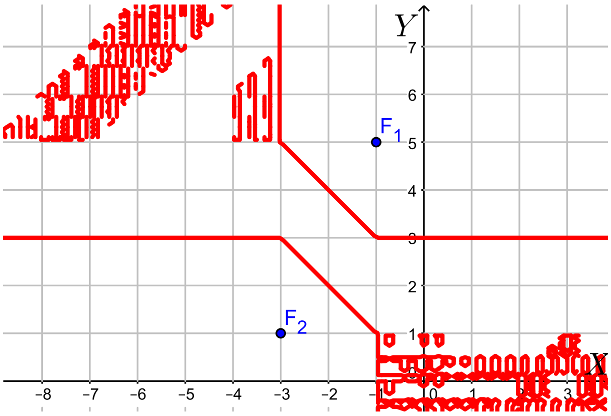
Figura 51 – Representação gráfica da táxi-hipérbole 3º Caso (a)



Fonte: Próprio Autor baseado em http://www.atractor.pt.

b) E duas semi-retas horizontais, se $|b-h| > |a-g|$, como mostra o exemplo da Figura 52.

Figura 52 – Representação gráfica da Hipérbole 3º Caso (b)



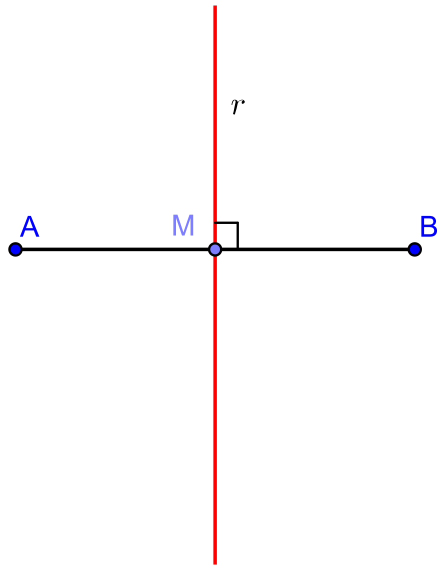
Fonte: Próprio Autor baseado em http://www.atractor.pt.

2.7.5 Mediatriz

Definição 2.7.5.1: A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento, passando pelo seu ponto médio.

Na Figura 53, a reta r representa a mediatriz do segmento AB e M o ponto médio do segmento.

Figura 53 – Representação da mediatriz euclidiana



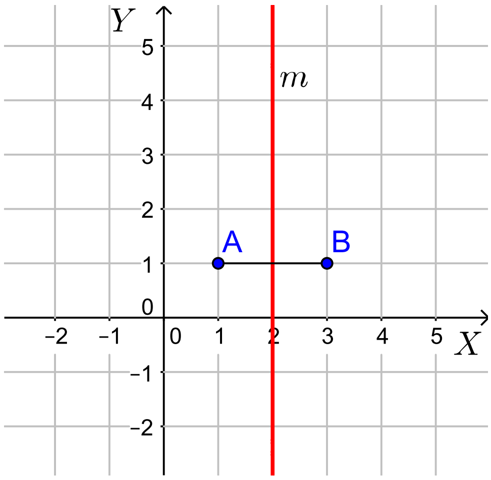
Fonte: Próprio Autor.

Definição 2.7.5.2: Na Geometria do Taxista, a mediatriz de um segmento e definida como sendo o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos do segmento.

Dependendo das posições dos pontos $A(a,b)$ e de $B(g,h)$ a táxi-mediatriz pode assumir diferentes formas:

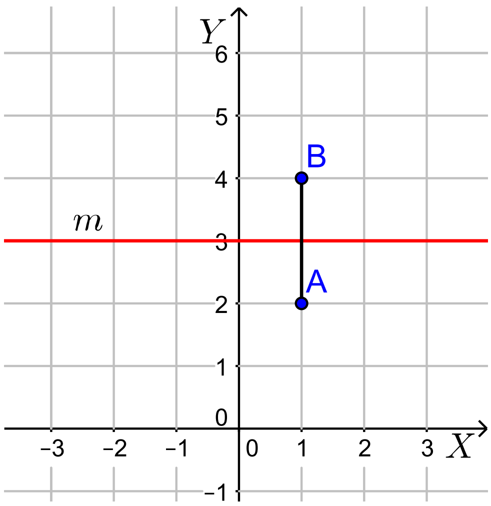
1º Caso: Se o segmento AB estiver na horizontal ou vertical, teremos:

Figura 54 – Representação gráfica da táxi-mediatriz 1º Caso $a = g$



Fonte: Próprio Autor.

Figura 55 – Representação gráfica da Mediatriz 1º Caso



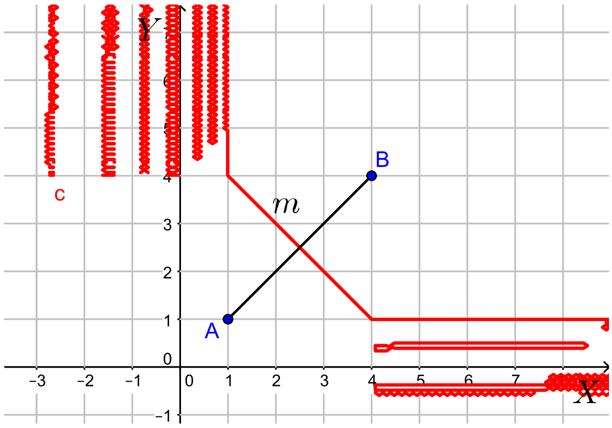
Fonte: Próprio Autor.

Até aqui a mediatriz euclidiana e a do táxi possuem as mesmas propriedades da definição (2.7.5.1).

2º Caso: Se as coordenadas do segmento AB são tais que $a \neq g$ e $b \neq h$ os pontos A e B não estiverem nem horizontal nem vertical podemos ainda ter:

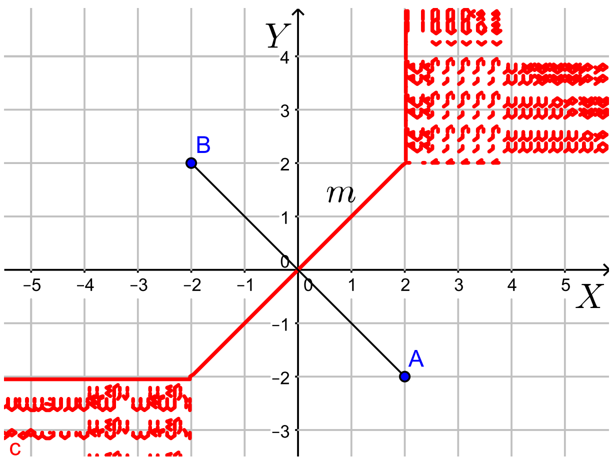
- Se $|a-g| = |b-h|$, resulta que a reta AB tem declive 1 ou -1, então a mediatriz é formada por um segmento de reta que faz um ângulo de 45°com a horizontal, como ilustram os exemplos apresentados pelas figuras 56 e 57.

Figura 56 – Representação gráfica da táxi-mediatriz 2º Caso-declive da reta $AB = 1$



Fonte: Próprio Autor.

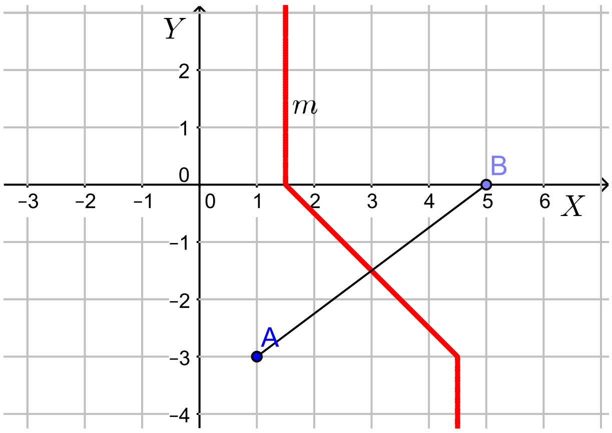
Figura 57 – Representação gráfica da Mediatriz 2º Caso-declive da reta $AB = -1$



Fonte: Próprio Autor.

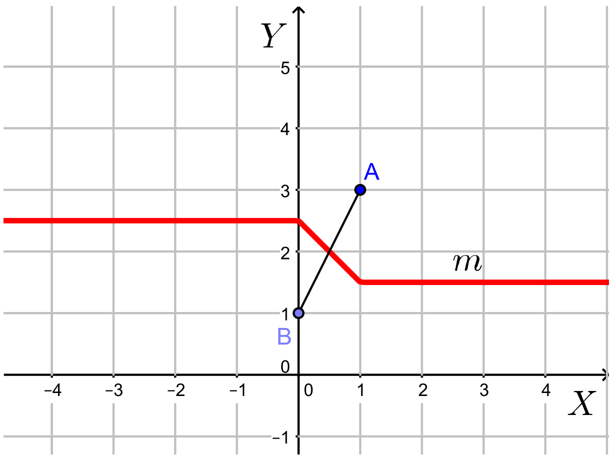
3º Caso: Se $|a-g| \neq |b-h|$, a táxi-mediatriz é formada por um segmento de reta que faz um ângulo de 45° com a horizontal e por duas semi-retas, que são verticais quando $|b-h| < |a-g|$ e horizontais se $|b-h| > |a-g|$, como ilustrado nas Figuras 58 e 59.

Figura 58 – Representação gráfica da táxi-mediatriz-3º Caso-$|b-h| < |a-g|$



Fonte: Próprio Autor.

Figura 59 – Representação gráfica da táxi-mediatriz-3º Caso-$|b-h| > |a-g|$



Fonte: Próprio Autor.

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos da GT estabecendo um comparativo com os da GE.

Como neste trabalho propomos uma sequência didática apresentada no Capítulo 4 com os conceitos da GT, tornou-se necessária a escolha de uma perspectiva metodológica de ensino para orientar a proposta. Assim, optamos pela Resolução de Problemas aliada aos recursos de um software de geometria dinâmica, cuja fundamentação teórica será abordada no próximo capítulo.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALIADA AO USO DE SOFTWARES DA GEOMETRIA DINÂMICA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

3.1 BREVE HISTÓRICO SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No mundo em que vivemos cada vez mais a sociedade depende do conhecimento e por isso é importante que a educação escolar esteja voltada para o desenvolvimento de habilidades dos alunos em investigar, analisar, criar e compreender a realidade. Para isso, a Resolução de Problemas vem sendo apontada por pesquisadores como uma possibilidade para alcançar tais objetivos por meio das aulas de Matemática. Segundo Onuchic (1999) a Resolução de Problemas é uma atividade realizada desde a Antiguidade, todavia era utilizada numa perspectiva limitada, a apresentação de um exemplo e uma técnica de resolução específica para solução. Os estudos sobre Resolução de Problemas como metodologia começaram a ser desenvolvidos de forma mais sistemática nas últimas décadas e foi investigado primeiramente por George Polya.

Segundo esta mesma autora, durante o século XX iniciou-se uma preocupação em promover mudanças no ensino da Matemática, através das reformas de ensino. Porém estes movimentos não conseguiram mudar o caráter elitista e nem produzir mudanças substanciais no ensino e aprendizagem. Entre 1960 e 1970 ocorreu o Movimento da Matemática Moderna que apresentou a Matemática com uma abordagem abstrata, e assim, nem o professor nem os alunos conseguiram adaptar-se ou perceber conexões do que era estudado na escola com a sua realidade, e a Resolução de Problemas vem como uma alternativa para proporcionar melhorias ao ensino da Matemática. O objetivo essencial da Resolução de Problemas é que os alunos participem de forma ativa do processo de sua aprendizagem e os problemas se constituam como instrumentos.

A Resolução de Problemas pode ser vista como possibilidade para se aprender Matemática, pois pode possibilitar aos alunos mobilizar conhecimento prévios e desenvolver a capacidade de tratar as informações e ampliar seus conhecimentos. Segundo Polya (1995) resolver problemas é o ato mais importante para se fazer Matemática e, nesse sentido, o autor julga que é indispensável que o professor estimule os alunos a resolver problemas de forma independente.

Nessa perspectiva, ensinar a resolver problemas para Pozo (1998) não consiste somente em dotar o aluno de habilidades e estratégias, mas que desenvolvam o hábito de enfrentar o aprendizado como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta e, que através deste aprendizado possa aperfeiçoar estratégias pessoais de identificação e solução de problemas encontrados em sua vivência no mundo. “O verdadeiro objetivo final da aprendizagem da solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor-se problemas e de resolvê-los como forma de aprender”.(POZO e ECHEVERRÍA, 1998, p.15).

Para os PCNs de Matemática do Ensino Fundamental (1998) preconizam que a resolução de problemas deve constituir o ponto de partida da atividade Matemática, sendo uma orientação para aprendizagem. O documento defende que desta forma é propiciado ao aluno o aprendizado de conceitos e procedimentos dos saberes matemáticos que lhes possibilitam ampliar seus conhecimentos.

Nessa direção, Dante (1989) acredita que o maior objetivo da instrução Matemática é ensinar o indivíduo a resolver problemas, e é através deles que se inicia o aluno no modo de pensar matemático e propicia o desenvolvimento do raciocínio lógico. Não basta saber fazer operações matemáticas mecanicamente, é preciso usá-las convenientemente na resolução de situações-problema. É importante que o professor seja incentivador e oriente os alunos para que trabalhem de modo ativo nestas situações.

Dante (1989) defende a idéia de que a Resolução de Problemas pode aguçar a curiosidade do aluno e permitir-lhe orientar sua criatividade através da utilização de estratégias para a Resolução de Problemas que lhe forem apresentados. Para o desenvolvimento de nosso trabalho adotamos a perspectiva de que a resolução de problemas pode ser interessante e compensadora para se trabalhar no ensino da Matemática, pois, possibilita ao aluno estabelecer uma interação com o objeto do conhecimento e as aulas tornam-se criativas, dinâmicas e produtivas.

3.2 DEFINIÇÃO DE PROBLEMA

Na busca de uma definição do que é um "problema", constatamos através de alguns autores várias definições. Por exemplo, para Pozo (1998) o problema constitui uma situação na qual o aluno precisa pensar, analisar e não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve a solução. Já Dante (1989) define problema como uma situação que, para ser solucionada, exige o pensar do indivíduo. Pela definição dos PCNs de Matemática do Ensino Fundamental (1998) um problema matemático é uma situação em que se é necessária a realização de uma seqüência de ações ou operações para assim se obter um resultado.

Diante das definições apresentadas concebemos problema como uma atividade desafiadora na qual o aluno precisa utilizar sua criatividade, ou seja, mobilizar estratégias para a sua solução.

3.3 TIPOS DE PROBLEMAS

Segundo Dante (1989. p.39) há diferentes tipos de problemas, como:

- *Problemas processo ou Heurísticos*: São os que instigam a curiosidade do aluno e demandam que seja utilizada a sua criatividade e iniciativa, resultando no desenvolvimento de estratégias para a sua resolução.
- *Problemas de Aplicação*: São os que possuem uma assossiação com diferentes contex-

tos da realidade do aluno e exigem a utilização de conceitos matemáticos para serem resolvidos.

- *Problemas de quebra-cabeça*: são os que desafiam e envolvem a chamada Matemática recreativa.

Depois da escolha do problema é recomendado que o professor oriente os alunos no processo de resolução dos problemas em fases, de acordo com o que foi sugerido por Polya (1995) e reapresentado em Dante (1989). Segundo esses autores, as fases são:

- Compreender o problema;
- Estabelecer um plano;
- Executar o plano estabelecido;
- Efetuar o retrospecto ou verificação da solução.

3.4 SITUAÇÕES DIDÁTICAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Devido a grande dificuldade comumente encontrada para a aprendizagem na disciplina de Matemática, bem como os problemas encontrados pelos professores em atingir seus objetivos de ensino, acreditamos que há necessidade de uma permanente reflexão, avaliação e ação a respeito das práticas pedagógicas utilizadas em sala de aula. No terceiro quesito, torna-se necessário que o professor conheça diferentes metodologias de ensino e se predisponha a vivenciá-las em sala de aula, para que ele possa desenvolver atividades didáticas que façam sentido para os alunos para que possam construir o seu conhecimento matemático.

Para Machado (1999), o conhecimento matemático está muitas vezes relacionado com algum tipo de problema e assim, o trabalho com a resolução de problemas é parte indispensável da atividade educacional na área da Matemática. Para isso, é importante que o professor conheça a realidade dos alunos da sala, considerando os diversos níveis de aplicabilidade do conhecimento de cada um para que possa fazer a escolha adequada do problema a ser trabalhado em sala de aula. Acreditamos que o processo de aprendizagem é facilitado na medida em que o aluno é desafiado a resolver um problema não apenas pela imposição do professor, mas porque que ele envolve-se com o problema.

A situação a-didática, segundo Machado (1999), ocorre no momento em que o aluno se relaciona com os problemas, propostos a partir dos seus próprios conhecimentos, sem que esta situação tenha sido prevista ou orientada pelo professor. Cabe ao professor planejar problemas adequados que direcionem o aluno para a situação a-didática para que ele seja estimulado a mobilizar seus conhecimentos prévios, superar seus esforços e construa o seu conhecimento matemático. Para isso, o professor precisa encontrar bons problemas cuja resolução demonstrará se o aluno possui um determinado conhecimento ou se ainda há uma necessidade de evolução nesta direção, como defende Machado (1999, p. 84):

> O desafio para o professor é escolher atividades que favoreçam o surgimento de situações a-didáticas, provocando o aluno a envolver-se em investigações e tomar decisões com o máximo de independência para que ele possa elaborar conceitos e aprimorar seus mecanismos de resolução de problemas evoluindo por seus próprios méritos ao longo do processo educativo sem o controle pedagógico do professor. "O objetivo principal da educação Matemática não é só a valorização exclusiva do conteúdo, mas acima de tudo, é também a promoção existencial do aluno através do saber matemático."

Nessa direção, optamos pela perspectiva da Resolução de Problemas para o ensino da Matemática para o desenvolvimento da sequência didática apresentada no próximo capítulo, haja vista que de acordo com os PCN's (1998), a resolução de problemas pode contribuir para o ensino da Matemática, pois favorece o desenvolvimento da criatividade, contribui para o processo da aprendizagem e possibilita aos alunos mobilizar os conhecimentos que já possuem para resolver as situações problema propostas, através da exploração e criação de estratégias de resolução. Nesse contexto, para o aluno resolver um problema matemático se faz necessário realizar uma sequência de ações ou operações para que possam apresentar uma solução, conforme destaca as orientações dos PCNs:

> No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; (PCN, BRASIL, 1997, p.40).

Segundo os PCN's de Matemática do Ensino Fundamental (1998), a resolução de problemas promove o desenvolvimento de habilidades de investigação, interpretação e estruturação do conhecimento, favorecendo condições para que o aluno construa novos conceitos que futuramente serão utilizados na resolução de novos problemas e a participação de forma mais ativa do aluno requerida nas aulas pode funcionar como elemento motivador para a aprendizagem em Matemática. Para isso, o professor deve ter em mente os objetivos que deseja alcançar para que possa propor problemas adequados que possam propiciar aos alunos a elaboração, a comparação, questionamentos sobre suas próprias soluções e formulação de novos problemas. Na sequência didática proposta neste trabalho optou-se em trabalhar com situações didáticas apoiada na resolução de problemas numa abordagem metodológica construtivista onde, segundo Machado (1999), o aluno aprende através de interações com o meio na busca pela adaptação e o resultado desta adaptação é o aprendizado.

3.5 AS TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

No que se refere as perspectivas metológicas para o ensino da Matemática as inovações tecnológicas nos permitem sua utilização como alternativas para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem. Para Borba (2012) ao longo dos anos o uso didático pedagógico dessas tecnologias deu-se por meio de quatro fases: A primeira com as tecnologias informáticas (TI) inicia-se por volta de 1985 com o software *LOGO*, essa fase teve grande importância no desenvolvimento do conhecimento matemático e na prática pedagógica através do uso das TIs. A segunda ocorre no início dos anos 1990 quando houve um grande avanço na acessibilidade do uso de computadores, surgem então diversos softwares educacionais como o de representação gráfica de funções *winplot* e o *software de geometria dinâmica* que nos permite a manipulação, visualização e construção virtual de objetos geométricos como o *Cabri Géomètre*. A terceira fase inicia-se por volta de 1999 com as tecnologias da informação e comunicação (TIC), com a internet possibilitando a informação e a comunicação através de e-mails, fóruns e *chats* que propiciaram debates e discussões para o crescimento intelectual das pessoas. A quarta fase, tecnologias digitais (TD) teve início em 2004 com maior velocidade, qualidade e tipos de recursos com acesso a internet promoveu uma tranformação na comunicação *online*.

De acordo com Borba (1999, p.24) "a produção do conhecimento matemático é condicionada pela mídia utilizada", e nesse sentido, novas tecnologias oportunizam que mais e mais conteúdos matemáticos sejam explorados. O uso de softwares educativos de geometria dinâmica (GD) no ensino da Matemática possibilita mais interação do aluno com o conteúdo abordado de forma significativa e contribui assim para que o aluno construa seu conhecimento de forma mais dinâmica e interativa.

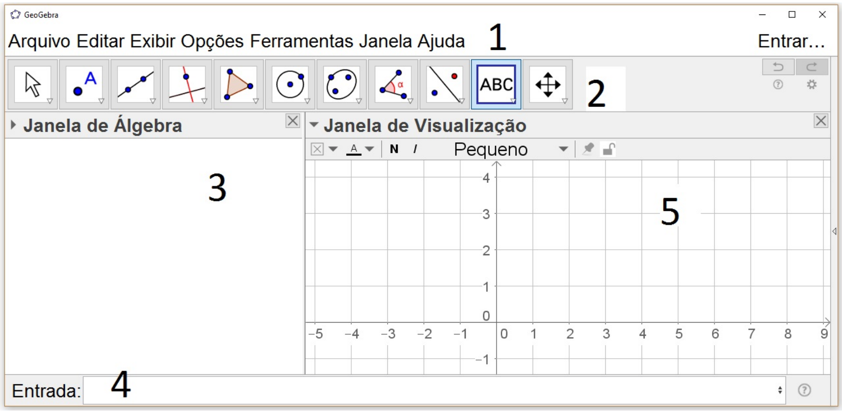
No rol de softwares da GD temos o *Geogebra* que é um software livre de Matemática que foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter, com finalidades didáticas e pode ser utilizado em situações de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos como uma importante ferramenta para despertar o interesse dos alunos pela Matemática. Com ele podemos trabalhar com quase todos os níveis da Educação Básica realizando cálculos aritméticos, algébricos e fazendo representações gráficas de objetos matemáticos, manipulando-os e visualizando-os.

Nesta perspectiva o *Geogebra* é uma ferramenta de apoio à aprendizagem, pois possibilita o fortalecimento da metodologia de ensino através de atividades de exploração e investigação, oferece diferentes meios para a resolução de problemas e possibilita estabelecer conexões entre os objetos matemáticos com suas representações. Com o *Geogebra* é possível fazer exploração de diversos conteúdos matemáticos, criar elementos geométricos e movimentá-los, representar graficamente funções entre outros, criando um ambiente favorável para o aprendizado.

3.6 O GEOGEBRA

Ao acessar o *software*, o usuário tem acesso a um ambiente representado por uma tela, conforme ilustra a Figura 60, composta de barras de ferramentas e duas janelas, uma de representação algébrica e outra de visualização.

Figura 60 – Tela inicial do *Geogebra*

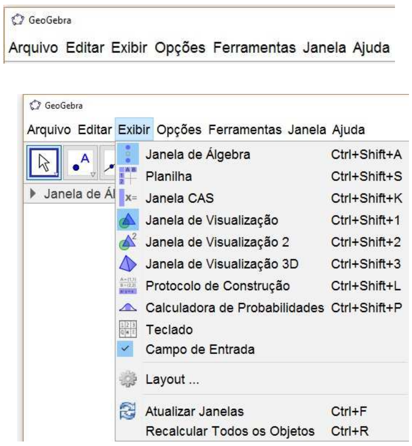


Fonte: Próprio Autor

Como pode ser observado na Figura 60 a interface é constituída de:

1. Barra de Menus: Aqui aparecem as seguintes opções: Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela, e Ajuda que possuem sub-comandos que podem ser selecionados para construção, como mostra o exemplo da Figura 61.

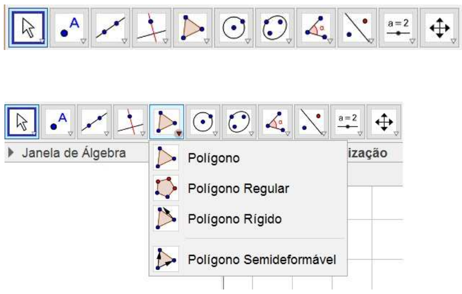
Figura 61 – Menu e sub-comandos



Fonte: Próprio Autor

2. Barra de Ferramentas: Nela encontramos caixas de ferramentas em que cada uma delas é representada por um desenho específico no qual possui subitens de cada ferramenta que podem ser acessadas clicando com o mouse em seu canto inferior direito do ícone, como mostra a Figura 62.

Figura 62 – Barra de ferramentas do Geogebra



Fonte: Próprio Autor

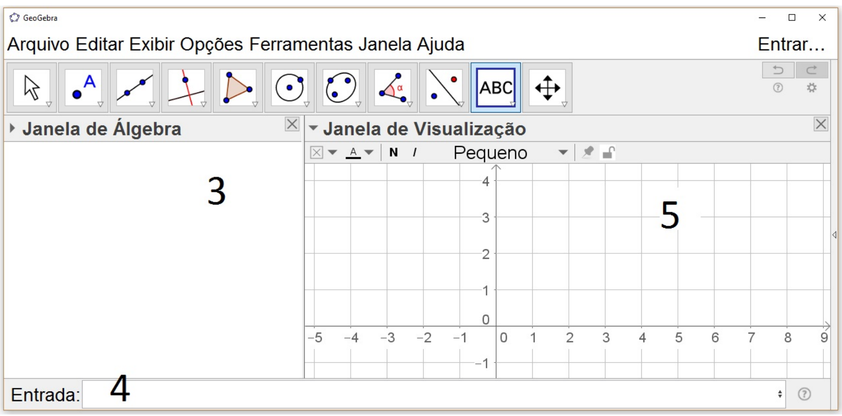
As janelas de álgebra, de visualização e de entrada conforme ilustrado na Figura 63.

3. Janela de Álgebra: Nela são mostradas as coordenadas, equações e medidas das costruções realizadas na janela de visualização.

4. Entrada: Neste espaço pode-se digitar as coordenadas de pontos, de equações e de funções para que possam ser representados na tela após acionar a tecla enter.

5. Janela de Visualização: Neste espaço são construídos objetos que possuem representação geométrica e podem ser obtidos utilizando os ícones da Barra de Ferramentas ou por meio de comandos digitados na Entrada.

Figura 63 – Janelas de álgebra, de visualização e de entrada do Geogebra



Fonte: Próprio Autor

Neste capítulo abordamos os fundamentos teóricos sobre as metologias de ensino de Matemática que orientam a elaboração da sequência didática desenvolvida neste trabalho. No próximo capítulo apresentamos um conjunto de atividades produzido abordando conceitos sobre Lugares Geométricos na Geometria Euclidiana e na Geometria do Táxi com suporte na metodologia da Resolução de Problemas aliada aos recursos do Software *Geogebra*.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA ENVOLVENDO CONCEITOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA E GEOMETRIA DO TAXI

Neste capítulo apresentamos uma proposta de sequência didática contendo situações-problema que abordam o conceito de Lugar Geométrico nas geometria euclidiana e do táxi, com o objetivo de estabelecer um comparativo sobre as características do conjunto de pontos obtidos atendendo a mesma propriedade nas duas geometrias.

A proposta está baseada na metodologia da resolução de problemas aliada aos recursos da geometria dinâmica do software *Geogebra*. Com o intuito de estimular os alunos buscamos situar os problemas e personagem em contextos de filmes e jogos bastante conhecidos.

Para trabalharmos a parte da Geometria Euclidiana utilizamos um personagem fictício denominado de *General GEon* e está baseado em um personagem do filme *A Fuga do Planeta Terra* [1], conforme cenário ilustrado na Figura 64

Figura 64 – Cena do Filme Fuga do Planeta Terra

Fonte: ultimosegundo.ig.com.br

Na primeira parte das atividades utilizando os conceitos da GE o *General GEon* que mora no planeta *GEts* recebe um comunicado de que será atacado por inimigos de outro planeta. Então ele decide utilizar navios situados no mar com o objetivo de defender seu planeta dos invasores que estão se aproximando. Para isso o General posiciona seus navios de guerra de variadas maneiras de acordo com os supostos ataques que podem ocorrer e que colocaria

[1] A Fuga do Planeta Terra-2013, Filme de ficção científica/Aventura com 1h 29m. Classificação livre. O heróico astronauta Scorch Supernova parte em uma missão arriscada em um planeta desconhecido. Depois de ser capturado em uma armadilha, Scorch precisa confiar em seu irmão, Gary, diretor da Missão BASA Control para se salvar.

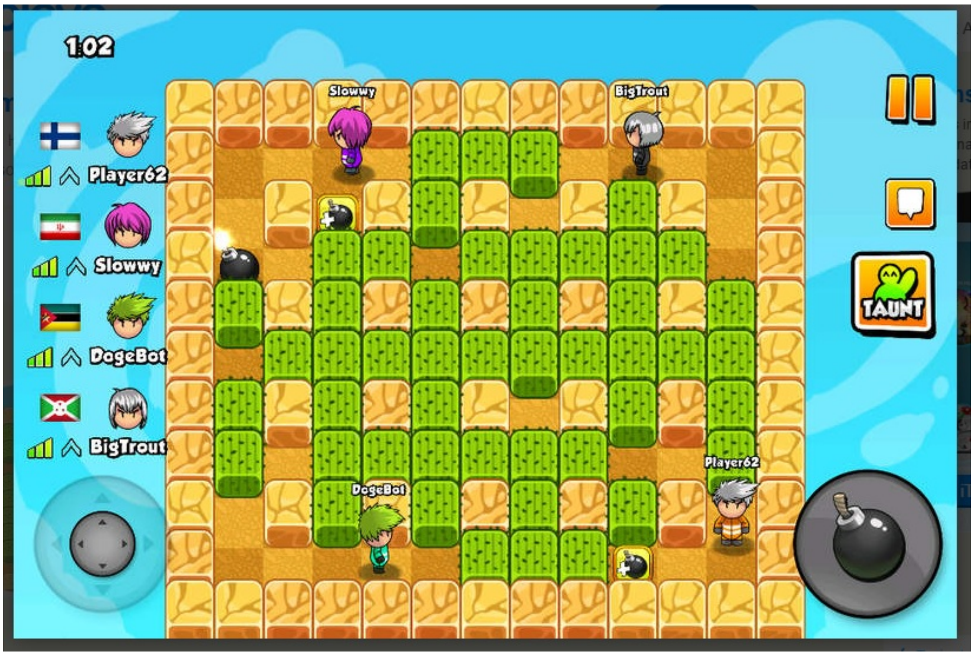
em risco o seu planeta. As posições que ocupam os navios estão relacionadas com lugares geométricos como circunferência, elipse, parábola, hipérbole e mediatriz.

As duas primeiras atividades da primeira parte poderão ser realizadas em sala de aula com diferentes recursos, como papel quadriculado, compasso e régua. As demais atividades deverão ser realizadas no ambiente do *Geogebra*.

Para a segunda parte das atividades utilizando os conceitos da Geometria do Táxi, estão baseadas no jogo *Bomber Friends*. Trata-se de um jogo gratuito que pode ser obtido facilmente na *web*, no *Google Play*.

O Jogo *Bomber Friends* é um jogo de estratégia e ação que coloca o jogador em combates explosivos, em partidas online com no máximo 4 jogadores. Durante as batalhas, o jogador precisa explodir as caixas espalhadas pelo cenário para abrir caminho e coletar itens que melhoram suas habilidades. Dessa maneira o jogador vai estar apto a encarar seus adversários e deixá-lo encurralados com suas bombas cuidando para não ser atingido pelas suas próprias explosões ou mesmo pelas bombas que os adversários vão deixando pelo caminho. Os itens que podem ser apanhados no jogo permitem ao jogado se deslocar mais rapidamente, soltar explosivos e aumentar a munição.

Figura 65 – Tela do jogo *Bomber Friends*



Fonte: Bubbleye.com

Em nossa adaptação de atividades, existe um planeta feito de blocos chamado *GT*, onde moram os *GTs*, que estão sendo atacados por inimigos de outro planeta. A missão do *GTinho* é vencer todos os inimigos encontrados em cada nível utilizando bombas, que tem um alcance de explosão que varia de acordo com o nível do jogo para que consiga abrir a porta e ir para o próximo nível até que todos os inimigos sejam destruídos e seu planeta esteja salvo.

4.1 ATIVIDADES SOBRE LUGARES GEOMÉTRICOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

4.1.1 Atividade E_1: Distância Euclidiana

Objetivo da Atividade: Determinar a distância entre dois pontos utlizando a distância euclidiana.

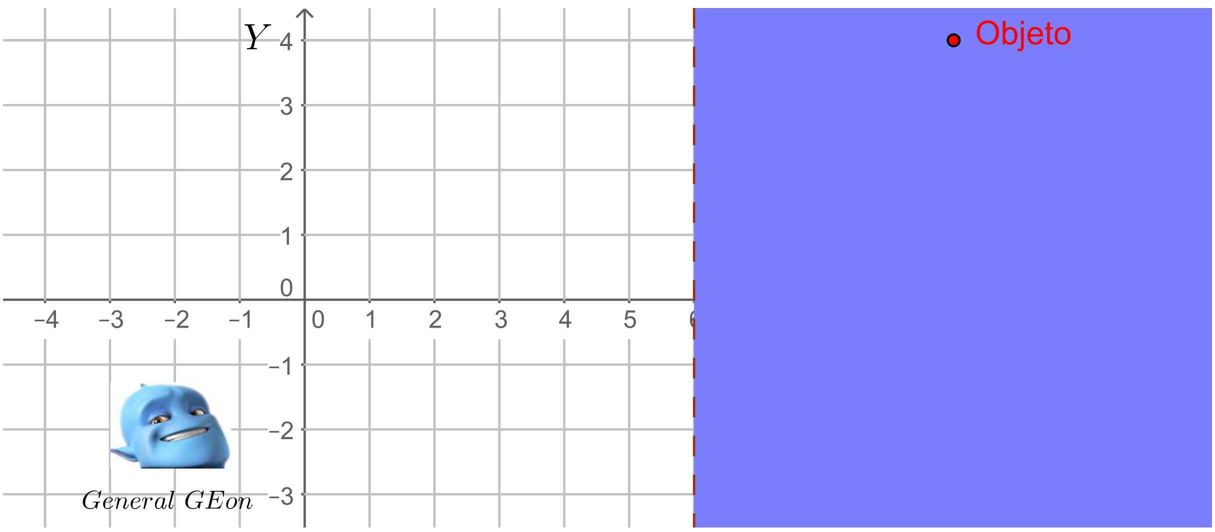
Recursos: Papel quadriculado e régua.

Procedimentos: O professor entrega aos alunos o roteiro da estória a seguir:

Estória 1: **Objeto não identificado**

O Planeta GEts está sendo invadido por seres de outros planetas que querem destruí-lo. Cabe ao nosso herói General GEon defender o planeta da destruição eminente. Para isso ele terá que posicionar seus navios de guera em locais estratégicos durante cada uma das batalhas para proteger seu planeta. E você é convidado a ajudá-lo nessa missão. O General GEon estava em seu escritório quando recebeu a noticia de que um objeto não identificado havia caído no mar. As coordenadas de onde o objeto havia caído eram as seguintes (10,4) e neste momento ele se encontrava no quartel localizado nas coordenadas (-2,-2), conforme o esboço da Figura 66.

Figura 66 – Localização referente as atividades 4.1.1



Fonte: Próprio Autor

Baseado na estória, responda as seguintes questões:

1. Qual a distância entre a localização do General e do objeto não identificado no momento em que este caiu no mar?
2. Como você determinou esta distância?

Conversa com o Professor:

- Caro professor, nesta atividade procure proporcionar aos alunos oportunidades de calcular a distância entre dois pontos utilizando o Teorema de Pitágoras, para isso ofereça-lhes papel quadriculado e régua. Procure valorizar outras maneiras que eles possam ter utilizado. Geralmente espera-se que o aluno determine a distância traçando uma linha reta, como usualmente este conceito é tratado nas escolas.
- Lembrando que a menor distância euclidiana entre os pontos A e B em linha reta, abordada na Seção 2.2.1 é calculada da seguinte maneira: $d_E = \sqrt{|x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2}$

4.1.2 Atividade E_2: Circunferência Euclidiana

Objetivo da Atividade: Explorar o conceito da circunferência euclidiana enquanto lugar geométrico.

Recursos: Papel quadriculado, régua e compasso.

Procedimentos: O professor entrega aos alunos o roteiro da Estória 2 a seguir:

Estória 2: **A Base Militar**

Chegando ao local o General GEon descobriu uma mensagem vinda de outro planeta declarando guerra. Apavorado, nosso herói decidiu construir uma base no mar para que assim ele pudesse defender seu planeta de forma eficaz. Situou o mar em um plano de coordenadas cartesianas e localizou a base nas coordenadas (1,1). Como não sabia quando seria o ataque ele resolveu proteger sua base colocando vários navios de guerra todos a uma distância de 2 km da base.

Diante do desafio proposto, responda as seguintes questões:

1. Marque no plano cartesiano a localização da base e esboce os pontos que representam os navios de proteção em relação à base. Se o número de navios de proteção for aumentando, com que figura geométrica a reunião destes pontos se aproxima?
2. Que estratégias você utilizou para resolver o problema?

Conversa com o professor

- Na atividade E_2 introduzimos o conceito de circunferência na geometria euclidiana. Quando o aluno pensar em posicionar todos os navios a uma mesma distância da base é possível que ele já comece a estabelecer conexões com o conceito de circunferência euclidiana.
- Caso eles não consigam imaginar uma forma de construir o lugar geométrico do problema, recomendamos que seja entregue a eles papel quadriculado e compasso para que possam construir uma circunferência tomando as informações fornecidas por meio desta estória.
- Neste momento sugerimos que seja apresentado aos alunos algumas definições importantes como:

i) Lugar Geométrico: Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satistaz duas propriedades:

1. *Todo ponto de L possui a propriedade P.*
2. *Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a L.*

ii) Circunferência ou Círculo Euclidiano: Dados um real positivo r e um ponto O do plano, o L.G. dos pontos do plano que estão à distância r do ponto O é a circunferência ou círculo de centro O e raio r.

iii) Equação analítica da circunferência euclididana, conforme abordada na Seção 2.7.1:

$$C_T = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 = r^2$$

4.1.3 Explorando os Conceitos de Lugares Geométricos no *Geogebra*

Como proposta utilizaremos o *software Geogebra* para fazer as construções dos Lugares Geométricos Euclidianos e do Táxi devido a versatilidade do software de geometria dinâmica que facilita a conexão entre as representações geométrica e algébrica de cada lugar geométrico trabalhado.

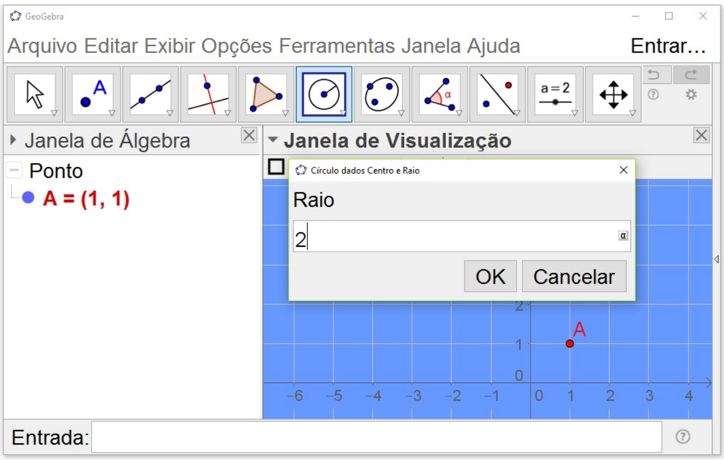
Para a realização de uma construção no *Geogebra* é necessário selecionar a ferramenta necessária na Barra de ferramentas e, logo em seguida clicar na janela de visualização ou digitar a expressão desejada no espaço destinado para a entrada.

A seguir apresentamos a orientação dos passos para a construção de um círculo ou circunferência utilizando o *Geogebra*:

1. Clique no ítem *Círculo* na barra de ferramentas;

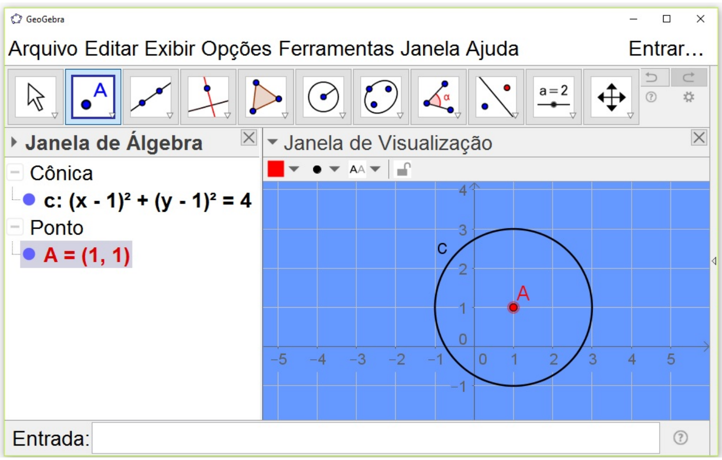
2. Em seguida, clique no sub ítem *Círculo dados centro e raio*;
3. Agora clique da Janela de Visualização para marcar o centro do círculo $A = (1,1)$.
4. Aparecerá uma caixa para que você digite o valor do raio do círculo;
5. Digitando o valor do raio, basta que seja confirmado em ok e o círculo surgirá construído na tela.

Figura 67 – Etapa inicial da construção de um círculo euclidiano no *Geogebra*



Fonte: Próprio Autor

Figura 68 – Representação do círculo construído no *Geogebra*



Fonte: Próprio Autor

4.1.4 Atividade E_3: Elipse Euclidiana

Objetivo da Atividade: Explorar o conceito da elipse euclididana enquanto lugar geométrico.

Recursos: Estória impressa em uma folha de papel e computador com o *Software Geogebra* instalado.

Procedimentos: O professor disponibilizará a estória E_3 impressa aos alunos. Em seguida recomendando que seja utilizado o *Geogebra* para a realização da atividade.

Estória 3: **Preparado para o pior**

Depois de vencer uma batalha o General GEon resolveu que precisaria de mais uma base militar para reforçar a defesa pois sabia que o próximo ataque seria ainda mais terrível. Ele então escolheu para a construção, o local de coordenadas (4,1). Construída a segunda base, torno-se necessário que ela fosse também protegida, no entanto, ele não dispunha de muitos navios de guerra para esta finalidade. Foi então que ele decidiu mudar o esquema anterior e dispor os navios de maneira que pudessem atender as duas bases simultaneamente. Para isso ele planejou posicionar os navios de tal maneira de que a soma das distâncias de qualquer navio as duas bases fosse sempre iguais.

1. Como ficarão dispostos os navios de guerra em relação às duas bases?

2. Imagine que o número de navios para proteger as duas bases aumentasse muito. Se tomarmos a posição de cada navio atendendo a condição dada como pontos, que figura se aproxima a reunião de todos estes pontos?

Conversa com o professor

- Nesta atividade o problema tem a finalidade de conduzir os alunos a formarem o conceito de elipse euclidiana. É importante que seja dado um tempo para os alunos tentarem resolver o problema.

- Recomenda-se que seja apresentado aos alunos a definição de elipse euclidiana e sua equação geral, como apresentado a seguir:

Uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, e maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, $0 \leq a$ e $d(F_1,F_2) = 2c$., como trazemos na seção 2.7.2

$$\mathcal{E}^{E}_{F_1,F_2} = \{d_E(P,F_1) + d_E(P,F_2) = 2a\}$$

A seguir apresentamos o procedimento para a construção da elipse utilizando o *software Geogebra*:

1. Clique no ítem *elipse* na barra de ferramentas.

2. Em seguida, clique em dois pontos diferentes na janela de visualização.

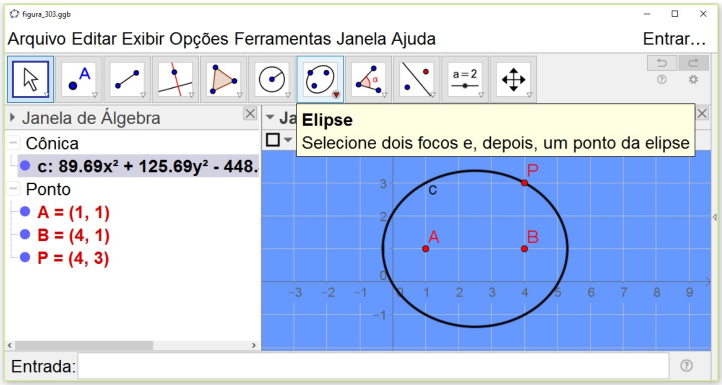
3. Logo após, clique em um terceiro ponto para construção da elipse que denominamos de P.

4. Agora clique com o botão direito do mouse em cima dos pontos que estão dentro da elipse e escolha a opção *renomear* para renomeá-los para F_1 e F_2 (focos da elipse).

5. A elipse será plotada na janela de visualização do *Geogebra*, como na Figura 69.

6. Você poderá alterar o tamanho da elipse variando a posição do ponto P pertencente a ela.

Figura 69 – Esboço gráfico de uma elipse euclidiana



Fonte: Próprio Autor

4.1.5 Atividade E_4: Hipérbole Euclidiana

Objetivo da Atividade: Explorar os conceitos de hipérbole euclididana como lugar geométrico.

Recursos: Estória E_4 impressa e computador com *software Geogebra* instalado.

Procedimentos: O professor disponibilizará a estória impressa aos alunos. Assim como na atividade anterior o *Geogebra* será utilizado para o seu desenvolvimento.

Estória 4: **Mudando a estratégia**

A segunda batalha foi muito difícil de vencer, então o General GEon resolveu alterar a maneira de colocar os navios na defesa de suas bases militares. O novo esquema seria posicionar os barcos em todos os pontos onde o módulo da diferença da distância de cada barco a base 1 e do barco a base 2 fosse sempre a mesma.

1. Como ficarão dispostos os navios de guerra em relação às bases? Reproduza a figura resultante com os navios atendendo a tal condição:

Conversa com o professor

- Nesta atividade introduzimos o conceito de hipérbole euclidiana. Sugerimos que relembre com os alunos os conceitos de módulo e, principalmente, que as distâncias serão consideradas não negativas.

- Neste momento sugerimos que seja apresentado aos alunos a definição de hipérbole euclidiana e sua equação geral apresentadas a seguir:

Uma hipérbole H de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $d > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$, como abordado na Seção 2.7.4

$H_E = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 | d_E(P,F_1) - d_E(P,F_2)| = d,$

Está apresentado a seguir uma sugestão de sequência de procedimentos para a construção da hipérbole no *Geogebra*.

1. Clique no ícone *Controle Deslizante* da barra de ferramentas;

2. Em seguida, clique na janela de visualização;

3. Na janela que se abrirá digite h para o controle deslizante (abscissa do centro da hipérbole).

4. Ainda nesta caixa ajuste o intervalo mínimo para -10, intervalo máximo para 10 (recomendado para o exercício) e incremento 0,1(variação inteira);

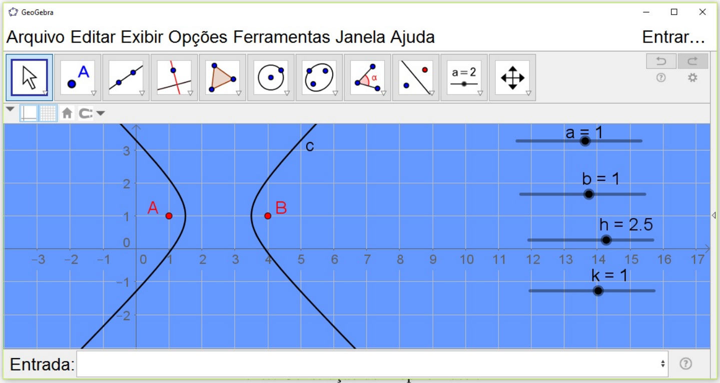
5. Em seguida, crie o controle deslizante k, (ordenada do centro da hipérbole) com intervalo mínimo para -10, intervalo máximo para 10 e incremento 1;

6. Agora, crie os controles deslizantes a e b (que controlam as assíntotas da hipérbole), com intervalo mínimo sugerido de 1, intervalo máximo 10 e incremento 1.

7. No campo entrada do *Geogebra* digite a equação da hipérbole de centro em (h,k): $(((x-h)^2)/a^2 - ((y-k)^2/b^2)) = 1$

8. Agora aperte a tecla *enter* e observe que a hipérbole aparecerá plotada na janela de visualização, como mostra a Figura 70. As dimensões da hipérbole poderão ser alteradas utilizando os controles deslizantes a, b, k e h.

Figura 70 – Representação gráfica da hipérbole euclidiana



Fonte: Próprio Autor

4.1.6 Atividade E_5: Parábola Euclidiana

Objetivo da Atividade: Explorar os conceitos da parábola euclidiana.

Recursos: Estória E_5 impressa e computador com *Software Geogebra* instalado.

Procedimentos: O professor disponibilizará a estória impressa. E logo após, os alunos devem utilizar o *Geogebra* para realizar a construção da parábola euclidiana.

Estória 5: **Tentando se proteger**

Depois de uma batalha perdida, a base de coordenadas (4,1) foi destruída. Os invasores posicionaram-se na praia, formando uma barreira em linha reta em relação ao mar e preparam-se para o ataque. O General GEon precisa posicionar seus navios de guerra de modo a conseguir atacar os inimigos, mas também proteger sua única base restante. Diante da situação ele resolve posicionar cada navio de forma que a sua distância até a base seja a mesma até a barreira dos inimigos.

1. Como ficarão dispostos os navios de guerra em relação a base e a linha do inimigo? Qual figura parece se formar se aumentarmos cada vez mais o número de navios?

Conversa com o professor

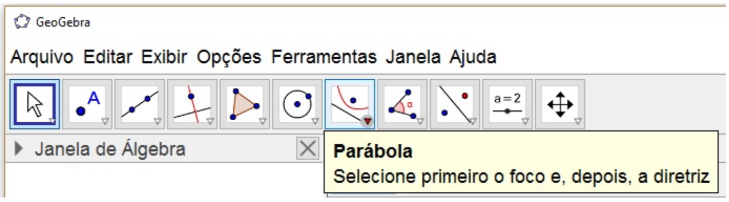
- A quinta atividade pretende introduzir o conceito de parábola euclidiana enquanto lugar geométrico dos pontos que atendem a propriedade imposta pelo problema. É possível que os alunos já tenham conhecimentos sobre parábola e por isso é importante que sejam questionados sobre este lugar geométrico.
- Esta atividade permite também explorar os conceitos de distância entre ponto e reta e inclinação de uma reta euclidiana.

- Neste momento aborde com os alunos a definição de parábola euclidiana conforme apresentado na Seção 2.7.3 a seguir:

Definição da parábola: *Dados uma reta l e um ponto $F \notin l$, que chamamos de diretriz e foco, respectivamente, definimos uma parábola como sendo o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância à F e a l são iguais.*

Para construir a parábola euclidiana no *Geogebra* vamos utilizar a ferramenta *Parábola* da barra de ferramentas, como mostra a Figura 71. Para realizar a construção da parábola utlizando *Software* é apresentada a seguir uma sequência de procedimentos.

Figura 71 – Passo inicial da construção da parábola euclidiana



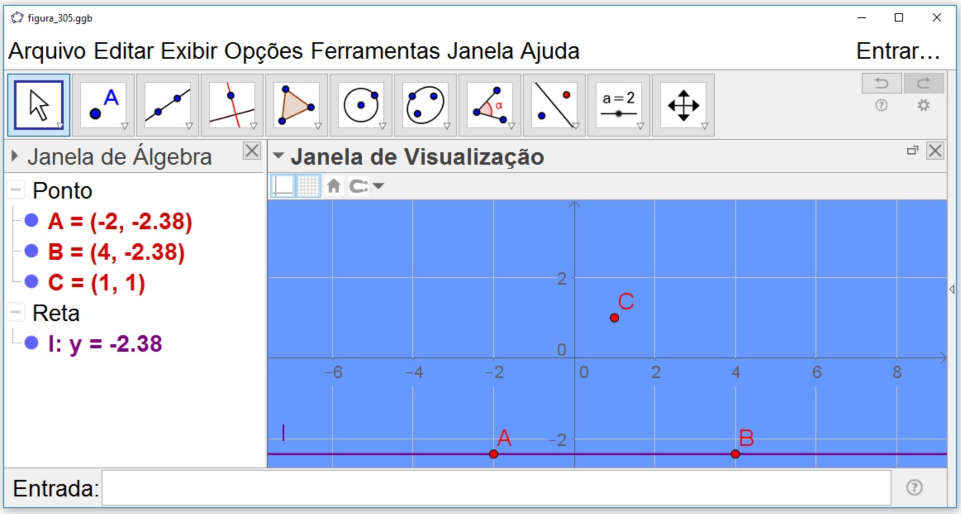
Fonte: Próprio Autor

Procedimentos de construção da parábola no *Geogebra*:

1. Inicialmente construa uma reta diretriz e para isto clique na ferramenta *Reta* na barra de ferramentas e em seguida, na janela de visualização construa ou selecione dois pontos A e B e renomeie a reta para l;

2. Em seguida, vamos construir o ponto C que irá representar o foco da parábola clicando no ícone *Ponto* na barra de ferramentas, como podemos observar na Figura 72 e depois, clicando na janela de visualização;

Figura 72 – Segundo passo da construção da parábola euclidiana no *Geogebra*



Fonte: Próprio Autor

3. Clique no ícone *Parábola* na barra de ferramentas. Na ajuda observe que aparecerá escrito: "selecione primeiro o foco e depois a diretriz";

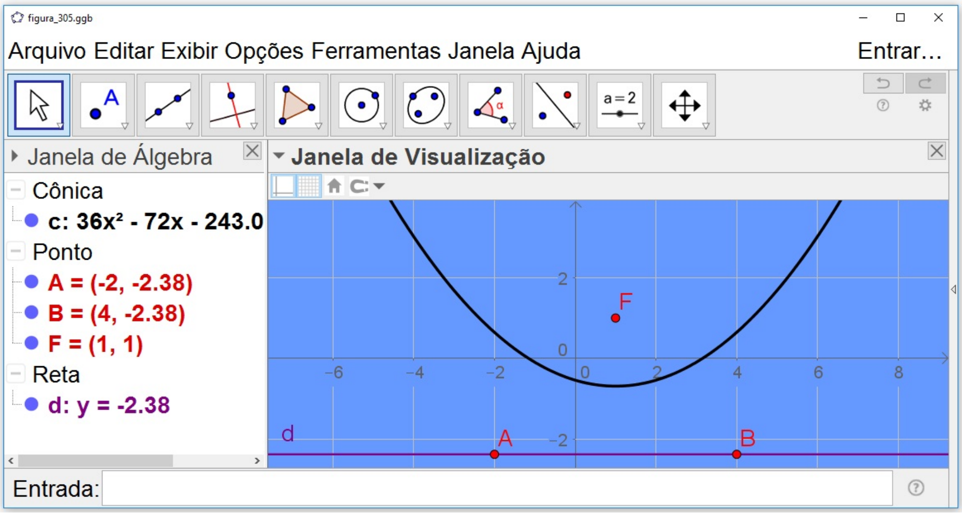
4. Na janela de visualização, clique primeiro no ponto C e renomeie por F, licando no ponto com o mouse do lado direito. Em seguida na reta construída anteriormante e você pode observar a parábola ser plotada na janela de visualização. Renomeie a diretriz por d, como pelo exemplo apresentado na Figura 73.

5. Experimente alterar a posição do ponto F arrastando-o com o mouse na tela de visualização. Observe que o formato da parábola é modificado.

6. Crie um ponto P pertencente a parábola construída. A seguir construa os segmentos FP e BP (no lugar do ponto B pode ser qualquer outro pertencente a diretriz).

7. Com o recurso de medir distância da barra de ferramentas meça os segmentos FP e BP. Observe o que acontece.

Figura 73 – Representação de uma parábola euclidiana no *Geogebra*



Fonte: Próprio Autor

4.1.7 Atividade E_6: Mediatriz Euclidiana

Objetivo da Atividade: Explorar as propriedades da Mediatriz Euclidiana.

Recursos: Estória impressa e computador com *Software Geogebra* instalado.

Procedimentos: O professor disponibilizará a estória escrita aos alunos. Em seguida os alunos deverão utilizar o *Geogebra* para a construir da mediatriz.

Estória 6: **A batalha Final**

A batalha foi difícil mas foi vencida, porém a última base foi destruída e ainda restam duas naves inimigas, uma na posição (1,2) e a outra na (3,2), conforme ilustra a Figura 75 , que embora tenham caído na água continuam atirando. Para combatê-lo o General deverá posicionar cada navio de sua frota de maneira que estejam equidistantes simultaneamente das duas naves e finalmente o planeta do General GEon esteja salvo das ivasões.

Baseado na Estória E_6 responda as seguintes questões:

1. Como ficarão dispostos os navios de guerra em relação as duas naves do inimigo? Reproduza a figura obtida.

Conversa com o professor

- A sexta e última atividade desta etapa aborda o conceito de mediatriz na geometria euclidiana. Devido a facilidade de desenhar este lugar geométrico é possível que os alunos construam-na apenas com o uso de uma régua, porém é importante estimulá-los a realizar a construção no *Geogebra*, pois a mediatriz é ponto de partida para outras construção no *Geogebra*.

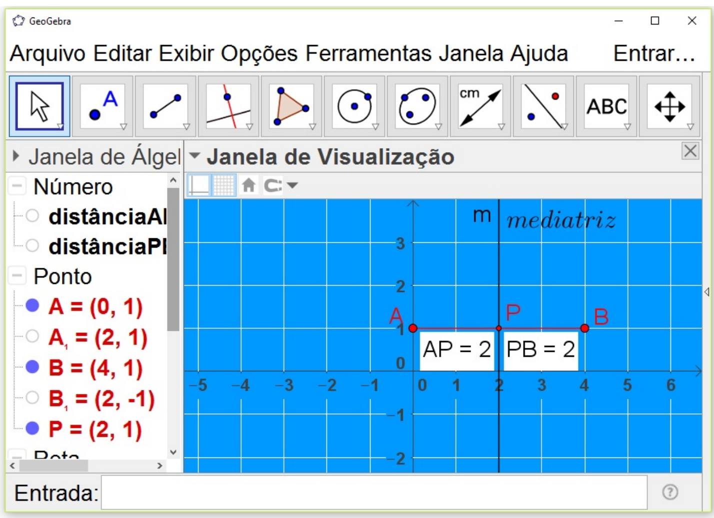
- Neste momento apresente aos alunos a definição de mediatriz euclidiana:

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento, passando pelo seu ponto médio.

A construção da mediatriz no *Geogebra* pode ser feita da seguinte forma:

1. Inicie clicando em *Ponto* na barra de ferramentas;
2. Marque os pontos Ae B na janela de visualização;
3. Clique no ítem *Mediatriz* na barra de ferramentas;
4. Em seguida, clique nos dois pontos na janela de visualização e a mediatriz aparecerá plotada, como mostra a Figura 75.
5. Renomeie a mediatriz por m. A seguir marque um ponto P na mediaatriz e depois construa os segmentos AP e BP.
6. Utilizando o recurso de medição do *Geogebra* meça os segmentos AP e BP.
7. Arraste com o mouse o ponto P e observe o que acontece.

Figura 74 – Mediatriz euclidiana



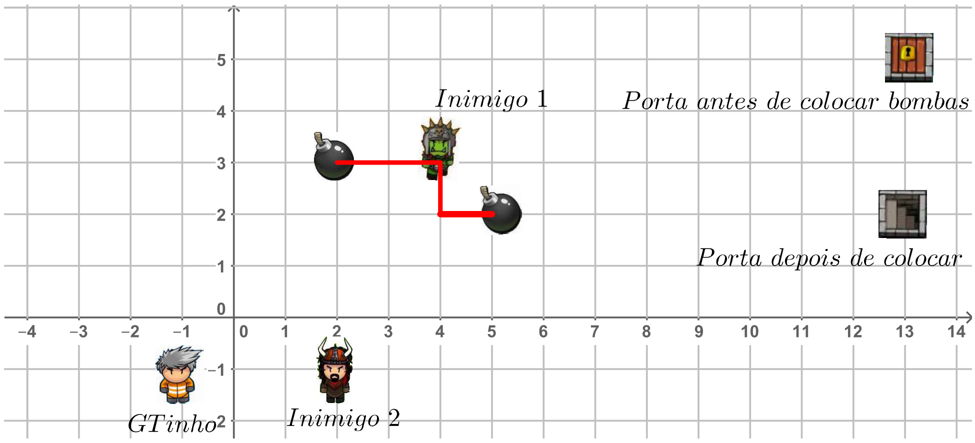
Fonte: Próprio Autor

Apresentamos na primeira etapa atividades em forma de situações problemas que visam criar condições para que o aluno perceba as propriedades que sustentam a definição de lugar geométrico de cada uma das figuras geométricas com diferentes propriedades na GE.

4.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA ENVOLVENDO CONCEITOS DA GT

Apresentamos nesta parte o jogo que denominamos de *Bomb-Táxi*, e por meio dele ajudaremos o nosso amigo GTinho Morador do *Mundo GT* a vencer os inimigos e salvar o seu planeta que está sendo invadido por habitantes de outro planeta. O *Mundo da GT* é todo feito de blocos e os pequenos GTinhos só podem mover-se pelas linhas horizontais e verticais. A Figura 75 mostra o cenário e os personagens do jogo. Eles possuem bombas que são capazes de distruir seus inimigos se colocadas a uma distância determinada. As posições ocupadas pelas bombas estão relacionadas com lugares geométricos como circunferência, elipse, parábola, hipérbole entre outros.

Figura 75 – Personagens do Jogo Bomb-Táxi



Fonte: Próprio Autor

As regras do jogo são as seguintes:

- Só é possível deslocar-se na direção horizontal e vertical da malha quadriculada.
- Em cada nível do jogo há uma regra a ser cumprida para se vencer os inimigos. Quando os inimigos forem destruídos a porta é destrancada e o GTinho pode avançar para o próximo nível.

4.2.1 Atividade T_1: Táxi-distância

Objetivo da Atividade: Determinar a distância entre dois pontos na Geometria do Táxi.

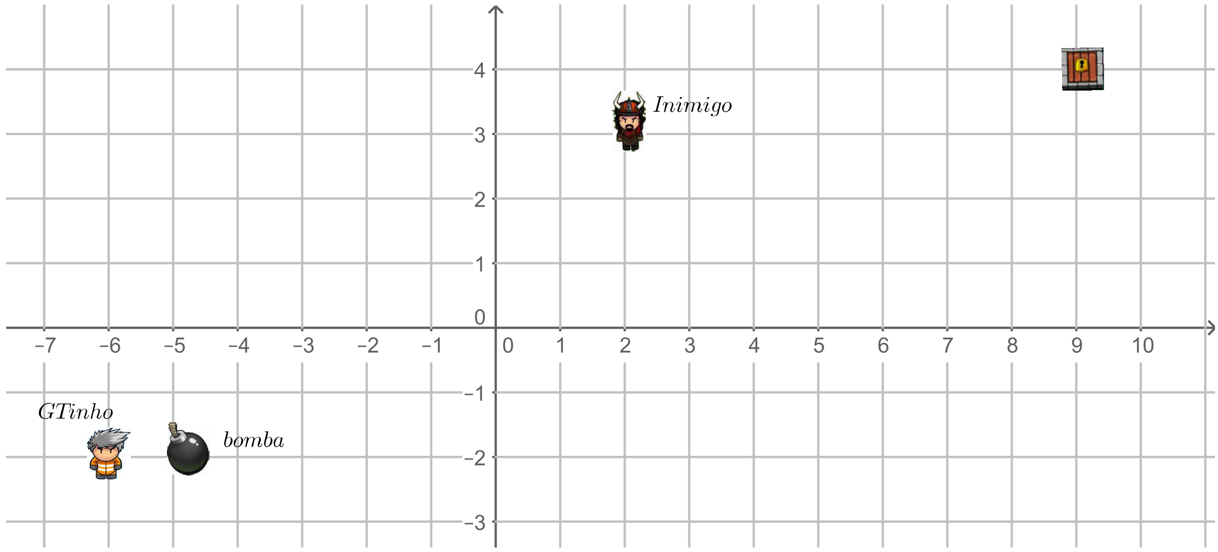
Recursos: Computador com o programa *Geogebra* instalado e Estória E_7 impressa em uma folha de papel.

Procedimentos: O professor deverá entregar aos alunos a estória e pedir a eles que observem o que está ilustrado na tela do computador. Figura 76.

Estória 7: **Táxi-distância**

Neste nível do jogo você pode vencer o inimigo com facilidade, você pode explodí-lo se posicionar a bomba a uma distância de duas unidades do invasor.

Figura 76 – Tela da atividade 7 no *Geogebra*



Fonte: Próprio Autor

Posicione a bomba na malha quadriculada (como a da Figura 76) de forma a imobilizar o inimigo e depois responda as questões a seguir:

1. Você percebeu alguma diferença entre o conceito de distância estudado na escola e o que estamos abordando nesta atividade?
2. Em suas atividades do dia-a-dia você já utilizou esse conceito de cálculo de distância entre dois pontos em algumas situações? Quais?
3. Quais as coordenadas de localização dos outros possíveis locais que você pode posicionar a bomba para vencer o inimigo?
4. Marque todos os possíveis trechos utilizados na tela para se obter a distância de duas unidades entre a bomba e o inimigo?

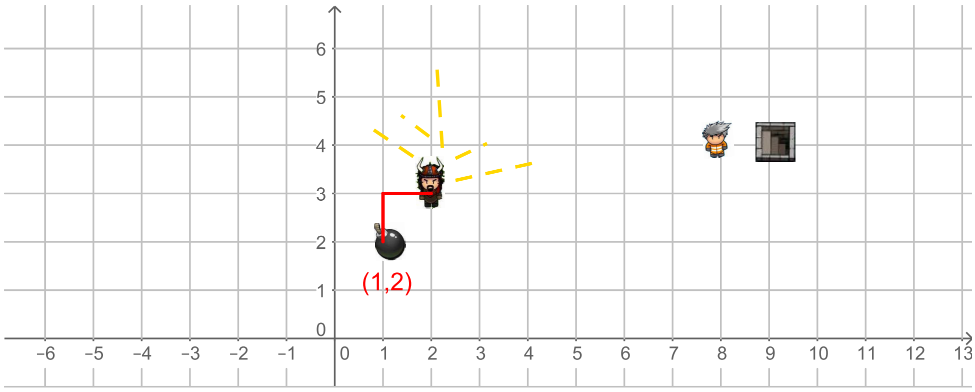
Conversa com o professor

Caro professor! No primeiro nível deste bloco de atividades introduzimos o conceito de distância na Geometria do Táxi. Quando o aluno for posicionar cada bomba a duas unidades de distância do inimigo é possível que ele encontre algumas dificuldades devido a associação com o conceito de distância euclidiana predominante na escola. É importante lembrá-los de que a distância somente poderá ser medida nas direções horizontal e vertical. Também é importante encorajá-los a procurar uma equação para o cálculo da distância do táxi entre dois pontos e comparar com a equação da distância euclidiana d_E abordada na atividade E_1 da Seção 4.1.

Neste nível do jogo é possível explorar também os conceitos de distância mínima entre dois pontos e o número de caminhos de menor distância entre dois pontos, conforme abordado na seção 2.6.

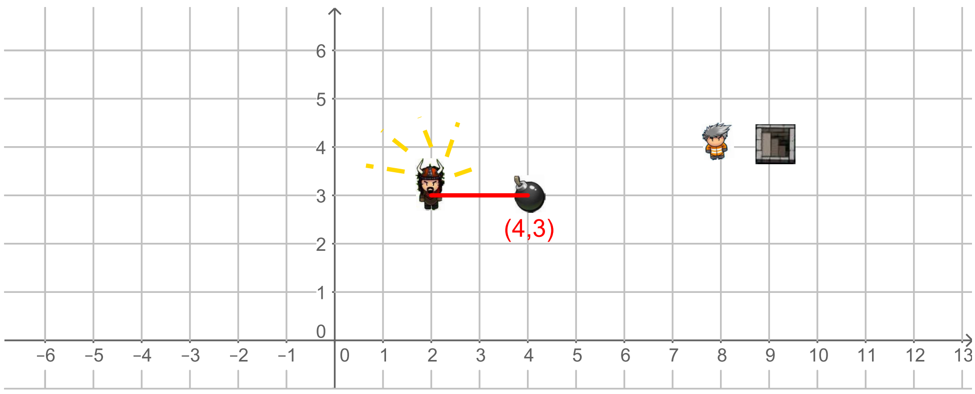
Existem oito soluções para o problema e as Figuras 77 à 84 mostram as possíveis soluções para o problema da atividade T_1. Nelas pode-se observar que a distância da bomba ao inimigo é de 2 unidades contadas na horizontal ou vertical.

Figura 77 – Solução 1 da Atividade T_1 táxi-distância



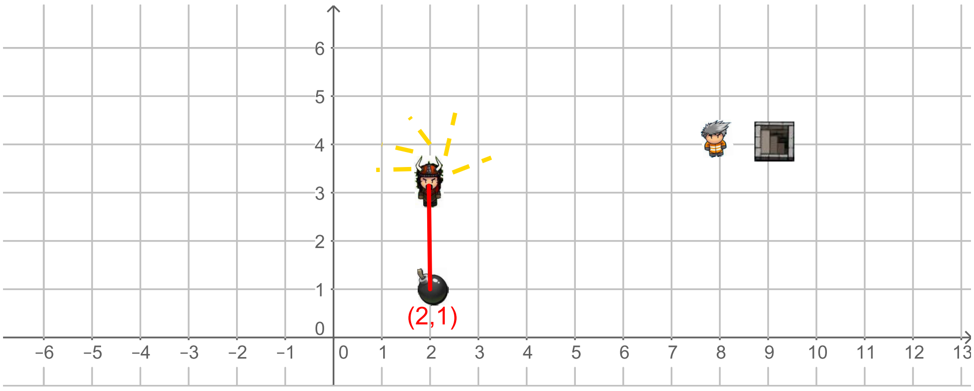
Fonte: Próprio Autor

Figura 78 – Solução 2 da Atividade T_1 táxi-distância



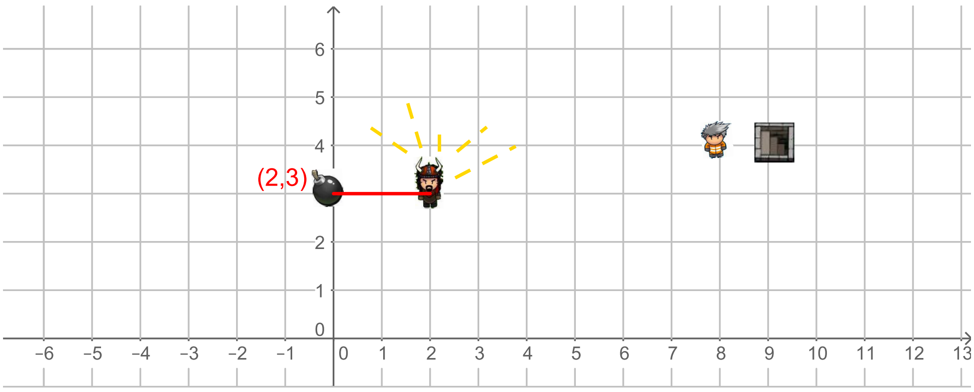
Fonte: Próprio Autor

Figura 79 – Solução 3 da Atividade T_1 táxi-distância



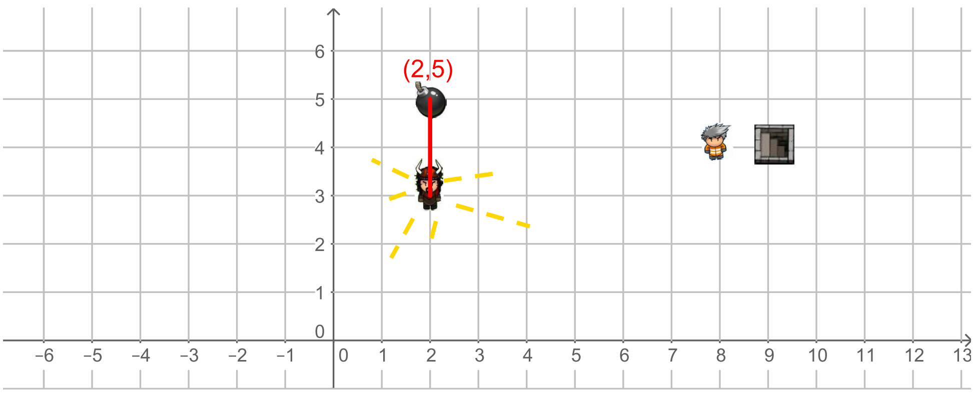
Fonte: Próprio Autor

Figura 80 – Solução 4 da Atividade T_1 táxi-distância



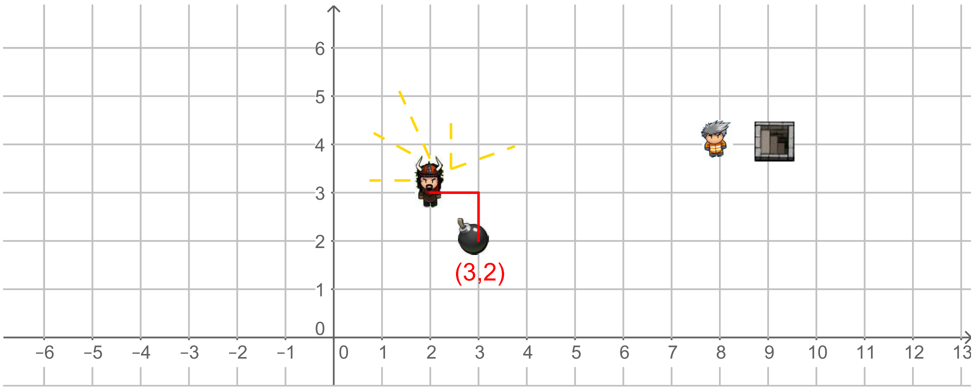
Fonte: Próprio Autor

Figura 81 – Solução 5 da Atividade T_1 táxi-distância



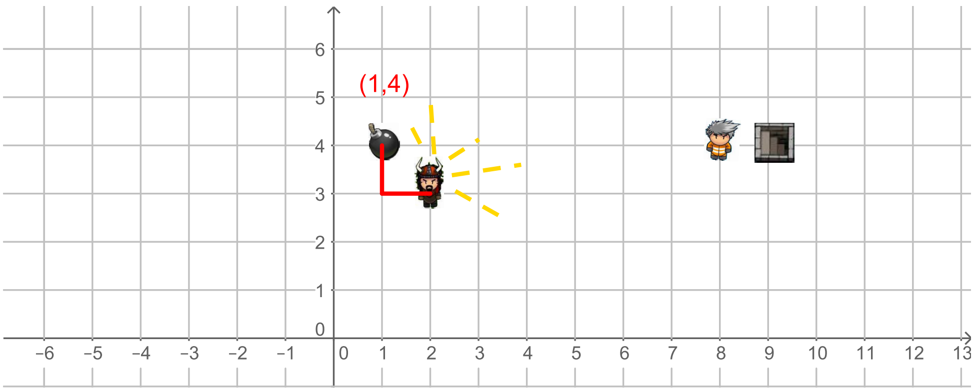
Fonte: Próprio Autor

Figura 82 – Solução 6 da Atividade T_1 táxi-distância



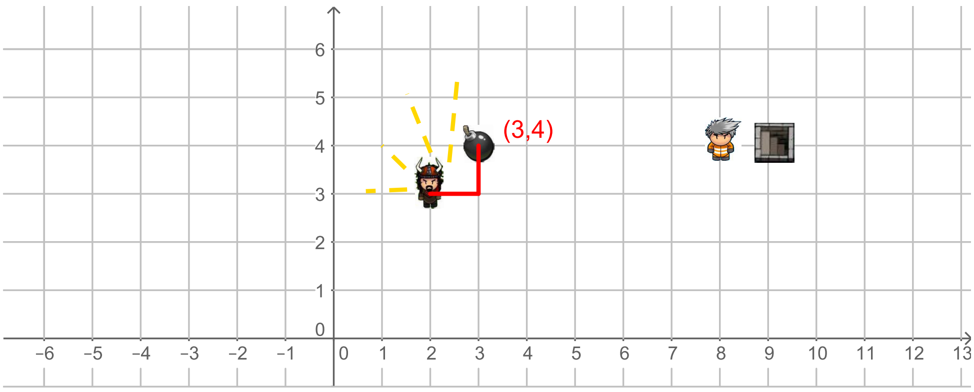
Fonte: Próprio Autor

Figura 83 – Solução 7 da Atividade T_1 táxi-distância



Fonte: Próprio Autor

Figura 84 – Solução 8 da Atividade T_1 táxi-distância



Fonte: Próprio Autor

4.2.2 Atividade T_2: Táxi-circunferência

Objetivo da Atividade: O objetivo desta atividade é explorar a propriedade da circunferência na Geometria do Táxi.

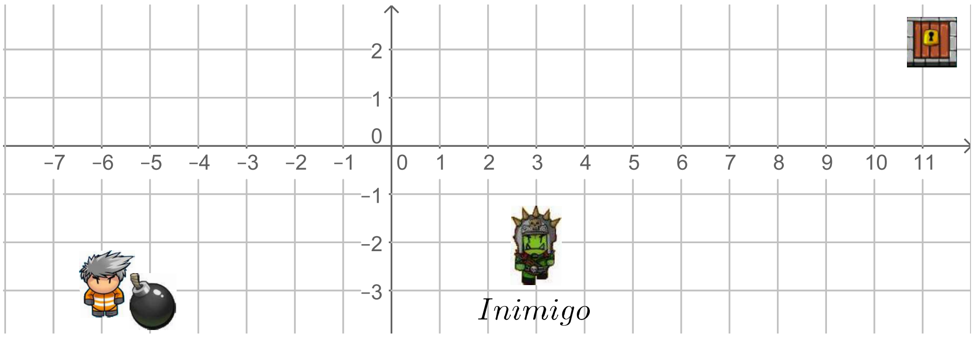
Recursos: Computador com o programa *Geogebra* instalado e a estória impressa.

Procedimentos: O professor entrega aos alunos a estória a seguir, e pede que observem o que está ilustrado na tela do computador. Figura 85.

Estória 8: **Nível 2**

Neste nível o inimigo é mais poderoso e para que possamos vencê-lo será necessário cercá-lo com bombas, ou seja, colocar bombas em todos os pontos que estão a duas unidades de distância dele, lembrando que só podemos utilizar as linhas horizontais e verticais para medir a distância.

Figura 85 – Tela da atividade 8 no *Geogebra*



Fonte: Próprio Autor

Após situar as bombas que atendem a condição dada pelo problema responda as questões seguintes para que a porta se abra e você possa avançar para o próximo nível do jogo:

1. Considerando a distância do táxi e a localização das bombas como pontos do plano cartesiano, como você definiria o conjunto solução para o problema?

2. Você conhece algum lugar geométrico da GE que possui a mesma propriedade obtida nesta atividade da GT?

Conversa com o professor

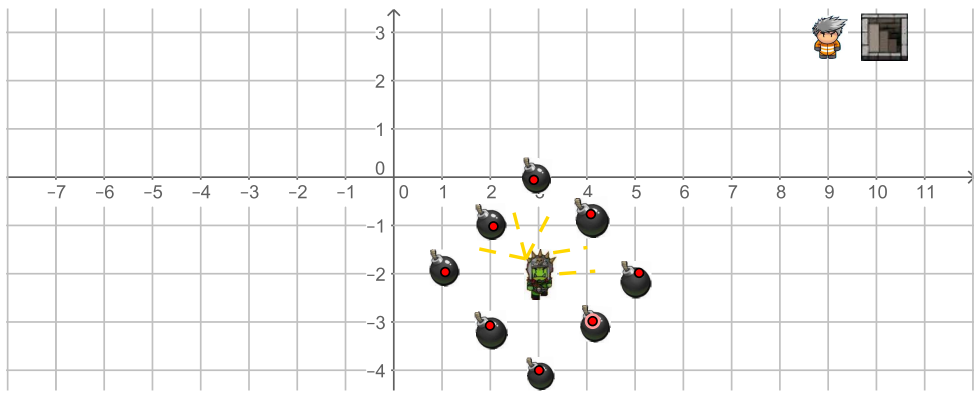
- O segundo nível introduz o conceito da táxi-circunferência. Quando o aluno for posicionar as bombas todas na mesma distância do inimigo é possível que comece a fazer conexões com o conceito de circunferência. É importante lembrar-los de que mesmo se tratando de outra geometria, a propriedade dos pontos que atendem a condição estipulada do problema é a mesma, porém, o conjunto dos pontos em que as condições são atendidas não serão os mesmos na GE e na GT, considerando suas maneiras diferentes de se calcular distância

- Também é importante questioná-los sobre o motivo do formato da táxi-circunferência e da circunferência euclidiana terem ficado diferentes, enfatizando a diferença entre as maneiras como são calculadas as distâncias entre dois pontos nas duas geometrias. Neste momento mostre a eles a equação da táxi-circunferência:

$$C_T = |x-a| + |y-b| = r$$

- Também é possível explorar os conceitos de intersecção de duas circunferências, como tratado na Seção 2.7.1.4.
- Na Figura 86, temos as bombas já dispostas formando a táxi-circunferência.

Figura 86 – Localização das bombas para o problema da Atividade T_2 Taxi-Circunferência



Fonte: Próprio Autor

- Sugerimos que seja proposto para os alunos construírem a táxi-circunferência no *Geogebra*.Como sugestão, apresentamos a seguir os procedimentos de construção.

  Consideramos aqui os valores reais de x no intervalo $[a-R, a+R]$.

Para construir a táxi-circunferência proceda da seguinte maneira:

1. Na barra de ferramentas clique em *controle deslizante*;
2. Na janela que se abrirá digite a para o controle deslizante (controle do valor da abscissa do centro da táxi-circunferência).
3. Ainda nesta caixa ajuste o intervalo mínimo para -5, intervalo máximo para 5 e incremento 1.

4. Clique novamente na janela de visualização.

5. Na janela que se abrirá digitar b no nome do controle deslizante (ele irá controlar a ordenada do centro da Táxi-circunferência).

6. Ajuste os valores do intervalo e incremento de forma análoga ao passo 3.

7. Clique mais uma vez na janela de visualização e digite r (raio da circunferência) no nome do controle deslizante.

8. Ajuste o intervalo mínimo para -5, intervalo máximo para 5 e incremento 1;

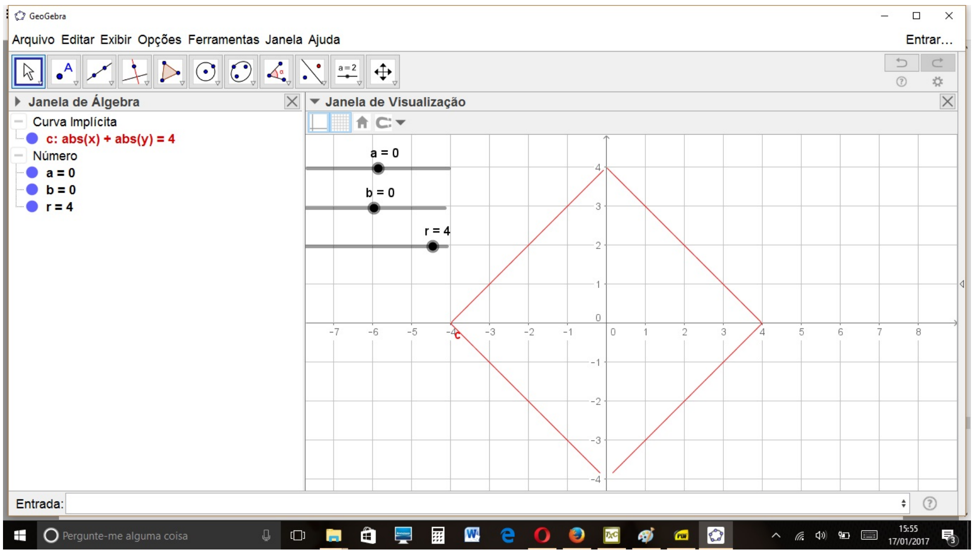
9. Na entrada do *Geogebra* digite a seguinte equação da táxi-circunferência: $abs(x-a)+abs(y-b)=r$

10. Clique enter;

11. Na janela de visualização aparecerá a táxi-circunferência, como mostra a Figura 87.

12. Variando os controles deslizante você poderá alterar o tamanho e a posição da táxi-circunferência.

Figura 87 – Representação da táxi-circunferência



Fonte: Próprio Autor

4.2.3 Atividade T_3: Táxi-elipse

Objetivo da Atividade: Explorar as propriedades da táxi-elipse

Recursos: Computador com o *Software Geogebra* instalado e Estória 9 impressa.

Procedimentos: O professor entrega aos alunos a estória referente a esta atividade, e pede que observem a ilustração na tela do computador, (Figura 88)

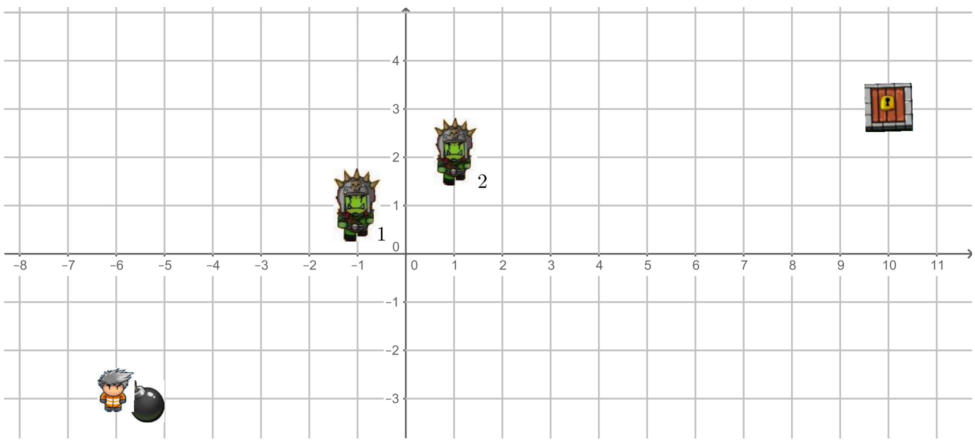
Estória 9: **Nível 3-Chegam mais inimigos**

Neste nível aumenta o perigo que os invasores representam ao planeta GT*, pois agora são dois inimigos que devem ser derrotados.*

Para vencer este nível você precisará destruir dois inimigos simultaneamente colocando todas as bombas no ponto cuja soma das distâncias entre a bomba e o inimigo 1 e entre a bomba e o inimigo 2 seja constante e igual a 5 unidades.

Após posicionar todas as bombas de acordo com a orientação dada responda as questões seguintes para que a porta se abra e você possa ir para o próximo nível:

Figura 88 – Tela do *Geogebra* referente à atividade 9



Fonte: Próprio Autor

1. Você conhece algum conceito de lugar geométrico que possua a mesma propriedade deste problema?

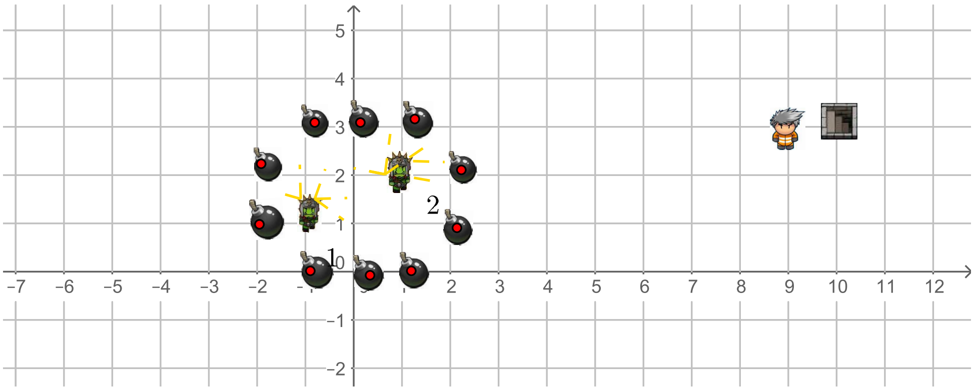
Conversa com o professor

- No terceiro nível introduzimos o conceito de táxi-elipse. Deixe-os analisar os conceitos envolvidos no problema e tirarem suas conclusões.

- Estimule-os a pensar em uma equação para a Táxi-elipse. Equação (13)

- Na Figura 89 apresentamos as bombas já posicionadas formando a táxi-elipse.

Figura 89 – Solução gráfica da Atividade T_3-táxi-elipse



Fonte: Próprio Autor

- Para que os alunos compreendam melhor o conceito da táxi-elipse propomos a construção utilizando o *Geogebra* onde os alunos poderão construir outros tipos de táxi-elipses:

Para construir a Táxi-elipse procede-se da seguinte maneira:

1. Na barra de ferramentas clique em controle deslizante.

2. Em seguida clique na janela de visualização,e aparecerá a caixa de diálogo.

3. Nomeie o controle deslizante e preencha os valores do limite inferior e superior do intervalo que será trabalhado.

4. Para exemplificar, utilizaremos o intervalo entre -5 e 5 e valor de incremento 1.

5. Crie os controles: a, b, d g e h ; onde a e b são as coordenadas de F_1 e g e h são as coordenadas de F_2 e d é a distância constante.

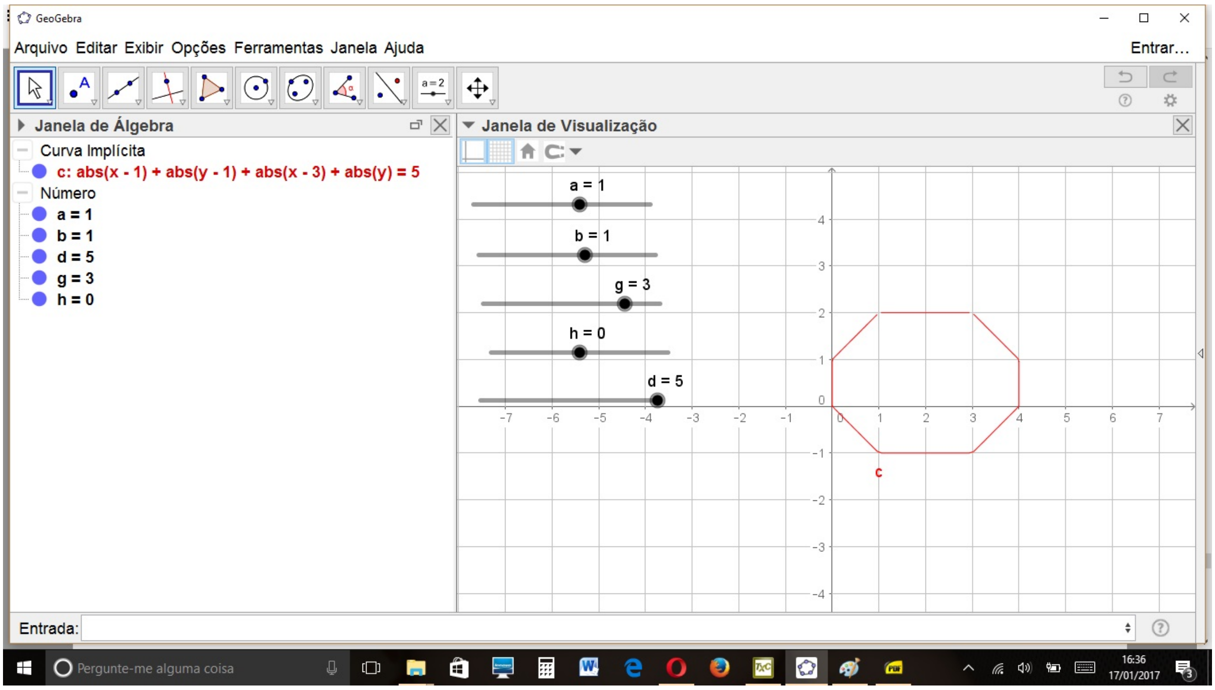
6. Na entrada do *Geogebra* digite a seguinte equação: $(abs(x-a)+abs(y-b))+(abs(x-g)+abs(y-h))=d$.

7. Clique *enter*.

8. Na janela de visualização aparecerá a Táxi-elipse, como ilustra a Figura 90.

9. Você poderá modificar as dimensões da táxi-elipse alterando os valores dos controles deslizantes, transformando-a em hexágonal ou octagonal.

Figura 90 – Representação gráfica da táxi-elipse



Fonte: Próprio Autor

4.2.4 Atividade T_4: Táxi-hipérbole

Objetivo da Atividade: Abordar as propriedades da táxi-hipérbole.

Recursos: Computador com o programa *Geogebra* instalado e estória impressa.

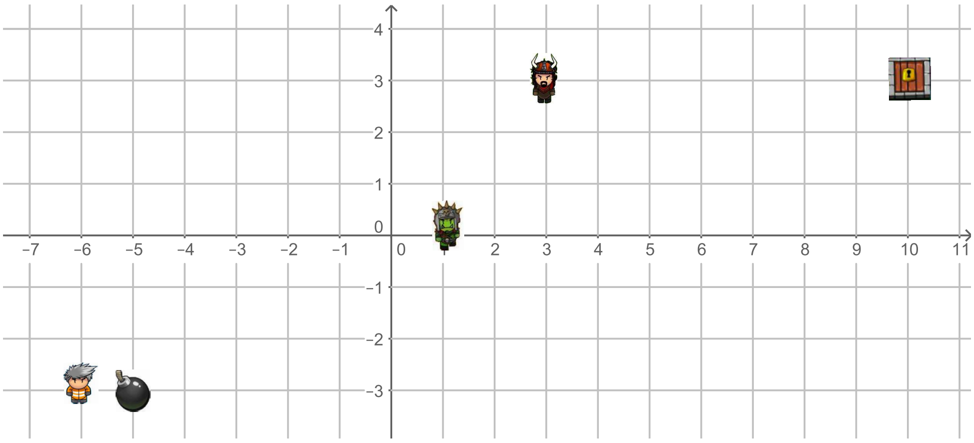
Procedimentos: O professor entrega aos alunos a estória impressa em papel referente a esta atividade, e pede que observem a ilustração na tela do computador, como mostra a Figura 91.

Estória 10: **Nível 4-Vencendo os inimigos**

Neste nível, já temos apenas dois inimigos, para vencê-los será necessário colocar bombas em todos os pontos onde o módulo da diferença da distância entre a bomba e o inimigo 1 e entre a bomba e o inimigo 2 seja constante e igual 3 unidades.

Após posicionar todas as bombas de forma que atenda as condições dadas responda as questões seguintes para que a porta se abra e você possa seguir para o próximo nível:

Figura 91 – Tela da atividade 10 no *Geogebra*



Fonte: Próprio Autor

1. Qual lugar geométrico nos faz lembrar a condição dada pelo problema?

2. Em sua opinião será que é possível se obter táxi-hipérboles com formatos diferentes?

Conversa com o professor

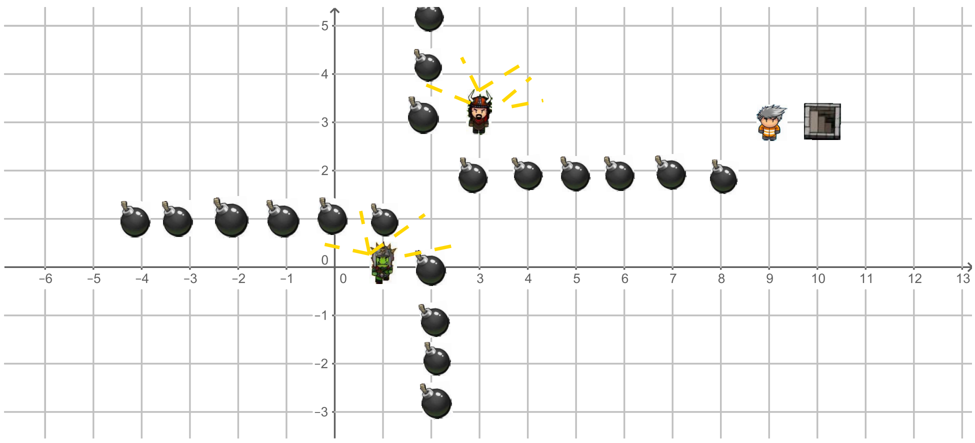
- No quarto nível introduzimos o conceito de hipérbole na Geometria do Táxi. Deixe os alunos analisarem para chegar a conclusão de qual lugar geométrico está tratando o problema.

- Sugerimos que seja apresentada aos alunos a equação da táxi-hipérbole 21:

$$H_T = abs((x-a)+(y-b)-(x-g)+(y-h)) = d$$

- Na Figura 92 apresentamos os pontos da táxi-hipérbole representada pelas bombas que atendem a propriedade emreferência.

Figura 92 – Solução gráfica da Atividade T_4-táxi-hipérbole



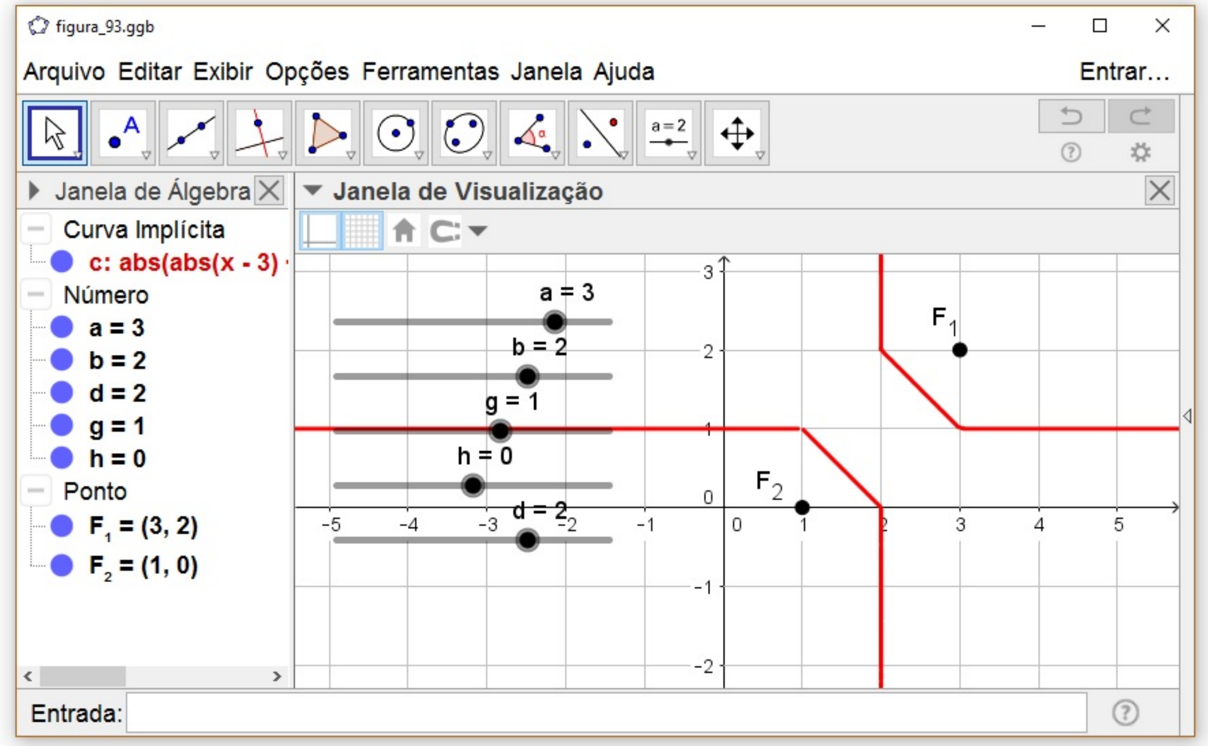
Fonte: Próprio Autor

- Para que os alunos compreendam melhor o conceito da táxi-hipérbole propomos a contrução utilizando o *Geogebra*.

Para construir a táxi-hipérbole sugerimos os passos a seguir :

1. Com o software *Geogebra* aberto, clique em *controle deslizante* na barra de ferramentas;
2. Na janela de visualização clique para que abra a caixa de diálogo e então você nomerá o controle deslizante, seu intervalo mínimo de -5 e o máximo de 5 (recomendado para o exercício) e incremento 1 (variação inteira).
3. Crie então os controles: a, b, d, g e h ; onde a e b são as coordenadas de F_1 e g e h são as coordenadas de F_2 e d é a distância constante;
4. Na entrada do *Geogebra* digite a seguinte equação: $abs((abs(x-a)+abs(y-b))-(abs(x-g)+abs(y-h)))=d$;
5. Clique *enter*;
6. Na janela de visualização aparecerá a figura da táxi-hipérbole, como ilustra a Figura 93;
7. Você poderá alterar o formato da Táxi-hipérbole variando os parâmetros dos controles deslizantes.

Figura 93 – Representação gráfica da táxi-hipérbole



Fonte: Próprio Autor

4.2.5 Atividade T_5: Táxi-parábola

Objetivo da Atividade: Trabalhar o conceito do Lugar Geométrico táxi-parábola.

Recursos: Computador com o programa *Geogebra* instalado e estória impressa.

Procedimentos: O professor entrega aos alunos a estória referente a esta atividade, e pede que observem a ilustração na tela do computador, como mostra a Figura 94.

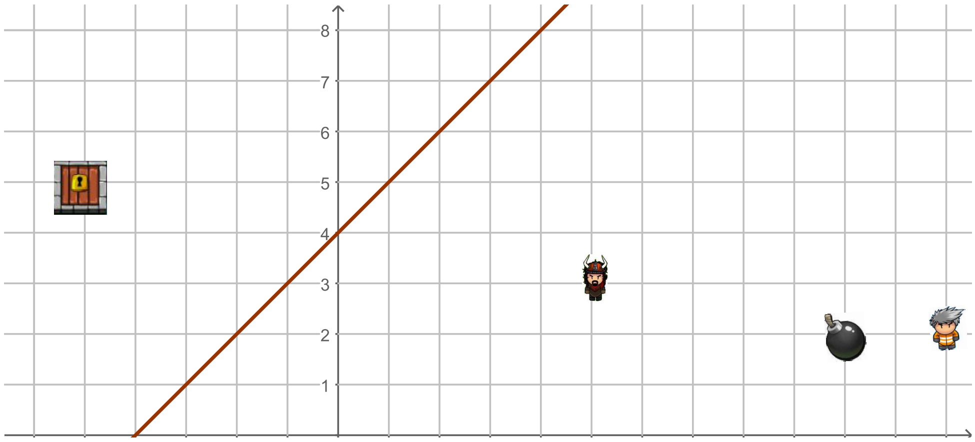
Estória 11: **Nível 5: O muro**

Neste nível temos apenas um inimigo, muito poderoso, mas também tem um muro que impede o nosso amigo GTinho de atravessar para ir até a porta. Porém, ele tem uma estratégia, usará as mesmas bombas que destrói o inimigo para derrubar o muro.

Para isso ele terá de soltar bombas onde a distância da bomba até o muro seja a mesma que a distância da bomba até seu inimigo.

Considerando que esta distância seja de 3 unidades, responda as questões a seguir:

Figura 94 – Tela do *Geogebra* para a Atividade T_5-táxi-parábola



Fonte: Próprio Autor

1. Qual lugar geométrico da GE nos lembra a figura formada pelas bombas? E qual objeto geométrico representa o muro?

2. Em sua opinião será que é possível encontrar figuras com formatos diferentes?

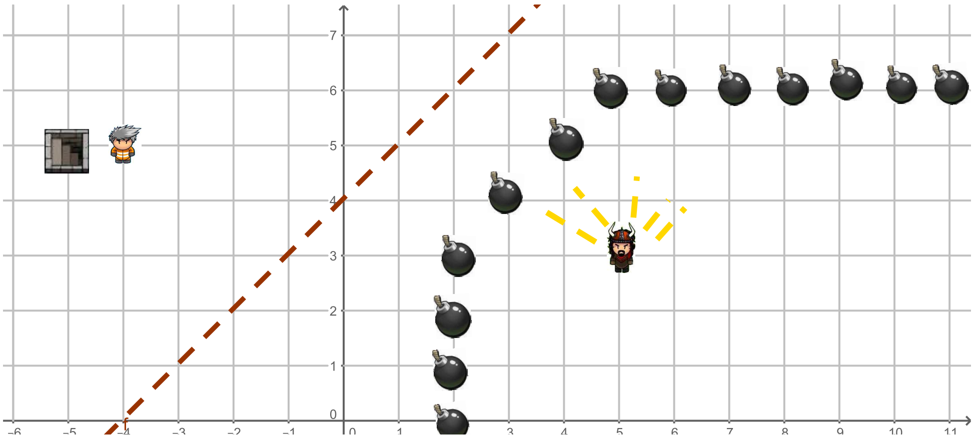
Conversa com o professor

- No quarto nível introduzimos a táxi-parábola. Deixe os alunos analisarem o conceito e chegar a conclusão de qual lugar geométrico estão tratando neste problema.

- Instigue-os a pensar sobre parábolas diferentes.

- Para que os alunos compreendam melhor o conceito da táxi-parábola propomos sua contrução utilizando o *Geogebra* onde os alunos poderão variar os parâmetros com mais facilidade e visualizar diferentes tipos de táxi-parábolas.

Figura 95 – Solução gráfica da Atividade T_5-táxi-parábola



Fonte: Próprio Autor

A seguir apresentamos os procedimentos para a construção da táxi-parábola:

Construiremos uma táxi-parábola cuja inclinação da reta diretriz seja igual a 1, ou seja, $|m| = 1$

1. Faça primeiramente a reta diretriz, clique em *reta* na barra de ferramentas e logo após clique em dois pontos, $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. (Lembrando que a inclinação da reta é dada por: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1$).

2. Em seguida vá até a janela de visualização e clique para aparecer uma caixa de diálogo para que você nomeie o controle deslizante, seu intervalo mínimo será -5 e o máximo será 5, com incremento 1.

3. Crie então os controles: a, b , c e m.

4. O valor de m será o mesmo da inclinação da reta construída.

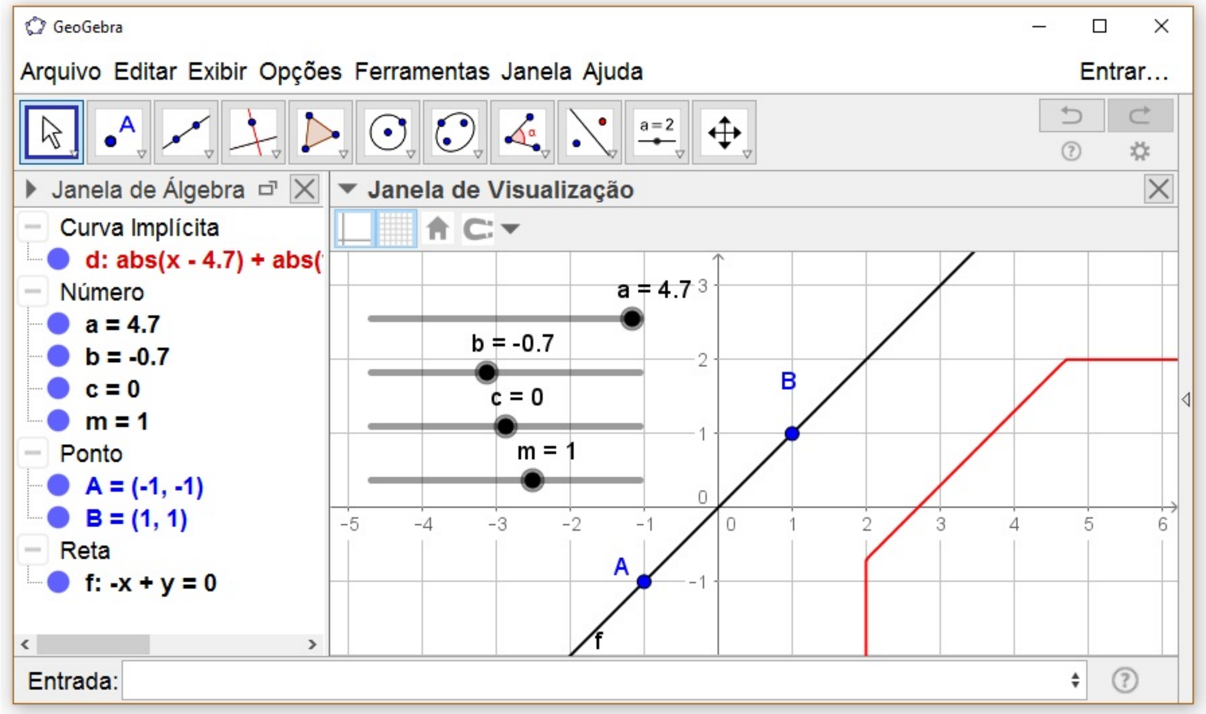
5. Na entrada do *Geogebra* digite a seguinte equação: $abs(x - a) + abs(y - b) = abs(x - (y - c)/m)$.

6. Clique na tecla *enter*.

7. Na janela de visualização aparecerá plotada a táxi-parábola.

8. Você poderá alterar a táxi-parábola utilizando os controles deslizantes.

Figura 96 – Representação gráfica da táxi-parábola produzida no *Geogebra*



Fonte: Próprio Autor

4.2.6 Atividade T_6: Táxi-mediatriz

Objetivo da Atividade: Trabalhar o conceito de mediatriz na Geometria do Táxi.

Recursos: Computador com o programa *Geogebra* instalado e estória impressa.

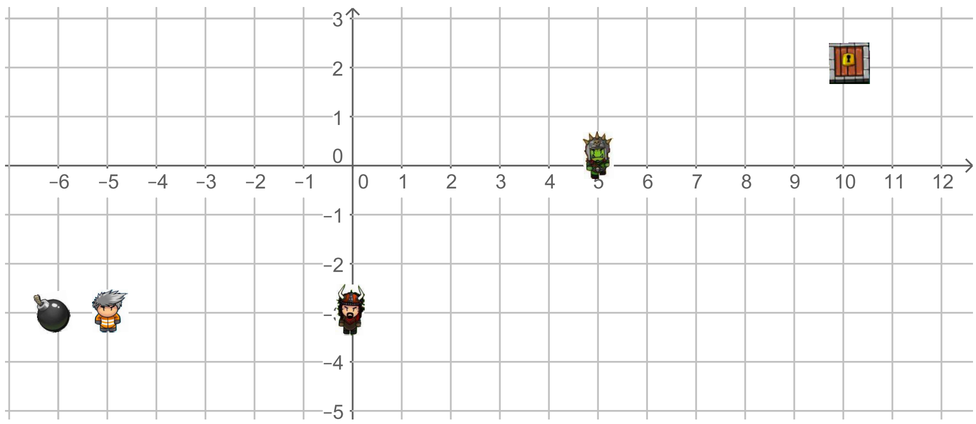
Procedimentos: O professor entrega aos alunos a estória referente a esta atividade, e pede que observem a ilustração na tela do computador, como mostra a Figura 97

Estória 12: **Nível 6: A última batalha**

Parabéns!! você chegou ao último nível. Agora as bombas estão no fim e o T-habitante só poderá estourá-las uma única vez

Para isso ele terá que posicionar as bombas onde os dois inimigos estejam equidistantes de cada uma delas, caso contrário só um morrerá e o outro atacará o GTinho.

Figura 97 – Tela do *Geogebra* apresentada na atividade



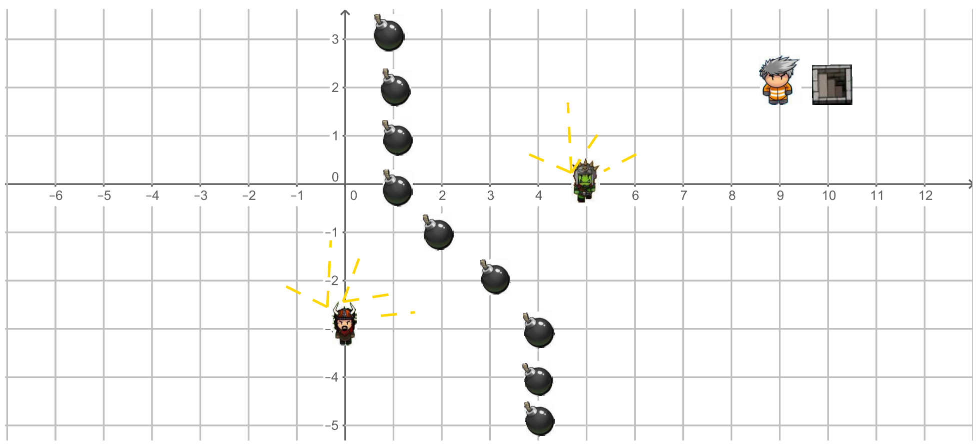
Fonte: Próprio Autor

1. Com qual lugar geométrico se parece o formato da figura formada pelas bombas?
2. Em sua opinião, conceito de táxi-mediatriz é igual ao de mediatriz da geometria euclidiana? Qual(is) a(s) diferença(s) entre eles?

Conversa com o professor

- No último nível introduzimos o conceito de táxi-mediatriz.
- Para que os alunos compreendam melhor a táxi-mediatriz e percebam que ela pode apresentar diferentes formatos, propomos a construção utilizando o *Geogebra*.
- Sugerimos que seja apresentado aos alunos a definição de táxi-mediatriz, ou seja: *O lugar geométrico dos pontos do plano, equidistantes das extremidades do segmento.*

Figura 98 – Solução gráfica da Atividade T_6-táxi-mediatriz

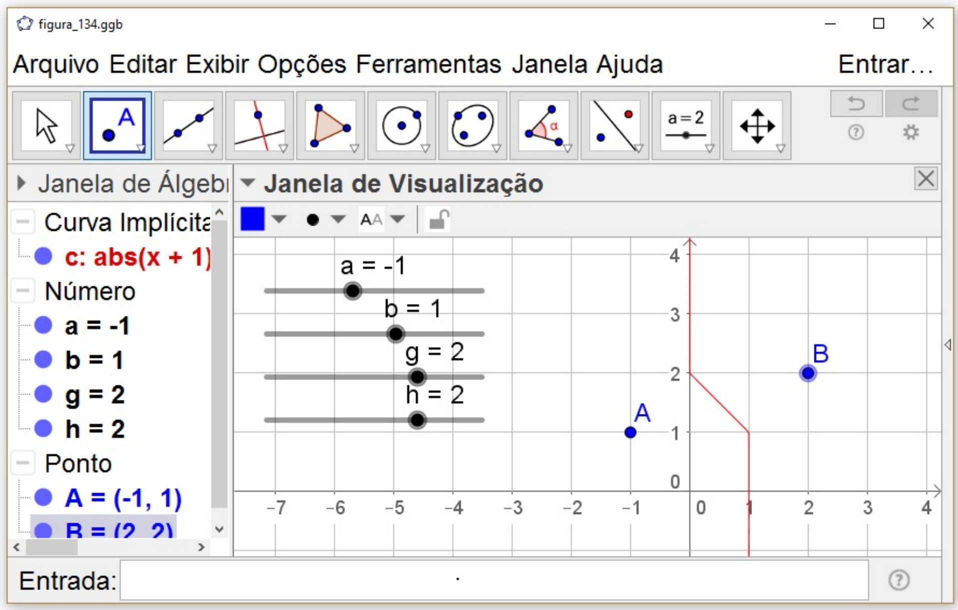


Fonte: Próprio Autor

A construção da táxi-mediatriz no *Geogebra* pode ser realizada da seguinte maneira:

1. Com o software *Geogebra* aberto, clique em *controle deslizante* na barra de ferramentas.
2. Clique na janela de visualização, para que abra uma caixa de diálogo que você deverá colocar o nome do *controle deslizante*, seu intervalo mínimo será -5 e o máximo será 5 (recomendados para o exercícios), o incremento será 1(variação inteira).
3. Crie então, os controles: a, b, g e h ; onde a e b são as coordenadas do ponto A e g e h são as coordenadas do ponto B.
4. Na entrada do *Geogebra* digite a seguinte equação: $abs(x-a)+abs(y-b)=abs(x-g)+abs(y-h)$.
5. Clicando *enter* você visualizará a táxi-mediatriz na janela de visualização.
6. Você poderá alterar o formato da mediatriz utilizando os controles deslizantes do *Geogebra*.

Figura 99 – Táxi-mediatriz construída no *Geogebra*-Atividade T_6



Fonte: Próprio Autor

Outras atividades com os mesmo objetivos das que apresentamos podem ser encontrados em Kallef (2004) e Krause (1986).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Meu nome é Denise Aparecida Perini Fernandes, atuo como professora desde os 18 anos de idade,logo após concluir o Magistério. Iniciei como professora de Matemática e Física em 2002 enquanto ainda cursava a graduação em Licenciatura em Matemática atuando em todas as séries da Educação Básica. Hoje sou funcionária efetiva do Estado do Mato Grosso há nove anos e trabalho com alunos do Ensino Fundamental e Médio. Sou apaixonada pela minha profissão e sempre quis cursar um mestrado. O PROFMAT, apesar das grandes dificuldades que tive em concluí-lo, foi uma grande conquista em minha vida e um marco em minha carreira me trazendo novas perspectivas, conhecimentos, ideias e, principalmente me qualificando para continuar atuando em sala de aula me sentido mais segura e preparada.

Quando iniciamos este trabalho tínhamos como objetivo realizar um estudo sobre a Geometria Esférica, porém, devido ao grande número de trabalhos desenvolvidos em nível de pós-graduação sobre este assunto, resolvemos então desenvolver nossa pesquisa abordando um outro tipo de Geometria não euclidiana, abordada com menor frequência, isto é, a Geometria do Táxi. Assim procuramos compreender o seu surgimento, os principais conceitos envolvidos e as possibilidades deste assunto vir a contribuir para um ensino da Matemática contextualizado com ênfase na menor distância percorrida. Ao aprofundar nossos estudos referentes a GT encontramos bastante dificuldades, pois, as bibliografias referentes a este tema são muito restritas, sendo que encontramos apenas um livro publicado em 1986 que é o livro *The taxicab Geometry* de Eugene F. Krause. Assim, para alcançarmos nossos objetivos foi necessária uma revisão bibliográfica em vários artigos, capítulos de livros e dissertações de mestrado e consultas em vários sites nacionais e internacionais.

Inicialmente fizemos um estudo acerca da importância de se trabalhar as geometrias não euclidianas na Educação Básica, bem como do surgimento das mesmas como consequência das tentativas de prova do quinto postulado de Euclides. Realizamos pesquisa bibliográfica em algumas dissertações encontradas na plataforma do *PROFMAT* a fim de compreender como as Geometrias não-euclidianas são apresentadas e exploradas nas produções de dissertações do programa.

Durante a trajetória da pesquisa descobrimos aspectos instigantes presentes na GT que ampliou a abordagem de nossa intenção inicial, que era tratar a menor distância em diferentes geometrias. Assim, optamos em tratar alguns lugares geométricos na GE e GT Além disso, buscando materiais e atividades para compor a nossa proposta didática e encontramos no Software *Geogebra* um grande aliado para o professor de matemática utilizar em suas aulas devido à sua grande quantidade de ferramentas, o seu modo dinâmico em tratar os objetos matemáticos e principalmente por aliar a geometria com a álgebra. Além disso, buscamos situar o uso deste recurso computacional em contextos de situações-problemas junto com jogos e desafios com o objetivo de produzir atividades atrativas e desafiadoras para o aluno.

Acreditamos que este trabalho pode contribuir com os professores de Matemática na busca de alternativas para o ensino da Geometria. A Geometria do Taxi, além de ser interessante e relevante para a Educação Básica vem nos possibilitar uma nova visão de geometria, que facilita a contextualização com a realidade dos alunos. Em síntese, podemos concluir que este trabalho contribuiu muito para a nossa formação profissional, visão de ciência e de ensino e surgiram ideias para outras perspectivas de estudos sobre o assunto.

Nossa perspectiva futura será de aplicar a sequência didática apresentada neste trabalho para alunos do Ensino Médio em que eu trabalho e em seguida produzir um artigo apresentando os resultados obtidos. Também pretendemos preparar um minicurso sobre a Geometria do Táxi destinado a professores de Matemática da Educação Básica e um outro sobre o uso do Geogebra nas aulas de Matemática da Educação Básica. E para aprofundar nossos estudos sobre a GT buscaremos estabelecer um paralelo entre os lugares geométricos na GE e na GT no espaço tridimensional.

REFERÊNCIAS

ABREU, João Francisco de; BARROSO, Leônidas Conceição; MIRANDA, Dimas F. de. *Geometria do Táxi: Uma Geometria não euclidiana Descomplicada.* III EEMOP, fevereiro 2005. 9 p.

ARCARI, Inédio. *Um Texto de Geometria Hiperbólica*. 2008. 136 f. Dissertação (Mestrado Profissional) Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2008.

BORBA, Marcelo de C. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento* Belo Horizonte: Autêntica, 2014. 149 f.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais para O Ensino Da Matemática*.Brasília, 1998.

CALDATO, Patrícia. *O uso da Geometria do Táxi no ensino de Análise Combinatória*. 2013. 46 f .Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.São José do Rio Preto, 2013.

CÉSAR, Sulamita Maria Comini. *Geometria do Táxi – uma exploração através de atividades didáticas*. 2010. 96 f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Belo Horizonte, 2010.

CRUZ, Edivaldo Oliveira da. *Geometria do táxi: a táxi-elipse*. 2013. 70 f. il. Dissertação (Mestrado Profissional)– Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2015.

DAVIS, Philip J. ; HERSH, Reuben . *A Experiência Matemática*. Portugal: Gradiva, 1985. 401p.

D'ALEMBERT, Jean. *Essai sur les Éléments de Philosophie ou Sur les Principes des Connaissances Humaines*. Texte revue par Catherine Kintzler. Tours : Fayard, 1986.

DUELI, Leandro de Jesus. *Geometria Esférica: Propostas de Sequências Didáticas Interdisciplinares*. 2013. 124f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

EVES, Howard Whitley. *Introdução à História da Matemática*.Campinas: Editora da UNICAMP, 2011. 843 p.

FAVA NETO, Irineu. *Um novo conceito de distância: a distância do táxi e aplicações*. 2013. 49 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. São José do Rio Preto, 2013.

FOSSA, John A. *Geometria Urbana*. João Pessoa: Editora Universiária/UFPB, 2003. 220f.

GARDNER, Martin. *Geometrie mit Táxis, die Köpfe der Hydra und andere mathematische* Spielereien, Basel 1997.

GOMES, Marcello Pereira. *Geometria Esférica: uma proposta de estudo e atividades para a escola básica*. 2014 71 p. Dissertação - (Mestrado Profissional em Matemática) Universidade Federal Fluminense, Niterói , 2014.

JANSSEN, Christina. *Taxicab Geometry: Not the Shortest Ride Across Town (Explorin Conics with a Non-Euclidean Metric)*. Iowa State University, 2007.

KALLEF, Ana Maria. NASCIMENTO, Rogério Santos do. *Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi*. BOLETIM GEPEM, Rio de Janeiro, n. 44, p. 11-42, jan./jun, 2004.

KRAUSE, Eugene F. *Taxicab Geometry*. New York: Dover, 1986.

LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo Cezar P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio.* Vol. 2. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 372 p. (Coleção do Professor de Matemática; 14).

——, Elon L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada IMPA, CNPQ, 1977.

LOIOLA, Carlos A. G. *Um Táxi para Euclides: Uma Geometria não euclidiana na Educação Básica*. 2014. 96 f. Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Rio de Janeiro, 2014.

MACHADO, Silvia D.A. *Educação Matemática: Uma Introdução*. São Paulo: EDUC,1999. 208 f.

MARCONDES, Talita Melsone. *Geometrias hiperbólicas com uso do geogebra*. 2014. 43 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2014.

MELO, José Luiz Pastore. *Geometrias não Euclidianas - Parte 1*. Youtube. Aula da disciplina Matemática do Curso de Licenciatura - Turma 2014 da Universidade Virtual do Estado de São Paulo. 2014. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=rMUIzmZsYuM> Acesso em: 17 janeiro de 2017.

MIRANDA, D. F. - *Geometria Táxi, uma métrica para os espaços geográficos e urbanos uma análise exploratória*. Dissertação de Mestrado em Tratamento da Informação Espacial, Belo Horizonte, PUC-MG, 1999.

ONUCHIC, L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In. BICUDO, M.A. (org.) Pesquisa em Educação matemática: *Concepções & Perspectivas*. São Paulo; Editora UNESP, 1999. (Seminário e Debates) . p. 199-218.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POZO, J. I. *A solução de Problemas Aprender a resolver, resolver para aprender*. Tradução de Beatriz Afonso Neves. Porto Alegre-RG: Arte Med,1998.

REIS, J.D.S. . *Geometria Esférica por meio de materiais manipuláveis*. 2006. 159f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro. 2006.

RUIZ, Angel. *Geometrias No Euclidianas-Breve Historia de uma gran revolución intelectual*. Costa Rica, Costa Rica, 1 edition, 1999. 112p.

SANTOS, Admilson Alves dos. *Trigonometria Hiperbólica:uma abordagem lementar*. 2014. 152 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2014.

ZANELLA, Idelmar André. *Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações*. 2013. 129 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Londrina, 2013.