



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO VANDIÉSIO SOUSA SOARES

TRÊS TEOREMAS INTERESSANTES EM TEORIA DOS GRAFOS

FORTALEZA

2017

FRANCISCO VANDIÉSIO SOUSA SOARES

TRÊS TEOREMAS INTERESSANTES EM TEORIA DOS GRAFOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S654t Soares, Francisco Vandiesio Sousa.
Três teoremas interessantes em teoria dos grafos / Francisco Vandiesio Sousa Soares. – 2017.
58 f.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto.
1. Teoria dos grafos. 2. Teorema das cinco cores. 3. Teorema da galeria de arte. 4. Teorema da amizade. I. Título.

CDD 510

FRANCISCO VANDIÉSIO SOUSA SOARES

TRÊS TEOREMAS INTERESSANTES EM TEORIA DOS GRAFOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 04/07/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho à minha mãe Maria Donizete Soares(*in Memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais que, mesmo com muitas dificuldades, sempre prezaram pela melhor maneira de educar seus filhos;

À minha esposa, Cecília Lima, que sempre me ajudou em todos os momentos, que sempre esteve ao meu lado e aceitou a falta de tempo para a família durante todo esse curso;

Aos meus irmãos e, em especial, ao Valnei por ter apostado em meu potencial e não ter poupado esforços para me ajudar quando mais precisei;

À minha filha, Maria Clara, que teve que aceitar em muitos momentos que eu dividisse o tempo de pai com os livros;

Ao meu orientador, Antônio Caminha, pela generosa paciência que teve tirando todas as minhas dúvidas e, além disso, ser um grande incentivador;

Aos colegas do PROFMAT e em especial ao colega Jânio Kléo que, sempre muito paciente, me ajudou durante todo o curso;

Ao meu grande amigo Aarão Macambira que sempre foi um incentivador e confiou muito em minha capacidade;

A todos os professores do PROFMAT;

À CAPES pelo apoio financeiro.

“Não é suficiente estar no lugar certo na hora certa.
Você também precisa ter uma mente aberta no
tempo certo.” (Paul Erdős)

RESUMO

Os resultados apresentados neste trabalho são tópicos particulares de Teoria dos Grafos. Uma das grandes vantagens do estudo de grafos reside no fato de que, além de serem objetos matematicamente interessantes, grafos aparecem em uma miríade de aplicações práticas. De fato, por um lado, a maioria dos enunciados dos problemas famosos de Teoria dos Grafos pode ser facilmente explicada a um estudante da escola básica; por outro, as raízes de tais problemas, o mais das vezes, repousam em importantes aplicações práticas da teoria a áreas tão diversas quanto Física, Química, Biologia, Engenharia Elétrica e Pesquisa Operacional. Neste trabalho, vamos nos restringir à discussão de três problemas específicos de Teoria dos Grafos: o Teorema das Cinco Cores, que é um problema de coloração de vértices de um grafo planar, o Teorema da Galeria de Arte, que é um resultado de Teoria Extremal de Grafos e o Teorema da Amizade, que é um belíssimo resultado da Teoria Algébrica dos Grafos. Apresentamos tais resultados em detalhe e estruturadamente, na expectativa de que seus apelos estéticos sirvam de exortação à inclusão dos rudimentos de Teoria dos Grafos nos currículos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Teorema das cinco cores. Teorema da galeria de arte. Teorema da amizade.

ABSTRACT

The results presented in this work constitute themselves in particular topics of Graph Theory. One of the great advantages of the study of graphs lies in the fact that, besides being mathematically interesting objects, graphs appear in a multitude of practical applications. Indeed, on the one hand, the statements of most of the famous problems in Graph Theory can be easily explained to an average high school student; on the other, the roots of those problems, most of the times, lie in important practical applications of the theory to such diverse areas as Physics, Chemistry, Biology, Electrical Engineering and Operations Research. In this work we restrict ourselves to the discussion of the specific problems in Graph Theory: the Five Colors Theorem, which is a problem on vertex coloring of planar graphs, the Art Gallery Theorem, which is a result on Extremal Graph Theory, and the Friendship Theorem, which is an amazingly beautiful result in Algebraic Graph Theory. We present a structured and detailed discussion of such results, in the hope that their aesthetic appeal serve as an exhortation for the inclusion of the rudiments of Graph Theory in High School curriculum.

Keywords: Five colors theorem. Art gallery theorem. Friendship theorem.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	11
2.1	Conceitos básicos sobre grafos	13
2.2	Conexidade	15
2.3	Planaridade	18
2.4	Árvores	20
2.5	Cliques e conjuntos independentes	21
3	COLORINDO GRAFOS PLANOS COM CINCO CORES . . .	23
3.1	Coloração	23
3.2	O problema das quatro cores	24
3.3	O teorema de Euler	25
3.4	Colorindo com seis cores	27
3.5	O teorema das cinco cores	29
4	COMO PROTEGER UM MUSEU?	33
5	SOBRE AMIGOS E POLÍTICOS	38
5.1	Alguns fatos sobre álgebra linear	38
5.1.1	<i>Matrizes e determinantes</i>	38
5.1.2	<i>Autovalores e autovetores</i>	46
5.1.3	<i>Diagonalização</i>	47
5.2	Mais sobre grafos	48
5.3	O teorema de Erdős-Rényi-Sós	50
6	CONCLUSÃO	54
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Grafos é um assunto relativamente recente no espectro das teorias matemáticas, porém aborda problemas muito interessantes em diversas áreas do conhecimento. Muitos destes problemas podem ser apresentados na educação básica, e poderíamos inclusive trabalhar a possibilidade de inserir tópicos de Teoria dos Grafos na grade curricular dessa etapa de formação.

Normalmente, os problemas que podem ser apresentados aos alunos de maneira lúdica despertam um maior interesse. Em Teoria dos Grafos temos muitas possibilidades para trabalharmos desta maneira; o leitor interessado em alguns destes problemas pode encontrá-los em ((ROSEN, 2009)) ou ((SANTOS, MELLO, and MURARI, 2007)), por exemplo.

Esta dissertação teve como base o livro “*As provas estão n’O LIVRO*” (veja (AIGNER and ZIEGLER, 2002)), em particular os resultados demonstrados nos capítulos 27, 28 e 31. Nela, discutimos três problemas interessantes em Teoria dos Grafos, os quais podem ser facilmente explicados a qualquer estudante de ensino fundamental mas cujas soluções são bastante intrincadas. Tais problemas são conhecidos como o *Teorema das Cinco Cores*, o *Teorema da Galeria de Arte* e o *Teorema da Amizade*, e fazem parte, respectivamente, das subáreas de *Teoria dos Grafos Planares*, *Teoria Extremal de Grafos* e *Teoria Algébrica de Grafos*.

A dissertação está composta de tal forma que um professor interessado no assunto possa utilizá-la como guia para introduzir as ideias mais básicas de Teoria dos Grafos a alunos de Ensino Médio interessados em Ciências em geral, e em Matemática e suas aplicações, em particular.

O texto está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos alguns fatos preliminares que serão utilizados ao longo de todo o texto. O capítulo 3 começa com um histórico sobre o Teorema das Quatro Cores, seguido da prova da possibilidade de colorir um grafo planar com seis cores e, por fim, da demonstração do Teorema das Cinco Cores. O capítulo 4 discute uma bela prova para o *Teorema da Galeria de Arte*, devida a Steve Fisk (cf. (FISK, 1978)). Por fim, o capítulo 5 traz uma prova para o Teorema da Amizade, devida a Paul Erdős, Alfred Rényi e Vera Sós (cf. (P. ERDÖS and SÓS, 1966)); até hoje, tal demonstração é a mais *bem-acabada* deste resultado, o que por sinal era uma característica particular de Paul Erdős: mostrar resultados matemáticos profundos de uma maneira simples e elegante. Como preâmbulo à demonstração do Teorema da Amizade, exibimos alguns resultados simples de Álgebra Linear, os quais serão utilizados na mesma. Por fim, o capítulo 6 traz a conclusão de nosso trabalho, a qual pode ser parcialmente vista como uma exortação à inclusão dos rudimentos de Teoria dos Grafos no currículo de Ensino Médio.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados importantes sobre Teoria dos Grafos, os quais serão utilizados nos capítulos posteriores.

A Teoria dos Grafos tem origem relativamente recente na História da Matemática (século XVIII). Dentre os primeiros matemáticos a trabalharem nesta área destacamos L. Euler, G. Kirchoff e A. Cayley. Podemos dizer que ela foi redescoberta várias vezes, com problemas do interesse de diversas áreas sendo estudados separadamente, porém mostrando características semelhantes.

Antes de dizermos precisamente o que é um grafo, vamos considerar, a título de motivação, dois problemas interessantes.

1. Escalonamento de exames

Imaginemos uma universidade em que haja milhares de estudantes e centenas de cursos. Como na maioria das universidades, ao fim de cada período há uma época de exames. Cada curso tem um exame final de três horas e, para um dia qualquer, a universidade pode programar dois exames finais.

Seria praticamente impossível um estudante, matriculado em dois cursos, fazer ambos os exames finais se eles fossem realizados no mesmo intervalo de tempo. Em vista disso, a universidade deseja elaborar um esquema de exames finais com a condição de que, se um estudante estiver matriculado em dois cursos, então tais cursos deverão ter períodos de exames finais distintos.

Uma solução simples para esse problema seria utilizar apenas um exame durante qualquer período, mas o problema é que isso levaria muito tempo. Como a universidade deve fazer para ter o menor número possível de período de exames? Voltaremos a esse exemplo no capítulo 3.

2. O problema das sete pontes

Este é o primeiro e mais famoso problema em teoria dos grafos, resolvido por Euler em 1736.

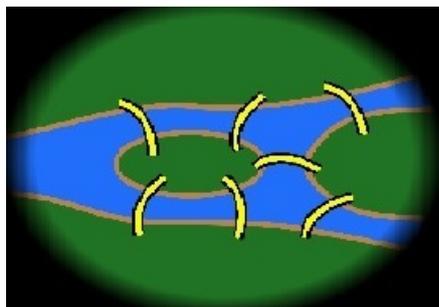


Figura 1: as pontes de Königsberg.

Na cidade de Königsberg¹, sete pontes cruzavam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e as margens opostas do rio, conforme ilustrado na Figura 1. Será possível fazer um passeio pela cidade cruzando cada ponte exatamente uma vez?

Euler abstraiu o problema das pontes em um diagrama como o mostrado na Figura 2 a seguir:

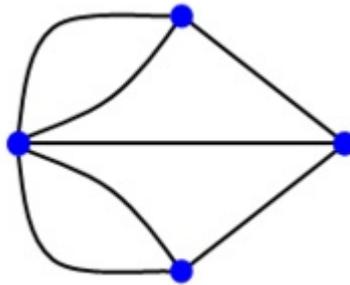


Figura 2: o grafo das pontes de Königsberg.

Cada linha no diagrama é uma ponte em Königsberg, e o problema de atravessar as sete pontes é, agora, substituído pelo problema de traçar a figura abstrata em questão sem levantar o lápis do papel e sem retrair nenhuma linha.

Pode-se desenhar dessa maneira a figura em questão? A resposta é *não* e, para entender porque, comecemos observando que, no diagrama, há quatro lugares onde as linhas se cruzam; além disso, em cada um deles o número de linhas que chegam/partem é ímpar. Assim, a impossibilidade de traçar a figura como desejado seguirá da

Afirmção: se pudermos traçar essa figura da maneira indicada, então podemos ter um número ímpar de linhas chegando/saindo somente no ponto inicial ou final do traçado.

Para entender porque a afirmação é verdadeira, pense num ponto intermediário do traçado, isto é, em qualquer junção que não seja a junção em que comecemos ou aquela em que terminamos. Nessa junção, deve haver um número par de linhas chegando/saindo, porque toda vez que chegamos a esse ponto ao longo de uma linha, vamos deixá-lo ao longo de outra (lembre-se de que não se permite retrair uma linha).

Voltando ao diagrama das pontes, graças à afirmação acima concluímos que todo ponto de junção no diagrama deve ser o primeiro ou o último ponto no desenho. Mas isto não é possível, uma vez que há quatro desses pontos, em vez de dois. Portanto, é impossível traçar o diagrama sem retrair uma linha ou sem levantar o lápis do papel, sendo, pois, impossível fazer o tour na cidade de Königsberg atravessando cada uma das sete pontes exatamente uma vez.

¹Atual Kaliningrado, cidade da Rússia.

2.1 Conceitos básicos sobre grafos

Definição 2.1. Um **grafo (simples)** é um par $G = (V, E)$, em que V é um conjunto não-vazio finito e E é uma família de subconjuntos de V , com dois elementos cada. Os elementos de $V = V(G)$ são chamados de **vértices** do grafo G e os elementos de $E = E(G)$ são as **arestas** do grafo G .

Se $G = (V, E)$ é um grafo e u e v são dois de seus vértices, diremos que u e v são **adjacentes** se $\{u, v\} \in E$. Neste caso, diremos que a aresta $\{u, v\}$ incide nos vértices u e v . Se u e v não forem adjacentes, diremos que eles são vértices **não adjacentes** em G . A notação $u \sim v$ significa que u é adjacente a v .

Convencionamos representar um grafo desenhando cada vértice como um círculo e cada aresta como uma linha ligando dois desses círculos, apesar de que a figura assim obtida não tem nenhum significado geométrico. O propósito da figura é somente o de representar esquematicamente as relações de adjacência entre os vértices de G .

Exemplo 2.2. Seja

$$G = (\{a, b, c, d, e, f, g\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{e, f\}\}).$$

Aqui, $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e E é uma família que contém cinco subconjuntos de dois elementos de V : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{c, d\}$ e $\{e, f\}$. Portanto, $G = (V, E)$ é um grafo. Além disso, G pode ser representado por qualquer dos diagramas abaixo, haja vista que ambos encerram as mesmas relações de adjacência entre os vértices.

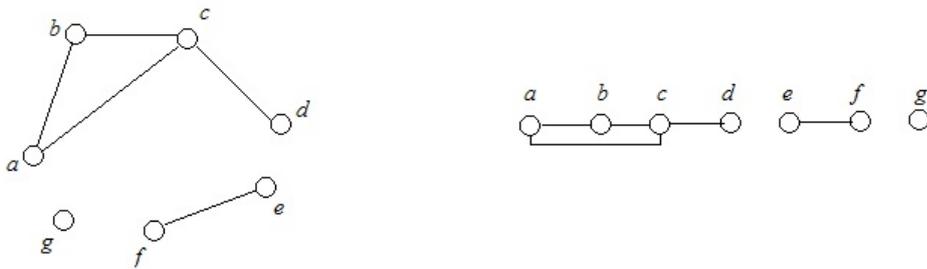


Figura 3: duas representações de um grafo.

Sejam $G = (V, E)$ um grafo e u e v dois vértices de G . Se u e v são adjacentes, diremos também que u e v são **vizinhos**. O conjunto de todos os vértices vizinhos de um vértice v fixado é denominado de **vizinhança** de v , e denotado por $N(v)$. Em símbolos,

$$N(v) = \{u \in V; \{u, v\} \in E\}.$$

Definição 2.3. Seja $G = (V, E)$ e seja $v \in V$. O **grau** de v é o número de arestas com as quais v é incidente. Denotamos o grau de v por $d(v)$.

Doravante, denotaremos o **grau máximo** de um vértice em G por $\Delta(G)$; analogamente, o **grau mínimo** de um vértice em G será denotado por $\delta(G)$.

Para o grafo do exemplo 2.2 acima, temos: $d(a) = 2$, $d(b) = 2$, $d(c) = 3$, $d(d) = 1$, $d(e) = 1$, $d(f) = 1$ e $d(g) = 0$. Assim, $\Delta(G) = 3$ e $\delta(G) = 0$.

Definição 2.4. Se todos os vértices de $G = (V, E)$ têm um mesmo grau, dizemos que G é um grafo **regular**. Se um grafo é regular e todos os vértices têm grau r , o grafo também é chamado de **r -regular**.

Exemplo 2.5. O grafo abaixo é 3-regular.

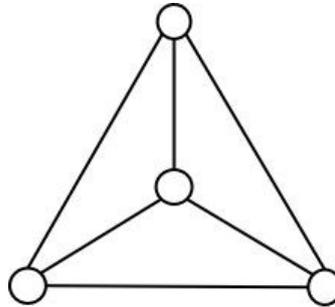


Figura 4: um grafo 3-regular.

Apesar de sua simplicidade, o resultado a seguir, devido a L. Euler, é bastante importante.

Teorema 2.6 (Euler). *Em um grafo $G = (V, E)$, a soma dos graus dos vértices é sempre igual ao dobro do número de arestas. Em símbolos:*

$$2|E| = \sum_{u \in V} d(u).$$

Prova. Basta observar que, se $e = \{u, v\}$ é uma aresta de G , então e é contada exatamente duas vezes no segundo membro da equação acima: uma na parcela $d(u)$ e outra na parcela $d(v)$. Portanto, o segundo membro tem de ser igual a $2|E|$, já que tal número também conta cada aresta exatamente duas vezes. \square

Algumas vezes precisamos apenas de parte de um grafo para resolver um problema. Por exemplo, podemos ter uma grande rede de computadores e estarmos interessados em apenas uma parte dela, para algum trabalho específico. No modelo de grafos para essa rede de computadores, podemos remover os vértices correspondentes aos outros computadores que não estamos interessados e também podemos remover todas as arestas incidentes com os vértices removidos. Quando arestas e vértices são removidas de um

grafo, sem remover extremidades de quaisquer arestas remanescentes, é obtido um grafo menor. Tal grafo é definido abaixo.

Definição 2.7. Dizemos que um grafo G é um **subgrafo** de um grafo H se $V(G) \subseteq V(H)$ e $E(G) \subseteq E(H)$. Se G é um subgrafo de H , dizemos que H é um **supergrafo** de G .

Sejam G e H grafos. Dizemos que G é um **subgrafo gerador** de H se e somente se G é um subgrafo de H tal que $V(G) = V(H)$.

Sejam H um grafo e A um subconjunto não vazio de vértices de H , isto é, $\emptyset \neq A \subseteq V(H)$. O subgrafo de H **induzido** em A é o grafo $H[A]$, definido por

$$V(H[A]) = A \text{ e } E(H[A]) = \{\{x, y\} \in E(H); x, y \in A\}.$$

Exemplo 2.8. Dado um grafo $G = (V, E)$, o subgrafo de G obtido por **excisão da aresta** e de G é o grafo $H = (V, E \setminus e)$. Doravante, denotaremos tal grafo simplesmente por $G - e$. Em palavras, o subgrafo $G - e$ é obtido de G apagando a aresta e .

Exemplo 2.9. Dado um grafo $G = (V, E)$, o subgrafo de G obtido por **excisão do vértice** u de G é o grafo $H = (V \setminus \{u\}, E')$, onde

$$E' = E \setminus \{e \in E; e \text{ incide em } u\}.$$

Doravante, denotaremos tal grafo simplesmente por $G - u$. Em palavras, o subgrafo $G - u$ é obtido de G apagando o vértice u e todas as arestas nele incidentes.

2.2 Conexidade

Muitos problemas podem ser modelados com o auxílio de *caminhos* formados percorrendo-se as arestas de um grafo. Consideremos, por exemplo, problemas de planejamento eficiente para entrega de cartas e para coleta de lixo em uma determinada cidade, entre outros. Com tal observação, pretendemos motivar a definição a seguir.

Definição 2.10. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um **passeio** de comprimento $k \geq 1$ em G é uma sequência

$$P = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_k)$$

de vértices (não necessariamente distintos) de G , tal que u_{i-1} é adjacente a u_i para $1 \leq i \leq k$, isto é, tal que

$$u_0 \sim u_1 \sim u_2 \sim \dots \sim u_k.$$

O **comprimento** de um passeio P como acima é seu número k de arestas. O passeio P é **fechado** se $u_0 = u_k$.

Exemplo 2.11. Considere o grafo na figura a seguir:

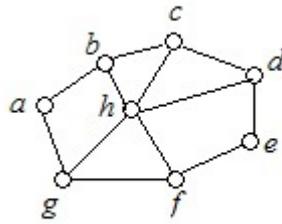


Figura 5: exemplos de caminhos em um grafo.

- $a \sim b \sim c \sim d$ é um passeio de comprimento 3.
- $a \sim b \sim c \sim h \sim b \sim a \sim g$ é um passeio de comprimento 6.
- $h \sim d \sim e \sim f \sim h$ é um passeio fechado de comprimento 4.

Definição 2.12. Seja G um grafo e suponhamos que V e W sejam os passeios

$$V = v_0 \sim v_1 \sim \dots \sim v_l \quad \text{e} \quad W = w_0 \sim w_1 \dots \sim w_k,$$

com $v_l = w_0$. Sua **concatenação**, denotada por $V + W$, é o passeio

$$v_0 \sim v_1 \sim \dots \sim (v_l = w_0) \sim w_1 \dots \sim w_k.$$

Definição 2.13. Um **caminho** em um grafo é um passeio em que nenhum vértice é repetido.

Sempre que não houver perigo de confusão, denotaremos por (u, \dots, v) um passeio ou caminho cujo primeiro vértice é u e último vértice é v .

Exemplo 2.14. No grafo da Figura 5, o passeio $a \sim b \sim h \sim f \sim e \sim d$ é um caminho.

Dada uma sequência de vértices em um grafo G constituindo um caminho, podemos também dizer que essa sequência é um subgrafo de G . Os vértices desse subgrafo são os vértices do caminho e as arestas desse subgrafo são as arestas atravessadas pelo caminho.

Definição 2.15. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $u, v \in V(G)$. Dizemos que **u é ligado a v** se existe um caminho (u, \dots, v) em G .

Lema 2.16. Seja $G = (V, E)$ um grafo e sejam $x, y \in V(G)$. Se existe um passeio (x, \dots, y) em G , então existe um caminho (x, \dots, y) em G .

Prova. Suponhamos que haja um passeio (x, \dots, y) em G . Note que o comprimento de um passeio é um número natural. Assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, existe um passeio (x, \dots, y) que é o mais curto possível. Pode haver mais de um passeio (x, \dots, y) mais curto possível; nesse caso, seja P um deles. Afirmamos que P é, de fato, um caminho (x, \dots, y) . Realmente, se P não for um caminho, então deverá haver um vértice u que é

repetido em P , ou seja,

$$P = x \sim \dots \sim a \sim u \underbrace{\sim \dots \sim}_{\text{parte eliminada}} u \sim b \sim \dots \sim y.$$

(Não excluimos a possibilidade de $u = x$ ou $u = y$; supomos apenas que o vértice u figure ao menos duas vezes, de modo que o segundo u (aquele em negrito) aparece na sequência depois do primeiro.) Forme, então, um novo passeio P' , eliminando a parte do passeio destacada. Note que tal operação tem como resultado um novo passeio; observe, ainda, que os vértices a e b são ambos adjacentes a u , de forma que P' também é um passeio (x, \dots, y) . Entretanto, por construção, P é um passeio (x, \dots, y) mínimo, o que contradiz o fato de que P' seja um passeio (x, \dots, y) ainda mais curto. Portanto, P é um caminho (x, \dots, y) . \square

De posse do lema anterior, podemos enunciar e provar o teorema a seguir, o qual será de suma importância para o que segue.

Teorema 2.17. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. A relação de ser ligado a é de equivalência em $V(G)$.*

Prova. Devemos mostrar que a relação de *ser ligado a* é reflexiva, simétrica e transitiva.

- Reflexiva: é importante observarmos que a relação de *ser ligado a* é diferente da relação de *ser adjacente a*. Assim, o caminho (v, v) é perfeitamente legítimo, ou seja, um vértice é sempre ligado a ele mesmo. Portanto, a relação é reflexiva.
- Simétrica: suponhamos que, em um grafo G , o vértice v seja ligado ao vértice u . Isso significa que há um caminho (u, \dots, v) em G , digamos P . Seu *reverso* P^{-1} (isto é, o caminho P percorrido em sentido contrário) é um caminho (v, \dots, u) em G , de forma que v é ligado a u . Portanto a relação de *ser ligado a* é simétrica.
- Transitiva: suponhamos que, em um grafo G , saibamos que u está ligado a v e que v está ligado a w . Por definição, isso significa que existem um caminho $P = (u, \dots, v)$ e um caminho $Q = (v, \dots, w)$. Formemos o passeio $P+Q$, que é da forma (u, \dots, w) . Pelo lema anterior, deve existir um caminho (u, \dots, w) em G , de modo que u é ligado a w . Logo, a relação é transitiva. \square

O teorema anterior dá sentido à definição a seguir.

Definição 2.18. *Uma **componente conexa** de $G = (V, E)$ é um subgrafo de G induzido por uma classe de equivalência da relação de ser ligado a em $V(G)$.*

Exemplo 2.19. *Voltemos ao grafo do Exemplo 2.2. Nele temos três componentes conexas:*

$$G[\{a, b, c, d\}], \quad G[\{e, f\}] \quad \text{e} \quad G[\{g\}].$$

A primeira componente tem quatro vértices e quatro arestas; a segunda, dois vértices e uma aresta; a terceira, apenas um vértice (e não possui arestas).

Definição 2.20. *Um grafo é **conexo** se existir um passeio entre dois quaisquer de seus vértices. Um grafo que não é conexo é dito **desconexo**.*

2.3 Planaridade

Nosso objetivo nesta subseção é entender um aspecto particular das representações, ou traçados, de grafos. Mais precisamente, estamos interessados nos grafos que podem ser traçados de tal forma que duas quaisquer de suas arestas *não se cruzem*.

É importante fazermos algumas observações sobre o rigor que utilizaremos nas definições aqui. Nossa primeira dificuldade será apresentar uma definição cuidadosa de *traçado de um grafo*, pois para isso precisamos definir o que queremos dizer com uma *curva* no plano. Uma definição precisa de curva exige, por sua vez, uma formulação precisa do conceito de continuidade de aplicações, o que não será desenvolvido neste trabalho. Assim, usaremos apenas uma compreensão *intuitiva* do que é uma curva. Uma curva pode ter *cantos* ou *porções retilíneas*; assim, um segmento de reta, por exemplo, é uma curva. Entretanto, uma curva deve consistir de um único *pedaço*.

Uma **curva simples** é uma curva (contínua) que liga dois pontos distintos no plano, e não se intercepta. Se uma curva começa e termina em um mesmo ponto, nós a chamamos de **fechada**. Em particular, se o primeiro/último ponto da curva for o único ponto desta que é repetido, dizemos que a curva é **simples e fechada** ou, ainda, uma **curva de Jordan**. A Figura 6 ilustra uma curva de Jordan.

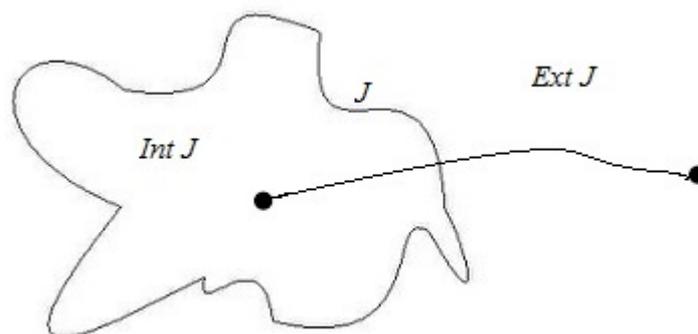


Figura 6: uma curva de Jordan.

Em muitos de nossos resultados, utilizaremos implicitamente o teorema a seguir, conhecido como o **Teorema da Curva de Jordan**, cuja demonstração está bem além do escopo desta dissertação. O leitor interessado em tal demonstração pode encontrá-la em ((ASPERTI and MERCURI, 1981)).

Teorema 2.21 (da curva de Jordan). *Se J é uma curva de Jordan no plano, então o complementar de J no plano consiste em duas regiões abertas e disjuntas, denominadas*

o **interior** e o **exterior** de J e denotadas por $\text{Int } J$ e $\text{Ext } J$, respectivamente. Ademais, ambas essas regiões têm J por fronteira, e qualquer curva que liga um ponto em $\text{Int } J$ a um ponto em $\text{Ext } J$ intercepta J em pelo menos um ponto.

Um desenho é um diagrama feito com tinta em um papel. Aqui, nos referiremos à abstração matemática de um desenho como uma **representação**. Uma representação de um grafo é uma coleção de pontos e curvas em um plano que verifica as seguintes condições:

- A cada vértice do grafo é associado um ponto do plano; a vértices distintos são associados pontos distintos.
- A cada aresta do grafo é associada uma curva no plano. Se a aresta é $e = \{x, y\}$, então as extremidades da curva associada a e são exatamente os pontos associados a x e a y . Além disso, nenhum outro vértice se situa sobre essa curva.

Se todas as curvas associadas à representação de um grafo são simples e se as curvas associadas a duas arestas não se interceptam (exceto em uma extremidade comum, se ambas incidirem em um mesmo vértice), então dizemos que a representação é *livre de interseções*. Nem todos os grafos têm representação no plano livres de interseções. Os que as têm recebem um nome especial, isolado na definição a seguir.

Definição 2.22. *Um grafo planar é um grafo que tem uma representação livre de interseções, a qual será dita uma **representação planar** de tal grafo.*

Dado um grafo planar G , gostaríamos de definir o que se entende pelas *faces* de G . Para tanto, precisamos de um conceito auxiliar que também encontrará utilidade na próxima subseção.

Definição 2.23. *Um ciclo em um grafo G é um passeio fechado*

$$C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_0)$$

em G , de comprimento $k \geq 3$ e tal que $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$ também é um caminho.

De posse do conceito de ciclo, considere novamente um grafo planar G . Dada uma representação livre de interseções de G no plano e um ciclo C em G , dizemos que $C \cup \text{Int } C$ é uma **face** de G . O conceito de face de um grafo planar possibilita apresentarmos a importante definição de *dual* de um tal grafo.

Definição 2.24. *O grafo dual G' de um grafo G é obtido colocando um vértice de G' no interior de cada face de G e ligando dois vértices de G' se, e somente se, as faces correspondentes de G tiverem uma aresta em comum.*

Exemplo 2.25. *Na Figura 7 a seguir, G é o grafo de vértices azuis e seu dual G' é o grafo de vértices vermelhos. Para uma melhor visualização, representamos as arestas de*

G por curvas contínuas e as arestas de G' por curvas pontilhadas.

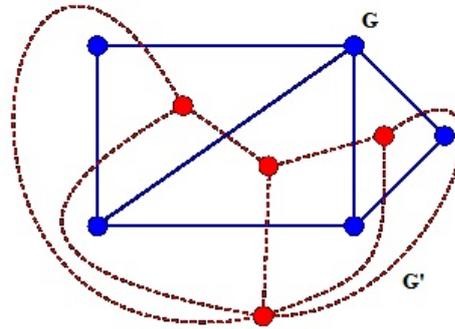


Figura 7: o grafo dual G' de um grafo G .

2.4 Árvores

Em que pese o fato de ser bastante simples explicar vários dos conceitos de Teoria dos Grafos a uma pessoa (quase) leiga em Matemática, é também muito comum depararmo-nos com situações-problema bem difíceis. Em algumas delas, é interessante começarmos a pensar nos problemas examinando-os em *árvores*, nosso tema nesta subseção. A pertinência dessa estratégia reside no fato de que as árvores formam a mais simples família genérica de grafos.

Definição 2.26. *Um grafo que não contém ciclos é dito **acíclico** ou, ainda, uma **floresta**. Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico.*

Exemplo 2.27. *A figura abaixo representa uma árvore.*

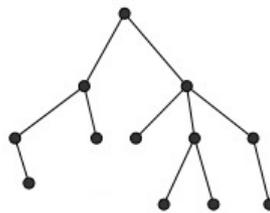


Figura 8: exemplo de uma árvore.

Se T é uma árvore, uma **folha** de T é um vértice de grau 1 e um **nó** de T é um vértice de grau maior que 1. Árvores com mais de um vértice sempre possuem folhas, conforme ensina o lema a seguir.

Lema 2.28. *Toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos duas folhas.*

Prova. Seja T uma árvore com pelo menos dois vértices e considere em T um caminho C com o maior comprimento possível. Se $C = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, afirmamos que u_1 e u_n

são folhas. De fato, se fosse $d(u_1) \geq 2$, então u_1 seria adjacente a u_2 e a um outro vértice, digamos u_0 . Como árvores não contêm ciclos, deve ser $u_0 \neq u_3, \dots, u_n$. Daí, o caminho $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ teria comprimento maior que o de C , o que é um absurdo. Logo $d(u_1) = 1$ e, analogamente, $d(u_n) = 1$. \square

2.5 Cliques e conjuntos independentes

Outra classe bastante simples de grafos é aquela formada pelos *grafos completo*, conforme ensina a definição a seguir.

Definição 2.29. *Um grafo G é completo se cada par de vértices em G é adjacente.*

A notação usual para um grafo completo com n vértices é K_n , em homenagem ao matemático polonês Kazimierz Kuratowski, que foi o primeiro a obter, em 1930, uma caracterização geral do conceito de planaridade, por meio da utilização deste tipo de grafo.

A importância do conceito de grafo completo para o estudo de grafos gerais reside no conceito de *clique*, que apresentamos agora.

Definição 2.30. *Dado um grafo G , um subconjunto S de vértices de G é um clique se o subgrafo de G induzido por S for completo. De outra forma, S é um clique em G se dois vértices distintos em S sempre são adjacentes em G . O número-clique de um grafo G , denotado $\omega(G)$, é o tamanho do maior clique contido em G .*

Exemplo 2.31. *Seja $G = (V, E)$ o grafo tal que $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e*

$$E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{3, 9\}, \\ \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 8\}, \{6, 9\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}\}.$$

O grafo G contém vários cliques, como por exemplo $\{1, 4\}$, $\{2, 5, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{6, 8, 9\}$. Por outro lado, é fácil verificar que o tamanho máximo de um clique em G é 3, de forma que, $\omega(G) = 3$. Veja a Figura 9 abaixo.

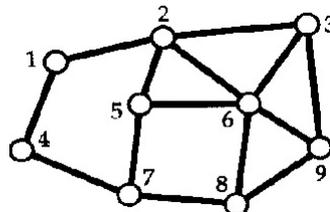


Figura 9: identificando cliques e conjuntos independentes em um grafo.

O conceito que é de certa forma dual ao de clique é objeto da próxima definição.

Definição 2.32. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um subconjunto S de vértices de G é chamado um conjunto independente se quaisquer dois vértices de S não forem adjacentes*

em G . O **número de independência** de G é o tamanho do maior subconjunto independente de V , sendo denotado por $\alpha(G)$.

Exemplo 2.33. O grafo G do Exemplo 2.31 também contém vários conjuntos independentes, como por exemplo $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 7, 9\}$, $\{1, 3, 5, 8\}$ e $\{4, 6\}$. O tamanho máximo de um conjunto independente em G é 4 e, assim, $\alpha(G) = 4$.

A intuição por trás da aludida *dualidade* entre cliques e conjuntos independentes em um grafo dado é formalizada por intermédio do conceito de *grafo complementar*, definido agora.

Definição 2.34. O **complementar** de um grafo $G = (V, E)$ é o grafo $\overline{G} = (V; \overline{E})$, onde

$$\overline{E} = E(\overline{G}) = \{\{x, y\}; x, y \in V(G), x \neq y, e \{x, y\} \notin E(G)\}.$$

É imediato que $\overline{\overline{G}} = G$, de forma que também podemos dizer que G e \overline{G} são **grafos complementares**.

Exemplo 2.35. Os dois grafos da Figura 10 são complementares.

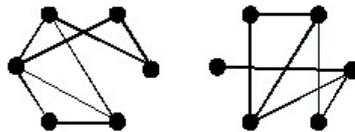


Figura 10: exemplo de grafos complementares.

Dado um grafo $G = (V, E)$ e $S \subset V$, é imediato que S é um clique (resp. um conjunto independente) em G se, e só se, S é um conjunto independente (resp. um clique) em \overline{G} . Portanto,

$$\omega(G) = \alpha(\overline{G}) \quad e \quad \alpha(G) = \omega(\overline{G}).$$

Definição 2.36. Um grafo $G = (V, E)$ é dito **bipartido** se o conjunto V pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos, não-vazios e independentes, V_1 e V_2 , tal que toda aresta de G tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2 . Um grafo bipartido é dito **completo** se todos os vértices de V_1 são ligados a todos os vértices de V_2 . A notação para os grafos bipartidos completos é $K_{m,n}$, onde $m = |V_1|$ e $n = |V_2|$. A Figura 11 abaixo ilustra o grafo bipartido completo $K_{3,3}$.

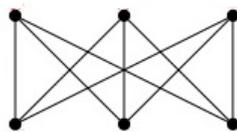


Figura 11: Grafo bipartido completo $K_{3,3}$.

3 COLORINDO GRAFOS PLANOS COM CINCO CORES

Nesta seção queremos mostrar que todos os grafos planares podem ser *coloridos* com cinco cores ou menos. Iniciaremos enunciando o problema das quatro cores e as tentativas de solucioná-lo e, em seguida, mostraremos (como “aquecimento”) como colorir um grafo plano com no máximo seis cores; finalmente, provaremos o Teorema de Heawood de coloração de um grafo com cinco cores. Antes, porém precisamos entender o que é uma coloração de um grafo.

3.1 Coloração

Tanto o problema das quatro cores quanto o problema de escalonamento de exames (que mencionamos no início da Seção 2) são exemplos de problemas de coloração em grafos. O problema geral é descrito abaixo.

Se G é um grafo, queremos atribuir uma cor a cada vértice de G , de tal forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Naturalmente, poderíamos atribuir a cada vértice uma cor diferente, mas isso não é particularmente interessante nem relevante para aplicações. O objetivo é usar o menor número possível de cores.

Podemos converter o problema do escalonamento de exames finais em um problema de coloração em grafos. Os vértices em tal grafo representam os cursos na universidade. Dois vértices são adjacentes quando os cursos que eles representam têm um estudante matriculado em comum. As cores nos vértices representam os diferentes intervalos de tempo dos exames. A minimização do número de cores atribuídas aos vértices corresponde à minimização do número de períodos de exame.

Definição 3.1. *Sejam $G = (V, E)$ um grafo e k um inteiro positivo. Uma k -coloração de G é uma função*

$$f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}.$$

*Dizemos que essa coloração é **própria** se*

$$\forall \{x, y\} \in E(G), f(x) \neq f(y).$$

*Nesse caso, diremos que G é **k -colorível**.*

Se $G = (V, E)$ é um grafo e $|V| = n$, então é claro que G é n -colorível. Nesse sentido, nosso interesse reside na definição a seguir.

Definição 3.2. *Dado um grafo G , o menor inteiro positivo k para o qual G é k -colorível é denominado o **número cromático** de G , sendo denotado por $\chi(G)$.*

Exemplo 3.3. *Para o grafo completo K_n , temos $\chi(K_n) = n$. De fato, conforme obser-*

vamos acima, podemos colorir K_n com n cores, dando a cada vértice uma cor diferente. Contudo, como cada vértice é adjacente a todos os outros, dois vértices jamais podem receber a mesma cor e, assim, são necessárias n cores. Portanto $\chi(K_n) = n$.

Com o exemplo acima, percebemos que o grafo K_n possui o maior número cromático dentre os grafos com n vértices, pois para qualquer grafo G com n vértices, ainda é verdade que G é n -colorível, de sorte que $\chi(G) \leq n$. Temos também o resultado abaixo.

Proposição 3.4. *Se G é um subgrafo de H , então $\chi(G) \leq \chi(H)$.*

Prova. Dada uma coloração própria de H , podemos simplesmente restringi-la a G para obter uma coloração própria de G com o mesmo número de cores. Em particular, se utilizamos $\chi(H)$ cores para colorir propriamente os vértices de H , então obtemos uma coloração própria de G utilizando $\chi(H)$ cores, de sorte que $\chi(G) \leq \chi(H)$. \square

3.2 O problema das quatro cores

O teorema das quatro cores diz que é possível colorir as regiões de qualquer mapa desenhado no plano usando no máximo quatro cores, de maneira que nenhum par de regiões que tenham uma fronteira em comum – fronteira esta não reduzida a um ponto – seja da mesma cor.

Para transformar este problema em um problema de coloração em grafos, associamos a cada região um vértice e dizemos que dois vértices são adjacentes se as regiões correspondentes têm fronteira comum (também não reduzida a um ponto). Note que, por construção, o grafo associado a um mapa qualquer é um grafo planar. Portanto, em termos de grafos, o problema das quatro cores pode ser enunciado da seguinte forma: é possível colorir os vértices de um grafo planar usando no máximo quatro cores, de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes?

Este problema surgiu em 1852, quando Francis Guthrie tentava colorir os vários distritos da Inglaterra de tal modo que distritos vizinhos não tivessem a mesma cor. Depois de ter refletido sobre a problema, conjecturou que qualquer mapa poderia ser colorido apenas com quatro cores. Francis Guthrie tinha um irmão mais novo, Frederick Guthrie, que era aluno de Augustus De Morgan. Em 23 de outubro de 1852, Frederick apresentou a conjectura de seu irmão mais velho ao professor De Morgan, que ficou muito entusiasmado e foi sobretudo por intermédio dele que a comunidade científica da época tomou conhecimento da conjectura das quatro cores. Após algum tempo, em 1878, o matemático inglês Sir Arthur Cayley indagou se porventura alguém já submetera uma solução para tal conjectura. Então, em 1879, Alfred Bray Kempe, que teria sido aluno de Cayley, apresentou uma demonstração aparentemente completa do teorema, a qual foi considerada como tal por 11 anos. Contudo, em 1890, o também matemático inglês Percy

John Heawood provou que a demonstração de Kempe tinha um erro e, apesar de não conseguir consertá-la, provou a possibilidade de coloração com cinco cores, a qual ficou conhecida como o *Teorema das Cinco Cores*.

Ao longo do século XX, vários foram os métodos desenvolvidos para tentar demonstrar o problema das quatro cores. Contudo, uma demonstração correta apareceu somente em 1976, devida aos matemáticos Kenneth Appel e Wolfgang Haken. Gerou-se uma grande expectativa entre os matemáticos sobre essa demonstração, porém muitos “esfriaram” ao saber que ela apoiava-se em mais de mil horas do uso de computadores de alta velocidade. A prova era demasiadamente longa para ser feita à mão, e havia sempre a possibilidade de os computadores falharem, em algum possível erro de programação de difícil percepção. Hoje em dia, a demonstração de Appel e Haken, apesar de genericamente aceita, ainda levanta polêmicas.

Na década de 1990, o matemático inglês Paul Seymour apresentou uma prova mais simples do Teorema das Quatro Cores, a qual foi resultado de trabalho conjunto com Neil Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas. Porém, eles também não conseguiram uma prova que prescindisse do uso de computadores para a checagem de casos. Entretanto, quem tiver os programas utilizados a seu dispor e compreender os fundamentos teóricos envolvidos, poderá reproduzir a demonstração em menos de um dia.

A questão de construir uma demonstração para o Teorema das Quatro Cores que não necessite do auxílio de computadores continua em aberto na Matemática. Nesse trabalho seremos mais modestos, apresentando uma demonstração completa para o Teorema das Cinco Cores.

3.3 O teorema de Euler

Uma representação planar de um grafo divide o plano em regiões, incluindo uma região ilimitada. Euler mostrou que todas as representações planares de um grafo dividem o plano em um mesmo número de regiões. Ele conseguiu isso descobrindo uma relação que existe entre os números de regiões, de vértices e de arestas em um grafo planar, conforme descrevemos abaixo.

Teorema 3.5 (Euler). *Seja G um grafo simples, conexo e planar, com e arestas e v vértices. Se r denota o número de regiões em uma representação planar de G , então, $r = e - v + 2$.*

Prova. Inicialmente, especificamos uma representação planar de G . Demonstraremos o teorema construindo uma sequência de subgrafos $G_1, G_2, G_3, \dots, G_e = G$, adicionando sucessivamente uma aresta em cada estágio. Isto é feito usando a seguinte definição indutiva. Escolha arbitrariamente uma aresta de G para obter G_1 . Obtenha G_n de G_{n-1} adicionando arbitrariamente uma aresta que seja incidente em um vértice já em G_{n-1} , adicionando o outro vértice incidente nesta aresta se ele ainda não estiver em G_{n-1} . Esta

construção é possível pois o grafo é conexo. Observe que o grafo G é obtido depois de e arestas terem sido adicionadas.

Sejam r_n , e_n e v_n os números de regiões, arestas e vértices, respectivamente, da representação planar de G_n induzida pela representação planar de G . A demonstração, agora, seguirá por indução sobre $n \geq 1$. A relação

$$r_1 = e_1 - v_1 + 2$$

é verdadeira para G_1 , pois $e_1 = 1$, $v_1 = 2$ e $r_1 = 1$. Suponha, por hipótese de indução, que $r_n = e_n - v_n + 2$, para algum $n < e$. Seja $\{a_{n+1}, b_{n+1}\}$ a aresta que é adicionada a G_n para obter-se G_{n+1} . Existem duas possibilidades a serem consideradas:

- (i) Tanto a_{n+1} quanto b_{n+1} já estão em G_n : estes dois vértices devem estar na fronteira de uma mesma região R , dentre as v_n regiões em G_n . Do contrário, o Teorema da Curva de Jordan assegura que seria impossível adicionar a aresta $\{a_{n+1}, b_{n+1}\}$ a G_n sem que duas arestas se cruzassem, contradizendo o fato de G_{n+1} ser planar. A adição da aresta $\{a_{n+1}, b_{n+1}\}$ divide R em duas regiões. Conseqüentemente, neste caso temos $r_{n+1} = r_n + 1$, $e_{n+1} = e_n + 1$ e $v_{n+1} = v_n$. Assim,

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n + 1 = (e_n - v_n + 2) + 1 \\ &= (e_n + 1) - v_n + 2 \\ &= e_{n+1} - v_{n+1} + 2. \end{aligned}$$

- (ii) No segundo caso, um dos vértices da nova aresta ainda não está em G_n . Sem perda de generalidade, suponha que a_{n+1} esteja em G_n mas b_{n+1} não esteja. A adição desta nova aresta não produz nenhuma região nova, pois b_{n+1} deve estar em uma região de G_n que tem a_{n+1} em sua fronteira. Conseqüentemente, $r_{n+1} = r_n$. Além disso, $e_{n+1} = e_n + 1$ e $v_{n+1} = v_n + 1$, de forma que

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n = e_n - v_n + 2 \\ &= (e_n + 1) - (v_n + 1) + 2 \\ &= e_{n+1} - v_{n+1} + 2. \end{aligned}$$

□

Muitas conseqüências bem conhecidas e clássicas podem ser derivadas da Fórmula de Euler. Entre elas, mencionamos a classificação dos poliedros regulares (também conhecidos como *sólidos platônicos*), o fato de K_5 e $K_{3,3}$ não serem planares e o teorema das cinco cores, que estabelece que todo mapa planar pode ser colorido com no máximo cinco cores, de forma que quaisquer duas regiões adjacentes não tenham uma mesma cor.

Esse é o principal resultado desta seção; porém, antes de demonstrá-lo, vamos mostrar que o resultado é válido ao utilizarmos seis cores.

3.4 Colorindo com seis cores

Nosso objetivo, aqui, é provar que todo grafo planar G pode ser colorido com seis cores. Antes disso, porém, precisamos demonstrar alguns resultados que são consequências do Teorema de Euler.

Corolário 3.6. *Seja $G = (V, E)$ um grafo planar com ao menos duas arestas. Então,*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Além disso, se G não contiver um K_3 como subgrafo, então

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

Prova. Afirmamos inicialmente que podemos supor, sem perda de generalidade, que G é conexo. Realmente, se G não for conexo, então podemos acrescentar algumas arestas a G (cada uma ligando duas componentes), obtendo um grafo conexo H , ainda planar. Se o grafo H satisfizer a desigualdade do enunciado, teremos

$$|E(G)| \leq |E(H)| \leq 3|V(H)| - 6 = 3|V(G)| - 6.$$

Seja, pois, G um grafo planar conexo e com ao menos duas arestas. Escolha uma representação de G sem auto-interseções, e suponha que tal representação tem f faces. Pelo Teorema de Euler, temos

$$f = 2 - |V(G)| + |E(G)|.$$

Calculamos, agora, a soma dos graus dos vértices dessa representação. Por um lado, pelo Teorema 2.6 a soma dos graus dos vértices é $2|E(G)|$; por outro lado, como toda face tem pelo menos 3 arestas, a soma dos graus dos vértices é maior ou igual a $3f$. Assim, $3f \leq 2|E(G)|$ ou, o que é o mesmo,

$$f \leq \frac{2}{3}|E(G)|.$$

Substituindo esse resultado no Teorema de Euler, obtemos

$$2 - |V(G)| + |E(G)| = f \leq \frac{2}{3}|E(G)|$$

ou, o que é o mesmo,

$$2 - |V(G)| + \frac{1}{3}|E(G)| \leq 0.$$

Portanto,

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Para a segunda parte da demonstração, note que, se G não contém K_3 como subgrafo, então G não tem ciclos de comprimento 3 e, portanto cada face terá pelo menos quatro arestas. Assim, a soma dos graus dos vértices é maior ou igual a $4f$. Então, argumentando como acima, obtemos

$$4f \leq 2|E(G)|.$$

Usando novamente o teorema de Euler, segue daí que

$$\begin{aligned} 8 &= 4|V(G)| - 4|E(G)| + 4f \\ &\leq 4|V(G)| - 4|E(G)| + 2|E(G)| \\ &= 4|V(G)| - 2|E(G)|. \end{aligned}$$

Mas isso é o mesmo que

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

□

Exemplo 3.7. *O grafo K_5 é não planar.*

Prova. Suponhamos, por contradição, que K_5 fosse planar. Pelo Corolário 3.6, teríamos

$$10 = |E(G)| \leq 3|V(G)| - 6 = 3 \times 5 - 6 = 9,$$

uma contradição. Portanto, K_5 é não planar. □

Exemplo 3.8. *O grafo $K_{3,3}$ é não planar.*

Prova. Suponhamos, por contradição, que $K_{3,3}$ fosse planar. Como ele não contém K_3 como subgrafo, usando a segunda parte do Corolário 3.6, obteríamos

$$9 = |E(G)| \leq 2|V(G)| - 4 = 2 \times 6 - 4 = 8,$$

o que é uma contradição. Portanto, $K_{3,3}$ é não planar. □

A seguir, apresentamos outra consequência do Teorema de Euler.

Corolário 3.9. *Se G é um grafo planar, então $\delta(G) \leq 5$.*

Prova. Seja G um grafo planar. Se G tem menos de duas arestas, então é óbvio que $\delta(G) \leq 5$. Podemos, pois, supor que G tem pelo menos duas arestas. Assim, pelo

Corolário 3.6, temos $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.

O grau mínimo $\delta(G)$ não pode superar o *grau médio* de G , o qual é definido como a média aritmética dos graus dos vértices de G . Denotando o grau médio de G por $\bar{d}(G)$, temos então que

$$\delta(G) \leq \bar{d}(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} d(v)}{|V(G)|}.$$

Por outro lado, o Teorema de Euler 2.6, juntamente com o Corolário 3.6, fornecem

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| \leq 2(3|V(G)| - 6).$$

Então,

$$\delta(G) \leq \frac{2(3|V(G)| - 6)}{|V(G)|} = 6 - \frac{12}{|V(G)|} < 6,$$

de sorte que $\delta(G) \leq 5$. □

Estamos finalmente em condições de demonstrar o teorema abaixo:

Teorema 3.10. *Se $G = (V, E)$ é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 6$.*

Prova. Fazemos indução sobre o número de vértices de G .

Inicialmente, observamos que o teorema é obviamente verdadeiro para todos os grafos com seis ou menos vértices, uma vez que podemos atribuir a cada vértice uma cor diferente. Suponhamos, por hipótese de indução, que o teorema seja válido para todos os grafos planares com n vértices.

Seja G um grafo planar com $n + 1$ vértices. Pelo Corolário 3.9, G contém um vértice v tal que $d(v) \leq 5$. Se $G' = G - v$, note que G' é planar e tem n vértices. Então, pela hipótese de indução podemos colorir adequadamente os vértices de G' usando apenas seis cores. Como $d(v) \leq 5$, podemos estender essa coloração a G , atribuindo a v uma outra cor não atribuída a um qualquer de seus vizinhos. Isso nos dá uma 6-coloração própria de G , de sorte que $\chi(G) \leq 6$. □

3.5 O teorema das cinco cores

Agora, iremos concluir a análise do primeiro dos três problemas interessantes sobre grafos propostos nesse trabalho. O resultado a seguir é conhecido como o **Teorema das Cinco Cores**, e uma prova do mesmo foi dada por Heawood, em 1890, quando percebeu um erro na demonstração dada por Kempe para o Teorema das Quatro Cores. Apesar de ser um resultado mais fraco do que o Teorema das Quatro Cores, ele se torna interessante pelo fato de que sua demonstração não necessita de recursos computacionais.

Teorema 3.11 (Heawood). *Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 5$.*

Prova. Fazemos indução sobre o número de vértices no grafo, observando que o teorema é obviamente verdadeiro para todos os grafos com cinco vértices ou menos, pois podemos associar a cada vértice uma cor diferente.

Como hipótese de indução, suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos planares com n vértices. Se G é um grafo planar com $n + 1$ vértices, o Corolário 3.9 garante que G contém um vértice v tal que $d(v) \leq 5$. Se $G' = G - v$, então G' é planar e tem n vértices. Por hipótese de indução, podemos tomar uma coloração própria dos vértices de G' utilizando apenas cinco cores, e desejamos estender essa coloração a G , associando uma cor a v . Para tanto, se os vizinhos de v foram coloridos utilizando-se apenas quatro cores diferentes, então ainda há uma cor sobrando, a qual podemos associar a v .

O problema foi, portanto, reduzido ao caso em que $d(v) = 5$ e todos os seus cinco vizinhos têm cores diferentes. Não há como estender diretamente essa coloração a v , pois, qualquer que seja a cor que escolhermos para ele, ela seria a mesma cor que aquela de um de seus vizinhos. Assim, para estendermos a coloração ao vértice v , precisamos mudar a coloração de alguns vértices.

Como G é planar, podemos escolher uma representação de G livre de auto-interseções. Ademais, todo vértice de G , exceto v , foi colorido com uma das cores do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e, sendo u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 os vértices vizinhos a v (nomeados em ordem horária), podemos supor que u_i tem cor i , para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

A ideia básica é trocar a cor de um dos vizinhos de v . Por exemplo, mudando a cor de u_1 de 1 para 3, podemos colorir v com a cor 1. Entretanto, o problema é que u_1 pode ter um vizinho que tenha a cor 3, de sorte que a mudança da cor de u_1 , de 1 para 3, cria uma aresta cujas extremidades têm uma mesma cor, e a coloração não seria própria (veja a figura 12). Portanto, mudar simplesmente a cor de u_1 , de 1 para 3, não resolve o problema.

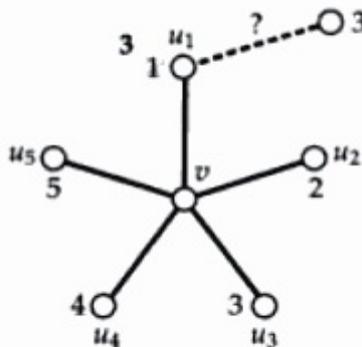


Figura 12: colorindo um grafo planar com 5 cores - I.

Seja $H_{1,3}$ o subgrafo de G induzido por todos os vértices com cores 1 ou 3. Em

outras palavras, tomamos em G somente os vértices que tem cor 1 ou 3 e todas as arestas que unem dois de tais vértices, e chamamos esse subgrafo de $H_{1,3}$. Note que, se em uma componente de $H_{1,3}$ permutarmos as cores 1 ou 3, ainda teremos uma coloração própria de G' , uma vez que v ainda não foi colorido.

Permutemos, pois, as cores 1 e 3 na componente de $H_{1,3}$ que contém o vértice u_1 . Essa permuta de cores resulta em uma coloração própria de G' , na qual o vértice u_1 tem cor 3. Então, estamos prontos para colorir o vértice v com a cor 1. O problema é que o vértice u_3 também pode estar na mesma componente de $H_{1,3}$ que o vértice u_1 . Como fizemos as trocas de cores de 1 por 3 e vice-versa, v ainda tem todas as cinco cores presentes em seus vizinhos.

Por outro lado, se u_1 e u_3 estão em componentes separadas de $H_{1,3}$, então a permuta de cores 1 por 3 funciona perfeitamente. Permutamos as cores 1 e 3 na componente de $H_{1,3}$ que inclui u_1 (mas não u_3). Isso nos dá uma coloração modificada (porém própria) de G' , em que a cor 1 não está presente em qualquer dos vizinhos de v e, assim, podemos colorir v com a cor 1.

Resta considerarmos o caso em que u_1 e u_3 estão na mesma componente de $H_{1,3}$, isto é, existe um caminho P em $H_{1,3}$ de u_1 para u_3 , conforme a figura 13 abaixo.

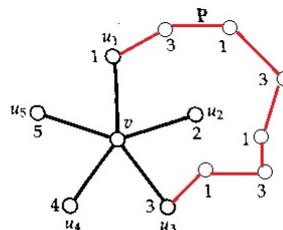


Figura 13: colorindo um grafo planar com 5 cores - II.

Neste caso, argumentando como anteriormente, denotamos por $H_{2,4}$ o subgrafo de G induzido pelos vértices de cores 2 ou 4. Se u_2 e u_4 estão em componentes separadas de $H_{2,4}$, então podemos recolorir a componente de u_2 permutando as cores 2 e 4. A coloração modificada resultante é uma 5-coloração própria de G' , na qual nenhum vizinho de v tem a cor 2. Nesse caso, associamos simplesmente ao vértice v a cor 2, obtendo uma 5-coloração própria de G .

Como anteriormente, o problema é que talvez u_2 e u_4 estejam na mesma componente de $H_{2,4}$. Afirmamos, entretanto, que isso não pode ocorrer. Por contradição, suponhamos que exista um caminho Q de u_2 para u_4 . Observe que os vértices ao longo de Q são coloridos com as cores 2 e 4, ao passo que os vertices em P são coloridos com as cores 1 e 3; assim, P e Q não tem vértices em comum. Além disso, o caminho P , juntamente com o vértice v , forma um ciclo. Esse ciclo pode ser visto como uma curva simples fechada no plano, e os vértices u_2 e u_4 estão situados em regiões diferentes dessa curva. Portanto, o caminho Q de u_2 a u_4 deve passar do interior dessa curva simples

4 COMO PROTEGER UM MUSEU?

Nesta seção, apresentamos o segundo problema interessante sobre Teoria dos Grafos que nos propusemos analisar neste trabalho. Trata-se de um problema muito atraente, que foi levantado pelo matemático americano Victor Klee em 1973 e pode ser colocado da seguinte forma: suponha que o gerente de um museu queira estar seguro de que, durante todo o tempo, todo ponto do museu estará sendo vigiado por um guarda. Os guardas ficam parados em pontos fixos, mas podem virar-se de um lado para o outro. Quantos guardas são necessários?

O teorema resultante, devido ao matemático tcheco Václav Chvátal, garante que basta termos $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas, onde n é o número de paredes do museu. Três anos mais tarde, o matemático americano Steven Fisk apresentou uma prova alternativa e muito elegante deste teorema, a qual se baseia em dois conceitos: triangulação de polígonos e coloração de vértices de um grafo. Antes de apresentarmos tal demonstração, precisamos de alguns conceitos e resultados preliminares.

Definição 4.1. *Sejam $n \geq 3$ um número natural e A_1, A_2, \dots, A_n pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2 \dots A_n$ é um **polígono simples** se, para $1 \leq i \leq n$, o segmento $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto de nenhum segmento A_jA_{j+1} (aqui, convencionamos $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$).*

Nas notações da definição acima, dizemos que os pontos A_1, A_2, \dots, A_n são os **vértices** do polígono e os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ (ou, por vezes, seus comprimentos) são os **lados** do polígono. Por sua vez, uma **diagonal** do polígono $A_1A_2 \dots A_n$ é qualquer segmento A_iA_j que não seja lado do polígono e que não intersecte nenhum lado do polígono em um ponto distinto de A_i e A_j .

Definição 4.2. *Um vértice A de um polígono simples é dito **convexo** se o ângulo interior do polígono no vértice em questão for menor do que ou igual a 180° . Se o ângulo interior do polígono no vértice A for menor do que 180° , dizemos que A é um vértice **estritamente convexo**. Por fim, se o vértice A não for convexo (resp. estritamente convexo) ele será dito **estritamente côncavo** (resp. **côncavo**).*

Os resultados auxiliares a seguir serão de fundamental importância para o que segue.

Lema 4.3. *Todo polígono simples possui pelo menos um vértice estritamente convexo.*

Prova. Seja P um polígono simples. Percorrendo a fronteira de P no sentido anti-horário, ao encontrarmos um vértice estritamente convexo temos que *virar à esquerda* e ao encontrarmos um vértice estritamente côncavo temos que *virar à direita*.

Seja A o vértice de P com ordenada y mínima. Seja l a reta horizontal passando por A . A aresta seguinte a A (no sentido anti-horário), que lhe é incidente, está acima de

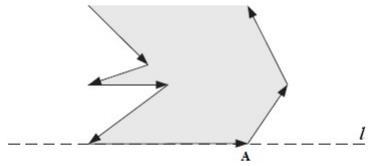


Figura 15: detectando um vértice estritamente convexo em um polígono.

l (veja a Figura 15). Logo, devemos virar à esquerda em A , e A é um vértice estritamente convexo. \square

Lema 4.4. *Todo polígono simples de $n \geq 4$ vértices possui pelo menos uma diagonal.*

Prova. Sejam P um polígono simples e B um vértice estritamente convexo de P , cuja existência foi garantida pelo lema anterior. Sejam A e C os vértices adjacentes a B . Se AC for um segmento interno ao polígono, achamos uma diagonal. Senão, existe pelo menos um vértice de P no interior do triângulo ABC . Dentre estes, seja B' o vértice localizado à maior distância possível de AC . O segmento BB' não pode intersectar nenhuma aresta do polígono, pois isso implicaria na existência de um vértice situado no interior do triângulo ABC e mais distante de AC do que B' , contrariando a escolha desse vértice. Portanto, BB' é uma diagonal. \square

O lema anterior permite demonstrar o importante resultado a seguir, o qual é conhecido na literatura matemática como o **teorema de triangulação**.

Teorema 4.5. *Todo polígono simples pode ser particionado em triângulos pela adição de (zero ou mais) diagonais que não se intersectam, exceto possivelmente em vértices.*

Prova. Fazemos a prova por indução sobre o número n de lados do polígono. Se $n = 3$, o polígono é um triângulo e o teorema vale trivialmente. Sejam $n \geq 4$ e P um polígono simples de n vértices. Pelo lema anterior, P possui uma diagonal. Por sua vez, tal diagonal divide P em dois polígonos P_1 e P_2 , ambos de números de lados menores que n . Portanto, aplicando a hipótese de indução aos dois subpolígonos, concluímos que P admite uma triangulação. \square

O teorema anterior não encerra nenhuma afirmação de *unicidade* para triangulações de polígonos. Entretanto, o próximo resultado mostra que sempre temos alguns *invariantes* associados às triangulações de um polígono fixado.

Lema 4.6. *Toda triangulação de um polígono simples de n vértices utiliza $n - 3$ diagonais e particiona o polígono em $n - 2$ triângulos.*

Prova. Faremos a prova por indução sobre n , sendo o caso $n = 3$ totalmente trivial. Sejam $n \geq 4$ e P um polígono simples de n lados. Toda diagonal divide P em dois

subpolígonos P_1 e P_2 , de números de vértices n_1 e n_2 , digamos. Evidentemente, temos $n_1 + n_2 = n + 2$ pois os vértices da diagonal em questão são contados duas vezes, por pertencerem aos dois subpolígonos. Por outro lado, aplicando a hipótese de indução a P_1 e P_2 , concluímos que P tem

$$(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = (n_1 + n_2) - 5 = (n + 2) - 5 = n - 3$$

diagonais (temos de contar a diagonal que gerou P_1 e P_2), sendo particionado em

$$(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = (n_1 + n_2) - 4 = (n + 2) - 4 = n - 2$$

triângulos. □

Continuando nossa exposição, provaremos agora que o grafo associado a uma triangulação qualquer de um polígono simples admite uma 3-coloração. Para tanto, utilizaremos o conceito de grafo dual (cf. Definição 2.24), que o leitor pode achar conveniente recordar neste ponto.

Lema 4.7. *Seja G o grafo correspondente a uma triangulação de um polígono simples. Se G' denota o grafo dual a G , então G' é uma árvore.*

Prova. As arestas de $G = (G')'$ são os lados do polígono, juntamente com as diagonais adicionadas na triangulação. Como o polígono é simples, uma dessas diagonais o divide em duas regiões. Portanto, a remoção de uma delas divide G' em duas componentes conexas. Assim, G' é uma árvore. □

Para o que segue, dizemos que três vértices consecutivos A , B e C de um polígono simples formam uma *orelha* se AC é uma diagonal do polígono. Nesse caso, a *orelha* é o triângulo ABC , ao passo que a *ponta da orelha* é o vértice B . Por fim, dizemos que duas orelhas de um polígono simples são *disjuntas* se a interseção dos interiores dos triângulos a elas correspondentes for vazia. O resultado a seguir é devido ao matemático alemão Max Dehn.

Teorema 4.8 (Dehn). *Todo polígono simples com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas disjuntas.*

Prova. Seja G o grafo correspondente a uma triangulação do polígono, e G' seu grafo dual. O lema anterior garante que G' é uma árvore. Por outro lado, como o polígono possui pelo menos 4 vértices, o Lema 4.6 garante que uma qualquer de suas triangulações gera pelo menos duas regiões, o que implica que G' tem pelo menos dois vértices. Agora, é imediato verificar que uma folha em G' corresponde a uma orelha do polígono. Por fim, o Lema 2.28 garante que toda árvore com pelo menos dois vértices possui pelo menos duas folhas. □

De posse do lema anterior, podemos enunciar e provar o resultado abaixo, o qual é o último passo de que precisamos para estabelecer o Teorema da Galeria de Arte.

Teorema 4.9 (da 3-coloração). *O grafo correspondente a uma triangulação de um polígono simples possui uma 3-coloração.*

Prova. Fazemos a prova por indução sobre o número n de vértices do polígono P , observando que um triângulo pode ser trivialmente colorido com três cores.

Seja, pois, $n \geq 4$. Pelo teorema anterior, P possui uma orelha ABC . Remova tal orelha de P e aplique a hipótese de indução ao polígono simples resultante, o qual possui $n - 1$ vértices. Em seguida, coloque de volta o vértice B e atribua a ele uma cor que não foi atribuída nem a A nem a C (como estamos utilizando três cores, dispomos de pelo menos uma para colorir B). Portanto, por hipótese de indução, concluímos que o grafo da triangulação de P é 3-colorível. \square

Voltando finalmente ao problema principal desta seção, suponha que o gerente de um museu queira assegurar-se de que, durante todo o tempo, cada canto do museu está sendo vigiado por pelo menos um guarda; suponha, ademais, que os guardas ficam parados em pontos fixos mas podem girar em torno de si mesmos. Quantos guardas são necessários, no mínimo?

Podemos imaginar as paredes do museu como um polígono simples de n lados. Obviamente, se o polígono for convexo então um guarda será o bastante (veja a Figura 16).

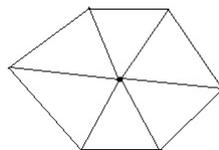


Figura 16: um museu *convexo*.

Contudo, em geral as paredes do museu podem formar qualquer polígono simples. Por exemplo, considere um museu com a forma de um pente, com $n = 3m$ paredes, como ilustrado na Figura 17.

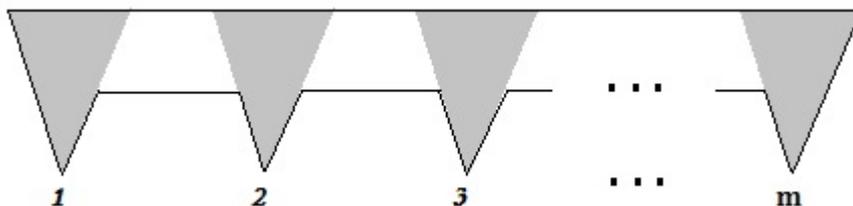


Figura 17: um museu em forma de *pente*.

É fácil ver que tal museu requer, no mínimo, $m = \frac{n}{3}$ guardas. De fato, o ponto 1 pode ser observado por um guarda parado no triângulo sombreado contendo

1, e analogamente para os pontos 2, 3, 4, ..., m ; uma vez que todos esses triângulos são disjuntos, concluímos que no mínimo m guardas são necessários. Por outro lado, m guardas são também suficientes, uma vez que estes podem ser posicionados ao longo dos lados superiores dos m triângulos.

O resultado a seguir estabelece o caso geral.

Teorema 4.10 (da galeria de arte de Chvátal). *Todo museu com n paredes pode ser vigiado por $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas.*

Prova. Considerando o museu como um polígono simples P de n lados, o Teorema 4.5, em conjunção com o Lema 4.6, garante que P pode ser triangulado, e que para tanto utilizam-se $n - 3$ diagonais que não se cruzam em seu interior. Pelo Teorema 4.9, o grafo correspondente a uma tal triangulação pode ser 3-colorível.

Perceba agora que, como existem n vértices, pelo menos uma das três cores, digamos azul, foi utilizada para colorir no máximo $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vértices. Colocando um guarda em cada um de tais vértices e observando que todo triângulo possui pelo menos um vértice azul, inferimos que todo triângulo da triangulação está sendo vigiado. Consequentemente, o mesmo acontece com todo o polígono. \square

5 SOBRE AMIGOS E POLÍTICOS

Chegamos finalmente ao terceiro e último resultado de nosso trabalho, conhecido no folclore matemático como o *Teorema da Amizade*. Não se tem conhecimento exato sobre quem primeiro o conjecturou, ou mesmo sobre quem primeiro o enunciou do modo pitoresco abaixo:

“Suponha que, em um certo grupo de pessoas, cada duas têm precisamente um amigo em comum no grupo. Então, existe sempre uma pessoa do grupo (o “político”) que é amiga de todo mundo”.

Antes de enunciarmos o teorema de modo matematicamente preciso e apresentarmos sua demonstração, precisamos de algumas definições e resultados auxiliares para seu bom entendimento.

5.1 Alguns fatos sobre álgebra linear

Nesta seção, recordamos alguns fatos sobre Álgebra Linear que se farão necessários para a análise do Teorema da Amizade.

5.1.1 Matrizes e determinantes

Denotemos por \mathbb{N} o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Definição 5.1. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, definimos uma **matriz real de dimensões m e n** , ou simplesmente uma **matriz $m \times n$** (lê-se m por n), como uma tabela formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas. Tais reais são denominados de **entradas da matriz**.*

Exemplo 5.2. *A matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ é uma matriz real 2×3 . As entradas da primeira linha são dadas pelos números reais 2, -1 e 5, ao passo que as entradas da segunda linha são dadas pelos números reais -3 , 4 e 11.*

É usual indicarmos as entradas de uma matriz arbitrária A pelos símbolos a_{ij} , onde os índices indicam, nessa ordem, a linha e a coluna onde o elemento se encontra. Assim, uma matriz $m \times n$ é usualmente representada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ou por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, ou simplesmente $A = (a_{ij})$, quando suas dimensões estiverem

subentendidas.

Uma matriz $n \times n$ é dita uma **matriz quadrada de ordem n** . Por exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & -7 \end{bmatrix}$$

é uma matriz quadrada de ordem 3.

Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem n , dizemos que as entradas a_{ii} , com $1 \leq i \leq n$, formam a **diagonal principal** de A . Por outro lado, o **traço** de A é definido como a soma das entradas de sua diagonal principal:

$$\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Uma **matriz diagonal de ordem n** é uma matriz quadrada de ordem n em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são todos iguais a zero:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A matriz diagonal de ordem n cujas entradas da diagonal principal são iguais 1,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

é chamada **matriz identidade de ordem n** , sendo usualmente denotada por I_n . Sempre que n estiver subentendido, escreveremos simplesmente I para denotar essa matriz.

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chamamos de **transposta** de A , e denotamos A^\top , a matriz $(b_{ij})_{n \times m}$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$ para todos $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -8 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz quadrada A é dita **simétrica** se $A^\top = A$ e **antissimétrica** se $A^\top = -A$.

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , chamamos de **inversa** de A a uma

matriz quadrada B de ordem n , tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Não é difícil provar que uma inversa de A , se existir, é única.

Agora, teceremos alguns comentários acerca do estudo de *determinantes*. Quando abordados no Ensino Médio, usualmente não atribui-se aos determinantes a importância que lhes é devida, em parte porque a apresentação não é suficientemente profunda para fazê-lo.

Porém, determinantes são funções muito especiais e importantes, definidas nos espaços das matrizes quadradas e tomando valores nos corpos aos quais os coeficientes de tais matrizes pertencem. Aqui, fixaremos nosso estudo no caso de matrizes quadradas de coeficientes reais, remetendo o leitor interessado a (HEFEZ and FERNANDEZ, 2012), para o caso mais geral.

Determinantes de matrizes quadradas fornecem condições necessárias e suficientes para a invertibilidade das mesmas. Fornecem também, caso a matriz seja invertível, uma fórmula (a **fórmula de Laplace**) para o cálculo de tal matriz inversa, a qual tem importantes consequências teóricas. Permitem, ainda, dar fórmulas explícitas (a **regra de Cramer**) para as soluções de certos sistemas de equações lineares com números iguais de equações e incógnitas. Determinantes também possibilitam introduzirmos a importante noção de *polinômio característico* de uma matriz quadrada.

Em Geometria, eles aparecem em fórmulas unificadas para as áreas de paralelogramos e os volumes de paralelepípedos; em Análise, estão presentes em teoremas importantes, como o Teorema da Função Inversa, o Teorema da Função Implícita e o Teorema de Mudança de Variáveis, por exemplo.

A seguir, apresentamos a definição recursiva usual para o determinante de uma matriz quadrada.

- Se $A = (a)$ é uma matriz 1×1 , definimos seu determinante por

$$\det(a) = a.$$

- Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz 2×2 , definimos

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

- Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz 3×3 , definimos

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Note que a expressão acima para o determinante de uma matriz quadrada A de ordem 3 pode ser escrita como

$$\det A = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

A seguir, utilizamos tal observação para estender a noção de determinante a matrizes de ordem $n > 3$. Para tanto, admita que já definimos determinantes de matrizes quadradas de ordem $n - 1$, para algum inteiro $n > 1$.

Definição 5.3. Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$ e $1 \leq i, j \leq n$, representamos por M_{ij} a submatriz quadrada de ordem $n - 1$, obtida a partir de A pela supressão de suas i -ésima linha e j -ésima coluna. Também, definimos o (i, j) -ésimo:

- Menor** de A como o número real $\det M_{ij}$.
- Cofator** de A como o número real $A_{ij} := (-1)^{i+j} \det M_{ij}$.

De posse dos conceitos acima definidos, enunciamos sem demonstração o resultado a seguir, devido a P. S. de Laplace e conhecido como o **Teorema de Laplace**. O leitor interessado na demonstração desse teorema poderá encontrá-la em ((FILHO, 2003)).

Teorema 5.4 (Laplace). Se $A = (a_{ij})$ denota uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, então:

- A soma $\sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$ independe do inteiro $1 \leq j \leq n$ fixado.
- A soma $\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$ independe do inteiro $1 \leq i \leq n$ fixado.

Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem $n > 1$, e supondo que já definimos determinantes de matrizes quadradas de ordem $n - 1$, o Teorema de Laplace nos permite definir o determinante de A pondo

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}.$$

Assim, para calcular o determinante de uma matriz quadrada A de ordem

$n > 1$, escolhamos uma linha qualquer i de A e calculamos a soma

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij},$$

a qual é conhecida como o **desenvolvimento de Laplace** de $\det A$ segundo os elementos da linha i . Alternativamente, escolhamos uma coluna j qualquer de A e calculamos a soma

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$

a qual é conhecida como o **desenvolvimento de Laplace** de $\det A$ segundo os elementos da coluna j .

No que segue, denotamos por $\mathcal{M}(n)$ o conjunto das matrizes reais $n \times n$; também, dada uma matriz $A \in \mathcal{M}(n)$, denotamos suas linhas por A_1, \dots, A_n . Escrevendo

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

podemos ver $\det A$ como uma função de A_1, \dots, A_n . Assim fazendo, é possível mostrar que $A \mapsto \det A$ é a única função

$$D : \mathcal{M}(n) \rightarrow \mathbb{R}$$

que possui as seguintes propriedades:

- (D1) D é linear como função de cada linha separadamente.
- (D2) Se duas linhas adjacentes A_j e A_{j+1} são iguais, então $D(A) = 0$.
- (D3) Se I_n representa a matriz identidade de $\mathcal{M}(n)$, então $D(I_n) = 1$.

Por sua vez, as propriedades (D1) e (D2) acarretam a validade de outras duas propriedades, as quais enunciamos a seguir:

- (i) Seja $i, j \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i < j \leq n$. Se A' é a matriz obtida de A por meio da transformação que permuta as linhas A_i e A_j , então $D(A') = -D(A)$. Em particular, se A é uma matriz com duas linhas iguais, então $D(A) = 0$.
- (ii) Se A' é a matriz obtida de A trocando-se a linha i pela soma de si mesma com uma combinação linear de outras linhas de A e mantendo as demais linhas inalteradas, então $D(A') = D(A)$. Em particular, se as linhas de uma matriz A são linearmente dependentes, então $D(A) = 0$.

De posse dos resultados acima e para uso futuro, estabelecemos o resultado

auxiliar a seguir.

Lema 5.5. Se $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & k \end{bmatrix}_{n \times n}$, então $\det(A) = (k-1)^{n-1}(k+n-1)$.

Prova. Realizando na matriz A a sequência de operações elementares

$$A_1 \rightarrow A_1 - A_2; \quad A_2 \rightarrow A_2 - A_3; \quad \cdots; \quad A_{n-1} \rightarrow A_{n-1} - A_n,$$

obtemos a matriz B abaixo:

$$B = \begin{bmatrix} k-1 & 1-k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k-1 & 1-k \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & k \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Portanto, as propriedades de determinantes garantem que

$$\det(A) = \det(B).$$

Note que, em cada linha, podemos colocar em evidência o termo $k-1$. Assim fazendo, temos (também pelas propriedades de determinantes)

$$\det(A) = (k-1)^{n-1} \cdot \det(U), \tag{1}$$

onde U é a matriz

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & k \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Para concluir a demonstração, devemos provar que $\det(U) = k+n-1$. Para isso, vamos calcular o determinante aplicando o desenvolvimento de Laplace pela primeira

linha. Assim,

$$\det(U) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & k \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} +$$

$$+ \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & k \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)},$$

Por ora, calculemos somente a segunda parcela acima. Aplicando uma vez mais o desenvolvimento de Laplace pela primeira linha, obtemos que o determinante desejado é igual ao determinante da matriz análoga, porém de ordem $(n-2) \times (n-2)$. Com o mesmo processo, obteremos uma matriz de ordem $(n-3) \times (n-3)$, e assim sucessivamente, até chegarmos à matriz de ordem 3×3 abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & k \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} = 1. \quad (2)$$

Os cálculos acima fornecem, então

$$\det(U) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & k \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} + 1.$$

Agora, expandindo novamente pela primeira linha, temos:

$$\begin{aligned} \det(U) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & k \end{bmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} &+ \\ + \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & k \end{bmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} &+ 1, \end{aligned}$$

de sorte que, graças a (2),

$$\det(U) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & k \end{bmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} + 2.$$

Repetindo o mesmo processo várias vezes, chegamos a

$$\det(U) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} + (n-3) = k + n - 1.$$

Por fim, substituindo em (1), obtemos o resultado desejado. \square

5.1.2 Autovalores e autovetores

Ao longo desta subseção, fixado $n \in \mathbb{N}$, chamaremos as matrizes $n \times 1$ com entradas reais de **vetores**. Sempre que não houver perigo de confusão, 0 denotará o **vetor nulo**, isto é, a matriz $n \times 1$ com todas as entradas iguais a $0 \in \mathbb{R}$. Por fim, I denotará a matriz identidade de ordem n .

Definição 5.6. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Um número real λ é dito um **autovalor** de A se existe um vetor não nulo*

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

tal que

$$(A - \lambda I)V = 0. \quad (3)$$

Um vetor não nulo que satisfaz a igualdade acima é dito um **autovetor** de A associado ao autovalor λ . Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, o **autoespaço** associado a λ é o conjunto formado pelo vetor nulo, juntamente com os vetores não nulos que satisfazem (3).

O resultado a seguir, cuja prova não apresentamos, fornecerá um meio de encontrar os autovalores e autovetores de uma matriz quadrada.

Proposição 5.7. *Para uma matriz quadrada A , são equivalentes:*

- (a) $\det A \neq 0$.
- (b) A é invertível.
- (c) não existe uma combinação linear não trivial das colunas de A que é igual ao vetor nulo.

Aplicando a proposição anterior à matriz $A - \lambda I$ no lugar de A , obtemos o resultado de nosso interesse.

Proposição 5.8. *Se A é uma matriz quadrada de ordem n e entradas reais, então:*

- (a) Os autovalores de A são as raízes reais do polinômio $p(t) = \det(A - tI)$.
- (b) Para cada autovalor λ de A , os autovetores correspondentes são os vetores não nulos X que resolvem o sistema linear de equações $(A - \lambda I)X = 0$.

Se A é uma matriz quadrada de ordem n , a matriz $A - tI$ é denominada a **matriz característica** de A ; por sua vez, o determinante dessa matriz é um polinômio em t , chamado o **polinômio característico** de A e denotado por $p_A(t)$. Assim, em palavras, os autovalores de A são as raízes reais de seu polinômio característico.

5.1.3 Diagonalização

O cálculo de potências de matrizes é, via de regra, uma tarefa de custo computacional muito elevado, pois é necessário calcular $m - 1$ produtos de matrizes para calcular a potência A^m . Entretanto, conforme veremos a seguir, o cálculo de A^m fica bastante simplificado se soubermos que A é uma matriz diagonalizável.

Definição 5.9. *Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, dizemos que B é **semelhante** a A , quando existir uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$.*

É fácil verificar que se uma matriz B é semelhante a uma matriz A , então A também é semelhante a B . Assim, nesse caso diremos simplesmente que A e B são semelhantes.

Definição 5.10. *Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n é **diagonalizável** se existir uma matriz quadrada invertível P , também de ordem n , e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^{-1}$ ou, equivalentemente, $D = P^{-1}AP$.*

Se $A \in \mathcal{M}(n)$ e $P \in \mathcal{M}(n)$ é invertível, é fácil verificar que

$$(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP.$$

Portanto, se A é diagonalizável e $P^{-1}AP = D$ é uma matriz diagonal, temos $D^m = P^{-1}A^mP$ ou, equivalentemente,

$$A^m = PD^mP^{-1}. \quad (4)$$

Então, uma vez que

$$D = \text{diag}(d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n) \Rightarrow D^m = \text{diag}(d_1^m \ d_2^m \ \dots \ d_n^m), \quad (5)$$

concluimos que A^m pode ser obtida com apenas duas multiplicações de matrizes.

Seja A diagonalizável, com $A = PDP^{-1}$, sendo D diagonal. Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ é um polinômio de coeficientes reais, podemos calcular o polinômio $f(A)$ utilizando (4):

$$\begin{aligned} f(A) &= a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n \\ &= a_0(PIP^{-1}) + a_1(PDP^{-1}) + a_2(PD^2P^{-1}) + \dots + a_n a_1(PD^nP^{-1}) \\ &= P(a_0I + (a_1D) + (a_2D^2) + \dots + (a_nD^n))P^{-1} \\ &= Pf(D)P^{-1}. \end{aligned}$$

Nas notações de (5), segue prontamente que

$$f(D) = \text{diag}(f(d_1) \ f(d_2) \ \dots \ f(d_n)),$$

de sorte que $f(A)$ pode ser facilmente calculada.

Precisamos, agora, de mais uma definição.

Definição 5.11. *Uma matriz $A \in \mathcal{M}(n)$ é **ortogonal** se $AA^\top = A^\top A = I$. Em outras palavras, A é ortogonal se for invertível, com $A^{-1} = A^\top$.*

O teorema a seguir, conhecido em Álgebra Linear como o **Teorema Espectral** será de fundamental importância para a demonstração do resultado principal desta seção, o Teorema da Amizade. Em palavras, ele diz que toda matriz simétrica é diagonalizável. O leitor interessado em sua demonstração pode encontrá-la em (HEFEZ and FERNANDEZ, 2012).

Teorema 5.12 (Espectral). *Se $A \in \mathcal{M}(n)$ é uma matriz simétrica, então existe uma matriz ortogonal $P \in \mathcal{M}(n)$ tal que $P^{-1}AP (= P^\top AP)$ é diagonal. Mais ainda, os elementos da diagonal principal de $P^{-1}AP$ são exatamente os autovalores de A .*

5.2 Mais sobre grafos

Definição 5.13. *Dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices, sua **matriz de adjacência** é a matriz $\text{Adj}(G) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n)$ tal que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{i, j\} \in E \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Lema 5.14. *A matriz de adjacência de um grafo é simétrica, com zeros na diagonal principal.*

Prova. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n)$ a matriz de um grafo G . Uma vez que só consideramos grafos simples, temos $a_{ii} = 0$, para $1 \leq i \leq n$. Por outro lado, para $i \neq j$ com $1 \leq i, j \leq n$, temos

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{i, j\} \in E \Leftrightarrow \{j, i\} \in E \Leftrightarrow a_{ji} = 1;$$

Portanto, $\text{Adj}(G)$ é simétrica. □

Para o que segue, recorde que, dado um grafo G , definimos o comprimento de um caminho em G como seu número de arestas.

Teorema 5.15. *Seja $A \in \mathcal{M}(n)$ a matriz de adjacência associada ao grafo $G = (V, E)$ de n vértices, rotulados pelos números $1, 2, 3, \dots, n$. Para $m \in \mathbb{N}$, o número de passeios de comprimento m ligando os vértices i e j é a entrada (i, j) da matriz A^m .*

Prova. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

a matriz de adjacência de G . Por definição, cada a_{ij} só pode ser 1, se os vértices i e j forem adjacentes, e 0, caso contrário. Assim, a própria matriz de adjacência conta os passeios de comprimento $m = 1$.

Agora, supondo que o resultado seja válido para $m = k - 1$, devemos mostrar que ele ainda é válido quando $m = k$. Para tanto, seja

$$A^{k-1} = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Por hipótese de indução, a quantidade de passeios de comprimento $k - 1$ conectando os vértices i e j é dada por b_{ij} .

Para vermos o que acontece quando $m = k$, seja

$$A^k = A^{k-1}A = BA = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

e analisemos o elemento $c_{11} \in A^k$:

$$c_{11} = b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} + b_{13} \cdot a_{31} + \dots + b_{1n} \cdot a_{n1}.$$

Cada b_{1j} conta a quantidade de passeios de comprimento $k - 1$ ligando os vértices 1 e j ; por outro lado, o elemento a_{j1} nos diz se há ou não um passeio (de comprimento 1) conectando o vértice j ao vértice 1. Assim, o produto $b_{1j}a_{j1}$ conta o número de passeios de comprimento k ligando o vértice 1 a si mesmo, obtidos a partir de um passeio de comprimento $k - 1$ ligando os vértices 1 e j (observe que tal produto será igual a zero, se os vértices 1 e j não forem adjacentes). Sendo assim, o elemento c_{11} nos diz exatamente se podemos percorrer um passeio de comprimento k , começando e acabando no vértice 1.

De maneira totalmente análoga, podemos concluir que cada c_{ij} conta o número de passeios de comprimento k que iniciam no vértice i e terminam no vértice j . \square

Ainda em relação ao teorema anterior, veja que todo passeio de comprimento 2 é, em verdade, um caminho. Dessa forma, se A é a matriz de adjacência do grafo G ,

então a entrada (i, j) de A^2 conta o número de caminhos de comprimento 2 ligando os vértices i e j .

5.3 O teorema de Erdős-Rényi-Sós

Estamos finalmente em condições de demonstrar o Teorema da Amizade. Antes, contudo, precisamos rephraseá-lo na linguagem de Teoria dos Grafos. Para tanto, interpretamos as pessoas como o conjunto dos vértices V de um grafo, e unimos dois de tais vértices por uma aresta se, e só se, as pessoas correspondentes forem amigas. Assumimos, aqui, que a relação de amizade é simétrica e *irreflexiva*, ou seja, que se u é amigo de v , então v é amigo de u , mas não consideramos u como amigo de si mesmo. De posse de tais convenções, o teorema pode ser enunciado como segue.

Teorema 5.16 (da Amizade). *Suponha que G é um grafo tal que dois vértices quaisquer têm exatamente um vizinho comum. Então, existe um vértice que é adjacente a todos os outros.*

Primeiramente, devemos perceber que existem grafos com a propriedade do enunciado. Isso é ilustrado na Figura 18 abaixo, onde u é o *político*. Em verdade, nossa tarefa é mostrar que esses “*grafos-moinho*” são os únicos com a propriedade do enunciado. Apesar de existirem várias provas para o problema, exibiremos a primeira delas, dada por Paul Erdős, Alfred Rényi e Vera Sós em (P. ERDÖS and SÓS, 1966).

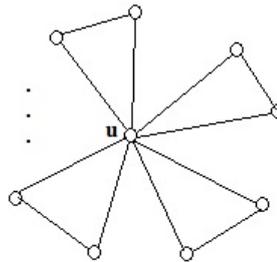


Figura 18: um grafo-moinho.

Prova. A demonstração será feita por contradição. Para tanto, suponha que a asserção seja falsa, e seja $G = (V, E)$ um contra-exemplo, isto é, um grafo tal que dois vértices quaisquer têm exatamente um vizinho comum, mas tal que nenhum vértice é adjacente a todos os outros. Para originar uma contradição, procederemos em dois passos, o primeiro utilizando Combinatória e o segundo Álgebra Linear.

AFIRMAÇÃO 1. O grafo G é regular, isto é, $d(u) = d(v)$ para todos $u, v \in V$.

PROVA. Note primeiro que a condição do teorema implica que não existem ciclos de comprimento 4 em G (do contrário, teríamos duas pessoas com pelo menos dois amigos

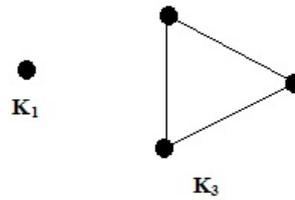


Figura 20: os grafos K_1 e K_3 .

Considere a matriz de adjacência $A = (a_{ij})$ de G . Como G é k -regular, toda linha de A tem exatamente k entradas iguais a 1. Por outro lado, pelas hipóteses do teorema, para quaisquer duas linhas de A existe exatamente uma coluna onde ambas tem uma entrada igual a 1. Além disso, a diagonal principal de A consiste de zeros. Consequentemente, o Teorema 5.15 garante que

$$A^2 = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & k \end{bmatrix} = (k-1)I + J,$$

onde I é a matriz identidade de ordem n e J é a matriz $n \times n$ com todas as entradas iguais a 1.

Como

$$\det(A^2 - (k-1)I) = \det J = 0,$$

e J tem posto 1, temos que $k-1$ é autovalor de A^2 , com multiplicidade $n-1$. Por outro lado, segue do Lema 5.5 e da Afirmação 2 que

$$\det(A^2) = (k-1)^{n-1}(k+n-1) = (k-1)^{n-1}k^2.$$

Portanto, A^2 tem os autovalores:

- $k-1$, com multiplicidade $n-1$;
- k^2 , com multiplicidade 1.

Agora, uma vez que A é simétrica e, portanto, diagonalizável (pelo Teorema 5.12), se $A = P^{-1}DP$, com D diagonal, temos $A^2 = P^{-1}D^2P$, de sorte que os autovalores de A^2 são as entradas de D^2 . Portanto, A tem:

- r autovalores iguais a $\sqrt{k-1}$ e s autovalores iguais a $-\sqrt{k-1}$, com $r+s = n-1$.
- autovalor k ou $-k$, com multiplicidade 1;

Suponha, sem perda de generalidade, que k é autovalor de A (o outro caso

pode ser tratado de modo análogo). Uma vez que a soma dos autovalores de A é igual a seu traço, temos

$$0 = \operatorname{tr}A = k + r\sqrt{k-1} - s\sqrt{k-1}.$$

Em particular, $r \neq s$ e

$$(s - r)\sqrt{k-1} = k \Leftrightarrow s - r = \frac{k}{\sqrt{k-1}}.$$

Mas isso contradiz a afirmação a seguir, uma vez que $s - r \in \mathbb{Z}$.

AFIRMAÇÃO 3. Se $k \in \mathbb{Z}$, com $k > 2$, então $\frac{k}{\sqrt{k-1}} \notin \mathbb{Z}$.

PROVA. Vamos considerar dois casos:

- i.* $k - 1$ não é quadrado perfeito: então $\sqrt{k-1}$ é irracional e, portanto, $\frac{k}{\sqrt{k-1}}$ é irracional, logo, não inteiro.
- ii.* $k - 1$ é quadrado perfeito: nesse caso, $\sqrt{k-1} \in \mathbb{Z}$ e $\sqrt{k-1} > 1$. Mas, como $\operatorname{mdc}(k, k-1) = 1$ e $k-1$ e $\sqrt{k-1}$ possuem os mesmos fatores primos, temos que $\operatorname{mdc}(k, \sqrt{k-1}) = 1$. Portanto, $\frac{k}{\sqrt{k-1}} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

□

Portanto, a demonstração do teorema está completa.

□

6 CONCLUSÃO

Um dos maiores desafios que temos enquanto educadores, principalmente na educação básica, é a falta de motivação de nossos alunos. As informações chegam a eles cada vez mais rapidamente, e este apelo do novo faz com que os fatores externos sejam muito mais atrativos do que as aulas. Portanto, em que pese o imperativo de aprender a Matemática clássica, já bem estabelecida, é uma estratégia muito interessante fazê-los perceber que a Matemática não é algo pronto e acabado, mas sim um corpo vivo de ideias, em contínua expansão.

Eis porque escolhemos, para nosso trabalho, a tarefa de abordar três problemas de subáreas distintas de Teoria dos Grafos, os quais fossem, por um lado, suficientemente simples de apresentar, para que se revelassem instigantes aos alunos do Ensino Médio e, por outro, se constituíssem em problemas desafiadores, a fim de suscitarem a introdução de novos conceitos e argumentos matemáticos. Vale ressaltar que a abordagem e os argumentos utilizados ao longo de nosso trabalho são perfeitamente acessíveis a quaisquer alunos do Ensino Médio seriamente interessados em Ciências ou Matemática. Além disso, e conforme já frisamos, esses problemas fazem despertar para outros resultados nas áreas estudadas, os quais possuem um nível mais elevado de dificuldade e, conforme veremos mais adiante, alguns ainda em aberto na Matemática.

Elaborando um pouco mais a discussão do parágrafo anterior, uma maneira interessante de abordar Teoria dos Grafos no Ensino Médio é mediante a resolução de problemas, uma vez que são estes que impulsionaram (e continuam impulsionando) o surgimento e a sistematização da teoria. Esse viés pode proporcionar aos alunos a possibilidade de utilizarem o raciocínio lógico matemático e desenvolverem suas próprias habilidades e estratégias para a resolução de tais problemas, por vezes sem a necessidade de uma utilização mais formal da Matemática. Por sua vez, isso possibilita ao aluno fazer descobertas, aguçando sua curiosidade e tornando a Matemática mais atrativa e interessante. Além disso, dado que vários problemas em Teoria dos Grafos podem ser conectados a diversas outras áreas do conhecimento, mesmo o aluno que não aprecia Matemática perceberá sua utilidade no mundo real.

Obviamente – e conforme fica patente na dissertação – à medida que mergulhamos mais e mais fundo na teoria, os problemas revelam-se mais e mais difíceis, o que por sua vez torna cada vez mais difícil ao professor assumir uma postura que permita a participação efetiva dos alunos na construção do conhecimento; nesse sentido, ter total domínio do conteúdo torna-se um imperativo flagrante. Na realidade das salas de aula, tais dificuldades mostram-se através de pelo menos duas constatações: a primeira, no que diz respeito à quase impossibilidade de consecução da tarefa de fomentar nos alunos a autonomia para tomadas de decisões, principalmente nas escolas públicas, repletas de salas numerosas e estruturas físicas precárias; a segunda, mais específica, tem a ver com

o fato de que Teoria dos Grafos é, o mais das vezes, tema ausente da formação acadêmica do professor da escola básica, também sendo completamente ignorado pelos livros-texto de Ensino Médio, em que pese a profusão de livros, artigos de divulgação e artigos de pesquisa sobre o tema.

A abordagem da resolução de problemas é, de fato, uma boa escolha para o ensino da Matemática. Precisamos cada vez mais dar significado ao que estamos ensinando, para que de fato a aprendizagem, e não apenas o ensino, aconteça. Resolver problemas exige estratégias, conceitos e objetivos, e isso vai além dos termos matemáticos envolvidos. O conhecimento é dinâmico, o professor precisa colocar-se na posição de provocador deste conhecimento para que o aluno faça as descobertas sozinho, o que sem dúvida isso será muito mais interessante pra ele. As dificuldades são muitas, mas acreditamos que, com um bom planejamento, as pessoas que fazem Educação consigam superar os obstáculos.

Assumindo que os capítulos anteriores, juntamente com o arrazoado acima, tenham convencido o leitor quanto à pertinência e importância da introdução de conceitos e resultados de Teoria dos Grafos nos currículos da escola básica, gostaríamos de terminar esta conclusão apontando para alguns desenvolvimentos relacionados aos problemas de que tratamos.

Em que pese o fato de que o estudo da planaridade de um grafo é uma questão topológica, é natural perguntarmos se há algum resultado combinatório que caracterize tal propriedade. Nesse contexto, temos o teorema a seguir, devido ao matemático polonês do século XX Kazimierz Kuratowsky.

Teorema 6.1 (Kuratowsky). *Um grafo finito é planar se, e somente se, não contém, como subgrafo, qualquer subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$.*

Apesar de elegante, a caracterização de Kuratowski não fornece um algoritmo prático como teste de planaridade. Também não é claro como utilizá-lo para obter uma representação plana de um grafo planar. Uma possível estratégia para decidir se um grafo $G = (V, E)$ é planar é construir incrementalmente uma representação plana de G . Se for possível fazê-lo, então G será planar; caso contrário, idealmente, um subgrafo de Kuratowsky é encontrado em G , justificando sua não planaridade.

O teorema da galeria de arte possui muitas variantes. Por exemplo, podemos querer guardar somente as paredes (que são, afinal, onde os quadros estão pendurados), ou que os guardas fiquem parados em vértices. Uma variante particularmente bonita (ainda em aberto), é a seguinte:

“Suponha que cada guarda pode patrulhar uma parede do museu, de forma que cada um caminha ao longo de sua parede e vê qualquer coisa que possa ser vista de qualquer ponto ao longo dessa parede. Quantos “guardas de parede” são necessários, no mínimo, para se ter esse controle?”

O matemático Gottfried Toussaint construiu um exemplo de museu que mostra que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas podem ser necessários. Conjectura-se que, exceto para alguns valores pequenos de n , esse número é também suficiente, mas uma prova ainda não está em vista.

Podemos rephrasear as hipóteses do Teorema da Amizade dizendo que G é um grafo com a propriedade de que, entre quaisquer dois vértices, existe exatamente um caminho de comprimento 2. Nesse sentido, o que ocorre se impusermos a existência de caminhos únicos, de comprimento $l > 2$ (l um inteiro dado) entre dois vértices quaisquer? Uma conjectura do matemático eslovaco Anton Kotzig afirma que tal situação é impossível:

Conjectura de Kotzig: Se $l > 2$, então não existem grafos com a propriedade de que entre quaisquer dois de seus vértices existe precisamente um caminho de comprimento l .

O próprio Kotzig verificou sua conjectura para $l \leq 8$. Por outro lado, através de algumas contagens bastante inteligentes, os matemáticos chineses Xing e Hu (cf. (XING and HU, 1994)) estabeleceram-na para todo $l \geq 12$, e os casos restantes foram completados pelos também chineses Yang, Lin, Wang e Li (cf. (Y. YANG and LI, 2000)). Assim a conjectura acabou tornando-se um teorema.

REFERÊNCIAS

AIGNER, Martin; ZIEGLER, Günter M. *As provas estão n'O LIVRO*. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 2002.

ASPERTI, A.C.; MERCURI, F. *Topologia e Geometria das Curvas Planas. XIII Colóquio Brasileiro de Matemática*. Rio de Janeiro: IMPA, 55-81, 1981.

FILHO, M. F. de Azevedo. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Fortaleza: Editora Premius, 2003.

FISK, Stephen. *A short proof of Chvátal's watchman theorem*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 24 (3) 374, 1978.

HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecilia. *Introdução à Álgebra Linear (COLEÇÃO PROFMAT)*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

P. ERDÖS, A. RÉNYI; SÓS, V. *On a problem of graph theory*. Studia Sci. Math. 1, 215-235, 1966.

ROSEN, Kenneth H. *Matemática Discreta e suas aplicações. Sexta edição*. São Paulo: MC Graw Hill, 2009.

SANTOS, José Plínio de Oliveira; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani Terezinha Calzolari. *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

XING, K.; HU, B. *On Kotzig's conjecture for graphs with a regular path-connectedness*. Discrete Math. 135, 387-393, 1994.

Y. YANG, C. WANG, J. LIN; LI, V. *On Kotzig's conjecture concerning graphs with a unique regular path-connectivity*. Discrete Math. 211, 287-298, 2000.