



PROFMAT

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO

CAMPUS DE SINOP

FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE

NACIONAL PROFMAT



Raul Ricardo da Fonte Gavarone

**INTERPOLAÇÃO VERSUS AJUSTE DE CURVAS:
EXEMPLOS NO MUNICÍPIO DE TERRA NOVA DO NORTE -
MT**

Sinop – MT

2017

Raul Ricardo da Fonte Gavarone

**INTERPOLAÇÃO VERSUS AJUSTE DE CURVAS:
EXEMPLOS NO MUNICÍPIO DE TERRA NOVA DO NORTE -
MT**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas (FACET) da Universidade Estadual de Mato Grosso (UNEMAT), como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Oscar Antonio González Chong
Orientador

Prof. Dr. Miguel Tadayuki Koga
Coorientador

Sinop – MT
2017

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

G279i Gavarone, Raul Ricardo da Fonte.
Interpolação *versus* ajuste de curvas: exemplos no município de Terra Nova do Norte-MT / Raul Ricardo da Fonte Gavarone. – Sinop, 2017.
71 p.: il.

Orientador: Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong.

Co-orientador: Dr. Miguel Tadayuki Koga.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado de Mato Grosso, *Campus* Universitário de Sinop, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática.

1. Modelagem Matemática. 2. Aproximação de Funções. 3. Ajuste de Curvas. 4. Interpolação. 5. Mestrado Profissional em Matemática. I. Chong, O. A. G., Dr. II. Koga, M. T., Dr. III. Título. IV. Título: exemplos no município de Terra Nova do Norte-MT.

CDU 519.652+51-7:53



ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS.
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT UNEMAT - SINOP



RAUL RICARDO DA FONTE GAVARONE

INTERPOLAÇÃO VERSUS AJUSTE DE CURVAS: EXEMPLOS NO
MUNICÍPIO DE TERRA NOVA DO NORTE

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT no Campus Universitário de Sinop, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

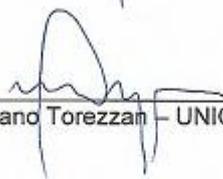
Orientador: Prof. Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong

Aprovado em: 29/06/2017

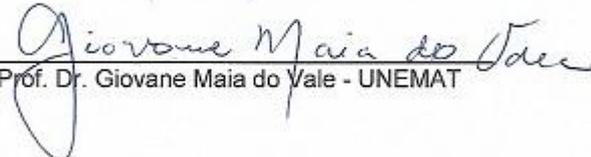
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong - UNEMAT



Prof. Dr. Cristiano Torezzan - UNICAMP/Campinas



Prof. Dr. Giovane Maia do Vale - UNEMAT

SINOP – JUNHO - 2017



Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática em Rede Nacional
UNEMAT- Sinop Avenida dos Ingás, nº 3001 - Centro – CEP: 78.555-000 – Sinop-
MT.Tel./Fax: (66)9601-8925 – Cx. Postal: 680 – profmat-unemat@unemat-net.br



*Dedico este trabalho a meu filho **Murilo Behrens Gavarone** que mesmo antes de seu nascimento já me ensinou a lutar pela vida e a cada dia me transforma numa pessoa melhor.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus.

A Nossa Senhora Aparecida que durante todos os dias me iluminou, dando-me forças para seguir em frente.

À minha esposa Karine Behrens Gavarone pelo incentivo e principalmente pela paciência nos momentos difíceis e ao meu filho Murilo, que é a maior vitória da minha vida.

Aos meus familiares, que mesmo distantes, sempre me apoiaram e me incentivaram a prosseguir.

À Cooperativa Agropecuária Mista de Terra Nova Ltda. – COOPERNOVA.

À UNEMAT, por oportunizar o Mestrado nesta região.

À SBM, CAPES e IMPA pela coordenação do PROFMAT.

Aos professores da UNEMAT/Sinop envolvidos com o PROFMAT, em especial Prof. Dr. Miguel Tadayuki Koga, pelos conhecimentos compartilhados e as lições de sabedoria, o meu muito obrigado!

Ao meu orientador Prof. Dr. Oscar Antonio González Chong, a quem agradeço muito pela dedicação, profissionalismo, apoio e paciência em sua orientação, sempre com extrema gentileza.

Aos meus colegas e amigos do PROFMAT, pela força e companheirismo em todos os momentos.

“(...) Matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-las interagir”.

(Maria Salett Biembengut)

RESUMO

O trabalho apresenta um estudo sobre a Aproximação de Funções pelos métodos de Interpolação e de Ajuste de Curvas, a partir da Modelagem Matemática. Cada método é caracterizado, se estabelece uma comparação entre ambos. A continuação mostra exemplos simples de sua aplicação no município de Terra Nova do Norte – MT, onde foram avaliados o crescimento populacional e a produção de leite no município. No caso do estudo da população decrescente durante os últimos 23 anos se mostra, que de continuar a taxa anual de decrescimento a população terá uma cota inferior. Este material pode ser útil para os professores de ensino médio que pretendam incursionar na Modelagem Matemática para a familiarização e introdução deles neste apaixonante mundo.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Aproximação de Funções; Ajuste de Curvas; Interpolação.

ABSTRACT

The work presents a study on the Functional Approximation by the methods of Interpolation and Curve Adjustment, from Mathematical Modeling. Each method is characterized, establishing a comparison between both. Then, simple examples of its application are shown in the municipality of Terra Nova do Norte - MT, in which population growth and milk production in the municipality were evaluated. In the case of the study of the population that has declined during the past twenty-three years, it is shown that, with the annual rate of decline persisting, the population will have a lower quota. This material may be useful for high school teachers who wish to venture into Mathematical Modeling for familiarization and introduction in this exciting world.

Keywords: Mathematical Modeling; Approximation of Functions; Curve Adjustment; Interpolation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estratégias de ação do sujeito em relação a um problema.....	17
Figura 2 – Elementos de uma atividade de Modelagem Matemática.....	18
Figura 3 – Fases da Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos.....	19
Figura 4 – Esquema de uma Modelagem	20
Figura 5 – Situação inicial e situação final de uma Modelagem Matemática	21
Figura 6 – Esquema sobre o erro em uma Modelagem	27
Figura 7 – Exemplo de Interpolação.....	28
Figura 8 – Exemplo de Ajuste de Curvas	28
Figura 9 – Gráfico do Exemplo 1	32
Figura 10 – Gráfico do polinômio interpolador $p(x) = x^3 - 4x + 1$	38
Figura 11 – Gráfico das funções $f(x)$ e $p(x)$ e os nós da interpolação.	39
Figura 12 – Gráfico exemplificando a Interpolação por Partes.....	40
Figura 13 – Gráfico da função $s''(x)$ nos intervalos $[x_0, x_n]$	43
Figura 14 – Gráfico do vetor residual (R).	50
Figura 15 – Gráfico da Tabela 02.	55
Figura 16 – Gráfico do polinômio $s(x)$ por Spline Natural.....	56
Figura 17 – Gráfico do polinômio de terceiro grau $f(x)$ pelo MMQ.....	57
Figura 18 – Gráfico do polinômio de quarto grau $f(x)$ pelo MMQ.....	59
Figura 19 – Gráfico do polinômio de quarto grau $f(x)$ sem o termo linear.	61
Figura 20 – Gráfico dos dados da Tabela 10.	63
Figura 21 – Gráfico do polinômio $L(t)$ pelo MMQ.	64
Figura 22 – Gráfico da Tabela 12.	66
Figura 23 – Gráfico do ajuste e da assíntota horizontal.	67
Figura 24 – Gráfico da função $P(t)$	68

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela dos n valores x e y	51
Tabela 2 – População terranovense nas últimas três décadas	54
Tabela 3 – Tabela do Erro Relativo do polinômio $s(x)$ por Spline Natural	56
Tabela 4 – Tabela do Erro Relativo do polinômio de terceiro grau $f(x)$ pelo MMQ.....	57
Tabela 5 – Tabela dos P–valores do polinômio de terceiro grau $f(x)$ pelo MMQ	58
Tabela 6 – Tabela do Erro Relativo do polinômio de quarto grau $f(x)$ pelo MMQ.....	59
Tabela 7 – Tabela dos P–valores do polinômio de quarto grau $f(x)$ pelo MMQ	60
Tabela 8 – Tabela do Erro Relativo do polinômio de quarto grau $f(x)$ sem o termo linear...	60
Tabela 9 – Tabela dos P–valores do polinômio de quarto grau $f(x)$ sem o termo linear	61
Tabela 10 – Produção leiteira de Terra Nova do Norte (em litros).	62
Tabela 11 – Tabela dos P–valores da produção leiteira de Terra Nova do Norte.	63
Tabela 12 – População de Terra Nova do Norte de 1994 a 2015.	65
Tabela 13 – Valores para Y e x	66

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1 MODELAGEM MATEMÁTICA	14
1.1 Histórico no Brasil	14
1.2 Fundamentação: Modelagem Matemática	16
1.3 Etapas ou Fases da Modelagem Matemática	19
1.4 Modelos Matemáticos.....	22
1.5 Razões para utilização da Modelagem Matemática.....	24
1.6 Modelagem e o Erro	26
2 APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES	28
2.1 Interpolação	29
2.1.1 Interpolação Polinomial.	29
2.1.2 Erro do Polinômio Interpolador	34
2.1.3 Método de Lagrange.	36
2.2 Interpolação por partes	40
2.2.1 Função Spline.....	40
2.2.2 Interpolação por Spline Cúbico.....	41
2.2.3 Spline Natural.	45
2.2.4 Programação de Spline Cúbico Natural.	48
2.3 Ajuste de Curvas.....	49
2.3.1 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)	49
3 APLICAÇÕES	54
3.1 Crescimento Populacional de Terra Nova do Norte – MT	54
3.1.1 Breve histórico do município.....	54
3.1.2 Aplicação 1	54
3.2 Produção Leiteira de Terra Nova do Norte – MT (em litros).....	62

3.2.1 Breve histórico da Coopernova.....	62
3.2.2 Aplicação 2	62
3.3 Prognóstico do crescimento populacional de Terra Nova do Norte	65
3.2.2 Aplicação 3	65
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	69
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	70

INTRODUÇÃO

Qual professor não se sente desafiado a ensinar Matemática para um aluno, ou melhor, para uma turma inteira? Desde o primeiro momento em que se decide ser professor, estamos sendo desafiados a sair da monotonia das aulas de Matemática a que somos apresentados a vida escolar inteira e dar um sentido ao ensino desta disciplina de forma mais prática e condizente com a realidade à nossa volta.

Vivemos dizendo que Matemática – “está em todo lugar” – o que realmente é um fato verdadeiro. Então por que é tão difícil ensinar a ciência matemática de forma prática? Por que esse ensino não faz sentido para nossos alunos? E nós mesmos, muitas vezes não conseguimos aplicá-la. Em que momento a matemática deixou de ser uma ciência extraordinária e passou a ser o “bicho papão” das escolas brasileiras?

A atividade de praticar e aplicar a “matemática” é tão antiga quanto a própria Matemática. Grande parte da ciência matemática surgiu por meio de problemas práticos e após seu desenvolvimento passou a ser usada em novas situações e em diversas áreas do conhecimento. De acordo com AVILA (1995, p.07), “o ensino deve sempre enfatizar as ideias da Matemática e seu papel no desenvolvimento da disciplina”.

Óbvio que tornar a Matemática algo aplicável em qualquer momento ou em qualquer situação não é algo trivial. Isto exige do professor experiência, muita dedicação e muitas horas de estudo e leitura. Não é algo que se faça do dia para a noite. Mas seguir ensinando Matemática nas escolas, sem que essa faça sentido, é algo que não podemos mais aceitar.

Considerando esses fatos, é necessária uma mudança de rumo no ensino de Matemática nas escolas, onde essa ciência seja algo que pertença ao cotidiano dos alunos e sirva de ferramenta para que nossos discentes possam tomar decisões, buscar respostas, fazer análises, criar hipóteses, discutir soluções, debater erros etc. A Matemática só fará sentido quando o indivíduo, de posse “dela”, utilizar o conhecimento científico adquirido e transformar o que está em sua volta.

Ao aceitarmos o desafio de uma grande mudança pedagógica e metodológica no ensino de Matemática em nossa profissão docente, estaremos aceitando que nos será exigida mais criatividade, dinamismo, participação, inovação e a mudança de muitos outros aspectos condizentes com nossa atual realidade científica e tecnológica.

Essa mudança de hábitos no ensino de Matemática sempre traz muita inquietação no cotidiano docente. O aprofundamento de um tema que possa ajudar em sala de aula, que traga “algo novo” para os alunos e que faça-nos sair daquele ensino tradicional é um primeiro passo para um professor tornar-se diferenciado da maioria. Neste ponto, surge o interesse em conhecer e estudar o assunto de “**Modelagem Matemática**”.

O primeiro contato com o assunto foi por intermédio de um colega da graduação que abordou o assunto em seu trabalho de conclusão. Ao entrar na área de Educação, uma coisa fica clara, vida de professor não é fácil – planejamento de aulas; correção de avaliações; docência em duas, três ou mais escolas; a rigidez da grade curricular dos conteúdos; três horas/aula semanais para o ensino médio – entre outras coisas, não nos permite, na maioria das vezes, trabalhar de forma prática e objetiva a Ciência Matemática nas escolas. Perde-se o foco do ensino-aprendizagem para “vencer” todo conteúdo durante o ano letivo. A partir daí, com a aprovação no mestrado o assunto foi retomado, surgindo assim, a oportunidade de estudar e produzir um trabalho referente ao tema de Modelagem Matemática.

A produção deste trabalho teve o objetivo de tonar a Matemática ensinada na escola em algo prático e aplicável, que realmente faça sentido ao ensinarmos, partindo de situações de nosso cotidiano, buscando a construção de um “modelo matemático” para diferentes ocasiões.

Dessa forma, no primeiro capítulo do presente trabalho será abordado o aspecto teórico da Modelagem Matemática, tais como, o contexto histórico no Brasil, a fundamentação, etapas ou fases, os modelos matemáticos, as razões para utilização da modelagem e, ainda, um esquema sobre a modelagem e o erro. Em seguida, realizaremos o estudo da aproximação de funções, focado nos métodos de interpolação, interpolação por partes e ajuste de curvas.

Por fim, concluiremos o estudo com a aplicação da modelagem no crescimento populacional do município de Terra Nova do Norte – MT nas últimas três décadas e na produção leiteira da cooperativa no município de Terra Nova do Norte – COOPERNOVA.

1 MODELAGEM MATEMÁTICA

O mundo real é complexo demais, por isso durante a história da humanidade o homem para ter êxito em suas ações de transformá-lo, construía modelos dessa realidade, que eram imitações simplificadas, pois a realidade mesmo é infinita. Por isso podemos afirmar que a modelagem não é exclusividade dos matemáticos, todas as ciências constroem modelos, com objetos próprios dessas ciências. Os modelos matemáticos são construídos, portanto, com objetos matemáticos: variáveis, funções, equações etc.

Observamos que cada vez mais as ciências e as tecnologias aplicam em seu trabalho a Modelagem Matemática, pois a principal característica dela é que ajuda a entender não a formalidade da realidade, mas o conteúdo geral da realidade. Estes avanços estão dando um caráter geral, filosófico, à Modelagem Matemática. Os modelos matemáticos são simplificações da realidade que a simulam aproximadamente, não só por simplificações ou truncamentos matemáticos, mas também por simplificações das ciências e da informática, sendo esses os erros de arredondamento.

1.1 HISTÓRICO NO BRASIL

A origem da Modelagem Matemática não se deu no ambiente da Educação Matemática. Os primeiros conceitos e procedimentos em relação ao que caracteriza uma atividade nesse sentido surgiram no que se convencionou chamar de Matemática Aplicada.

Na perspectiva de mudança no ensino de Matemática, em meados da década de 1960 por meio de um movimento conhecido como Utilitarista, começa-se uma discussão em nível internacional sobre modelagem e suas aplicações na Educação Matemática. A modelagem chega ao Brasil no final de 1970 e início dos anos 80, tendo fundamental importância na propagação e na utilização da Modelagem Matemática no país, professores como Aristide C. Barreto, Ubiratan D' Ambrósio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta, entre outros.

Esses professores incentivaram a utilização e o ensino da Modelagem Matemática na educação Nacional. Surgindo daí discussões sobre o tema, pesquisas sobre a modelagem,

sobre a construção de um modelo e como a modelagem deveria ser ensinada juntamente com ciência matemática. Essas questões fizeram aflorar a área de Modelagem Matemática no ensino brasileiro.

A lista de nomes de professores que contribuíram para o desenvolvimento da Modelagem Matemática é muito extensa, por isso, não teríamos como detalhar todas as suas contribuições. Então, iremos falar um pouco sobre dois grandes nomes da Modelagem no Brasil, o precursor do tema no país, o professor Aristide Camargo Barreto e o maior disseminador do assunto, professor Rodney Carlos Bassanezi.

O professor Aristide Camargo Barreto teve seu primeiro contato sobre a modelagem em seu curso de Engenharia. Ao se tornar docente na PUC-RIO, em meados dos anos 1970, teve a ideia de utilizar-se da modelagem em Educação Matemática como estratégia de ensino em disciplinas como Fundamentos da Matemática, Prática de Ensino e Cálculo Diferencial Integral. Em 1976, teve sua primeira experiência pedagógica no curso de Engenharia onde elaborou diferentes modelos em áreas específicas como Linguística, Ecologia, Biologia, entre outras.

Com suas experiências em modelagem, o professor Barreto observou que os alunos ganhavam em motivação e mostravam mais interesse em aprender matemática. Por meio das teorias os estudantes eram estimulados a ter criatividade e criticidade. Nesse meio tempo é convidado pelo professor Ubiratan D' Ambrósio para fazer uma palestra na UNICAMP, onde o professor Rodney Carlos Bassanezi conhece pela primeira vez o termo e o assunto Modelagem Matemática.

Sem dúvida nenhuma podemos dizer que o professor Rodney Carlos Bassanezi é o maior divulgador da Modelagem Matemática no país. Atuou em cursos e projetos na UNICAMP que estimularam a formação de grupos em matemática aplicada, Biomatemática e em Modelagem, juntamente com o professor Ubiratan D' Ambrósio.

Bassanezi recebe um convite, em 1982, para coordenar um Curso de Pós-Graduação na Universidade Estadual de Guarapuava/PR. Esse curso deu origem ao primeiro Curso de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e, por consequência, a realização de dezenas de outros cursos sob sua coordenação nas mais diversas instituições de Educação Superior no Brasil.

1.2 FUNDAMENTAÇÃO: MODELAGEM MATEMÁTICA

Qualquer mudança sempre vem acompanhada de grandes expectativas e/ou, muitas vezes, de grandes frustrações. O trabalho com Modelagem Matemática exige uma grande alteração nos rumos do ensino e da metodologia utilizada em sala de aula pelos professores.

Em sua apresentação, Biembengut e Hein (2003, p.07), afirmam que:

Hoje, a Modelagem Matemática constitui um ramo próprio da Matemática que tenta traduzir situações reais para uma linguagem matemática, para que por meio dela se possa melhor compreender, prever e simular ou, ainda, mudar determinadas vias de acontecimentos, com estratégias de ação nas mais variadas áreas de conhecimento.

Concluem ainda que “a modelagem matemática é a arte de expressar por intermédio da linguagem matemática situações-problema de nosso cotidiano”.

De acordo com Biembengut (1999, p.20) “a Modelagem Matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias”. A autora ainda conclui, ***“que matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-las interagir”***.

Ainda, Barbosa (2002, p.06) complementa, afirmando que:

A modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas do conhecimento. Se tomarmos modelagem de um ponto de vista sócio-crítico, a indagação ultrapassa a formulação ou compreensão de um problema, integrando os conhecimentos de matemática, de modelagem e reflexivo.

Nesse contexto, a busca por esses processos pedagógicos alternativos para obtenção de conhecimentos é algo constante no ensino de Matemática, sem perder, é claro, o objetivo principal que é o ensino-aprendizagem da disciplina.

Assim, construir um ambiente de ensino-aprendizagem favorável é o que a Modelagem Matemática busca, percorrendo um caminho em direção aos problemas reais no cotidiano dos alunos e buscando possíveis respostas e soluções. Nesse aspecto, Bassanezi (2002, p.16) afirma que a “modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Para Meyer *et al.* (2011, p.34), “a modelagem (...) vai resgatar

pouco a pouco outras formas de se trabalhar com a Matemática (...) já que sempre se vai trabalhar com problemas da realidade, sendo essa, sua característica primordial”.

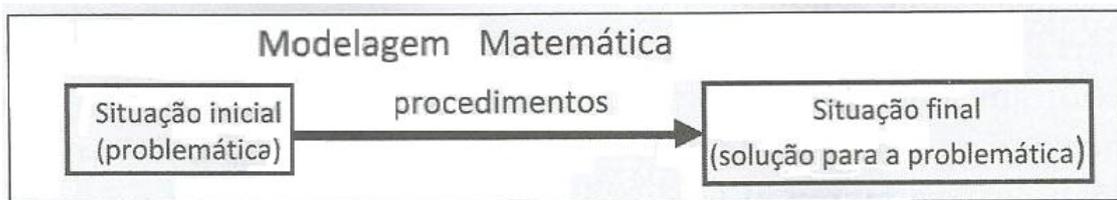
Destarte, a modelagem usada como estratégia de ensino-aprendizagem possibilita aos professores mostrar formas mais interessantes de expor os conteúdos, dando a oportunidade do aluno de resolver problemas reais do seu cotidiano, por meio de conceitos matemáticos. Tentando desenvolver no estudante a capacidade de reflexão, de senso crítico, deixando de ser apenas um “copiador e repetidor” dos conhecimentos, para analisar, discutir, interpretar, questionar e avaliar teoricamente suas vivências na prática.

Segundo Almeida *et al.* (2013, p.12):

“(...) uma atividade de modelagem matemática tem em uma situação problema a sua origem e tem como característica essencial à possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à Matemática, caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema”.

Vejam na Figura 1, as estratégias de ação do sujeito em relação a um problema, na qual existe uma problemática que é a “situação inicial” e por meio de procedimentos matemáticos chegamos a uma solução caracterizada pela “situação final”.

Figura 1: Estratégias de ação do sujeito em relação a um problema.



Fonte: Almeida *et al.* (2013, p.12).

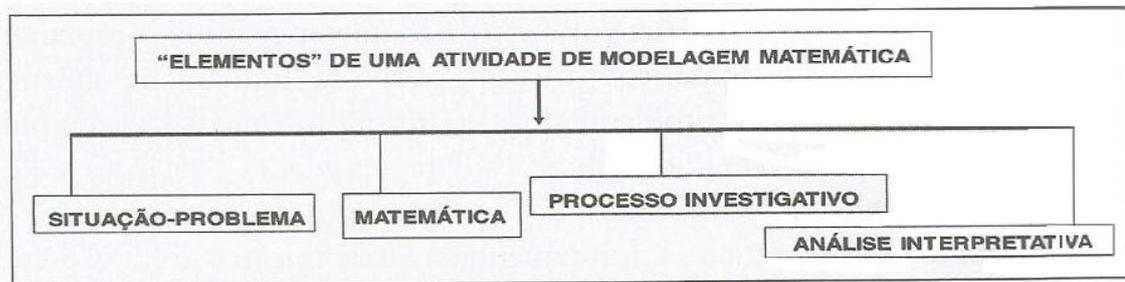
Os autores explicam que o termo “problema” é entendido como uma situação na qual o indivíduo não possui esquemas a priori para a sua solução. Sendo que para a resolução de situações problema, não há procedimentos previamente conhecidos ou soluções já indicadas. Para Bassanezi (2015, p.15), “A Modelagem Matemática é simplesmente uma estratégia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais”.

Podemos caracterizar uma atividade de Modelagem Matemática identificando suas fases: o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema;

conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução, conforme Almeida *et al.* (2013, p.17).

Na Figura 2, temos os elementos de uma atividade de Modelagem Matemática descritos inicialmente por uma situação-problema, o uso de recursos matemáticos, um processo investigativo e por fim, a análise interpretativa dos elementos. Vejamos:

Figura 2: Elementos de uma atividade de Modelagem Matemática.



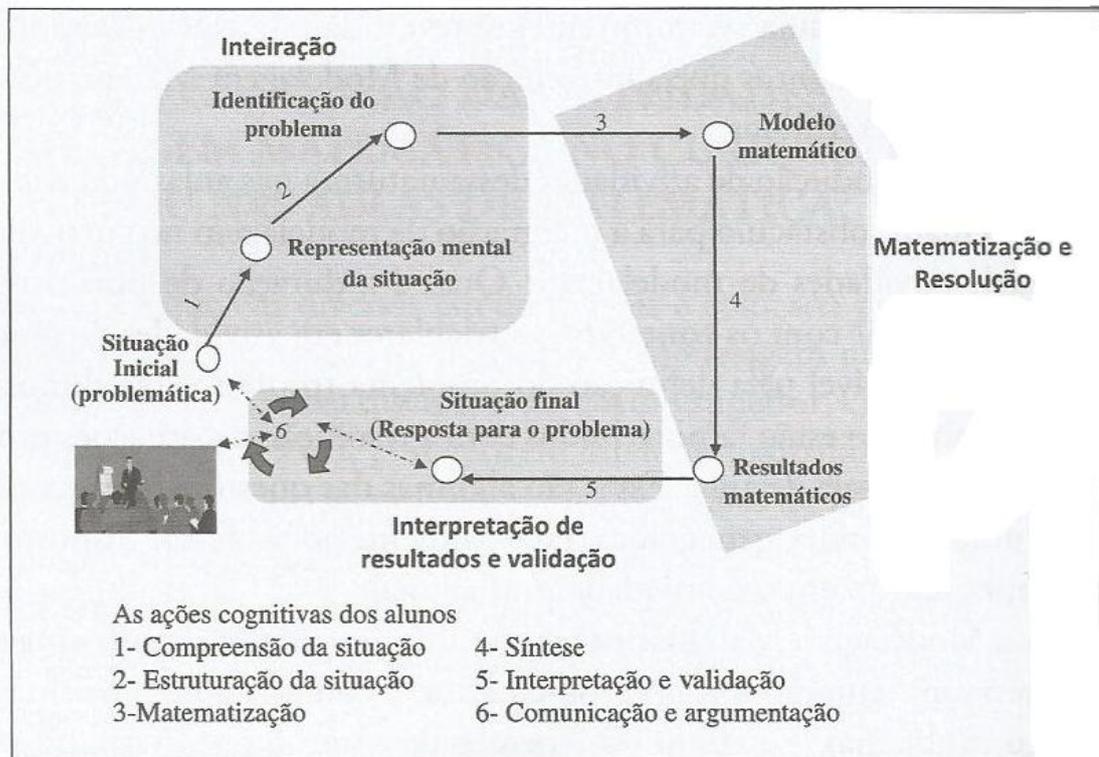
Fonte: Almeida *et al.* (2013, p.17).

Dessa forma, podemos observar que atividades dentro deste contexto podem ser utilizadas em aulas regulares de Matemática, constituindo assim, uma alternativa pedagógica no ensino da ciência com questões não essencialmente matemáticas. Pois, além de envolver um conjunto de ações, também utiliza a representação e manipulação de objetos matemáticos, assim como, utiliza metas e objetivos reconhecidos pelo aluno (Almeida *et al.*, 2013, p.17).

Neste contexto, a modelagem, como metodologia alternativa, possibilita a aproximação da teoria e prática e vice-versa, procurando satisfazer as expectativas de melhoria do ensino-aprendizagem da Matemática na escola, sendo utilizada como fator de motivação e superação dos obstáculos do ensino tradicional. Segundo Biembengut e Hein (2003, p.125), “o aluno aprende aquilo que lhe desperta interesse, tornando-se então corresponsável pelo seu aprendizado”.

Isto posto, observamos na Figura 3, as fases da Modelagem Matemática destacando uma situação inicial como a problemática, a criação de uma representação mental da situação e logo após a identificação do problema, essas subetapas conhecidas como “*Inteiração*”. Em seguida, a “*Matematização e Resolução*” compreendendo o modelo e o resultado matemático da situação. Finalmente, a “*Interpretação de resultados e a validação*” que é a resposta para o problema, chamada de situação final. Encerrando, temos as “*ações cognitivas dos alunos*” que não entraremos em detalhes, pois foge do real interesse do trabalho.

Figura 3: Fases da Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos.



Fonte: Almeida *et al.* (2013, p.19).

O desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo é muito valorizado no trabalho com modelagem, pois estimula a relação de conceitos matemáticos e o pensamento reflexivo do aluno. A metodologia imposta pela Modelagem Matemática traz benefícios para a motivação de professores e alunos, desenvolve a cidadania, tornando a aprendizagem com mais significado no ambiente escolar. Podemos confirmar isso quando Bassanezi (2002, p.12) diz que “a modelagem aplicada ao ensino pode ser um caminho para despertar maior interesse, ampliar o conhecimento do aluno e auxiliar na estruturação de sua maneira de pensar e agir”.

1.3 ETAPAS OU FASES DA MODELAGEM MATEMÁTICA

O processo de criação de uma modelagem passa por várias etapas ou fases. Em seguida, destacamos alguns autores e suas etapas.

O início de uma modelagem se faz com a *escolha de temas*, fazendo-se um levantamento de possíveis situações de estudo as quais devem ser abrangentes para que

Abstração: É o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos;

Resolução: O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente – é como num dicionário: a linguagem matemática admite “sinônimos” que traduzem os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural;

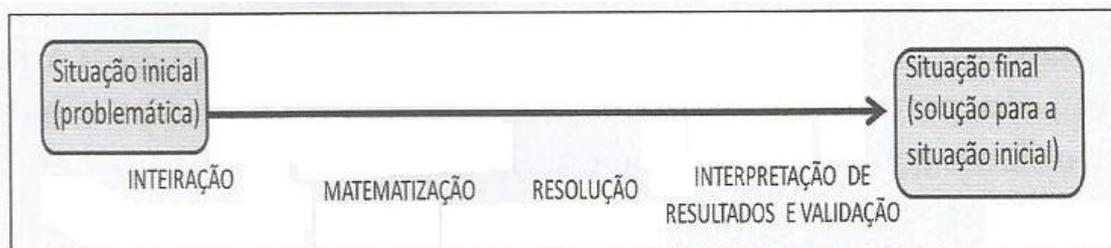
Validação: É o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para sua validação;

Modificação: Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Quando os modelos são obtidos considerando simplificações e idealizações da realidade, suas soluções geralmente não conduzem às previsões corretas e definitivas. (...), pois o aprofundamento da teoria implica na reformulação dos modelos. (...) *Nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado*, poderíamos dizer que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos.

Por outro lado, no entendimento de Biembengut e Hein (2003, p.33), as três etapas que constituem a modelagem, transformando uma situação real em um procedimento matemático por meio de um modelo, são a *Interação* na qual se busca o conhecimento da situação-problema e a familiarização com o assunto a ser estudado; a *Matematização* que é a formalização e a resolução do problema em termos do modelo; e o *Modelo Matemático* que busca a interpretação da solução.

Ainda, de acordo com Almeida *et al.* (2013, p.12), “uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final”. Vejamos a Figura 5:

Figura 5: Situação inicial e situação final de uma Modelagem Matemática.



Fonte: Almeida *et al.* (2013, p.12).

Os autores definem essas etapas em *Inteiração*: como o “ato de inteirar-se”, “informar-se sobre”, sendo esse o primeiro contato com a situação problema; *Matematização*:

como a transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática); *Resolução*: como a construção de um modelo com a finalidade de descrever a situação; e a *Interpretação de resultados*: como uma análise de uma resposta para o problema, constituindo um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica na validação da representação matemática associada ao problema (2013, p.15-17).

1.4 MODELOS MATEMÁTICOS

A Modelagem envolve a construção e obtenção de um modelo matemático. Entretanto, é importante ressaltar que cada autor tem sua forma peculiar de definir o que é um Modelo Matemático, conforme será demonstrado a seguir.

Bassanezi (2002, p. 20) exemplifica que “para McLone um modelo matemático é um construto matemático abstrato simplificado, que representa uma parte da realidade com algum objetivo particular. Ferreira Jr. apresenta uma definição generalizada de modelo matemático a partir de uma abordagem abstrata dos conceitos básicos de dimensão, unidade e medida”.

Nesse contexto, Bassanezi (2002, p 19-20) afirma que, considerando a ambiguidade do termo modelo, em se tratando de modelo matemático, podemos nos limitar a dois tipos de modelo, quais sejam:

Modelo Objeto é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser pictórica (um desenho, um esquema comportamental, um mapa, etc.), conceitual (fórmula matemática), ou simbólica. A representação por estes modelos é sempre parcial deixando escapar variações individuais e pormenores do fenômeno ou do objeto modelado. Um modelo epidemiológico (sistema de equações diferenciais) que considera o grupo de infectados como sendo homogêneos onde todos os seus elementos têm as mesmas propriedades é um exemplo de um modelo objeto. Um desenho para representar um alvéolo usado pelas abelhas é também um modelo deste tipo.

Modelo Teórico é aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais).

Entretanto, o autor afirma que o Modelo Matemático pode ser entendido, como:

Um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. O modelo pode ser considerado como uma síntese da reflexão sobre alguma parte da realidade. Seu objetivo é explicar ou entender a situação estudada para, eventualmente, poder agir sobre ela e, mesmo as situações mais simples fornecem motivações para uma iniciação científica (Bassanezi, 2012, p.12).

Por outro lado, Biembengut e Hein (2009, p.16) afirmam que: “um modelo matemático só é um modelo se servir de referência ou se permitir ser reproduzido para a resolução de problemas semelhantes que originaram o modelo, além de ser mola propulsora para o desenvolvimento de outros conhecimentos”.

Já para Almeida *et al.* (2013, p.13), “um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema”. Os autores ainda concluem, “Um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar sobre este outro sistema”.

Por fim, Bassanezi (2002, p. 20-22) destaca que os modelos matemáticos podem ser classificados de acordo com o tipo de matemática utilizada:

- i. *Linear ou não-linear*, conforme suas equações básicas tenham estas características;
- ii. *Estático*, quando representa a forma do objeto – por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo; ou *dinâmico* quando simula variações de estágios do fenômeno – por exemplo, crescimento populacional de uma colmeia.
- iii. *Educacional*, quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas (...) geralmente estes modelos não representam a realidade com o grau de fidelidade adequada para se fazer previsões. Entretanto, a virtude de tais modelos está na aquisição de experiência e no fornecimento de ideias para a formulação de modelos mais adequados à realidade estudada; ou *Aplicativo* é aquele baseado em hipóteses realísticas e, geralmente, envolve interrelações de um grande número de variáveis, fornecendo em geral sistemas de equações com numerosos parâmetros. Neste caso, um tratamento analítico pode ser impossível e os métodos utilizados para obtenção das soluções devem ser computacionais.
- iv. *Estocástico ou Determinístico*, de acordo com o uso ou não de fatores aleatórios nas equações.

Os *modelos determinísticos* são baseados na suposição que se existem informações suficientes em um determinado instante ou num estágio de algum processo, então todo o futuro do sistema pode ser previsto precisamente.

Os *modelos estocásticos* são aqueles que descrevem a dinâmica de um sistema em termos probabilísticos (cf. M. Thompson). Os modelos práticos tendem a empregar métodos estocásticos, e quase todos os processos biológicos são formulados com estes modelos quando se tem pretensões de aplicabilidade.

Dito isso, independente da forma como conceituamos o termo Modelo Matemático, certo é que sua importância se dá pelo fato de trazer uma linguagem clara e concisa de nossas ideias, a fim de proporcionar um arsenal de resultados que propiciem o uso de métodos computacionais para calcular soluções numéricas.

1.5 RAZÕES PARA UTILIZAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

De acordo com Gerdes (1992, p. 18), “A Modelagem nasceu da necessidade de se mostrar ao homem a matemática através da realidade”. Destarte, a utilização da Modelagem Matemática como método pedagógico pode ser justificada especialmente pela:

(...) motivação dos alunos e do próprio professor; facilidade da aprendizagem; o conteúdo matemático deixa de ser abstrato e passa a ser concreto; desenvolve o raciocínio lógico e dedutivo; desenvolve o aluno como cidadão crítico e transformador de sua realidade, compreendendo o papel sociocultural da matemática, tornando-a assim, mais importante (Silveira e Ribas, 2004, p.01).

Ainda, podemos dizer que a Modelagem configura-se como uma importante alternativa pedagógica na abordagem de problemas cotidianos que podem ou não ser essencialmente matemáticos, ou seja, é uma ferramenta relevante na docência e aprendizagem da Matemática (Almeida *et al.*, 2013).

Complementado o pensamento supracitado, em defesa do uso da Modelagem Matemática, Bassanezi (2004, p.15) destaca alguns aspectos importantes de natureza:

Formativa: através das aplicações matemáticas e resoluções de problemas se desenvolvem capacidades e atitudes críticas, criativas, e explorativas;

De competência crítica: os estudantes são preparados para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, formando suas próprias opiniões;

Utilidade: o aluno aprenderá a fazer da matemática um instrumento para a resolução de seus problemas em diversas situações;

Intrínseca: pois a inclusão da modelagem com suas resoluções de problemas e aplicações fornecem ao estudante uma forma mais eficiente de entender e interpretar a própria matemática em seus meandros;

Aprendizagem: pois os processos aplicativos do método da modelagem possibilitam um melhor entendimento dos argumentos matemáticos, assimilação de conceitos e resultados, e valorização da disciplina.

Ademais, Barbosa (2003) justifica a inclusão da modelagem como método pedagógico pelos seguintes fatores:

Motivação: os alunos sentir-se-iam mais estimulados para o estudo de matemática, já que vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam;

Facilitação da aprendizagem: os alunos teriam mais facilidade em compreender as ideias matemáticas, já que poderiam conectá-las a outros assuntos;

Preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas: os alunos teriam a oportunidade de desenvolver a capacidade de aplicar matemática em diversas situações, o que é desejável para moverem-se no cotidiano e no mundo do trabalho;

Desenvolvimento de habilidades gerais de exploração: os alunos desenvolveriam habilidades gerais de investigação;

Compreensão do papel sociocultural da matemática: os alunos analisariam como a matemática é usada nas práticas sociais.

Além disso, Almeida e Brito (2005) frisam que “uma das primeiras razões apontadas para se fazer modelagem em sala de aula é a necessidade de tornar visível aos estudantes o papel da matemática fora da sala de aula. Diversas decisões são tomadas na sociedade com base em modelos matemáticos”. Destarte, “as situações-problema abordadas pelos alunos nas atividades de modelagem, constituem, de modo geral, um material potencialmente significativo e podem desencadear a predisposição para aprender”. (Almeida e Borsoi, 2004, p.21).

Da mesma forma, Bassanezi (2002, p.177) ainda leciona que:

A Modelagem Matemática utilizada como estratégia de ensino-aprendizagem é um dos caminhos a ser seguido para tornar um curso de matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável. Uma modelagem eficiente permite fazer previsão, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças.

O autor destaca a importância da modelagem como uma renovação pedagógica no ensino de matemática nas escolas e sua contribuição em fatos e acontecimentos na vida real dos alunos.

Por isso, Almeida *et al.* (2013, p.23), afirmam que:

(...) ao se envolver com atividades de modelagem os alunos se deparam com um obstáculo para o qual não possuem, provisoriamente, conhecimentos suficientes para superá-lo, emergindo assim a necessidade de construir esse conhecimento por meio dessa atividade. Logo, em atividades de modelagem, os alunos tanto podem ressignificar conceitos já construídos quanto construir outros diante da necessidade de seu uso.

Portanto, “a Modelagem Matemática em sala de aula pode ser vista como uma atividade essencialmente cooperativa e a interação entre os alunos e entre professor e aluno têm papel importante na construção do conhecimento. Por outro lado, a relação com a sociedade também pode ser fortemente estimulada, uma vez que o problema investigado pelo aluno tem nela sua origem” (Almeida *et al.*, 2013, p.33).

Assim sendo, pode-se afirmar que a modelagem se destaca como uma forma dos alunos construírem situações e resolver problemas com a utilização da matemática sem que se utilizem procedimentos previamente fixados, isto é, a modelagem possibilita vislumbrar diversos resultados, os quais só podem ser detectados a partir do desenvolvimento da atividade. Nesse ponto, pode-se concluir que “a modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual” (Bassanezi, 2002, p.24).

Aliás, segundo Bicudo (1987, p.42):

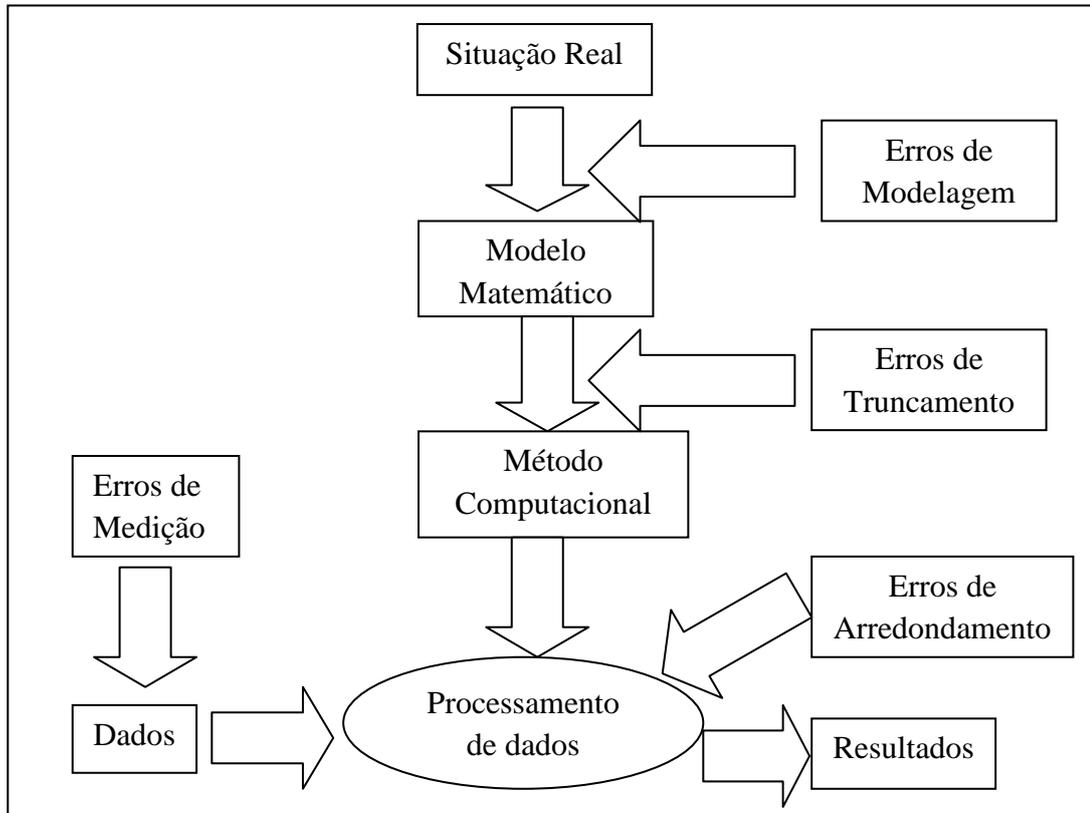
A Educação Matemática crítica desafia os estudantes fornecendo experiências de aprendizagem, fazendo com que professores e alunos sejam criadores e investigadores e superem o medo da Matemática. Tendência esta que se desenvolve através das pesquisas, interpretações e discussões que, gerando debates e trazendo experiências vivenciadas no cotidiano oferecem condições de interpretar e mostrar as conclusões através da Modelagem Matemática - definida como a arte de expressar, através da linguagem matemática, situações-problema do meio.

Conclui-se, pois, que a utilização da Modelagem Matemática como método pedagógico tem como objetivo principal a reformulação dos métodos pedagógicos tradicionais, a fim de despertar no aluno maior interesse na aprendizagem de diversos tópicos matemáticos, inclusive porque ela propicia a interpretação e compreensão de inúmeros fenômenos do cotidiano, facilitando a compreensão dos mais variados conceitos matemáticos.

1.6 MODELAGEM E O ERRO

Como falado no início, a solução de um problema com ajuda da Modelagem Matemática tem intrínsecos erros. Continuando, esquematizou-se o processo de Modelagem Matemática sob a óptica dos erros em diferentes fases. Veja Figura 6:

Figura 6: Esquema sobre o erro em uma Modelagem.



Fonte: Elaborado pelo autor.

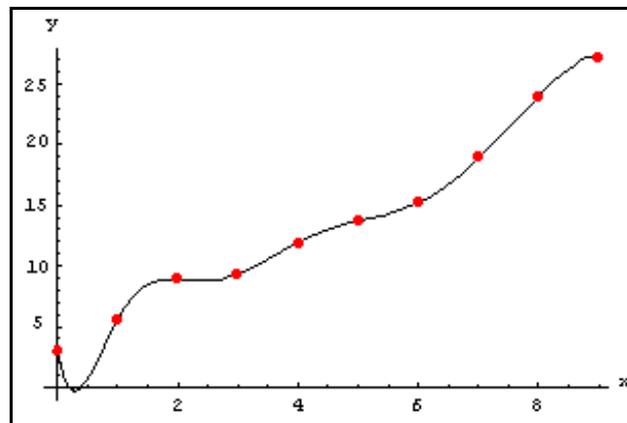
Um dos modelos mais utilizados em modelagem matemática é o da aproximação de dados por funções. Neste trabalho descreveremos as técnicas de interpolação e ajuste de curvas para aproximação de funções.

2 APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES

O problema de “compreender a leitura” ou “ler nas entrelinhas” de funções ou dados em tabelas é comum quando se trata de aplicações práticas, também é comum e ocorre com frequência nos depararmos com funções definidas por expressões indefinidas. Os métodos de aproximação são dedicados a problemas dessa natureza.

Na interpolação, a função interpoladora passa por todos os pontos dados, conforme observado no gráfico da Figura 7, veja:

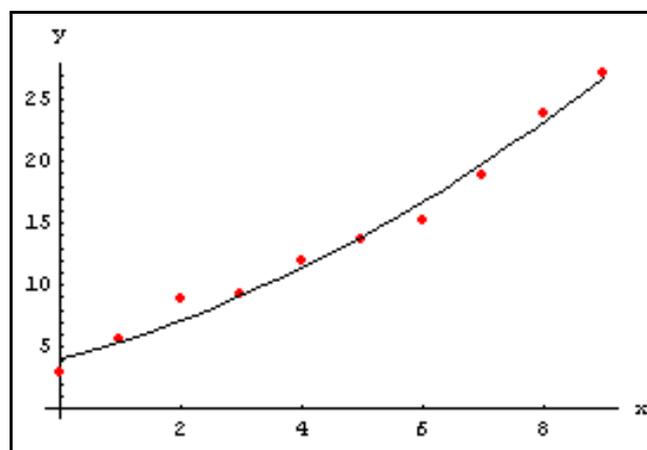
Figura 7: Exemplo de Interpolação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No ajuste de curvas, a curva não necessariamente passa por todos os pontos dados, conforme Figura 8:

Figura 8: Exemplo de Ajuste de Curvas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A interpolação é mais recomendada quando deseja-se obter valores intermediários, no interior do domínio dos dados. O ajuste de curvas pode ser usado para obter modelos que extrapolam o domínio dos dados.

Na sequência detalhamos cada uma das técnicas.

2.1 INTERPOLAÇÃO

A ideia principal da interpolação é aproximar uma função $f(x)$ por meio de uma função $p(x)$, que na maioria das vezes será polinomial. Os motivos principais para o uso dessa técnica de aproximação são:

- (a) *conhecemos os valores de $f(x)$ apenas em pontos discretos (x_0, x_1, x_2, \dots);*
- (b) *$f(x)$ é extremamente complicada e de difícil manuseio;*
- (c) *$f(x)$ não é conhecida explicitamente.*

O caso clássico de Interpolação é utilizado com as Funções Polinomiais, que são funções contínuas, deriváveis e de fácil manuseio. Os dados são precisos e a curva de ajuste coincide com os pontos dados (valores conhecidos em certos pontos da função), também conhecidos como “nós da interpolação”.

2.1.1 Interpolação Polinomial

A Interpolação é dita Polinomial quando a função interpoladora é um polinômio. Supondo conhecido o conjunto $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ de “nós da interpolação”, para os quais a imagem de f é conhecida.

$$y_i = f(x_i) \quad \text{onde, } i = 1, 2, \dots, n.$$

Na interpolação polinomial temos três problemas fundamentais (Álvarez *et al.*, 2007):

- (i) *Existência: Há algum polinômio $p(x)$ tal que $p(x_i) = y_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$?*
- (ii) *Unicidade: Se tal polinômio existe, será único?*
- (iii) *Construção: Se existe tal polinômio interpolador e é único, como encontrá-lo?*

Para resolver os dois primeiros problemas, usaremos o **Teorema 1**.

TEOREMA 1:

Sejam $n+1$ números reais diferentes $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ e f uma função que toma valores $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$. Então existe um e só um polinômio p de grau menor ou igual que n tal que:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0 \\ p(x_1) &= y_1 \\ &\vdots \\ p(x_n) &= y_n \end{aligned} \quad (1)$$

Demonstração: (Álvarez *et al.*, 2007, p.228)

Podemos representar qualquer polinômio de grau menor ou igual que n por:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2)$$

Para satisfazer as condições em (1), devemos provar que existe um e somente um jogo de coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ que deem lugar a um polinômio:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ p(x_1) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ p(x_2) &= a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2 \\ &\vdots \\ p(x_n) &= a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{aligned} \quad (3)$$

Também podemos representar esse sistema de equações na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz desse sistema se chama determinante de Vandermonde e será designado por V_{n+1} , assim:

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Provamos a seguir, pelo Princípio de Indução completa, que se os números x_i (com

$i = 1, 2, \dots, n$) são distintos, então V_{n+1} é diferente de zero. Daí: $V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0 \neq 0$

Supondo que V_n não é zero, concluiremos que V_{n+1} também será não nulo. Para isso, devemos realizar as seguintes operações sobre V_{n+1} , sem perda de generalidade e sem alterar qualquer valor do determinante: subtrairemos a *coluna* $n+1$ pela *coluna* n multiplicada por x_0 , assim sucessivamente. Logo, V_{n+1} será:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_0 & x_0 x_1 & \cdots & x_0 x_1^{n-1} \\ 0 & x_0 & x_0 x_2 & \cdots & x_0 x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_0 & x_0 x_n & \cdots & x_0 x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \cdots & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0 x_2 & \cdots & x_2^n - x_0 x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 x_n & \cdots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \cdots & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0 x_2 & \cdots & x_2^n - x_0 x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 x_n & \cdots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Nas colunas 2, 3, ..., n tiramos os fatores comuns dos termos:

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

Extraindo os fatores comuns $(x_1 - x_0)$, $(x_2 - x_0)$, ..., $(x_n - x_0)$, respectivamente das

linhas 1, 2, ..., n , temos que: $V_{n+1} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Como os binômios que estão multiplicando o determinante são não-nulos (daí, concluímos que os nós de interpolação são distintos) e por hipótese V_n é não-nulo, sendo assim:

$$V_{n+1} \neq 0$$

Logo, $V_n \neq 0 \Rightarrow V_{n+1} \neq 0$, da mesma forma $V_2 \neq 0$, sempre que os nós da interpolação forem diferentes, provaremos para todo $n \geq 2$ que $V_n \neq 0$. Portanto, validamos o **Teorema 1** e no sistema (3) admitimos que a solução é única. ■

Exemplo 1: (Elaborado pelo autor)

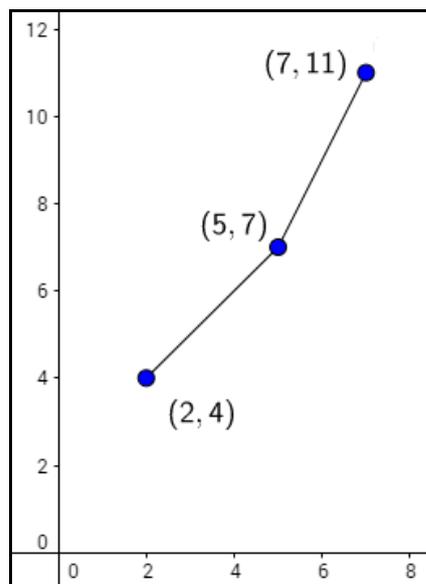
Provar que para três nós de interpolação não podemos assegurar a existência de um polinômio interpolador com grau menor ou igual que um.

Solução:

Para provar a proposição basta achar um exemplo.

Sejam $x_0 = 2$ e $y_0 = f(x_0) = 4$; $x_1 = 5$ e $y_1 = f(x_1) = 7$, e $x_2 = 7$ e $y_2 = f(x_2) = 11$, os nós da interpolação e seus respectivos valores da função interpoladora. Sendo $p(x) = a_0 + a_1x$ um polinômio de grau menor ou igual que um. Sabendo que o gráfico deste tipo de função é uma reta e os três pontos não são colineares, podemos garantir que nenhum polinômio de grau menor ou igual que um pode interpolar esses valores.

Figura 9: Gráfico do Exemplo 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 2: (Álvarez *et al.*, 2007, p.231)

Provar que para todos os nós de interpolação não podemos assegurar a unicidade do polinômio interpolador de grau menor ou igual que 2.

Solução:

Para provar a proposição é suficiente darmos um exemplo.

Sejam $x_0 = 1$ e $y_0 = f(x_0) = 3$, $x_1 = 2$ e $y_1 = f(x_1) = 4$, os nós da interpolação e suas respectivas imagens.

Dado o polinômio interpolador por $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, as seguintes condições devem ser consideradas: $p(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0$, *fazendo a substituição dos* $p(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1$

nós, temos:

$$x_0 = 1 \text{ e } y_0 = f(x_0) = 3 \rightarrow p(x_0) = a_0 + a_1 + a_2 = 3$$

$$x_1 = 2 \text{ e } y_1 = f(x_1) = 4 \rightarrow p(x_1) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 4$$

Observamos que no sistema com três incógnitas são admitidas infinitas soluções, sendo cada uma delas representada por um polinômio de grau menor ou igual a dois. Analisando geometricamente, estes polinômios corresponderão às infinitas parábolas que passam pelos pontos (1,3) e (2,4). ■

Para encerrarmos esse primeiro momento o assunto do **Teorema 1**, representaremos por P_m todos os polinômios de grau menor ou igual que n , desta forma, segundo Álvarez *et al.* (2007), concluímos que:

Dados $n+1$ nós de interpolação distintos: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ de uma função f , então:

Se $m < n$ não podemos garantir que em P_m exista um polinômio que interpole f ;

Se $m > n$ em P_m existem infinitos polinômios que interpolam f ;

Se $m = n$ existe em P_m um e somente um polinômio que interpola f .

A partir de agora, denominaremos “polinômio interpolador” o polinômio de grau menor ou igual que n sempre que tivermos $n+1$ nós de interpolação.

2.1.2 Erro do Polinômio Interpolador

Ao trabalharmos com uma função interpoladora no lugar da função interpolada não ficamos isentos de erros nessa aproximação. As informações a seguir, segundo Álvarez *et al.* (2007, p.232-234), nos dão uma ideia sobre a medida do erro do polinômio interpolador.

Sendo o polinômio $p(x)$ uma função interpoladora e $f(x)$ a função interpolada, o erro é dado por $R(x)$, onde: $R(x) = f(x) - p(x)$. Como os nós da interpolação $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ para $f(x)$ e $p(x)$ coincidem, temos que: $R(x_i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Como a função $k \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ também se anula nos mesmos valores, independentemente do valor de k , iremos analisar as diferenças de ambas as funções.

$$\text{Considerando a função } F(x) = R(x) - k(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \quad (4)$$

É fácil ver que $F(x_i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Agora, pensemos em um valor $x = x^*$, sendo x^* diferente dos nós da interpolação e analisando o erro da interpolação neste valor, temos em (4) que:

$$F(x^*) = R(x^*) - k(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2) \cdots (x^* - x_n). \quad (5)$$

Sabendo que o produto $(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2) \cdots (x^* - x_n) \neq 0$, podemos encontrar um valor para k ao qual $F(x^*)$ seja igual a zero, com k dependendo de x^* . Quando k assume este valor, a função $F(x)$ terá $n+2$ zeros: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ e o próprio x^* .

Supondo-se que f seja derivável $(n+1)$ vezes em um intervalo I que inclui todos os nós da interpolação e também o valor x^* , a função F também será. Daí, temos:

$$F(x) = f(x) - p(x) - k(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \quad (6)$$

e, exceto $f(x)$, o resto das funções envolvidas na definição são polinômios infinitamente deriváveis. Como $F(x)$ é derivável e toma o mesmo valor (zero) em pelo menos $n+2$ pontos de I , então sua derivada se anulará ao menos uma vez entre cada dois destes pontos, isto é:

$F'(x)$ tem ao menos $n+1$ zeros em I .

$F''(x)$ tem ao menos n zeros em I .

\vdots

$F^{n+1}(x)$ tem ao menos 1 zero em I .

Para este zero atribuímos à letra \underline{c} , provando-se que existe um número c em I tal que:

$$F^{n+1}(c) = 0.$$

Derivando-se $n+1$ vezes em ambos os membros da equação (6), temos:

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - p^{(n+1)}(x) - k^{(n+1)}[(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)]$$

A derivada de ordem $n+1$ de $p(x)$ é zero, pois $p(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual que n . Já para a função $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ de grau $n+1$, sua derivada de ordem $n+1$ será a constante $(n+1)!$. Daí, temos que $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!$, para $x=c$ temos que $F^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - k(n+1)! = 0$, logo: $k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

Resumindo: se x^* não é um nó de interpolação, podemos assegurar a existência em I de um valor c tal que, de acordo com (5);

$$F(x^*) = R(x^*) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x^*-x_0)(x^*-x_1)\cdots(x^*-x_n), \text{ isto é:}$$

$$R(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x^*-x_0)(x^*-x_1)\cdots(x^*-x_n), \quad \forall x^* \in \mathfrak{R}$$

Da importância desta construção resulta o **Teorema 2**.

TEOREMA 2:

Se $f(x)$ é derivável $n+1$ vezes em um intervalo fechado I que inclui os nós de interpolação x_0, x_1, \dots, x_n do polinômio interpolador $p(x)$ e o número x , então existe em I ao menos um valor c tal que o erro de interpolação em x é:

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \quad (7)$$

Exemplo 3: (Álvarez et al., 2007, p.235).

Dada à função $f(x) = \text{sen}(x)$, obtenha seu polinômio de interpolação para os nós $x_0 = 0$,

$x_1 = \frac{\pi}{4}$ e $x_2 = \frac{\pi}{2}$ e dê uma cota do erro da interpolação para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Solução:

Para $x_0 = 0$, temos que $f(x_0) = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, temos $f(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x_2 = \frac{\pi}{2}$, temos que

$f(x_2) = 1$. O Polinômio de interpolação é $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

$$\text{Logo, } p(x_0) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$p(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0 + a_1 \frac{\pi}{4} + a_2 \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_1 \frac{\pi}{4} + a_2 \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$p(x_2) = 1 \Rightarrow 0 + a_1 \frac{\pi}{2} + a_2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow a_1 \frac{\pi}{2} + a_2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

Resolvendo o sistema, temos: $a_1 = 1,164013$ e $a_2 = -0,335749$, donde a função interpoladora é:

$$p(x) = -0,335749x^2 + 1,164013x$$

Como $f(x) = \text{sen}(x)$ é derivável indefinidamente, temos que: $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$,

logo $|f^{(3)}(x)| \leq 1$. Com isto, o erro de interpolação é:

$$R(x) = \frac{1}{3!}(x-0)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{6}x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right), \text{ logo: } |R(x)| \leq \frac{1}{6}x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

2.1.3 Método de Lagrange

O método de Lagrange fornece um algoritmo eficiente para achar o polinômio interpolador, mas também, permite encontrar o valor interpolado para um x específico sem a necessidade de achar a expressão analítica do polinômio interpolador.

Sejam x_0, x_1, \dots, x_n , $n+1$ nós de interpolação diferentes e $f(x)$ a função a ser interpolada. Sejam $y_i(x_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$, os valores de f nos nós. O método de Lagrange consiste em encontrar $n+1$ polinômios básicos de grau n : $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ que satisfaçam as seguintes condições (Álvarez et al, 2007):

$$\begin{array}{cccc} L_0(x_0) = 1 & L_1(x_0) = 0 & L_2(x_0) = 0 & \dots & L_n(x_0) = 0 \\ L_0(x_1) = 0 & L_1(x_1) = 1 & L_2(x_1) = 0 & \dots & L_n(x_1) = 0 \\ L_0(x_2) = 0 & L_1(x_2) = 0 & L_2(x_2) = 1 & \dots & L_n(x_2) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_0(x_n) = 0 & L_1(x_n) = 0 & L_2(x_n) = 0 & \dots & L_n(x_n) = 1 \end{array}$$

Desta forma, obtemos o polinômio:

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x) \quad (8)$$

cumprindo as condições:

$$\begin{aligned}
p(x_0) &= y_0 L_0(x_0) + y_1 L_1(x_0) + \dots + y_n L_n(x_0) = y_0 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + \dots + y_n \cdot 0 = y_0 \\
p(x_1) &= y_0 L_0(x_1) + y_1 L_1(x_1) + \dots + y_n L_n(x_1) = y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 1 + \dots + y_n \cdot 0 = y_1 \\
&\vdots \\
p(x_n) &= y_0 L_0(x_n) + y_1 L_1(x_n) + \dots + y_n L_n(x_n) = y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + \dots + y_n \cdot 1 = y_n
\end{aligned}$$

Como $p(x)$ é uma combinação linear de polinômios de grau n seu grau será menor ou igual que n e é, portanto, o polinômio de interpolação buscado.

Para achar o polinômio básico $L_i(x), i = 0, 1, 2, \dots, n$, nota-se que ele tem n zeros:

$$x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$$

ou seja, cada nó de interpolação exceto x_i é um zero de $L_i(x)$, portanto:

$$L_i(x) = K(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) \quad (9)$$

K é um coeficiente a ser determinado. Como $L_i(x_i) = 1$, o valor de K será encontrado satisfazendo essa condição. Daí:

$$L_i(x_i) = K(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) = 1$$

Donde K :

$$K = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

Substituindo K em (9), temos:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

Para ilustrar o método de Lagrange, analisaremos os exemplos.

Exemplo 4: (Elaborado pelo autor)

Determinar o polinômio interpolador de Lagrange para a função conhecida pelos pontos A(-1,4), B(0,1), C(2,1) e D(3,16).

Solução:

Primeiro usaremos (10):

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} = \frac{-x^3 - 5x^2 + 6x}{12}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-2)(0-3)} = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-3)}{(2+1)(2-0)(2-3)} = \frac{-x^3 + 2x^2 + 3x}{6}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(3+1)(3-0)(3-2)} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{12}$$

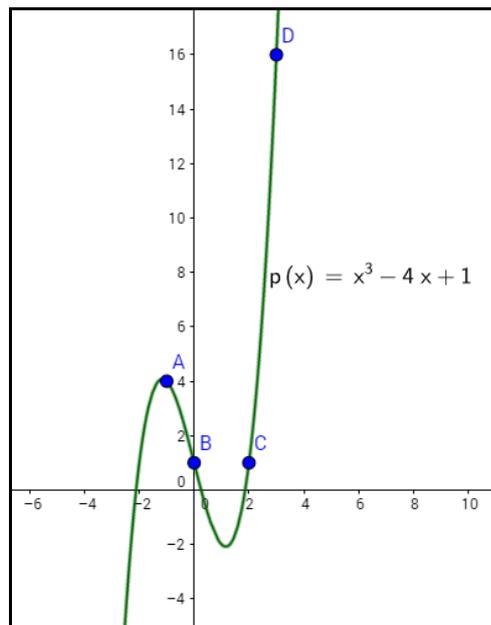
Como encontramos $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ e $L_3(x)$ e temos $y_0 = 4$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ e $y_3 = 16$, substituímos em (8), logo:

$$p(x) = 4 \cdot \left(\frac{-x^3 - 5x^2 + 6x}{12} \right) + 1 \cdot \left(\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{6} \right) + 1 \cdot \left(\frac{-x^3 + 2x^2 + 3x}{6} \right) + 16 \cdot \left(\frac{x^3 - x^2 - 2x}{12} \right)$$

Portanto, $p(x) = x^3 - 4x + 1$.

Por fim, sua forma geométrica:

Figura 10: Gráfico do polinômio interpolador $p(x) = x^3 - 4x + 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 5: (Cunha, 1993, p.100).

Encontrar o polinômio de grau 2 que interpola $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nos pontos $x_0 = 2$, $x_1 = 2,5$ e $x_2 = 4$.

Solução:

Inicialmente vamos encontrar as imagens dos nós x_0 , x_1 e x_2 :

$$f(x_0) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25, \quad f(x_1) = \frac{1}{(2,5)^2} = \frac{1}{6,25} = 0,16 \quad e \quad f(x_2) = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

Substituindo em (10), temos:

$$L_0(x) = \frac{(x-2,5)(x-4)}{(2-2,5)(2-4)} = x^2 - 6,5x + 10, \quad L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2,5-2)(2,5-4)} = \frac{-4x^2 + 24x - 32}{3} \quad e$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2,5)}{(4-2)(4-2,5)} = \frac{x^2 - 4,5x + 5}{3}$$

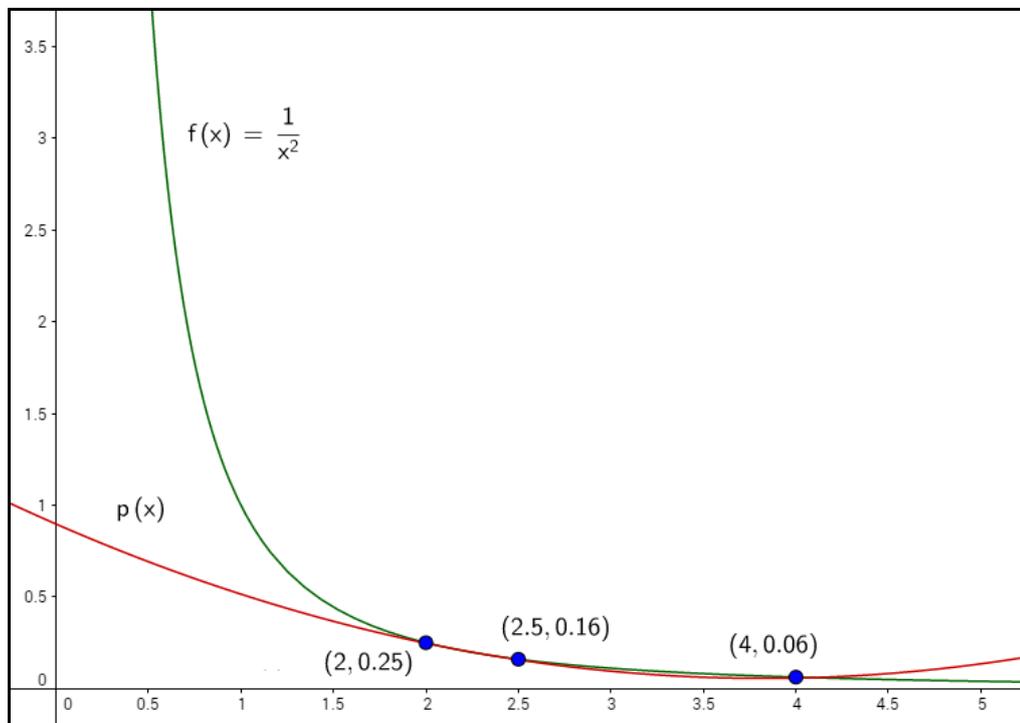
Utilizando (8), encontraremos o polinômio interpolador $p(x)$:

$$p(x) = (0,25) \cdot (x^2 - 6,5x + 10) + (0,16) \cdot \left(\frac{x^2 - 4,5x + 5}{3} \right) + (0,0625) \cdot \left(\frac{x^2 - 4,5x + 5}{3} \right)$$

$$\text{Logo, } p(x) = 0,0575x^2 - 0,4388x + 0,8975.$$

Por fim, analisamos geometricamente que as funções $f(x)$ e $p(x)$ coincidem nos nós de interpolação e são muito próximas no intervalo trabalhado $[2,4]$. Fora do intervalo elas divergem.

Figura 11: Gráfico das funções $f(x)$ e $p(x)$ e os nós da interpolação.



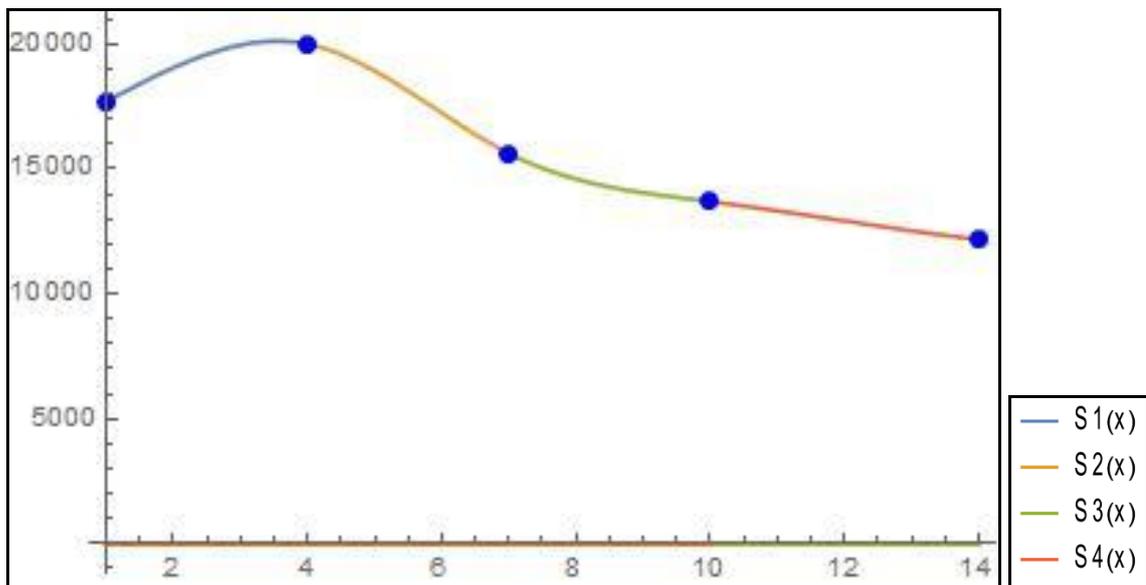
Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2 INTERPOLAÇÃO POR PARTES

A interpolação global provoca uma maior variação da curvatura da função, aumentando o erro de aproximação. O uso de polinômios de grau elevado provoca picos e para contornar essas oscilações, surgiu a “Interpolação por Partes”, na qual fazemos do domínio uma partição e para cada subintervalo construímos uma função particular. Um dos métodos mais utilizados pela interpolação por partes são os Splines. Grande parte é construído utilizando funções polinomiais.

Vamos então desenvolver a teoria para construção do Spline Cúbico, em particular o chamado Spline Natural. Observando a Figura 12, percebemos os subintervalos do domínio na interpolação por partes, na qual $S1(x)$, $S2(x)$, $S3(x)$ e $S4(x)$ são funções polinomiais de terceiro grau. Vejamos Figura 12:

Figura 12: Gráfico exemplificando a Interpolação por Partes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.1 Função Spline

Em termos gerais, uma função Spline é uma função polinomial por partes que é contínua e tem derivadas contínuas até certa ordem. Também deverá satisfazer algumas condições adequadas ao problema que se quer resolver: passar por um conjunto de pontos do

gráfico de $f(x)$ (spline interpolador), aproximar-se de um conjunto de pontos experimentais (spline de melhor ajuste), cumprir certos requisitos estéticos e também quanto há alguns valores de pontos de controle (problema de desenho gráfico).

Suponha-se um conjunto de $n+1$ números ordenados em forma crescente $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e que se utilizem polinômios de grau k , então o spline $s(x)$ é uma função da forma:

$$s(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{se } x_0 \leq x \leq x_1 \\ p_2(x) & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ p_n(x) & \text{se } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

onde $p_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$) representa um polinômio de grau k . Como um polinômio de grau k tem $k+1$ coeficientes, o spline em seu conjunto tem $n(k+1)$ coeficientes. O fato que $s(x)$ deve ser contínua em todos os nós interiores $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ já representa $(n-1)$ condições. Para que o spline possua várias derivadas contínuas é necessário tomar um grau k , de maneira que a quantidade de parâmetros permita satisfazer todas as condições exigidas.

2.2.2 Interpolação por Spline Cúbico

Considera-se que para cada um dos $n+1$ nós ordenados em forma crescente $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ se conhece o valor de uma função $f(x)$. Seja $y_i = f(x_i)$ onde $i=0,1,2,\dots,n$ e se necessita que o spline satisfaça as condições de interpolação global:

$$s(x_i) = y_i \text{ e } i = 0,1,2,\dots,n \quad (11)$$

Como se trata de um spline cúbico, sua expressão analítica será:

$$s(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{se } x_0 \leq x \leq x_1 \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_nx^3 + b_nx^2 + c_nx + d_n & \text{se } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (12)$$

Aqui se está supondo que os nós da interpolação coincidem com os pontos que limitam os subintervalos do spline: em um enfoque mais geral, isto não teria que ser assim. No entanto, este é o caso mais simples e mais frequente e se limitará a esta análise.

Como cada um dos n polinômios de terceiro grau que formam o spline têm quatro coeficientes, o spline tem $4n$ coeficientes os quais permitem satisfazer, conforme Álvarez et al. (2007, p.258), as seguintes condições:

$$\begin{array}{lll}
 \textit{Condição de interpolação:} & s(x_i) = y_i & i = 0,1,2,\dots,n+1 \\
 \textit{Condição de continuidade:} & s(x) \text{ é contínua em } x_i & i = 1,2,\dots,n-1 \\
 \textit{Condição de suavidade:} & s'(x) \text{ é contínua em } x_i & i = 1,2,\dots,n-1 \\
 & s''(x) \text{ é contínua em } x_i & i = 1,2,\dots,n-1
 \end{array}$$

Para encontrar as fórmulas que determinam $s(x)$ seguiremos o procedimento de ir impondo sucessivamente as condições de interpolação, continuidade e suavidade, ainda que não nessa ordem. No entanto, conseguimos formar $4n-2$ equações e temos $4n$ incógnitas, este elemento impõe a necessidade de se definir duas condições e os valores predefinidos, o que permite a construção de diferentes spline cúbicos em dependência das condições colocadas. Utilizaremos a seguinte notação:

$$\begin{array}{ll}
 M_i = s''(x_i) & i = 0,1,2,\dots,n \\
 h_i = x_{i+1} - x_i & i = 1,2,\dots,n-1
 \end{array}$$

sendo, M_0, M_1, \dots, M_n o valor da segunda derivada do spline nos nós de interpolação e h_0, h_1, \dots, h_{n-1} , as distâncias dos intervalos em que estão definidos os n polinômios do spline.

A dedução que segue, enquadra-se na parcela número i , donde $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ e $i = 1,2,\dots,n-1$. Como neste intervalo $s(x)$ é cúbica, sua segunda derivada é uma função linear que toma valores (Álvarez et al., 2007, p.259):

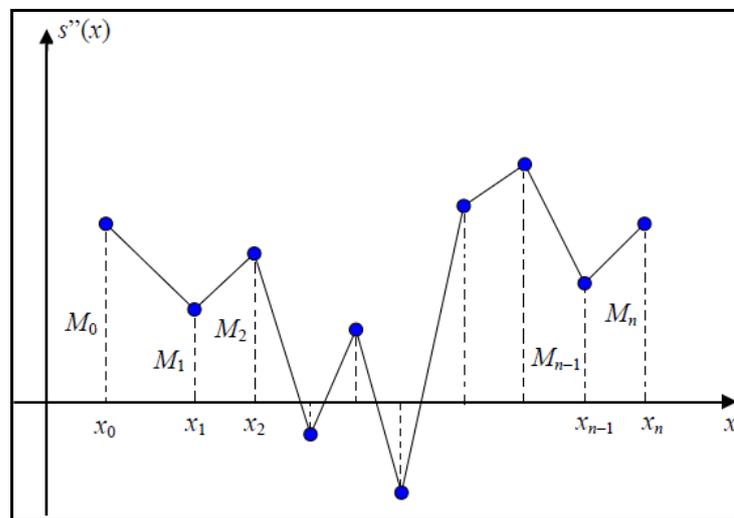
$$s''(x_i) = M_i \text{ e } s''(x_{i+1}) = M_{i+1} \quad (13)$$

Donde:

$$s''(x_i) = \frac{(x_{i+1} - x)M_i + (x - x_i)M_{i+1}}{h_i} \quad (14)$$

Observamos que esta é uma função linear e que satisfaz as condições (13). Nota-se também que, como em cada intervalo acontece algo parecido, a função no intervalo $[x_0, x_n]$ é uma poligonal contínua, como mostra a Figura 13. Isto significa que já foi satisfeita a condição de continuidade da segunda derivada do spline.

Figura 13: Gráfico da função $s''(x)$ nos intervalos $[x_0, x_n]$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se integrarmos sucessivamente cada membro da equação (14), podemos obter, salvo uma constante arbitrária K_1 a função $s'(x_i)$ no intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$:

$$s'(x) = \frac{1}{h_i} \int [(x_{i+1} - x)M_i + (x - x_i)M_{i+1}] dx$$

$$s'(x) = -\frac{1}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 M_i + \frac{1}{2h_i}(x - x_i)^2 M_{i+1} + K_1$$

Integrando novamente se obtém, sempre no intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$:

$$s(x) = -\frac{1}{2h_i} \int (x_{i+1} - x)^2 M_i dx + \frac{1}{2h_i} \int (x - x_i)^2 M_{i+1} dx + \int K_1 dx$$

$$s(x) = -\frac{1}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 M_i + \frac{1}{6h_i}(x - x_i)^3 M_{i+1} + K_1 x + K_2 \quad (15)$$

Se na equação (15) se impõe as condições $s(x_i) = y_i$ e $s(x_{i+1}) = y_{i+1}$, serão satisfeitas as condições de interpolação e de continuidade de $s(x)$. Desta forma se acham as constantes K_1 e K_2 . Em efeito:

$$s(x) = -\frac{1}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 M_i + \frac{1}{6h_i}(x - x_i)^3 M_{i+1} + K_1 x + K_2$$

$$\text{Onde:} \quad y_i = \frac{1}{6}h_i^2 M_i + K_1 x_i + K_2 \quad (16)$$

$$s(x_{i+1}) = \frac{1}{6h_i}(x_{i+1} - x_{i+1})^3 M_i + \frac{1}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 M_{i+1} + K_1 x_{i+1} + K_2$$

$$\text{Onde:} \quad y_{i+1} = \frac{1}{6}h_i^2 M_{i+1} + K_1 x_{i+1} + K_2 \quad (17)$$

As equações (16) e (17) formam um sistema linear em K_1 e K_2 que se resolve facilmente. Obtemos (Álvarez *et al.*, 2007, p.260):

$$K_1 = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i(M_{i+1} - M_i)}{6}$$

$$K_2 = \frac{y_i x_{i+1} - y_{i+1} x_i}{h_i} - \frac{h_i(M_{i+1} x_{i+1} - M_i x_i)}{6}$$

Substituindo estes valores de K_1 e K_2 na expressão (15), se chega a:

$$s(x_{i+1}) = \frac{(x_{i+1} - x)^3 M_i + (x - x_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(x_{i+1} - x)y_i + (x - x_i)y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i[(x_{i+1} - x)M_i + (x - x_i)M_{i+1}]}{6} \quad \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1}. \quad (18)$$

Para efeito de avaliação de $s(x)$ é preferível, para diminuir o número de operações, definir as variáveis u e v como: $u = x - x_i$ e $v = x_{i+1} - x$, então:

$$s(x_{i+1}) = \frac{v^3 M_i + u^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{v y_i + u y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i[v M_i + u M_{i+1}]}{6} \quad (19)$$

Para satisfazer as condições de continuidade de $s'(x)$ se requer que, em cada um dos nós $x_i (i=1,2,\dots,n-1)$, a derivada lateral pela esquerda e pela direita coincidam. Como a fórmula (18) da equação de $s(x)$ no intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, derivando esta função e avaliando em x_i se obtém a derivada lateral em x_i pela direita, isto é:

$$s'(x_i^+) = \frac{-(x_{i+1} - x)^2 M_i + (x - x_i)^2 M_{i+1}}{2h_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i[M_{i+1} - M_i]}{6}, \text{ para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (20)$$

$$s'(x_i^+) = \frac{-(x_{i+1} - x)^2 M_i}{2h_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i [M_{i+1} - M_i]}{6}$$

$$\text{e como } h_i = x_{i+1} - x_i: s'(x_i^+) = \frac{-h_i M_i}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i [M_{i+1} - M_i]}{6} \quad (21)$$

Se na equação (20) troca-se i por $i-1$ se obtém a expressão de $s'(x)$ no intervalo $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. Assim:

$$s'(x_i^+) = \frac{-(x_i - x)^2 M_{i-1} + (x - x_{i-1})^2 M_i}{2h_{i-1}} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_i (M_{i+1} - M_{i-1})}{6} \quad \text{para } x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

Ao avaliar esta função em x_i se obtém a derivada em x_i pela esquerda, ou seja:

$$s'(x_i^-) = \frac{(x_i - x_{i-1})^2 M_i}{2h_{i-1}} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1} (M_i - M_{i-1})}{6} \text{ e como } h_{i-1} = x_i - x_{i-1}:$$

$$s'(x_i^-) = \frac{h_{i-1} M_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1} (M_i - M_{i-1})}{6} \quad (22)$$

Igualando (21) e (22) obtemos uma importante relação entre M_{i-1} , M_i e M_{i+1} :

$$\frac{-h_i M_i}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i (M_{i+1} - M_i)}{6} = \frac{h_{i-1} M_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1} (M_i - M_{i-1})}{6}$$

Agrupando termos e transpondo:

$$\frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1} - h_i}{3} M_i - \frac{h_i}{6} M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (23)$$

A expressão (23) constitui um sistema linear tridiagonal com a diagonal principal que contém $(n-1)$ equações e $(n+1)$ incógnitas: M_0, M_1, \dots, M_n . Agregando as duas condições que ainda faltam, se converte em um sistema linear de $n+1$ equações que se pode resolver muito eficientemente. Uma vez resolvido este sistema, as equações (18), ou melhor, em sua forma (19), permitem avaliar o spline $s(x)$ para qualquer x do intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$ (Álvarez *et al.*, 2007).

2.2.3 Spline Natural

Observamos que essas duas condições adicionais estão relacionadas com as derivadas de segunda ordem nos extremos do intervalo. O spline natural é definido quando as derivadas de segunda ordem nos extremos se anulam:

$$s''(x) = M_0 = 0 \text{ e } s''(x_n) = M_n = 0 \quad (24)$$

Quando tomamos essas condições adicionais, podemos demonstrar que o spline resultante é a função que, passando pelos $n + 1$ pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, minimiza a

integral:
$$\int_{x_0}^{x_n} [g''(x)]^2 dx \quad (25)$$

Como $g''(x)$ está relacionada com a curvatura do gráfico de $g(x)$, significa, geometricamente, que a spline natural minimiza a curvatura global da função interpoladora. Do ponto de vista físico, como a energia potencial de uma barra fina, flexível e elástica, depende da curvatura em cada ponto, resulta que, se uma barra com tais propriedades é obrigada a passar pelos $n + 1$ pontos do plano $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, ela toma a forma que minimiza sua energia potencial elástica, que é, precisamente, a do spline cúbico natural que interpola tais pontos. Deste fato físico provém a palavra “spline” que originalmente se usava para designar uma espécie de curvígrafo utilizado na figura, formado por uma barra que se fez passar por vários pontos de um plano.

Tendo em conta as condições adicionais (24), o sistema de equações (23) toma para o spline natural, a forma (Álvarez *et al.*, 2007):

$$\begin{aligned} \frac{h_0 + h_1}{3} M_1 + \frac{h_1}{6} M_2 &= \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{h_1}{6} M_1 + \frac{h_1 + h_2}{3} M_2 + \frac{h_2}{6} M_3 &= \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{h_2}{6} M_2 + \frac{h_2 + h_3}{3} M_3 + \frac{h_3}{6} M_4 &= \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ &\vdots \\ \frac{h_{n-2}}{6} M_{n-2} + \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} M_{n-1} &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{aligned}$$

Que escrevendo em sua forma matricial, temos que:

$$\boxed{H \cdot M = Y}$$

2.2.4 Programação de Spline Cúbico Natural

Programação no Mathematica (versão Free) para calcular e construir os gráficos do Spline Cúbico Natural. (Elaborado pelo autor)

```

Splinecubico[m_List]:=Module[{h,n,mtD,mY,MR},n=Length[m];h=Table[m[[i+1]][
[1]]-m[[i]][[1]],{i,1,n-1}];
(*formando o sistema de equações*)
(*formando a matriz h*)
mtD=Table[
If[col==row || Abs[row-col]==1,
If[row==col,
(h[[row]]+h[[row+1]])/3,
h[[Max[{row,col}]]]/6
],0],{row,1,n-2,1},{col,1,n-2,1}];
(*formando a matrix coluna Y*)
mY=Table[
(m[[row+2]][[2]]-m[[row+1]][[2]])/h[[row+1]] - (m[[row+1]][[2]]-
m[[row]][[2]])/h[[row]]
,{row,1,n-2,1}];
(*resolvendo o sistema tridiagonal HM=Y*)
MR=LinearSolve[mtD,mY]/N;
MR=Insert[MR,0,1];MR=Insert[MR,0,-1];
(*formando a função spline *)
S=Function[x,Piecewise[Table[{{(m[[i+1]][[1]]-x)^3 MR[[i]] + (x-m[[i]][[1]])^3
MR[[i+1]]/(6 h[[i]]) +((m[[i+1]][[1]]-x) m[[i]][[2]] + (x-m[[i]][[1]])m[[i+1]][[2]])/h[[i]] -
(h[[i]] ((m[[i+1]][[1]]-x) MR[[i]] + (x-m[[i]][[1]])
MR[[i+1]]))/6,x>=m[[i]][[1]]&& x<=m[[i+1]][[1]]},{i,1,n-1}]]];
(*graficando o spline*)
g1=Plot[S[x],{x,m[[1]][[1]],m[[n]][[1]]}];g2=ListPlot[m,PlotStyle-
>{Red,PointSize[Large]};Show[g1,g2];

```

2.3 AJUSTE DE CURVAS

O **Ajuste de Curvas** é um método que consiste em encontrar uma curva que se ajusta a uma série de pontos e que possivelmente cumpra uma série de condições. Por meio de dados conhecidos, usa-se o ajuste de curvas para fazer extrapolações, ajustando-se a curva que mais se aproxima aos dados disponíveis. Conhecida a equação desta curva, pode-se determinar valores fora do intervalo conhecido.

Segundo Bassanezi (2015, p.85):

Uma regressão ou ajuste de curvas é sempre um recurso formal para expressar alguma tendência ou relação entre a variável dependente x_n e a independente n , ou seja, é um mecanismo que fornece uma relação funcional $x_n = f(n)$ quando se tem alguma relação estatística.

Fazer um ajuste de curvas significa simplesmente determinar os coeficientes de uma função, dada genericamente *a priori*, de modo que, no intervalo de valores considerado, esta função e os dados estatísticos sejam “próximos”. Dependendo do que entendemos por proximidade entre função ajustada e dados experimentais, teremos diferentes soluções para $f(n)$. De qualquer forma, só podemos garantir a proximidade entre a curva de regressão e os pontos dados no intervalo limitado onde tais pontos foram tomados. Fazer previsões de valores futuros é o objetivo principal de uma modelagem, e um ajuste dos valores conhecidos nem sempre pode servir para tal. Entretanto, como modelos parciais os ajustes são fundamentais no processo de modelagem global.

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) é um dos métodos mais usados para a aproximação dos parâmetros de uma função. A seguir analisaremos este método.

2.3.1 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Construiremos o MMQ partindo da interpolação, para entender melhor a suas diferenças.

Da fórmula (1) podemos dizer que procuramos os coeficientes do polinômio interpolador exigindo que todos os resíduos (diferença entre valor real e o valor estimado) sejam simultaneamente iguais à zero. Em formato vetorial significa:

$$R = \hat{Y} - Y, \text{ onde:}$$

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} a_1\varphi_1(x_1) + \dots + a_k\varphi_k(x_1) \\ a_1\varphi_1(x_2) + \dots + a_k\varphi_k(x_2) \\ \vdots \\ a_1\varphi_1(x_n) + \dots + a_k\varphi_k(x_n) \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ e } 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

O MMQ consiste em encontrar a função de aproximação partindo de uma base de funções. Se tomarmos a mesma base de polinômios da interpolação anterior, teríamos:

$$B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}.$$

Procuraríamos então a função de aproximação como uma combinação linear das funções da base B e a função aproximação teria o mesmo formato da interpolação:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

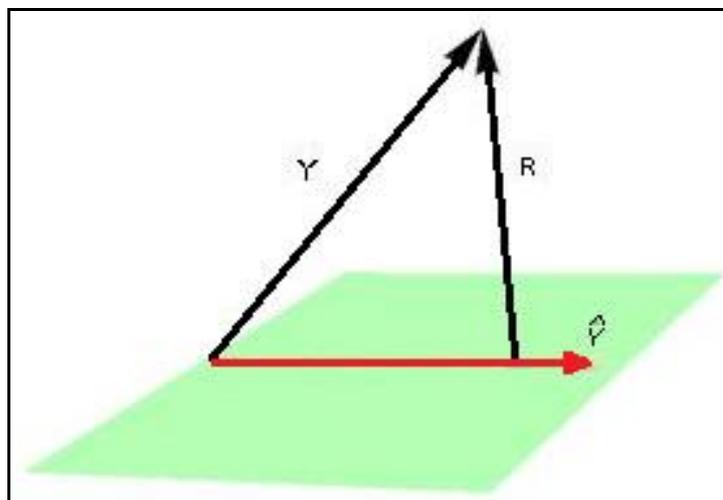
Então, qual é a diferença no MMQ?

Supondo que temos uma base de funções para gerar a função de aproximação $Base = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$, procuramos os coeficientes da combinação linear $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_k\varphi_k(x)$ exigindo que os produtos escalares do resíduo R com cada vetor função da base $\varphi_i(X)$ sejam iguais à zero simultaneamente. Expressando-o em forma vetorial, temos:

$$\langle \varphi_i(X), R \rangle = 0, \text{ onde } i = 1, 2, \dots, k, \text{ sendo:}$$

k – número de funções da base;

Figura 14: Gráfico do vetor residual (R).



Fonte: Elaborado pelo autor.

O vetor Y (curva real) é projetado no espaço de funções da base como combinação linear delas obtendo a curva de aproximação $\hat{Y} = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_k\varphi_k(x)$, com erro ou resíduo (R) perpendicular a todas as funções da base simultaneamente.

$$\varphi_i(X) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) \\ \varphi_1(x_2) \\ \vdots \\ \varphi_1(x_n) \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Os vetores são ditos ortogonais quando o produto escalar deles é igual à zero.

Vamos ver no exemplo:

Ajuste Linear utilizando como base $\{1, x\}$ essas funções geram retas cuja equação é $y = a_0 + a_1x$.

Os dados observados são apresentados na Tabela 1:

Tabela 1: Tabela dos n valores x e y .

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
\vdots	\vdots
x_n	y_n

Então, vamos ter um vetor com dois produtos escalares, isto é:

$$(1 \quad 1 \quad \dots \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} a_0 + a_1x_1 - y_1 \\ a_0 + a_1x_2 - y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n - y_n \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_0 + a_1x_1 - y_1 \\ a_0 + a_1x_2 - y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n - y_n \end{pmatrix} = 0$$

Resolvendo o produto escalar e agrupando os termos com a_0 , a_1 e os termos livres, formamos o sistema. A primeira equação tem um significado que a soma de todos os resíduos é igual à zero. Fica, então, o sistema para n dados de x e y , onde:

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=1}^n 1 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \end{cases}$$

Que é um sistema linear de equações de fácil solução. Observe que a dimensão do sistema não coincidirá necessariamente com o número de dados, ele depende da diferença da interpolação do número de funções da base e sempre será igual ao número de parâmetros a determinar.

Vamos ter infinitas funções que satisfazem para os mesmos dados o MMQ. Como então, escolher entre elas, a melhor? Ou, pelo menos escolher uma boa? A Estatística nos permite aplicar outros critérios, do ponto da Álgebra Vetorial. A norma de um vetor $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ é o modulo do vetor, e calcula-se para um vetor de n coordenadas como:

$$|V| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Vetores residuais $E = (Y'_i - Y_i)$, $EM = (Y_i - Y_m)$ com $i=1, \dots, n$ e $Y_m = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$.

Onde:

Y'_i – são os valores estimados pela função de ajuste;

Y_i – são os valores observados;

Y_m – é a média aritmética dos valores reais observados.

Utilizaremos como critério $\frac{\|EM\|^2 - \|E\|^2}{\|EM\|^2}$ que é chamado de R^2 e podemos escrever

também como:

$$R^2 = 1 - \frac{\|E\|^2}{\|EM\|^2}$$

Podemos interpretar que a dispersão absoluta da função interpoladora com relação à dispersão dos dados reais é pequena e quanto menor o desvio (mais próximo de zero), mais

perto de 1 estará R^2 , o que representar melhor será o ajuste.

Outro critério para decidir o ajuste do MMQ, pressupõe-se que os resíduos seguem uma distribuição normal e todas as funções que formam a base também devem seguir essa distribuição com algum desvio que pode ser medido pelo critério do P-valor, e dá para saber quão significativo é o desvio e trocar funções da base quando o P-valor for significativo.

Este elemento exige profundos conhecimentos estatísticos que saem de nosso objetivo principal e o utilizaremos como ferramenta computacional para melhorar nossa análise.

3 APLICAÇÕES

3.1 Crescimento Populacional de Terra Nova do Norte – MT

3.1.1 Breve histórico do município

A formação histórica do nome de Terra Nova do Norte vem da migração de sem-terras da região gaúcha de Nonoai, Planalto, Miraguaí e Guarita. Expulsos das terras indígenas Kaingang, os posseiros foram atendidos pelo Estado do Rio Grande do Sul, juntamente com o Governo Federal, em 1978. A solução encontrada foi levar os desabrigados para a região do futuro município. O trabalho de abertura prévia da região, preparação da infraestrutura e transporte nos primeiros dias foi confiado a Cooperativa Agrária de Canarana, com sede em Canarana. Foram destinados 435 mil hectares de terras para os assentamentos. A Cooperativa abriu 1.062 lotes em nove agrovilas. O pastor luterano Norberto Schwantes efetuou um eficiente serviço de orientação aos colonos, dispondo de equipe técnica em agropecuária. O município de Terra Nova do Norte foi criado em 13 de maio de 1986, por meio da Lei Estadual nº 4.995, com território desmembrado do município de Colíder.

3.1.2 Aplicação 1

Aplicação de Interpolação e Ajuste de Curvas no crescimento populacional do município de Terra Nova do Norte–MT.

Tabela 02: População terranovense nas últimas três décadas.

Ano	População
1991	17712
1992	17892
1993	18950
1994	19998
1997	15622
1999	15404
2000	13694
2004	12181
2005	11846

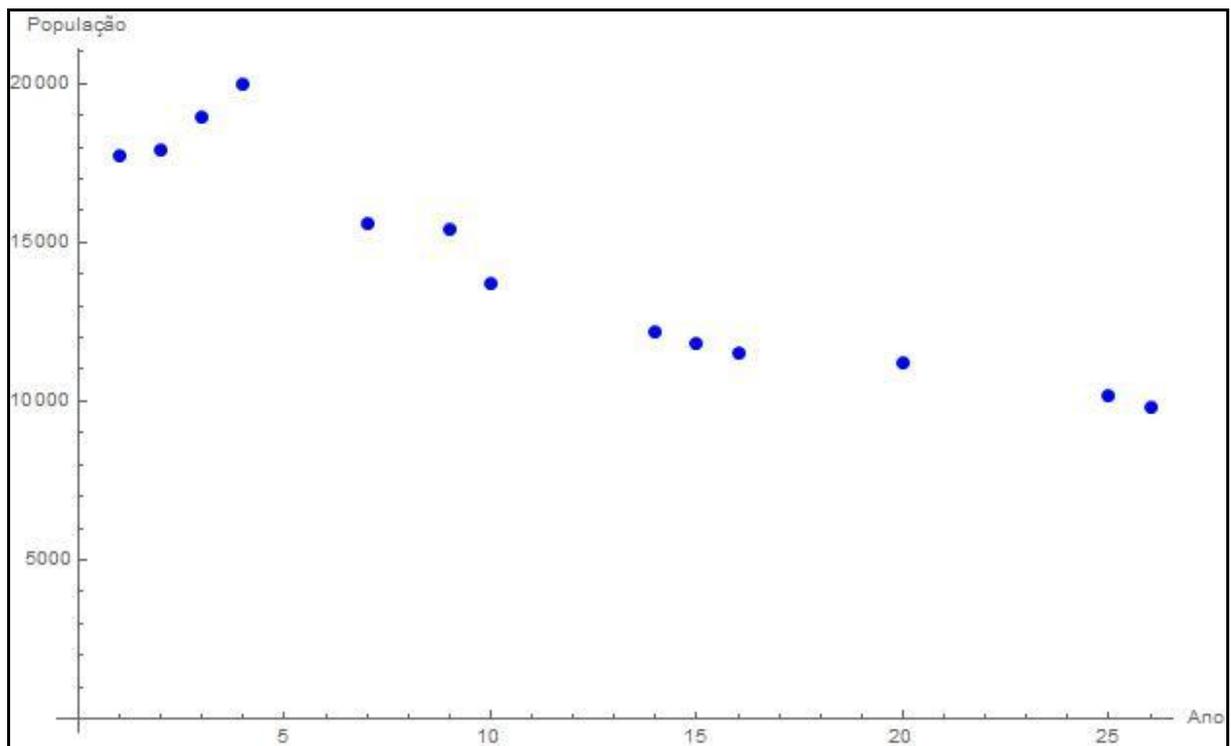
2006	11514
2010	11191
2015	10167
2016	9816

Fonte: IBGE

Da análise da Tabela 2, depreende-se que evidentemente a população está diminuindo, tendo crescido até o ano 1994, quando foi seu máximo e, a partir daí, começando a decrescer.

Vamos construir uma função de Interpolação por Spline Natural utilizando uma parte dos dados, deixando o resto para verificar o erro de aproximação cometido.

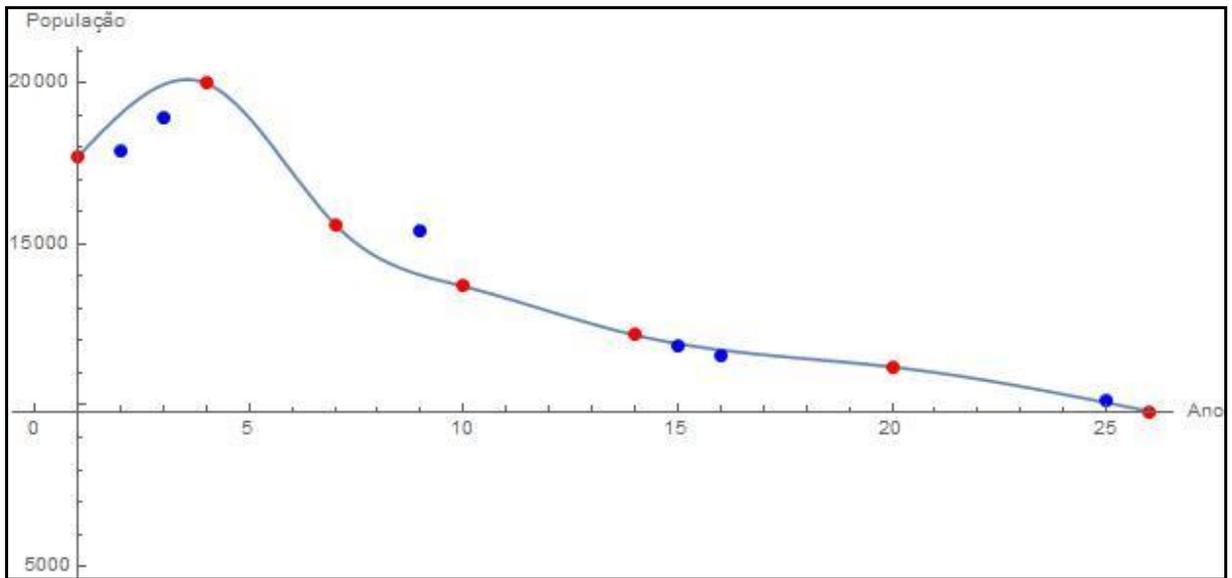
Figura 15: Gráfico da Tabela 02.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Obtemos uma interpolação por Spline Natural:

$$\begin{aligned}
 S(x) = & -2066.492453013925 + 1906.58603564125x - 83.62887087350278x^2 + 1.0721650111987535x^3 & 20 < x \leq 26 \\
 & 35138.168825266985 - 3674.1131561008865x + 195.40608871360408x^2 - 3.57841764858636x^3 & 14 < x \leq 20 \\
 & 6616.4974437627825 + 2437.673568507157x - 241.15010590125618x^2 + 6.815777461291264x^3 & 10 < x \leq 14 \\
 & 59221.352874346754 - 13343.783060668029x + 1336.9955570162624x^2 - 45.7890779692927x^3 & 7 < x \leq 10 \\
 & 4472.854578504888 + 10119.859066121337x - 2014.953318239361x^2 + 113.82753513811795x^3 & 4 < x \leq 7 \\
 & 16373.090758593826 + 1194.6819310546302x + 216.34096552731523x^2 - 72.11365517577174x^3 & 1 \leq x \leq 4
 \end{aligned}$$

Figura 16: Gráfico do polinômio $s(x)$ por Spline Natural.

Fonte: Elaborado pelo autor.

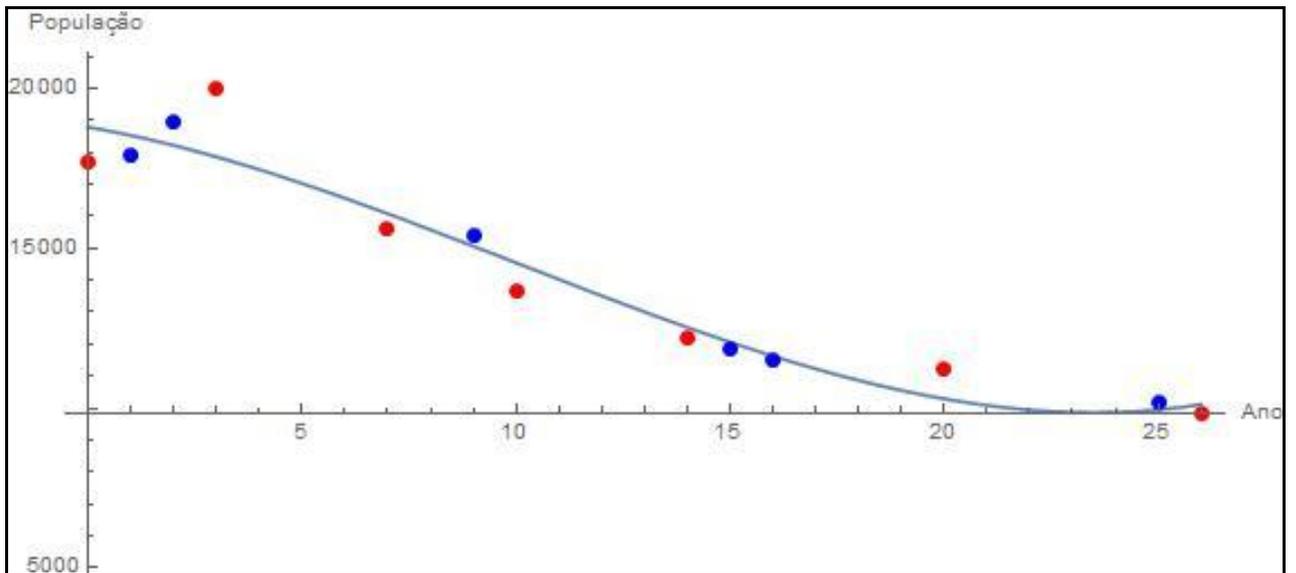
Vamos estimar o erro nos nós. Observe a Tabela 03:

Tabela 03: Tabela do Erro Relativo do polinômio $s(x)$ por Spline Natural.

Ano	População	Pop. Estimada por "Spline"	Erro Relativo (%)
1991	17712	17712	0
1992	17892	19050	6,5
1993	18950	19957	5,3
1994	19998	19998	0
1997	15622	15622	0
1999	15404	14043	8,8
2000	13694	13694	0
2004	12181	12181	0
2005	11846	11915	0,58
2006	11514	11719	1,7
2010	11191	11191	0
2015	10167	10082	0,83
2016	9816	9816	0

Aplicamos o método de Mínimo Quadrado, tomando como base também funções polinomiais de terceiro grau. Obtemos a função $f(x)$:

$$f(x) = 18993.500163876615 - 172.18078124012706x - 31.610956379962637x^2 + 0.9560266502923151x^3$$

Figura 17: Gráfico do polinômio de terceiro grau $f(x)$ pelo MMQ.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 04: Tabela do Erro Relativo do polinômio de terceiro grau $f(x)$ pelo MMQ.

Ano	População	Pop. Estimada pelo "MMQ"	Erro Relativo (%)
1991	17712	18811	6,2
1992	17892	18456	3,1
1993	18950	18060	4,7
1994	19998	17629	11
1997	15622	16179	3,5
1999	15404	15135	1,7
2000	13694	14606	6,7
2004	12181	12565	3,1
2005	11846	12101	2,1
2006	11514	11666	1,3
2010	11191	10324	7,7
2015	10167	9945	2,1
2016	9816	10095	2,8

Existem infinitas funções para ajustar os dados pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), para decidir uma boa aproximação, teremos que nos apoiar em outros critérios. Por exemplo, coeficiente de determinação R^2 :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (PE_i - PR_i)^2}{\sum_{i=1}^n (PR_i - PM_i)^2}$$

Onde:

PE_i são os valores da população estimadas pelo função de ajuste;

PR_i são os valores reais de população; e

PM_i é a média da população real.

Este coeficiente mede quão forte é a dependência da função ajuste, sendo a População (quantidade de habitantes) a variável dependente e a variável independente neste caso é o tempo.

Logo, $R^2 = 0,88$. Para o exemplo tal, mostrado anteriormente, temos:

Outro elemento a considerar, que é sobre o desvio que as funções polinomiais provocam na distribuição normal. Neste contexto, aplicaram-se os P-valores correspondentes à base de polinômios utilizados, para analisar o caso, observamos a Tabela 05:

Tabela 05: Tabela dos P-valores do polinômio de terceiro grau $f(x)$ gerado pelo MMQ.

Função	P – valor
X^3	0,028
X^2	0,065
X	0,72

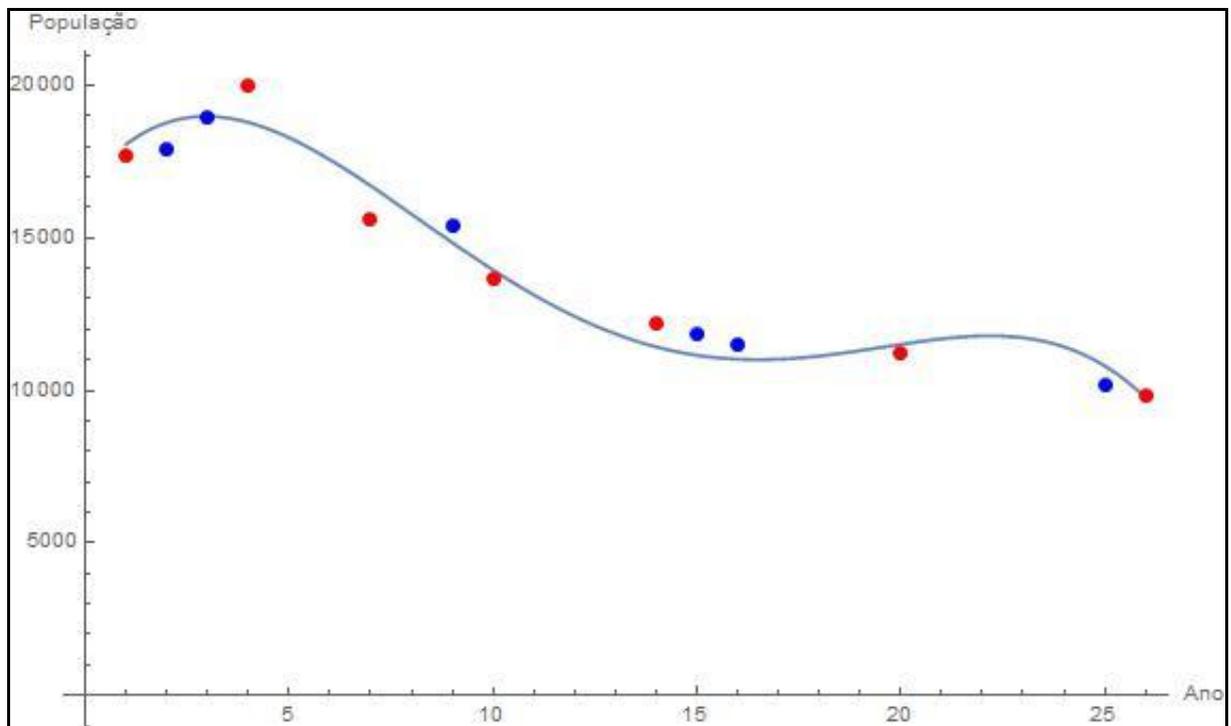
Veja que X tem certa influência sobre o desvio da distribuição normal, podemos aumentar o grau do polinômio deixando o termo linear ou retirando-o. Vamos experimentar o primeiro caso. Neste caso, o polinômio a ser considerado é o de 4º grau.

Então, obtemos:

$$f(x) = 16736.46487972478 + 1685.5095812338764x - 373.13793397624505x^2 + 21.552476803707883x^3 - 0.3881337043365603x^4$$

Tabela 06: Tabela do Erro Relativo do polinômio de quarto grau $f(x)$ pelo MMQ.

Ano	População	Pop. Estimada pelo “MMQ”	Erro Relativo (%)
1991	17712	18070	2
1992	17892	18781	4,9
1993	18950	18985	0,18
1994	19998	18788	6
1997	15622	16711	7
1999	15404	14847	3,6
2000	13694	13948	1,8
2004	12181	11428	6,2
2005	11846	11153	5,8
2006	11514	11023	4,2
2010	11191	11509	2,8
2015	10167	10805	6,3
2016	9816	9757	0,6

Figura 18: Gráfico do polinômio de quarto grau $f(x)$ pelo MMQ.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O novo ajuste gerou $R^2=0,96$, que é uma boa aproximação. Os P-valores também são considerados bons. Veja Tabela 07:

Tabela 07: Tabela dos P-valores do polinômio de quarto grau $f(x)$ pelo MMQ.

Função	P – valor
X^4	0,0408
X^3	0,06497
X^2	0,1534
X	0,3126

Vamos experimentar a segunda variante, aumentar para o grau 4 e tirar o termo linear que tem maior incidência. A função ajuste via MMQ fica:

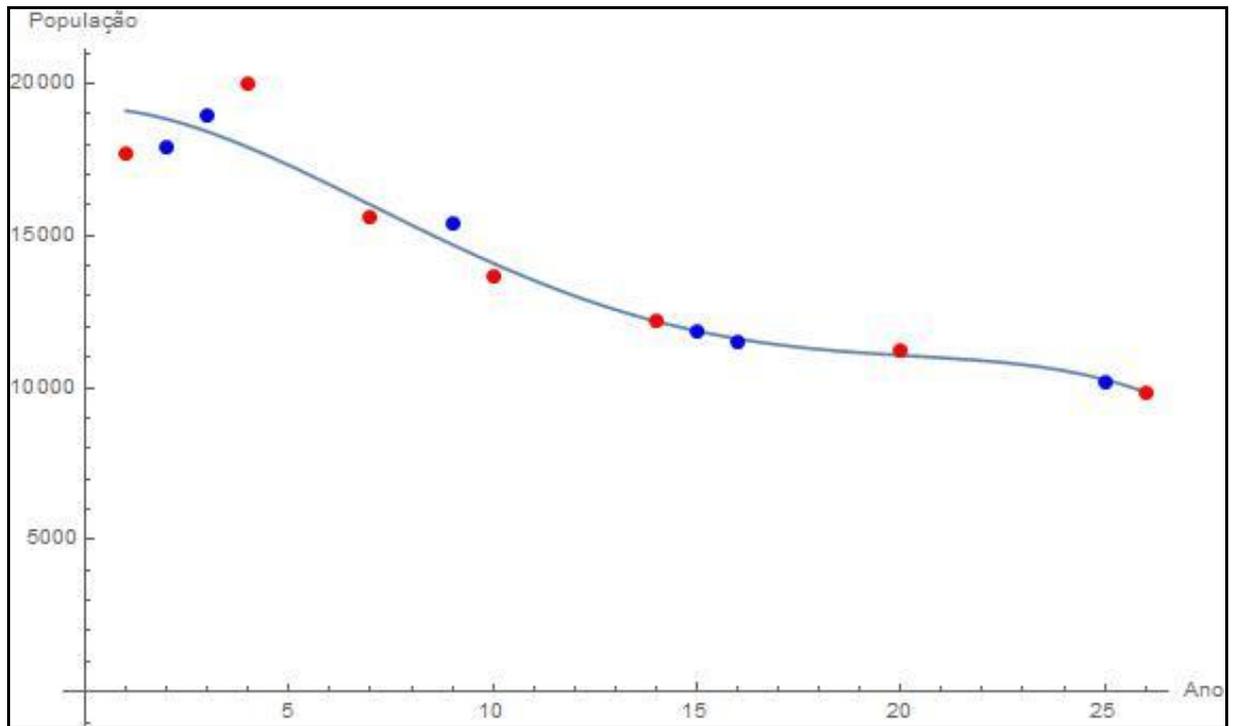
$$f(x) = 19208.17418995404 - 106.83706927997605x^2 + 6.814385348845838x^3 - 0.12452595068566961x^4$$

Então, obtemos $R^2 = 0,92$ e a Tabela 08:

Tabela 08: Tabela do Erro Relativo do polinômio de quarto grau $f(x)$ sem o termo linear.

Ano	População	Pop. Estimada pelo “MMQ”	Erro Relativo (%)
1991	17712	19108	7,9
1992	17892	18833	5,3
1993	18950	18420	2,8
1994	19998	17903	10
1997	15622	16011	2,5
1999	15404	14705	4,5
2000	13694	14093	2,9
2004	12181	12182	0,016
2005	11846	11684	0,15
2006	11514	11608	0,82
2010	11191	11064	1,1
2015	10167	10266	0,97
2016	9816	9850	0,35

Figura 19: Gráfico do polinômio de quarto grau $f(x)$ sem o termo linear.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 09: Tabela dos P-valores do polinômio de quarto grau $f(x)$ sem o termo linear.

Função	P – valor
X^4	0,023
X^3	0,045
X^2	0,139

Os resultados dos P-valores melhoraram.

3.2 Produção Leiteira de Terra Nova do Norte – MT

3.2.1 Breve histórico da Coopernova

A Cooperativa Agropecuária Mista de Terra Nova Ltda. – COOPERNOVA – foi fundada em 31/10/1987 na cidade de Terra Nova do Norte. Atualmente, atende em cinco unidades: Terra Nova do Norte, Nova Guarita, Agrovila Norberto Schwantes, União do Norte (Peixoto de Azevedo) e Garantã do Norte. Possui 1546 associados na Bovinocultura, 135 na Fruticultura, 30 na Ovinocajucultura, 20 em Cereais e 712 em outras atividades. Abrange dez municípios da região: Terra Nova do Norte, Nova Guarita, Peixoto de Azevedo, Nova Santa Helena, Colíder, Garantã do Norte, Matupá, Novo Mundo, Itaúba e Nova Canaã do Norte. Sua capacidade de industrialização do leite é de 200 mil litros/dia; de 3000 kg/hora de frutas; fabricação de rações e suplementos minerais de 10 ton/hora; recepção e armazenamento de cereais. Total aproximado de 2500 associados e 250 funcionários. (Coopernova, junho, 2016).

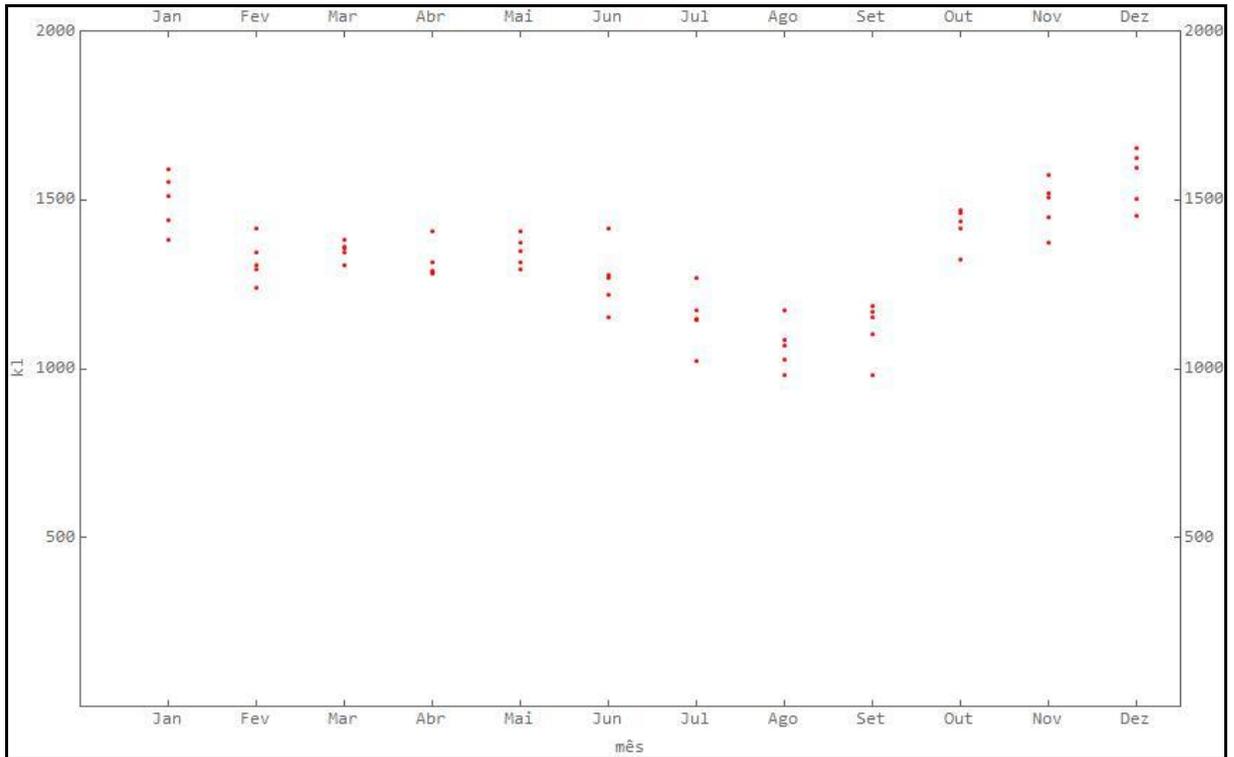
3.2.2 Aplicação 2

Estudo da produção de leite no município de Terra Nova do Norte – MT nos últimos cinco anos com os dados da COOPERNOVA, construiremos um modelo para estimar a produção média esperada, veja Tabela 10:

Tabela 10: Produção leiteira de Terra Nova do Norte (em litros).

MÊS / ANO	2012	2013	2014	2015	2016
JANEIRO	1441090	1384356	1591033	1509881	1554006
FEVEREIRO	1296204	1239579	1343972	1305749	1417583
MARÇO	1362334	1307299	1383652	1344443	1355628
ABRIL	1313673	1280336	1406980	1290341	1288065
MAIO	1375001	1348682	1408937	1314305	1293236
JUNHO	1278504	1269290	1415556	1218996	1154292
JULHO	1148346	1173222	1270894	1142395	1024516
AGOSTO	981191	1086512	1171765	1069985	1025607
SETEMBRO	980825	1168263	1186239	1153060	1102815
OUTUBRO	1325865	1468124	1460769	1438199	1417679
NOVEMBRO	1374402	1518802	1507767	1573512	1447381
DEZEMBRO	1452468	1625007	1594653	1652690	1503884

Fonte: COOPERNOVA.

Figura 20: Gráfico dos dados da Tabela 10.

Fonte: Elaborado pelo autor.

No modelo de estimação (ver p.62), do diagrama de dispersão, observamos que a função seno e o polinômio combinam com aparência gráfica da distribuição (ver Figura 20), que tem uma convexidade perto do mês de agosto por isso a potência 4. Tomamos como zero o valor de $t=8$, por ter visivelmente três mudanças de convexidade, colocando além da $(t-8)^4$, t^3 e t^5 .

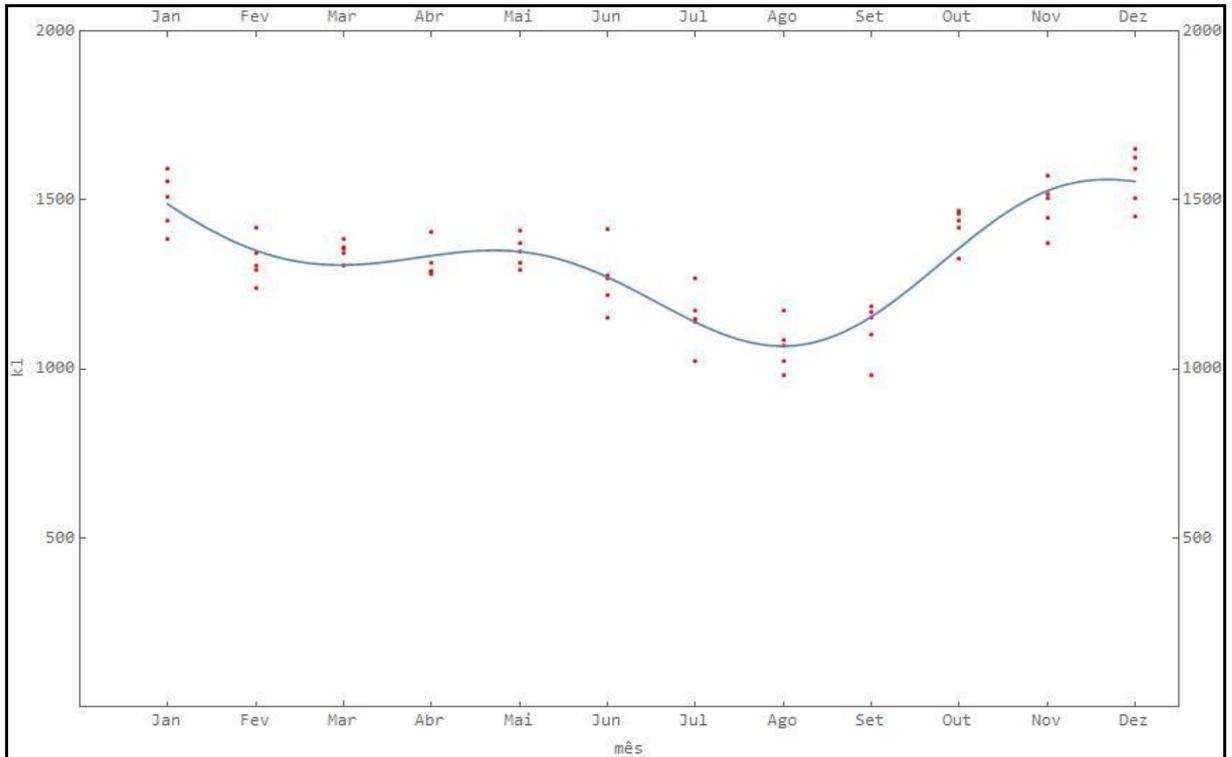
Propomos a seguinte base de funções: $\{t, t^5, t^3, (t-8)^4, t.\text{sen}(t)\}$ e aplicamos o MMQ, obtendo os resultados da Tabela 11:

Tabela 11: Tabela dos P-valores da produção leiteira de Terra Nova do Norte.

Função	P-valor
t^5	$8,9942 \cdot 10^{-11}$
$(t-8)^4$	$5,90866 \cdot 10^{-12}$
t^3	$4,45121 \cdot 10^{-6}$
t	0,00712513
$t.\text{sen}(t)$	$1,65474 \cdot 10^{-9}$

Os P-valores são baixos, que indica que o desvio da distribuição normal é bem baixo. Além disso, temos que $R^2 = 0,81$.

Figura 21: Gráfico do polinômio $L(t)$ pelo MMQ.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Modelo de estimação:

$$L(t) = 1208.6634590252693 + 0.11744077229162862(-8 + t)^4 + 14.573659038306754t - 0.36345928199620126t^3 + 0.0025866440138476257t^5 - 19.61613104153566t\text{Sin}[t]$$

Onde:

L – litros de leite (mil por unidade);

t – tempo (em meses).

3.3 Prognóstico do Crescimento populacional de Terra Nova do Norte

No que se refere à epígrafe anterior, utilizamos as técnicas para a construção das aproximações de funções, mas sem intenções de prognosticar ou extrapolar os intervalos de dados trabalhados. Nesta última aplicação mostraremos como fazer esse prognóstico utilizando-se do MMQ.

3.3.1 Aplicação 3

A partir do ano 1994, com o fechamento dos garimpos e a queda no valor do ouro, inicia-se a migração da população para outras regiões do estado e do país. Consequentemente, havendo a redução dos habitantes no município. Vejamos a Tabela 12:

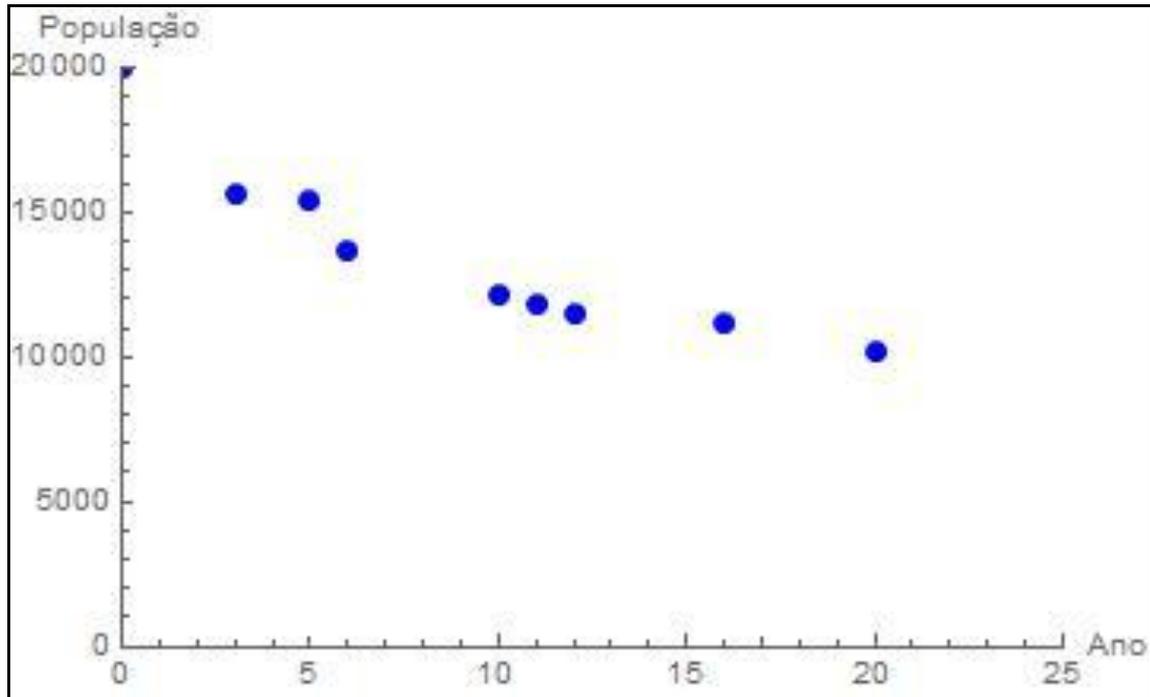
Tabela 12: População de Terra Nova do Norte de 1994 a 2015.

Ano	População
1994	19998
1997	15622
1999	15404
2000	13694
2004	12181
2005	11846
2006	11514
2010	11191
2015	10167

Este decrescimento da população, simularemos por meio da função:

$$P(t) = \frac{1}{(a + b.e^{-0,023t})} \quad (*)$$

nos quais, temos dois parâmetros a e b e $0,023$ é a taxa média anual de redução (decrescimento) da população no período abordado. Vejamos o decrescimento na Figura 22:

Figura 22: Gráfico da Tabela 12.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Não é uma função linear, mas pode ser linearizada com a mudança de variáveis,

onde:
$$\frac{1}{p} = a + b.e^{-0,023t}$$

as mudanças de variáveis são:

$$Y = \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad x = e^{-0,023t},$$

a equação muda para $Y = a + b.x$, que corresponde a uma função linear com relação aos parâmetros a e b , portanto, com a Tabela 13, temos:

Tabela 13: Valores para Y e x .

Ano	População	1/População	Exp[-0,023(Ano-1994)]
1994	19998	0,00005	1
1997	15622	0,00006401	0,933326680078202
1999	15404	0,00006492	0,8913661439068313
2000	13694	0,00007302	0,8710986917457983
2004	12181	0,0000821	0,794533602503334
2005	11846	0,00008442	0,7764678818237378
2006	11514	0,00008685	0,7588129307612413
2010	11191	0,00008936	0,6921171816887304
2015	10167	0,00009836	0,6169298233735474

Aplicando MMQ, chegamos a calcular $a = 0,000175$ e $b = -0,00012$ com $R^2=0,97$.

Multiplicando e dividendo a parte direita da função (*), podemos transformá-la convenientemente e obter uma assíntota horizontal que indica que a população ao ritmo que decresce nunca será menor que 5714 habitantes.

$$P(t) = \frac{\frac{1}{a}}{1 + \frac{b}{a} \cdot e^{-0,023t}}$$

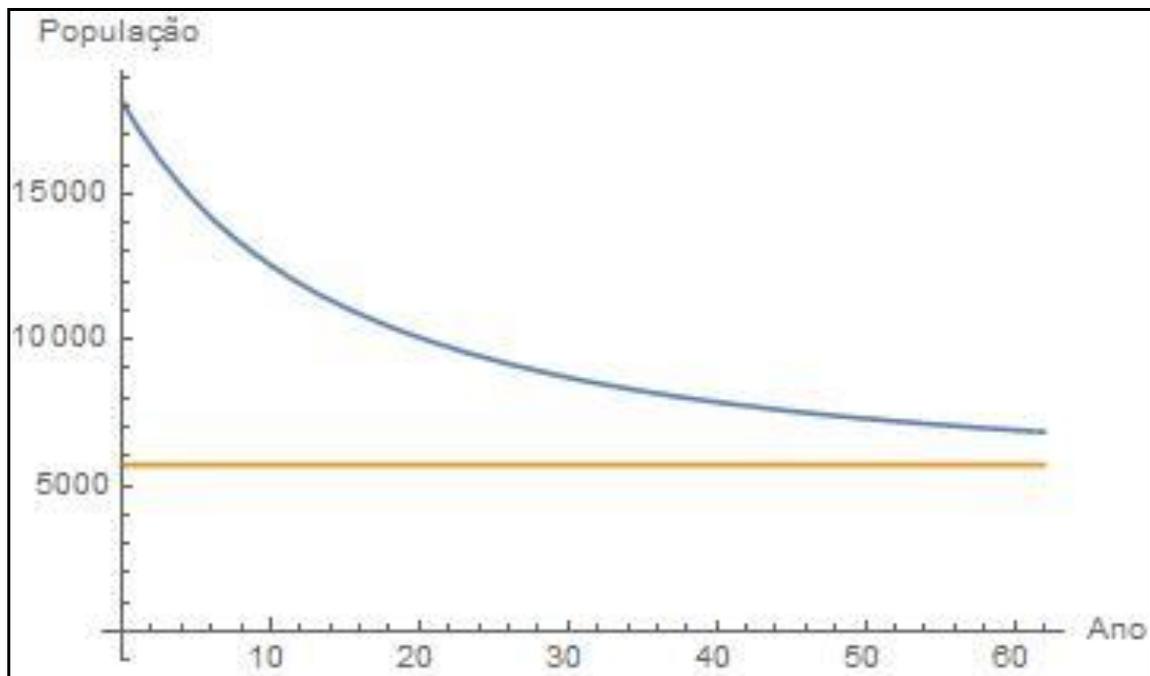
Sendo os valores para $\frac{1}{a} = 5714$ e $\frac{b}{a} = -0,6857$ temos finalmente, a função:

$$P(t) = \frac{5714}{1 - 0,687 \cdot e^{-0,023t}}, \text{ com}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 5714$$

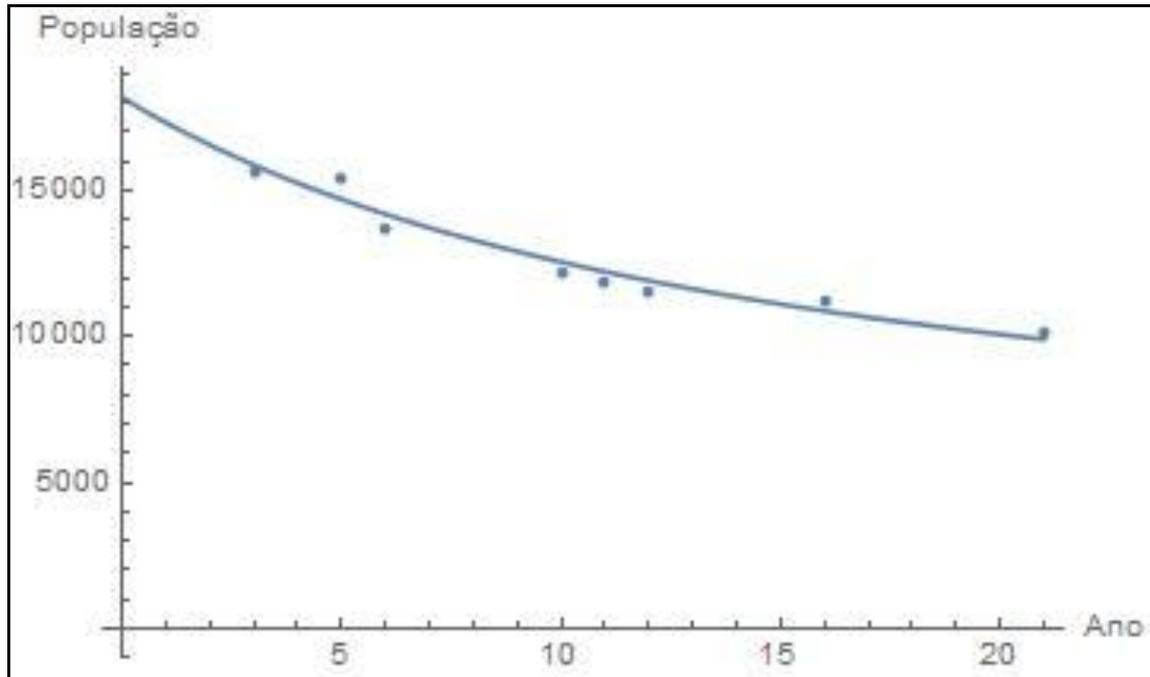
Ficando o gráfico do ajuste e da assíntota horizontal, conforme Figura 23:

Figura 23: Gráfico do ajuste e da assíntota horizontal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

E o gráfico da função $P(t)$, conforme Figura 24:

Figura 24: Gráfico da função $P(t)$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A estimação do ano 2016 foi $p(22) = 9741$ e o valor real $p = 9816$ estimado com um erro relativo de 0,75%.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Modelagem Matemática, conforme vimos, configura-se como uma “ferramenta” no ensino-aprendizagem da disciplina de Matemática, permitindo a alteração nos rumos do ensino e da metodologia utilizada em sala de aula pelos professores.

Ademais, que a Modelagem não está restrita a problemas matemáticos, pois é possível sua utilização em diversas áreas, o que certamente favorece a interdisciplinaridade com as demais áreas do conhecimento, razão pela qual pode ser considerada uma forma mais interessante de expor os conteúdos.

Nesse contexto, o uso da Modelagem Matemática pode ter como benefícios a motivação do professor e a facilitação da aprendizagem, visto que é capaz de transformar problemas do cotidiano em problemas matemáticos, na tentativa de provocar uma maior fixação do conteúdo estudado e estimular o interesse na disciplina.

No que concerne aos aspectos da modelagem, verificamos, em síntese, que o início de uma modelagem se faz com a *escolha de temas*, após, realizasse a *coleta de dados* e, finalmente, passasse à *matematização* dos dados por meio da *formulação de modelos*.

Além disso, no capítulo de Modelagem Matemática adicionamos um esquema resumo dos tipos de erro que são cometidos durante o processo de Modelagem Matemática, alertando para os cuidados na construção e solução dos modelos matemáticos. Também sobre a infinitude do processo, o modelo que resolve hoje um problema, amanhã precisa ser analisado e melhorado.

Por outro lado, importa ressaltar que a abordagem dos métodos de aproximação com o objetivo de diferenciá-los não pretendia dar preferência de um em detrimento de outro, ao contrário, demonstra que ambos são importantes e inseparáveis, e estão em constante interação para melhorar os métodos.

Por fim, acreditamos que o trabalho pode ser de grande utilidade aos professores de ensino médio que pretendem aplicar a Modelagem Matemática como método de ensino, especialmente por meio da abordagem das técnicas de aproximação de funções.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. **O conceito de função em situações de modelagem matemática.** Revista Zetetikê, v.12, n.23, p.42-61, jan/jun.2005.

ALMEIDA, L.M.W.; BORSOI, A.H. **Modelagem matemática e a aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias.** Educação Matemática Pesquisa, 2004.

ALMEIDA, Lourdes Werle de; **Modelagem matemática na educação básica.** Lourdes Werle de Almeida, Karina Pessôa da Silva, Rodolfo Eduardo Vertuan. – 1. ed., 1ª reimpressão – São Paulo: Contexto, 2013.

ÁLVAREZ, Manuel; GUERRA, A.; LAU, R.; **Matemática Numérica.** 2ª Ed. 2007.564p.

AVILA, G. **Objetivos do Ensino da Matemática.** 1995. Revista do Professor de Matemática - RPM, n. 27, p. 01–09.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática e os futuros professores.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25., 2002, Caxambu. *Anais...* Caxambu: ANPED, 2002. Disponível em <[http:// sites.uol.com.Br/joneicb](http://sites.uol.com.br/joneicb)>. Acessado em 10/12/2016.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Uma perspectiva de Modelagem Matemática.** In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003, Piracicaba. *Anais...* Piracicaba: UNIMEP, 2003.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** São Paulo: Contexto, 2000.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** São Paulo: Ed. Contexto, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem como estratégia metodológica no ensino da matemática.** Boletim de Educação da SBMAC. São Paulo: IMECC/Unicamp, 1994.

BASSANEZI, R. C. **Temas e Modelos.** Santo André: Universidade Federal do ABC, 2012.

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Formação do professor: concepção, tendências unificadas e pontos de reflexão.** Temas e debates. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Blumenau, n. 7, 1995.

BICUDO, Maria Aparecida V. **Educação matemática.** Rio de Janeiro: LTC, 1987.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** 5. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BIENBENGUT, Maria S. **Modelagem matemática e implicações no ensino e aprendizagem de matemática.** – Blumenau: Ed. da Furb, 1999.

BIENBENGUT, Maria S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** 3. ed. – São Paulo: Contexto, 2003.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos para as engenharias e ciências aplicadas/Cristina Cunha.** – Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1993.

D' AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática. **Da Realidade a Ação: Reflexões sobre Educação Matemática.** 2. ed. São Paulo: Ática, 1993. Campinas/SP: Sammus, 1986.

GERDES, Paulus. **Sobre o despertar do pensamento geométrico.** Curitiba: UFPR, 1992.

MEYER, João F. da Costa de A; **Modelagem em Educação Matemática.** João Frederico da Costa de Azevedo, Ademir Donizeti Caldeira, Ana Paula dos Santos Malheiros – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. – (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SILVEIRA, J.C.; RIBAS, J.L.D. **Discussões sobre modelagem matemática e o ensino-aprendizagem,** 2004. Disponível em: <<http://www.somatematica.com.br/artigos/a8/p2.php>> Acesso em: 17/11/2016.

TAVARES, F. **Os modelos matemáticos e o processo de modelação matemática,** Millenium, Revista do Instituto Superior Politécnico de Viseu, v.3, n.2, p.30-45, jun.1996.