UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT

MARLON PRUDENCIANO DA SILVA

EQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS: APLICAÇÕES E UMA COLETÂNEA DE PROBLEMAS

Sinop

2017

MARLON PRUDENCIANO DA SILVA

EQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS: APLICAÇÕES E UMA COLETÂNEA DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves
Orientador

Prof. Dr. Oscar Chong Gonzalez
Coorientador

Sinop

2017

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

S586e Silva, Marlon Prudenciano da.
Equações e funções quadráticas: aplicações e uma coletânea de problemas / Marlon Prudenciano da Silva. – Sinop, 2017.
56 p.: il.

Orientador: Dr. Rogério dos Reis Gonçalves.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado de Mato Grosso, *Campus* Universitário de Sinop, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática.

1. Funções Quadráticas. 2. Equações Quadráticas. 3. Matemática - Resolução de Problemas. 4. Mestrado Profissional em Matemática. I. Gonçalves, R. dos R., Dr. II. Título. III. Título: aplicações e uma coletânea de problemas.

CDU 511.55

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário Luiz Kenji Umeno Alencar - CRB1 2037.

ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCAIS EXATAS E TECNOLÓGICAS.
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT UNEMAT - SINOP

MARLON PRUDENCIANO DA SILVA

EQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS: APLICAÇÕES E UMA COLETÂNEA DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT no *Campus* Universitário de Sinop, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves

Aprovado em: 29/06/2017

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves - UNEMAT

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi – UNICAMP/Campinas

Prof. Dr. Miguel Tadayuki Koga - UNEMAT

SINOP – JUNHO - 2017

À minha mãe que sempre se importou com meus estudos e em especial a minha esposa Luana, que esteve ao meu lado me apoiando e incentivando.

AGRADECIMENTOS

- A Deus, por ter me concedido o dom da vida, toda a força e saúde para chegar até aqui;
- A minha família que esteve sempre ao meu lado me apoiando e incentivando em todos os momentos;
- A todos os colegas do PROFMAT, que contribuíram diretamente nesta etapa de novos conhecimentos, principalmente ao Raul, Alessandro, Ricardo e Prina pelo companherismo em todos os momentos;
- Ao orientador Professor Doutor Rogério dos Reis Gonçalves, pelo estímulo e pelas valiosas contribuições, sem as quais não conseguiria concluir este trabalho;
- Ao Professor coorientador Doutor Oscar Antonio Gonzalez Chong por todo conhecimento transmitido no decorrer do curso;
- A todos os professores do PROFMAT que trabalharam conosco durante o curso;
- A CAPES pelo apoio financeiro.

"Se enxerguei mais longe,

foi porque me apoiei sobre os

ombros de gigantes".

Isaac Newton

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de elaborar um material que pode ser utilizado por professores e alunos do Ensino Básico e Superior, como fonte de pesquisa para o estudo de equações e funções quadráticas. Trazemos um número considerável de problemas que podem ser resolvidos por meio destes temas e, em especial, várias aplicações que utilizam propriedades da parábola. No estudo das funções quadráticas, damos um maior destaque ao uso das suas formas canônica e fatorada, visto que elas apresentam características importantes que facilitam a compreensão da função e de seus elementos. Além disso, acreditamos que essas formas são pouco utilizadas pelos professores.

Palavras-chave: Funções Quadráticas. Equações Quadráticas. Forma Canônica. Forma Fatorada. Parábola.

ABSTRACT

This work was developed with the objective of elaborating a material that can be used by teachers and students of Basic and Higher Education, as a research source for the study of equations and quadratic functions. We bring a considerable number of problems that can be solved through these themes, and in particular, several applications that use properties of the parabola. In the study of quadratic functions, we emphasize the use of its canonical and factored forms, since they have important characteristics that facilitate the understanding of the function and its elements. In addition, we believe that these forms are little used by teachers.

Keywords: Quadratic Functions. Quadratic Equations. Canonical form. Factored Form. Parabola.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo de equações e funções é essencial no ensino de matemática, além de que o uso delas pode ser percebido em outras áreas no currículo do ensino médio, como Física, Química, Biologia, dentre outras. Em especial, as equações e funções quadráticas, objeto de nosso trabalho, são utilizadas frequentemente nessas áreas.

Há ainda, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a necessidade de que o aluno desenvolva as seguintes habilidades e competências:

- *Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões dentro e fora da Matemática.*
- *Compreender o conceito de função, associando-o a exemplos da vida cotidiana.*
- *Associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes.*
- *Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas. (BRASIL, 2007)*

A prática de ensino tradicional comumente utilizada pelos professores do ensino básico que consiste em decorar fórmulas e resolver exercícios insistentemente sem nenhuma ligação com o cotidiano do aluno, na maioria das vezes, causa desestímulo e desinteresse pela matemática. A simples exposição do conteúdo de equações e funções quadráticas, simplesmente utilizando-se de manipulações algébricas e alguns exemplos, não tem se mostrado eficaz. Tendo em vista essa situação e levando em consideração os Parâmetros Curriculares Nacionais que nos diz:

> *...A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. (BRASIL, 2007)*

Trazemos uma coletânea de exercícios envolvendo aplicações dessas equações e funções, além de algumas aplicações delas ou de seus elementos no cotidiano do aluno.

Grande parte dos professores de matemática da educação básica tem dificuldade em propor atividades que proporcionem aos educandos a assimilação do conteúdo e também que sejam atrativas. Além disso, muitos relatam a seguinte indagação por parte dos alunos: "Professor, onde vou usar isso?". Observamos que há, por grande parte dos alunos, desinteresse na aprendizagem da matemática e que é uma perda de tempo estudar algo que não está ligado com sua realidade e que acreditam nunca usar.

Por outro lado, é comum encontrarmos alunos que demonstram paixão pela matemática e áreas afins e que conseguem, sem muito esforço, sucesso na aprendizagem desta maravilhosa disciplina. Diante disso, a fim de enriquecer o ensino de funções e equações quadráticas, propomos neste trabalho, problemas e situações voltadas à aplicação de equações e funções quadráticas que devem servir de estímulo a ambos os grupos de alunos, desde os desestimulados, trazendo mais proximidade à vida cotidiana, e aos que possuem afinidade, causando, como causam no autor, fascínio pela aplicabilidade dessas funções no dia a dia.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Assis (2015) apresentou um trabalho sobre funções quadráticas fundamentando teoricamente suas propriedades a fim de obter seu gráfico; Além disso, apresentou aspectos da metodologia de Resolução de Problemas e os resultados de sua aplicação na terceira série do Ensino Médio para o ensino da função quadrática.

Cruz (2015) propôs como metodologia de ensino uma abordagem das principais funções reais, tais como, afins, quadráticas, exponenciais, logarítmica e suas respectivas representações gráficas a partir de situações problemas do cotidiano. Após identificar qual expressão se adequa à situação, foram discutidas as principais características dessa função e como elas se relacionam com o cotidiano descrito. Ainda, foram apresentados problemas inéditos e de processos de seleção universitária, identificando qual o tipo de questão pode ser usada como avaliação, como demonstram o alinhamento deste método com o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Braga e Viali (2010) objetivaram a análise das potencialidades da planilha eletrônica na compreensão do conceito de função quadrática por meio da coordenação de registros de representação algébrico, tabular e gráfico, com base na teoria dos registros de representações semióticas de Raymond Duval.

Ribeiro (2013) faz uma resenha histórica sobre a função do segundo grau nas civilizações antigas e as contribuições que cada uma deu para o desenvolvimento da matemática, também traz uma abordagem formal da função quadrática.

Júnior (2011) discorre sobre o uso de tecnologias como ferramenta essencial no processo de ensino-aprendizagem e destaca o uso do *software* geogebra no ensino de funções quadráticas.

Sousa (2013) faz um estudo detalhado da função quadrática, trazendo desde as definições mais simples trabalhadas no ensino fundamental à definições mais complexas. Ainda, é discutido a caracterização da parábola, os intervalos de crescimento e decrescimento da função e também o comportamento da curva mediante variação dos coeficientes da expressão algébrica que a representa.

Soares (2013) traz um breve histórico das equações polinomiais do 2º grau e apresenta alguns problemas históricos que podem ser resolvidos através deste tipo de equação, faz uma apresentação da função quadrática utilizando a forma canônica e a forma fatorada, também define parábola e mostra que ela é o gráfico da função do 2º grau.

Alquimim (2016) faz um levantamento histórico sobre o desenvolvimento do conceito de função, apresenta as habilidades e competências exigidas pelo ENEM, bem como as competências presentes nos PCNEM relacionadas ao ensino de matemática e, por fim, expõe uma sequência didática utilizando o *software* Geogebra no ensino de funções quadráticas.

Paiva (2016) destaca a importância da utilização de recursos tecnológicos na prática docente, faz uma análise do uso do *software* winplot como uma ferramenta de ensino e apresenta uma proposta para o ensino de funções quadráticas utilizando esse *software*.

Silva (2015) também enfatiza o uso das tecnologias existentes hoje em dia como ferramentas de auxílio no processo de ensino/aprendizagem. Utiliza o *software* Geogebra como uma ferramenta de aprendizagem, pois proporciona uma interação dinâmica entre a função e o seu gráfico. Acredita que a visualização gráfica e a interação com o ambiente informatizado tornam a aprendizagem mais dinâmica, prazerosa e significativa para os alunos.

Anjos (2015) apresenta uma importante aplicação de funções afim e quadrática na educação para o trânsito, mostrando a relaçao entre essas funções e o tempo médio de reação visual de uma pessoa, forças de atrito e coeficientes de atrito de veículos em repouso e em movimento, situações de frenagem e parada total de um carro. Mostrando assim que o campo de aplicação dessas funções é muito grande, e pode ser usado para instigar os alunos ao seu estudo.

Cance (2015) apresenta uma sequência didática que tem como principal objetivo o estudo de funções quadráticas, para isso, lança mão de uma de suas aplicações, lançamento de projéteis. A sequência consiste na fabricação de canhões, numa competição de lançamentos de projéteis e no desenvolvimento de atividades com o auxílio do *software* Geogebra para o estudo da trajetória do projétil.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.2.1 OBJETIVOS GERAIS

Apresentar problemas e aplicações de equações e funções quadráticas.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Apresentar alguns conceitos relevantes no estudo das equações e funções quadráticas;
- Apresentar aplicações de equações e funções quadráticas que devemos utilizar no dia a dia;
- Apresentar aplicações de equações e funções quadráticas que fazem parte do nosso cotidiano mas, em geral, não conhecemos;
- Apresentar aplicações interessantes sobre equações e funções quadráticas para o professor discutir em sala de aula.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

No presente capítulo é apresentada introdução do trabalho. No Capítulo 2 apresentamos um breve histórico da equação do 2º grau, retratando a evolução do estudo e resolução desse tipo de equação no decorrer dos séculos. No Capítulo 3, partindo da definição de função quadrática, chegamos à sua forma canônica e a partir desta desenvolvemos a fórmula resolutiva de equações do 2º grau, soma e produto das raízes e também a forma fatorada. No Capítulo 4 apresentamos a definição de parábola e mostramos que ela representa o gráfico de uma função quadrática. Neste capítulo, também analisamos o “papel” dos coeficientes da função quadrática, em relação ao comportamento do seu gráfico. No Capítulo 5 apresentamos vários problemas e aplicações sobre equações e funções quadráticas, a fim de instigar o leitor ao seu estudo. Por fim, no Capítulo 6 apresentamos nossas considerações finais.

2 EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Não podemos iniciar o estudo das funções quadráticas sem antes falar sobre a história e o desenvolvimento das equações do segundo grau. Analisando a história da matemática notamos que o conhecimento matemático não nasceu da "noite para o dia", foi sim construído durante séculos e por vários pesquisadores e está em constante expansão. O mesmo ocorreu com o desenvolvimento das equações do segundo grau, não surgindo de um momento para o outro.

Podemos descrever a trajetória da equação do 2^o grau listando as civilizações que contribuíram para o seu desenvolvimento. Dessa forma, entendemos que é interessante conhecermos um pouco sobre como se deu o desenvolvimento do estudo destas equações, a fim de iniciarmos o estudo de funções quadráticas. Para isso, utilizaremos (FRAGOSO, 1999) nesta seção.

Iniciando pelos egípcios, que tiveram seus registros em papiros há mais de 4000 anos. Apesar de não ser encontrados registros de equações do 2^o grau nesses papiros, historiadores matemáticos creem que eles tenham desenvolvido alguma forma de abordar este tipo de equação. Os primeiros registros envolvendo essas equações são atribuídos à civilização mesopotâmica em placas de argila, não apresentada na forma simbólica que utilizamos hoje em dia, como no problema a seguir:

Qual é o lado de um quadrado, se a área menos o lado dá 870?

Os mesopotâmicos resolviam de forma retórica, descrevendo os passos a serem seguidos para chegar à solução do problema. A solução do problema acima é descrita da seguinte forma:

"Tome a metade de um (coeficiente de x), que é 0,5, e multiplique 0,5 por ele mesmo, o que dá 0,25. Some o resultado a 870 (termo independente, ou seja, o termo não acompanhado da incógnita), o que dá 870,25. Isto é, na verdade, o quadrado de 29,5, que, somado à metade de um, vai dar o lado do quadrado, que é igual a 30."

Pesquisadores matemáticos traduziram esta "receita"para a forma usual, ficando da seguinte forma:

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

Desenvolvendo essa fórmula obtemos:

$$\begin{aligned}
x - \frac{p}{2} &= \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \\
\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}\right)^2 \\
x^2 - px + \frac{p^2}{4} &= \frac{p^2}{4} + q \\
x^2 &= \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + px + q \\
x^2 &= px + q
\end{aligned}$$

Fazendo $p = 1$ e $q = 870$, temos a equação que representa o problema anterior.

$$x^2 = x + 870$$

Atualmente sabemos que os mesopotâmicos podiam resolver equações da forma $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$ e $x^2 + q = p$, com p e q positivos.

Na Grécia a equação do 2^o grau aparece na obra de Euclides "Os Elementos", mas com soluções geométricas. Além de Euclides, também há registros de Diophanto que apresentou uma outra forma de representação da equação do 2^o grau chamada forma sincopada[1].

Os hindus tiveram também uma grande contribuição no estudo de equações do 2^o grau, resolviam tais equações completando quadrados, descartavam as raízes negativas, mas aceitavam as irracionais. Dentre os matemáticos hindus podemos destacar Brahmagupta (628 d.C.) e Bháskara (1114-1185 d.C.) por suas contribuições no estudo das equações do 2^o grau. O primeiro, assim como Diophanto, também representava a equação na forma sincopada, o segundo, Bháskara, considerado o mais importante matemático do séc. XII. Dentre outras atividades, tratou das equações lineares e quadráticas, utilizando-se do método de completar quadrados, Bháskara chegou ao processo algébrico muito semelhante à fórmula que utilizamos atualmente para resolver equações do 2^o grau, intitulada "Fórmula de Bháskara" em homenagem a esse brilhante matemático. Lilavati, livro de Bháskara sobre equações, tem muitos problemas, escritos em versos, recebeu esse nome em homenagem a sua filha.

[1]Supressão, eliminação das palavras por símbolos matemáticos.

Os árabes impulsionaram a matemática no seu período. Com relação às equações do 2^o grau podemos citar um importante matemático, Al-Khowarismi, que apresentou uma resolução pelo método de completamento de quadrados, usando-se de geometria para demonstrar suas soluções retóricas. Os chineses desenvolveram uma técnica para a resolução de equações do segundo grau baseados nas aproximações sucessivas, denominado método fan-fan.

Podemos expressar o método fan-fan do seguinte modo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + bx_n + c}{1 + 2x_n + b},\ com\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde x_n é a aproximação da raiz x procurada.

Na Europa vamos citar François Viéte (1540-1603), considerado por muitos historiadores matemáticos o responsável por introduzir a linguagem simbólica na matemática.

3 FUNÇÕES QUADRÁTICAS

3.1 CONCEITOS PRELIMINARES

O conhecimento das funções quadráticas são de grande importância para os alunos do ensino básico, pois muitas de suas aplicações estão presentes em nossas vidas. O estudo que faremos neste capítulo envolve o desenvolvimento das formas canônica e fatorada desta função, por acreditarmos que essas formas servem para um melhor entendimento das características dessa função e facilita a identificação dos pontos notáveis do seu gráfico.

Definição 3.1. *Uma função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é chamada de função quadrática quando existirem números reais a, b e c, com $a\neq 0$, tais que $f(x)=ax^2+bx+c$, para todo $x\in\mathbb{R}$.*

Na Seção 3.2 estudaremos a forma canônica de uma função quadrática. Esta forma baseia-se na técnica de "completar quadrados". Esta forma pode, em um primeiro momento, parecer complicada para alguns alunos. No entanto, ela contribuirá, em especial, no estudo de outros temas da álgebra e também da geometria analítica. Além disso, a forma canônica nos fornece com clareza os pontos notáveis do gráfico da função, como por exemplo, os zeros da função, a intersecção do gráfico com o eixo y e o vértice da parábola.

3.2 FORMA CANÔNICA

A partir da Definição 3.1, será feito o desenvolvimento da forma canônica.

Seja $f(x)=ax^2+bx+c$. Assim

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2+bx+c \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

$$= \quad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Denotando $m=-\dfrac{b}{2a}$ e $k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, obtemos:

$$f(x)=a\,(x-m)^2+k \tag{1}$$

A função quadrática representada na Equação (1) é chamada *forma canônica de $f(x)$*.

Abaixo seguem algumas observações sobre a função quadrática na forma canônica $f(x)=a\,(x-m)^2+k$.

Observação 1. *Se $a>0$, claramente podemos notar que f não é limitada superiormente, pois para qualquer que seja $M\in\mathbb{R}$, existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)>M$, visto que a expressão $a\,(x-m)^2$ pode tomar valores suficientemente grandes. Ainda, neste caso, como $a\,(x-m)^2\geq 0$, qualquer que seja $x\in\mathbb{R}$, segue que o valor mínimo de f ocorre quando $x=m=-\dfrac{b}{2a}$ e o valor mínimo será dado por $y=k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. A análise do caso em que $a<0$ é análoga.*

Observação 2. *Para iniciar o estudo de funções quadráticas na sua forma canônica e, consequentemente, conjecturar resultados, é importante que o professor primeiramente proponha aos alunos que escrevam funções quadráticas na sua forma canônica e que o mesmo os instiguem a perceber os resultados obtidos nas observações anteriores. Somente a partir daí o aluno deverá escrever suas ideias de forma genérica.*

Na próxima seção vamos utilizar a forma canônica para demonstrar outros resultados importantes que envolvem a função quadrática.

3.3 FORMA FATORADA

Antes de falarmos sobre a forma fatorada da função quadrática precisamos de alguns conceitos prévios que serão apresentados agora.

Primeiramente, partindo da forma canônica da função quadrática e igualando-a a zero, podemos deduzir a fórmula para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau.

$$
\begin{aligned}
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} &= 0\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{4ac-b^2}{4a}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{4ac-b^2}{4a^2}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}\\
x &= -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}\\
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$ e chamando de x_1 e x_2 as raízes da equação, podemos escrever da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Claramente se $\Delta > 0$ a equação possui duas raízes reais distintas, se $\Delta < 0$ a equação não possui raízes reais e se $\Delta = 0$ a equação possui duas raízes reais iguais.

Ao somarmos as raízes temos:

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)+\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\
&= \frac{\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)+\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)}{2a}\\
&= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\
&= \frac{-b-b+\sqrt{\Delta}-\sqrt{\Delta}}{2a}\\
&= \frac{-2b}{2a}\\
&= -\frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

E ao multiplicarmos temos:

$$\begin{aligned}
x_1x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\
&= \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}\\
&= \frac{b^2-\Delta}{4a^2}\\
&= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}\\
&= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}\\
&= \frac{4ac}{4a^2}\\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Assim a soma e o produto das raízes de uma equação do segundo grau podem ser expressas, respectivamente, pelas expressões:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Dada a função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ com $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$, vamos fazer algumas manipulações algébricas a fim de obter sua forma fatorada.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2+bx+c\\
&= a\left(x^2+x\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x^2-x\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2\right)\\
&= a\left(x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2\right)\\
&= a\left(x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right)\\
&= a(x-x_1)(x-x_2)
\end{aligned}$$

É claro que para trabalhar com a forma fatorada da função quadrática o aluno deve possuir grande domínio na fatoração de polinômios, o que nem sempre encontramos na sala de aula, porém esta forma é bastante útil pois deixa evidente as raízes ou zeros da função.

4 UM ESTUDO SOBRE A PARÁBOLA DO SEGUNDO GRAU

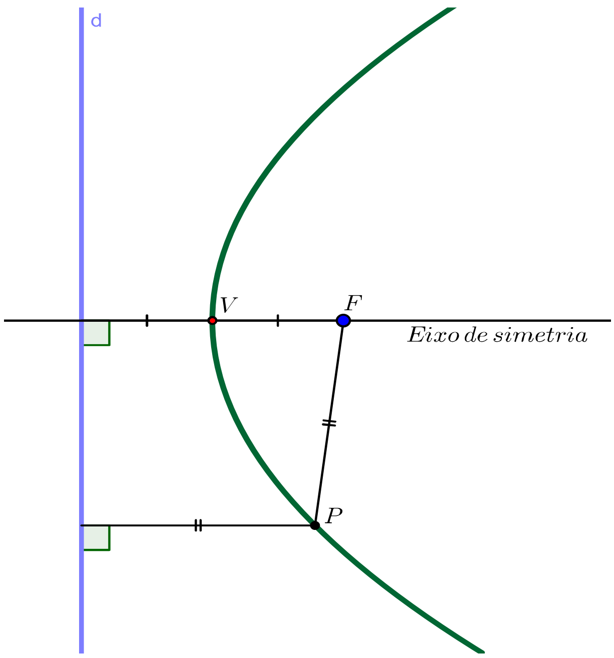
4.1 CONCEITOS PRELIMINARES

Lendas dizem que Arquimedes (287-212 a.C.) incendiou uma frota de navios romanos que atacava Siracusa, sua cidade na ilha da Sicília. Supostamente, ele o fez fazendo uso de uma propriedade notável da parábola (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2015).

Definição 4.1. *Uma parábola é o lugar geométrico no plano dos pontos que estão a igual distância de um ponto F (chamado o **foco** da parábola) e uma reta d, a **diretriz** da parábola.*

O ponto pertencente a parábola mais próximo da reta diretriz é chamado de vértice da parábola e a reta que passa pelo vértice e o foco chama-se eixo da parábola. A parábola é simétrica em relação à este eixo. O vértice, o foco e o eixo de simetria da parábola podem ser observados na Figura 1.

Figura 1 - Parábola



Fonte: Elaboração do autor

4.2 POR QUE O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA É UMA PARÁBOLA?

É comum associarmos o gráfico de uma função quadrática à uma parábola, o que normalmente aceitamos sem demonstrar. Entendemos que é importante provar tal resultado e faremos a seguir, mas, primeiramente, apresentaremos dois resultados na forma de lema que serão utilizados em sua demonstração.

Lema 4.1. *Sejam $A_1(x_1,y_1)$ e $A_2(x_2,y_2)$ dois pontos quaiquer no plano xy. Se $d(A_1,A_2)$ representa a distância entre os pontos A_1 e A_2, então $d(A_1,A_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.*

Lema 4.2. *Sejam $A(x_0,y_0)$ um ponto dado e $ax+by+c=0$ a equação geral da reta r. A distância $d(A,r)$ do ponto A à reta r é dada por*

$$d(A,r)=\frac{\sqrt{(ax_0+by_0+c)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Com o objetivo de provar que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, consideraremos primeiramente o caso particular em que $f(x)=ax^2$, onde a é um número real diferente de zero.

Teorema 1. *O lugar geométrico dos pontos (x,y) que satisfazem a equação $y=ax^2+bx+c$, em que a, b, $c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, é uma parábola.*

Demonstração:

Para demonstrarmos o teorema, vamos escrever a função quadrática $y=ax^2+bx+c$ na sua forma canônica $y=a\,(x-m)^2+k$ (ver notação utilizada na Equação (1)), visto que essa forma mostrará com clareza como determinar o ponto F e a reta d, conforme denotado na Definição 4.1.

Vamos considerar três casos:

Caso 1: $y=ax^2$

Seja $P(x,ax^2)$ um ponto genérico do gráfico de $y=ax^2$. Consideremos o ponto $F\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$ e a reta d de equação $y=-\dfrac{1}{4a}$, com $a\neq 0$. Mostraremos que F e d representam o foco e a diretriz dessa função quadrática. Para isso, basta provarmos, pela Definição 4.1, que $d(P,F)=d(P,d)$.

Pelos lemas 4.1 e 4.2 temos que

$$d(P,F)=\sqrt{x^2+\left(ax^2-\frac{1}{4a}\right)^2}$$

e

$$d(P,d) = \frac{\sqrt{\left(0x + ax^2 + \dfrac{1}{4a}\right)^2}}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

Como $d(P,F)$ e $d(P,d)$ são números reais não negativos, segue que $d(P,F) = d(P,d)$ se, e somente se, $d(P,F)^2 = d(P,d)^2$.

Dessa forma, para provarmos o Teorema 1, basta mostrarmos que $d(P,F)^2 = d(P,d)^2$.

De fato,

$$\begin{aligned} d(P,F)^2 &= \left(\sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}\right)^2 \\ &= x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 \\ &= x^2 + a^2x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2} \\ &= a^2x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2} \\ &= \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(P,d)^2 &= \left(\frac{\sqrt{\left(0x + ax^2 + \dfrac{1}{4a}\right)^2}}{\sqrt{0^2+1^2}}\right)^2 \\ &= \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 \end{aligned}$$

Caso 2: $y = a(x-m)^2$

Nota-se que um ponto P qualquer do gráfico de $y = a\,(x-m)^2$ é dado por $P\left(x,\, a\,(x-m)^2\right)$. Neste caso, $F\left(m,\, \dfrac{1}{4a}\right)$ é o foco e $y = -\dfrac{1}{4a}$ representa a equação da reta diretriz d.

De forma análoga à utilizada no Caso 1, verifica-se que $d(P,F)^2 = d(P,d)^2$, o que nos mostra que o gráfico da equação $y = a(x-m)^2$ é uma parábola.

Caso 3: $y = a(x-m)^2 + k$

Um ponto P qualquer do gráfico de $y = a\,(x-m)^2 + k$ é dado por $P\left(x,\, a\,(x-m)^2 + k\right)$.

Assim, o foco F é o ponto $F\left(m, \frac{1}{4a}+k\right)$ e a reta diretriz d é representada pela equação $y = -\frac{1}{4a}+k.$ □

Observação 3. *Sugerimos que o professor discuta, a partir do Caso 1, como determinar o foco e a reta diretriz das parábolas representadas nos casos 2 e 3. A noção de transladar gráfico é muito interessante. Essa ideia é suficiente para garantir que não haveria necessidade de se chegar aos resultados encontrados nos dois últimos casos. Para demonstrar o teorema, bastaria considerar o primeiro caso.*

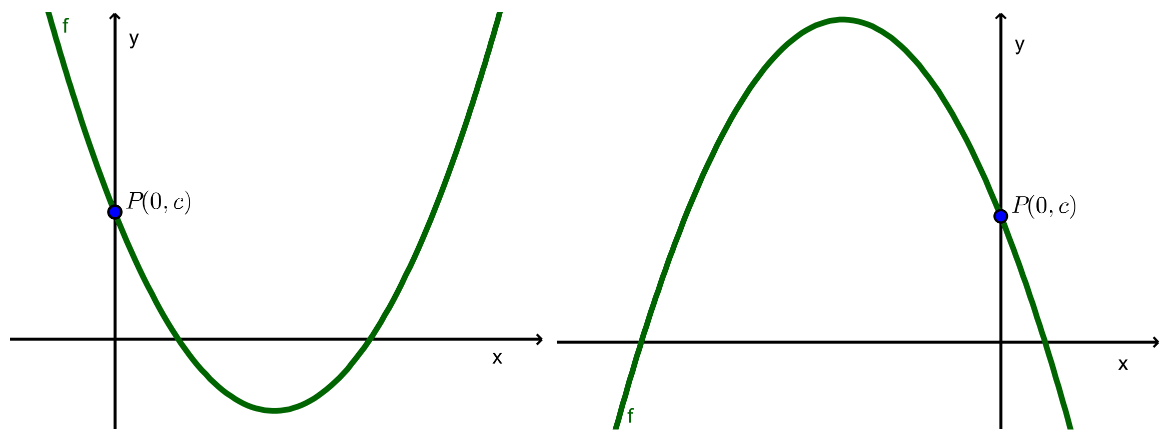
4.3 O "PAPEL"DOS COEFICIENTES DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Dada a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, vamos analisar o papel dos coefeicientes a, b e c desta função.

O mais simples é o significado do coeficiente c, para tanto basta calcular $f(0) = c$ e claramente notamos que c é o valor da ordenada do ponto em que o gráfico da função corta o eixo OY. Como podemos ver na Figura 2

Figura 2 - “Papel” do coeficiente c

(a) (b)



Fonte: Elaboração do autor

Para entendermos o significado do coeficiente b na função quadrática, precisaremos primeiramente da definição de reta tangente a uma parábola.

Definição 4.2. *A tangente a uma parábola no ponto P é a reta que tem em comum com a parábola esse único ponto P e tal que todos os demais pontos da parábola estão do mesmo lado dessa reta.*

E também do seguinte teorema:

Teorema 2. *Se a parábola é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, sua tangente no ponto $P = (x_0, y_0)$, onde $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$, é a reta que passa por esse ponto e tem inclinação igual a $2ax_0 + b$.*

Demonstração[1]:

Suponhamos $a > 0$. Mostraremos que, para todo $x \neq x_0$, o ponto (x, y) da parábola, com $y = ax^2 + bx + c$ está acima do ponto $(x, y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0))$, de mesma abscissa x, situado sobre a reta. Noutras palavras, queremos provar que:

$$x \neq x_0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0)$$

.

De fato,

$ax^2 + bx + c - [ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0)]$

$= ax^2 + bx + c - [ax_0^2 + bx_0 + c + 2axx_0 - 2ax_0^2 + bx - bx_0]$

$= ax^2 + bx - bx + c - c - bx_0 + bx_0 - 2axx_0 - ax_0^2 + 2ax_0^2$

$= ax^2 - 2axx_0 + ax_0^2$

$= a(x^2 - 2xx_0 + x_0^2)$

$= a(x - x_0)^2 > 0$

Isso mostra que a reta de inclinação $2ax_0 + b$ que passa pelo ponto (x_0, y_0), com $y_0 = f(x_0)$ tem este único ponto em comum com a parábola que é o gráfico de f e que todos os pontos da parábola estão acima dessa reta. Logo esta reta é tangente parábola neste ponto. Quando $a > 0$, a parábola se situa acima de qualquer de suas tangentes, conforme acabamos de ver. Se for $a < 0$ então a parábola se situa abaixo de todas as suas tangentes.

Note que no ponto $P = (0, c)$, temos $x_0 = 0$ e $y_0 = c$. Assim a inclinação,λ, da reta tangente é igual a $2a0 + b = b$ e a equação da reta

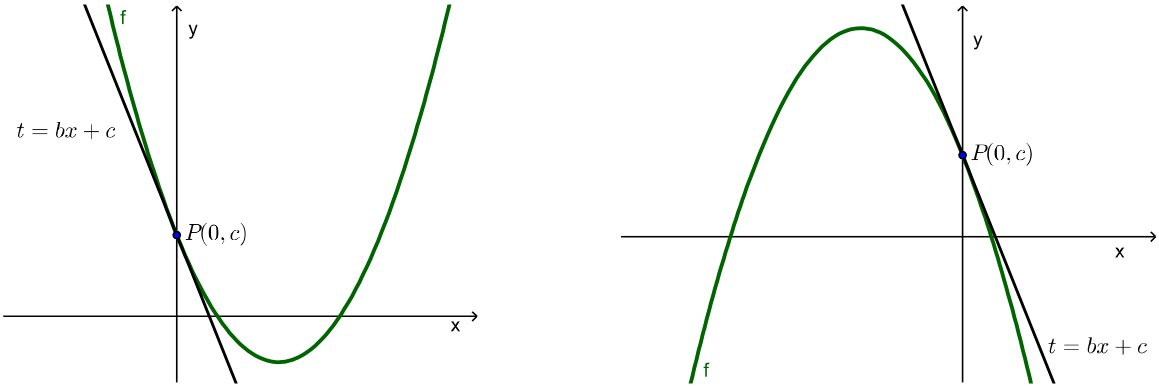
$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) = y - c = b(x - 0) = bx + c$$

Então podemos dizer que o coeficiente b da função é a inclinação da reta tangente no ponto em que o gráfico corta o eixo OY, e que essa reta é $y = bx + c$. Na Figura 3 podemos ver um

[1]Esta demonstração assim como o teorema constam em (LIMA, 2014)

exemplo.

Figura 3 - “Papel” do coeficiente b



Fonte: Elaboração do autor

Papel do coeficiente a.

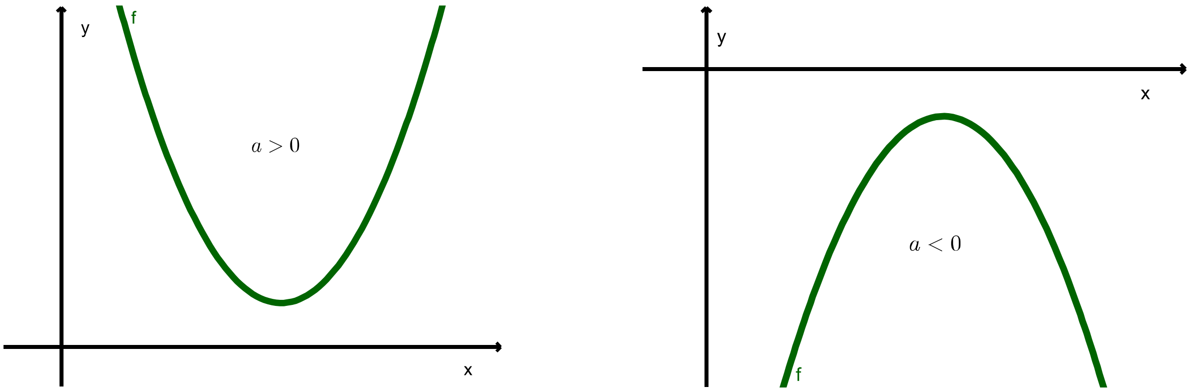
Primeiramente analisando a forma canônica da função quadrática, $f(x) = a(x+m)^2 + k$, verificamos dois fatos:

Se $a > 0$ a função f não é limitada superiormente, ou seja, a concavidade da parábola é voltada para cima. Como mostra a Figura 4a.

Se $a < 0$ a função f não é limitada inferiormente, ou seja, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Como mostra a Figura 4b.

Figura 4 - Concavidade da parábola

(a) $a > 0$ (b) $a < 0$



Fonte: Elaboração do autor

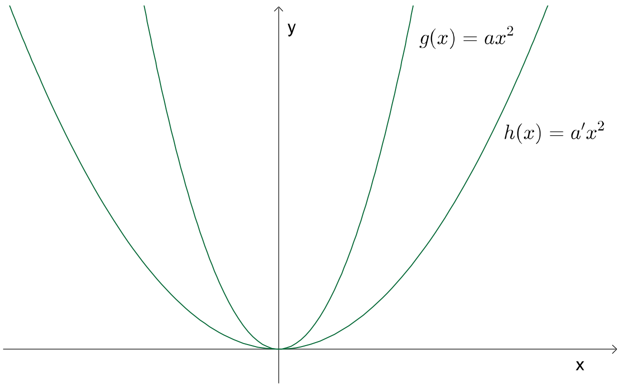
Além de estar relacionado com a concavidade da parábola, o coeficiente a também influência na “abertura” da parábola, como mostraremos a seguir.

Visto que o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ origina-se do gráfico da função $g(x) = ax^2$, por meio de uma translação horizontal seguida de uma vertical ou vice-versa, para analisar o papel do coeficiente a numa função quadrática basta analisar na função $g(x) = ax^2$.

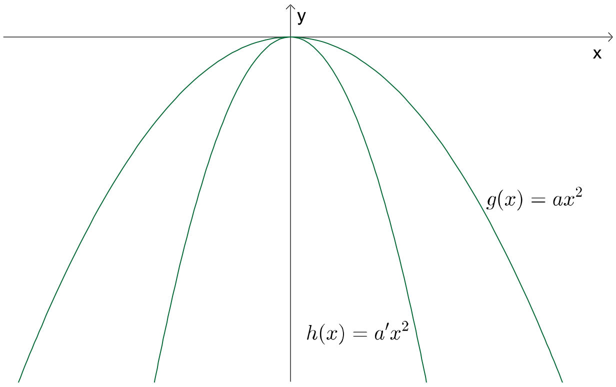
Sendo $g(x) = ax^2$ e $h(x) = a'x^2$, com $a, a' > 0$ e $a > a'$, temos $g(x) > h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, assim o gráfico de $g(x)$ é interno ao gráfico de $h(x)$. Do mesmo modo, sendo $a, a' < 0$ e $a > a'$, temos também $g(x) > h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mas nesse caso o gráfico de $h(x)$ é interno ao gráfico de $g(x)$. Assim podemos concluir que quanto maior for o valor absoluto do coeficiente a da função quadrática, mais "fechado" será o seu gráfico, conforme mostrado na Figura 5.

Figura 5 - "Abertura" da parábola

(a) $a, a' > 0$



(b) $a, a' < 0$



Fonte: Elaboração do autor

4.4 PROPRIEDADE REFLETORA DA PARÁBOLA

Todos os dias as pessoas se deparam com uma superfície parabólica, seja uma antena de TV, antena de radar, ou mesmo no farol do carro. O que a maioria destas pessoas não sabe é que existe uma explicação matemática para o emprego dessas superfícies nesses equipamentos.

Nesta seção vamos mostrar a matemática por trás desses aparelhos.

Definição 4.3. *O ângulo entre uma reta e uma parábola que se intersectam num ponto P, é o ângulo entre essa reta e a reta tangente à parábola que passa por este ponto.*

Lema 4.3. *As retas* $y = ax + b$ *e* $y = a'x + b'$*, com* $a \neq 0$ *e* $a' \neq 0$*, são perpendiculares se, e somente se,* $a' = -\dfrac{1}{a}$.

A demonstração do Lema 4.3 consta em (LIMA, 2014).

Pelo Teorema 2 podemos notar que o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem no ponto $P = (x, y)$, uma tangente de inclinação $2ax + b$.

Considerando o ponto $Q = \left(x, k - \dfrac{1}{4a}\right)$, pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz d e $F = \left(m, k + \dfrac{1}{4a}\right)$ o foco da parábola, vamos calcular a inclinação da reta FQ.

Inicialmente, vamos determinar a inclinação λ da reta FQ:

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= \lambda(x - x_0)\\
(k - \frac{1}{4a}) - (k + \frac{1}{4a}) &= \lambda(x - m)\\
k - k - \frac{1}{4a} - \frac{1}{4a} &= \lambda(x - m)\\
-\frac{2}{4a} &= \lambda(x - m)\\
-\frac{1}{2a} &= \lambda(x - m)
\end{aligned}$$

Isolando λ, obtemos:

$$\lambda = -\frac{1}{2a(x - m)}$$

Como visto anteriormente, $m = -\dfrac{b}{2a}$

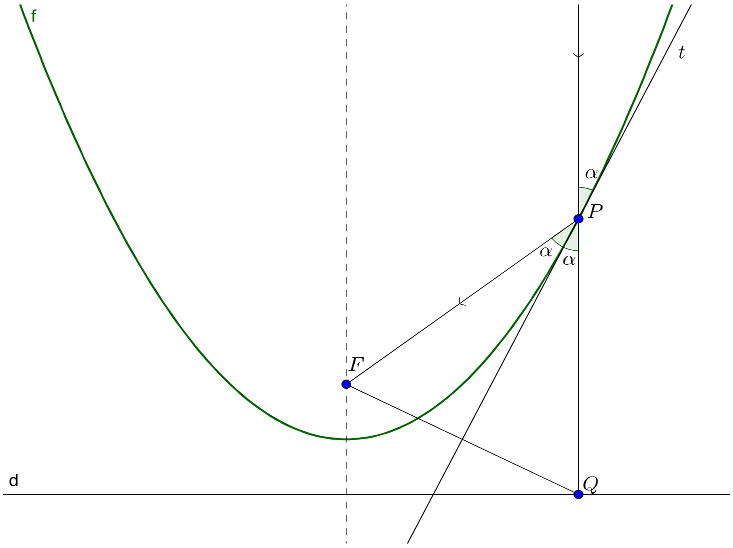
Portanto, podemos reescrever a igualdade acima do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{1}{2a(x - m)}\\
&= -\frac{1}{2a(x + \frac{b}{2a})}\\
&= -\frac{1}{2ax + b}
\end{aligned}$$

Como a inclinação da reta tangente à parábola no ponto P é igual a $2ax + b$ e a inclinação da reta FQ é igual a $-\dfrac{1}{2ax + b}$, segue do Lema 4.3 que a reta FQ é perpendicular à reta tangente.

Ainda, pela Definição 4.1, segue que o triângulo FPQ é isósceles de base FQ. Portanto, a reta tangente contém a bissetriz do ângulo $\hat{P}$.

Figura 6 - Propriedade refletora da parábola - 1



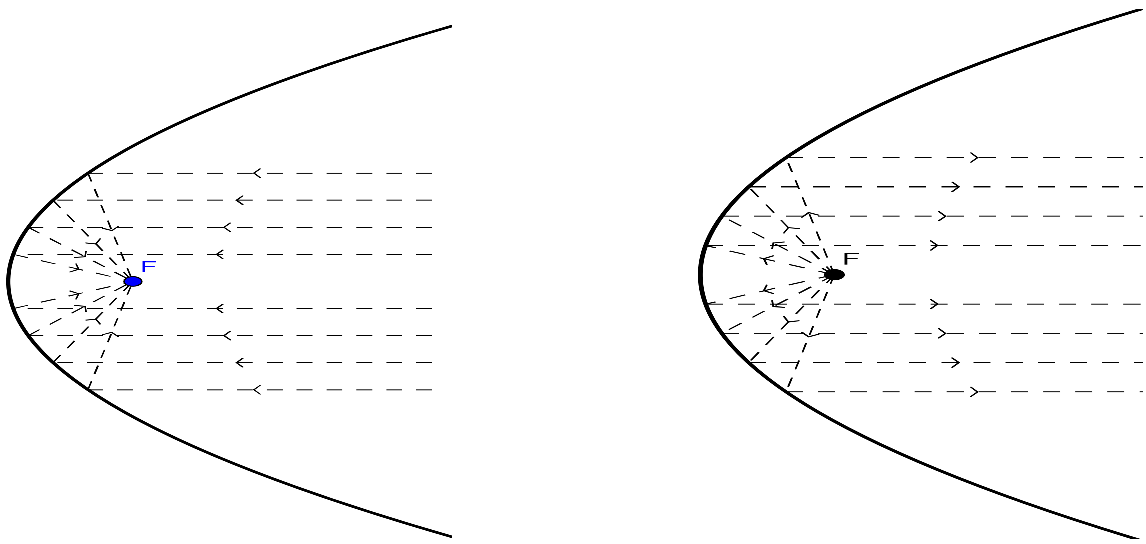
Fonte: Elaboração do autor

Assim, os raios que incidem na parábola paralelamente ao seu eixo refletem na superfície e são direcionados para o foco, conforme Figura 6.

Figura 7 - Propriedade refletora da parábola - 2

(a) Reflexão para o foco

(b) Reflexão para o meio externo



Fonte: Elaboração do autor

Esta propriedade da parábola, mostrada na Figura 7, possui várias aplicações interessantes, as quais serão apresentadas na Seção 5.2.

5 APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Neste capítulo serão apresentados vários problemas sobre equações e funções quadráticas, cujo objetivo é instigar os professores a aplicá-los em sala de aula.

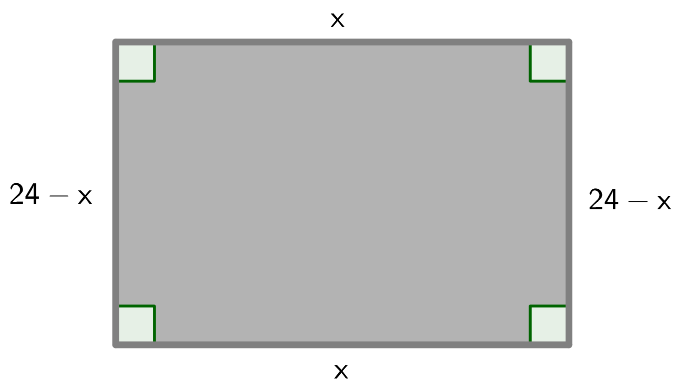
5.1 APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS QUE DEVEMOS UTILIZAR NO DIA A DIA

5.1.1 A Mesa Quadrada Pode não Ser a Melhor Escolha

Muitas vezes nos deparamos em situações em que devemos fazer escolhas aparentemente simples e que na verdade nossa intuição pode ser falha. Por exemplo, digamos que uma pessoa more em um apartamento e queira comprar uma mesa que caiba 6 pessoas e que ocupe a menor área possível. Após alguns cálculos, essa pessoa verificou que tal mesa deverá ter um perímetro de aproximadamente 48dm. Será que a melhor escolha é uma mesa quadrada?

Vamos mostrar que, dentre os formatos retangulares, o quadrado ocupa a maior área, o que não interessa a essa pessoa.

De acordo com os dados do problema, se uma das dimensões for representada por x, a outra dimensão será dada por $24-x$, conforme mostrado na figura abaixo.



Dessa forma, a área S da mesa será representada, em sua forma fatorada, pela função quadrática

$$S(x) = x(24-x) = -x^2 + 24x$$

Escrevendo S em sua forma canônica, temos

$$S(x) = -(x-12)^2 + 144$$

Note que 144 é o valor máximo de S e ocorre quando $x = 12$. Neste caso, a mesa terá a forma de um quadrado, contrariando a intuição de muitas pessoas que pensam que este formato é a melhor opção em relação à ocupar pouco espaço, quando se fixa o perímetro.

5.1.2 Um Problema sobre a Venda de Álcool em um Posto de Combustível

O problema 5.1 foi extraído do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e refere-se à venda de álcool em um posto de combustível, em que o proprietário desse posto percebeu que poderia aumentar o seu lucro se diminuísse o preço vendido por cada litro de álcool, pois aumentaria a venda. Apesar do fato de podermos calcular o valor que se pode diminuir no preço do álcool para que o lucro seja máximo e também calcular esse lucro máximo, o intuito do problema é verificar se o aluno é capaz de modelar esta situação por meio de uma função.

Problema 5.1. *Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.*

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

a) $V = 10.000 + 50x - x^2$

b) $V = 10.000 + 50x + x^2$

c) $V = 15.000 - 50x - x^2$

d) $V = 15.000 + 50x - x^2$

e) $V = 15.000 - 50x + x^2$

Resolução:

A cada x centavos de desconto no preço do litro, gera um aumento de 100 litros na venda, e ainda como V é dado em reais, temos:

$$V(x) = \overbrace{\left(1,5 - \frac{x}{100}\right)}^{custo}\overbrace{(10000 + 100x)}^{quantidade}$$

Aplicando a propriedade distributiva e reagrupando os termos semelhantes, segue que

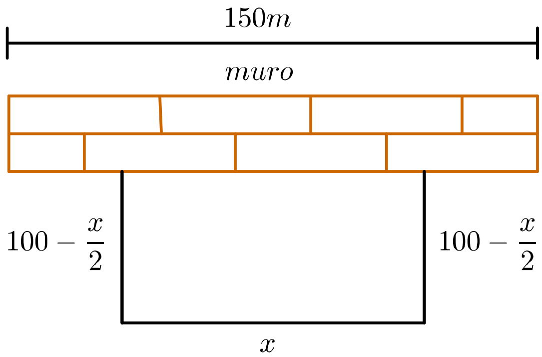
$$V(x) = 15000 + 50x - x^2$$

Portanto, a resposta correta é o item d).

5.1.3 Área de um Terreno Retangular

Problema 5.2. *Manoel dispõe de 200m de tela para cercar um terreno retangular e quer aproveitar um muro já construído em sua propriedade que mede 150m de comprimento. Utilizando apenas esses 200m de tela, qual a área máxima do terreno que Manoel pode cercar?*

Resolução: De acordo com os dados do problema, se uma das dimensões for representada por x, a outra dimensão será dada por $100 - \dfrac{x}{2}$, conforme mostrado na figura abaixo.



A área do terreno pode ser expressa por meio da seguinte função $A(x) = x(100 - \frac{x}{2})$.

Escrevendo-a na sua forma canônica temos:

$$\begin{aligned} A(x) &= x\left(100 - \frac{x}{2}\right) \\ &= 100x - \frac{x^2}{2} \\ &= -\frac{x^2}{2} + 100x \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 200x\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 200x + 10000\right) + 5000 \\ &= -\frac{1}{2}(x - 100)^2 + 5000 \end{aligned}$$

Logo, a área máxima do terreno será igual a $5000m^2$ e esta ocorre quando $x = 100$.

Observação 4. *Após a resolução deste problema em sala de aula, é interessante que o professor instigue os alunos a pensar sobre o seu resultado. Note que no retângulo a medida do lado paralelo ao muro é igual ao dobro da medida do outro lado. Isso foi coincidência ou essa relação ocorre sempre quando um dos lados já é utilizado, como por exemplo o muro? Juntos poderão concluir que essa relação sempre ocorre.*

5.2 APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS QUE FAZEM PARTE DO NOSSO COTIDIANO MAS, EM GERAL, NÃO CONHECEMOS

Outra aplicação da parábola, gráfico da função quadrática, diz respeito a sua propriedade refletora descrita na seção 4.1. Nesta seção trazemos algumas destas aplicações que estão ligadas diretamente ao cotidiano das pessoas, mas a maioria delas utilizam sem saber o fundamento matemático que existe por detrás dos equipamentos que se beneficiam desta notável propriedade. Esperamos que isto sirva de estímulo para o estudo das funções quadráticas.

5.2.1 Antenas Parabólicas

As antenas parabólicas estão presentes em várias residências brasileiras, mas, em geral, os usuários não sabem o motivo dessa denominação e tampouco sabem por que elas são empregadas nas telecomunicações.

Antes de revelarmos a matemática por detrás desse equipamento, precisamos entender como funciona a transmissão dos sinais de TV via satélite, para isso usaremos como base (NICE; HARRIS, 2002).

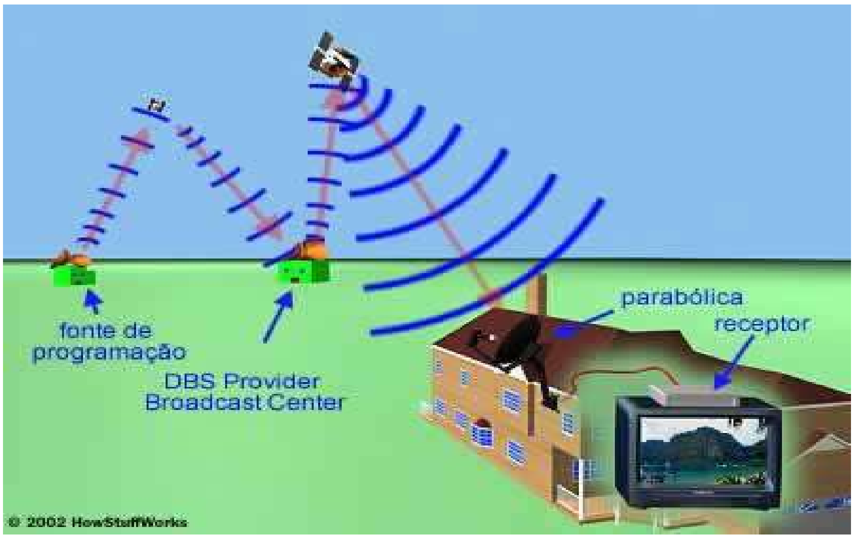
Essencialmente há cinco componentes principais envolvidos na transmissão de TV via satélite:

- Fontes de programação: são simplesmente os canais que fornecem a programação para a transmissão.
- Centro de transmissão: recebe os sinais de diferentes fontes de programação e envia um sinal para o satélite em órbita geoestacionária.
- Satélites: recebem os sinais da estação e os retransmitem para o solo. Os satélites de televisão estão em órbita geoestacionária, ou seja, eles permanecem estacionados em um local no céu em relação à Terra. Assim o usuário precisa direcionar a antena parabólica para o satélite somente uma vez.

- Antena parabólica: capta o sinal do satélite e o envia para o receptor na casa do usuários.
- Receptor: processa o sinal e o envia para o aparelho de televisão.

Estes componentes estão representados na Figura 8

Figura 8 - Transmissão de TV via satélite



Fonte: (NICE; HARRIS, 2002)

Vamos nos atentar ao funcionamento da antena parabólica, por estar relacionado ao estudo de funções quadráticas, mais precisamente a parábola.

Se girarmos uma parábola em torno de seu eixo de simetria vamos gerar um sólido de revolução denominado superfície parabólica (por isso que elas foram denominadas antenas parabólicas). Esta superfície conserva a propriedade da figura plana demonstrada na Seção 4.4. Assim, quando os sinais de TV provenientes de um satélite incidem na superfície da antena parabólica, essa os reflete para o foco, intensificando a força do sinal que é captado por um conversor localizado neste ponto e transmitido através de um cabo ao receptor que o processa e envia ao aparelho de TV onde é interpretado e transforma-se em filmes, telejornais, novelas etc.

5.2.2 Faróis de Carro

Outra aplicação da parábola que a maioria das pessoas desconhece é sobre sua utilização no farol dos veículos. Aqui vamos citar o funcionamento de um farol comum, que consiste no emprego de um espelho parabólico e uma lâmpada incandescente.

Dentro do bloco óptico do farol é colocado um espelho parabólico, conforme Figura 9a e Figura 9b, e uma lâmpada, Figura 10, posicionada exatamente no foco desse espelho. Esta lâmpada possui dois filamentos, um que gera os raios luminosos exatamente no foco do espelho, fazendo com que o feixe ao incidir na superfície seja refletido paralelamente ao eixo de simetria da parábola para o meio externo. O outro, localizado um pouco antes do foco, gera os raios que refletem com um ângulo menor, fazendo-os divergir. Assim podemos ter "luz baixa", quando os raios são gerados no foco e "luz alta", quando os raios são gerados antes do foco.

Figura 9 - Bloco óptico de um farol

(a) Farol de carro

(b) Farol de motocicleta

Fonte: Próprio autor

Figura 10 - Lâmpada incandescente

Fonte: Próprio autor

5.2.3 Radares

O radar é um equipamento que pode ser empregado em várias áreas, uma delas, a que vamos citar neste trabalho para exemplificar a aplicação da parábola, é para localizar objetos a longa distância.

O radar é basicamente constituído de dois sistemas, o transmissor e o receptor. O sistema transmissor dispara, por meio de uma antena parabólica, um feixe de alta intensidade de ondas de rádio de alta frequência, que ao atingir o objeto a ser monitorado, ecoam de volta para a antena, onde eles refletem na superfície e pela sua propriedade refletora são direcionados ao foco, onde está localizado um dispositivo que capta essas ondas e as transmitem ao receptor, onde são interpretados e enviadas ao visor para análise do operador.

A aplicação da função quadrática, assim como nas transmissões de TV via satélite e nos faróis do carro, consiste no uso da antena parabólica, Figura 11, para enviar e/ou receber ondas de rádio, usando-se da propriedade demonstrada na Seção 4.4.

Figura 11 - Antena de radar

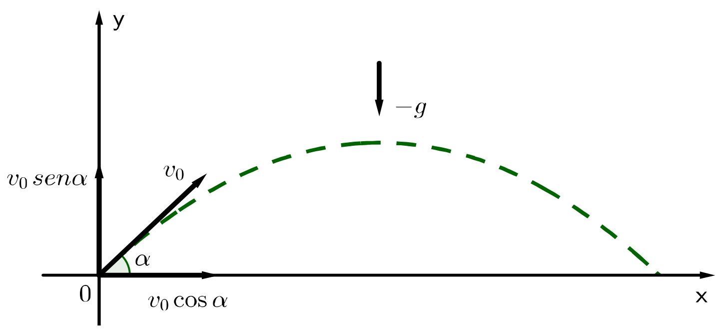
Fonte: (SANTOS, 2017)

5.2.4 Lançamento de Projéteis

Considere o lançamento de uma partícula com velocidade escalar v_0, numa direção formando um ângulo α com o plano horizontal. Podemos desprezar a força de resistência do ar durante o movimento da partícula, assim a única força que atua sobre ela é a força peso.

Sem perda de generalidade podemos considerar o lançamento na origem do sistema cartesiano como na Figura 12.

Figura 12 - Trajetória da partícula



Fonte: Elaboração do autor

Utilizando o princípio da independência de Galileu, podemos dividir o movimento em dois movimentos separados, um horizontal ao longo do eixo x, com velocidade escalar inicial

$v_0 \cos\alpha$ e outro vertical ao longo do eixo y, com velocidade escalar inicial $v_0\text{sen}\alpha$ e aceleração $-g$.

Deste modo, temos como equação horária do movimento horizontal a partir do instante $t_0 = 0$ e do ponto de lançamento $x_0 = 0$:

$$x = (v_0 \cos\alpha)t \tag{2}$$

Da mesma forma, temos como equação horária do movimento vertical a partir do instante $t_0 = 0$ e do ponto de lançamento $y_0 = 0$:

$$y = (v_0\text{sen}\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \tag{3}$$

Isolando t na Equação (2) e substituindo em (3), obtemos a Equação (4).

$$y = (\tan\alpha)x - \frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}x^2 \tag{4}$$

Fazendo

$$a = -\frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2} \quad \text{e} \quad b = \tan\alpha,$$

pois são constantes no movimento, podemos reescrever a Equação (4) da seguinte forma:

$$y = ax^2 + bx,$$

o que nos mostra que a trajetória descrita pela partícula, quando é desconsiderada a resistência do ar, é uma parábola.

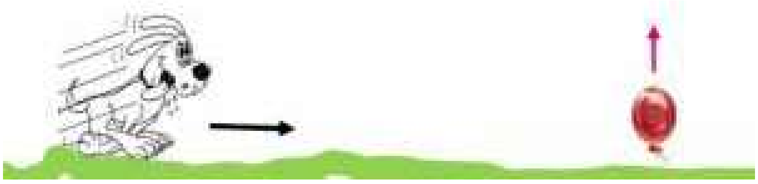
5.3 APLICAÇÕES INTERESSANTES SOBRE EQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS PARA DISCUTIR EM SALA DE AULA

5.3.1 O Cãozinho e o Balão

Problema 5.3. *Um cãozinho está a 10m de um balão pousado no solo. O cão começa a correr em direção ao balão no mesmo instante em que este se desprende do solo e inicia uma ascensão vertical, conforme mostrado na Figura 13. Se o cão corre com velocidade de 2m/s e o balão ascende com velocidade de 1m/s, qual a distância mínima entre o cão e o balão? Quantos segundos após o início da corrida essa distância é mínima?*

Resolução: Sabendo que a distância inicial entre o cachorro e o balão é de 10m e que ele corre a uma velocidade de 2m/s temos que a função que determina a distância (s) em função do

Figura 13 - O cãozinho e o balão

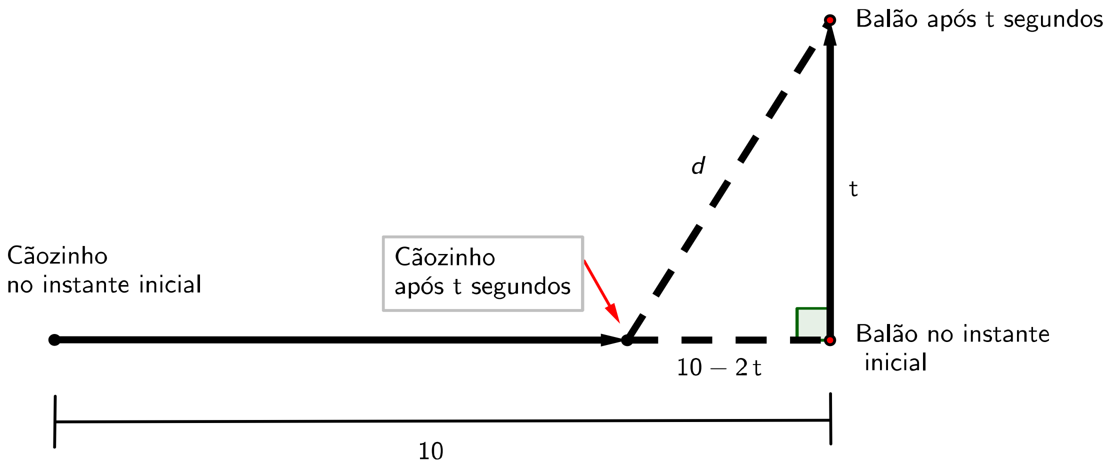


Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-descubra-as-idades.
Acesso em 24 de março de 2017.

tempo (t), entre o cachorro e o ponto de partida do balão é $s = 10 - 2t$.

Sabemos ainda que o balão sobe a uma velocidade de 1m/s, assim temos que a distância (h) em função do tempo, entre o balão e seu ponto de partida é dada por $h = t$. Como o cachorro corre horizontalmente e o balão sobe verticalmente, podemos representar essa situação através do triângulo retângulo, onde o catetos são a distância entre o cachorro e o ponto de partida do balão, ou seja, $s = 10 - 2t$; e a distância do balão ao solo, ou seja, $h = t$.

A hipotenusa é a distância entre o cachorro e o balão, que vamos chamar de d, conforme mostra a figura abaixo.



Assim,

$$d^2 = t^2 + (10 - 2t)^2$$

O nosso objetivo é encontrar a distância mínima entre o cachorro e o balão. Isso ocorre quando d^2 for mínimo. Mas d^2 é uma função quadrática e sua forma canônica é dada por

$$d^2 = 5(t-4)^2 + 20$$

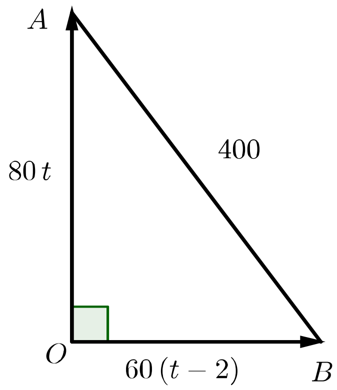
Assim, o valor mínimo da função d^2 é igual a 20, o qual ocorre em $t = 4$.

Portanto, a distância é mínima após 4 segundos. Note a distância mínima é igual a $\sqrt{20}$ metros.

5.3.2 Um Problema sobre Orientação de dois Carros

Problema 5.4. *Dois carros A e B começam no mesmo ponto O. O carro A começa a dirigir para o norte a 80 km/h. Duas horas mais tarde o carro B começa a dirigir para o leste em 60 km/h. Quanto tempo depois do carro A começar a viajar, é preciso que os dois carros fiquem a 400 quilômetros de distância?*

Resolução: Seja t o tempo, em horas, que os carros estão viajando, tais que a distância entre eles seja igual a 400 km. Assim, a distância percorrida pelo carro A é igual a $80t$ e a distância percorrida pelo carro B será igual a $60(t-2)$. Assim, respeitando as direções do problema, temos que o valor de t pode ser calculado pela relação de Pitágoras, conforme sugere a figura abaixo. Logo,



$$(80t)^2 + (60(t-2))^2 = 400^2$$

A equação acima é quadrática. Simplificando-a, obtemos

$$100t^2 - 144t - 1556 = 0$$

Usando a fórmula quadrática, segue que

$$t = \frac{144 \pm \sqrt{643136}}{200}$$

Temos duas soluções e precisamos determinar qual é a correta. Convertendo em decimais, com o apoio de uma calculadora, temos

$$t = 4,729788 \quad \text{e} \quad t = -3,289788$$

A resposta negativa simplesmente não faz sentido. Assim, o carro A viajou por aproximadamente 4,73 horas quando eles estavam finalmente a 400 quilômetros de distância. Além disso, mesmo que no problema não tenha sido solicitado, o segundo carro viajou por, aproximadamente, 2,73 horas.

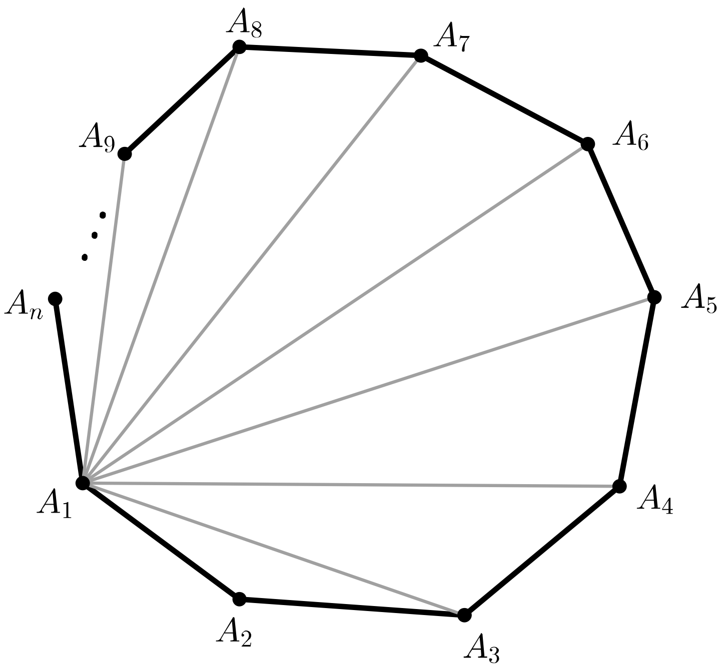
5.3.3 O Número de Diagonais de um Polígono Convexo

Problema 5.5. *Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo pode ser determinado por uma expressão quadrática em função do número de lados.*

Resolução:

Considere o polígono convexo $A_1A_2 \dots A_n$ de n lados representado na Figura 14.

Figura 14 - Polígono convexo de n lados



Fonte: Elaboração do autor

Note que de cada vértice partem $n-3$ diagonais. Logo, pelos n vértices podemos traçar $n(n-3)$ diagonais. Porém, cada diagonal foi contada duas vezes. Dessa forma, o número de diagonais é igual à metade de $n(n-3)$.

Portanto, O número de diagonais d de um polígono convexo de n lados é dado pela fórmula quadrática:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

ou, equivalentemente,

$$d = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

Apresentamos uma dedução construtiva, baseada no polígono acima. No entanto, sua demonstração segue pelo Princípio de Indução.

5.3.4 O Problema das torneiras

Problema 5.6. *Em um tanque há duas torneiras. Se ambas estiverem totalmente abertas, elas podem encher o tanque em 2 horas. Sabe-se que a segunda torneira gasta 1 hora mais do que a primeira para enchê-lo. Quanto tempo levaria cada torneira para encher o tanque?*

Resolução:

Seja V a capacidade do tanque e t o tempo, em horas, gasto pela primeira torneira para enchê-lo. Assim, temos que a vazão (volume de água por hora) da 1ª torneira será igual a $\frac{V}{t}$ e a vazão da 2ª será igual a $\frac{V}{t+1}$.

Logo, em 2 horas, o volume de água despejado pela 1ª e 2ª torneiras são iguais a $\frac{2V}{t}$ e $\frac{2V}{t+1}$, respectivamente.

Daí, segue a seguinte relação

$$V = \frac{2V}{t} + \frac{2V}{t+1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \tag{5}$$

Da Equação (5), obtemos a equação quadrática

$$t^2 - 3t - 2 = 0$$

cujas raízes são

$$t = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \quad \text{e} \quad t = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

Temos duas soluções e precisamos determinar qual é a correta. Convertendo em decimais, com o apoio de uma calculadora, temos

$$t_1 = 3,5616, \quad \text{e} \quad t_2 = -0,5616$$

Note que $t_2 = -0,5616$ não satisfaz a restrição de não negatividade. Assim, a 1ª torneira levaria aproximadamente 3,56 horas para encher o tanque e a 2ª levaria aproximadamente 4,56 horas.

Observação 5. *O número 2 na Equação* (5) *representa a capacidade de uma única torneira substituir a vazão das outras duas. Este problema é uma aplicação de Média Harmônica.*

5.3.5 Um Problema sobre uma Cultura de Bactérias em uma Estufa

Problema 5.7. *(Enem 2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão* $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, *em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.*

Intervalos de temperatura(^oC *)*	*Classificação*
$T<0$	*Muito baixa*
$0 \leq T \leq 17$	*Baixa*
$17 < T < 30$	*Média*
$30 \leq T \leq 43$	*Alta*
$T > 43$	*Muito alta*

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

a) *Muito baixa*

b) *Baixa*

c) *Média*

d) *Alta*

e) *Muito alta*

Resolução:

Inicialmente vamos escrever a função que modela a temperatura da estufa na sua forma canônica:

$$\begin{aligned}
T(h) &= -h^2+22h-85 \\
&= -\left[h^2-22h+85\right] \\
&= -\left[(h-11)^2-11^2+85\right] \\
&= -\left[(h-11)^2-36\right] \\
&= -(h-11)^2+36
\end{aligned}$$

Assim podemos verificar que a função assume valor máximo quando $h = 11$ e esse valor é igual a 36, ou seja, neste instante a temperatura no interior da estufa é igual a 36ºC. De acordo com a tabela apresentada no problema, esta temperatura está classificada como alta.

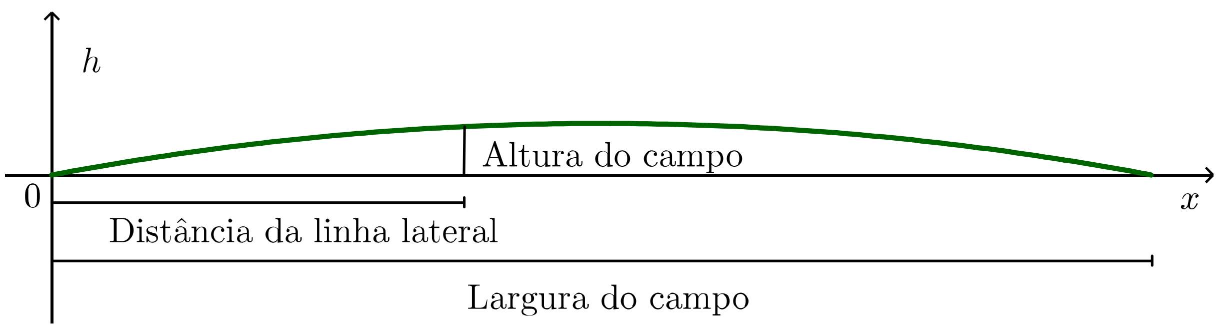
5.3.6 O Campo de Futebol

Problema 5.8. *O campo do estádio de futebol de um certo clube é de grama sintética e aparentemente, parece ser plano. No entanto, sua superfície real possui a forma de uma parábola, visto que é necessário que a água da chuva corra para os lados. Se tomarmos uma seção transversal desse campo, a superfície pode ser modelada pela função*

$$y = -0,000234(x-80)^2+1,5$$

em que x representa a distância da extremidade esquerda do campo e y representa a sua altura, conforme mostrado na Figura 15. Qual é a largura do campo? Note que a unidade de medida utilizada no modelo é dada em pés (ft).

Figura 15 - Campo de futebol



Fonte: Elaboração do autor

Resolução: Note que a largura do campo é igual a diferença entre as raízes da função $y = -0,000234(x-80)^2 + 1,5$. Sabemos que as raízes de uma função são os valores da variável independente x, para os quais se obtém $f(x) = 0$. Assim, precisamos encontrar os valores de x, tais que $-0,000234(x-80)^2 + 1,5 = 0$.

$$\begin{aligned}
0,000234(x-80)^2 &= 1,5 \\
(x-80)^2 &= \frac{1,5}{0,000234} \\
(x-80)^2 &= 6410,2564 \\
x-80 &= \pm\sqrt{6410,2564} \\
x-80 &\cong \pm 80
\end{aligned}$$

Logo, as raízes são $x = 80+80 = 160$ ou $x = 80-80 = 0$.

Portanto, a largura do campo é igual a 160 ft.

Observação 6. *Alguns alunos poderiam indagar o por quê $x = 0$ não é um zero da função $y = -0,000234(x-80)^2 + 1,5$, contrariando sua intuição baseada na Figura 15. É importante que o professor comente em sala de aula sobre os erros de aproximação nos experimentos e que o modelo matemático é uma aproximação do problema real. Note que $0,000234$ é uma aproximação de $0,000234375$, mas no modelo matemático foi preferível utilizar a forma decimal finita com três algarismos significativos. No entanto, em virtude da natureza do problema, $x = 0$ pode ser considerado uma solução da equação $-0,000234(x-80)^2 + 1,5 = 0$, assim como $x = 160$.*

5.3.7 Maximizando a Receita: Vendas de Bolsas

O Problema 5.9 é análogo ao Problema 5.1. Contudo o objetivo agora é descobrir como maximizar a receita na venda de bolsas.

Problema 5.9. *Uma empresa vende 45 mil bolsas por mês no valor de 500 reais cada. A empresa fez algumas pesquisas e percebeu que, para cada redução de 20 reais no preço, eles podem vender 5000 bolsas a mais por mês. Qual o valor que a empresa deverá vender cada bolsa para maximizar as receitas mensais?*

Resolução:

Primeiramente vamos modelar esta situação por meio de uma função. Note que para cada desconto de $R\$20,00$ no preço unitário da bolsa a empresa aumenta em 5000 o número de bolsas vendidas. Assim, a receita mensal pode ser expressa pela seguinte função quadrática:

$$y = (500 - 20x)(45000 + 5000x),$$

em que $500 - 20x$ representa o preço de venda de cada bolsa e $45000 + 5000x$ a quantidade de bolsas vendidas mensalmente.

Aplicando a propriedade distributiva e somando os termos semelhantes, temos que

$$y = -100000x^2 + 1600000x + 22500000$$

Como o coeficiente dominante da função quadrática é menor que zero, segue que ela admite valor máximo e o ponto de máximo é exatamente a abscissa do vértice. O valor dessa abscissa pode ser encontrado usando a relação $x_V = -\dfrac{b}{2a}$, ou seja,

$$x_V = -\frac{1600000}{-200000} = 8$$

Portanto, para maximizar a receita mensal devemos ter $x = 8$ e, consequentemente, cada bolsa deverá ser vendida por $500 - 20x = 340$ reais. Logo, para maximizar as receitas mensais, a empresa deverá vender cada bolsa por 340 reais.

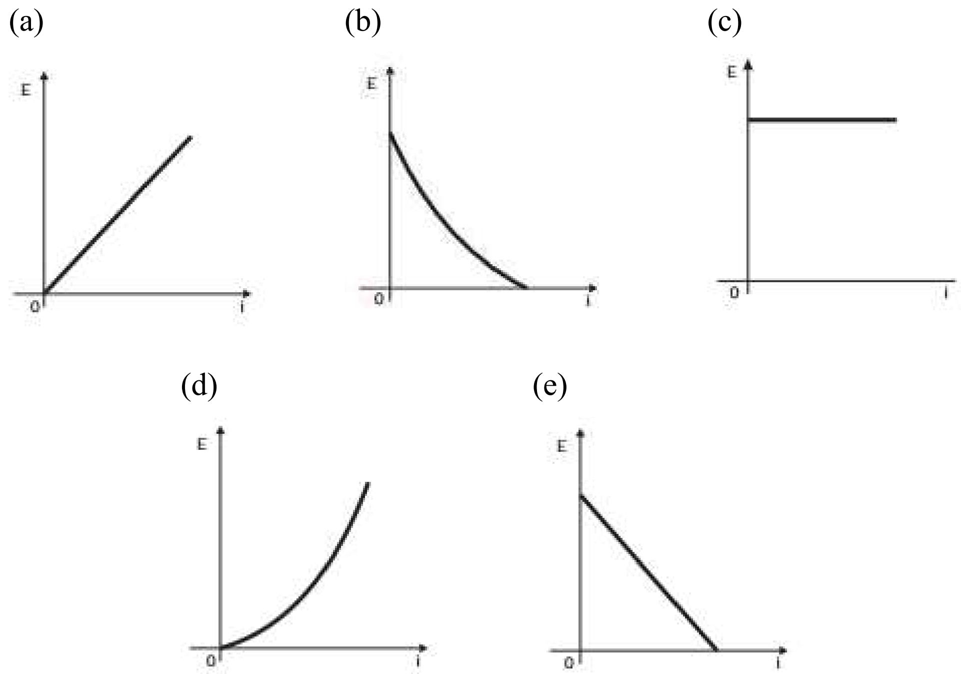
5.3.8 Um Problema sobre Chuveiros Elétricos

O Problema 5.10 foi extraído do ENEM 2012 e é uma aplicação de função quadrática, o qual relaciona a potência P de um chuveiro elétrico com as grandezas resistência elétrica, corrente elétrica e energia elétrica. Uma das exigências é que o candidato saiba relacionar quando duas grandezas são diretamente proporcionais e quando uma é diretamente proporcional ao quadrado da outra. Posteriormente, exige que o mesmo faça a transposição algébrica para a gráfica.

Problema 5.10. *Existem no mercado chuveiros elétricos de diferentes potências, que representam consumos e custos diversos. A potência (P) de um chuveiro elétrico é dada pelo produto entre sua resistência elétrica (R) e o quadrado da corrente elétrica (i) que por ele circula. O consumo de energia elétrica (E), por sua vez, é diretamente proporcional à potência do aparelho.*

Considerando as características apresentadas, qual dos gráficos a seguir representa a relação entre a energia consuida (E) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica (i) que circula por ele?

Resolução: Desconsiderando o conhecimento prévio das fórmulas que relacionam as gran-



dezas citadas no problema e analisando apenas as hipóteses dadas, temos que

$$P = \alpha R i^2 \quad \text{e} \quad E = \beta P$$

em que α e β são constantes reais.
Assim, segue que

$$\frac{E}{\beta} = \alpha R i^2$$

Logo,

$$E = \lambda R i^2$$

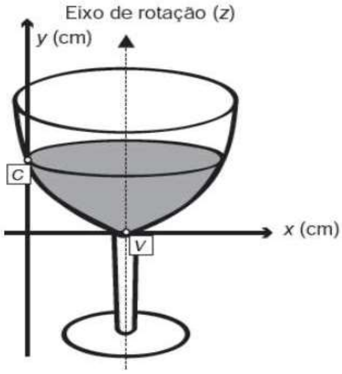
em que $\lambda = \alpha\beta$.

Como o gráfico de E em função de i passa pela origem e é representado por uma parábola, segue que a resposta correta é a letra d).

5.3.9 Uma Taça Parabólica

Um dos problemas aplicados no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) no ano de 2013 referia-se à determinar a altura do líquido em uma taça. No entanto, essa taça tinha o formato parabólico. Essa informação, além de contribuir no cálculo da altura do líquido, incentiva aos alunos a gostar de matemática e ver que ela está inserida no nosso cotidiano, em particular, nas formas dos objetos que utilizamos. O problema segue abaixo:

Problema 5.11. *A parte inferior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.*



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$*, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:*

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 6

Resolução:

Como o vértice da parábola está localizado sobre o eixo x, temos que $\Delta = 0$.

Assim:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ (-6)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)C &= 0 \\ 36 - 6C &= 0 \\ C &= 6 \end{aligned}$$

Podemos notar que o valor do coeficiente C é numericamente igual à medida da altura do líquido. Logo, a resposta correta está representada no item e).

Observação 7. *Foi apresentada uma proposta de resolução, mas sugerimos que o professor discuta com seus alunos outras propostas, como por exemplo, determinar o valor da abscissa do vértice e, sabendo-se que esta abscissa é um zero da função, determina-se o valor de C.*

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisar a história da matemática, pode-se perceber que as equações quadráticas têm um lugar de destaque, muitas foram as civilizações que se dedicaram ao seu estudo. Além disso, o estudo de equações e funções quadráticas é tema inerente do currículo do Ensino Básico brasileiro, porém uma considerável parcela dos estudantes do Ensino Básico queixam-se sobre o motivo de se estudar algo que eles acreditam não estar relacionado com a vida deles. Acreditamos que esta impressão está diretamente ligada ao uso de atividades repetitivas de manipulação algébrica sem nenhum vínculo com o cotidiano dos alunos. Não defendemos a extinção de tais atividades, mas acreditamos que problemas que visam estabelecer relações entre o conteúdo e a vida do aluno oportunizam um aprendizado significativo. Nessa perspectiva, este trabalho disponibiliza aos professores e alunos do Ensino Básico uma coletânea de problemas que podem ser modelados por meio de equações e funções quadráticas, problemas estes que relacionam o cotidiano do aluno com o tema. Além disso, traz algumas das aplicações da parábola em equipamentos como o farol do carro, antena parabólica e de radar, dentre outros, que a maioria utiliza sem conhecer os fundamentos matemáticos existentes por trás deles, afim de instigá-los no estudo do tema.

REFERÊNCIAS

ALQUIMIM, B. C. M. *Uma proposta do ensino de função quadrática utilizando o Geogebra*. 2016. 43 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, BA, 2016.

ANJOS, D. M. *Aplicações das Funções Afim e Quadrática na Educação para o Trânsito*. 2015. 54 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, CE, 2015.

ASSIS, V. H. D. *Características da função quadrática e a metodologia de resolução de problemas*. 2015. 82 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, 2015.

BRAGA, E. R.; VIALI, L. Função quadrática - análise das alterações gráficas mediante a modificação dos parâmetros da expressão algébrica. In: *X Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática, Cultura e Diversidade*. [S.l.: s.n.], 2010.

BRASIL. Secretaria de educação básica. pcn+ ensino médio ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/cieênciasnatureza.pdf>. In: *Acesso em 24 de abril de 2017*. [S.l.: s.n.], 2007.

CANCE, C. A. *Projeto canhão : o ensino de funções quadráticas com o auxílio do software GeoGebra*. 2015. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos,SP, 2015.

CRUZ, P. H. C. *Funções no 1º Ano do Ensino Médio*. 2015. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

FRAGOSO, W. C. *Equação do 2º grau: uma abordagem histórica*. [S.l.]: Unijuí, 1999.

GOMES, G. Matemática para todos. <http://cedt-matematica.blogspot.com.br/2014/10/equacao-do-2-grau-e-suas-aplicacoes.html>. In: *Acesso em 25 de março de 2017*. [S.l.: s.n.], 2014.

JÚNIOR, E. J. S. *Uso do geogebra no ensino das funções quadráticas: uma proposta para sala de aula.* 2011. 51 f. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Departamento de Matemática, João Pessoa, 2011.

LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

NICE, K.; HARRIS, T. Como funciona a tv por satélite». como tudo funciona. <http://www.projetoderedes.com.br/artigos/artigo_como_funciona_a_tv_por_satelite.php>. In:

Acesso em 02 de maio de 2017. [S.l.: s.n.], 2002.

PAIVA, M. A. B. *Uma proposta de utilização do winplot no ensino da função quadrática nas turmas do 9º ano.* 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins. Palmas, TO, 2016.

RIBEIRO, D. M. A. A. *Uma abordagem didática para a função quadrática*. 2013. 58 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF - Campos dos Goytacazes., 2013.

ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. *Matemática e Atualidade*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - Coleção PROFMAT, 2015.

SANTOS, M. A. S. "radar"; brasil escola. disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/fisica/radar.htm>. In: *Acesso em 02 de maio de 2017*. [S.l.: s.n.], 2017.

SILVA, T. L. *O ensino de funções polinomiais do 2º grau: Uma aplicação com o software GeoGebra*. 2015. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Mossoró, RN, 2015.

SOARES, J. H. S. *Função Quadrática.* 2013. 40 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exata e da Terra. Natal, 2013.

SOUSA, F. A. L. *Funções quadráticas: Estudo do gráfico das funções quadráticas.* 2013. 42 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2013.

SOUZA, M. H. Clássicos da arquitetura: Igreja da pampulha/oscar niemeyer. <http://www.archdaily.com.br/br/01-83469/classicos-da-arquitetura-igreja-da-pampulha-slash-oscar-niemeyer>. In: *Acesso em 13 de maio de 2017*. [S.l.: s.n.], 2012.

APÊNDICE A - MAIS APLICAÇÕES ENVOLVENDO RELAÇÕES QUADRÁTICAS

Neste capítulo será apresentado algumas aplicações cujo modelo matemático está associado à uma relação quadrática.

A.1 A Ponte Juscelino Kubitschek

A Ponte Juscelino Kubitschek em Brasília é uma lindíssima ponte que merece ser vista! Esta ponte, mostrada na Figura 16, ao ser projetada, os seus arcos arquitetônicos foram descritos através de uma função quadrática (três arcos logo três parábolas).

Figura 16 - A Ponte Juscelino Kubitschek

Fonte: (GOMES, 2014)

A.2 Forno solar em Odeillo

Construído na década de 60, este grandioso forno, representado na Figura 17, utiliza-se da propriedade refletora da parábola para focalizar a energia solar e assim utilizá-la para fins metalúrgicos.

Figura 17 - Forno solar em Odeillo

Fonte:
https://casailicia.wordpress.com/2015/11/10/circuit-de-decouverte-des-fours-solaires-des-pyrenees-orientales/.
Acesso em 16 de maio de 2017

A.3 Walkie Talkie

A Figura 18, nos mostra uma foto de um prédio localizado na cidade de Londres, projetado pelo arquiteto Rafael Vinoly. Este prédio recebeu o apelido, “Walkie Talkie”, devido a sua forma curva, forma essa que causou um incidente no ano de 2013, ao refletir os raios solares e derreter parte da lataria de um automóvel que se encontrava estacionado na rua, dentre outros problemas causados em virtude de sua forma.

Figura 18 - Walkie Talkie

Fonte: http://g1.globo.com/mundo/noticia/2015/09/predio-que-derrete-carros-ganha-premio-de-aberracao-arquitetonica.html.
Acesso em 16 de maio de 2017.

A.4 Igreja da Pampulha

A Igreja de São Francisco de Assis, apresentada na Figura 19, conhecida como Igreja da Pampulha, foi projetada pelo renomado arquiteto Oscar Niemeyer e inaugurada em 1943. A Igreja da Pampulha apresenta em sua estrutura arcos parabólicos que formam com um único elemento a cobertura e as paredes de cada abóboda.

Figura 19 - Igreja da Pampulha

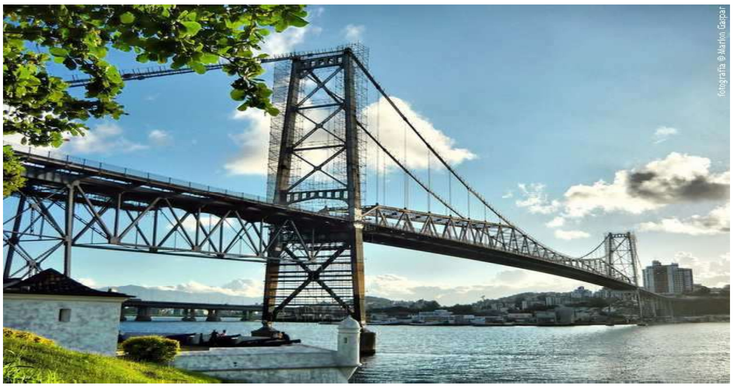
Fonte: (SOUZA, 2012)

A.5 Ponte Hercílio Luz

Ponte pênsil é uma ponte suspensa, sustentada por cabos ou tirantes de suspensão, feitos com um formato parabólico.

A ponte Hercílio Luz é a maior ponte pênsil do Brasil, localizada em Florianópolis, construída na década de 20, recebe este nome em homenagem ao seu idealizador. Uma foto desta ponte pode ser vista na Figura 20.

Figura 20 - Ponte Hercílio Luz



Fonte: http://www.imobiliariaflorianopolis.com/florianopolis/cultura-florianopolis/ponte-hercilio-luz.html. Acesso em 16 de maio de 2017.