UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

MAURO NODA

SISTEMAS LINEARES E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Campinas
2017

MAURO NODA

SISTEMAS LINEARES E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Maria Aparecida Diniz Ehrhardt

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO MAURO NODA, E ORIENTADA PELA PROF. DR. MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT

Campinas
2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

N673s
Noda, Mauro, 1987-
Sistemas lineares e aplicações no ensino médio / Mauro Noda. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Maria Aparecida Diniz Ehrhardt.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas lineares. 2. Métodos diretos (Matemática) - Processamento de dados. 3. Métodos iterativos (Matemática). I. Ehrhardt, Maria Aparecida Diniz,1956-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Linear systems and applications in high school
Palavras-chave em inglês:
Linear systems
Direct methods (Mathematics) - Data processing
Iterative methods (Mathematics)
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Maria Aparecida Diniz Ehrhardt [Orientador]
Kelly Cristina Poldi
Grasiele Cristiane Jorge
Data de defesa: 20-02-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 20 de fevereiro de 2017

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT

Prof(a). Dr(a). KELLY CRISTINA POLDI

Prof(a). Dr(a). GRASIELE CRISTIANE JORGE

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros
encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Agradecimentos

À professora Maria Aparecida Diniz Ehrhardt, pelo excelente trabalho de orientação no desenvolvimento deste trabalho.

À minha família, pelo apoio que sempre me deu ao longo de toda a minha vida.

Aos meus amigos, pelo companheirismo e apoio.

Aos meus professores, pela importante contribuição na minha formação.

À minha noiva Rebecca, por me acompanhar em todos os momentos e me ensinar como ser uma pessoa melhor a cada dia.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À Unicamp, por toda a estrutura que sempre me forneceu.

Resumo

Neste trabalho estudamos métodos de resolução de sistemas lineares. Os métodos diretos apresentados aqui são: eliminação de Gauss e fatoração LU. Os métodos iterativos estudados são: algoritmo de Gauss-Jacobi, algoritmo de Gauss-Seidel e algoritmo de Kaczmarz. A eficiência dos métodos iterativos foi analisada a partir de experimentos computacionais.

Palavras-chave: Sistemas lineares, Método direto (Matemática) – Processamento de dados, Método iterativos (Matemática).

Abstract

In this work we study methods for solving systems of linear equations. The direct methods presented here are: Gauss elimination and LU factorization. The iterative methods studied are: Gauss-Jacobi algorithm, Gauss-Seidel algorithm and Kaczmarz algorithm. The iterative methods efficiency was analized using computer experiments.

Key-words: Linear systems, Direct methods (Mathematics) – Data processing, Iterative methods (Mathematics).

Sumário

Introdução

Ao longo do ensino de matemática na educação básica, o conteúdo de sistemas lineares é estudado em diversos momentos. No período do ensino fundamental II, os alunos aprendem resoluções de sistemas pequenos, geralmente com apenas duas equações e duas incógnitas e apresentando solução única. Posteriormente, a resolução deste tipo de sistema linear é muito utilizada como ferramenta para obter a solução de outros problemas, tanto na disciplina de matemática como em outras matérias. Já no ensino médio, o estudo de sistemas lineares é aprofundado com técnicas de resolução de sistemas com um número maior de equações e incógnitas, sendo também introduzida a análise de existência e unicidade de solução, assim como o estudo da resolução de sistemas que possuem menos equações do que incógnitas.

Este trabalho tem como objetivo o estudo de métodos de resolução de sistemas lineares. No Capítulo 2 serão apresentados alguns métodos diretos, dentre os quais está a eliminação de Gauss, estratégia muito utilizada durante o ensino médio, mas normalmente ensinada com o nome de escalonamento de sistemas lineares [5]. Com o intuito de tornar o estudo do assunto mais abrangente, também serão estudados, no Capítulo 3, alguns métodos iterativos para resolução de sistemas lineares, ainda que estes não sejam objeto de estudo na educação básica. Depois de descritos os métodos, o Capítulo 4 traz uma comparação da eficiência de cada estratégia através de experimentos com o *software* MatLab [10].

Como a resolução de sistemas lineares exige uma quantidade muito grande de cálculos numéricos, o uso de *softwares* para esse estudo é muito benéfico. Dessa forma, este trabalho traz, no Capítulo 5, um plano para professores de ensino médio aplicarem em sala de aula, com o intuito de que seus alunos possam praticar a teoria da eliminação de Gauss através do *software* Open Office Calc [11] .

Capítulo 1
Introdução a sistemas lineares

Definição 1: Chamamos de **equação linear** uma igualdade da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b\,,$$

em que $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ são coeficientes reais e $x_1, x_2, \dots, x_n$ são incógnitas reais.

Definição 2: Chamamos de **sistema linear** um conjunto finito de equações lineares aplicadas em um mesmo conjunto de incógnitas. Vemos abaixo um exemplo de representação de um sistema linear de equações nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Podemos representar esse sistema na forma matricial $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

onde A é a matriz dos coeficientes, x é o vetor das variáveis e b é o vetor dos termos independentes. A matriz completa desse sistema linear é

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}.$$

1.1 - Solução de um sistema linear

Teorema 1: Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz invertível. Então, para cada $b \in \mathbb{R}^n$ a equação $Ax = b$ terá uma única solução dada por $x = A^{-1}b$.

Demonstração: Considere um b arbitrário e seja I a matriz identidade. A solução do sistema existe porque quando x é substituído por $A^{-1}b$, temos $Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$. Portanto, $A^{-1}b$ é uma solução.

Para provar que esta solução é única, vamos mostrar que, se y é uma solução qualquer, então $y = A^{-1}b$.

$$Ay = b \leftrightarrow$$

$$A^{-1}(Ay) = A^{-1}b \leftrightarrow$$

$$(A^{-1}A)y = A^{-1}b \leftrightarrow$$

$$Iy = A^{-1}b \leftrightarrow$$

$$y = A^{-1}b\,.$$

∎

Ao resolver um sistema linear de n equações e n incógnitas com solução única que seja do tipo $Ax = b$, a solução pode ser obtida algebricamente através da expressão $x = A^{-1}b$. Apesar da solução ser obtida dessa forma, deve-se considerar o número de operações envolvidas, uma vez que calcular a matriz A^{-1} e, em seguida, multiplicá-la por b pode gerar uma quantidade muito grande de operações. Além disso, há uma instabilidade numérica no cálculo da matriz inversa (ver [13]). Por esses motivos, a resolução de um sistema linear através da expressão $x = A^{-1}b$ é um método não eficiente. Veremos no Capítulo 2 alguns métodos diretos de obtenção da solução. Para isso são necessárias algumas definições e alguns resultados prévios.

Definição 3: Dois sistemas lineares S_1 e S_2 são **equivalentes** se toda solução de S_1 for solução de S_2 e toda solução de S_2 for solução de S_1.

Exemplo 1: Observemos os sistemas lineares a seguir:

$$S_1: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ \qquad\quad x_2 = 1. \end{cases}$$

Como a solução de S_1 é $\{(1,1)\}$ e a solução de S_2 também é $\{(1,1)\}$, dizemos que estes sistemas são equivalentes.

Lema 1: Considere um sistema linear **S**. Ao multiplicarmos a i-ésima equação de **S** por uma constante real $k \neq 0$, obtemos um sistema **S'** equivalente a **S**.

Demonstração: Seja S o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Multiplicando a i-ésima linha de **S** por k, obtemos $\boldsymbol{S'}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + ka_{i3}x_3 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Suponha que $x = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$ seja solução de **S**. Para provar que x também é solução de **S'**, devemos mostrar que este conjunto satisfaz a equação $ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + ka_{i3}x_3 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i$, para qualquer $i \in \{1,2, \ldots, n\}$.

Pela hipótese, x satisfaz todas as equações de **S**. Assim,

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i \text{ , para todo } i \in \{1,2, \ldots, n\} \text{ .} \quad (1)$$

Agora, na i-ésima equação do sistema **S'**, temos

$$ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + ka_{i3}\alpha_3 + \cdots + ka_{in}\alpha_n = k(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \cdots + a_{in}\alpha_n).$$

Pela Equação (1), temos que

$$ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + ka_{i3}\alpha_3 + \cdots + ka_{in}\alpha_n = k(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \cdots + a_{in}\alpha_n) = kb_i.$$

Assim, $\boldsymbol{x}$ satisfaz a i-ésima equação de **S'**. Logo, toda solução de **S** também é solução de **S'**. Para mostrar que toda solução de **S'** também é solução de **S**, o desenvolvimento é análogo ao anterior, mas multiplicaremos a i-ésima equação por $1/k$. Portanto, **S** e **S'** são equivalentes.

■

Lema 2: Considere um sistema linear **S**. Ao adicionarmos um múltiplo de uma equação de **S** à outra, obtemos um sistema linear **S'** equivalente a **S**.

Demonstração: Seja S o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Multiplicando a i-ésima linha de **S** por k e adicionando à j-ésima linha, obtemos o sistema $\boldsymbol{S'}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ (a_{j1} + ka_{i1})x_1 + (a_{j2} + ka_{i2})x_2 + (a_{j3} + ka_{i3})x_3 + \cdots + (a_{jn} + ka_{in})x_n = b_j + kb_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Suponha que $x = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$ seja solução de **S**. Para provar que x também é solução de **S'**, devemos mostrar que x satisfaz a equação

$$(a_{j1} + ka_{i1})x_1 + (a_{j2} + ka_{i2})x_2 + (a_{j3} + ka_{i3})x_3 + \cdots + (a_{jn} + ka_{in})x_n = b_j + kb_i \ . \quad (2)$$

Pela hipótese, x satisfaz todas as equações de S, assim

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i \text{ e} \quad (3)$$
$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + a_{j3}\alpha_3 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_i \ . \quad (4)$$

Consideremos a expressão

$$\left(a_{j1} + ka_{i1}\right)\alpha_1 + \left(a_{j2} + ka_{i2}\right)\alpha_2 + \left(a_{j3} + ka_{i3}\right)\alpha_3 + \cdots + \left(a_{jn} + ka_{in}\right)\alpha_n =$$

$$a_{j1}\alpha_1 + ka_{i1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ka_{i2}\alpha_2 + a_{j3}\alpha_3 + ka_{i3}\alpha_3 + \cdots + a_{jn}\alpha_n + ka_{in}\alpha_n =$$

$$(a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + a_{j3}\alpha_3 + \cdots + a_{jn}\alpha_n) + k(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \cdots + a_{in}\alpha_n) \, .$$

Pelas Equações (3) e (4), temos que

$$(a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n) + k(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n) = b_j + kb_i \, .$$

Assim, x satisfaz a Equação (2). Logo, toda solução de **S** também é solução de **S'**. Para mostrar que toda solução de **S'** também é solução de **S**, o desenvolvimento é semelhante ao anterior. Portanto, **S** e **S'** são equivalentes.

■

Teorema 2: Seja $Ax = b$ um sistema linear, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x, b \in \mathbb{R}^n$. Aplicando sobre as equações uma sequência de operações escolhidas entre:

(i)-trocar duas equações;
(ii)-multiplicar uma equação por uma constante não nula;
(iii)-adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;

obtemos um sistema $A'x = b'$ equivalente ao sistema $Ax = b$.

Demonstração: Para demonstrar o Teorema 2, devemos mostrar que as operações (i) , (ii) , (iii) não alteram a solução do sistema linear $Ax = b$.

• A operação (i) não muda a solução do sistema, pois as equações ainda serão as mesmas, mas escritas em outra ordem.
• A operação (ii) não muda a solução do sistema pelo Lema 1.
• A operação (iii) não muda a solução do sistema pelo Lema 2.

Assim, ao aplicar operações escolhidas entre (i) – (iii), obtemos um sistema $A'x = b'$ equivalente ao sistema $Ax = b$.

■

Definição 4: Dado um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \,, \end{cases}$$

dizemos que o sistema é **triangular superior** se $a_{ij} = 0 \;\; \forall\, i > j$. Assim, podemos escrever um sistema linear triangular superior como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

A resolução de um sistema linear triangular superior, cuja matriz de coeficientes não é singular, pode ser obtida começando pela última equação e depois voltando para todas as outras equações.

Da última equação, temos

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Da penúltima equação, temos

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}\, x_n}{a_{n-1,n-1}}.$$

Assim, podemos obter todas as outras incógnitas de nosso sistema seguindo a sequência

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^{n} \ a_{i\,k}\, x_k}{a_{i\,i}}.$$

Observe que $a_{ii} \neq 0$, para todo $i = 1,2, \ldots, n$, pois $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ e A é não singular.

■

Exemplo 2: Obtenha a solução do sistema linear a seguir

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ \quad\ \ 2x_2 + \ \ x_3 = 7 \\ \qquad\qquad 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Da última equação, temos

$$x_3 = 3\,.$$

Da penúltima equação, temos

$$x_2 = \frac{7 - x_3}{2} = 2\,.$$

Da primeira equação, temos

$$x_1 = \frac{8 - 3x_3 + x_2}{1} = 1\,.$$

Logo, a solução deste sistema é

$$\{(1,2,3)\}.$$

Definição 5: Dado um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n\,, \end{cases}$$

dizemos que o sistema é **triangular inferior** se $a_{ij} = 0 \ \forall \, i < j$. Assim, podemos escrever um sistema linear triangular inferior como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3 \\ \quad \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

A resolução de um sistema linear triangular inferior, cuja matriz de coeficientes não é singular, pode ser obtida começando pela primeira equação e depois passando para as equações seguintes.

Da primeira equação, temos

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Da segunda equação, temos

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}\, x_1}{a_{22}}.$$

Assim, podemos obter todas as outras incógnitas de nosso sistema seguindo a sequência

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \ a_{i\,k}\, x_k}{a_{i\,i}}.$$

Observe que $a_{ii} \neq 0$, para todo $i = 1,2,\ldots,n$, pois $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ e A é não singular.

■

Exemplo 3: Obtenha a solução do sistema linear a seguir

$$\begin{cases} 2x_1 & = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 & = 7 \\ 1x_1 + 3x_2 + \ 2x_3 & = 13. \end{cases}$$

Da primeira equação, temos

$$x_1 = 1\,.$$

Da segunda equação, temos

$$x_2 = \frac{7 - 3x_1}{2} = 2\,.$$

Da terceira equação, temos

$$x_3 = \frac{13 - 1x_1 - 3x_2}{2} = 3\,.$$

Logo, a solução deste sistema é

$$\{(1,2,3)\}.$$

Capítulo 2
Métodos diretos para sistemas lineares

Neste capítulo e nos próximos, vamos considerar a resolução de sistemas lineares da forma

$$Ax = b, \text{ onde } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ e } x, b \in \mathbb{R}^n. \qquad (5)$$

Os métodos diretos de resolução de sistemas lineares utilizam um número finito de operações para chegar a uma solução exata, caso exista, do sistema linear [13]. Na educação básica, é estudada a resolução de sistemas lineares através da Regra de Cramer ([3], [5] e [12]), porém esta estratégia não é adequada para encontrar a solução de sistemas de ordem de dezenas, já que o número de operações se torna muito grande. Esse método, aplicado em um sistema de n equações e n incógnitas envolve o cálculo de $n+1$ determinantes de ordem n. Se n for igual a 20 o número de operações efetuadas será $21 \times 20! \times 19$ multiplicações [13].

Estudaremos, a seguir, outros métodos diretos.

2.1 - Eliminação de Gauss

O método da eliminação de Gauss consiste em utilizar as operações citadas no Teorema 2 para transformar um sistema S_1 em um sistema equivalente S_2 que seja triangular superior. Vejamos abaixo qual é o procedimento para que essa transformação seja aplicada a um sistema $n \times n$ do tipo $Ax = b$ com $\det(A) \neq 0$.

Este método é performado em estágios, de forma que no estágio k a variável x_k será eliminada das equações $k+1, k+2, \ldots, n$.

Estágio 1:

Como $\det(A) \neq 0$, podemos escrever o sistema linear de forma que a_{11} seja diferente de zero permutando equações. O coeficiente a_{11} recebe o nome de **pivô**. Subtraímos da i-ésima equação a primeira equação multiplicada por $k_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = 2,3,\ldots,n$. Assim, todos os coeficientes da incógnita x_1, a partir da segunda linha, serão iguais a zero. O número k_{i1} recebe o nome de **multiplicador**. No final do estágio 1, a matriz A fica modificada e será denotada $A^{(1)}$.

Estágio 2:

Como $\det(A) \neq 0$, podemos escrever o sistema linear de forma que a primeira equação fique fixa e que $a_{22}^{(1)}$ seja diferente de zero permutando equações. O coeficiente $a_{22}^{(1)}$ recebe o nome de pivô. Subtraímos da i-ésima equação a segunda equação multiplicada por $k_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, $i = 3,4,5,\dots,n$. Assim, todos os coeficientes da incógnita x_2, a partir da terceira linha, serão iguais a zero. O número k_{i2} recebe o nome de **multiplicador**.

Estágios seguintes:

Repetindo o processo até o estágio $n-1$, transformaremos o sistema linear $Ax = b$ em um sistema linear equivalente $A'x = b'$ que será triangular superior.

Exemplo 4: Utilize a eliminação de Gauss para transformar o sistema linear seguinte em um sistema equivalente que seja triangular superior e, em seguida, resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Vamos escrever a matriz completa deste sistema linear

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estágio 1:

$$k_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{3}{2} \qquad e \qquad k_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - k_{21}L_1 \qquad e \qquad L_3 \leftarrow L_3 - k_{31}L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & -1/2 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

Estágio 2:

$$k_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-1}{-1/2} = 2.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - k_{32}L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & -1/2 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Através da eliminação de Gauss, transformamos o sistema inicial em outro equivalente que agora é triangular superior.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ \quad -\dfrac{1}{2}x_2 - 5x_3 = -6 \\ \qquad\qquad 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Podemos resolver o sistema acima do seguinte modo:

Da última equação, temos

$$x_3 = 1\,.$$

Da penúltima equação, temos

$$x_2 = \frac{-6 + 5x_3}{-1/2} = 2\,.$$

E da primeira equação, temos

$$x_1 = \frac{4 - 4x_3 + 3x_2}{2} = 3\,.$$

Logo, a solução do sistema será

$$\{(3,2,1)\}\,.$$

Em um sistema linear de $n \times n$ o algoritmo realiza $(4n^3 + 3n^2 - 7n)/6$ operações na fase da eliminação e durante a resolução do sistema linear triangular superior são realizadas n^2 operações. Assim, o total de operações para se resolver um sistema linear pelo método da eliminação de Gauss é $(4n^3 + 9n^2 - 7n)/6$ [13]. Novamente podemos perceber a vantagem desta estratégia com relação à Regra de Cramer, que tem o número total de operações proporcional a $(n + 1)!$.

2.2 - Trabalhando com pivôs próximos de zero

Quando tratamos de resoluções computacionais de sistemas lineares, realizar cálculos com um pivô muito próximo de zero pode gerar resultados com erros de arredondamento, pois cada multiplicador é obtido através da razão de um coeficiente pelo pivô. Dessa forma, quando temos um pivô muito pequeno, teremos um multiplicador muito grande e isso nos leva a erros de arredondamento. Para evitar esse caso, podemos refinar o método da eliminação de Gauss utilizando uma estratégia de escolha de pivôs.

2.2.1 - Pivoteamento parcial

O pivoteamento parcial consiste em escolher como pivô o coeficiente de maior módulo entre os coeficientes da coluna na qual estamos gerando zeros e usar a permutação de linhas do sistema linear para realizar este processo.

Exemplo 5: Utilize a estratégia de pivoteamento parcial para escolher o pivô de cada etapa da eliminação de Gauss e resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Os coeficientes da primeira coluna do sistema são 2, 3 e 4. Assim, o pivô a ser escolhido é aquele cujo módulo é o maior, que neste caso é 4. Portanto, trocamos a posição das linhas 1 e 3

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Vamos escrever a matriz completa deste sistema linear no Estágio 1

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Estágio 1:

$$k_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{3}{4} \qquad e \qquad k_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{4}.$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - k_{21}L_1 \qquad e \qquad L_3 \leftarrow L_3 - k_{31}L_1$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 1/4 & -5/4 & -3/4 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Os coeficientes da segunda coluna a partir da segunda linha são $1/4$ e $1/2$. Assim, o pivô a ser escolhido é aquele cujo módulo é o maior, que neste caso é $1/2$. Portanto, trocamos a posição das linhas 2 e 3

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & 1/4 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

Estágio 2:

$$k_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - k_{32}L_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -5/2 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

O sistema linear inicial foi transformado em outro equivalente que agora é triangular superior.

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 = \frac{7}{2} \\ \qquad\qquad \frac{5}{2}x_3 = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Podemos resolver o sistema acima do seguinte modo:

Da última equação, temos

$$x_3 = 1\,.$$

Da penúltima equação, temos

$$x_2 = \frac{7/2 + (5/2)x_3}{1/2} = 2\,.$$

E da primeira equação, temos

$$x_1 = \frac{1 - 3x_3 + 7x_2}{4} = 3\,.$$

Logo, a solução do sistema será

$$\{(3,2,1)\}\,.$$

2.2.2 - Pivoteamento completo

O pivoteamento completo consiste em escolher como pivô o coeficiente de maior módulo entre todos os coeficientes do sistema em cada etapa e usar permutação de linhas e colunas do sistema linear para realizar este processo.

Exemplo 6: Utilize a estratégia de pivoteamento completo para escolher o pivô de cada etapa da eliminação de Gauss e resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Entre todos os coeficientes, o de maior módulo é -7.
Assim, podemos trocar a posição das linhas 1 e 3:

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Além disso, podemos trocar a posição das colunas 1 e 2:

$$\begin{cases} -7x_2 + 4x_1 + 3x_3 = 1 \\ -5x_2 + 3x_1 + x_3 = 0 \\ -3x_2 + 2x_1 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Vamos escrever a matriz completa deste sistema linear no Estágio 1

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Estágio 1:

$$k_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7} \qquad e \qquad k_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}.$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - k_{21}L_1 \qquad e \qquad L_3 \leftarrow L_3 - k_{31}L_1,$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1/7 & -8/7 & -5/7 \\ 0 & 2/7 & 19/7 & 25/7 \end{pmatrix}.$$

Ao final do Estágio 1, transformamos o sistema inicial em

$$\begin{cases} -7x_2 + 4x_1 + 3x_3 = 1 \\ 0x_2 + (1/7)x_1 + (-8/7)x_3 = -5/7 \\ 0x_2 + (2/7)x_1 + (19/7)x_3 = 25/7. \end{cases}$$

Os coeficientes a partir da segunda linha são $1/7$, $-8/7$, $2/7$ e $19/7$. Assim, o pivô a ser escolhido é aquele cujo módulo é o maior, que neste caso é $19/7$. Assim, podemos trocar a posição das linhas 2 e 3:

$$\begin{cases} -7x_2 + 4x_1 + 3x_3 = 1 \\ 0x_2 + (2/7)x_1 + (19/7)x_3 = 25/7 \\ 0x_2 + (1/7)x_1 + (-8/7)x_3 = -5/7. \end{cases}$$

Depois, podemos trocar a posição das colunas 2 e 3:

$$\begin{cases} -7x_2 + 3x_3 + 4x_1 = 1 \\ 0x_2 + (19/7)x_3 + (2/7)x_1 = 25/7 \\ 0x_2 + (-8/7)x_3 + (1/7)x_1 = -5/7. \end{cases}$$

Vamos escrever a matriz completa deste sistema linear no Estágio 2

$$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 19/7 & 2/7 & 25/7 \\ 0 & -8/7 & 1/7 & -5/7 \end{pmatrix}.$$

Estágio 2:

$$k_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-8/7}{19/7} = -8/19.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - k_{32}L_2$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 19/7 & 2/7 & 25/7 \\ 0 & 0 & 5/19 & 15/19 \end{pmatrix}.$$

O sistema linear inicial foi transformado em outro equivalente que agora é triangular superior.

$$\begin{cases} -7x_2 + 3x_3 + 4x_1 = 1 \\ \dfrac{19}{7}x_3 + \dfrac{2}{7}x_1 = \dfrac{25}{7} \\ \dfrac{5}{19}x_1 = \dfrac{15}{19}. \end{cases}$$

Podemos resolver o sistema do seguinte modo:

Da última equação, temos

$$x_1 = 3\,.$$

Da penúltima equação, temos

$$x_3 = \frac{25/7 - (2/7)x_1}{19/7} = 1\,.$$

E da primeira equação, temos

$$x_2 = \frac{1 - 3x_3 - 4x_1}{-7} = 2\,.$$

Logo, a solução do sistema será

$$\{(3,2,1)\}\,.$$

A estratégia de pivoteamento completo leva a erros menores de arredondamento quando comparamos com o pivoteamento parcial, mas na prática não é muito utilizado, já que o preço computacional é mais alto devido às possíveis trocas de colunas ao longo do processo.

2.3 - Fatoração LU

O método da fatoração LU para resolução de sistemas lineares consiste em fatorar a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como $A = LU$, onde L é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária e U é uma matriz triangular superior [15]. Dessa forma, o sistema (5) pode ser escrito como

$$(LU)x = b\,.$$

Assim, resolver o sistema inicial é equivalente a resolver dois sistemas

$$Ly = b \qquad e \qquad Ux = y.$$

Quando utilizamos este método, temos uma vantagem em relação à eliminação de Gauss. Todo sistema linear que também possui a matriz **A** como matriz dos coeficientes terá uma resolução muito mais rápida, pois se já tivermos resolvido o sistema $Ax = b$ anteriormente, a fatoração da matriz $A = LU$ será a mesma em todos os outros sistemas em que apenas b é diferente.

Teorema 3: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Se os menores principais de A até ordem $n-1$ forem todos diferentes de zero, então A pode ser fatorada como $A = LU$ tal que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

sendo k_{ij} os multiplicadores utilizados na eliminação de Gauss para triangularizar a matriz A, e U a matriz triangular superior obtida através da eliminação de Gauss aplicada na matriz A.

Demonstração:

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Como os menores principais de A são diferentes de zero, sabemos que $a_{11} \neq 0$. No primeiro estágio da eliminação de Gauss, utilizamos os multiplicadores $k_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$, $k_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$, ... , $k_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}}$ e faremos as substituições de linhas

$$L_2 \leftarrow L_2 - k_{21}L_1 \ , \qquad L_3 \leftarrow L_3 - k_{31}L_1 \ , \quad \dots \quad , \ L_n \leftarrow L_n - k_{n1}L_1 \, .$$

Obteremos assim $A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$.

Realizar essas operações nas linhas é equivalente a multiplicar a matriz A pela matriz $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Ou seja,

$$A^{(1)} = K_1 A \, .$$

No Estágio 1 da eliminação de Gauss, utilizaremos os multiplicadores $k_{32}=\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, $k_{42}=\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, … , $k_{n2}=\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ com $a_{22}^{(1)}\neq 0$, por hipótese, e faremos as substituições de linhas

$$L_3 \leftarrow L_3 - k_{32}L_2\,,\ L_4 \leftarrow L_4 - k_{42}L_2\,,\ \ \ldots\ \ , L_n \leftarrow L_n - k_{n2}L_2\,.$$

Obteremos assim $A^{(2)}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} \end{pmatrix}$.

Realizar essa operação nas linhas é equivalente a multiplicar a matriz $A^{(1)}$ pela matriz $K_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & -k_{32} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -k_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

Ou seja,

$$A^{(2)} = K_2A^{(1)}\,.$$

Em cada estágio p multiplicamos a matriz $A^{(p-1)}$ pela matriz K_p, sendo K_p matriz com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, os elementos da p-ésima coluna iguais aos opostos dos multiplicadores do método da eliminação de Gauss no Estágio p e todos os outros elementos iguais a 0. Assim,

$$A^{(p)} = K_pA^{(p-1)}\ \text{, com } p \in \{1,2,3,\ldots,n-1\}.$$

Esse processo é repetido até obtermos a matriz $A^{(n-1)}$, que é triangular superior.

$$A^{(1)} = K_1A\,,$$

$$A^{(2)} = K_2A^{(1)} = K_2(K_1A),$$

$$A^{(3)} = K_3A^{(2)} = K_3(K_2(K_1A))\,,$$

$$\vdots$$

$$A^{(n-1)} = K_{n-1}A^{(n-2)} = K_{n-2}(K_{n-3}(\ldots(K_2(K_1A))\ldots).$$

Dessa forma,

$$(K_1)^{-1}(K_2)^{-1} \dots (K_{n-2})^{-1} A^{(n-1)} = A$$

As matrizes $(K_1)^{-1}$, $(K_2)^{-1}, \dots, (K_{n-2})^{-1}$ são

$$K_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad K_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & k_{32} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \dots,$$

e

$$(K_1)^{-1}(K_2)^{-1} \dots (K_{n-2})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} A^{(n-1)}.$$

Sejam

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^{(n-1)} = U .$$

Então, podemos observar que a matriz A pode ser escrita como uma multiplicação de uma matriz triangular inferior L com diagonal unitária e uma matriz triangular superior U.

■

Exemplo 7: Resolva o sistema linear seguinte utilizando o método da fatoração LU

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos triangularizar a matriz A utilizando a eliminação de Gauss.

Estágio 1:

$$k_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \qquad e \qquad k_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - k_{21}L_1 \qquad e \qquad L_3 \leftarrow L_3 - k_{31}L_1$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Estágio 2:

$$k_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{3}{1} = 3\,.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - k_{32}L_2$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos as matrizes

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_{21} & 1 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \; e \; U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para resolver o sistema, devemos começar com

$$Ly = b\,.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Agora vamos resolver

$$Ux = y\,.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.1 - Pivoteamento parcial na fatoração LU

O pivoteamento parcial também pode ser aplicado no método da fatoração LU para resolver o sistema $Ax = b$, com **A** satisfazendo as condições do Teorema 3. Cada troca de linha em uma matriz equivale à pré-multiplicação dessa matriz por uma matriz de permutação, que consiste em uma matriz identidade com as posições das linhas trocadas. Escrever a transformação desta maneira nos ajuda a visualizar a estratégia do pivoteamento parcial.

Exemplo 8:

Tome a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ e a matriz de permutação $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Perceba que a matriz **P** é a matriz identidade com a primeira e terceira linhas trocadas.

Quando realizamos a multiplicação **PA**, estamos também trocando as posiçoes das linhas da matriz **A**.

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Seja o sistema linear $Ax = b$. Permutando as linhas da matriz **A**, obtemos a matriz $A' = PA$. Para obtermos um sistema linear equivalente ao original, devemos ter $PAx = Pb$. Assim, para se utilizar o método da fatoração LU com o pivoteamento parcial, precisamos de $A' = LU$, $Ly = Pb$ e $Ux = y$.

Exemplo 9: Resolva o sistema linear seguinte utilizando a fatoração LU com pivoteamento parcial

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos escolher como pivô o coeficiente 3. Assim, precisamos permutar a primeira e terceira linha e ficamos com

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os multiplicadores da matriz **A’** são:

$$k_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{3} \qquad e \qquad k_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{3}\ .$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - k_{21}L_1 \qquad e \qquad L_3 \leftarrow L_3 - k_{31}L_1$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1/3 & 8/3 \end{pmatrix}.$$

O próximo pivô será o próprio $-1/3$, então o multiplicador será:

$$k_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{1/3}{-1/3} = -1.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - k_{32}L_2\ ;$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a matriz de permutação **P**, é

$$P = P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$Pb = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix} \; e \; U = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Primeiramente é preciso resolver o sistema

$$Ly = Pb$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{4}{3} \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Agora precisamos resolver o sistema

$$Ux = y$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{4}{3} \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

No próximo capítulo vamos estudar alguns métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares. As estratégias que serão apresentadas são muito utilizadas para obter a solução de sistemas com um número muito grande de equações e incógnitas.

Capítulo 3
Métodos iterativos para sistemas lineares

Neste capítulo vamos abordar, inicialmente, os métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, pela simplicidade de sua aplicação. No final, descrevemos o Método de Kaczmarz, um método baseado em projeções ortogonais.

Todos esses métodos geram uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^n$, $\{x^{(k)}\}$. Definimos uma sequência em $\mathbb{R}^n$ como uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, que associa a cada número natural k um ponto $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ [9]. Definimos a **norma euclidiana** do vetor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ como

$$\|v\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + \cdots + {v_n}^2}.$$

Dizemos que uma sequência $\{x^{(k)}\}$ é convergente se existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, é possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \to \left\|x^{(k)} - a\right\| < \varepsilon$ [9].

omparando com os métodos diretos de resolução de sistemas lineares, observamos que os métodos iterativos têm vantagem quando estamos resolvendo sistemas lineares com um número muito grande de equações e incógnitas, já que os métodos iterativos são menos suscetíveis a acúmulos de erros de arredondamento [2]. Outra vantagem é que é comum encontrar sistemas esparsos, ou seja, sistemas lineares com um número grande de coeficientes nulos, e métodos como a eliminação de Gauss não preservam essa esparsidade ([15] e [8]), enquanto os métodos iterativos o fazem.

É necessário ter um critério de parada para os métodos iterativos. Em [13], encontramos um teste de parada que consiste em repetir o procedimento até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $x^{(k-1)}$. A distância $d^{(k)}$ entre os vetores $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ é definida como

$$d^{(k)} = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|.$$

Para decidir a parada dos métodos iterativos, muitas vezes calculamos o erro relativo, que é definido como

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} \right|}.$$

Outra maneira de realizar um teste de parada em um método iterativo é calculando o resíduo $r^{(k)}$, definido como

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} . \quad [15]$$

Quando $\|r^{(k)}\|$ está suficientemente perto de zero, sabemos que $Ax^{(k)}$ está próximo de b. Ou ainda podemos trabalhar com o valor $\max_{1 \le i \le n} \left| r_i^{(k)} \right|$.

Neste texto, os resultados de convergência serão somente enunciados, e referências para as demonstrações dos mesmos serão dadas. Optamos por não mostrar aqui tais demonstrações, pois seriam necessários muitos conceitos preliminares.

3.1 - Método de Gauss-Jacobi

O método iterativo de Gauss-Jacobi consiste em resolver o sistema linear $Ax = b$ transformando-o na iteração $x = Cx + g$ como descrito a seguir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Supondo $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1,2,3, \dots, n$, podemos escrever o sistema linear anterior como

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn}x_n) \end{cases}$$

Sejam

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}} & \dots & \dfrac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \dfrac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \dfrac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Então o sistema linear $Ax = b$ fica reescrito como $x = Cx + g$.

O método de Gauss-Jacobi parte de uma aproximação inicial $x^{(0)}$ e toda nova aproximação $x^{(k)}$ é obtida através da relação recursiva $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$.

Exemplo 10: Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \\ 0x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

utilizando o algoritmo iterativo de Gauss-Jacobi com erro relativo máximo de $0{,}3$ e aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

O sistema pode ser escrito como

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7 - x_2 - x_3}{3} \\ x_2 = \dfrac{4 - x_1 - 2x_3}{4} \\ x_3 = \dfrac{5 - 0x_1 - 2x_2}{5} \end{cases}.$$

Assim, o método iterativo será

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{7 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{3} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{4 - x_1^{(k-1)} - 2x_3^{(k-1)}}{4} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{5 - 0x_1^{(k-1)} - 2x_2^{(k-1)}}{5} \end{cases}.$$

Para $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{7 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{3} = \dfrac{7 - 0 - 0}{3} = 2{,}3333 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{4 - x_1^{(0)} - 2x_3^{(0)}}{4} = \dfrac{4 - 0 - 2 \cdot 0}{4} = 1{,}0000 \\ x_3^{(1)} = \dfrac{5 - 0x_1^{(0)} - 2x_2^{(0)}}{5} = \dfrac{5 - 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0}{5} = 1{,}0000 \end{cases}$$

$$d_r^{(1)} = \frac{d^{(1)}}{\max\limits_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(1)} \right|} = 1.$$

Para $k = 2$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{7 - x_2^{(1)} - x_3^{(1)}}{3} = \dfrac{7 - 1 - 1}{3} = 1{,}6667 \\ x_2^{(2)} = \dfrac{4 - x_1^{(1)} - 2x_3^{(1)}}{4} = \dfrac{4 - 2{,}3333 - 2 \cdot 1}{4} = -0{,}0833 \\ x_3^{(2)} = \dfrac{5 - 0x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)}}{5} = \dfrac{5 - 0 \cdot 2{,}3333 - 2 \cdot 1}{5} = 0{,}6000 \end{cases}$$

$$d_r^{(2)} = \frac{d^{(2)}}{\max\limits_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(2)} \right|} = 0{,}6499.$$

Para $k = 3$:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{7 - x_2^{(2)} - x_3^{(2)}}{3} = \dfrac{7 - (-0{,}0833) - 0{,}6}{3} = 2{,}1611 \\ x_2^{(3)} = \dfrac{4 - x_1^{(2)} - 2x_3^{(2)}}{4} = \dfrac{4 - 1{,}6667 - 2 \cdot 0{,}6}{4} = 0{,}2833 \\ x_3^{(3)} = \dfrac{5 - 0x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)}}{5} = \dfrac{5 - 0 \cdot 1{,}6667 - 2 \cdot (-0{,}0833)}{5} = 1{,}0333 \end{cases}$$

$$d_r^{(2)} = \frac{d^{(2)}}{\max\limits_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(2)} \right|} = 0{,}2287\ .$$

Como o erro relativo deve ser menor que $0{,}3$, então a melhor aproximação entre as obtidas para a solução é $x = \begin{pmatrix} 2{,}1611 \\ 0{,}2833 \\ 1{,}0333 \end{pmatrix}$.

3.1.1 – Critério de convergência - Critério das linhas

Seja o sistema linear $Ax = b$ de ordem n com $a_{ii} \neq 0$ e seja $\alpha_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}$. Se $\alpha_k < 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \le k \le n$, então o método iterativo de Gauss-Jacobi gera uma sequência convergente para a solução do sistema linear dado independentemente da aproximação inicial escolhida [1] .

3.2 – Método de Gauss-Seidel

O método iterativo de Gauss-Seidel é semelhante ao método de Gauss-Jacobi, sendo que a diferença entre os dois métodos é que no método de Gauss-Seidel, para se calcular $x_i^{(k)}$, utilizaremos os valores $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ que já foram calculados. Dessa forma, para o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{, com } a_{ii} \neq 0 \text{ para } i = 1,2,3,\dots,n \text{ ,}$$

podemos, para uma aproximação inicial $x^{(0)}$, escrever a relação recursiva

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k-1)} \dots - a_{3n}x_n^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - a_{n3}x_3^{(k)} \dots - a_{n\,n-1}\,x_{n-1}^{(k)}. \end{cases}$$

Exemplo 11: Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

utilizando o algoritmo iterativo de Gauss-Seidel com erro relativo máximo de $0{,}05$ e aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

O sistema pode ser escrito como

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5 - x_2 - x_3}{5} \\ x_2 = \dfrac{6 - 3x_1 - x_3}{4} \\ x_3 = \dfrac{0 - 3x_1 - 3x_2}{6}. \end{cases}$$

Assim, o método iterativo será

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{5 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{5} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{6 - 3x_1^{(k)} - x_3^{(k-1)}}{4} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{0 - 3x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}}{6}. \end{cases}$$

Para $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{5 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{5} = \dfrac{5 - 0 - 0}{5} = 1 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{6 - 3x_1^{(1)} - x_3^{(0)}}{3} = \dfrac{6 - 3 \cdot 1 - 0}{4} = 0{,}75 \\ x_3^{(1)} = \dfrac{0 - 3x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}}{6} = \dfrac{0 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0{,}75}{6} = -0{,}875 \end{cases}$$

$$d_r^{(1)} = \frac{d^{(1)}}{\max\limits_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(1)} \right|} = 1.$$

Para $k = 2$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{5 - x_2^{(1)} - x_3^{(1)}}{5} = \dfrac{5 - 0{,}75 - (-0{,}875)}{5} = 1{,}025 \\ x_2^{(2)} = \dfrac{6 - 3x_1^{(2)} - x_3^{(1)}}{3} = \dfrac{6 - 3 \cdot 1{,}025 - (-0{,}875)}{4} = 0{,}95 \\ x_3^{(2)} = \dfrac{0 - 3x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)}}{6} = \dfrac{0 - 3 \cdot 1{,}025 - 3 \cdot 0{,}95}{6} = -0{,}9875 \end{cases}$$

$$d_r^{(1)} = \frac{d^{(1)}}{\max\limits_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(1)} \right|} = 0{,}1951.$$

Para $k = 3$:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{5 - x_2^{(2)} - x_3^{(2)}}{5} = \dfrac{5 - 0{,}95 - (-0{,}9875)}{5} = 1{,}0075 \\ x_2^{(3)} = \dfrac{6 - 3x_1^{(3)} - x_3^{(2)}}{3} = \dfrac{6 - 3 \cdot 1{,}0075 - (-0{,}9875)}{4} = 0{,}9912 \\ x_3^{(3)} = \dfrac{0 - 3x_1^{(3)} - 3x_2^{(3)}}{6} = \dfrac{0 - 3 \cdot 1{,}0075 - 3 \cdot 0{,}9912}{6} = -0{,}9993 \end{cases}$$

$$d_r^{(1)} = \frac{d^{(1)}}{\max\limits_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(1)}\right|} = 0{,}0409\,.$$

Como o erro relativo é menor que $0{,}05$, então a aproximação obtida para a solução é

$$x = \begin{pmatrix} 1{,}0075 \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9993 \end{pmatrix}.$$

O método iterativo de Gauss-Seidel também pode ser escrito na forma matricial $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$. Para isso, inicialmente vamos escrever a matriz A como $A = D(L_1 + I + R_1)$ tal que:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \;\; e \;\; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma:

$$Ax = b \;\leftrightarrow\; D(L_1 + I + R_1)x = b \;\leftrightarrow\; x = -L_1x - R_1x + D^{-1}b\,.$$

O método de Gauss-Seidel é

$$x^{(k)} = -L_1x^{(k)} - R_1x^{(k-1)} + D^{-1}b\,.$$

Assim,

$$x^{(k)} + L_1x^{(k)} = -R_1x^{(k-1)} + D^{-1}b \;\leftrightarrow$$

$$(I + L_1)x^{(k)} = -R_1x^{(k-1)} + D^{-1}b \;\leftrightarrow$$
$$x^{(k)} = (I + L_1)^{-1}\left(-R_1x^{(k-1)} + D^{-1}b\right) \leftrightarrow$$

$$x^{(k)} = -(I + L_1)^{-1}R_1x^{(k-1)} + (I + L_1)^{-1}D^{-1}b\,.$$

Sejam $C = -(I + L_1)^{-1}R_1$ e $g = (I + L_1)^{-1}D^{-1}b$, então o método de Gauss-Seidel pode ser escrito na forma $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$.

3.2.1 – Critério de convergência - Critério de Sassenfeld

Se o critério das linhas é satisfeito, também podemos garantir a convergência do método de Gauss-Seidel [13] . No entando, há um critério menos exigente que nos assegura a convergência deste método, o qual vamos descrever a seguir.

Seja o sistema linear $Ax = b$ e sejam

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

e

$$\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \cdots + |a_{j\,j-1}|\beta_{j-1} + |a_{j\,j+1}| + \cdots + |a_{j\,n}|}{|a_{jj}|}.$$

Se $\beta_j < 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq j \leq n$, então o método iterativo de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente independentemente da aproximação inicial escolhida [1].

3.3 - Método de Kaczmarz

O método de Kaczmarz é um algoritmo iterativo para encontrar a solução de sistemas lineares que utiliza projeções ortogonais para aproximar a solução a partir de um ponto inicial [4]. Para melhor entender este método, necessitamos do seguinte teorema:

Teorema 4: Seja $\pi\colon a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ um hiperplano de R^n nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ constantes reais. Então a projeção ortogonal p' de um ponto $p \in R^n$ em π é dada por

$$p' = p + \frac{b - \langle p, m\rangle}{\|m\|^2}m\,,$$

onde $m = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^t$, $\langle p, m\rangle$ é o produto interno do vetor m com p e $\|m\|$ é a norma euclidiana do vetor m.

Demonstração: Sejam $m = (a_1, a_2, \dots, a_n)^t$ o vetor normal ao plano π e $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^t$ um vetor de R^n. Queremos encontrar $k \in R$ tal que o vetor $p' = p + km$ seja pertencente ao plano π.

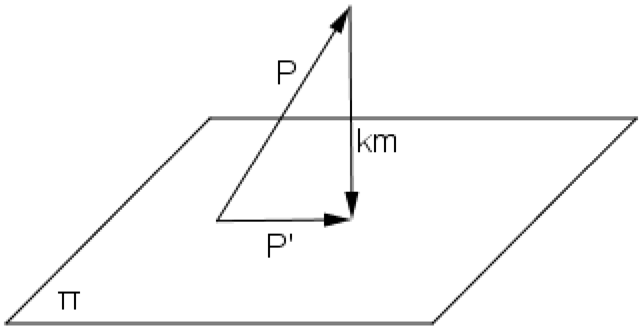

Figura 3.1 – Projeção ortogonal

Assim,

$$p' = p + km \leftrightarrow$$

$$p' = (p_1', p_2', \dots, p_n') = (p_1, p_2, \dots, p_n) + k(a_1, a_2, \dots, a_n) .$$

Como $p' \in \pi$, podemos substituir a equação acima em $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$. Dessa forma,

$$a_1(p_1 + ka_1) + a_2(p_2 + ka_2) + \cdots + a_n(p_n + ka_n) = b \leftrightarrow$$

$$a_1p_1 + ka_1^2 + a_2p_2 + ka_2^2 + \cdots + a_np_n + ka_n^2 = b \leftrightarrow$$

$$ka_1^2 + ka_2^2 + \cdots + ka_n^2 = b - a_1p_1 - a_2p_2 - \cdots - a_np_n \leftrightarrow$$

$$k(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) = b - a_1p_1 - a_2p_2 - \cdots - a_np_n \leftrightarrow$$

$$k = \frac{b - a_1p_1 - a_2p_2 - \cdots - a_np_n}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} .$$

Como $\langle p, m\rangle = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n$ e $\|m\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$, podemos afirmar que

$$p' = p + \frac{b - a_1p_1 - a_2p_2 - \cdots - a_np_n}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} m = p + \frac{b - \langle p, m\rangle}{\|m\|^2} m .$$

■

Método iterativo de Kaczmarz: Considere o sistema linear $Ax = b$. Para obter a estimativa de solução $x^{(k)}$, o método iterativo de Kaczmarz utiliza a projeção ortogonal de $x^{(k-1)}$ no hiperplano determinado pela r-ésima equação do sistema, onde

r é o resto da divisão de k por n, se esse resto for diferente de zero, ou r é igual a n se o resto da divisão de k por n for igual a zero . Assim, para o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

podemos escrever a relação

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \frac{b_r - \langle x^{(k-1)}, m_r \rangle}{\|m_r\|^2} m_r \ ,$$

onde r é o resto da divisão de k por n, se esse resto for diferente de zero, ou r é igual a n se o resto da divisão de k por n for igual a zero e $m_r = (a_{r\,1}, a_{r\,2}, \ldots, a_{r\,n})^t$.

Os critérios de parada usados no método de Kaczmarz são os mesmos estabelecidos para os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel.

3.3.1 – Convergência

Para uma matriz quadrada não-singular A, o método iterativo de Kaczmarz converge para a solução do sistema linear $Ax = b$ [14].

Exemplo 12: Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 12 \\ -2x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

utilizando o algoritmo iterativo de Kaczmarz com erro relativo máximo de $0{,}01$ e aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

No caso de um sistema linear 2×2 , a interpretação geométrica do método iterativo é simples de ser representada, uma vez que cada equação do sistema representa uma reta no plano e cada nova estimativa $x^{(k)}$ é a projeção ortogonal de $x^{(k-1)}$ na outra reta. Podemos ver na figura 3.2 a aproximação inicial $x^{(0)}$ e cada uma das próximas estimativas se aproximando do ponto de encontro das duas retas, que é a solução do sistema linear.

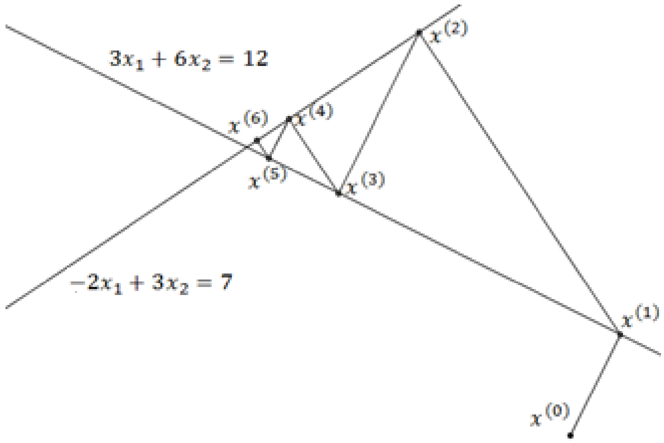

Figura 3.2 – Exemplo 12

Para obter a solução do sistema através do método de Kaczmarz devemos calcular as aproximações $x^{(k)}$ pela fórmula

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \frac{b_r - \langle x^{(k-1)}, m_r \rangle}{\|m_r\|^2} m_r \ ,$$

onde $b_1 = 12$, $b_2 = 7$, $m_1 = (3,6)^T$ e $m_2 = (-2,3)^T$. O resultado está na tabela a seguir:

Tabela 3.1 – Exemplo 12

k	x_1	x_2	$d_r^{(k)}$
0	1,0000	1,0000	
1	1,2000	1,4000	0,2857
2	0,4000	2,6000	0,4615
3	0,0800	1,9600	0,3265
4	−0,1169	2,2554	0,1309
5	−0,1957	2,0978	0,0751
6	−0,2442	2,1706	0,0335
7	−0,2636	2,1318	0,0181
8	−0,2755	2,1497	0,0083

Como o erro relativo para $k = 8$ é menor que $0{,}01$, então a aproximação obtida para a solução é $x = \begin{pmatrix} -0{,}2755 \\ 2{,}1497 \end{pmatrix}$.

Exemplo 13: Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ -4x_1 + 2x_2 = -10 \end{cases}$$

utilizando o algoritmo iterativo de Kaczmarz com erro relativo máximo de $0{,}01$ e aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tabela 3.2 – Exemplo 13

k	x_1	x_2	$d_r^{(k)}$
0	1,0000	1,0000	
1	1,4000	1,8000	0,4444
2	3,0000	1,0000	0,0533
3	3,0000	1,0000	0,0000

Como o erro relativo para $k = 3$ é menor que $0{,}01$, então a solução é $x = \begin{pmatrix} 3{,}0000 \\ 1{,}0000 \end{pmatrix}$.

Podemos perceber que o número de iterações para se chegar à solução do Exemplo 13 foi menor que no Exemplo 12, com a mesma aproximação inicial e mesmo teste de parada. Isso pode ser explicado pelo ângulo formado entre as retas das equações do sistema linear. As equações $x_1 + 2x_2 = 5$ e $-4x_1 + 2x_2 = -10$ representam retas perpendiculares entre si, o que diminui o tempo para obtermos a aproximação desejada. Observemos na figura abaixo:

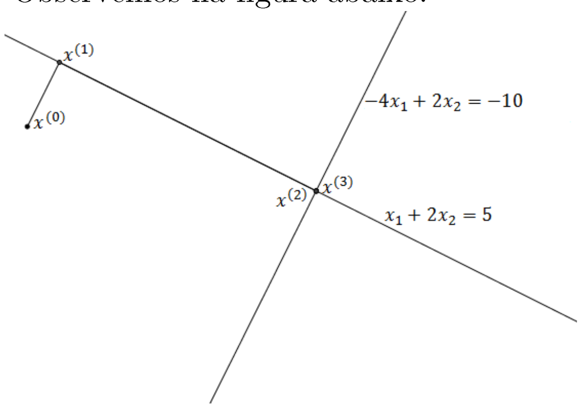

Figura 3.3 – Exemplo 13

Exemplo 14: Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 11x_1 + 12x_2 = 34 \\ x_1 + 12x_2 = 14 \end{cases}$$

utilizando o algoritmo iterativo de Kaczmarz com erro relativo máximo de $0{,}01$ e aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tabela 3.3 – Exemplo 13

k	x_1	x_2	$d_r^{(k)}$
0	1,0000	1,0000	
1	1,4566	1,4981	0,3324
2	1,4191	1,0484	0,3168
3	1,6602	1,3114	0,1584
4	1,6368	1,0303	0,1717

5	1,7876	1,1947	0,0920
6	1,7729	1,0189	0,0991
7	1,8672	1,1218	0,0550
8	1,8580	1,0118	0,0591
9	1,9170	1,0761	0,0335
10	1,9112	1,0074	0,0359
11	1,9481	1,0476	0,0206
12	1,9445	1,0046	0,0221
13	1,9675	1,0298	0,0127
14	1,9653	1,0029	0,0136
15	1,9797	1,0186	0,0079

Como o erro relativo é menor que $0{,}01$, então a solução é $x = \begin{pmatrix} 1{,}9797 \\ 1{,}0186 \end{pmatrix}$.

Podemos perceber que número de iterações para se chegar à solução no Exemplo 14 foi maior que nos Exemplos 12 e 13, com a mesma aproximação inicial e mesmo teste de parada. Isso pode ser explicado pelo ângulo formado entre as retas das equações do sistema linear. Este ângulo é menor que o ângulo das retas dos Exemplos 12 e 13, o que aumenta o tempo para obtermos a aproximação desejada. Observemos na figura abaixo:

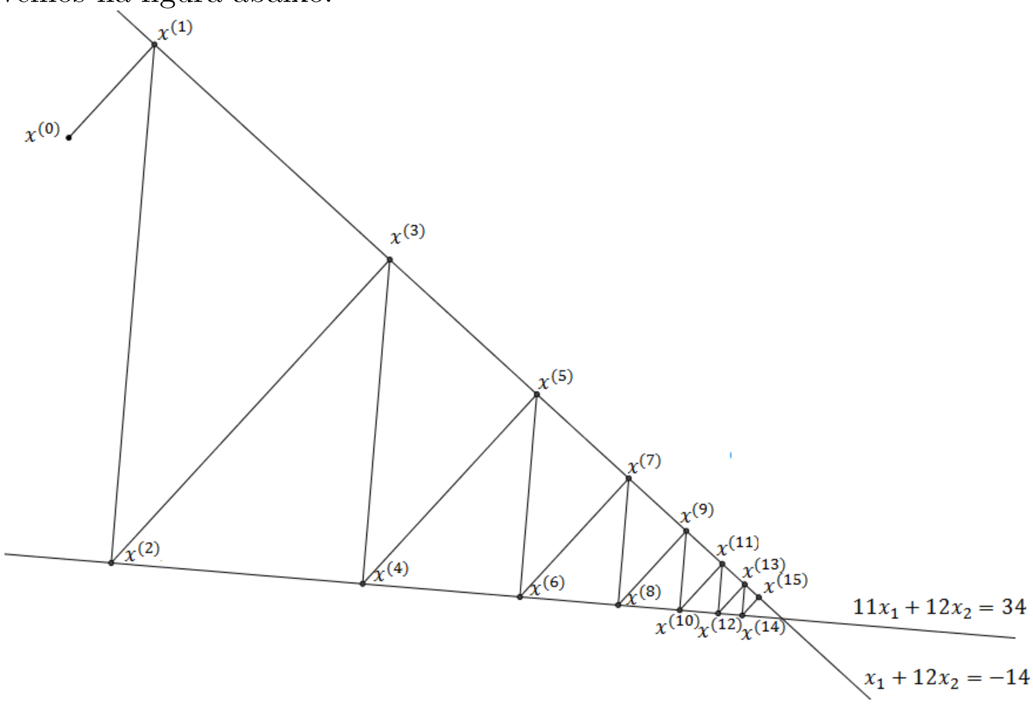

Figura 3.4 – Exemplo 14

No capítulo seguinte, será feita a comparação do desempenho de cada um dos métodos abordados neste capítulo.

Capítulo 4
Resultados numéricos

Utilizando o *software* MatLab [10] em um computador HP Dv7 com processador Intel(R) Core(TM) i7-3630QM CPU 2,40Ghz, 8GB de memória RAM no sistema operacional Windows 8.1 64-bit, foi possível realizar alguns testes para comparar a eficiência dos métodos numéricos estudados no capítulo anterior.

4.1 – Sistemas lineares de porte menor

Primeiramente, foram feitos testes com sistemas lineares com poucas equações e incógnitas. Os três métodos numéricos foram utilizados para resolver os mesmos sistemas até atingir o erro relativo igual a 10^{-4}. Temos abaixo os resultados.

Sistema 1:

$$\begin{cases} 3x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0)^T .$$

Tabela 4.1 – Sistema 1

Método	**Número de iterações**	**Tempo ($\cdot$ $\mathbf{10^{-3}}$s)**	**Resíduo**
Gauss-Jacobi	12	116,66	0,000209
Gauss-Seidel	8	130,73	0,000061
Kaczmarz	47	0,08	0,000247

Sistema 2:

$$\begin{cases} 10x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 = 6 \\ -1x_1 + 11x_2 - 1x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - 1x_2 + 10x_3 - 1x_4 = -11 \\ 0x_1 + 3x_2 - 1x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T.$$

Tabela 4.2 – Sistema 2

Método	Número de iterações	Tempo ($\cdot\, \mathbf{10^{-3}}$s)	Resíduo
Gauss-Jacobi	12	97,42	0,000955
Gauss-Seidel	6	144,43	0,000078
Kaczmarz	35	102,00	0,000816

Sistema 3:

$$\begin{cases} 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 6 \\ -1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 6 \\ 2x_1 + 1x_2 + 5x_3 - 1x_4 - 1x_5 = 6 \\ -1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + 4x_4 + 0x_5 = 6 \\ 0x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 1x_4 + 4x_5 = 6 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \ .$$

Tabela 4.3 – Sistema 3

Método	Número de iterações	Tempo ($\cdot\, \mathbf{10^{-3}}$s)	Resíduo
Gauss-Jacobi	14	92,24	0,000457
Gauss-Seidel	8	148,20	0,000130
Kaczmarz	59	91,01	0,001634

Sistema 4:

$$\begin{cases} 4x_1 - 1x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0 \\ -1x_1 + 4x_2 - 1x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 0x_6 = 5 \\ 0x_1 - 1x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1x_6 = 0 \\ -1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 4x_4 - 1x_5 + 0x_6 = 6 \\ 0x_1 - 1x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 4x_5 - 1x_6 = -2 \\ 0x_1 + 0x_2 - 1x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 4x_6 = 6 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T \ .$$

Tabela 4.4 – Sistema 4

Método	Número de iterações	Tempo ($\cdot\, \mathbf{10^{-3}}$s)	Resíduo
Gauss-Jacobi	19	115,14	0,000544
Gauss-Seidel	10	138,87	0,000192
Kaczmarz	151	68,48	0,001549

Sistema 5:

$$\begin{cases} 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 = 6 \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 = 6 \\ 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 = 6 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 6 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 6 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T.$$

Tabela 4.5 – Sistema 5

Método	**Número de iterações**	**Tempo($\cdot$ 10^{-3}s)**	**Resíduo**
Gauss-Jacobi	X	X	X
Gauss-Seidel	X	X	X
Kaczmarz	94	78,43	0,001745

Os métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel não convergiram para uma solução.

4.2 – Sistemas lineares de porte maior

Como os métodos estudados se aplicam para a obtenção de solução de sistemas lineares com um número muito grande de equações e incógnitas, se torna pertinente realizar testes para sistemas que estejam nesta condição.

Utilizando os comandos do *software* MatLab [10], foram criados aleatoriamente 5 sistemas lineares com 500 equações e 5 sistemas lineares com 1000 equações. Trabalhamos agora com o erro relativo igual a 10^{-7}. Temos abaixo os resultados.

1) Sistema linear com 500 equações e 500 incógnitas:

Tabela 4.6 – Sistema 6

Método	**Número de iterações**	**Tempo (s)**	**Resíduo ($\cdot$ 10^{-6})**
Gauss-Jacobi	954	8,869	1,5688
Gauss-Seidel	12	0,199	0,1037
Kaczmarz	6494	0,502	1133,6423

Tabela 4.7 – Sistema 7

Método	**Número de iterações**	**Tempo (s)**	**Resíduo** $(\cdot \mathbf{10^{-6}})$
Gauss-Jacobi	1156	8,538	1,5184
Gauss-Seidel	13	0,190	0,1141
Kaczmarz	7719	0,295	300,0140

Tabela 4.8 – Sistema 8

Método	**Número de iterações**	**Tempo (s)**	**Resíduo** $(\cdot \mathbf{10^{-6}})$
Gauss-Jacobi	X	X	X
Gauss-Seidel	X	X	X
Kaczmarz	6110	0,286	5820,9104

Tabela 4.9 – Sistema 9

Método	**Número de iterações**	**Tempo (s)**	**Resíduo** $(\cdot \mathbf{10^{-6}})$
Gauss-Jacobi	X	X	X
Gauss-Seidel	X	X	X
Kaczmarz	6798	0,309	977,2500

Tabela 4.10 – Sistema 10

Método	**Número de iterações**	**Tempo (s)**	**Resíduo** $(\cdot \mathbf{10^{-6}})$
Gauss-Jacobi	X	X	X
Gauss-Seidel	X	X	X
Kaczmarz	7705	0,319	311,5731

2) Sistema linear com 1000 equações e 1000 incógnitas:

Tabela 4.11 – Sistema 11

Método	**Número de iterações**	**Tempo (s)**	**Resíduo** $(\cdot \mathbf{10^{-6}})$
Gauss-Jacobi	243	11,136	2,0879
Gauss-Seidel	12	0,375	0,0885
Kaczmarz	13123	0,943	1022,4846

Tabela 4.12 – Sistema 12

Método	Número de iterações	Tempo (s)	Resíduo $(\cdot\, \mathbf{10^{-6}})$
Gauss-Jacobi	266	16,945	17,0503
Gauss-Seidel	13	0,421	0,0947
Kaczmarz	13118	1,227	109,4673

Tabela 4.13 – Sistema 13

Método	Número de iterações	Tempo (s)	Resíduo $(\cdot\, \mathbf{10^{-6}})$
Gauss-Jacobi	X	X	X
Gauss-Seidel	X	X	X
Kaczmarz	15523	1,226	4712,3170

Tabela 4.14 – Sistema 14

Método	Número de iterações	Tempo (s)	Resíduo $(\cdot\, \mathbf{10^{-6}})$
Gauss-Jacobi	239	10,823	2,0832
Gauss-Seidel	12	0,417	0,0842
Kaczmarz	11259	0,795	3437,8534

Tabela 4.15 – Sistema 15

Método	Número de iterações	Tempo (s)	Resíduo $(\cdot\, \mathbf{10^{-6}})$
Gauss-Jacobi	100	4,626	1,8590
Gauss-Seidel	11	0,411	0,1400
Kaczmarz	10171	0,318	3366,8920

4.3 – Conclusões

Através dos resultados dos testes, foi possível perceber que o número de iterações não está ligado diretamente com o tempo necessário para o *software* obter a solução do sistema, já que o método de Kaczmarz teve um número maior de iterações em todos os testes, mas em alguns casos ele foi o método que levou menos tempo para chegar ao resultado. É importante perceber que no algoritmo de Kaczmarz contamos uma iteração a cada projeção ortogonal realizada em cada uma das equações do sistema, enquanto nos métodos de Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi cada iteração só é contada a partir do momento que foram feitos os cálculos com todas as equações do sistema linear. Dessa forma, é esperado que o número de iterações do algoritmo de Kaczmarz seja maior que o número de iterações dos outros métodos.

Os métodos de Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi apresentaram alguns problemas no que diz respeito à convergência. Os sistemas 5, 8, 9, 10 e 13 são exemplos nos quais o método de Kaczmarz conseguiu obter a solução aproximada, mas os outros dois métodos obtiveram sequências divergentes.

Aumentando o número de equações e incógnitas, o método de Kaczmarz não sofre um aumento tão grande de tempo para se chegar à solução, mesmo aumentando significativamente o número de iterações. O método de Gauss-Jacobi sofreu uma mudança muito grande no tempo que precisou para resolver o problema, indo de um tempo menor que 2 milésimos de segundo para chegar à solução de sistemas pequenos para aproximadamente 17 segundos quando está sendo aplicado a um sistema linear de 1000 equações. O método de Gauss-Seidel mostrou ser capaz de chegar à aproximação desejada em um número reduzido de iterações e seu tempo de resolução foi muito próximo do tempo que a estratégia de Kaczmarz levou para chegar ao resultado nos sistemas em que todos os métodos obtiveram sequências convergentes.

Observando os resíduos no qual a estratégia de Gauss-Seidel teve melhores resultados que os outros métodos. O método iterativo de Kaczmarz chegou em valores de resíduos não muito pequenos em quase todos os sistemas, como pode ser observado no Sistema Linear 13. Isso pode ser explicado pelo critério de parada, uma vez que o método é repetido até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $x^{(k-1)}$. Caso o sistema tenha duas equações com coeficientes de valores muito próximos, é possível que o critério de parada seja satisfeito mesmo que o vetor $x^{(k)}$ não esteja muito próximo da solução do sistema.

Analisando todos os resultados, o método de Kaczmarz foi mais eficiente com relação à convergência, já que ele gerou sequências convergentes em todos os 15 testes realizados. Observando os sistemas nos quais todos os três métodos obtiveram sequências convergentes, a estratégia de Gauss-Seidel foi mais eficiente por obter valores menores de resíduos em um tempo de resolução inferior a 5 décimos de segundo mesmo quando aplicado a sistemas com 1000 equações.

Capítulo 5
Plano de aula

Público alvo: Alunos de ensino médio

Conteúdo: Sistemas lineares

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Utilizar o método da eliminação de Gauss em problemas de aplicação de sistemas lineares utilizando o *software* Open Office Calc [11].

Introdução: No ensino médio, o método mais estudado de resolução de sistemas lineares é a eliminação de Gauss. Os livros didáticos de matemática trazem exercícios cujo objetivo é praticar a aplicação desse método sem ajuda de aparelhos eletrônicos e *softwares* (ver [3], [5] e [10]). É importante a resolução deste tipo de exercício para entender a eliminação de Gauss e a discussão da existência e unicidade de soluções em sistemas lineares.

Este plano de aula traz uma abordagem diferente, já que o objetivo é o uso do *software* Open Office Calc [11] para a resolução de sistemas lineares. Esta aula complementa o estudo da resolução de sistemas e, por esse motivo, deve ser aplicada após os alunos já terem o domínio do método da eliminação de Gauss.

É esperado que o estudante consiga perceber vantagens ao resolver os problemas através do *software*. Uma das vantagens consiste na facilidade de mudar a matriz dos coeficientes do sistema após deixar sua planilha já programada. Outra vantagem é facilitar os cálculos numéricos, uma vez que o computador realiza as contas em um tempo menor que o aluno.

Procedimento: O professor irá propor que seus alunos leiam e resolvam os dois problemas a seguir programando uma planilha do *software* Open Office Calc [11] para aplicar a eliminação de Gauss. Ele pode orientar e tirar dúvidas de comandos do *software*, mas é importante não resolver o problema pelo aluno, para que o estudante seja estimulado a pensar e montar sua própria planilha.

Divisão das aulas: A primeira aula deverá ser utilizada para discutir com os alunos como os problemas podem ser modelados através de sistemas lineares e o professor poderá iniciar a explicação sobre os comandos do *software* que serão utilizados. Durante as outras duas aulas, o professor deverá levar os alunos para resolver o problema no computador.

Aplicação do *software*: Vejamos abaixo o procedimento de como montar uma planilha para resolver sistemas lineares com 4 equações e 4 incógnitas. Utilizamos o sistema abaixo como exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ -2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 15 \\ 2x_1 + 1x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -7. \end{cases}$$

1) Nas células de $A1$ até $E4$, escreva os coeficientes do sistema linear conforme a figura a seguir:

	A	B	C	D	E
1	3,0	2,0	3,0	4,0	12,0
2	-2,0	3,0	1,0	3,0	5,0
3	3,0	4,0	4,0	4,0	15,0
4	2,0	1,0	-5,0	-5,0	-7,0

Figura 5.1 – Parte 1 do procedimento

2) Na célula $A6$, escreva ‘ $= A1$ ’. Então, copie a célula $A6$ e cole nas células de $B6$ até $E6$.

	A	B	C	D	E
5					
6	3,0	2,0	3,0	4,0	12,0

Figura 5.2 – Parte 2 do procedimento

3) A partir de agora vamos iniciar o procedimento de triangularização do sistema.

Na célula $A7$, escreva ‘ $= A2 - (\$A\$2/\$A\$1) * A1$ ’.
Na célula $A8$, escreva ‘ $= A3 - (\$A\$3/\$A\$1) * A1$ ’.
Na célula $A9$, escreva ‘ $= A4 - (\$A\$4/\$A\$1) * A1$ ’.
Selecione as células de $A7$ até $A9$ e copie. Então, selecione as células de $B7$ até $E9$ e cole.

	A	B	C	D	E
5					
6	3,0	2,0	3,0	4,0	12,0
7	0,0	4,3	3,0	5,7	13,0
8	0,0	2,0	1,0	0,0	3,0
9	0,0	-0,3	-7,0	-7,7	-15,0

Figura 5.3 – Parte 3 do procedimento

4) Já geramos os zeros na primeira coluna da matriz, o procedimento para gerar os zeros nas próximas colunas é semelhante ao anterior.
Na célula $A11$, escreva ‘ $= A6$ ’. Então, copie a célula $A11$ e cole nas células de $B11$ até $E12$.

	A	B	C	D	E
10					
11	3,0	2,0	3,0	4,0	12,0
12	0,0	4,3	3,0	5,7	13,0

Figura 5.4 – Parte 4 do procedimento

5) Na célula $A13$, escreva ‘ $= A8 - (\$B\$8/\$B\$7) * A7$ ’.
Na célula $A14$, escreva ‘ $= A9 - (\$B\$9/\$B\$7) * A7$ ’.
Selecione as células de $A13$ e $A14$ e copie. Então, selecione as células de $B13$ até $B14$ e cole.

	A	B	C	D	E
10					
11	3,0	2,0	3,0	4,0	12,0
12	0,0	4,3	3,0	5,7	13,0
13	0,0	0,0	-0,4	-2,6	-3,0
14	0,0	0,0	-6,8	-7,2	-14,0

Figura 5.5 – Parte 5 do procedimento

6) Na célula $A16$, escreva ‘ $= A11$ ’. Então, copie a célula $A16$ e cole nas células de $B16$ até $E18$.

	A	B	C	D	E
15					
16	3,0	2,0	3,0	4,0	12,0
17	0,0	4,3	3,0	5,7	13,0
18	0,0	0,0	-0,4	-2,6	-3,0

Figura 5.6 – Parte 6 do procedimento

7) Na célula $A19$, escreva ‘ $= A14 - (\$C\$14/\$C\$13) * A13$ ’.
Selecione a célula $A19$ e copie. Então, selecione as células de $B19$ até $E19$ e cole.

	A	B	C	D	E
15					
16	3,0	2,0	3,0	4,0	12,0
17	0,0	4,3	3,0	5,7	13,0
18	0,0	0,0	-0,4	-2,6	-3,0
19	0,0	0,0	0,0	38,8	38,8

Figura 5.7 – Parte 7 do procedimento

8) O sistema já está triangularizado. Precisamos calcular a solução.
Na célula $E21$ escreva ‘ $= (E16 - D16 - C16 - B16)/A16$ ’.
Na célula $E22$ escreva ‘ $= (E17 - D17 - C17)/B17$ ’.
Na célula $E23$ escreva ‘ $= (E18 - D18)/C18$ ’.
Na célula $E23$ escreva ‘ $= E19/D19$ ’.
Dessa forma, nas células de $E21$ até $E23$ teremos o valor de cada incógnita do sistema.

	A	B	C	D	E
20					
21					1,0
22					1,0
23					1,0
24					1,0

Figura 5.8 – Parte 8 do procedimento

Para resolver outros sistemas lineares de 4 equações e 4 incógnitas, como os que serão propostos na próxima sessão deste capítulo, é necessário apenas alterar os valores da matriz que está nas células de $A1$ até $E4$.

5.1 - Problema 1

Considere a região de uma cidade com as ruas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Todas tem mão única e seus sentidos estão representados na Figura 5.9 . Os pontos A, B, C, e D são cruzamentos entre algumas dessas ruas.

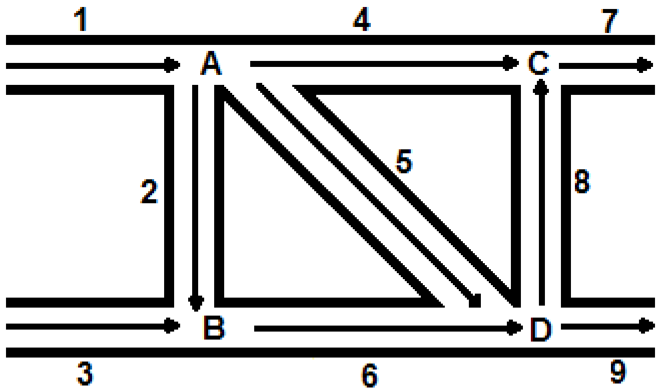

Figura 5.9 – Ruas e sentidos

Uma empresa deseja saber quais são as ruas com maior movimento para poder decidir onde colocar propagandas de seus produtos. Para isso, durante uma semana foi medido o fluxo de veículos (número de veículos por unidade de tempo) no período diurno em algumas dessas ruas e os resultados foram:

Tabela 5.1 – Média de veículos por hora

RUA	MÉDIA DE VEÍCULOS POR HORA
Rua 1	50
Rua 3	15
Rua 4	23
Rua 6	25
Rua 9	34

Determine o fluxo de veículos nas ruas 2, 5, 7 e 8 a partir dos dados da tabela. Resolva seu problema através da resolução de sistemas lineares utilizando o *software* Open Office Calc [11].

Modelagem: Considere que na rua i tenha sido medido um fluxo de carros x_i . Para cada um dos cruzamentos da figura podemos escrever uma equação com os fluxos:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_5 + x_4 & (cruzamento\ A) \\ x_2 + x_3 = x_6 & (cruzamento\ B) \\ x_4 + x_8 = x_7 & (cruzamento\ C) \\ x_5 + x_6 = x_8 + x_9 & (cruzamento\ D) \end{cases}$$

Substituindo os valores da tabela do enunciado, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 50 = x_2 + x_5 + 23 \\ x_2 + 15 = 25 \\ 23 + x_8 = x_7 \\ x_5 + 25 = x_8 + 34 \end{cases}$$

Podemos reescrevê-lo da seguinte forme

$$\begin{cases} x_2 + x_5 + 0x_7 + 0x_8 = 27 \\ x_2 + 0x_5 + 0x_7 + 0x_8 = 10 \\ 0x_2 + 0x_5 - x_7 + x_8 = -23 \\ 0x_2 + x_5 + 0x_7 - x_8 = 9 \end{cases}$$

A solução do sistema é $(x_2, x_5, x_7, x_8) = (10,17,31,8)$.

É importante perceber que, apesar do sistema linear deste problema ter 4 equações e 4 incógnitas, vários coeficientes são iguais a zero. Dessa forma, se torna mais fácil para o aluno verificar se o método aplicado no computador está correto, já que ele pode fazer as contas em seu caderno para verificar a solução.

5.2 - Problema 2

A fórmula para a Dieta de Cambridge, uma dieta popular nos anos 80, foi baseada em anos de pesquisa. Uma equipe de cientistas, chefiada pelo Dr. Alan H. Howard, desenvolveu essa dieta na Universidade de Cambridge depois de mais de oito anos de trabalho clínico com pacientes obesos. A fórmula dessa dieta de baixíssimas calorias é uma combinação precisa e equilibrada de carboidratos, proteínas de alta qualidade, gordura, juntamente com vitaminas, minerais, elementos traços e eletrólitos. Na tabela abaixo, estão quatro dos ingredientes da dieta, juntamente com as quantidades de determinados nutrientes obtidos a partir de 100 gramas de cada ingrediente [7].

Tabela 5.2 – Nutrientes e alimentos

	Quantidades (gramas) fornecidas por 100g de ingrediente				
NUTRIENTE (g)	Leite desnatado	Farinha de soja	Soro de leite	Tofu	Quantidade fornecidas pela dieta de Cambridge em um dia
Proteína	36	51	13	8	33
Carboidrato	52	34	74	1,9	45
Gordura	0	7	1,1	4,8	3
Cálcio	1,26	0,19	0,8	0,35	0,8

Determine as quantidades diárias de cada um dos ingredientes de forma a fornecer as quantidades precisas de proteínas, carboidratos, gordura e cálcio pela Dieta de Cambridge. Resolva seu problema através da resolução de sistemas lineares utilizando o *software* Open Office Calc [11].

Modelagem: Considere que x_1 seja a quantidade de leite desnatado, x_2 a quantidade de farinha de soja, x_3 a quantidade de soro de leite e x_4 a quantidade de tofu, todos medidos em unidades de $100g$ do ingrediente. Utilizando os dados da tabela do enunciado, podemos escrever uma equação para cada nutriente:

$$\begin{cases} 36x_1 + 51x_2 + 13x_3 + 8x_4 = 33 \quad (Proteína) \\ 52x_1 + 34x_2 + 74x_3 + 1{,}9x_4 = 45 \quad (Carboidrato) \\ 0x_1 + 7x_2 + 1{,}1x_3 + 4{,}8x_4 = 3 \quad (Gordura) \\ 1{,}26x_1 + 0{,}19x_2 + 0{,}8x_3 + 0{,}35x_4 = 0{,}8 \quad (Cálcio) \end{cases}.$$

A solução do sistema é $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0{,}427\,; 0{,}269\,; 0{,}178\,; 0{,}190)$. Assim, as quantidades diárias de cada ingredientes pela dieta de Cambridge são 42,7g de leite desnatado, 26,9g de farinha de soja, 17,8g de soro de leite e 19,0g de tofu.

Capítulo 6
Considerações finais

Nesta dissertação apresentamos o estudo da resolução de sistemas linares, partindo do método da eliminação de Gauss, que é utilizado na educação básica, e aprofundando o estudo de métodos diretos com outras estratégias não estudadas no ensino médio.

Nosso estudo de resolução de sistemas também contemplou alguns métodos iterativos, apresentando suas fórmulas, testes de parada e critérios de convergência. Como os métodos iterativos são utilizados para encontrar soluções de sistemas com um número muito grande de equações e incógnitas, realizamos testes numéricos em um computador para comparar o desempenho de cada uma das estratégias apresentadas.

Um dos objetivos do PROFMAT é a contribuição para o aprimoramento do ensino de matemática na educação básica. Assim, esta dissertação também traz um plano de aula com dois problemas para professores de ensino médio aplicarem em sala de aula para complementar o ensino da resolução de sistemas lineares.

Esperamos que este trabalho contribua para o aperfeiçoamento de professores de matemática e o desenvolvimento do ensino de matemática na educação básica.

Referências

[1] BAGNARA, Roberto. A Unified Proof for the Convergence of Jacobi and Gauss-Seidel Methods. *Society for Industrial and Applied Mathematics. V.* 37. p. 93-97. 1995.

[2] BITTENCOURT, Marco L.; FEIJÓO, Raúl A. Análise Comparativa de Métodos Diretos e Iterativos para a Solução de Sistema de Equações. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería.* v. 13. p. 123-148. Barcelona. 1997.

[3] DANTE, Luiz R. *Matemática: Contexto e Aplicações.* V.2. 2. Ed. São Paulo. Ática. 2013.

[4] ESCALANTE, René; RAYDAN, Marcos. *Alternating Projection Methods:* Fundamentals of Algorithms. Caracas. Siam. 2011.

[5] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. *Matemática Ciência e Aplicações.* V. 2. 7. Ed. São Paulo. Editora Saraiva. 2013.

[6] KALAMBI, Ibrahim B. A Comparison of Three Iterative Methods for the Solutions of Linear Equations. *Journal of Applied Sciences and Environmental Management.* Damaturu. v. 12. p. 53-55. 2008.

[7] LAMIN, Maria Regina N. *Resolução de Problemas Modelados com Sistemas de Equações Lineares.* Florianópolis. 2000.

[8] LAY, David C. *Álgebra Linear e Suas Aplicações.* 4. Ed. Rio de Janeiro. LTC. 2014.

[9] LIMA, Elon L., *Análise Real.* V. 2 6. Ed. Rio de Janeiro. IMPA. 2013.

[10] MatLab 9.1.0.441655 win64-bit. MathWorks. 2016.

[11] Open Office Calc 4.1.1. The Apache Software Foundation. 2014.

[12] PAIVA, Manoel. *Matemática Paiva.* V. 2. 2. Ed. São Paulo. Moderna. 2013.

[13] RUGGIERO, Márcia A.; LOPES, Vera L da R. *Cálculo Numérico:* Aspectos Teóricos e Computacionais. 3. Ed. São Paulo. Makron Books.1996.

[14] SZNAJDER, Roman. Kaczmarz Algorithm Revisited. *Technical Transactions.* v.20. p.247-254. Cracóvia. 2015.

[15] WATKINS, David S. *Fundamentals of Matrix Computations.* 2. Ed. Nova Iorque. Wiley-Interscience. 2002.