



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL PROFMAT



Cleunício Antônio Prado

**PARAMETRIZAÇÃO DE CÔNICAS E CURVAS DE LISSAJOUS:
CONCEITOS E POSSIBILIDADES NO ENSINO COM AUXÍLIO
DO GEOGEBRA**

Sinop - MT

2017

Cleunício Antônio Prado

**PARAMETRIZAÇÃO DE CÔNICAS E CURVAS DE LISSAJOUS:
CONCEITOS E POSSIBILIDADES NO ENSINO COM AUXÍLIO
DO GEOGEBRA**

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de mestre na Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade do Estado de Mato Grosso, Campus de Sinop, do programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT .

Silvio Cesar Garcia Granja
Orientador

Vera Lúcia Vieira de Camargo
Coorientador

Sinop - MT

2017

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

P896p Prado, Cleunício Antôni.
Parametrização de cônicas e curvas de Lissajous: conceitos e possibilidades de abordagem no ensino com auxílio do GeoGebra / Cleunício Antônio Prado. – Sinop, 2017.
84 p.: il.

Orientador: Dr. Sílvio Cesar Garcia Granja.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado de Mato Grosso, *Campus* Universitário de Sinop, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática.

1. Trigonometria. 2. Curvas de Lissajous. 3. Curvas Cônicas. 4. *Software* Geogebra. 4. Mestrado Profissional em Matemática. I. Granja, Sílvio Cesar Garcia, Dr. II. Título. III. Título: conceitos e possibilidades de abordagem no ensino.

CDU 514:004

Ficha
catalográfica
elaborada
pelo
bibliotecário
Luiz
Kenji
Umeno
Alencar -
CRB1
2037.



ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS.
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT UNEMAT - SINOP



CLEUNICIO ANTÔNIO PRADO

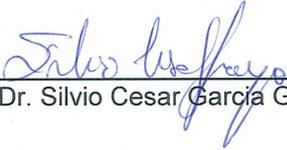
PARAMETRIZAÇÃO DE CÔNICAS E CURVAS DE LISSAJOUS: CONCEITOS
E POSSIBILIDADES NO ENSINO COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT no *Campus* Universitário de Sinop, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Cesar Garcia Granja

Aprovado em: 28/06/2017

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Silvio Cesar Garcia Granja - UNEMAT



Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi – UNICAMP/Campinas



Prof. Dr. Emivan Ferreira da Silva - UNEMAT

SINOP – JUNHO - 2017



Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática em Rede Nacional
UNEMAT- Sinop Avenida dos Ingás, nº 3001 - Centro – CEP: 78.555-000 – Sinop–
MT.Tel./Fax: (66)9601-8925 – Cx. Postal: 680 – profmat-unemat@unemat-net.br



Este trabalho é dedicado ao Professor Doutor Silvio César Garcia Granja, pela generosidade demonstrada ao lidar com minhas limitações e pelo tempo doado a fim de tornar possível a conclusão dessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos:

- Ao Senhor, pelo eterno amparo e por revelar-me que obstáculos existem para serem transpostos.
- Ao professor Doutor Sílvio César Garcia Granja por ser o responsável , em muitos momentos, de haver apenas uma pegada na estrada dessa jornada.
- À Professora Doutora Vera Lúcia Vieira de Camargo, pelas valiosas contribuições emprestadas no desenvolvimento desse trabalho
- À minha família por viver minhas angústias e compreender minha ausência em momentos singulares.
- Aos incríveis colegas de turma, sempre companheiros nas dificuldades e também nas alegrias.
- Aos professores do Mestrado que sempre mostraram amor e incansável dedicação nessa missão.
- Ao Professor Doutor Oscar Chong, pela energia de vida que exala de seu trabalho, realimentado o nosso ânimo.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre as principais funções trigonométricas aplicadas às parametrizações de curvas cônicas a partir das equações que modelam as Curvas de Lissajous, bem como sugere uma proposta didática utilizando o Software GeoGebra para situações-problema tratando dos conceitos das funções seno e cosseno no círculo trigonométrico. Para atingir os objetivos propostos é realizada inicialmente uma revisão teórica da trigonometria, em especial, as relações do triângulo retângulo no ciclo trigonométrico. Além disso, os conceitos e representação gráfica das principais funções trigonométricas empregadas ao estudo de movimento oscilatório foram apresentadas de forma que as amplitudes, frequências e fases relativas entre duas funções senoidais sejam mostradas como quantidades importantes na descrição das parametrizações. Na sequência, são abordados os conceitos sobre curvas cônicas e as respectivas parametrizações utilizando as equações das Curvas de Lissajous. Neste ponto, os parâmetros livres das Curvas de Lissajous são ajustados de forma que fiquem em função dos parâmetros que descrevem as curvas cônicas escolhidas. O trabalho finaliza apresentando uma proposta didática destinada a alunos do Ensino Médio e/ou cursos de formação inicial ou continuada de professores de Matemática sobre funções seno e cosseno na perspectiva da resolução de problemas aliada aos recursos da geometria dinâmica do Software GeoGebra.

Palavras chave: Trigonometria. Curvas de Lissajous. Parametrização. Geogebra. Proposta de ensino.

ABSTRACT

This work presents a study on the trigonometric functions applied to the parameterizations of conic curves from the equations that model the Lissajous Curves, as well as suggests a didactic proposal using the GeoGebra Software for problem situations dealing with the concepts of sine and cosine functions in the Trigonometric circle. In order to attain the objectives, a theoretical revision of trigonometry, in particular, on the relations of the triangle rectangle in the trigonometric cycle is carried out. In addition, the concepts and graphical representation of the main trigonometric functions employed in the study of oscillatory motion were presented in such a way that the relative amplitudes, frequencies and phases between two sinusoidal functions are shown as important quantities in the description of the parametrizations. In the sequence, the conic curves concepts and the respective parameterizations are approached using the equations of the Lissajous Curves. At this point, the free parameters of the Lissajous Curves are adjusted to fit the parameters that describe the chosen conic curves. The work ends by presenting a didactic proposal for secondary school students and / or courses of initial or continuing training of Mathematics teachers on sine and cosine functions from the perspective of problem solving, allied to the dynamic geometry resources of the GeoGebra Software.

Keywords: Trigonometry. Lissajous curves. Parametrization. Geogebra. Teaching proposal.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Razões trigonométricas no triângulo retângulo ABC	28
Figura 2 – Imagens de arcos no ciclo trigonométrico	29
Figura 3 – Eixos das funções circulares	31
Figura 4 – Representação de um movimento circular ao longo de um eixo	34
Figura 5 – Amplitude (A) e Fases Ascendente e Descendente de um ponto de uma Onda	34
Figura 6 – Gráficos de ondas com diferentes frequências	35
Figura 7 – Representação da função seno no 1º quadrante do ciclo trigonométrico	35
Figura 8 – Representação gráfica de $f(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$	36
Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = \text{cos}(x)$	37
Figura 10 – Representação da função tangente no I e III quadrante do ciclo trigonométrico	38
Figura 11 – Representação gráfica da função tangente	39
Figura 12 – Ciclo trigonométrico a partir do qual desenvolve-se a demonstração das relações fundamentais I e II	39
Figura 13 – Representação gráfica de dois arcos, a partir da qual desenvolve-se a demonstração da soma de dois arcos.	40
Figura 14 – Eixo \overline{OXY} transladado em relação ao eixo OXY	45
Figura 15 – Rotação de um ângulo θ dos eixos coordenados XOY em torno da origem	45
Figura 16 – Elementos da parábola: Foco, reta diretriz, reta que contém o foco, vértice	47
Figura 17 – Parábola cujo Foco está à direita com reta focal coincidente com eixo das abscissas.	48
Figura 18 – Parábola cujo Foco está à esquerda e a reta focal coincidente com as abscissas	49
Figura 19 – Parábola com reta focal paralela a OX e Foco à direita	49
Figura 20 – Circunferência de centro $O(x_0, y_0)$ e raio r	50
Figura 21 – Comparando Amplitudes e Fases de dois sinais diferentes	54
Figura 22 – Osciloscópio	55
Figura 23 – Representação gráfica da composição por superposição de sinais senoidais	55
Figura 24 – Curva com 3 máximos horizontais e 2 verticais	56
Figura 25 – Método das secantes para determinar a relação entre frequências.	56
Figura 26 – Curvas de Lissajous, formação de elipses de acordo com a defasagem dos sinais.	57
Figura 27 – Curvas de Lissajous formadas a partir da variação de frequências e fases.	58
Figura 28 – Comportamento do segmento de reta conforme altera o ângulo α	61
Figura 29 – Parábolas com eixo de simetria coincidente ao eixo y	62
Figura 30 – Rotação da parábola parametrizada segundo um ângulo α	65
Figura 31 – Rotação da elipse parametrizada, segundo um ângulo α	67
Figura 32 – Imagem de pêndulos perpendiculares	69

Figura 33 – Representação gráfica das funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico	71
Figura 34 – Representação gráfica móvel de seno e cosseno com arcos nos 4 quadrantes para análise dos sinais, crescimento, imagem e período.	72
Figura 35 – Análise das funções seno e cosseno no ciclo concomitantemente ao respectivo gráfico.	73
Figura 36 – Estudo do comportamento de $f(x) = a + b \operatorname{sen}(cx + d)$ variando parâmetros a, b, c, d	73
Figura 37 – Representação gráfica das funções $g(x) = 1 + \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \operatorname{sen} x$	75
Figura 38 – Representação gráfica das funções $h(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \operatorname{sen} x$	76
Figura 39 – <i>London Eye</i>	77
Figura 40 – Pistão de um motor	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Valores de $f(x) = \text{sen } x$	36
Tabela 2	– Comportamento da função tangente conforme varia o ângulo α	38
Tabela 3	– Problema da modelagem das marés	70
Tabela 4	– Lista de funções.	74
Tabela 5	– Ficha para analisar as variações nas funções.	75
Tabela 6	– Ficha preenchida com resultados para $a = 1$	75
Tabela 7	– Resultados para $a = 2$	76

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PISA	(Programme for International Student Assessment – Programa Internacional de Avaliação de Alunos)
IDEB	Índices de Desenvolvimento da Educação Básica
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
JAVA	<i>Linguagem de programação e plataforma computacional</i>
LINUX	<i>Termo utilizado referente aos sistemas operacionais que utilizam o Kernel Linux.</i>
Hz	Hertz
2D	Espaço bidimensional
3D	Espaço tridimensional

LISTA DE SÍMBOLOS

T	Período medido em segundos
f	Frequência medida em Hz
$\text{sen } \alpha$	seno de um ângulo de medida α
$\text{cos } \alpha$	cosseno de ângulo de medida α
$\text{tan } \alpha$	tangente de ângulo de medida α
A_x	Amplitude de oscilação na componente x
A_y	Amplitude de oscilação na componente y
P	ponto qualquer pertencente ao ciclo trigonométrico
a.C	antes de Cristo
r	raio de uma circunferência
$<$	menor do que
$>$	maior do que
\leq	menor ou igual do que
\geq	maior ou igual do que
F	frequência de uma função periódica
ω	frequência angular de uma função periódica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	REVISÃO TEÓRICA DE TRIGONOMETRIA	27
2.1	TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	28
2.2	CICLO TRIGONOMÉTRICO	29
2.2.1	Movimento Periódico	30
2.2.2	Funções Circulares	31
2.2.3	Funções Periódicas	31
2.3	FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES PERIÓDICAS	32
2.3.1	Função Seno	35
2.3.2	Função Cosseno	36
2.3.3	Função Tangente	37
2.3.4	Relações Fundamentais	38
2.3.4.1	<i>Relações entre seno e cosseno</i>	39
2.4	TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	40
2.5	CONSIDERAÇÕES	42
3	CURVAS CÔNICAS	43
3.1	TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DE EIXOS DE REFERÊNCIA	44
3.1.1	Translação dos Eixos Coordenados em \mathbb{R}^2	44
3.1.2	Rotação dos Eixos Coordenados em \mathbb{R}^2	45
3.2	REVISÃO TEÓRICA SOBRE AS CÔNICAS	46
3.2.1	Reta	46
3.2.2	Parábola	47
3.2.2.1	<i>Formas canônicas da parábola</i>	47
3.2.2.1.1	<i>Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX.</i>	47
3.2.2.1.2	<i>Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY.</i>	48
3.2.2.1.3	<i>Com reta focal paralela ao eixo OX</i>	49
3.2.3	Circunferência	50
3.2.4	Elipse	50
3.3	CONSIDERAÇÕES	51
4	PARAMETRIZAÇÃO	53
4.1	CURVAS PARAMETRIZADAS	53
4.2	CURVAS DE LISSAJOUS	53
4.3	PARAMETRIZAÇÕES DAS CÔNICAS	57
4.3.1	Parametrização da reta	58
4.3.1.1	<i>Reta com inclinação α</i>	59
4.3.1.2	<i>Rotação do segmento de reta horizontal</i>	59

4.3.2	Parametrização da parábola	60
4.3.2.1	<i>Parábola com concavidade para cima $a > 0$</i>	60
4.3.2.2	<i>Parábola com concavidade negativa $a < 0$</i>	62
4.3.2.3	<i>Rotação da parábola com um ângulo α</i>	64
4.3.3	Parametrização da circunferência	64
4.3.3.1	<i>Rotação da Circunferência por um ângulo α</i>	66
4.3.4	Parametrização da elipse	66
4.3.4.1	<i>Rotação da parametrização da elipse</i>	66
4.4	CONSIDERAÇÕES	68
5	PROPOSTA DIDÁTICA PARA FUNÇÕES SENO E COSSENO . .	69
5.1	MOTIVAÇÃO	69
5.2	O ENSINO	70
5.2.1	As Funções Seno e Cosseno	70
5.2.2	Atividades	71
5.3	CONSIDERAÇÕES	80
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	81
6.1	PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS	82
	REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

Os resultados do desempenho dos alunos brasileiros na área de Matemática apontados pelo PISA (2016) (*Programme for International Student Assessment* – Programa Internacional de Avaliação de Alunos) e pelos índices do IDEB – Índices de Desenvolvimento da Educação Básica, sinalizam que o ensino-aprendizagem em Matemática no país está longe de atingir um patamar satisfatório, principalmente no ensino médio e, também a necessidade urgente de mecanismos que resulte em melhorias nesse processo.

Nesse sentido, torna-se necessário buscar metodologias que facilitem a compreensão e a construção do conhecimento matemático do aluno, pois as metodologias predominantemente utilizadas em sala de aula, constituídas por atividades repetitivas que objetivam a fixação dos conceitos e de técnicas, que muitas vezes não conseguem o desenvolvimento das habilidades necessárias para a construção do pensamento matemático e nem capacitam o aluno para aplicá-los em outros contextos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2006) destacam a metodologia da Resolução de Problemas para o ensino da Matemática, uma vez que essa metodologia exige empenho dos alunos na busca de estratégias de solução, modos diferenciados de pensar e de relacionar informações, o que favorece o desenvolvimento de sua autonomia intelectual.

Por outro lado, considerando que a sociedade atual é fortemente dependente das tecnologias da informação e comunicação, se torna utopia pensar em Educação dissociada dessa imensa rede tecnológica. Embora se tenha disponível uma gama satisfatória de softwares e projetos educacionais buscando inserir as tecnologias no contexto do ensino-aprendizagem, ainda há inúmeros empecilhos para a adequada utilização com a finalidade educativa, como a falta de preparo de muitos professores em relação ao uso de recursos tecnológicos em sala de aula e, além disso, uma quantidade insuficiente de equipamentos nas escolas e precárias conexões com a Internet.

Nas últimas décadas muito se tem falado em interdisciplinaridade, transdisciplinaridade e transversalidade, entretanto,

muito do que se busca por meio de rótulos como interdisciplinaridade, transdisciplinaridade, ou mesmo transversalidade atende pelo nome de contextualização. Durante a permanência na escola, a contextualização favorece a construção dos significados, constituindo uma estratégia fundamental para a mobilização do conhecimento a serviço da inteligência ou dos projetos das pessoas (PERRENOUD, 2002).

Para que o aluno se torne sujeito capaz de resolver situações-problema relacionadas ao seu cotidiano, torna-se necessário que o ensino promova oportunidades para que ele desenvolva habilidades por meio dos conteúdos escolares de modo que desencadeiem o seu desenvolvimento cognitivo, afetivo e social. Nesse sentido, a contextualização pode ser um recurso pedagógico

que atenda a estas necessidades e ainda, torne o processo de aprendizagem prazeroso e significativo para o aluno.

Segundo Dante (2008), a contextualização é um recurso pedagógico capaz de tornar a construção do conhecimento em um processo permanente de formação de capacidades: “Capacidades que permitem transitar inteligentemente do mundo da experiência imediata e espontânea para o plano das abstrações”. (DANTE, 2008).

Nessa mesma direção os PCNEM (2006, p.111) apontam que a Matemática deve auxiliar na estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo, mas, além disso, deve assumir papel instrumental, uma vez que é uma ferramenta que serve para o desenvolvimento das atividades humanas; é integrante do conhecimento humano; favorece o desenvolvimento da leitura e interpretação da realidade, além de contribuir para desenvolver as capacidades necessárias para a vida social e profissional das pessoas.

A opção pelo tema “Funções Trigonométricas” se deu em função das dificuldades encontradas pelos alunos que foram sendo observadas ao longo de dez anos como professor de Matemática, nos momentos em que o referido conteúdo era abordado nas turmas do Ensino Médio, que embora os estudantes já tivessem estudado a trigonometria do triângulo retângulo no final do ciclo fundamental, muitos não conseguiam compreender de modo satisfatório a continuidade dos conceitos trigonométricos que seriam abordados no nível secundário. Aliadas a estas dificuldades, alguns professores protelam a abordagem sobre o assunto trigonometria, como mostra Dantas (2013)

Nessas vivências, em contato direto com colegas da área, evidenciamos que parte dos professores de Matemática do Ensino Médio das escolas públicas estaduais substituíam conteúdos como trigonometria, logaritmos e números complexos, por considerá-los de difícil entendimento para os alunos, por uma revisão de temas já abordados anteriormente. Desse modo, o conteúdo de trigonometria fica relegado a um segundo plano. (DANTAS, 2013, p.22).

A importância do estudo da Trigonometria no Ensino Médio se justifica à medida que os conceitos a ela agregada possibilitam aos alunos o desenvolvimento de habilidades em leitura e interpretação de fatos presentes em sua realidade e, ainda as possibilidades de aplicação e interpretação de modelos matemáticos para resolução de situações-problema relacionadas às medições geodésicas, distâncias inacessíveis e fenômenos periódicos.

O estudo de movimentos periódicos pode ser abordado por meio do estudo de funções harmônicas planas ou esféricas. As soluções e descrições dos movimentos vibracionais, oscilatórios e ondulatórios, podem ser obtidos pela expansão em séries de Fourier que basicamente empregam funções seno e cosseno. Soluções de movimentos rotacionais periódicos, não necessariamente circulares, podem ser apresentados de forma parametrizada utilizando duas, ou três, funções senoidais em cada componente do movimento. Um estudo que trás à tona a dependência entre as amplitudes, frequências e fases relativas destas funções senoidais foi feito por meio de família de curvas parametrizadas que foi estudada por Nathaniel Bowditch em 1815, e mais tarde por Jules Antoine Lissajous, em 1857. Estas curvas são denominadas curvas de Lissajous

ou curva de Bowditch e são uma abordagem pertinente ao estudo de parametrizações de outras curvas com grau de liberdade menores, como um segmento de parábola ou polinômio de grau maior.

As curvas de Lissajous podem ser um instrumento de conexão entre o estudo de funções trigonométricas, parametrizações de curvas e funções implícitas como a circunferência e a elipse, além disso, podem ser adequadas na construção de gráficos de funções como a parábola e a reta, o que poderia facilitar a aprendizagem dos estudantes e aumenta a versatilidade dos professores nos conteúdos supracitados.

As dificuldades dos alunos frente à aprendizagem da Trigonometria e a relevância do conteúdo apresentadas devem ser molas propulsoras para a busca por novas abordagens de ensino para esse tema.

As tendências atuais para o ensino da Matemática, dentre várias possibilidades, apontam que as aplicações e os recursos ofertados pelas tecnologias da informação podem ser ótimos aliados para auxiliar no ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos escolares, em particular da Trigonometria, como destaca as Orientações Curriculares de Mato Grosso (2012)

a trigonometria não deve ser apresentada aos estudantes de forma desconectada das aplicações, com alta demanda de tempo no cálculo mecânico e algébrico das identidades e equações, desconsiderando os aspectos realmente importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Ao invés disso deve-se priorizar as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial, o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente, com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. (MATO GROSSO, 2012)

Sob esse olhar, é que se intenciona neste trabalho apresentar uma proposta didática utilizando o Software GeoGebra (IGI, 2015; HOHENWARTER et al., 2013) como facilitador no processo de compreensão dos conceitos trigonométricos, por meio da investigação e exploração da dinâmica e interatividade oferecida por esse recurso em contextos de resolução de situações-problema. Para atingir tal objetivo tornou-se necessário à priori, o desenvolvimento do referencial teórico a respeito dos principais conceitos sobre a Trigonometria, curvas de Lissajous e parametrizações de curvas. Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

Inicialmente, no Capítulo 2, é apresentada uma revisão teórica acerca da trigonometria, tratando as propriedades no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico e conceitos sobre as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente e os parâmetros a elas associadas, como período e frequência.

No Capítulo 3, é tratado sobre os conceitos das curvas cônicas: a reta, a parábola, a circunferência e a elipse, com ênfase em suas equações.

No Capítulo 4, são apresentadas as parametrizações das curvas cônicas estudadas no Capítulo 3, a partir das equações harmônicas que descrevem as curvas de Lissajous, que também

são abordadas neste Capítulo, sendo apresentadas o seu surgimento, utilidade na eletrônica e o comportamento de seus gráficos segundo a amplitude, frequência e fases aplicadas.

No Capítulo 5 é apresentada uma proposta didática com o tema de Funções Trigonômicas em contextos de situações-problema no ambiente dinâmico e interativo do GeoGebra.

Finalmente no Capítulo 6, são apresentadas as Considerações Finais sobre o trabalho desenvolvido.

2 REVISÃO TEÓRICA DE TRIGONOMETRIA

Formada por três radicais gregos: *tri* = três, *gonos* = ângulos, *metron* = medir, a palavra trigonometria significa “medida dos triângulos”. Inicialmente, esse ramo da matemática tinha como objetivo o cálculo das medidas dos lados e ângulos de um triângulo. Segundo Costa (2003) os primeiros rudimentos da trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia. Esses povos utilizavam cálculos de razões entre números e entre as medidas dos lados de triângulos semelhantes. Os babilônios usavam a trigonometria para resolver problemas práticos de navegação, de Agrimensura e de Astronomia. Costa (2003) relata que esses povos “construíram no século 28 a.C., durante o reinado de Sargon, um calendário astrológico e elaboraram, a partir do ano 747 a.C., uma tábua de eclipses lunares”. O astrônomo grego Hiparco, que é considerado o pai da Astronomia, empregou pela primeira vez relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo, por volta de 140 a.C.

Segundo Eves (2011), é atribuído a Hiparco um tratado em doze livros que se ocupa da construção de uma tábua de cordas. Uma tábua de cordas é equivalente a uma tábua de senos trigonométricos. Ptolomeu (125a.C.), o mais célebre astrônomo da Antiguidade, escreve, baseado nos trabalhos de Hiparco, o que é considerado um verdadeiro tratado da trigonometria retilínea e esférica, conhecido, atualmente como “O almagesto”. De acordo com Aaboe (2013) esse nome curioso vem provavelmente da distorção árabe de uma palavra grega significando “o maior” (*le magiste*). Uma grande contribuição do Almagesto foi mostrar a possibilidade de descrição quantitativa dos fenômenos naturais,

Mais do que qualquer outro livro, o Almagesto contribuiu para a ideia tão básica nas atividades científicas, de que uma descrição quantitativa matemática dos fenômenos naturais, capaz de fornecer previsões confiáveis, é possível e desejável. (AABOE, 2013, p.129)

Ptolomeu desenvolveu as ferramentas matemáticas, além da geometria elementar, necessárias para a Astronomia, incluindo a trigonometria.

De acordo com Eves (2011), é atribuído a Menelau de Alexandria, um tratado sobre cordas de um círculo, em seis livros, no qual, no livro I tem-se pela primeira vez a definição de triângulo esférico. Sabe-se que

o livro se dedica a estabelecer para os triângulos esféricos muitas das proposições estabelecidas por Euclides para os triângulos planos, como os teoremas usuais de congruência, teoremas sobre triângulos isósceles e assim por diante. Além disso, estabelece-se no texto a congruência de dois triângulos esféricos tais que os ângulos de um são respectivamente iguais aos ângulos do outro (para o qual não há nenhum análogo no plano) e o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo esférico é maior do que dois ângulos retos. (EVES, 2011).

Atualmente, as aplicações da Trigonometria se estendem a outros campos da Matemática, como a Geometria e a Análise. Essas aplicações abrangem também a Eletricidade, Mecânica, Acústica, Música, Engenharia Civil, Topografia entre outras áreas do conhecimento humano. Os

conceitos trigonométricos atuais raramente lembram os triângulos que deram origem à Trigonometria.

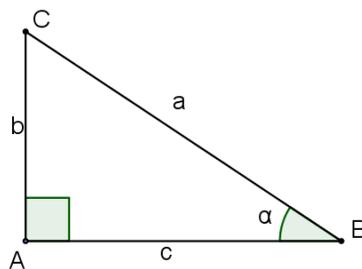
Neste Capítulo desenvolve-se uma revisão sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico com ênfase para as funções seno, cosseno e tangente.

2.1 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Razões Trigonométricas:

São definidas as razões entre os lados do triângulo retângulo ABC , cuja hipotenusa \overline{BC} mede a e os catetos \overline{AC} e \overline{AB} medem b e c respectivamente, conforme pode-se observar na Figura 1.

Figura 1 – Razões trigonométricas no triângulo retângulo ABC



Fonte: Acervo próprio

- Seno de um ângulo agudo: Num triângulo retângulo, o seno de ângulo agudo é dado pelo quociente (razão) entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}; \quad (1)$$

- Cosseno de um ângulo agudo: Num triângulo retângulo o cosseno de um ângulo agudo é dado pela razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa.

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}; \quad (2)$$

- Tangente de um ângulo agudo: Num triângulo retângulo a tangente de um ângulo agudo é dada pela razão entre o cateto oposto a e o cateto adjacente a esse ângulo.

$$\operatorname{tan} \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}. \quad (3)$$

2.2 CICLO TRIGONOMÉTRICO

Os conceitos que são desenvolvidos nessa seção, estão embasados na obra de Iezzi (2004).

Definição 1. Em um Plano, considere um sistema cartesiano ortogonal uOv . Seja a circunferência γ de centro na origem e raio $r = 1$.

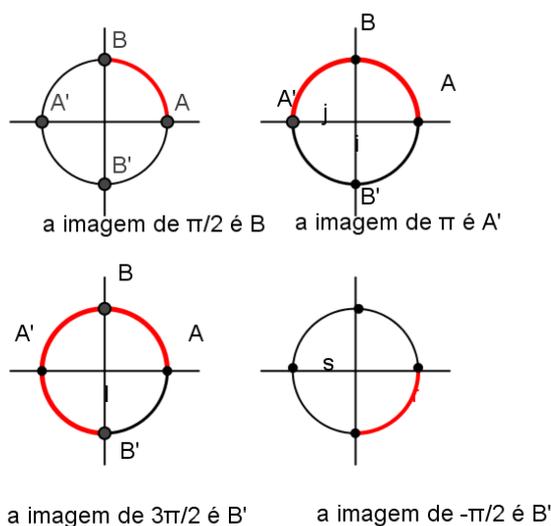
Define-se uma aplicação de \mathbb{R} sobre γ , isto é, associe-se a cada numero real x um único ponto P da circunferência γ do seguinte modo:

1. Se $x = 0$, então P coincide com A ; sendo $A = (1,0)$
2. Se $x \geq 0$, então realiza-se um movimento de A até P no sentido anti-horário com comprimento x , e marca-se P como ponto final do percurso.
3. Se $x \leq 0$, então realiza-se um movimento de A até P no sentido horário com comprimento $|x|$. O ponto final do percurso é P .

A circunferência assim definida, com origem em A , é chamada ciclo ou circunferência trigonométrica.

Se o ponto P está associado ao número real x dizemos que é a imagem de x no ciclo. Assim, como mostra a Figura 2, tem-se que a imagem de $\frac{\pi}{2}$ é B , para $P = B$; a imagem de π é A' , para $P = A'$; a imagem de $\frac{3\pi}{2}$ é B' , para $P = B'$ e a imagem de $-\frac{\pi}{2}$ é B' .

Figura 2 – Imagens de arcos no ciclo trigonométrico



Ainda, se P é imagem do número x_0 , então P também é a imagem dos números $x_0 + 2\pi$, $x_0 + 4\pi$, $x_0 + 6\pi$, etc. e, $x_0 - 2\pi$, $x_0 - 4\pi$, $x_0 - 6\pi$. De forma geral, P é a imagem dos elementos do conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2.2.1 Movimento Periódico

Em um movimento periódico, o móvel ocupa, sucessivamente, a mesma posição na trajetória, representa sempre a mesma velocidade e aceleração e o intervalo de tempo em que tal móvel esteja duas vezes numa mesma posição é sempre o mesmo, isto é, movimento periódico é todo movimento que se repete em intervalos de tempo iguais.

Alguns movimentos periódicos:

- Movimento circular uniforme;
- Movimento da Terra em torno do Sol;
- Movimento de uma massa presa à extremidade de uma mola;
- Movimento de uma lâmina vibrante;
- Movimento de um pêndulo.

O movimento periódico é chamado movimento oscilatório se o móvel se desloca periodicamente numa mesma trajetória, indo e vindo para um lado e para outro em relação a uma posição média de equilíbrio.

Como exemplo, entre os movimentos periódicos citados anteriormente, são movimentos oscilatórios:

- O movimento de uma massa presa à extremidade de uma mola;
- O movimento de uma lamina vibrante;
- O movimento de um pêndulo.

O tempo necessário para duas passagens consecutivas do móvel num mesmo ponto da trajetória é chamado de período T e sua unidade, no SI, é o segundo.

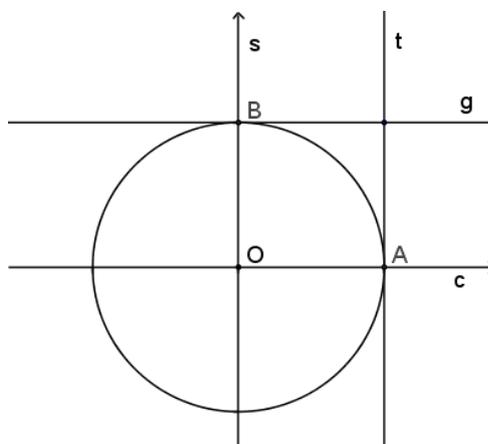
O inverso do período é chamado de frequência (f) e representa a quantidade de vezes que o móvel passa por um mesmo ponto da trajetória na unidade de tempo.

2.2.2 Funções Circulares

As funções circulares constituem o objeto fundamental da trigonometria, além disso, a sua periodicidade lhe confere grande importância por permitir representar fenômenos naturais periódicos.

Para o desenvolvimento das funções circulares, deve-se associar quatro eixos ao ciclo: O eixo c dos cossenos com direção OA e sentido positivo $O \rightarrow A$; o eixo s dos senos com direção perpendicular a OA por A e sentido positivo $O \rightarrow B$; o eixo t das tangentes com direção paralela a s por A e sentido positivo o mesmo dos senos; o eixo g das cotangentes com direção paralela a c por B e sentido o mesmo dos cossenos, como pode ser observado na Figura 3.

Figura 3 – Eixos das funções circulares



Fonte: Fonte: Acervo próprio

2.2.3 Funções Periódicas

Uma função é chamada periódica se ela se repete ao longo da variável independente com determinado período constante. Estas funções são ideais para modelar fenômenos naturais periódicos.

Definição 2. Uma função $f : A \rightarrow B$ é periódica se existir um número $p > 0$ satisfazendo a condição

$$f(x+p) = f(x), \quad x \in A \quad (4)$$

O gráfico de uma função periódica é resultante da repetição de qualquer intervalo de comprimento p . O comprimento do intervalo em x necessário para a imagem da função se repetir é chamado de período e para qualquer n inteiro positivo segue que $f(x) = f(x+np)$, isto é, um múltiplo inteiro positivo de p também é um período de f .

O período fundamental de f é o menor valor de p que satisfaz a equação $f(x) = f(x+p)$ e é indicado por T . A frequência F de uma função periódica é definida como o inverso de

seu período

$$F = \frac{1}{T} \quad (5)$$

e representa o número de repetições em cada intervalo unitário em x . Tem-se também a frequência angular

$$\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T} \quad (6)$$

2.3 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES PERIÓDICAS

As relações trigonométricas representadas no círculo de raio unitário, segundo Dante (2008, p.35), fez com que os matemáticos estudassem seus comportamentos por intermédio de seus gráficos, sendo então identificadas como funções.

O primeiro indício de um tratamento funcional da Trigonometria se deu em 1635, quando Roberval (Gilles Personne de Roberval, 1602-1675) fez o primeiro esboço de uma curva do seno, mas os grandes avanços se deram somente no século XIX, com Fourier, ao desenvolver seus estudos sobre os movimentos periódicos.

A relação fundamental $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, indica que, para qualquer ângulo α , os números $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ são as coordenadas de um ponto da circunferência de raio unitário e centro na origem de \mathbb{R}^2 , ou seja, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, resultando que para todo ponto $(x, y) \in C$, tem-se $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

Para definir as funções $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é necessário associar a cada número real t um ângulo e considerar o cosseno e o seno de tal ângulo. O número t será a medida do ângulo. Nas palavras de Lima temos que

A maneira natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E : \mathbb{R} \rightarrow C$, que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária obtido do seguinte modo:

$$E(0) = (1, 0)$$

Se $t \geq 0$, percorremos sobre a circunferência C , a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t , sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ pra $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.

Se $t \leq 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C , de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual). (LIMA, 2006, p.218)

Ainda, de acordo com Lima (2006), considere $A = (1, 0)$ e $O = (0, 0)$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, tomemos $B = E(t)$. Neste caso o ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ mede t radianos. A partir dessa definição, pode-se ter $B = E(t)$ com $t > 0$, ou seja, esta forma de medida é orientada, logo é permitido um ângulo ter valor negativo.

As funções $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denominadas de função cosseno e função seno respectivamente, são definidas colocando-se, para cada $t \in \mathbb{R} : E(t) = (\cos t, \sin t)$, ou seja, $x = \cos t$ e $y = \sin t$ são a abcissa e a ordenada, respectivamente, do ponto $E(t)$.

As funções trigonométricas que envolvem seno e cosseno são chamadas senoídes. Essas funções, por serem periódicas, são ideais para descrever fenômenos físicos periódicos. Um modo de associar as senoídes a um movimento periódico é imaginar um ponto percorrendo toda a circunferência trigonométrica. A projeção desse ponto no eixo dos senos ou no eixo dos cossenos descreve um movimento de equação do tipo $x = \sin \alpha$ e $x = \cos \alpha$, nessa ordem, além do mais, tal movimento é considerado periódico.

Portanto, pode-se associar a qualquer movimento periódico uma função senoidal do tipo

$$f(x) = a + b \sin(cx + d), \quad (7)$$

ou

$$f(x) = a + b \cos(cx + d), \quad (8)$$

de imagem dada por $[a-b, a+b]$ e de período $\frac{2\pi}{c}$, uma vez que, em geral, se opta por valores b e c positivos.

A título de ilustração, uma onda senoidal é exemplo de um movimento circular ao longo de um eixo, representando uma distância ou tempo. A Figura 4 reproduz um movimento circular ao longo de um eixo x , pode-se observar à esquerda a evolução do movimento circular a cada quadrante do plano e, à direita, a onda senoidal resultante desse movimento.

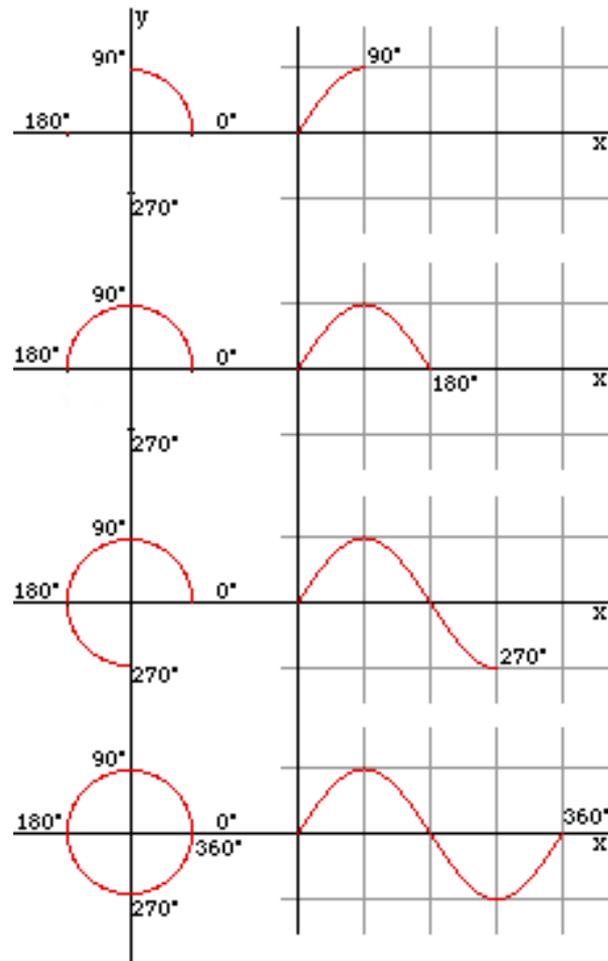
A relação desse movimento com um ponto de referência é chamada de fase, ou seja,

FASE é a característica de um ponto da onda em termo de sua altura relativamente à amplitude e à variação em relação à posição de equilíbrio. Dois pontos estão na mesma fase se eles se encontram na mesma altura e ascendente ou descendente relativamente à posição de equilíbrio. (ROSÁRIO, 2012).

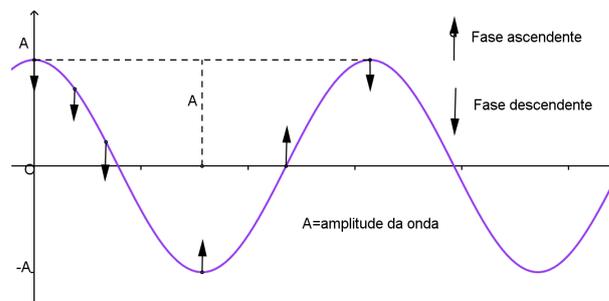
Na Figura 5 observa-se a amplitude A (\overline{OA}) e as fases ascendente e descendente indicadas pelas setas.

A amplitude desse movimento é a distância entre a posição de equilíbrio e a crista ou o ventre da senoide. A Unidade do Sistema Internacional de Unidades (SI) da amplitude é dada de acordo com a unidade da grandeza estudada.

Segundo Rosário (2012) a frequência de uma onda é o número de oscilações completas ou ciclos em cada unidade de tempo. Em homenagem ao físico alemão Heinrich Rudolf Hertz, a unidade de frequência, no SI, é hertz (Hz). A frequência é determinada pela fonte emissora e não se modifica durante a sua propagação. A representação gráfica das ondas permite determinar as respectivas frequências, como se pode observar na Figura 6, exemplos de frequência de 2 Hz e de 6 Hz. Um hertz corresponde à frequência de uma oscilação completa em cada segundo.

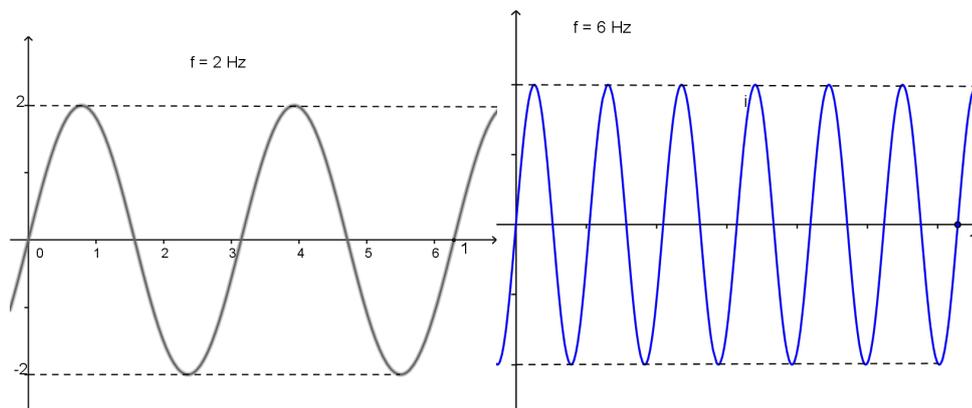
Figura 4 – Representação de um movimento circular ao longo de um eixo

Fonte: <http://www2.eca.usp.br/prof/iazzetta/tutor/acustica/fase/fase.html>

Figura 5 – Amplitude (A) e Fases Ascendente e Descendente de um ponto de uma Onda

Fonte: Acervo próprio

Além das funções seno, cosseno e tangente, há outras três funções trigonométricas: secante, cossecante e cotangente, sobre as quais não discorreremos nesse estudo.

Figura 6 – Gráficos de ondas com diferentes frequências

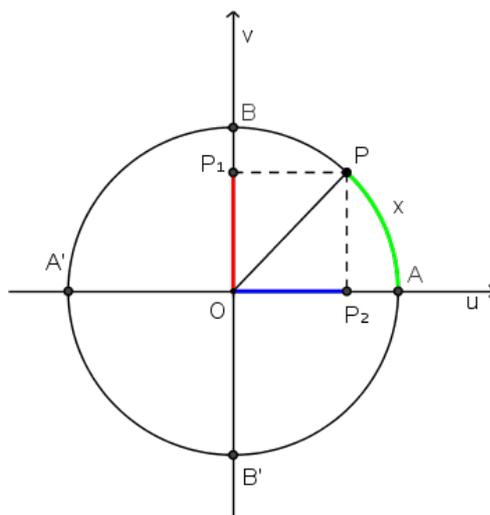
Fonte: Acervo próprio

2.3.1 Função Seno

Os conceitos que desenvolve-se nessa seção, estão embasados na obra de Iezzi (2004).

A Figura 7 mostra os pontos P , P_1 , O citados na Definição 3.

Definição 3. Dado um número real x , seja P sua imagem no ciclo. Denomina-se seno de x a ordenada OP_1 do ponto P em relação ao sistema uOv . Denomina-se função seno a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $OP_1 = \text{sen } x$, isto é $f(x) = \text{sen } x$.

Figura 7 – Representação da função seno no 1º quadrante do ciclo trigonométrico

Fonte: Acervo próprio.

- Propriedades da função seno

1ª. A imagem da função seno é $[-1,1]$.

De fato, se P está no ciclo, sua ordenada pode variar apenas de -1 a 1.

2ª. Se P pertence ao primeiro ou segundo quadrante, então $\text{sen } x$ é positivo.

De fato, o ponto P estará acima do eixo u e sua ordenada é positiva.

3ª. Se P pertence ao terceiro ou quarto quadrante, então $\text{sen } x$ é negativo.

O ponto P estará abaixo do eixo u e sua ordenada é negativa.

4ª. Se P percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então $\text{sen } x$ é crescente.

5ª. Se P percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então $\text{sen } x$ é decrescente.

6ª. A função seno é periódica e seu período é 2π .

De fato, se $\text{sen } x = OP_1$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $\text{sen}(x + 2k\pi) = OP_1$, pois x e $x + 2k\pi$ têm a mesma imagem P no ciclo. Temos, então, para todo x real:

$$\text{sen } x = \text{sen}(x + 2k\pi), \quad (9)$$

e portanto, a função é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k2\pi$, isto é, 2π .

- Gráfico da função seno: Se a imagem de x (ponto P) percorre o ciclo completo, no sentido anti-horário, a ordenada de P varia conforme mostra a tabela:

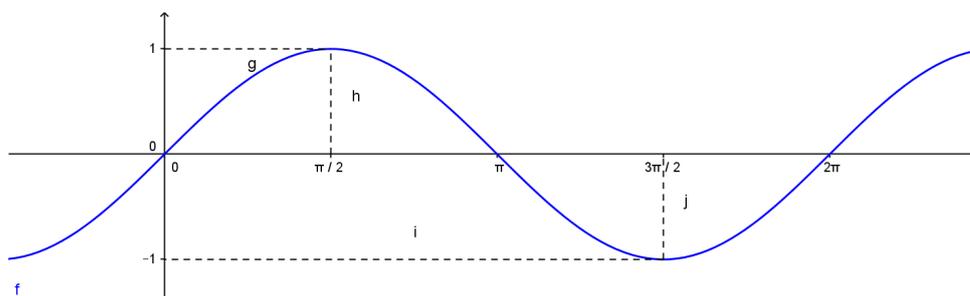
Tabela 1 – Valores de $f(x) = \text{sen } x$

x	0	$\pi/2$	π	2π
$\text{sen } x$	0	1	0	0
		crece	decresce	decresce
			-1	crece

Fonte: Acervo próprio.

A Figura 8 mostra o comportamento do gráfico da função seno.

Figura 8 – Representação gráfica de $f(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$



Fonte: Acervo próprio

2.3.2 Função Cosseno

Os conceitos que desenvolve-se nessa seção, estão embasados na obra de Iezzi (2004).

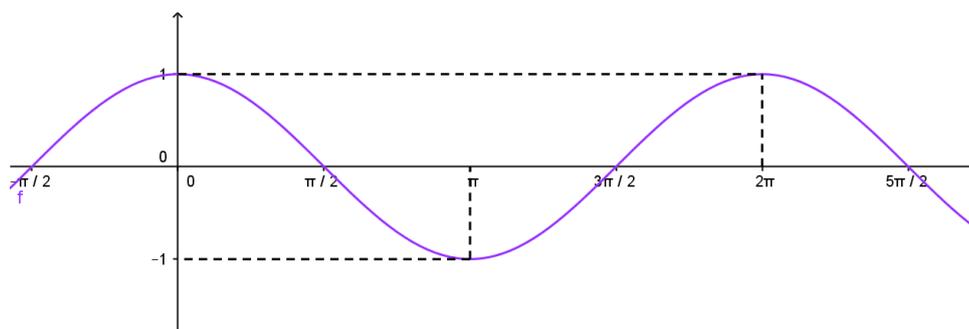
A Figura 7 mostra os pontos O , P e P_2 citados na Definição 4.

Definição 4. Dado um número real x , seja P sua imagem no ciclo. Denomina-se cosseno de x a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema uOv . Denomina-se função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada x o número real $OP_2 \cos x$, isto é, $f(x) = \cos x$.

- Propriedades:

- 1ª. A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$.
 - 2ª. Se P pertence ao primeiro ou quarto quadrante, então $\cos x$ é positivo.
 - 3ª. Se P pertence ao segundo ou terceiro quadrante, então $\cos x$ é negativo.
 - 4ª. Se P percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $\cos x$ é crescente.
 - 5ª. Se P percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $\cos x$ é decrescente.
 - 6ª. A função cosseno é periódica e seu período é 2π .
- Gráfico da função cosseno: O gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos x$ é a seguinte curva mostrada na Figura 9.

Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = \cos(x)$



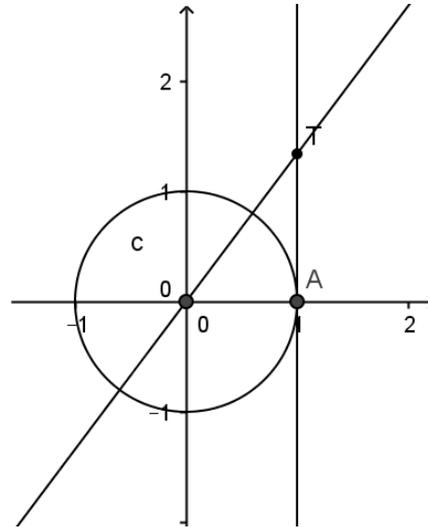
Fonte: Acervo próprio

2.3.3 Função Tangente

Os conceitos que desenvolve-se nessa seção, estão embasados na obra de Iezzi (2004).

A Figura 10 mostra o ciclo trigonométrico e os pontos P , O , A e T citados na Definição 5.

Definição 5. Dado um número real x , com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, seja P sua imagem no ciclo. Considere a reta OP e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denomina-se tangente de x a medida algébrica do segmento AT .

Figura 10 – Representação da função tangente no I e III quadrante do ciclo trigonométrico

Fonte: Acervo próprio

Tabela 2 – Comportamento da função tangente conforme varia o ângulo α

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\tan x$	0	cresce	\nexists	cresce	0
		\nexists	0	cresce	\nexists
					0

Fonte: Acervo próprio.

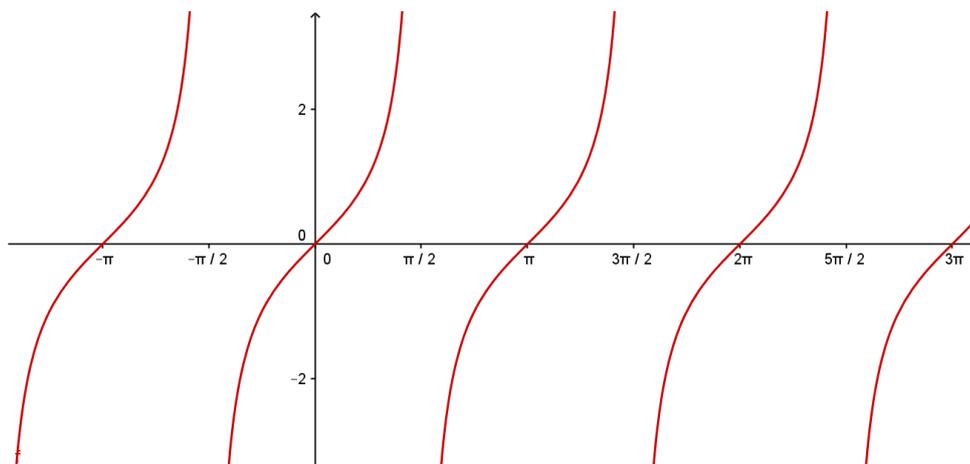
- Gráfico da função tangente: Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo no sentido anti-horário, a medida algébrica AT varia segundo os valores apresentados na Tabela 2.

A Figura 11 apresenta o gráfico da função $f(x) = \tan x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

A função tangente não está definida para todo número x real, entretanto, pode ser considerada uma função periódica cujo período π é o menor número x real positivo que satisfaz $\tan(x + \pi) = \tan x$ para todo x no domínio da função.

2.3.4 Relações Fundamentais

As relações trigonométricas são as relações entre os valores das funções trigonométricas de um mesmo arco. Cinco delas são chamadas fundamentais por serem distintas e independentes umas das outras, além disso, permitem que, dado o valor de uma das funções circulares de um arco qualquer, encontre os valores das demais funções circulares do mesmo arco, caso existam. Entretanto, neste trabalho, desenvolve-se somente duas, que serão utilizadas em capítulo futuro.

Figura 11 – Representação gráfica da função tangente

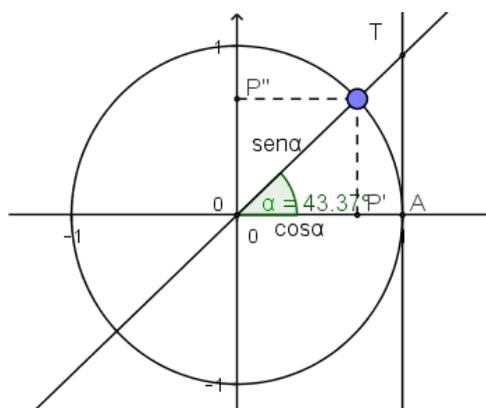
Fonte: Acervo próprio

2.3.4.1 Relações entre seno e cosseno

As razões trigonométricas seno e cosseno relacionam-se de várias formas e dentre elas, destacam-se:

- Relação Fundamental I: Seja α um arco do ciclo trigonométrico (sem perda de generalidade, considere-se o 1º quadrante), conforme mostra a Figura 12. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OPP' obtêm-se

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\operatorname{cos} \alpha)^2 = (OP)^2, \text{ ou seja, } \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Figura 12 – Ciclo trigonométrico a partir do qual desenvolve-se a demonstração das relações fundamentais I e II

Fonte: Acervo próprio

- Relação Fundamental II: Seja um arco α com extremidade P . Observa-se pela Figura 12 que:

$$OP' = \operatorname{cos} \alpha$$

$$P'P = \operatorname{sen} \alpha$$

$$AT = \tan \alpha$$

$$OP = 1.$$

Os triângulos retângulos $OP'P$ e OAT são semelhantes, logo:

$$\frac{OP'}{OA} = \frac{PP'}{AT} \rightarrow \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\tan \alpha},$$

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad (10)$$

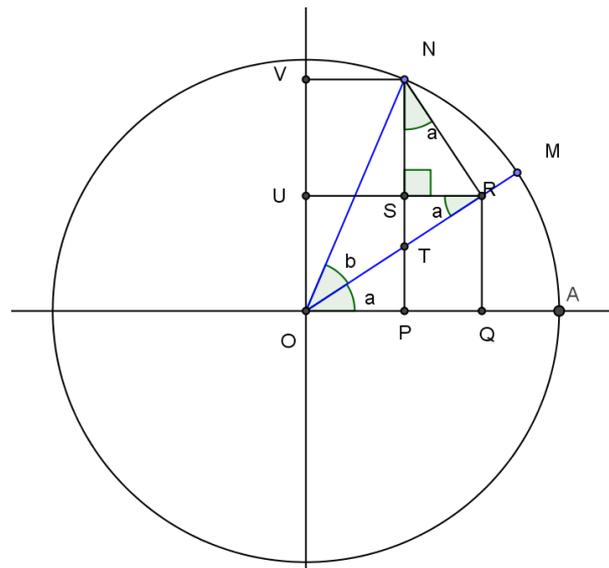
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2.4 TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Apresenta-se as transformações trigonométricas seno da soma e diferença de dois arcos, cosseno da soma e diferença de dois arcos e arco metade.

- Seno da soma de dois arcos: dados os arcos AM e AN cujas medidas são a e $a + b$, respectivamente, traçando-se as perpendiculares ao eixo dos cossenos por P e Q e as perpendiculares ao eixo dos senos por U e V , e o segmento \overline{NR} , perpendicular a \overline{OM} como mostra a Figura 13, obtém-se:

Figura 13 – Representação gráfica de dois arcos, a partir da qual desenvolve-se a demonstração da soma de dois arcos.



Fonte: Acervo próprio

- $\widehat{POT} \equiv \widehat{SRT}$, pois $\overline{SR} \parallel \overline{OP}$

- $T\hat{N}R \equiv T\hat{O}P$, pois os triângulos TNR e TOP são semelhantes pelo caso de semelhança AA (ângulo, ângulo).

$$\Delta_{ONR} \rightarrow \begin{cases} \text{sen } b = \frac{RN}{ON} = \frac{RN}{1} \rightarrow RN = \text{sen } b \\ \text{cos } b = \frac{OR}{ON} = \frac{OR}{1} \rightarrow OR = \text{cos } b \end{cases}, \quad (11)$$

$$\Delta_{RUO} \rightarrow \text{sen } a = \frac{OU}{OR} = \frac{OU}{\text{cos } b} \rightarrow OU = \text{sen } a \text{ cos } b, \quad (12)$$

$$\Delta_{RSN} \rightarrow \text{cos } a = \frac{SN}{RN} = \frac{SN}{\text{sen } b} \rightarrow SN = \text{sen } b \text{ cos } a, \quad (13)$$

Mas $\text{sen}(a+b) = OV = OU + UV$ e $UV = SN$, conclui-se que:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \text{ cos } b + \text{sen } b \text{ cos } a. \quad (14)$$

- Seno da diferença de dois arcos: basta tomar $\text{sen}(a-b) = \text{sen}(a+(-b))$ e aplicar na equação 14

$$\begin{aligned} \text{sen}(a-b) &= \text{sen}(a+(-b)) \\ \text{sen}(a-b) &= \text{sen } a \text{ cos }(-b) + \text{sen}(-b) \text{ cos } a \end{aligned}$$

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen } a \text{ cos } b - \text{sen } b \text{ cos } a. \quad (15)$$

- Cosseno da soma de dois arcos: lembrando que

$$\text{cos}(a+b) = \text{sen} \left[\frac{\pi}{2} - (a+b) \right] = \text{sen} \left[\left(\frac{\pi}{2} - a \right) - b \right]$$

aplica-se em $\text{sen}(a-b) = \text{sen } a \text{ cos } b + \text{sen } b \text{ cos } a$:

$$\text{cos}(a+b) = \text{sen} \left[\left(\frac{\pi}{2} - a \right) - b \right] = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \text{cos}(-b) + \text{sen}(-b) \text{cos} \left(\frac{\pi}{2} - a \right)$$

$$\text{cos}(a+b) = \text{cos } a \text{ cos } b - \text{sen } a \text{ sen } b. \quad (16)$$

- Cosseno da diferença de dois arcos: como $\text{cos}(a-b) = \text{cos}(a+(-b))$ basta substituir na identidade anterior:

$$\text{cos}(a-b) = \text{cos}[a+(-b)] = \text{cos } a \text{ cos}(-b) - \text{sen } a \text{ sen}(-b)$$

$$\text{cos}(a-b) = \text{cos } a \text{ cos } b + \text{sen } a \text{ sen } b. \quad (17)$$

- Arco metade: Tem-se que $\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$. Aplicando $\operatorname{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$ obtém-se que:

$$\cos 2a = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a = 2 \cos^2 a - 1. \quad (18)$$

Agora, substituindo a por $\frac{a}{2}$

$$\cos a = 2 \cos^2 \left(\frac{a}{2} \right) - 1 \rightarrow \cos^2 \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{\cos a + 1}{2} \quad (19)$$

$$\cos \left(\frac{a}{2} \right) = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}}. \quad (20)$$

De modo análogo, aplicando $\cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a$, obtém-se o arco metade de seno:

$$\operatorname{sen}^2 \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{1 - \cos a}{2}, \quad (21)$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{a}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}. \quad (22)$$

As relações (14), (15), (16), (17), (20) e (22) serão empregadas no estudo da parametrização das cônicas: reta, parábola, circunferência e elipse, a ser desenvolvido no Capítulo 4.

2.5 CONSIDERAÇÕES

Neste Capítulo, fez-se um breve relato histórico acerca da trigonometria. Definiu-se as razões trigonométricas no triângulo retângulo e a circunferência trigonométrica. Tratou-se sobre o movimento periódico, as funções circulares e funções periódicas. A relação entre funções trigonométricas e funções periódicas realizou-se de forma a definir as funções trigonométricas relacionando cada número real uma medida x de arco. Na sequência desenvolveu-se revisão das relações fundamentais da trigonometria e as transformações trigonométricas. Faz-se importantes as revisões ora realizadas uma vez que serão necessárias nas parametrizações das cônicas, tema abordado no próximo capítulo.

3 CURVAS CÔNICAS

O estudo das seções cônicas remonta, segundo os historiadores, aos anos 300 a.C. com o matemático Menaecmus (380-320 a.C. aproximadamente) que ao trabalhar na resolução do problema da duplicação do cubo, descobriu as curvas cônicas. De acordo com Delgado, Frensel e Crissaff (2013), o geômetra grego Aristeu (370-300 a.C.) publicou o primeiro tratado referente às seções cônicas. Nesse período, as cônicas eram obtidas seccionando um cone circular reto de uma folha com um plano perpendicular a uma geratriz do cone, assim eram conseguidas três tipos diferentes de curvas, que dependiam se a seção meridiana do cone fosse um ângulo agudo, um ângulo reto ou um ângulo obtuso. Entretanto, foi Apolônio de Perga (262-190 a.C.) o responsável pelo aprimoramento dos resultados conhecidos na época. Assim como “Os Elementos” de Euclides, substituíram textos anteriores, em um nível mais avançado; a obra de Apolônio superou as demais em relação às seções cônicas. A maior parte das obras de Apolônio desapareceu, o que se sabe dessas obras perdidas deve-se a Pappus de Alexandria (séc. IV a. C.). Entre as contribuições de Apolônio para o desenvolvimento dos estudos das seções cônicas, destaca-se: ter conseguido gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas apenas variando a inclinação do plano de intersecção com o cone; introduzir os nomes elipse e hipérbole e ter estudado as retas tangentes e normais a uma cônica.

Segundo Sato (2005), Kepler teve interesse pelas Cônicas de Apolônio devido às suas aplicações à óptica e à construção de espelhos parabólicos. Kepler escreveu, em 1609, a *Astronomia Nova*, na qual apresenta a principal lei da astronomia: “os planetas descrevem órbitas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos”.

Com Galileu (1632) surge outra aplicação para as cônicas: “desprezando a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma parábola”. A matemática de Apolônio

Permitiu, cerca de 1800 anos mais tarde, os “Principia” de Sir Isaac Newton. A lei da gravitação de Newton matematizou as descobertas empíricas de Kepler e, a partir do século dezessete, possibilitou o estudo analítico das cônicas e das suas aplicações aos movimentos no espaço, este, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à Lua fosse possível. (SATO, 2005)

Pierre de Fermat, de acordo com Delgado, Frensel e Crissaff (2013), ao restaurar a obra *Plane Loci* de Apolônio, elaborou sua obra *Ad locos planos et solidos isagoge* (1636) na qual estabelece um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana (equivalente ao de Descartes). Da teoria de equações de François Viète, Fermat usou a linguagem algébrica para obter as demonstrações dos teoremas enunciados na descrição da obra de Apolônio.

A álgebra combinada com a natureza dos lugares geométricos estudados em *Plane Loci* e as técnicas usadas nas demonstrações dos resultados revelaram a Fermat que todos os lugares geométricos discutidos por Apolônio poderiam se exprimir na forma de equações algébricas com duas variáveis, cuja análise, usando a teoria de Viète, produziria as propriedades fundamentais do lugar geométrico assim como a natureza da sua construção. (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013, p.98)

Com tais estudos, Fermat obteve as equações das Cônicas de Apolônio. A partir da equação geral do segundo grau com duas variáveis, podia gerar sete equações como formas irreduzíveis. Fermat classificou os lugares geométricos obtidos como: reta, hipérbole equilátera, par de retas concorrentes, parábola, círculo, elipse e hipérbole axial. Dessas, serão parte integrantes do presente estudo a reta, o círculo, a elipse e a parábola.

3.1 TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DE EIXOS DE REFERÊNCIA

Para dar uma abordagem geral das curvas, será apresentada a teoria referente à rotação e à translação de eixos coordenados no plano que permite evoluir as equações das cônicas centradas e rígidas a uma direção no plano para equações centradas em um ponto qualquer do plano e sob quaisquer ângulos (inclinação).

3.1.1 Translação dos Eixos Coordenados em \mathbb{R}^2

O desenvolvimento a seguir é baseado nos trabalhos de Delgado, Frensel e Crissaff (2013). Considera-se um sistema de eixos ortogonais OXY . Seja $\bar{O} = (x_0, y_0)$ um ponto do plano e $\bar{O} \bar{X} \bar{Y}$ o sistema com eixos \bar{OX} e \bar{OY} paralelos e com mesmo sentido aos eixos OX e OY respectivamente, conforme mostra a Figura 14. Designa-se por (\bar{x}, \bar{y}) as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\bar{O} \bar{X} \bar{Y}$ e por (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY .

Se $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$ são os vetores unitários na direção e sentido, respectivamente, dos eixos OX e OY , então

$$\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \quad (23)$$

com

$$\vec{OP} = \bar{x}\vec{e}_1 + \bar{y}\vec{e}_2, \quad (24)$$

e

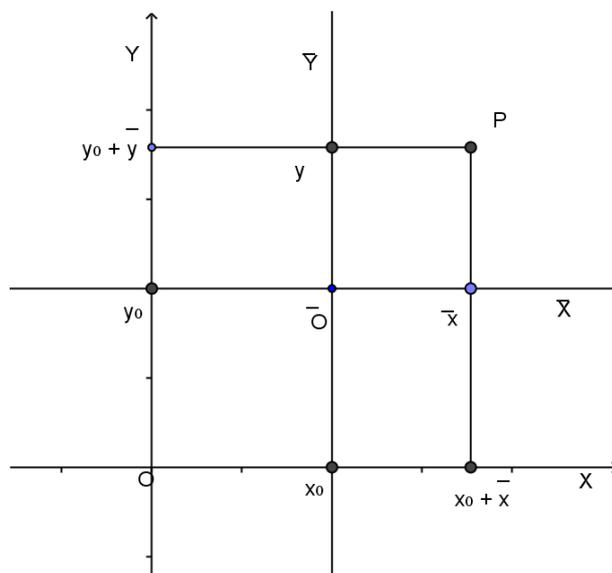
$$\vec{OO} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2. \quad (25)$$

Como $\vec{OP} = \vec{OO} + \vec{OP}$, obtemos

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2) + (\bar{x}\vec{e}_1 + \bar{y}\vec{e}_2) = (\bar{x} + x_0)\vec{e}_1 + (\bar{y} + y_0)\vec{e}_2. \quad (26)$$

Logo as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY e $\bar{O} \bar{X} \bar{Y}$ são relacionadas pelas fórmulas

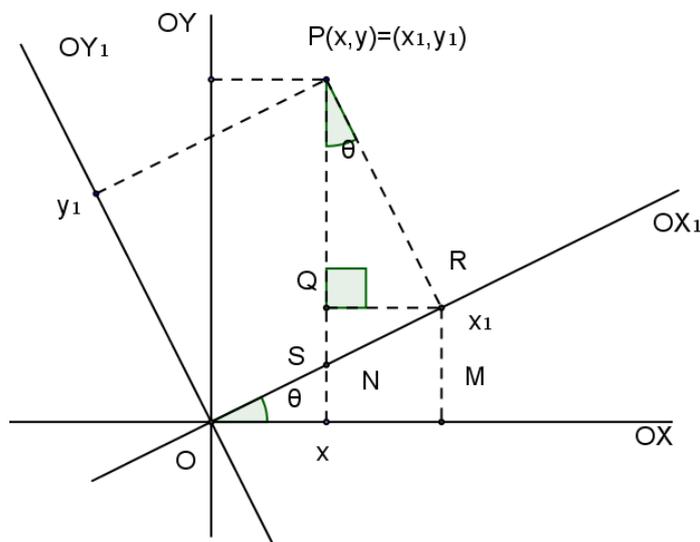
$$\begin{cases} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0 \end{cases}. \quad (27)$$

Figura 14 – Eixo \overline{OXY} transladado em relação ao eixo OXY .

Fonte: : Acervo próprio

3.1.2 Rotação dos Eixos Coordenados em \mathbb{R}^2

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais com origem $O(0,0)$. Após promover rotação de um ângulo θ em torno da origem $O(0,0)$, gera-se um novo sistema cujos eixos coordenados são OX_1 e OY_1 . O ângulo θ é formado pelos eixos OX e OX_1 sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer do sistema primitivo, o mesmo ponto P terá coordenadas $P(x_1, y_1)$, em relação ao novo sistema, como ilustra a Figura 15.

Figura 15 – Rotação de um ângulo θ dos eixos coordenados XOY em torno da origem

Fonte: Acervo próprio

A partir da Figura 15 tem-se:
$$\begin{cases} x = \overline{OM} - \overline{NM} \\ y = \overline{NQ} + \overline{QP} \end{cases}.$$

No triângulo OMR : $\cos \theta = \frac{\overline{OM}}{x_1}$ isto é,

$$\overline{OM} = x_1 \cos \theta \quad (28)$$

e $MR = NQ$ e $\sin \theta = \frac{\overline{NQ}}{x_1}$ ou seja,

$$\overline{NQ} = x_1 \sin \theta. \quad (29)$$

No triângulo PQR : $\overline{QR} = \overline{NM}$ e $\sin \theta = \frac{\overline{NM}}{y_1} \Rightarrow \overline{NM} = y_1 \sin \theta$ e

$$\cos \theta = \frac{\overline{QP}}{y_1} \Rightarrow \overline{QP} = y_1 \cos \theta. \quad (30)$$

Portanto,

$$\begin{cases} x = \overline{OM} - \overline{NM} \\ y = \overline{NQ} + \overline{QP} \end{cases}, \quad (31)$$

ou seja, a rotação de (x_1, y_1) para (x, y) é dada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\ y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \end{cases}. \quad (32)$$

3.2 REVISÃO TEÓRICA SOBRE AS CÔNICAS

A revisão teórica que ora segue será embasada no trabalho de Delgado, Frensel e Cris-saff (2013). Será feita uma revisão das equações da reta, da parábola, da circunferência e da elipse.

3.2.1 Reta

Definição 6. Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (a, b) \neq \vec{0}$. Então, $P = (x, y) \in \overrightarrow{AP} \perp \vec{u}$. Portanto $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$ e $(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0$

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) &= 0 \\ ax + by &= ax_0 + by_0 \\ ax + by &= c. \end{aligned}$$

Sendo $c = ax_0 + by_0$. Dessa forma a equação cartesiana da reta r é

$$r : ax + by = c. \quad (33)$$

3.2.2 Parábola

Definição 7. Sejam \mathcal{L} uma reta e \mathcal{F} um ponto do plano não pertencente a \mathcal{L} . A parábola \mathcal{P} de foco \mathcal{F} e diretriz \mathcal{L} é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano cuja distância a \mathcal{F} é igual à sua distância a \mathcal{L} :

$$\mathcal{P} = \{P \mid d(P, \mathcal{F}) = d(P, \mathcal{L})\}. \quad (34)$$

Terminologia:

Sendo:

- O ponto \mathcal{F} é o foco da parábola.
- A reta \mathcal{L} é a diretriz da parábola.
- A reta l que contém o foco e é perpendicular à diretriz \mathcal{L} é a reta focal.
- O vértice da parábola é o ponto \mathcal{V} da reta focal que equidista de \mathcal{F} e de \mathcal{L} .

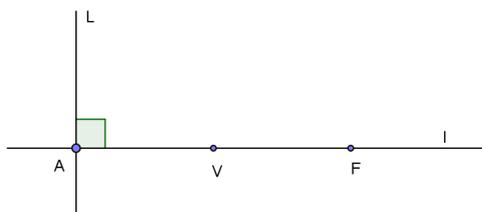
Os pontos e retas são mostrados nas Figuras 16 e 17.

Se A é o ponto onde \mathcal{L} intersecta l , então \mathcal{V} é o ponto médio do segmento $A\mathcal{F}$, ou seja,

$$\mathcal{V} = \frac{A + \mathcal{F}}{2}$$

O número $2p = d(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ é o parâmetro da parábola e conseqüentemente $d(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = d(\mathcal{V}, \mathcal{L}) = p$.

Figura 16 – Elementos da parábola: Foco, reta diretriz, reta que contém o foco, vértice



Fonte: Acervo próprio

3.2.2.1 Formas canônicas da parábola

3.2.2.1.1 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX.

Caso I – O foco \mathcal{F} está à direita da diretriz \mathcal{L} : Como o vértice \mathcal{V} da parábola \mathcal{P} é a origem $\mathcal{V} = (0, 0)$, tem-se que o foco é o ponto $\mathcal{F} = (p, 0)$ e a diretriz é a reta, $\mathcal{L} : x = -p$ onde

$2p = d(\mathcal{F}, \mathcal{L})$, como mostra a Figura 17. Logo

$$\mathcal{P} = (x, y) \in P \iff d(P, \mathcal{F}) = d(P, \mathcal{L}) \quad (35)$$

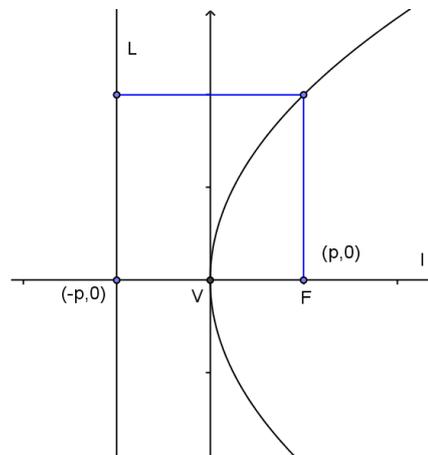
$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \iff x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \quad (36)$$

$-2px + y^2 = 2px$, ou seja, $y^2 = 4px$. Portanto

$$\mathcal{P} : y^2 = 4px. \quad (37)$$

Figura 17 – Parábola cujo Foco está à direita com reta focal coincidente com eixo das abscissas.



Fonte: Acervo próprio

Caso II – O foco \mathcal{F} está à esquerda da diretriz \mathcal{L} . Como mostra a Figura 18. Neste caso, $\mathcal{F} = (-p, 0)$ e $\mathcal{L} : x = p$. Pelo mesmo procedimento anterior, chega-se a

$$\mathcal{P} : y^2 = -4px. \quad (38)$$

3.2.2.1.2 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY .

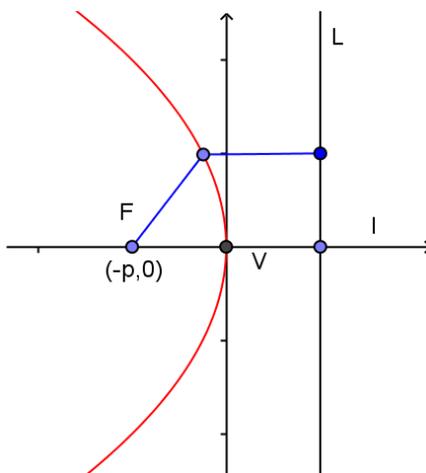
Caso I – O foco \mathcal{F} está acima da diretriz \mathcal{L} . Temos $\mathcal{F} = (0, p)$ e $\mathcal{L} : y = -p$ fazendo o mesmo desenvolvimento anterior obtém-se

$$P : x^2 = 4py. \quad (39)$$

Caso II – O foco \mathcal{F} está abaixo da diretriz \mathcal{L} : Se $\mathcal{F} = (0, -p)$ e $\mathcal{L} = y = p$ desenvolvendo, temos

$$\mathcal{P} : x^2 = -4py. \quad (40)$$

Pela translação dos eixos coordenados, pode-se obter as equações das parábolas de vértices $\mathcal{V} = (x_0, y_0)$.

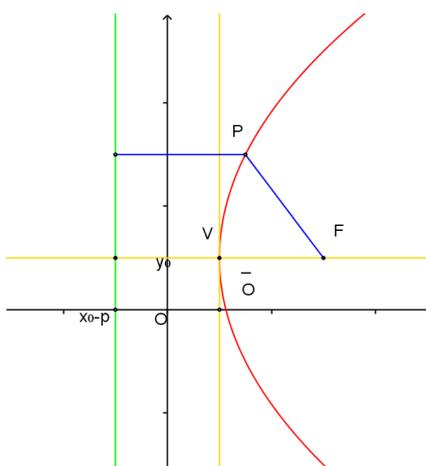
Figura 18 – Parábola cujo Foco está à esquerda e a reta focal coincidente com as abscissas

Fonte: Acervo próprio

3.2.2.1.3 Com reta focal paralela ao eixo OX

Caso I – O foco \mathcal{F} está à direita da diretriz \mathcal{L} : No sistema de coordenadas \overline{OXY} a equação da parábola é $\mathcal{P} : \bar{y} = 4p\bar{x}$ e como $x = \bar{x} + x_0$ e $y = \bar{y} + y_0$, a equação fica

$$\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0). \quad (41)$$

Figura 19 – Parábola com reta focal paralela a OX e Foco à direita

Fonte: Acervo próprio

Caso II – O foco \mathcal{F} está à esquerda da diretriz \mathcal{L} : Pelos mesmos motivos, agora temos

$$\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0). \quad (42)$$

Com reta focal paralela ao eixo OY .

De maneira análoga, obtemos as equações do caso I – Foco \mathcal{F} acima da diretriz \mathcal{L}

$$\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) \quad (43)$$

Do caso II – Foco \mathcal{F} abaixo da diretriz \mathcal{L}

$$\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0). \quad (44)$$

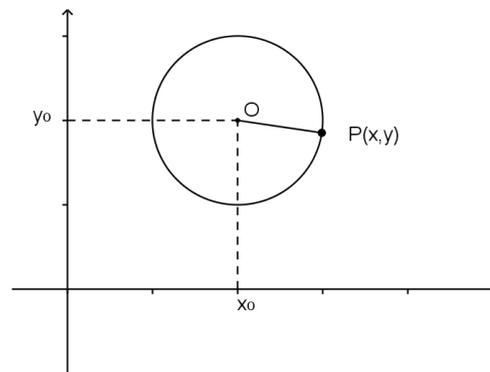
3.2.3 Circunferência

Definição 8. Uma circunferência C com centro $O(x_0, y_0)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano equidistantes de O .

Da definição acima tem-se

$$d(P, O) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \Leftrightarrow d(P, O)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2. \quad (45)$$

Figura 20 – Circunferência de centro $O(x_0, y_0)$ e raio r



Fonte: Acervo próprio

Mas $d(P, O)$ é o raio da circunferência, daí, obtém-se a equação reduzida da circunferência

$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (46)$$

3.2.4 Elipse

Definição 9. Uma elipse \mathcal{E} de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias de P a F_1 e a F_2 é igual a uma constante $2a \geq 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c \leq a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$, $\mathcal{E} = \{P | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$.

- Forma Canônica da elipse com centro no ponto $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX .
- Como $\bar{O} = (x_0, y_0)$ é o centro, $l : y = y_0$ é a reta focal, então $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ são os focos da elipse, pois $d(F_1, \bar{O}) = d(F_2, \bar{O}) = c$. Um ponto $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertence à elipse se e somente se

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a, \quad (47)$$

ou seja,

$$d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) + d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) = 2a$$

$$d((\bar{x}, \bar{y}), (-c, 0)) + d((\bar{x}, \bar{y}), (c, 0)) = 2a$$

tal que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

assim tem-se a equação

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (48)$$

sendo $b^2 = a^2 - c^2$.

Procedendo da mesma maneira, verifica-se que a forma canônica da equação da elipse \mathcal{E} com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OY é

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \quad (49)$$

com $b^2 = a^2 - c^2$.

3.3 CONSIDERAÇÕES

Neste capítulo fez-se necessária essa revisão teórica, pois a partir das equações revistas anteriormente, desenvolver-se-á suas parametrizações embasadas nas equações harmônicas que descrevem as Curvas de Lissajous, as quais serão tratadas no Capítulo 4.

4 PARAMETRIZAÇÃO

Apresenta-se neste Capítulo as parametrizações das cônicas: reta, parábola, circunferência e elipse, a partir das equações harmônicas que modelam as curvas de Lissajous.

4.1 CURVAS PARAMETRIZADAS

Considere o movimento de uma partícula que descreve uma trajetória, é possível representar essa trajetória por uma curva no plano ou no espaço. Considera-se suas coordenadas em função do tempo t , isto é, $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$. Do mesmo modo, dada uma curva, pode-se “imaginá-la como uma trajetória e escrever as coordenadas de seus pontos em função de um parâmetro t . Tais funções, juntamente com seus domínios comuns, são denominadas equações paramétricas da curva”.(NASCIMENTO, 2004)

Definir um parâmetro, segundo Nascimento (2004) equivale a determinar as coordenadas de um ponto qualquer em função de apenas uma variável, isto é, parametrizar é o processo para obter um conjunto de pontos com variáveis cartesianas sem estabelecer uma relação obrigatória entre as mesmas, através de uma variável a parte, o parâmetro, que define os valores das coordenadas, mas que não é usada diretamente no gráfico.

Frensel e Delgado (2008) apresenta a seguinte definição:

“Seja C uma curva plana. Dizemos que uma aplicação $\gamma : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, é uma parametrização de C se a sua imagem $\gamma(D)$ coincide com C , ou seja, $C = \gamma(D) = \{(x(t), y(t)), t \in D\}$, onde D é um subconjunto de \mathbb{R} (geralmente um intervalo ou a união de uma quantidade finita de intervalos). A imagem $\gamma(D)$ contida em \mathbb{R}^2 é também chamada traço de γ ”.(FRENSEL; DELGADO, 2008)

4.2 CURVAS DE LISSAJOUS

O principal objetivo do matemático francês Jules Antoine Lissajous foi visualizar ondas sonoras. Começou suas pesquisas com diapasões colocados perpendicularmente, em contato com a água. Em seguida desenvolveu trabalhos com feixes de luz e espelhos juntos ao diapasão. Criou um visualizador de imagens em 3 dimensões chamado Bioscópio. Posteriormente, seus trabalhos foram estudados por vários matemáticos e em sua homenagem, são chamados de curvas (ou Figuras) de Lissajous.

Equações parametrizadas permitem o controle das variáveis padronizadas. Na curva de Lissajous tomam-se dois, eixos X e Y . A frequência está ligada ao tempo e a quantidade de ondas realizadas. Como a função senoidal trigonométrica representa graficamente o Movimento Harmônico Simples, elas são usadas na parametrização das equações das curvas de Lissajous uma vez que nessas se desenvolvem basicamente ângulos e razões entre ângulos.

Na matemática a Curva de Lissajous é o gráfico resultante de um sistema de equações parametrizadas, a saber

$$\begin{cases} x = x_0 \operatorname{sen}(\omega_x t), \text{ com frequência angular } \omega = \frac{2\pi}{T_x} = 2\pi f_x \\ y = y_0 \operatorname{sen}(\omega_y t), \text{ com frequência angular } \omega_y = \frac{2\pi}{T_y} = 2\pi f_y \end{cases} \quad (50)$$

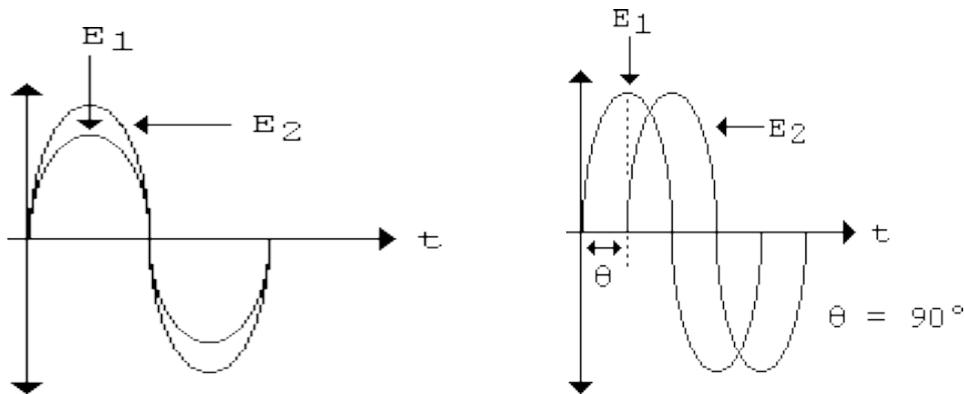
As curvas de Lissajous são um dos recursos mais importantes na manutenção, reparação e ajuste de equipamentos eletrônicos, sendo utilizadas também na geração de efeitos em editores de imagens para a internet e recursos multimídia.

Nessa direção de utilização, Barreta (2017) nos instrui que em circuitos, nos quais são utilizados indutores e capacitores, aparecem tensões senoidais de mesma frequência, mas defasadas entre si.

Defasagem é o deslocamento de um sinal em relação a outro sinal tomado como referência, pode ser positiva (sinal adiantado) ou negativa (sinal atrasado).

Na Figura 21, à esquerda, temos dois sinais de diferentes amplitudes e com a mesma fase e, à direita, temos a representação de dois sinais de mesma amplitude mas com fases diferentes (defasados).

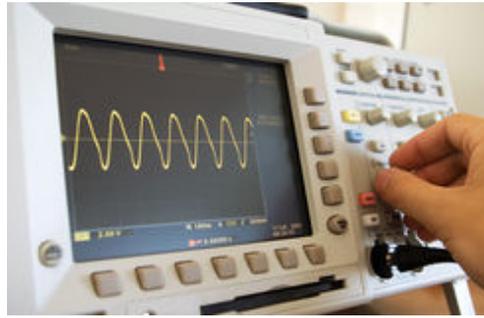
Figura 21 – Comparando Amplitudes e Fases de dois sinais diferentes



Fonte: <http://www.ezuim.com/pdf/Lissajous.pdf>

Muitos sons naturais e muitos outros artificiais, assim como várias imagens são produzidos pela superposição de sinais periódicos. De acordo com Dias (2017), a composição gráfica de dois movimentos ondulatórios, um na horizontal e outro na vertical, resulta na chamada Figura de Lissajous.

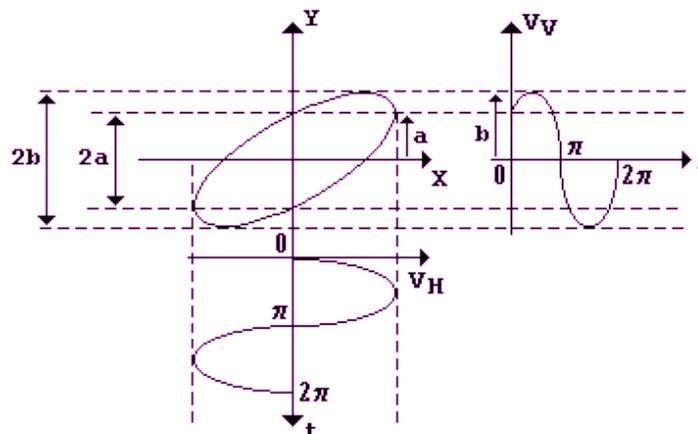
O osciloscópio é um instrumento utilizado na eletrônica como recurso importantíssimo na manutenção de equipamentos. Ele permite a visualização das grandezas que variam com o tempo em seus circuitos. Com o osciloscópio é possível verificar a medida de frequências, amplitudes e fases por meio das Figuras de Lissajous. Para isso, basta compor perpendicularmente os dois sinais, introduzindo o sinal de referência na entrada vertical e o outro na entrada horizontal do osciloscópio.

Figura 22 – Osciloscópio

Fonte: <<https://pt.dreamstime.com/imagens-de-stock-royalty-free-osciloscpio-image15130029>>

Se os dois sinais tiverem a mesma frequência, a Figura resultante na tela do osciloscópio será uma elipse com formato e inclinação dependentes do ângulo de defasagem entre os sinais.

Este caso está ilustrado na Figura 23.

Figura 23 – Representação gráfica da composição por superposição de sinais senoidais

Fonte: Extraído de <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAABTq0AL/Figuras-lissajous>>

A elipse é resultante da combinação dos sinais inseridos na entrada vertical (V_v) e na entrada horizontal (V_h). O sinal V_v obedece a função

$$V_v(t) = V_{max} \text{sen}(\omega t + \theta), \quad (51)$$

sendo $V_{max} = b$ e $V_v(0) = a$, logo $a = b \text{sen} \theta$ e, portanto, $\text{sen} \theta = \frac{a}{b}$ e

$$\theta = \text{arcsen} \frac{a}{b}. \quad (52)$$

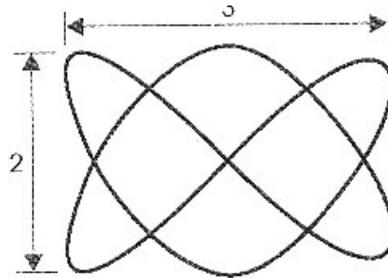
Podendo ser utilizado também os valores $2a$ e $2b$ para facilitar os cálculos, ficando então

$$\theta = \text{arcsen} \frac{2a}{2b}. \quad (53)$$

Então é necessário obter os valores de a que é a distância entre o centro da elipse e o ponto onde esta corta o eixo y e de b que é a distância entre o centro da elipse e o ponto máximo da Figura formada.

Para medir a frequência de um sinal por meio das curvas de Lissajous é necessário aplicar o sinal desconhecido numa das entradas (vertical, por exemplo) do osciloscópio e na outra entrada (horizontal), ligar um gerador de sinais senoidais ajustando-o até obter uma Figura estável que possibilite contar os máximos formados na horizontal e vertical, como exemplificado na Figura 24.

Figura 24 – Curva com 3 máximos horizontais e 2 verticais



Fonte: <<http://www.newtoncbraga.com.br/index.php/instrumentacao/108-artigos-diversos/689-Figuras-de-lissajous>>

Nesse exemplo, a relação de frequência dos sinais aplicados é de 3 para 2, então a frequência do sinal desconhecido será $2/3$ da frequência do sinal de varredura (aplicado na entrada horizontal).

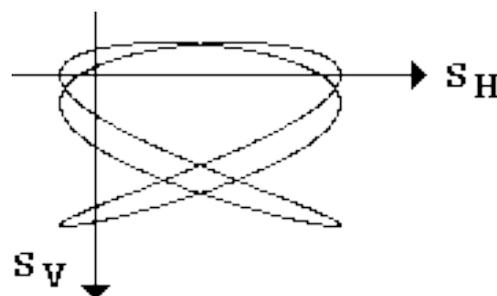
De modo geral, traça-se uma tangente horizontal (T_h) e uma tangente vertical (T_v) e obtemos a relação das frequências por:

$$\frac{F_v}{F_h} = \frac{nT_h}{nT_v} F_n = \frac{F_v nT_v}{nT_h}, \quad (54)$$

sendo: F_v = frequência vertical, F_h = frequência horizontal, nT_h = número de tangências horizontal e nT_v = número de tangências verticais.

Pode-se também utilizar o método das secantes, cujo procedimento é idêntico ao método das tangências, devendo atentar apenas para que a secante não intercepte pontos das curvas de Lissajous nos quais sobrepõem duas linhas. A Figura 25 exemplifica esse procedimento:

Figura 25 – Método das secantes para determinar a relação entre frequências.



Fonte: <http://www.ezuim.com/pdf/Lissajous.pdf>

S_v = número interseções da secante vertical com a curva

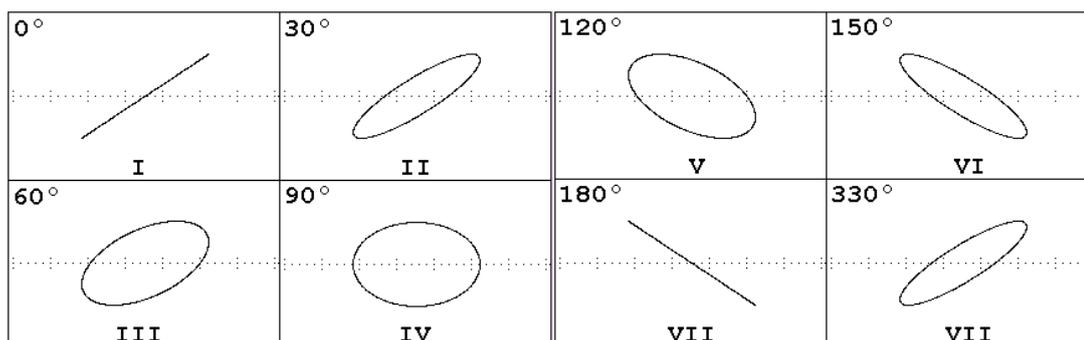
S_h = número de interseções da secante horizontal com a curva

Como há seis pontos de intersecção na vertical e quatro na horizontal, então

$$F_h = \frac{F_v 6}{4}. \quad (55)$$

Em decorrência das defasagens entre dois sinais quaisquer, de mesma frequência, obtêm-se curvas em formatos de elipses, como ilustrado na Figura 26:

Figura 26 – Curvas de Lissajous, formação de elipses de acordo com a defasagem dos sinais.



Fonte: <<http://www.newtoncbraga.com.br/index.php/instrumentacao/108-artigos-diversos/689-Figuras-de-lissajous>>

Observa-se que as curvas se repetem, porém, com inclinação invertida, conforme os ângulos sejam maiores que 90° e estejam no 2° ou 3° quadrante.

Pela superposição de diferentes frequências das senoides e o valor de mudanças de fase, obtêm-se variadas curvas de Lissajous, como mostra a Figura 27.

4.3 PARAMETRIZAÇÕES DAS CÔNICAS

Aqui, considera-se a parametrização das curvas cônicas vistas anteriormente. A parametrização levará em conta a forma geral que um ponto P , pertencente à cônica, descreve um movimento periódico.

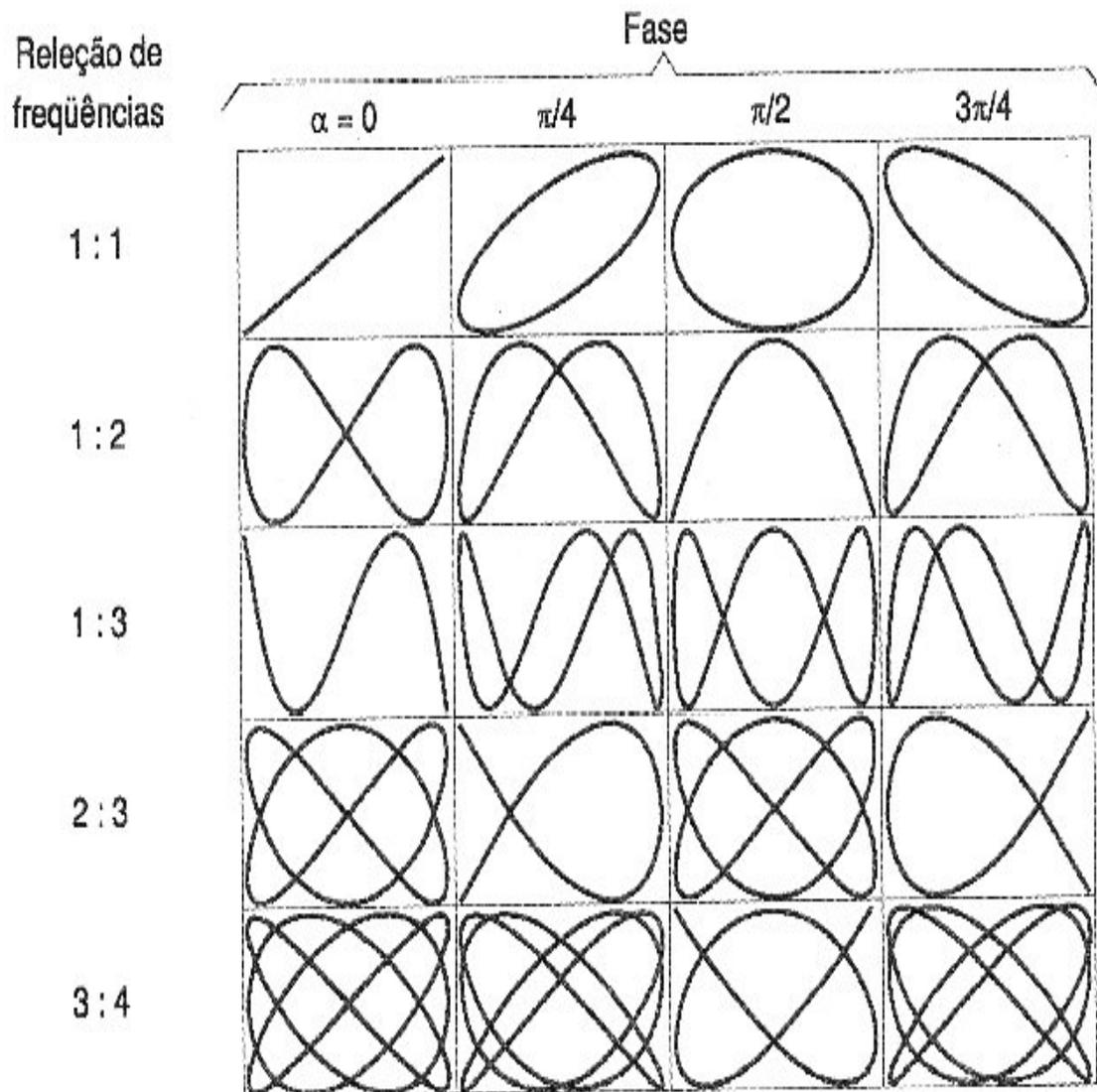
Considerando que o ponto da curva C é descrito pelo ponto P parametrizado pelo parâmetro λ , tal que $P(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda))$ e que as funções $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$ são funções harmônicas, então

$$P: \begin{cases} x(\lambda) = A_x \text{sen}(\omega_x \lambda + \varphi_x) \\ y(\lambda) = A_y \text{sen}(\omega_y \lambda + \varphi_y) \end{cases}, \quad (56)$$

em que $0 \leq \lambda \leq T$ de forma que a curva C é completa em um período T igual a $\frac{2\pi}{\omega_x}$ para a componente x e em $\frac{2\pi}{\omega_y}$ para a componente y .

As grandezas A_x e A_y são as amplitudes de oscilação nas componentes x e y . As frequências angulares são dadas respectivamente por ω_x e ω_y e as fases iniciais são φ_x e φ_y .

Figura 27 – Curvas de Lissajous formadas a partir da variação de frequências e fases.



Fonte: <<http://www.newtoncbraga.com.br/index.php/instrumentacao/108-artigos-diversos/689-Figuras-de-lissajous>>

Esta forma de parametrização é adequada quando se deseja movimentos periódicos na curva C , de modo que se possa obter cada uma das cônicas e desenhá-las por meio do parâmetro λ , que é limitado.

4.3.1 Parametrização da reta

Serão apresentadas as parametrizações de uma reta com coeficiente angular $\tan \alpha$ e uma com rotação de reta horizontal de forma que as duas geram funções parametrizadas equivalentes, contudo com detalhes que serão apresentados ao final da seção.

4.3.1.1 Reta com inclinação α

A equação da reta que passa pela origem e tem inclinação α é dada por

$$r : y = \tan \alpha x, \quad (57)$$

em que α é a inclinação da reta. Portanto, da parametrização geral tem-se

$$A_y \operatorname{sen}(\omega_y \lambda + \varphi_y) = \tan \alpha A_x \operatorname{sen}(\omega_x \lambda + \varphi_x) \quad (58)$$

$$\frac{A_y}{\tan \alpha A_x} = \frac{\operatorname{sen}(\omega_x \lambda + \varphi_x)}{\operatorname{sen}(\omega_y \lambda + \varphi_y)}. \quad (59)$$

Se $\omega_x = \omega_y = \omega$ e $\varphi_x = \varphi_y = 0$ obtém-se

$$\frac{A_y}{\tan \alpha A_x} = 1 \rightarrow A_y = \tan \alpha A_x, \quad (60)$$

portanto:

$$r : \begin{cases} x(\lambda) = A_x \operatorname{sen}(\omega \lambda) \\ y(\lambda) = \tan \alpha A_x \operatorname{sen}(\omega \lambda) \end{cases} \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi/\omega, \quad (61)$$

é uma parametrização da equação da reta com a qual se obtém um segmento limitado por A_x , e inclinação determinada por α . Contudo o comprimento do segmento depende do ângulo α e tem o valor

$$c(\alpha) = \frac{2A_x}{\cos \alpha}. \quad (62)$$

4.3.1.2 Rotação do segmento de reta horizontal

A partir da rotação de eixos coordenados em \mathbb{R}^2 tratados anteriormente têm-se

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \operatorname{sen} \alpha \\ y = x_1 \operatorname{sen} \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases} \quad (63)$$

e considerando o segmento de reta horizontal

$$r_h : \begin{cases} y_1 = 0 \\ -A_x < x_1 < A_x \end{cases}, \quad (64)$$

obtêm-se

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha \\ y = x_1 \operatorname{sen} \alpha \end{cases} \quad (65)$$

e como

$$\begin{cases} x_1 = A_x \operatorname{sen}(\omega \lambda) \\ y_1 = A_y \operatorname{sen}(\omega \lambda) \end{cases}, \quad (66)$$

daí resulta que o segmento rotacionado de um ângulo α é

$$r_\alpha : \begin{cases} x(\lambda) = \cos \alpha A_x \operatorname{sen}(\omega \lambda) \\ y(\lambda) = \operatorname{sen} \alpha A_x \operatorname{sen}(\omega \lambda) \end{cases}. \quad (67)$$

As parametrizações apresentadas pelas Equações (61) e (67) descrevem segmentos de reta inclinados de α com relação ao eixo x , contudo com comprimentos distintos. Enquanto r aumenta o seu comprimento c com α , $c(\alpha) = 2A_x / \cos \alpha$, r_α tem seu comprimento fixado em $2A_x$. Além disso, a Equação 61 não determina r para $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. A Figura 28 mostra o comportamento do segmento de reta determinado pela Equação 67 para alguns valores de α , conforme mostra o controle α em cada quadro.

4.3.2 Parametrização da parábola

Será estudada nesta seção a parametrização de uma parábola com seu eixo de simetria coincidente com o eixo y , tal que a parametrização deve gerar os pontos limitados ao retângulo descrito na Figura 29. O parâmetro λ descreve o movimento de um ponto nesta curva limitada.

A equação da parábola é dada por

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (68)$$

sendo que, para uma parábola com concavidade para cima, com $a > 0$, seu ponto de mínimo é $(0; -A_y)$, enquanto que para concavidade para baixo, com $a < 0$ e seu ponto de máximo é $(0; A_y)$.

4.3.2.1 Parábola com concavidade para cima $a > 0$

No ponto de mínimo $(0; -A_y)$ tem-se

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}, \quad (69)$$

ou seja, se $x = 0 \rightarrow b = 0$ e, portanto a equação da parábola torna-se

$$y = ax^2 + c. \quad (70)$$

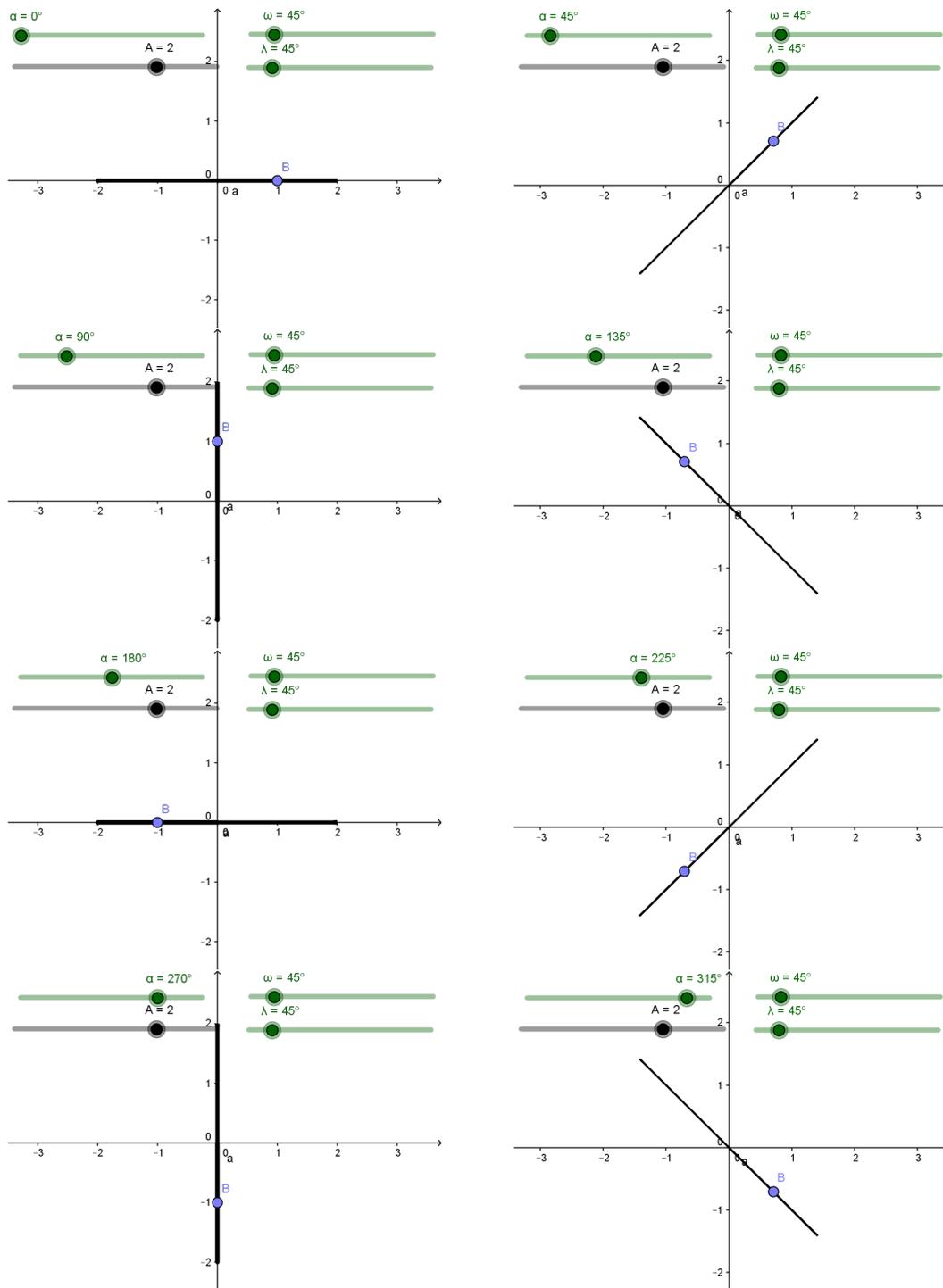
Agora tem-se que, em $x = 0$, $y = c$, ou seja,

$$-A_y = c. \quad (71)$$

A partir da equação da parábola e aplicando a parametrização geral 56 obtém-se

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= ax^2(\lambda) + c \\ -c \operatorname{sen}(\omega_y \lambda + \varphi_y) &= aA_x^2 \operatorname{sen}^2(\omega_x \lambda + \varphi_x) + c \\ &= \frac{a}{2} A_x^2 + c + \frac{a}{2} A_x^2 \operatorname{sen}\left(2\omega_x \lambda + 2\varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

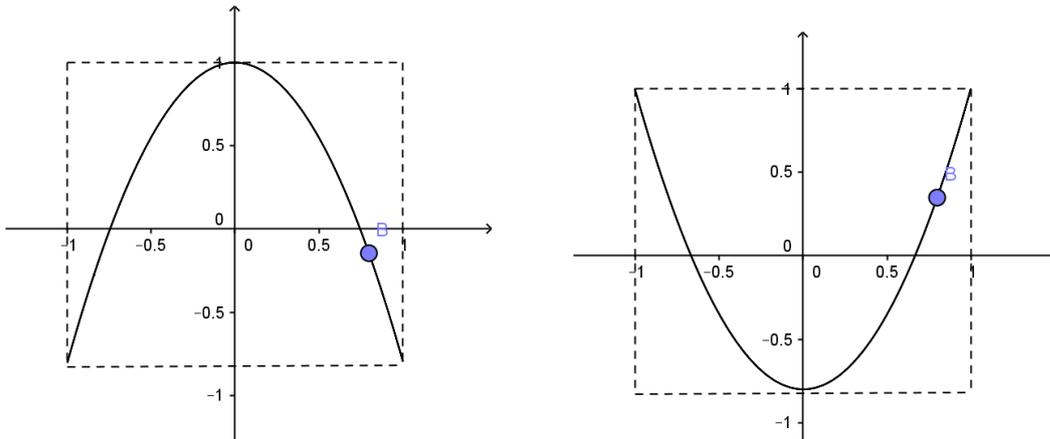
Figura 28 – Comportamento do segmento de reta conforme altera o ângulo α .



Fonte: acervo próprio

ou seja, tem-se a equação

$$-c \operatorname{sen}(\omega_y \lambda + \varphi_y) - \frac{a}{2} A_x^2 \operatorname{sen}\left(2\omega_x \lambda + 2\varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2} A_x^2 + c$$

Figura 29 – Parábolas com eixo de simetria coincidente ao eixo y.

Fonte: acervo próprio

de forma que é válida para qualquer λ , portanto pode-se impor que se os argumentos dos termos oscilantes forem iguais, tal que

$$\omega_y \lambda + \varphi_y = 2\omega_x \lambda + 2\varphi_x - \frac{\pi}{2},$$

resultando em

$$\left(\frac{a}{2}A_x^2 + c\right) \left[\text{sen}\left(2\omega_x \lambda + 2\varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) + 1\right] = 0,$$

cuja solução, para qualquer λ é:

$$\frac{a}{2}A_x^2 + c = 0, \quad (72)$$

ao que leva a

$$A_x = \sqrt{\frac{-2c}{a}}. \quad (73)$$

Das fases tem-se ainda

$$(\omega_y - 2\omega_x) \lambda + \left(\varphi_y - 2\varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

logo

$$\omega_y = 2\omega_x \quad \text{e} \quad \varphi_y = 2\varphi_x - \frac{\pi}{2}$$

e, se $\omega_x = \omega$, a parábola parametrizada será dada por

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x(\lambda) = \sqrt{\frac{-2c}{a}} \text{sen}(\omega\lambda + \varphi_x) \\ y(\lambda) = -c \text{sen}\left(2\omega\lambda + 2\varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad a > 0, c < 0. \quad (74)$$

4.3.2.2 Parábola com concavidade negativa $a < 0$

No ponto de máximo $(0; A_y)$ tem-se

$$\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 2ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a}, \quad (75)$$

ou seja, se $x = 0 \rightarrow b = 0$ e, portanto a equação da parábola torna-se

$$y = ax^2 + c. \quad (76)$$

Agora tem-se que, em $x = 0$, $y = c$, ou seja,

$$A_y = c. \quad (77)$$

A partir da equação da parábola e aplicando a parametrização geral (56) obtém-se

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= ax^2(\lambda) + c \\ c \operatorname{sen}(\omega_y \lambda + \varphi_y) &= aA_x^2 \operatorname{sen}^2(\omega_x \lambda + \varphi_x) + c \\ &= \frac{a}{2}A_x^2 + c + \frac{a}{2}A_x^2 \operatorname{sen}\left(2\omega_x \lambda + 2\varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

ou seja, tem-se a equação modificada

$$c \operatorname{sen}(\omega_y \lambda + \varphi_y) + \frac{a}{2}A_x^2 \operatorname{sen}\left(2\omega_x \lambda + 2\varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2}A_x^2 + c$$

de forma que é válida para qualquer λ , logo, pode-se impor que se os argumentos dos termos oscilantes forem iguais, tal que

$$\omega_y \lambda + \varphi_y = 2\omega_x \lambda + 2\varphi_x + \frac{\pi}{2}$$

tem-se

$$\left(\frac{a}{2}A_x^2 + c\right) \left[\operatorname{sen}\left(2\omega_x \lambda + 2\varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right] = 0$$

cuja solução é, para qualquer λ

$$\frac{a}{2}A_x^2 + c = 0 \quad (78)$$

ao que leva a

$$A_x = \sqrt{\frac{-2c}{a}}. \quad (79)$$

Das fases tem-se ainda

$$(\omega_y - 2\omega_x)\lambda + \left(\varphi_y - 2\varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

logo,

$$\omega_y = 2\omega_x \quad \text{e} \quad \varphi_y = 2\varphi_x + \frac{\pi}{2}$$

e, se $\omega_x = \omega$, a parábola parametrizada será dada por

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x(\lambda) = \sqrt{\frac{-2c}{a}} \operatorname{sen}(\omega\lambda + \varphi_x) \\ y(\lambda) = c \operatorname{sen}\left(2\omega\lambda + 2\varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad a > 0, c < 0. \quad (80)$$

Pode-se verificar que as parametrizações das Equações (74) e (80) são as mesmas, pois

$$-\operatorname{sen}\left(2\omega\lambda + 2\varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(2\omega\lambda + 2\varphi_x + \frac{\pi}{2}\right).$$

4.3.2.3 Rotação da parábola com um ângulo α

A parametrização dada na Equação (80) descreve uma parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo y . A rotação da parábola em torno da origem empregando um ângulo α segue a aplicação dada na transformação de rotação (32) e tem a parametrização genérica

$$\mathcal{P}_\alpha : \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{-2c}{a}} \operatorname{sen}(\omega\lambda + \varphi) \cos \alpha - c \operatorname{sen}(2\omega\lambda + 2\varphi + \frac{\pi}{2}) \operatorname{sen} \alpha \\ y_1 = \sqrt{\frac{-2c}{a}} \operatorname{sen}(\omega\lambda + \varphi) \operatorname{sen} \alpha + c \operatorname{sen}(2\omega\lambda + 2\varphi + \frac{\pi}{2}) \cos \alpha \end{cases} \quad (81)$$

A Figura 30 gerada no GeoGebra, descreve a parametrização da equação (81) rotacionada sob alguns valores para α , visíveis em cada quadro.

4.3.3 Parametrização da circunferência

Da fórmula reduzida da circunferência $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, apresentada anteriormente e esquematizada na Figura 20 considerando o centro $O = (0,0)$ e $P = (x,y) \in C$ temos que

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (82)$$

equivalente a

$$r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = r^2, \quad (83)$$

pois

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \operatorname{sen} \alpha \end{cases} \quad (84)$$

e

$$\begin{cases} x = A_x \operatorname{sen}(\omega_x \lambda + \varphi_x) \\ y = A_y \operatorname{sen}(\omega_y \lambda + \varphi_y) \end{cases}, 0 \leq \lambda \leq \frac{2\pi}{\omega} \quad (85)$$

Portanto,

$$r \cos \alpha = A_x \operatorname{sen}(\omega_x \lambda + \varphi_x) \quad (86)$$

e

$$r \operatorname{sen} \alpha = A_y \operatorname{sen}(\omega_y \lambda + \varphi_y) \quad (87)$$

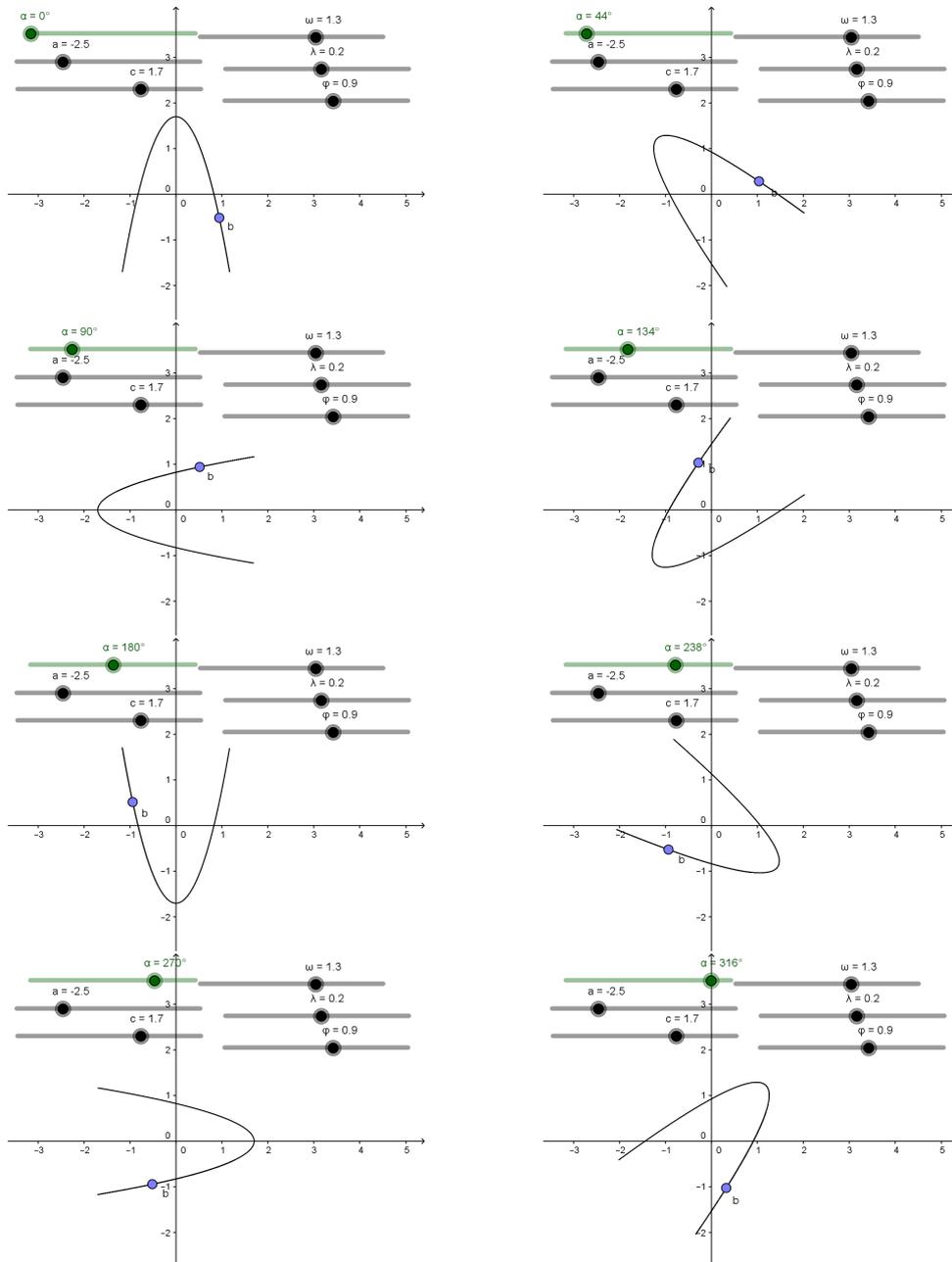
Na equação (87), observa-se que $A_y = r$ e $\alpha = \omega_y \lambda + \varphi_y$. Como $\cos \alpha = \operatorname{sen}(\alpha - \frac{\pi}{2})$, então na equação (86) obtemos:

$$r \operatorname{sen} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = A_x \operatorname{sen}(\omega_x \lambda + \varphi_x) \quad (88)$$

Conclui-se então que $A_x = r$ e $\alpha - \frac{\pi}{2} = \omega_x \lambda + \varphi_x$ isto é $\alpha = \omega_x \lambda + \varphi_x + \frac{\pi}{2}$, portanto

$$\omega_y \lambda + \varphi_y = \omega_x \lambda + \left(\varphi_x + \frac{\pi}{2} \right), \forall \lambda \rightarrow (\omega_y - \omega_x) \lambda + \left(\varphi_y - \left(\varphi_x + \frac{\pi}{2} \right) \right) = 0 \quad (89)$$

Figura 30 – Rotação da parábola parametrizada segundo um ângulo α .



Fonte: Acervo próprio.

Logo $\omega_x = \omega_y$ e $\varphi_y = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$

Portanto, uma circunferência tem a seguinte parametrização:

$$C : \begin{cases} x(\lambda) = r \operatorname{sen}(\omega\lambda + \varphi_x) \\ y(\lambda) = r \operatorname{sen}(\omega\lambda + \frac{\pi}{2} + \varphi_x) \end{cases}, \quad 0 < \lambda < \frac{2\pi}{\omega}. \quad (90)$$

4.3.3.1 Rotação da Circunferência por um ângulo α

A Equação (90) pode ser representada em um sistema rotacionado de α , cuja expressão é

$$C_\alpha : \begin{cases} x_1(\lambda) = r \operatorname{sen}(\omega\lambda + \varphi - \alpha) \\ y_1(\lambda) = r \operatorname{cos}(\omega\lambda + \varphi - \alpha) \end{cases}, \quad 0 < \lambda < \frac{2\pi}{\omega}. \quad (91)$$

Observa-se que as equações (90) e (91) são equivalentes.

4.3.4 Parametrização da elipse

Uma elipse com centro em (0,0) é dada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b \quad (92)$$

Fazendo a substituição de x^2 e y^2 obtém-se

$$\frac{A_x^2}{a^2} \operatorname{sen}^2(\omega_x \lambda + \varphi_x) + \frac{A_y^2}{b^2} \operatorname{sen}^2(\omega_y \lambda + \varphi_y) = 1. \quad (93)$$

Se $A_x = a$ e $A_y = b$ então,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(\omega_x \lambda + \varphi_x) + \operatorname{sen}^2(\omega_y \lambda + \varphi_y) &= 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega_x \lambda + 2\varphi_x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega_y \lambda + 2\varphi_y) &= 1 \\ \cos(2\omega_x \lambda + 2\varphi_x) + \cos(2\omega_y \lambda + 2\varphi_y) &= 0, \forall \lambda \\ \cos(2\omega_x \lambda + 2\varphi_x) &= -\cos(2\omega_y \lambda + 2\varphi_y), \forall \lambda \\ \cos(2\omega_x \lambda + 2\varphi_x) &= \cos((2\omega_y \lambda + 2\varphi_y) + \pi) \\ \Leftrightarrow 2\omega_x \lambda + 2\varphi_x &= 2\omega_y \lambda + 2\varphi_y + \pi \end{aligned}$$

Portanto $2(\omega_x - \omega_y)\lambda + 2(\varphi_x - \varphi_y) + \pi = 0$ conclui-se então que $\omega_x = \omega_y = \omega$ e $\varphi_x - \varphi_y = \frac{-\pi}{2} \rightarrow \varphi_y = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$ logo:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x(\lambda) = a \operatorname{sen}(\omega\lambda + \varphi_x) \\ y(\lambda) = b \operatorname{sen}(\omega\lambda + \varphi_x + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (94)$$

4.3.4.1 Rotação da parametrização da elipse

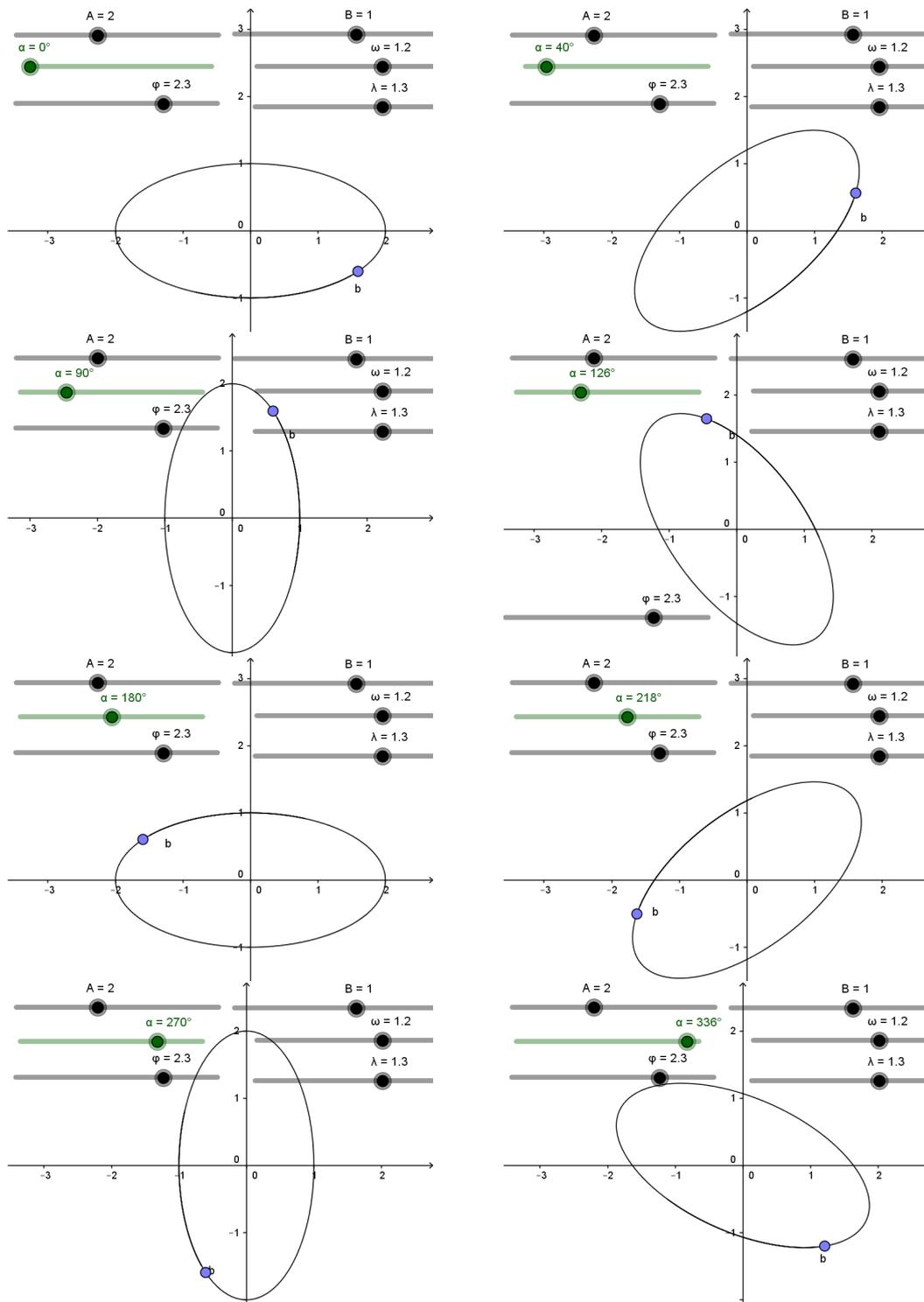
A rotação da parametrização da elipse de centro na origem é

$$\mathcal{E}_\alpha : \begin{cases} x(\lambda) = a \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}(\omega\lambda + \varphi) - b \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\omega\lambda + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ y(\lambda) = a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\omega\lambda + \varphi) + b \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}(\omega\lambda + \varphi + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (95)$$

cuja rotação dos eixos coordenados depende de α .

A Figura 31, gerada no GeoGebra, descreve a parametrização da equação 95 para alguns valores de α , os quais estão visíveis em cada quadro.

Figura 31 – Rotação da elipse parametrizada, segundo um ângulo α



Fonte: acervo próprio

4.4 CONSIDERAÇÕES

Neste capítulo, realizou-se uma revisão sobre Curvas de Lissajous, que envolvem o conceito de composição de sinais periódicos que descrevem uma curva plana fechada. Tais curvas permitem determinar as fases relativas, amplitudes relativas e frequências relativas dos sinais de entrada. Estes sinais foram modelados como senoides com frequências, amplitudes e fases distintas. A ideia fundamental repousa na modelagem por meio de funções seno que podem ser reescritas em função de combinações de senos e cossenos de frequências e fases adequadamente determinadas.

A partir da parametrização que descreve as Curvas de Lissajous, foram aplicadas técnicas com a meta de se representar as cônicas escolhidas: reta, circunferência, elipse e parábola. A representação, não obstante, levou a curvas limitadas pelas amplitudes das funções empregadas na parametrização e o resultado foram algumas curvas limitadas: segmento de reta, arco de parábola; e as curvas completas: circunferência e elipse.

Foi também empregadas as transformações de rotação e translação de eixos, quando necessário, a estas representações parametrizadas das curvas. Essa aplicação facilita a geração de curvas que satisfazem as definições das cônicas especificadas aliada à facilidade de escolha de um eixo de referência para a representação gráfica.

Essa revisão efetivou o aprimoramento de vários conceitos trigonométricos associados a uma combinação de funções parametrizadas, transformações trigonométricas e estudo de arcos limitados de algumas funções.

A seguir, no Capítulo 5, apresenta-se uma proposta didática para o ensino da funções seno e cosseno, com auxílio do ambiente computacional GeoGebra tendo como motivação a obtenção de gráficos construídos por meio das parametrizações obtidas nesse capítulo.

5 PROPOSTA DIDÁTICA PARA FUNÇÕES SENO E COSSENO

O GeoGebra é um software livre com recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidades, estatística e cálculos e oferece as opções em 2D e 3D. Ele é escrito em linguagem JAVA, o que lhe permite ser disponibilizado em várias plataformas, inclusive no LINUX, tão utilizado pelos programas governamentais. De acordo com o Instituto GeoGebra (IGI, 2015), o projeto foi iniciado em 2001, por Markus Hohenwarter (HOHENWARTER, 2002) para ser usado no ensino aprendizagem de matemática, do nível básico ao universitário. Este *software* é capaz de apresentar ao mesmo tempo diferentes representações de um mesmo objeto. Constitui-se como uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no OpenOffice ou no \LaTeX .

O GeoGebra facilita a investigação conceitual ao permitir a construção de objetos matemáticos tais como pontos, segmentos, retas, vetores, seções cônicas, gráficos de funções, curvas parametrizadas, dentre outras, haja vista que essas construções podem ser modificadas dinamicamente possibilitando a observação do comportamento, por exemplo, das funções seno e cosseno. Além disso, a linguagem requerida pelo GeoGebra é muito similar à utilizada usualmente em sala de aula.

Para adquirir o GeoGebra gratuitamente basta acessar o site <<http://www.geogebra.org/cms/>>.

5.1 MOTIVAÇÃO

O professor deve providenciar um equipamento como ilustrado abaixo, que reproduz dois movimentos perpendiculares de pêndulos.

Figura 32 – Imagem de pêndulos perpendiculares



Fonte: <https://youtu.be/rUaS37GZorg>

Com esse pêndulo, deverá reproduzir várias Figuras de Lissajous e permitir que os alunos o façam também, orientando-os quanto às variações do comprimento do pêndulo, que altera o período do movimento e também quanto ao afastamento horizontal e vertical que modificam

a amplitude e o ângulo (defasagem) entre os dois movimentos perpendiculares, possibilitando, assim, surgir diferentes Figuras.

O professor deve fazer um breve comentário sobre aplicação dessas curvas de Lissajous na eletrônica, e dizer aos discentes sobre sua representação matemática apresentando-lhes a sua equação parametrizada:

$$C : \begin{cases} x = x_0 \text{sen}(\omega_x t) \\ y = y_0 \text{sen}(\omega_y t) \end{cases} \quad (96)$$

Para compreender o surgimento de tais figuras a partir do pêndulo será necessário que os alunos conheçam inicialmente as funções trigonométricas.

5.2 O ENSINO

Inicialmente, exibir o vídeo “Fenômenos periódicos” (6:13), disponível em <<https://youtu.be/-jzMLuaMtVs>> . Esse vídeo mostra vários fenômenos periódicos e vários campos do conhecimento que utilizam conceitos da trigonometria.

Logo em seguida, exibir os vídeos “Fenômeno das marés” (1:41), disponível em <<https://youtu.be/w8s5VjruA1U>> e “Marés parte 1” (6:13) que está disponível por meio da URL <<https://youtu.be/VQyBe9xy66g>>, os quais fornecem informações sobre as formações das marés, como forma de facilitar a compreensão ao problema motivador a seguir:

Tabela 3 – Problema da modelagem das marés

Um estudante decidiu descobrir a função que modela a altura da maré em certa praia, para isso, ele se utilizou dos instrumentos de medição necessários e anotou os seguintes resultados: As marés altas ocorriam às 0h e às 12h com altura de 0,8m. As marés baixas ocorriam às 6h e às 18h, com alturas de 0,2m.
Baseado nesses dados, escreva a função trigonométrica que modela a situação relatada.

Fonte: MEC-espaco da aula (acessado em 05/02/2017)

Para resolver esse problema é necessário conhecer as funções seno e cosseno e compreendermos os seus respectivos comportamentos. Nesse momento é interessante indagar como, porquê, as funções seno/cosseno se relacionam com as marés.

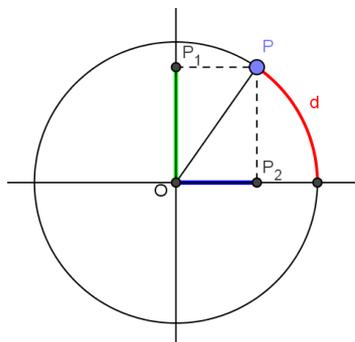
5.2.1 As Funções Seno e Cosseno

Inicialmente, os alunos construirão, utilizando o GeoGebra, o ciclo trigonométrico (animado) como mostra a Figura 33, o qual será gravado, para usos posteriores. Conforme a disponibilidade de horas aulas, pode-se deixar as construções prontas para uso, cabendo aos alunos a manipulação dos objetos já construídos.

Após essa ação, serão apresentadas pelo professor as definições das funções seno e cosseno, que segundo Iezzi (2004):

- “Dado um número real x , seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos $\text{sen } x$) a ordenada OP_1 do ponto P em relação ao sistema uOv .”
- “Dado um número real x , seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos $\text{cos } x$) a abscissa OP_2 do Ponto em relação ao sistema uOv ”.

Figura 33 – Representação gráfica das funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico



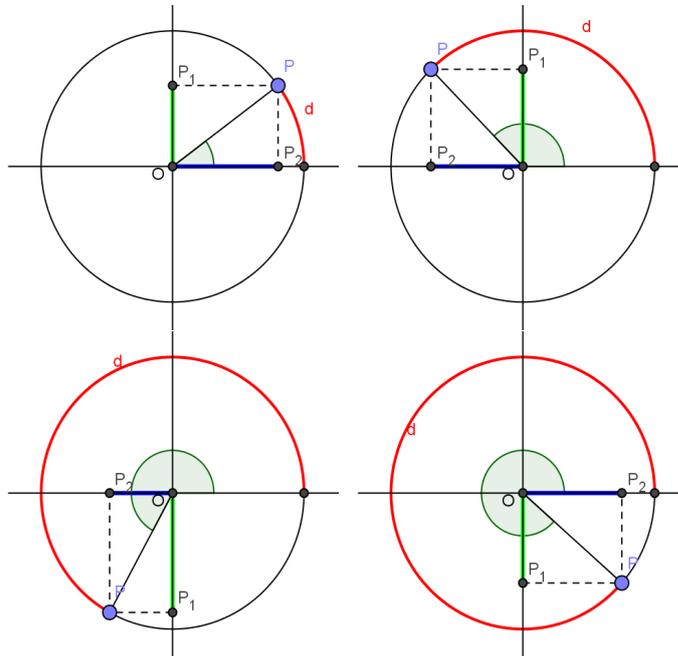
Fonte: Acervo próprio

5.2.2 Atividades

Atividade 1. A seguir o professor apresenta a atividade 1 para os alunos e sugere que seja manipulado o ciclo trigonométrico destacando os valores do seno e cosseno dos ângulos. Em seguida chama a atenção para as seguintes propriedades da função seno e cosseno:

1. Seno: Se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então, $\text{sen } x$ é positivo. Cosseno: Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $\text{cos } x$ é positivo
2. Seno: Se x é do terceiro ou do quarto quadrante, então, $\text{sen } x$ é negativo.
Cosseno: Se x é do segundo ou terceiro quadrante, então $\text{cos } x$ é negativo.
3. Seno: Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então, $\text{sen } x$ é crescente.
Cosseno: Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então, $\text{cos } x$ é crescente
4. Seno: Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então, $\text{sen } x$ é decrescente.
Cosseno: Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $\text{cos } x$ é decrescente.
5. A imagem da função seno é o $[-1,1]$, pois, se P está no ciclo, sua ordenada pode variar de -1 a 1 .

Figura 34 – Representação gráfica móvel de seno e cosseno com arcos nos 4 quadrantes para análise dos sinais, crescimento, imagem e período.



Fonte: Acervo próprio

A imagem da função cosseno é o $[-1,1]$, pois, se P está no ciclo, sua abscissa pode variar de -1 a 1 .

6. As funções seno e cosseno são periódicas, com o período de 2π . (explicar cuidadosamente para os alunos o conceito de período).

A Figura 34 mostra o comportamento do seno e cosseno nos quatro quadrantes.

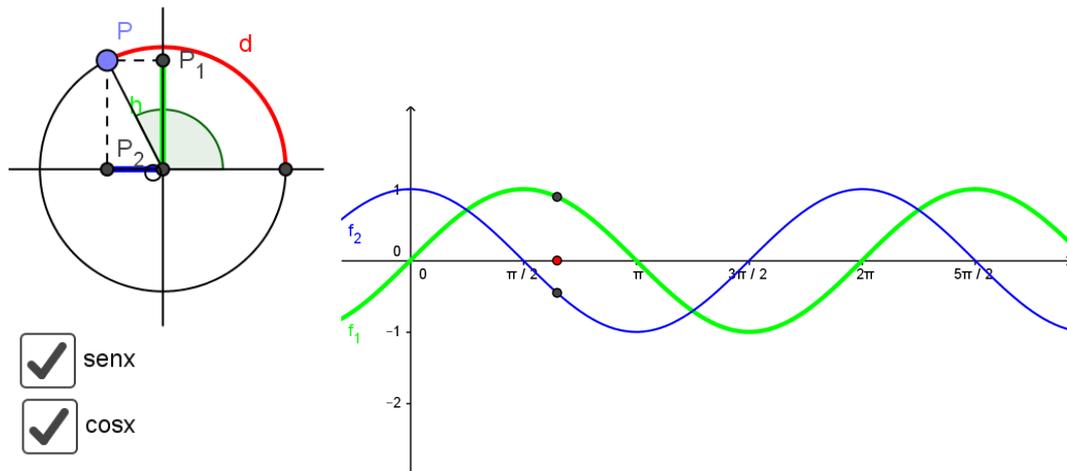
Atividade 2. A partir do ciclo trigonométrico, construir o gráfico da função seno e analisar o crescimento e decréscimo, assim como os sinais da função. Enfatizar a posição dos pontos no gráfico com os arcos principais : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. A Figura 35 mostra a construção pronta. (Essa atividade reforça o estudo anterior.).

OBS.: No GeoGebra, essas imagens aparecem em duas janelas conjugadas. Movimentando o ponto P , os respectivos pontos no gráfico das funções se movimentam concomitantemente. A caixa de diálogo, abaixo do ciclo, permite selecionar a função a ser estudada. O ponto no eixo x na Figura 35 mostra o arco d retificado. Assim é possível verificar também no gráfico as propriedades estudadas anteriormente apenas no ciclo trigonométrico.

Atividade 3. Estudando o comportamento da função $f(x) = a + b\text{sen}(cx + d)$ no GeoGebra.

1. Na barra de ferramentas clique com o botão esquerdo do mouse, inicialmente na opção “controle deslizante” e, em seguida, coloque em qualquer ponto da janela de visualiza-

Figura 35 – Análise das funções seno e cosseno no ciclo concomitantemente ao respectivo gráfico.

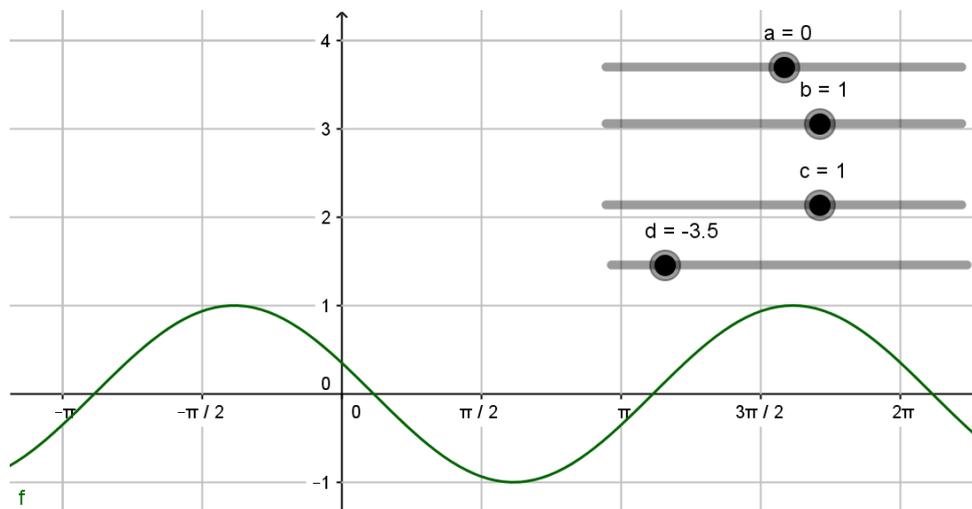


Fonte: Acervo próprio

ção e tecla “ENTER”. Aparecerá o parâmetro a (com valor inicial igual a 1). Repita a operação para obter os parâmetros b , c , d .

2. No campo “ENTRADA” (na parte inferior da tela) insira a função: $f(x) = a + b \operatorname{sen}(cx + d)$ e tecla “ENTER”.
3. Utilize um controle deslizante por vez para observar as transformações que cada coeficiente a , b , c , d opera no gráfico da função e responda: (estas perguntas serão entregues para serem respondidas durante o estudo).

Figura 36 – Estudo do comportamento de $f(x) = a + b \operatorname{sen}(cx + d)$ variando parâmetros a , b , c , d



Fonte: Acervo próprio

- a) Qual é o efeito do parâmetro a no gráfico da função? (promove a translação vertical do gráfico)
- b) Qual é o efeito do parâmetro b no gráfico da função? (promove a dilatação/compressão vertical do gráfico, alterando a imagem, amplitude)
- c) Qual é o efeito do parâmetro c no gráfico da função? (altera o período da função, comprimindo ou dilatando o gráfico na horizontal. $P = \frac{2\pi}{c}$ Relacionar o período com frequência)
- d) Qual é o efeito do parâmetro d no gráfico da função? (promove a translação horizontal do gráfico).

Atividade 4. Essa atividade é semelhante à anterior. Compara o efeito nos gráficos das funções ao se variar os parâmetros a, b, c, d das funções.

Na janela de entrada do GeoGebra insira as seguintes funções, constantes na tabela 4.

Tabela 4 – Lista de funções.

$f(x) = \text{sen } x$	$j(x) = -2 + \text{sen } x$	$n(x) = \text{sen}(2x)$	$r(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
$g(x) = 1 + \text{sen } x$	$k(x) = -\text{sen } x$	$o(x) = \text{sen}(x/2)$	$s(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
$h(x) = 2 + \text{sen } x$	$l(x) = 2 \text{sen } x$	$p(x) = \text{sen}(x/3)$	$t(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$i(x) = -1 + \text{sen } x$	$m(x) = -2 \text{sen } x$	$q(x) = \text{sen}(3x)$	$u(x) = \text{sen}(x + 4)$

Fonte: Acervo próprio.

Na janela de visualização estará um emaranhado de gráficos. Siga os procedimentos:

1. Clique com o botão direito do mouse, em cada função (uma por vez) na janela de álgebra. Abrirá um quadro com opções.
2. Clique com o botão esquerdo do mouse em “EXIBIR OBJETO”, assim os gráficos ficarão “escondidos”.
3. Para que os gráficos apareçam novamente, basta repetir a operação.
4. Compare cada uma das funções com a função original $f(x) = \text{sen}(x)$, (lembre-se de qual parâmetro a, b, c ou d , cada função se refere e registre na 2ª coluna) e preencha a seguinte ficha (fornecida a cada aluno); mostrada na tabela 5.

Apresentamos, abaixo, algumas imagens observadas pelos alunos, juntamente com os resultados esperados.

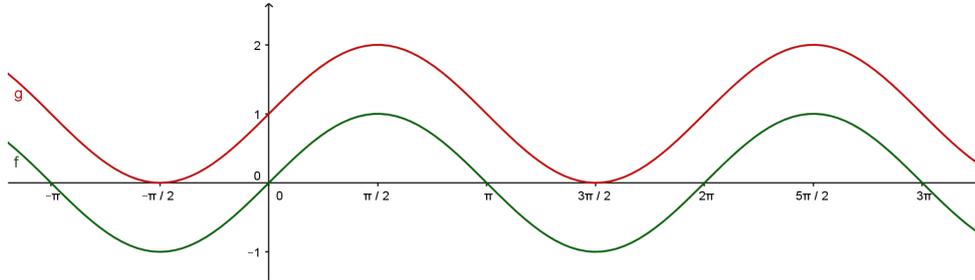
Atividade 5. Resolvendo a situação problema motivadora.

Orientações aos alunos:

Tabela 5 – Ficha para analisar as variações nas funções.

Função	a, b, c, d	Conj. Imagem	Amplitude	Período
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				
$i(x)$				
$j(x)$				
$k(x)$				
$l(x)$				
$m(x)$				
$n(x)$				
$o(x)$				
$p(x)$				
$q(x)$				
$r(x)$				
$s(x)$				
$t(x)$				
$u(x)$				

Fonte: Acervo próprio.

Figura 37 – Representação gráfica das funções $g(x) = 1 + \sin x$ e $f(x) = \sin x$ 

Fonte: Acervo próprio.

Tabela 6 – Ficha preenchida com resultados para $a = 1$.

Função	a, b, c, d	Conj. Imagem	Amplitude	Período
$f(x)$	$a = 0$	$[-1, 1]$	1	2π
$g(x)$	$a = 1$	$[0, 2]$	1	2π

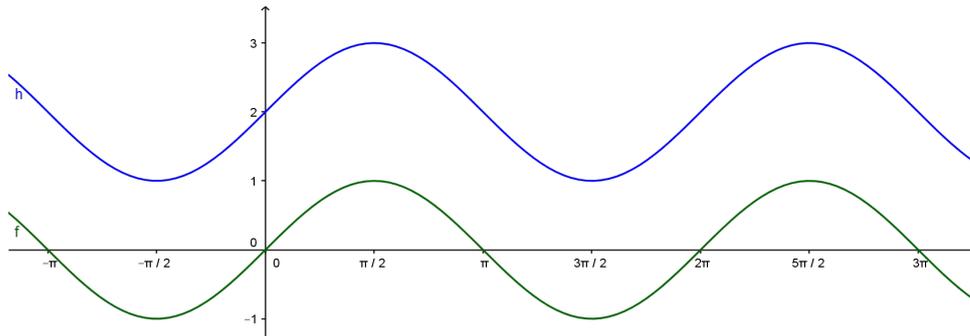
Fonte: Acervo próprio.

1. Inicialmente, verificar qual das funções, seno ou cosseno é mais adequada à situação.

a) De acordo com o enunciado, tem-se maré máxima em 0h e a função que fornece imagem máxima em $f(0)$ é cosseno, $f(x) = a + b \cos(cx + d)$.

b) Verifique a amplitude (parâmetro b).

c) $A = \frac{0,8 - 0,2}{2} = 0,3$, portanto $b = 0,3$

Figura 38 – Representação gráfica das funções $h(x) = 2 + \text{sen } x$ e $f(x) = \text{sen } x$ 

Fonte: Acervo próprio.

Tabela 7 – Resultados para $a = 2$.

Função	a,b,c,d	Conj. Imagem	Amplitude	Período
$f(x)$	$a = 0$	$[-1,1]$	1	2π
$h(x)$	$a = 2$	$[1,3]$	1	2π

Fonte: Acervo próprio.

- d) Verifique o período.
- e) Às 0h a maré é máxima, voltando a ser máxima às 12h, então o período é 12 horas.
- f) Verifique a frequência, equivalente ao parâmetro c .
- g) Como $p = \frac{2\pi}{c}$ temos $12 = \frac{2\pi}{c} \rightarrow 12c = 2\pi \rightarrow c = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$
- h) Substitua os valores encontrados.

$$f(x) = a + b \cos(cx + d)$$

$$f(x) = a + 0,3 \cos\left(\frac{\pi}{6}x + d\right).$$

- i) Como verificar o valor para o parâmetro d .
- j) $f(0)$ é um valor máximo e $\cos(0) = 1$, então d deve ser zero. Pois $f(0) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0 + 0\right)\right) = 1$
- k) Verifique o parâmetro a .
- l) As 0h a altura da maré era de 0,8m, ou seja $f(0) = 0,8$, daí obtemos

$$f(0) = a + 0,3 \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right)$$

$$0,8 = a + 0,3 * 1$$

$$a = 0,5$$

- m) Forneça a função pedida.

$$f(x) = 0,5 + 0,3 \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$$

n) No GeoGebra, faça o gráfico que representa a situação.

Atividade 6. Inaugurada em 1999, a Roda Gigante *London Eye*, conhecida como Roda do Milênio, é uma roda gigante para turistas, em Londres. Possui 135 metros de altura e dá uma volta completa em 30 minutos. (Informações obtidas em: <<https://mapadelondres.org/london-eye-agora-com-passeio-em-quatro-dimensoes/>>). Determine a função que modela o

Figura 39 – *London Eye*



Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=rodagigantedelondres&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwj11sWn_aPTAhUJf5AKHV-8BtwQsAQINQ&biw=1366&bih=604&dpr=1>

movimento da Roda do Milênio.

Resolução:

Primeiro definir qual função melhor representa o movimento, ou seja, seno ou cosseno. Considere a cabine número 1, um ponto da Roda. Essa cabine no ponto de embarque representa altura zero, para tempo zero. Desta forma a função que fornece $f(0) = 0$ $f(x) = \text{sen } x$. Assim $f(t) = a + b \text{sen}(c \cdot t + d)$ é a função adequada para a modelagem.

Tem-se a informação de que a roda dá uma volta completa em 30 minutos, daí:

Período: 30 minutos

Altura mínima: 0 metros

Altura máxima: 135m

Para tempo $t = 0$, altura 0 metros

Para tempo $t = 15$ minutos, altura 135 metros

Raio da roda: 67,5 metros.

O parâmetro b é o raio = 67,5m e como o período é dado por $P = \frac{\pi}{c}$, então o parâmetro

$$c = \frac{\pi}{15}$$

A amplitude é dada pelo parâmetro $a = 67,5$.

Substituindo: $f(t) = 67,5 + 67,5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}t + d\right)$

Para $t = 0$ deve-se obter $-67,5$, isto é, $\frac{\pi}{15} \cdot 0 + d = -1$ e para $t = 15$ min deve-se obter $+67,5$, ou seja, $\frac{\pi}{15} \cdot 15 + d = 1 \implies \pi + d = \frac{\pi}{2} \implies d = \frac{\pi}{2} - \pi \implies d = -\frac{\pi}{2}$, portanto

$$f(t) = 67,5 + 67,5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

é a função procurada.

Atividade 7. Retomando o experimento inicial: Foi utilizado dois pêndulos. Os pêndulos possuem movimentos periódicos, logo, representados por uma função trigonométrica.

No experimento têm-se dois movimentos periódicos perpendiculares entre si, assim, pode-se pensar nas funções $f(x)$ e $g(x)$ para se modelar tais movimentos.

De $f(x) = a + b \operatorname{sen}(cx + d)$ pode-se usar a seguinte notação: $f(\lambda) = A_x + B \operatorname{sen}(\omega_x \lambda + \varphi_x)$ para $f(x)$ e $g(\lambda) = A_y + B \operatorname{sen}(\omega_y \lambda + \varphi_y)$ para $g(x)$. Fazendo $B = 1$, obtêm-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} x = A_x + \operatorname{sen}(\omega_x \lambda + \varphi_x) \\ y = A_y + \operatorname{sen}(\omega_y \lambda + \varphi_y) \end{cases}$$

Que modelam o experimento inicial.

Atividade 8. Construa os gráficos das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \operatorname{cos} x$. Qual é a diferença entre os gráficos dessas funções?

Objetivo: Com esta atividade espera-se que o aluno identifique a defasagem do gráfico da função cosseno em relação ao gráfico da função seno. Perceba que a diferença entre as duas funções é um deslocamento de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda da função cosseno em relação à função seno e identifique que $\operatorname{cos} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Atividade 9. (VUNESP, 2010) Em certo dia do ano, em uma cidade, a maré alta ocorreu à meia-noite. A altura da água no porto dessa cidade é uma função periódica, pois oscila regularmente entre maré alta e maré baixa, ou seja, a altura da maré aumenta até atingir um valor máximo (maré alta) e vai diminuindo até atingir um valor mínimo (maré baixa), para depois aumentar novamente até a maré alta, e assim por diante. A altura y , em metros, da maré, nesse dia, no porto da cidade, pode ser obtida, aproximadamente, pela fórmula: $y = 2 + 1,9 \operatorname{cos}\left(\pi \frac{t}{6}\right)$, sendo t o tempo decorrido, em horas, após a meia noite.

Analise as afirmações a respeito dessa situação:

I. no instante $t = 3$ h a altura da maré é de 2 m.

II. no instante $t = 6$ h ocorreu a maré baixa, cuja altura é de 0,1 m.

III. no instante $t = 12$ h ocorre maré alta, cuja altura é de 3,9 m.

É correto o que se afirma em

(A) I, II e III.

(B) II e III, apenas.

(C) I e III, apenas.

(D) I e II, apenas.

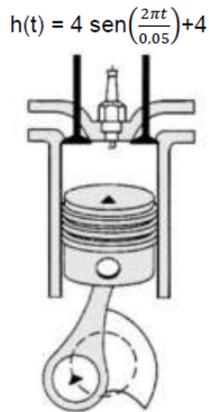
(E) I, apenas.

A resolução desta atividade consiste em verificar as três afirmações a serem julgadas, bastando substituir o valor t na função dada no enunciado. (I) está correta, pois para $t = 3$ tem-se $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. (II) está correta, pois para $t = 6$ obtém-se $\cos \pi = -1$ e finalmente, (III) também está correta, de $t = 12$ obtém-se $\cos 2\pi = 1$, portanto o item (A) é a solução.

Atividade 10. (UFPR – 2013) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a Figura 40. Suponha que em um instante t , em segundos, a altura $h(t)$ do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão:

$$h(t) = 4 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{0,05} \right) + 4.$$

Figura 40 – Pistão de um motor



Fonte: <<http://professorwandercardoso.blogspot.com.br/2015/03/questao-de-trigonometria-contextualizada.html>>

1. Determine a altura máxima e mínima que o pistão atinge.
2. Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?

Espera-se que o aluno relacione a expressão “altura máxima e mínima” com o conjunto imagem da função, cuja variação é $-1 \leq t \leq 1$ e utilize esses valores na resolução. Solução: Para altura

mínima, faz-se $\sin\left(\frac{2\pi t}{0,05}\right) = -1$ e substitui na função: $h(t) = 4 \cdot (-1) + 4 = 0$. Logo a altura mínima é 0 cm. Para altura máxima, o procedimento é análogo: $h(t) = 4 \cdot 1 + 4 = 8$, assim a altura máxima é de 8 cm. Para o item 2 o aluno deverá lembrar que o período é $p = \frac{2\pi}{c}$ e nessa atividade $c = \frac{2\pi}{0,05}$, substituindo, obtém-se $p = 2\pi \cdot \frac{0,05}{2\pi} = 0,05$, ou seja, $p = \frac{1}{20}$, isto é, o pistão completa 20 ciclos por segundo, daí, são 1200 ciclos por minuto.

5.3 CONSIDERAÇÕES

Neste Capítulo, procurou-se proporcionar ao aluno oportunidades de descobrir conceitos importantes para a resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas, por meio de atividades que exploram a investigação/observação e outras que colocam os conceitos construídos em prática. Espera-se que essa proposta didática possa contribuir para a compreensão das funções trigonométricas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de trigonometria é realmente um grande desafio para as escolas públicas. Por mais que os livros didáticos procurem dar significados ao conteúdo, se encerra as aulas referentes a tal conteúdo com a maioria dos alunos não tendo obtido a compreensão do mesmo, não sendo capazes de ao menos aplicar a função dada a determinados valores.

As funções trigonométricas são tratadas de forma superficial (no sentido de ter poucas atividades de compreensão e fixação conceitual) nos livros didáticos, se limitando a apresentar uma definição, seguida do procedimento da construção do gráfico e sinais da função, justificando, assim a apresentação de uma proposta didática que explore a compreensão de situações problemas com a utilização do software GeoGebra que permite, além da construção do gráfico da função, a simulação de diferentes valores dos parâmetros para comparar diversas situações, dando ampla compreensão da situação estudada, por sair da abstração por meio da investigação realizada sobre comportamentos e resultados obtidos em cada etapa da construção.

A melhor motivação que se possa proporcionar ao jovem aluno é possibilitar-lhe a compreensão do que está sendo estudado e justamente por isso, deve-se evitar o modelo de ensino que prioriza a memorização de fórmulas por não proporcionar um efetivo aprendizado. O aluno precisa perceber a necessidade de construir o seu conhecimento e resolvendo exercícios seguindo modelos de exemplos dados não o auxilia nesse objetivo, pois ele deve interpretar cada situação dada, com o apoio mediador do professor. O ambiente GeoGebra traz essa possibilidade, pois, ao oferecer subsídios suficientes para construções geométricas e algébricas pelo aluno, ao mesmo tempo em que proporciona visualização de movimentos, coloca o aluno numa situação de investigador/construtor do próprio conhecimento.

No percurso desse trabalho, apresenta-se revisões teóricas referentes à trigonometria, às curvas cônicas, às curvas de Lissajous e à parametrização que considera a forma geral que um ponto P pertencente à cônica, descreve um movimento periódico, tal que $P(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda))$ e que as funções $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$ são funções harmônicas com período T igual a $2\pi/\omega_x$ em x e $2\pi/\omega_y$ em y e $0 \leq \lambda \leq T$, com essa parametrização obtém-se cada uma das cônicas desenhadas pelo parâmetro λ . Propôs-se ainda, uma sequência didática com foco no aprendizado significativo de modo que o aluno busque formas de resolver as situações propostas, atividades encaminhadas para formar conceitos, fugindo da memorização, construindo, assim, condições de compreender os conceitos envolvidos no estudo da trigonometria.

Essa proposta didática foi pensada e elaborada visando um ensino capaz de promover motivação e construção conceitual acerca das funções seno e cosseno, na busca da proficiência dos alunos nessa temática. Com isso, realizou-se as várias revisões teóricas apresentadas no corpo deste trabalho. Um tópico de destaque foi a pesquisa acerca das parametrizações das cônicas a partir das curvas de Lissajous, as quais são geradas por movimentos periódicos. O desenvolvimento das pesquisas incorporadas nesse trabalho, possibilitou-me adquirir e am-

pliar conhecimentos, além de melhor compreender alguns conceitos trigonométricos que antes pareciam-me sem significado, pois, até então, os havia utilizados tão somente em exercícios de fixação.

Apesar de ter sido construída para aplicação no ensino médio, pode-se indicar essa proposta, mais ainda, esse conceito de ensino, para os graduandos em Licenciatura em Matemática, justamente pela possibilidade de se construir conceitos trigonométricos.

6.1 PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Dando seqüências ao estudo dessa dissertação propõe-se ampliar a investigação sobre as parametrizações de polinômios de grau $n \geq 3$, associando a uma prática didática que inclua sempre os tópicos funções, trigonometria, polinômios, assim como, a utilização de ferramentas digitais, como por exemplo o GeoGebra. Além disso, pode-se investigar o comportamento de degenerescência que aparece na parametrização das cônicas dessa dissertação.

REFERÊNCIAS

- AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. ISBN 9788585818951.
- BARRETA, C. A. *Figuras de Lissajous*. 2017. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAABTq0AL/figuras-lissajous>>. Acesso em: 25 de Fevereiro de 2017.
- COSTA, N. M. L. *A História da Trigonometria*. SP, 2003. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_trigono.pdf>. Acesso em: 25 de Fevereiro de 2017.
- DANTAS, A. S. *O Uso do Geogebra no Ensino de Trigonometria: Uma experiência com Alunos do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte*. 2013. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semiárido - UFRSA, Campus Mossoró/RN, 2013.
- DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2008. 736 p. ISBN 9788508119332.
- DELGADO, J. J.; FRENSEL, K. R.; CRISSAFF, L. dos S. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. ISBN 9788583370093.
- DIAS, D. T. *Experimento 8: Osciloscópio Digital - Figuras de Lissajous*. 2017. Disponível em: <<http://www.fotoacustica.fis.ufba.br/daniele/FIS3/roteiro%208%20oscilosc%C3%B3pio%20Digital%20FigurasLissajous.pdf>>. Acesso em: 25 de Fevereiro de 2017.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. Tradução Hygino H. Domingues.
- FRENSEL, K.; DELGADO, J. *Geometria Analítica II*. 2008. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/katia_frensel/#geometriaanalitica>. Acesso em: 25 de Janeiro de 2017.
- HOHENWARTER, M. *GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*. fev. 2002. Dissertação (Mestrado) — Paris Lodron University, Salzburg, Austria, Salzburg, Austria, fev. 2002. (In German.).
- HOHENWARTER, M.; BORCHERDS, M.; ANCSIN, G.; BENCZE, B.; BLOSSIER, M.; DELOBELLE, A.; DENIZET, C.; ÉLIÁS, J.; FEKETE, A.; GÁL, L.; KONEČNÝ, Z.; KOVÁCS, Z.; LIZELFELNER, S.; PARISSÉ, B.; STURR, G. *GeoGebra 4.4*. 2013. Disponível em: <<http://www.geogebra.org>>. Acesso em: 12 de Novembro de 2016.
- IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar - Trigonometria*. São Paulo, SP: Atual, 2004. ISBN 9788535704570.
- IGI. *GeoGebra 4.4*. 2015. Disponível em: <www.geogebra.im-uff.mat.br>. Acesso em: 12 de Março de 2016.
- MATO GROSSO, S. d. E. d. E. a. *Orientações Curriculares: Área de Ciências da Natureza e Matemática*. Cuiabá, MT: Secretaria de Estado de Educação, 2012.
- NASCIMENTO, M. C. *Representações Paramétricas de Curvas*. Bauru, 2004. Disponível em: <<http://www.fc.unesp.br/~mauri/Down/Parametricas>>.

PCNEM, M. d. E. a. e. d. D. S. d. E. B. *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. Brasília: Ministérios da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

PERRENOUD, P. *As Competências Para Ensinar no Século XXI: A Formação dos Professores e o Desafio da Avaliação*. Porto Alegre, RS: Artmed, 2002. Traduzido por Claudia Schilling, Fátima Murad. ISBN 9788536300214.

PISA, O. a. p. a. C. a. e. D. E. *Brasil no PISA 2015 : análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros*. São Paulo: Fundação Santillana, 2016.

ROSÁRIO, C. A. L. *Período e Frequência de uma Onda*. 2012. Disponível em: <<http://yduka.com/sumarios-e-licoes-8/item/caracteristicas-ondas>>. Acesso em: 10 de Janeiro de 2017.

SATO, J. *Aspectos Históricos e a Importância das Cônicas*. 2005. Disponível em: <<http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node2.html>>. Acesso em: 5 de Janeiro de 2017.