Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

Departamento de Matemática

O ensino de funções através de modelagem matemática

Eder Joacir de Lima

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva**

Trabalho financiado pela Capes

Barra do Garças - MT

Fevereiro de 2017

O Estudo de Funções através de Modelagem Matemática

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Eder Joacir de Lima e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças - MT, 1 de junho de 2017.

Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Prof. Dr. Mauricio Donizetti Pieterzack

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

L732e Lima, Eder Joacir de.
O ensino de funções através de modelagem matemática / Eder Joacir de Lima. -- 2017
xiii, 74 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Carlos Rodrigues da Silva.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2017.
Inclui bibliografia.

1. Modelagem matemática. 2. Ensino tradicional. 3. Ensino-aprendizagem. 4. Funções. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 – Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8576 - Email : profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO : "O ensino de funções através de modelagem matemática"

AUTOR : Eder Joacir de Lima

defendida e aprovada em 28/04/2017.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca / Orientador Doutor Carlos Rodrigues da Silva
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Adilson Antônio Berlatto
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Mauricio Donizetti Pieterzack
Instituição : Universidade Federal de Goiás

BARRA DO GARÇAS 28/04/2017

Aos meus Pais, minha Esposa e minhas filhas, meus modelos de vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e Nossa Senhora, minhas forças nos momentos mais difíceis, por proteger-me nas muitas horas de viagem no decorrer desses dois anos.

Aos meus Pais Armando e Selma que sempre me incentivaram a estudar, e mesmo distante continuam incentivando. A minha Esposa Laurina por todo apoio, companheirismo, compreensão, carinho, paciência... dedicados principalmente nesse período de mestrado. As minhas filhas Eduarda e Julia razões do meu viver, principalmente Julia que embora "pequenininha" demonstrou compreensão com minhas ausências.

Ao meu Orientador Prof.° Dr. Carlos Rodrigues da Silva pela paciência, educação, dedicação e competência demonstrados na orientação desse trabalho, suas contribuições foram de fundamental importância para o meu crescimento pessoal e profissional.

Aos demais Professores (Adilson, Juan, Tibério, Marcio e Daniel) que também contribuíram significativamente em nossa formação.

A todos os colegas de turma, em especial o grupo "reta final" (Cecília, Ciandra, Maria e Rosângela) pelas longas horas de estudo, paciência nos momento de *stress*, pela ajuda prestada nas horas de dúvidas, e principalmente pela amizade construída e solidificada ao longo desse processo.

Aos meus alunos de 1° Ano do Curso Técnico em Logística do IFMT Campus Primavera do Leste que participaram dessa pesquisa. Aos colegas de trabalho e Gestores do IFMT tanto no Campus Confresa, quanto no Campus Primavera do Leste, pela compreensão e apoio demonstrados ao longo desses dois anos.

A todos que contribuíram com essa formação, os meus sinceros agradecimentos.

O néctar da vitória se bebe num cálice de sacrifícios.

Resumo

Por muito tempo o método tradicional vem sendo utilizado como umas das principais metodologias no ensino de matemática, porém nas últimas décadas surgiram outros métodos alternativos dos quais destaca-se nesse trabalho a modelagem matemática. Assim o objetivo dessa pesquisa é realizar comparações em relação ao ensino-aprendizagem de funções numa turma de 1° ano do Ensino Médio do IFMT - Campus Primavera do Leste, utilizando o método tradicional de ensino e a modelagem matemática, além de propor uma sequência didática para o ensino dos principais tipos de funções através de modelagem. Para isso o conteúdo de funções foi abordado em aulas baseadas nesses dois métodos de ensino, sendo que no decorrer dessas aulas foi avaliado o interesse do aluno, a participação nas aulas e no desenvolvimento das atividades, e o conhecimento obtido ao final de cada processo. A coleta de dados se deu através de avaliações e questionários respondidos pelos alunos. Ao final percebeu-se que houve maior interesse e participação dos estudantes quando os conceitos teóricos foram abordados através da atividade de modelagem matemática, além dos resultados referentes a aprendizagem dos alunos terem sido mais satisfatórios quando foi utilizado esse método. Com isso verificou-se que a modelagem matemática pode ser uma metodologia de ensino eficaz no ensino de funções, trazendo resultados mais satisfatórios que os alcançados pelo método tradicional de ensino, pois aproxima a matemática de outras áreas, despertando o interesse pela aplicação dos conceitos, estimulando a criatividade e desenvolvendo habilidades na resolução de problemas.

Palavras chave: Modelagem matemática, ensino tradicional, ensino-aprendizagem, funções.

Abstract

For a long time the traditional method has been used as one of the main methodologies in mathematical teaching, but in the last decades other alternative methods have emerged, of which the mathematical modeling. Thus the objective of this research was to perform comparisons in relation to teaching and learning functions in a class of 1st year of high school of IFMT- Campus Primavera do Leste, using the traditional method of teaching and mathematical modeling, besides proposing a didactic sequence for the teaching of the main types of functions through modeling. For this, the content of functions was approached in classes based on these two methods of teaching, being that in the course of these classes the student's interest was evaluated, participation in classes and in the development of activities, and the knowledge obtained at the end of each process. The gathering through questionnaires and evaluations answered by the students. At the end it was noticed that there was more interest and participation of the students when the theoretical concepts were approached through the activity of mathematical modeling, beyond the results regarding student learning were more satisfactory when this method was used. With this it was verified that the mathematical modeling can be an effective teaching methodology in the teaching of functions, bringing results more satisfactory than those achieved by the traditional method of teaching, because it brings mathematics closer to other areas, arousing interest in applying concepts, stimulating creativity and developing skills in problem solving.

Keywords: Mathematical modeling, traditional teaching, teaching-learning, functions.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Tabelas

Introdução

"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda."

(Paulo Freire)

Atualmente o ensino de matemática nas escolas de educação básica em nosso país tem enfrentado uma série de críticas, e um dos fatores que contribui para esse cenário é o baixo desempenho dos alunos em avaliações externas, o que faz com que o Brasil figure entre os piores em rankings de rendimento escolar. Recentemente em dezembro de 2016, foram divulgados os resultados do país no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA). A prova que é coordenada pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) foi aplicada no ano de 2015 em 70 países e avalia o rendimento dos alunos em três áreas: leitura, ciências e matemática. Em matemática entre os 70 países avaliados o Brasil ocupa a 66ª colocação. Segundo essa avaliação, 70,25% dos alunos brasileiros entre 15 e 16 anos (faixa etária avaliada) apresentam baixa performance em matemática, estando abaixo do nível 2 (numa escala de 1 a 6). A organização considera que alunos nessa situação terão dificuldades na escola, e mais tarde no mercado de trabalho, podendo inclusive não prosperar socialmente.

Esse baixo desempenho dos estudantes aliado ao pouco interesse e as dificuldades que os mesmos apresentam nas aulas de matemática, tem ocasionado muita discussão entre os docentes dessa disciplina, e para muitos uma possível causa desse problema está relacionada a metodologia adotada pelos professores em sala de aula, que na maioria das vezes são aulas baseadas no método tradicional de ensino, onde o professor repassa para o aluno aquilo que ele julga importante, o aluno copia e absorve e em seguida procura fazer exercícios de aplicação buscando memorizar os conceitos que lhe foram repassados.

Isto posto é de fundamental importância que o professor de matemática procure metodologias alternativas que motivem o aluno a buscar os conceitos teóricos por conta própria, tornando-o não apenas um receptador do conhecimento, mas um sujeito ativo no processo de construção, e a modelagem matemática é uma das metodologias que apresenta-se como solução para esse problema, por abordar situações reais do cotidiano do aluno, estimulando a curiosidade, motivação, interesse, e por mostrar de forma dinâmica aplicações dos conteúdos estudados em matemática. Assim a proposta dessa pesquisa é investigar se a modelagem matemática realmente é um método eficiente para o ensino de funções.

Objetiva-se com esse trabalho contribuir para o ensino de função afim, quadrática, exponencial e logarítmica através de uma sequência didática envolvendo modelos matemáticos criados pelos alunos. Além disso, busca-se provocar reflexões nos professores, em relação aos resultados alcançados com aulas tradicionais e aulas que utilizem a modelagem como estratégia de ensino.

A pesquisa foi realizada com os alunos de uma turma de 1° ano do Curso Técnico em Logística Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Mato Grosso Campus Primavera do Leste (IFMT/PDL), para os quais seguindo a ementa da disciplina de matemática devia ser ensinado no ano letivo de 2016 entre outros, conceitos sobre conjuntos numéricos e funções reais de uma variável real. Inicialmente, foi proposto um estudo teórico seguindo o roteiro geralmente trazido pelos livros didáticos do ensino médio, onde os conceitos envolvendo função afim, quadrática, exponencial e logarítmica, costumam ser abordados de maneira tradicional. Após essa etapa foi proposta uma pesquisa nas empresas da cidade em busca dados envolvendo variáveis que podem ser modeladas e estudadas através de algum dos tipos de funções. Em sala de aula esses dados foram analisados e a partir deles construídos modelos matemáticos envolvendo os conceitos de funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Ao final de cada processo, os alunos avaliaram as atividades realizadas e foram avaliados com o objetivo de identificar e comparar o ensino e a aprendizagem do conteúdo através desses dois métodos de ensino.

Este trabalho está organizado em seis capítulos. No primeiro é realizada uma contextualização sobre o ensino de matemática das últimas décadas aos dias atuais. O segundo, terceiro e quarto capítulos trazem um embasamento teórico sobre o método tradicional de ensino, modelagem matemática e ensino de funções, respectivamente. Procura-se nesses capítulos fornecer a base teórica necessária para a pesquisa. No quinto capítulo é realizado o desenvolvimento da sequência didática envolvendo o ensino de funções através de modelagem matemática. O sexto capitulo traz os resultados obtidos com esse trabalho. Finalizando essa pesquisa, são realizadas considerações finais acerca dos resultados obtidos.

Capítulo 1

O ensino de matemática hoje

O baixo desempenho de grande parte dos estudantes das escolas públicas do nosso país nas aulas de matemática, colocam uma interrogação em relação aos objetivos alcançados com ensino que é ofertado a esses alunos. Ao se referir sobre o ensino de matemática no Ensino Médio as Orientações Curriculares Nacionais enfatizam que ao final desse nível de ensino, espera-se que os alunos:

> (...) saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (Brasil, 2006, p.69).

Porém não é assim que grande parte dos alunos que concluem esse nível de ensino saem para o mercado de trabalho ou para a universidade. Isso tem ocasionado muitas discussões entre os professores de matemática, e para muitos educadores esse fraco desempenho está relacionado a forma descontextualizada e inflexível com que são abordados os principais conceitos matemáticos no ensino básico, fazendo com que na maioria das vezes o aluno sinta-se desmotivado por ser um mero expectador e não um sujeito integrante do processo. Aulas tradicionais expositivas onde a metodologia gira somente em torno de exposições teóricas, deduções de fórmulas e teoremas, resolução de exemplos e exercícios de fixação, dos quais o aluno acaba memorizando através de repetições, são apontadas por muitos educadores como um dos fatores que comprometem a aprendizagem significativa e dificultam ao aluno estabelecer um significado ao que foi ensinado.

D´Ambrósio (1989) define a aula expositiva tradicional como aquela em que o professor transfere para o aluno aquilo que ele julga importante, o aluno por sua vez atentamente copia procurando memorizar e, em seguida realiza exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição do modelo de solução proposto pelo professor.

Nos últimos anos o ensino de matemática passou por mudanças significativas. Nas décadas de 40 e 50 o ensino era bem tradicional e caracterizava-se pela memorização e mecanização, exigindo que os alunos decorassem demonstrações de teoremas e praticassem listas enormes de exercícios. Nos anos 60, foi introduzido nos currículos uma nova linguagem caracterizada pelo simbolismo da lógica e da teoria dos conjuntos. Na década de 70, foram evidenciados o abstrato e o formal, em evidências as aplicações. Nos anos 80, buscou-se valorizar a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos e linguísticos, além dos cognitivos. Na década de 90, surgiu o ensino renovado, uma vez que verificou-se que não eram nas atividades de cálculos que os alunos fracassavam, mas sim nas atividades mais complexas, que exigiam flexibilidade, raciocínio e espirito crítico (Silva, 2005).

A partir da década de 90 percebe-se nos documentos que organizam e orientam as diretrizes básicas da educação nacional, direcionamentos de uma matemática mais voltada a realidade dos alunos, como um dos itens pautados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do ano de 1997 para a área de Matemática:

> A aprendizagem em matemática está ligada a compreensão, isto é, à apreensão do significado; aprender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (Brasil, 1997, p.19).

Segundo Libâneo (1994, p.33), o processo de ensino deve visar que o aluno alcance determinados resultados em termos de domínio de conhecimentos, habilidades, hábitos, atitudes, convicções e desenvolvimento de capacidades cognitivas. Para o Autor é necessário abordar os conteúdos de forma mais aplicada a realidade dos alunos, assim possivelmente o aluno demostrará um maior interesse tornando-se mais receptivo aos conceitos construídos em sala de aula.

Sendo assim, frente aos desafios impostos pelos avanços tecnológicos, e a medida que vamos nos integrando a uma sociedade totalmente globalizada, fica claro a nós professores da área de matemática que é necessário reciclar nossas aulas, procurando metodologias que combatam esse ensino pragmático e totalmente desconexo da realidade do aluno, voltando o ensino para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de tomar decisões, resolver problemas, criar, aperfeiçoar valores, conhecimentos e trabalhar coletivamente. Através de aulas mais dinâmicas e interativas é possível conseguir de maneira mais uniforme atingir os principais objetivos que estão previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de matemática no ensino médio:

> [...] é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que se tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas as aplicações. [...] Por fim cabe a matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. (Brasil, 1999, p.252)

Segundo Gadotti (2001, p. 267), a educação nova, que apareceu com vigor na obra de Rousseau, desenvolveu-se muito nos últimos séculos e trouxe numerosas conquistas, sobretudo nas ciências da educação e nas metodologias de ensino, oportunizando aos professores utilizarem e testarem novos métodos de ensino.

Nesse sentido D´Ambrosio (1989, p.4) apresenta algumas linhas de pesquisa e propostas de trabalho para a disciplina de matemática, que colocam o aluno no centro do processo educacional, enfatizando ele como um ser ativo no processo de ensino-aprendizagem, onde o professor por sua vez exercerá um papel de orientação e mediação nas atividades realizadas. Dentre essas propostas destacam-se: a modelagem matemática (que utilizaremos nessa pesquisa como uma das metodologias de trabalho), a etnomatemática, a resolução de problemas como proposta metodológica, o uso de computadores (linguagem LOGO e outros programas), o uso de jogos aplicados ao ensino de matemática, e a história da matemática como motivação para o ensino de tópicos do currículo.

Porém ainda hoje o que vemos é que, apesar de tanta discussão e mesmo com as significativas propostas de reformulação, o ensino de matemática em grande parte das escolas é pautado por práticas tradicionais baseadas em metodologias onde o ensino em sala de aula não dá muito sentido aos conceitos abordados, é como se a matemática fosse uma ciência pronta e acabada, e não uma ciência em constante desenvolvimento, que se renova e aperfeiçoa com o passar dos anos. Segundo Oliveira (1985, p.79):

> [...] sem perceber, transmitimos, através do fazer pedagógico, uma visão estática do conteúdo matemático, como se ele fosse pronto e acabado, como se ele tivesse sido sempre assim, como se seus princípios, suas regras, fossem absolutas no tempo e no espaço. E procedemos assim com muito mais frequência do que pode parecer à primeira vista.

Para muitos pesquisadores esse tipo de metodologia mostra-se cada vez mais abstrata, promovendo nos alunos um desinteresse cada vez maior pelos conteúdos ensinados, resultando em aversão a disciplina de matemática, e por consequência do baixo desempenho acorrem muitas desistências e reprovações. Para Silva (2005 p.4), a matemática da sala de aula perde sua beleza para alguns estudantes, pois não conseguem assimilá-la. Quando tem dificuldades em entendê-la, a disciplina transforma-se num bicho de sete cabeças.

Acredita-se nessa pesquisa que, através de uma metodologia adequada que contextualize os conceitos, se consiga atingir melhores resultados quanto à assimilação dos conteúdos por parte dos alunos. Convém salientar que, em nenhuma hipótese, se deseja estimular que o professor abandone o formalismo e rigor matemático para dedicar-se apenas a análise de situações que levem em conta a realidade do assunto. Ambos são importantes para a construção do saber e o interessante é que estejam integrados a aula. Dessa forma caberá ao docente, no momento adequado, formalizar os conceitos, fornecendo o embasamento necessário e oportuno, tendo em vista que isso é um dos principais objetivos do ensino da Matemática.

Segundo Lima (2016, p.16), é importante ressaltar que a contextualização dos temas deve ser sutil e lógica. Não se deve buscar integrar todo e qualquer conteúdo. O professor deve saber que há tópicos que carecem de aplicações, mas possuem extrema importância no desenvolvimento de outras competências. O que não se pode deixar de realizar é a interdisciplinaridade dos tópicos que são de fácil compreensão. A contextualização forçada pode, inclusive, prejudicar o processo de ensino-aprendizagem, deixando o discente mais confuso e mais desconexo de sua realidade.

Como podemos perceber, existem diversas possibilidades de metodologias em que o aluno torna-se ativo no processo de ensino-aprendizagem. Em todas essas situações ele abandona a posição passiva deixando de acreditar que a aprendizagem em matemática pode ocorrer como consequência da absorção de conceitos passados por um simples processo de transmissão de conhecimento. (D´ambrosio, 1989, p.5)

As dificuldades levantadas atualmente em relação ao ensino da Matemática não são situações novas no cotidiano escolar e apesar de renderem bastante discussão não são problemas fáceis de se resolver. Neste trabalho de pesquisa, pretende-se refletir sobre o método tradicional de ensino como sendo o recurso mais utilizado pelos professores em suas aulas, além do pouco incentivo dado nas aulas de matemática à pesquisa e, falta de contextualização dos conceitos. O objetivo é desenvolver aulas baseado no método tradicional de ensino e através de modelagem matemática, ambas envolvendo conceitos matemáticos, para que se possa no decorrer e ao final do processo comparar os resultados referentes a aprendizagem dos alunos em cada um desses métodos. Na sequência falaremos um pouco sobre o método tradicional de ensino e a modelagem matemática.

Capítulo 2

O método tradicional de ensino

Nesse capítulo será apresentada uma síntese sobre o método tradicional de ensino, onde serão abordados aspectos gerais e as principais características desse método, que apesar de ter surgido a bastante tempo continua ainda sendo bastante utilizado pelos professores de matemática.

Segundo Saviani (2009, p.4), os chamados sistemas nacionais de ensino constituíram-se em meados do século XIX, e sua organização foi inspirado no princípio de que a educação é direto de todos e dever do estado. Esse direito decorria do tipo de sociedade que se pretendia obter, uma sociedade democrática, que consolidasse a democracia burguesa. Esses sistemas seguiram um modelo tradicional de ensino que abordava o conhecimento como um conjunto de informações que o professor transmite ao aluno. Para o autor:

> A escola surge como um antídoto a ignorância, [...] Seu papel é difundir a instrução, transmitir os conhecimentos acumulados pela humanidade e sistematizados logicamente. O mestre-escola será o artífice dessa grande obra. A escola organiza-se como uma agência centrada no professor, o qual transmite, segundo uma gradação lógica, o acervo cultural aos alunos. A estes cabe assimilar os conhecimentos que lhes são transmitidos. (Saviani, 2009, p.5-6)

Essa linha de ensino tradicional, seguia um sistema rigoroso e muito formal, tendo como características principais a disciplina e o respeito. A obediência era uma virtude do aluno, e todos tinham que seguir um padrão estabelecido pela instituição. O professor era a autoridade máxima da sala de aula, e muitas vezes falava por horas sem permitir perguntas ou interrupções. As punições nesse ambiente escolar causavam muito medo, os alunos temiam em fazer algo que não estivesse de acordo com as regras.

Nesse sistema de pedagogia tradicional as iniciativas cabiam ao Professor por isso era importante que esse profissional fosse razoavelmente capacitado e bem preparado. As escolas eram organizadas em forma de classe, cada uma contando com um Professor que expunha lições que os alunos seguiam atentamente, e aplicava exercícios que os alunos deviam realizar disciplinadamente (Saviani, 2009).

Ao se referir a educação tradicional ofertada por uma escola tradicional Dewey (apud Gadotti, 2001, p.149-150) afirma que:

> [..] a matéria ou o conteúdo consiste de corpos de informação e de habilidades que se elaboraram no passado; a principal tarefa da escola é, portanto, transmiti-los a nova geração. [...] O principal propósito ou objetivo é preparar o jovem para as suas futuras responsabilidades e para o sucesso na vida, por meio da aquisição de corpos organizados de informação e de formas existentes de habilitação, que constituem o material de instrução. Desde que as matérias de estudo, tanto quanto os padrões de conduta apropriada, nos vêm do passado, a atitude dos alunos, de modo geral, deve ser de docilidade, receptividade e obediência. [...] Os mestres são os agentes de comunicação do conhecimento e das habilidades e de imposição das normas de conduta.

Mas mesmo que método tradicional de ensino tenha surgido com um grande entusiasmo, em partes graças a forma simplificada do mesmo, já nos primeiros tempos houve uma decepção crescente entre educadores e algumas classes da sociedade, pois segundo Saviani (2009, p.6):

> A referida escola, além de não conseguir realizar seu desiderato de universalização (nem todos nela ingressavam e mesmo ao que ingressavam nem sempre eram bem-sucedidos), ainda teve de curvar-se ante o fato de que nem todos os bem-sucedidos se ajustavam ao tipo de sociedade que se queria consolidar. Começaram, então, a avolumar-se as críticas a essa teoria da educação e a essa escola que passa a ser chamada de escola tradicional.

Com isso a escola tradicional com o seu método tradicional de ensino, foi passando por diversas transformações ao longo dos tempos resistindo até os dias atuais, segundo Leão (1999, p.188) essa metodologia tradicional "dia-a-dia vem sendo questionada sobre sua adequação aos padrões de ensino exigidos pela atualidade, mas ao mesmo tempo é retentora da grande maioria das escolas de nosso país".

Assim, ainda hoje na maioria das escolas brasileiras grande parte dos professores de matemática recorrem a aula expositiva como um dos principais recursos metodológicos, isso porque em geral as instituições de ensino não oferecem muitos recursos além do quadro e giz, e há também questões de formação pois grande parte das universidades privilegia a formação teórica e utiliza somente o método tradicional em sua prática. Segundo Leão (1999, p.193-194):

> Mizukami (1986) enfatiza o método expositivo como sendo o que caracteriza, essencialmente, a abordagem do ensino tradicional. A metodologia expositiva privilegia o papel do professor como o transmissor dos conhecimentos e o ponto fundamental desse processo será o produto da aprendizagem (a ser alcançado pelo aluno). Acredita-se que se o aluno foi capaz de reproduzir os conteúdos ensinados, ainda que de forma automática e invariável, houve aprendizagem. A autora demonstra também que outros fatores envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, tais como os elementos da vida emocional ou afetiva do sujeito, são negligenciados e, por que não dizer, negados nesta abordagem, por supor-se que eles poderiam comprometer negativamente o processo.

Embora muitos educadores classifiquem o modelo tradicional de ensino como um método pré-científico ou anticientífico Saviani (2009, p.40) considera que essa metodologia dita tradicional "estruturou-se por meio de um método pedagógico, que é o método expositivo, que todos conhecem, todos passaram por ele, e muitos estão passando ainda, cuja matriz teórica pode ser identificada em cinco passos formais". Segundo o autor esses passos são: o passo da preparação onde é recordado a lição anterior; da apresentação onde é colocado diante do aluno um novo conhecimento que lhe cabe assimilar; da assimilação que ocorre por comparação do novo com o velho; da generalização, em que se o aluno já assimilou o conhecimento novo ele é capaz de generalizar; e da aplicação, que trata-se de verificar por meio de exemplos novos se ele efetivamente assimilou o que foi ensinado. Todos esses passos "correspondem ao esquema de método científico indutivo, tal como fora formulado por Bacon, método que podemos esquematizar em três momentos fundamentais: a observação, a generalização e a confirmação". (Saviani, 2009, p.40)

Em relação ao ensino de matemática em nosso país, apesar de muitas críticas e um grande clamor por renovação nas concepções atuais, o método tradicional de ensino continua sendo um dos mais utilizados nas escolas, sejam elas públicas ou particulares. Segundo D´Ambrosio (1989, p.15):

> Sabe-se que a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor.

Para essa autora através dessa metodologia de ensino, os alunos acreditam que a aprendizagem em matemática acontece pelo acúmulo de conceitos e fórmulas, creem que fazer matemática é seguir e aplicar as regras que foram repassadas pelo professor. Eles acham que a matemática é um emaranhado de conceitos verdadeiros e estáticos, que foram descobertos ou criados por gênios e que jamais pode-se duvidar ou questionar tais conceitos. Isso faz com que os alunos muitas vezes desistam ao buscar a solução para um problema matemático, por achar que não possuem capacidade para isso, demostrando insegurança ao buscar soluções alternativas diferentes daquelas ensinadas pelo professor em sala de aula.

Se falarmos da formação que as universidades proporcionam aos futuros professores de matemática, veremos que em muitos casos ela está mais voltada ao método tradicional do que as novas concepções metodológicas. Isso faz com que os docentes ao exercerem a profissão reproduzam essa metodologia por acreditarem que tópicos de matemática são ensinados aos alunos por serem úteis a eles no futuro, ou por que faz parte da ementa que deve ser cumprida. Segundo D´Ambrósio (1989, p.16) "para esses professores o conteúdo trabalhado é a prioridade de sua ação pedagógica, ao invés da aprendizagem do aluno". É difícil que esse professor se convença que o mais importante é o aproveitamento do aluno na sua disciplina, e que esse aproveitamento muitas vezes fica comprometido pela pressa com que os conteúdos são repassados.

É evidente que os conteúdos escolares são importantes e devem efetivamente serem ensinados ao aluno. O que se discute é a forma mais adequada de realizar o contato dos alunos com os conteúdos curriculares. Para Leão (1999, p.6), um aspecto importante do ensino tradicional é o fato dele se preocupar em transmitir os conhecimentos acumulados pela humanidade, possibilitando que todo o acervo cultural seja objeto de aprendizagem. Porém o fato que fica a desejar é no momento de mostrar como ou porque esses conceitos surgiram, e qual a relevância deles para o desenvolvimento da sociedade.

Dessa forma o que se quer não é colocar a culpa da maioria dos alunos não aprenderem matemática no método tradicional de ensino e sim suscitar dúvidas e questionamentos sobre a qualidade do ensino da escola tradicional atualmente. Para Leão (1999, p.8), constata-se que ela está empobrecida se comparada a instituições existentes na década passada no qual o sistema era totalmente tradicional, pois os conhecimentos não estão sendo mais transmitidos pelos educadores atuais com o mesmo rigor daquela antiga escola tradicional. Hoje em dia o que mais se constata nas escolas é que o método tradicional se tornou mecânico, repetitivo e desvinculado da prática do aluno.

As críticas ao método tradicional, formuladas segundo Saviani (2009, p.6) a partir do século XIX, foram aos poucos dando origem a outra teoria da educação: o "escola-novismo". Segundo o autor essa nova maneira de compreender a educação, deslocou o eixo dos conteúdos cognitivos para os métodos pedagógicos, do esforço para o interesse, da disciplina para a espontaneidade, da quantidade para a qualidade, de uma pedagogia de inspiração filosófica centrada na ciência da lógica para uma pedagogia de inspiração experimental baseadas nas contribuições das demais áreas do conhecimento.

Capítulo 3

Modelagem Matemática como estratégia de ensino

Neste capítulo apresentaremos a modelagem matemática como uma estratégia de ensino baseada nas concepções da "escola nova". Serão apresentadas algumas definições de modelagem matemática. Além da discussão sobre como abordar os conteúdos do currículo através dessa metodologia, será realizada uma discussão comparativa entre a modelagem matemática e o método tradicional de ensino.

3.1 Introdução a modelagem matemática

A matemática está aplicada em diversas atividades, as vezes nem percebemos mas utilizamos um raciocínio matemático para solucionar algum problema que aparece no dia-a-dia. Outras vezes nos deparamos com situações em que lembramos de algum conceito que nos foi repassado nas aulas de matemática e aí o aplicamos esse conceito na prática e tudo passa a fazer mais sentido. Segundo Bassanezi (2015, p. 10), a "atividade de aplicar matemática é tão antiga quanto a própria matemática e muitas ideias matemáticas surgiram de problemas práticos".

Atualmente a matemática consiste em uma das ciências mais importantes do mundo moderno, por servir de suporte para muitas áreas do conhecimento, e por isso está presente nos currículos escolares sendo abordada desde as séries inicias. Para Biemnbengut and Hein (2000, p. 9):

> A matemática, alicerce de quase todas as áreas do conhecimento e dotada de uma arquitetura que permite desenvolver os níveis cognitivo e criativo, tem sua utilização defendida, nos mais diversos graus de escolaridade, como meio para fazer emergir essa habilidade em criar, resolver problemas, modelar. Devemos encontrar meios para desenvolver, nos alunos, a capacidade de ler e interpretar o domínio da matemática.

No que se refere ao ensino de matemática, esse deve voltar-se para a promoção do conhecimento matemático e da habilidade em utilizá-lo, levando o aluno a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria quanto da aplicação dessa teoria (Biembengut and Hein, 2000, p.10).

Ao realizarmos atividades em nosso cotidiano nem sempre associamos algum conhecimento matemático a elas, porém se observarmos a maioria dessas atividades apresentam algum questionamento a se fazer relacionando a matemática. A habilidade de empregar matemática em situações concretas e em outras áreas do conhecimento humano, conforme Bassanezi (2015, p. 10):

> [..] consiste em tomar um problema prático relativamente complexo, transformá-lo em um modelo matemático, ou seja, traduzir a questão na linguagem de números, gráficos, tabelas, etc., e procurar uma solução que possa ser reinterpretada e termos da situação concreta original.

Muitos pesquisadores defendem a resolução de problemas matemáticos como de fundamental importância no processo de ensino e aprendizagem, por provocar a curiosidade nos alunos ao trazer situações reais para o ambiente de ensino, e promover o raciocínio interpretativo, o pensar por si próprio, podendo transformar a empatia que o aluno pode ter pela disciplina em algo prazeroso.

> Ainda nas duas últimas décadas do século XX começou a se delinear uma perspectiva na área de Educação Matemática que, para além da já reconhecida importância da introdução de aplicações de Matemática no âmbito escolar, se debruça sobre o ensino e a aprendizagem mediados por problemas que tem sua origem, de modo geral, fora da matemática. (Almeida; Silva and Vertuan, 2012, p. 11)

Para Onuchic (Apud Silva, 2014, p.50):

> Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente.

A resolução de problemas com o foco no ensino-aprendizagem de matemática ganhou muita força entre os educadores matemáticos especialmente nas últimas décadas, fazendo com isso surgir várias frentes de pesquisa, e nesse cenário a modelagem matemática tem se destacado por suas características ao relacionar teoria e prática, ao abordar problemas relacionados as diversas áreas do conhecimento.

Com isso a modelagem matemática apresenta-se como uma metodologia alternativa no processo de ensino-aprendizagem justamente por abordar problemas reais do cotidiano do aluno, provocando e estimulando a curiosidade, fomentando o despertar da motivação e do interesse por mostrar de forma dinâmica aplicações dos conteúdos estudados em matemática.

3.2 O que é modelagem matemática?

Segundo Bassanezi (2004, p.24), "a modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual".

Para muitos autores a modelagem matemática é uma forma de despertar nos alunos o interesse em resolver os conteúdos em sala de aula, a partir de situações problemas ligados ao seu cotidiano. Biembengut and Hein (2000, p.18) definem o processo de modelagem como:

> [...] um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar, matematicamente, isso por que é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico.

No dicionário *Houaiss* (2009) modelagem significa dar forma a algo por meio de um modelo. Seguindo esse entendimento Almeida, Silva and Vertuan (2012, p.17) dizem que a Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio da elaboração e estudo de modelos matemáticos.

Já para Biembengut and Hein (2000, p.12):

> Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que para se elaborar um modelo além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

"Em diversas ciências, os modelos matemáticos são partes essenciais das teorias e/ou dos modelos científicos"(Barbosa, 2009, p.71). No campo da matemática o modelo é usado para representar, explicar e tornar presente situações do dia-a-dia que queremos analisar usando a matemática.

> [...] podemos dizer então que um modelo matemático é um sistema conceitual , descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre esse outro sistema. (Almeida; Silva and Vertuan, P.13)

Para esses autores um modelo matemático significa uma representação reduzida da realidade, sobre o ponto de vista daqueles que a investigam.

O desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, envolve um conjunto de procedimentos que são necessários para que a partir de uma situação inicial (problema) se chegue a uma solução para o problema. Almeida, Silva and Vertuan (2012, p.15) caracterizam esses procedimentos como: interação, matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação.

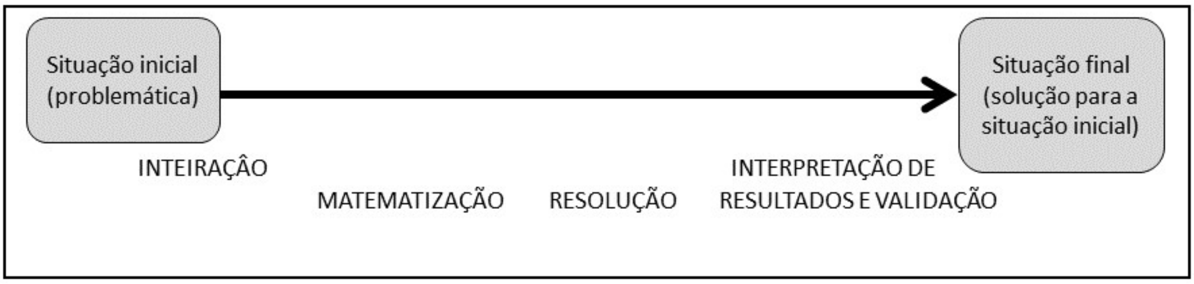

Figura 3.1: Fases da modelagem
Fonte:Almeida, Silva and Vertuan, 2012, P.15

Na fase de inteiração o aluno terá o primeiro contato com a situação inicial (problemática) afim de conhecer as características e especificidades sobre essa situação, por meio da coleta de dados qualitativos e quantitativos. Na etapa de matematização o aluno irá transcrever a situação inicial para uma linguagem matemática que evidencie o problema matemático a ser solucionado. A fase de resolução constitui-se na criação de um modelo que que irá descrever a situação inicial e permitir que sejam analisados aspectos relevantes a situação, além de responder perguntas referentes ao problema inicial, e em alguns casos viabilizar a realização de previsões para o problema em questão. Já a etapa de interpretação e validação dos resultados acarreta a análise de uma solução para o problema e implica a validação da representação matemática associada ao problema, visando o desenvolvimento nos alunos da capacidade de avaliar o processo de construção dos modelos e os diferentes contextos de suas aplicações. (Almeida; Silva and Vertuan,2012, p.16)

Essas fases estabelecem os processos necessários para a realização de uma atividade de modelagem matemática, sendo que elas podem ocorrer de maneira aleatória proporcionando desenvoltura ao processo.

O reconhecimento dessas fases para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem, segundo Almeida, Silva and Vertuan (2012, p.17):

> [...] colocam em evidência aspectos que caracterizam a modelagem matemática: o início é uma situação problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução.

Esses elementos constituem uma atividade de modelagem matemática (figura 3.2).

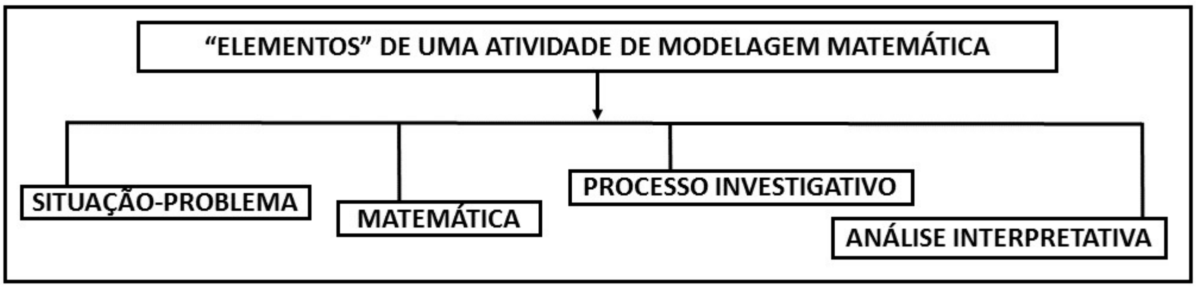

Figura 3.2: Elementos que caracterizam uma atividade de modelagem matemática
Fonte:Almeida, Silva and Vertuan, 2012, p.17

Bienbengut and Hein (2000, p.23) afirmam que no decorrer do dia-a-dia, em diversas atividades recorremos ao processo de modelagem, e por isso a modelagem matemática não pode ser desconsiderada do contexto escolar.

Nessas circunstâncias, aplicar a modelagem matemática durante as aulas de matemática constitui uma possibilidade pedagógica para o professor dessa disciplina, na qual se faz uma abordagem de uma situação real (não necessariamente ligada a matemática), interpreta-se essa situação transcrevendo-a para a linguagem matemática, e a partir de conceitos matemáticos formula-se uma solução para o problema inicial. Além de ser uma boa estratégia de ensino, o processo de modelagem pode desenvolver um fortalecimento nas relações entre alunos e sociedade, uma vez que o problema a ser pesquisado terá origem nela. Kaiser e Sriraman (apud Almeida; Silva and Vertuan, 2012, p.28) estruturaram perspectivas para a modelagem matemática, nas quais observaram aspectos sobre o objetivo central da atividade de modelagem matemática no contexto educativo, e uma dessas perspectivas considera situações problema retiradas da indústria ou do ambiente de trabalho.

As atividades de modelagem são cooperativas, assim é essencial que aconteçam em grupos de alunos orientados e estimulados pelo professor. “A incorporação das atividades de Modelagem deve levar em consideração especificidades do contexto educacional”. (Almeida; Silva and Vertuan, 2012, p.21).

A modelagem matemática pode proporcionar aos alunos uma oportunidade de indagarem situações do cotidiano por meio da matemática, onde “os conceitos e ideias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade”. (Barbosa, 2000, p.5)

A função do professor no processo é ser orientador, segundo Almeida, Silva end Vertuan (2012, p.19):

> Essa indicação tem uma dupla interpretação: a) orientar e indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos; b) orientar não é dar respostas prontas e acabadas, orientar não é sinalizar que “vale-tudo”; c) orientar não é esperar que o aluno simplesmente siga exemplos; d) orientar não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da função; e) orientar não é despir-se da autoridade de professor.

Para Bassanezzi (2015, p.13) a postura dos professores é importante para que os estudantes se sintam motivados e interessados pelas aplicações na matemática, pois ele é o sujeito que orienta e facilita o processo de aprendizagem da modelagem matemática, uma vez que essa aprendizagem acontece na prática, e daí a preferência que seja na companhia de alguém que já lidou com situações concretas de aplicação da matemática.

A introdução de atividades de modelagem matemática em sala de aula e a definição do problema a ser investigado também é de função do professor, sendo interessante que haja a participação do aluno nesse processo, uma vez que o envolvimento dele no processo de modelagem pode depender do interesse no tema a ser estudado. Para Bassanezzi (2004, p. 46) “a escolha final dependerá muito da orientação do professor que discursará a exequibilidade de cada tema, facilidade na obtenção dos dados, visitas bibliográficas, etc”.

3.3 Modelagem matemática no currículo

Ao adotar a modelagem matemática como uma estratégia de ensino para as aulas de matemática, não significa que o professor tenha que necessariamente abandonar o currículo dessa disciplina que já está pré-estabelecido nas normas internas das Instituições de Ensino e na Base Nacional Curricular. A intenção é que nesses casos, a atividade de modelagem matemática possa ser adaptada a esse currículo, considerando temas direcionados que tenham modelos como características próprias do conteúdo a ser tratado. Para Blum e Niss (apud Almeida; Silva and Vertuan, 2012) existem diferentes possibilidades de inclusão da modelagem matemática no currículo escolar, e uma delas é a combinação dela com o currículo, nesse caso a modelagem figura como uma atividade usada em algumas aulas e para alguns conteúdos do programa escolar na disciplina de matemática.

Biembengut and Hein (2000) denominam como modelação matemática o método que utiliza a essência da modelagem em cursos regulares. Segundo os autores a modelação matemática é o caminho pelo qual desenvolve-se o conteúdo programático (currículo) a partir de um tema ou modelo matemático, com o objetivo de: aproximar o conceito matemático de uma outra área do conhecimento, destacar a importância da matemática na formação do aluno, estimular o interesse pela matemática aplicada, desenvolver a habilidade de resolver problemas, entre outros objetivos mais que podem ser alcançados.

> Na modelação o professor pode optar por escolher determinados modelos, fazendo sua recriação em sala, juntamente com os alunos, de acordo com o nível em questão, além de obedecer ao currículo inicialmente proposto. [...] Pela literatura, por exemplo, podemos conhecer as opiniões de pesquisadores que consideram que por meio da modelagem e da modelação, não se podem ensinar novos conceitos matemáticos, mas apenas melhorar a habilidade dos alunos em aplicar matemática; e posições de outros que defendem a modelagem como processo ideal para ensinar matemática [...]. (Biembengut and Hein, 2000, p.29)

Quanto ao desenvolvimento do conteúdo programático o professor segue as mesmas etapas e subetapas do processo de modelagem, ou seja: inteiração, matematização, resolução, interpretação e validação. Para Biembengut and Hein (2000, p.20) "acrescenta-se ao processo, na etapa de matematização o desenvolvimento do conteúdo matemático necessário para a formulação e resolução e a apresentação de exemplos e exercícios análogos para aprimorar a compreensão do aluno".

Biembengut and Hein (2000, p.18) sugerem que:

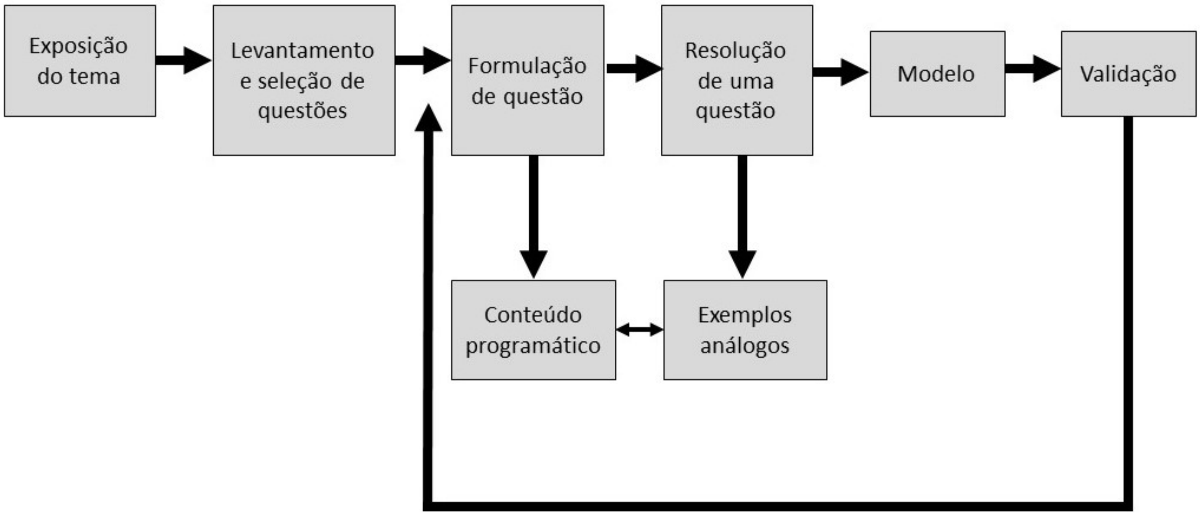

Figura 3.3: Desenvolvimento do conteúdo programático
Fonte:Biembengut and Hein, 2000, p.2

> Em cursos regulares, nos quais há um programa a ser cumprido - currículo - e uma estrutura espacial e organizacional nos moldes "tradicionais"(como é a maioria das instituições de ensino), o processo de modelagem precisa sofrer algumas alterações, levando em consideração principalmente o grau de escolaridade dos alunos, o tempo disponível que terão para trabalhos extraclasse, o programa a ser cumprido e o estágio em que o professor se encontra, seja em relação ao conhecimento da modelagem, seja no apoio por parte da comunidade escolar para implantar mudanças.

Esses fatores precisam ser levados em conta, para que se possa alcançar êxito ao utilizar-se a modelagem matemática em sala de aula. O grau de escolaridade dos alunos e o programa a ser cumprido, são questões importantes que devem ser observadas ao se propor uma atividade de modelagem, pois o professor tem que ter a noção de todos os conceitos matemáticos que ele quer explorar, levando em consideração o currículo de matemática para aquela turma, e o nível de conhecimento que os alunos apresentam em relação a essa disciplina. Além disso deve-se tomar o cuidado para que o aprofundamento dos conceitos matemáticos não extrapolem muito o grau de escolaridade dos alunos, pois se isso acontecer corre-se o risco deles se sentirem desmotivados por não estarem conseguindo acompanhar.

Em relação a experiências na literatura brasileira, Almeida, Silva and Vertuan (2012 p.26) relatam que a incorporação da modelagem matemática em atividades escolares tem acontecido em diferentes circunstâncias, e em um dos cenários, a atividade de modelagem acontece no decorrer da própria aula de matemática, prevendo que no decurso das aulas sejam invocados aspectos de aplicação e modelagem matemática, como forma de auxiliar a introdução de conceitos matemáticos. Nesse cenário, o ideal é que os problemas sejam o ponto de partida, e a matemática seja introduzida conforme a necessidade de resolvê-los.

3.4 Modelagem matemática *versus* método tradicional de ensino

Segundo Barbosa (2001 p.5), muitos autores tem defendido o uso da modelagem matemática como uma estratégia alternativa ao método tradicional de ensino que reina na maioria das escolas brasileiras (Bassanezi, 1990, 1994; Biembengut, 1990, 1999; Blum e Niss, 1991; Borba, Meneghetti e Hermini, 1997, 1999).

Skovsmose (apud Barbosa, 2001, p.6) ao se referir as condições nas quais os alunos sentem-se estimulados a desenvolver determinadas atividades, apresenta a noção de ambiente de aprendizagem como o lugar ou espaço no qual o aluno está envolvido. E dessa forma entende que o ensino tradicional é um ambiente de aprendizagem, por estimular os alunos a desenvolverem certas atividades.

Já a modelagem matemática estimula o aluno a indagar situações de outras áreas do conhecimento que não a matemática, Barbosa (2001, p.6) assume que modelagem "é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade". Esse termo ambiente é como se fosse um convite que o professor faz, e o envolvimento dos alunos ocorre conforme o interesse deles vai ao encontro com esse ambiente.

> O ambiente de aprendizagem de modelagem matemática, baseado na indagação e investigação, se diferencia da forma que o ensino tradicional "visivelmente hegemônico nas escolas"busca estabelecer relações com outras áreas e o dia-a-dia. Este último procura trazer situações idealizadas que podem ser diretamente abordadas por ideias e algoritmos sugeridos pelas exposição anterior do professor. Os alunos, portanto já sabem como proceder e o que utilizar na abordagem das situações. (Barbosa, 2001, p.8)

Dessa maneira há uma distância considerável entre a forma como os problemas envolvendo outras áreas diferentes da matemática são abordados no ensino tradicional e na modelagem, pois são atividades de características diferentes, e por isso a transição do ensino tradicional para a modelagem matemática não é algo tão simples, por envolver o abandono de posturas adquiridas que proporcionam tanto ao discente quanto ao docente permanecer numa zona de conforto, onde quase tudo é conhecido ou previsível. Segundo Almeida, Silva and Vertuan (2012, p. 24) "migrar de uma situação de aulas expositivas seguidas de exercícios para situações que integram na sala de aula atividades investigativas como a modelagem matemática, requer entrar numa aparente zona de risco".

Para Bassanezi (2015, p.11):

> [...] a dificuldade encontrada pelos professores que decidem adotar a modelagem matemática em seus cursos, é a de transpor a barreira do ensino tradicional em favor de uma opção mais crítica e consequente. No ensino tradicional, o objeto de estudo se apresenta quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequência predeterminada, com um objetivo final muito claro que, muitas vezes nada mais é que "cumprir o programa da disciplina"!

Nesse sentido segundo Almeida, Silva and Vertuan (2012), muitas pesquisas apontam que um grande número de professores ainda preferem se manter nessa aparente "zona de conforto", preferindo adotar estratégias de ensino onde quase tudo é conhecido ou previsível, dessa forma para esse grupo, a modelagem matemática não apresenta-se como uma boa estratégia, por haver nela pouco espaço para a previsibilidade.

Santos (2016) realizou uma pesquisa teórica bibliográfica elaborando um panorama sobre pesquisas que tem como tema o uso da modelagem matemática no ensino médio no período de 2010 a 2014. Ele relata que nas conclusões finais dos trabalhos de pesquisa analisados, o depoimento dos autores indica, entre outros problemas, que a insegurança em trabalhar com a modelagem matemática incentiva a continuar ministrando aulas seguindo o método tradicional de ensino.

É importante ressaltar que na modelagem matemática as atividades geralmente acontecem em grupo, onde a cooperação entre os integrantes acontece o tempo todo e isso faz com que várias dúvidas e questionamentos que aparecem durante o processo sejam respondidas com a ajuda dos colegas e do professor. Já no método tradicional de ensino, na maioria dos casos a resolução das atividades propostas acontecem individualmente e aí quando aparecem as dúvidas ou questionamentos o mais comum é o aluno não procurar nem a ajuda do professor e permanecer com essa dúvida. Em alguns casos essa dúvida não é solucionada e o aluno carrega isso por anos, tornando-se uma imensa bola de neve, pois a cada vez que há necessidade de recorrer a tal conceito o aluno fica inseguro e emperra no processo de aprendizagem.

Nesse sentido, aos professores que desejam migrar do ensino tradicional para a modelagem matemática, a condição necessária segundo Biembengut and Hein (2000, p.29) “é ter audácia, grande desejo de modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender, uma vez que essa proposta abre caminho para descobertas significativas”.

Capítulo 4

Funções

Nesse capítulo iremos analisar e compreender alguns conceitos relacionados aos tipos de funções abordados nesse trabalho. Veremos também a aplicabilidade desses conceitos na elaboração de modelos matemáticos, e ao final serão propostas algumas situações que podem ser utilizadas para o ensino de funções através de modelagem matemática.

4.1 O conceito de função

Ao estudar cientificamente os fenômenos, procuramos neles identificar grandezas possíveis de medir, e em seguida estabelecer relações existentes entre essas grandezas, onde o valor de uma variável depende do valor de outra. Por exemplo: o salário de uma pessoa pode depender do número de horas trabalhadas; o preço de venda de uma mercadoria pode depender do custo de produção; a produção total de uma fábrica pode depender do número de máquinas utilizadas; e assim por diante. Essas relações entre tais quantidades são em muitas vezes definidas por meio de funções (Leithold, 1988).

> O desenvolvimento do conceito de função está intimamente relacionado com o de variável. Caraça, (1989) define função como um instrumento matemático, que tem como objetivo o estudo das leis quantitativas, cuja essência seja a correspondência entre dois conjuntos. Para isto, fez-se necessária uma representação simbólica para os conjuntos, pois, do contrário, ter-se-ia que utilizar sempre tabelas de resultados particulares e não se obteria a generalidade conveniente. Essa representação simbólica conseguiu-se pela introdução do conceito de variável. Convencionou-se que para representar qualquer elemento de um dado conjunto seria utilizado um determinado símbolo, por exemplo: x. A esse símbolo, representativo de qualquer elemento do conjunto, chamou-se variável. (Silva, 1999, p.29)

Mas além da relação entre quantidades e variáveis, o conceito de função pode ser também atrelado a relação entre conjuntos. Segundo (Leithold, 1988):

> Uma função é um conjunto de pares ordenados (x, y) no qual duas duplas ordenadas distintas não podem ter o mesmo primeiro número. O conjunto de todos os valores admissíveis de x é chamado domínio da função, e o conjunto de todos os valores admissíveis de y é chamado imagem da função.

Definição 1: Consideremos dois conjuntos A e B disjuntos ou não, não vazios e $f \subset AXB$. A terna (A,B,f) será considerado uma função se, para todo $x \in A$, existir um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. (Cardoso, 2015, p.24)

O conjunto A é denominado domínio da função, o conjunto B será o contradomínio e o conjunto dos elementos $y \in B$ para os quais existe uma relação com algum elemento $x \in A$ tal que essa relação $(x, y) \in f$ é denotado o conjunto imagem da função. A terna (A,B,f) é geralmente denotada por $f : A \to B$ (lê-se "uma função de A em B").

Consideremos por exemplo, os conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ e $f : A \to B$ a função definida por: $\{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15)\}$. Tal função pode ser representado pela figura 4.1.

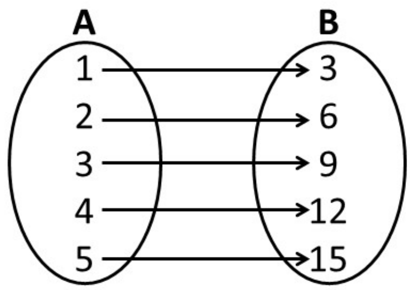

Figura 4.1: Relação entre os conjuntos A e B
Fonte:O Autor (2016)

Segundo Lima (2014, p.37) devemos sempre observar "que uma função consta de três ingredientes: domínio, contra-domínio e a lei de correspondência $x \mapsto f(x)$". Dessa forma se $(x, y) \in f$, denomina-se y como imagem de x pela aplicação de f, e escreve-se $f(x) = y$. Os números x e y são variáveis, e uma vez que os valores da função f dependem de x, e como os valores de y dependem da escolha de x, y é chamado de variável dependente e x de variável independente. Rigorosamente representa-se:

$$f : A \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$

onde f é uma função de A em B tal que cada $x \in A$ faz corresponder uma único elemento $f(x) \in B$.

Por exemplo a correspondência que associa a cada número natural n o seu dobro $2n$ define uma função $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $d(n) = 2n$.

Uma função $f : A \to B$ é chamada injetiva quando elementos diferentes em A são transformados por f em elementos diferentes em B, ou seja f é injetiva quando:

$$x_1 \neq x_2 \text{ em A} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exemplo: A função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é uma função injetiva, pois para quaisquer x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}^*$ teremos que $\dfrac{1}{x_1} \neq \dfrac{1}{x_2}$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dizemos que uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva quando, para qualquer elemento $y \in B$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como exemplo podemos tomar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida pela lei $f(x) = x^2$, a função é sobrejetiva pois para todo elemento y de $\mathbb{R}_+$ existe um elemento x de $\mathbb{R}$ tal que $y = x^2$, assim $f(x) = y \Rightarrow f(x) = x^2$. Se $y = \sqrt{2}$ teremos por exemplo, $x = 2$ ou $x = -2$.

Uma função $f : A \to B$ será uma bijeção ou uma correspondência biunívoca entre A e B, quando for ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva. Como exemplo de correspondência biunívoca podemos tomar a função dos números pares na qual considerando $P = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ obtém-se a correspondência $f : \mathbb{N} \to P$ pondo-se $f(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Quando o domínio e o contradomínio de uma função f são subconjuntos de $\mathbb{R}$ dizemos que f é uma função real de variável real, nesse caso o gráfico de f é o conjunto de todos os (x, y) em $\mathbb{R}^2$ para os quais (x, y) é uma dupla ordenada em f. Assim o gráfico de f é o conjunto:

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in AXB; y = f(x)\}$$

Segundo Iezzi and Dolce (2010), a construção do gráfico de uma função conhecendo a sua lei de correspondência $y = f(x)$ e seu domínio (finito) pode proceder da seguinte forma:

- constrói-se uma tabela na qual aparecem os valores de x (domínio de f) e os valores de y calculados por meio da lei $y = f(x)$.

- representa-se cada par ordenado (x, y) da tabela por um ponto do plano cartesiano. O conjunto dos pontos obtidos constitui o gráfico da função.

Como exemplo podemos considerar o gráfico da função definida pela lei $f(x) = x^2$,com domínio $D = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 2\}$. Primeiro deve-se obter uma tabela (tabela 4.1) na qual aparecem alguns valores de x (domínio de f) e os valores de y que serão calculados por meio da expressão $y = x^2$.

Tabela 4.1: Relação entre x e y

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	2
2	4

Fonte: O Autor, 2016.

Na sequência representaremos os pares ordenados obtidos na tabela acima por pontos no plano de coordenadas cartesianas, a união desses pontos será o gráfico de f (figura 4.2).

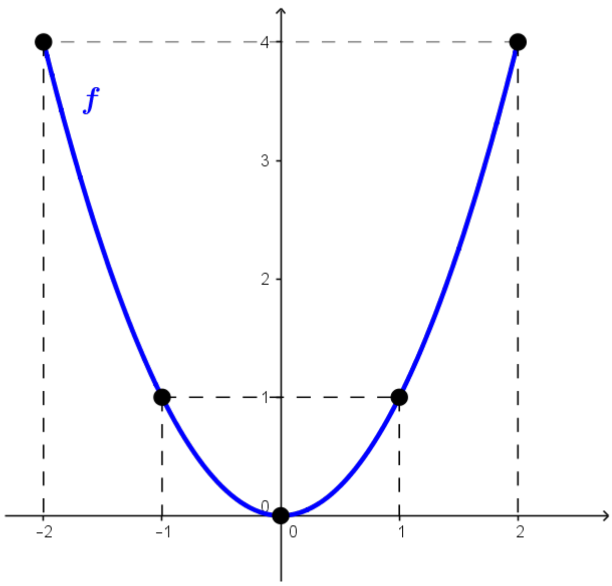

Figura 4.2: Gráfico de $f(x) = x^2$
Fonte: O Autor, 2016.

A seguir veremos alguns tipos particulares de funções reais de uma variável real, abordaremos função afim, função quadrática, função exponencial e função logarítmica.

4.2 Função Afim

Certas relações entre grandezas se comportam de maneira especial e quando estudadas podem ser descritas por uma expressão matemática. Como exemplo, vamos supor que o salário mensal bruto de um vendedor é constituído de uma parte fixa de R$ 880,00 adicionada de uma comissão de 5% do total de vendas (em R$) realizadas por ele no mês. Qual será o salário final do vendedor em um determinado mês? Como o salário mensal bruto depende da comissão, este será nossa variável dependente (y), enquanto o valor em R$ vendido por ele será a variável independente (x). Dessa forma o salário mensal do vendedor (y) será a soma da parte fixa (R$ 880,00) com a comissão que ele receberá naquele determinado mês (5% de x), logo o salário poderá ser calculado pela expressão:

$$y = 880 + 0,05x$$

Por essa expressão é possível verificar que para cada total x de vendas no mês, haverá um certo salário y pago ao vendedor, dessa forma y é uma função de x, e o exemplo acima é um caso de função afim. Mas o que é função afim?

Podemos classificar como função afim todas aquelas descritas por polinômios de grau 1 de incógnita x na forma $ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Definição 2: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$), tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (Lima, 2014, p.79)

A função identidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é um exemplo de função afim onde $a = 1$ e $b = 0$, assim como as translações $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$, com $b \in \mathbb{R}$.

O gráfico de uma função afim dada por $y = ax + b$, com $a \neq 0$ é uma reta oblíqua aos eixos $0x$ e $0y$. Para demonstrar que isso é verdadeiro, tomemos três pontos distintos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, cujas coordenadas satisfazem a lei $y = ax + b$ (com $a \neq 0$). Temos que:

$$y_1 = ax_1 + b \ (1) \qquad y_2 = ax_2 + b \ (2) \qquad y_3 = ax_3 + b \ (3)$$

Subtraindo a equação (3) com a equação (2) obtem-se: $y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2)$. Subtraindo a equação (2) com a equação (1) obtem-se: $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$.

Daí vem:

Em $(3) - (2) : a = \dfrac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}$;

E em $(2)-(1): a=\dfrac{x_3-x_2}{x_2-x_1}$;

Logo temos que:

$$\frac{y_3-y_2}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_2}{x_2-x_1}$$

Dessa forma os triângulos ABD e BCE (figura 4.3) tem lados proporcionais (AD e BE, BD e CE), e como os ângulos E e D são iguais (ângulo reto) então pelo caso de semelhança LAL (lado, ângulo e lado) concluímos que ABD e BCE são semelhantes e como consequência disso temos que $\alpha=\beta$. Daí como os ângulos α e β são iguais, e BE e AD são paralelos, conclui-se que os pontos A, B e C estão alinhados e portanto formam uma reta.

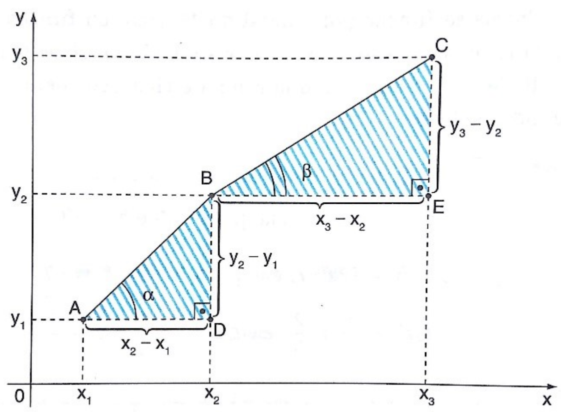

Figura 4.3: Triângulos ABD e BCE
Fonte: Iezzi and Dolce (2010, p.72)

Quando a função for do tipo $y=b$ (função constante), seu gráfico será uma reta paralela ao eixo x cuja a distância em relação ao eixo das abcissas será $|b|$.

Em relação aos coeficientes da função afim, o valor a é chamado coeficiente angular da reta e está ligado a sua inclinação em relação ao eixo $0x$ (eixo das abcissas). Enquanto o valor b é chamado coeficiente linear da reta, sendo este o ponto em que a reta corta o eixo $0y$ (eixo das ordenadas).

Uma propriedade característica da função afim é que ela possui uma taxa de variação em um determinado intervalo entre x_1 e x_2. Por exemplo, seja f dada por $f(x)=ax+b$, atribuindo dois valores distintos x_1 e x_2 e calculando os correspondentes $f(x_1)$ e $f(x_2)$, temos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \text{ e } f(x_2) = ax_2 + b$$

Subtraindo ambas obtemos:

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

Daí, notamos que, para um acréscimos $\Delta = x_2 - x_1$ em x, ocorre um acréscimo $a(x_2 - x_1) = a\Delta$ em y.

Como exemplo dessa propriedade vamos considerar a função $y = -2x+1$, a seguir na tabela 4.2 estão representados alguns valores de x e os correspondentes de y obtidos a partir da lei de correspondência.

Tabela 4.2: Relação entre x e y

x	0	1	2	3	4	5
y	1	-1	-3	-5	-7	-9

Fonte: O Autor, 2016.

Analisando a tabela percebe-se que, para cada acréscimo de 1 em x ocorre um acréscimo de -2 em y, para cada acréscimo 2 em x ocorre um acréscimo de -4 em y, enfim, para cada acréscimo Δ em x, ocorre um acréscimo -2Δ em y.

Segundo Lima (2014, p.80) uma função $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, é crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ e decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Em relação a raiz ou zero da função afim, este será o número real x tal que $f(x) = 0$. Então a raiz da funçãof dada por $f(x) = ax + b$ é a solução da equação $ax + b = 0$, ou seja, $x = \dfrac{-b}{a}$.

4.3 Função Quadrática

A função quadrática apesar de não ser uma relação entre grandezas muito fácil de ser observada no dia-a-dia, aparece em várias situações, como por exemplo o movimento descrito por um objeto que é lançado no espaço e cai com aceleração da gravidade em função do tempo. Além disso o estudo de funções quadráticas pode ser motivado por problemas de aplicação onde queremos obter um certo ponto máximo ou mínimo. Na área de economia e administração a função quadrática pode estar presente através das curvas de possibilidades de produção, ou ainda no cálculo do lucro máximo ou custo mínimo na fabricação de um determinado produto. Mas afinal, o que é função quadrática?

Definição 3: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chama-se quadrática quando são dados números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (LIMA, 2014, p.104).

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x^2 + x - 4$ é um exemplo de função quadrática, em que $a = -2$, $b = 1$ e $c = -4$.

Segundo Iezzi and Dolce (2010), o gráfico de uma função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada parábola. Lima (2014) define que dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d. Assim na figura 4.4, ao tomarmos um ponto P qualquer da linha azul teremos que a distância entre PQ será igual a distância de PF.

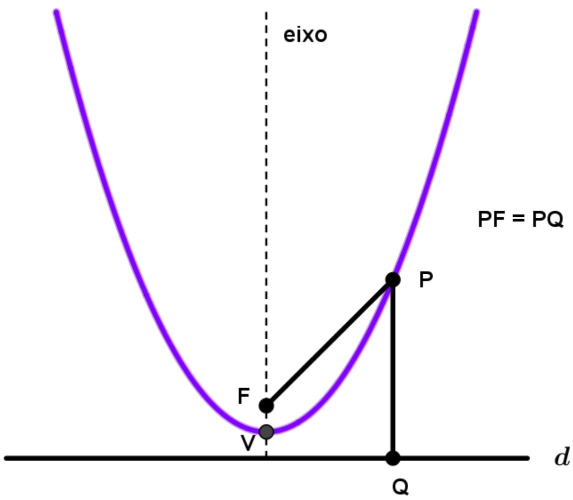

Figura 4.4: Parábola
Fonte: O Autor, 2016.

O eixo da parábola consiste na reta perpendicular a diretriz passando pelo foco. A intersecção do eixo com a parábola determina o vértice, que é ponto da parábola mais próximo da diretriz.

Segundo Lima (2014) o gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, é uma parábola cuja diretriz é a reta horizontal $y = \dfrac{4ac - b^2 - 1}{4a}$, o foco é o ponto $F = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$ e o vértice é ponto $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Por exemplo, o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$, a diretriz é a reta horizontal $y = -\dfrac{1}{4}$ e o vértice será o ponto $V = (0, 0)$.

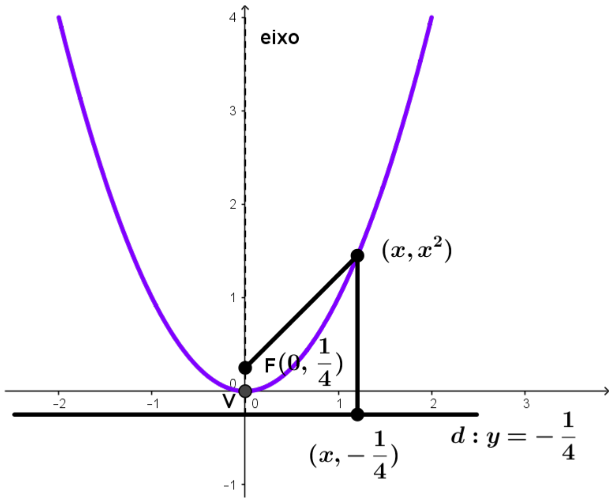

Figura 4.5: Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$
Fonte: O Autor, 2016.

Quando uma parábola tem concavidade voltada para cima $(a > 0)$ o vértice é um ponto de mínimo, se a parábola tem concavidade voltada para baixo $(a < 0)$ o vértice é um ponto de máximo.

Em relação as raízes ou zeros de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$), serão os números reais x tais que$f(x) = 0$.

As parábolas possuem propriedades de grande importância e aparecem em algumas estruturas e atividades do nosso cotidiano como por exemplo, nos espelhos côncavos, antenas parabólicas, faróis de automóveis, telescópios, no estudo de balística, em aplicações na economia, entre outros. Na física a função quadrática possui um papel importante, pois ela é o modelo que descreve o movimento uniformemente variado.

Na sequência didática proposta nesse trabalho utilizaremos os conceitos de função quadrática para maximizar o lucro de uma empresa encontrando a receita máxima baseada num modelo em que o preço de venda de um produto pode variar de acordo com a quantidade desse produto que um determinado grupo pretende adquirir num intervalo de tempo.

4.4 Função Exponencial

Variáveis envolvendo modelos exponenciais caracterizam-se pelo crescimento ou decrescimento imediato, e a importância de estudos relacionando esse tipo de variável, justifica-se pela aplicabilidade em diversos fenômenos que se pode observar na natureza.

Segundo Lima (2016), a necessidade de se estudar padrões exponenciais se deu a partir do surgimento de problemas sociais e naturais, como: crescimento populacional que geralmente é abordado nas aulas de geografia, a meia vida de substâncias estudadas na biologia, mensuração de pressão atmosférica estudado na física, a sistemática de juros compostos que é estudado na matemática e na economia, perícia de resfriamento de corpos mortos, velocidade de pouso de um paraquedas de asas, entre outros. Assim repara-se que há uma ligação intima entre funções exponenciais e outras disciplinas ministradas para o aluno de ensino médio.

Dessa forma a função exponencial caracteriza-se por externar uma relação de crescimento ou decrescimento característico de alguns fenômenos da natureza, que geralmente são estudados pelos estudantes no decorrer do ensino fundamental e médio. Além disso modelos exponenciais são utilizados em outras áreas, como por exemplo, as curvas de aprendizagem, que se trata de um conceito criado por psicólogos que constataram uma relação existente entre a eficiência de um indivíduo no seu trabalho e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Existem vários modelos de curvas de aprendizagem um exemplo é dado pela expressão $Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$, onde Q é a quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário em função do tempo (t) de meses de experiência. Essa expressão representa uma função exponencial, mas o que é função exponencial?

Segundo Lima (2014), seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $a^x.a^y = a^{x+y}$;
2. $a^1 = a$;
3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando a>1 e

   x<$y \Rightarrow a^y$<a^x quando 0<a>1

Iezzi and Dolce (2010) chamam a atenção que na definição acima, podemos observar que a base a contém algumas restrições:

- Se a<0, nem sempre o número a^x é real, como, por exemplo, $(-1)^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}$.

- Se $a = 0$ temos um dos casos abaixo:

    1. quando $x>0$, $y = 0^x = 0$ (função constante);
    2. quando $x<0$, não se define 0^x(por exemplo, 0^{-3});
    3. quando $x = 0$, não se define 0^0;

- Se $a = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ a função dada por $y = 1^x = 1$ é constante.

Ainda em relação a função exponencial, segundo Lima (2014, p.155) "a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente [...], e se $a>1$ então a^x cresce sem limites quando $x>0$ é muito grande, e se $0<a<1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x<0$ tem valor absoluto grande".

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida pela lei $f(x) = a^x$, para $a>1$ é injetiva, pois para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ teremos que $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ implica em $f(x_1) \neq f(x_2)$. Além disso a função f é sobrejetiva, pois para todo elemento y de $\mathbb{R}^+$ existe um elemento $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = a^x$, assim $f(x) = y$ implica em $f(x) = a^x$. Logo se a função exponencial é injetiva e sobrejetiva então ela é bijetiva e portanto admite inversa.

O gráfico de uma função exponencial é chamado curva exponencial. Através dele podemos modelar, por exemplo, situações que se enquadram em uma curva de crescimento ou decrescimento, sendo possível fazer análises relativas aos pontos dessa curva.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida pela lei $f(x) = a^x$, para $a>1$ veremos pelo gráfico de f que conforme aumentamos os valores de x os valores de y tornam-se muito grandes. Porém se $0<a<1$, veremos no gráfico da função que conforme os valores de x crescem os valores de y vão se aproximando de zero. Como exemplo vamos analisar o gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ conforme a figura 4.6:

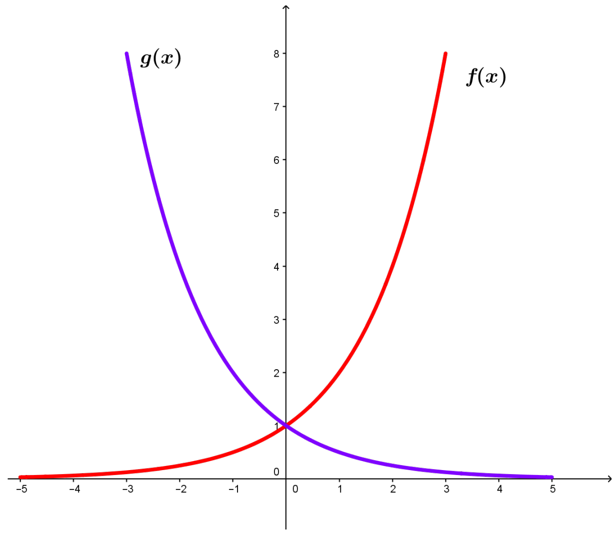

Figura 4.6: Gráfico de f e g
Fonte: O Autor, 2016.

A função exponencial será crescente se $a>1$, nesse caso ao aumentarmos os valores de x os valores de y aumentam, isto é, $x_1>x_2$ implica em $a^{x_1}>a^{x_2}$. Se $0<a<1$ a função exponencial será decrescente e nesse caso sempre que aumentarmos os valores de x, os valores correspondentes de y diminuem, ou seja, $x_1>x_2$ implica em $a^{x_1}<a^{x_2}$. No gráfico da figura 4.5, observe que em f conforme os valores de x crescem os valores de y aumentam, então f é crescente. Já em g conforme os valores de x aumentam os valores de y diminuem, aproximando-se de zero, logo g é uma função decrescente.

No modelo de curva de aprendizagem apresentado na página 34, pode-se perceber a presença do número irracional e cujo o seu valor é 2,7182818284... . Para introduzi-lo aos estudantes podemos considerar a expressão $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, onde x assuma valores reais diferentes de zero. Ao atribuirmos a x valores cada vez mais próximo de zero, os valores da expressão ficam cada vez mais próximos do numero e. Dizemos então que o limite de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, quando x tende a zero, é igual ao numero e, representando por $\lim\limits_{x \to e}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

A função exponencial é considerada uma importante ferramenta para o estudo e compreensão de diversas situações cotidianas, por permitir que sejam realizadas análises qualitativas e quantitativas de resultados extraídos de uma relação entre grandezas, que obedece todas as propriedades e condições explicitadas nesse texto.

4.5 Função Logarítmica

A função logarítmica apresenta diversas aplicações dentre elas podemos citar a descrição de fenômenos cujas medições são muito grandes, muito pequenas, ou que se situam em intervalos com uma amplitude imensa, como por exemplo os terremotos que tem sua amplitude medido na escala Richter, que é uma escala logarítmica. Na sequência apresentaremos a definição de função logarítmica como sendo a inversa da função exponencial já que essa como vimos anteriormente é bijetiva e portanto admite inversa, além disso definiremos algumas propriedades fundamentais de função logarítmica.

Segundo Lima (2014) por definição de função inversa, tem-se que:

$$a^{log_a x} = x \text{ e } log_a(a)^x = x$$

Dessa maneira, $log_a x$ será o expoente que deve-se elevar a base a para obtermos o número x, ou seja:

$$y = log_a x \Leftrightarrow a^x = y$$

Definição 4: Dado um número real a (sendo $0 < a \neq 1$), chama-se função logarítmica de base a a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = log_a x$. (Iezzi and Dolce, 2010, p.173).

Por essa definição a função f associa cada número real positivo x ao seu logaritmo na base a.

A função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = log_a x$, assim como a função exponencial, será crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Em relação ao gráfico de uma função f definida por $f(x) = log_a x$, segundo Iezzi and Dolce (2010) ele apresenta as seguintes características:

- localiza-se a direita do eixo y, pois o domínio de f é $\mathbb{R}_+^*$, logo seus pontos pertencem ao primeiro e quarto quadrantes do sistema de coordenadas cartesianas.

- intercepta o eixo x no ponto da abscissa 1, pois se $x = 1$, temos que $y = log_a 1 = 0$, para todo o número real a sendo que $0 < a \neq 1$.

- É simétrico do gráfico da função exponencial $g(x) = a^x$ em relação a reta bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes.

Nas figuras 4.6 e 4.7 podemos observar melhor essas características.

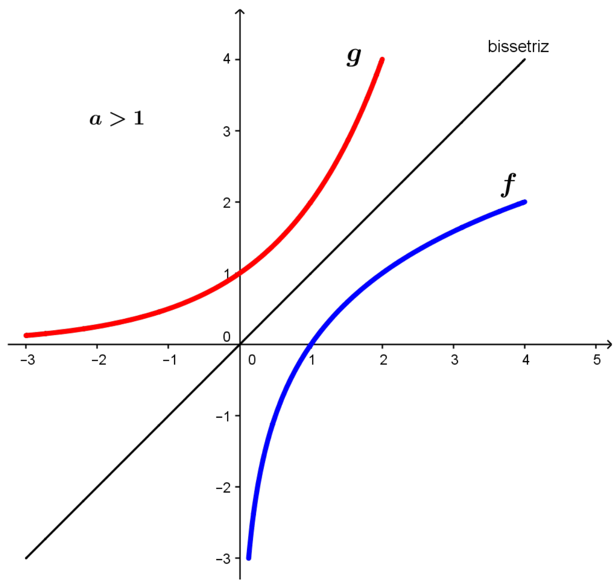

Figura 4.7: Gráfico de $f(x)$ e $g(x)$ para a>1
Fonte: O Autor, 2016.

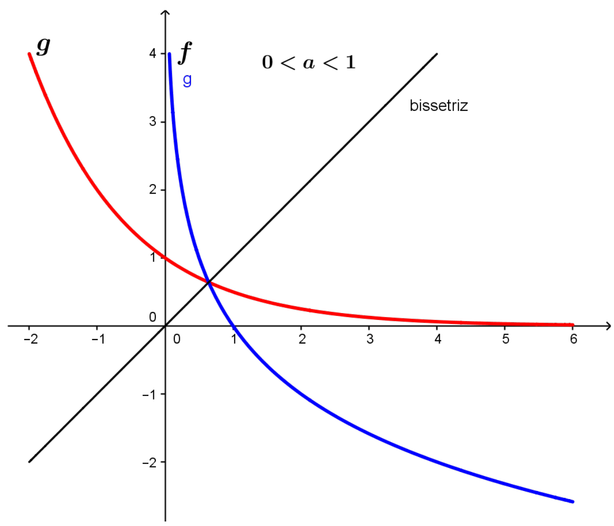

Figura 4.8: Gráfico de $f(x)$ e $g(x)$ para 0<a<1
Fonte: O Autor, 2016.

Segundo Lima (2014, p.165) "as funções logarítmicas mais utilizadas são aquelas de base a>1, especialmente as de base 10 (logaritmos decimais), base 2 (logaritmos binários) e base e (logaritmos naturais, as vezes impropriamente chamados neperianos)".

A função $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = log_a x$ é ilimitada superiormente e inferiormente, pois $log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca e portanto sobrejetiva. Mais precisamente, tem-se para a>1:

$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} log_a x = -\infty$$

Na função logarítmica $f(x) = log_a x$ (com a>1) quando $x \to \infty$ o crescimento de f ocorre lentamente, ao contrário da função exponencial $g(x) = a^x$ que cresce rapidamente. Esse crescimento lento da logarítmica que contrasta com o crescimento rápido da exponencial, pode ser observado pelos gráficos da figura 4.6.

As funções logarítmicas e exponenciais assumem um papel de destaque na modelagem matemática por possuírem propriedades importantes, como por exemplo, transformar produtos em somas. Na sequência discutiremos mais sobre as funções como modelos matemáticos.

4.6 Funções como modelos matemáticos

Em diversas situações do nosso cotidiano podemos encontrar uma relação entre grandezas na qual é necessário expressar essa situação prática através de uma função, essa função obtida nos fornece um modelo matemático da situação. Podemos então dizer que um modelo matemático é a descrição matemática de um fenômeno do mundo real e pode ser entendido como uma representação simplificada da realidade. (Leithold, 1988)

Para Bassanezi (2004) um modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que de alguma maneira representam o objeto que está sendo estudado. Segundo esse autor os modelos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas no mundo real.

Nesse sentido o conceito de função pode ser facilmente compreendido através da modelagem matemática pois é um recurso bastante utilizado para modelar situações do cotidiano.

> Na atualidade, as funções podem ser aplicadas e relacionadas em todas as ciências, por exemplo, na física, química, biologia e outras. É uma excelente ferramenta para solucionar e representar questões atuais, simular graficamente uma situação problema como, por exemplo, obter uma Função Custo, Receita ou lucro. Isto a torna uma importante ferramenta para modelar situações encontradas no cotidiano, pois sua aplicação no campo da matemática e em outras ciências é vasta. (Fortes; Souza Junior; Oliveira, 2014, p.12)

Na sequência veremos alguns exemplos de situações do cotidiano das quais podemos obter modelos matemáticos envolvendo as funções definidas anteriormente.

Situação 1: Para encher uma caixa-d'água de 5000 litros, é utilizada uma bomba de água que possui uma vazão de 35 litros por minutos. Sabe-se que por causa do flange (elemento que une dois componentes em um sistema de tubulação) ao acabar a água nas torneiras não significa que a caixa-d'água está totalmente vazia, pois sempre resta uma quantidade aproximada de 170 litros de água no fundo dela. Nessas condições, a quantidade total de litros de água na caixa (L) em função do tempo (x) em minutos que a bomba ficar ligada será:

L = quantidade de água despejada na caixa no tempo x + quantidade de água existente na caixa.

Segundo o enunciado, a quantidade de água existente na caixa é 170 litros. Já a quantidade de água despejada pela bomba pode ser obtida pelo produto do tempo que ela fica ligada em minutos (x), e a quantidade de água despejada por minuto (35 litros), logo temos que:

$$L(x) = 35x + 170.$$

Como a caixa tem uma capacidade máxima de 5000 litros o tempo máximo que a bomba poderá permanecer ligada será de 138 minutos (2h18min), pois:

$$5000 = 35x + 170 \Rightarrow x = 138$$

O gráfico da figura 4.8, nos mostra a relação entre a quantidade de água existente na caixa, em função do tempo que a bomba ficar ligada em minutos.

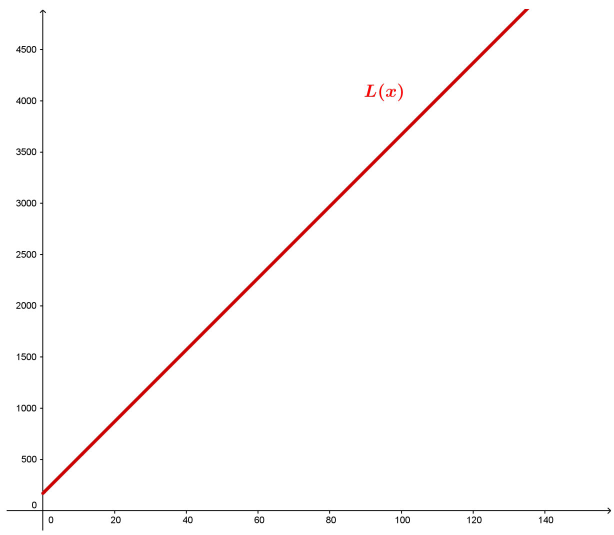

Figura 4.9: Gráfico da função $L(x)$ para $0<x<138$
Fonte: O Autor, 2016.

Situação 2: Um pecuarista deseja cercar uma área retangular ao redor de um rio para fazer um confinamento de gado, sendo que o lado que faz divisa com o rio não precisará de cerca. Para isso ele dispõe de uma quantia de dinheiro suficiente para fazer 240 metros de cerca. Nessas condições, quais devem ser as medidas do retângulo a ser cercado para que a área que o gado ficará confinado seja a maior possível?

Figura 4.10: Área a ser cercada
Fonte: O Autor, 2016.

No enunciado da situação acima, x é o número de metros do comprimento da área a ser cercada perpendicular ao rio, e y é comprimento em metros do lado paralelo ao rio. Logo a área será:

$$A = x.y \tag{4.1}$$

Como ao total serão construídos 240 metros de cerca, então:

$$2x + y = 240 \Rightarrow y = 240 - 2x \tag{4.2}$$

Substituindo 4.2 em 4.1 temos que a área cercada em função do comprimento x será:

$$A(x) = x.(240 - 2x) \Rightarrow A(x) = -2x^2 + 240x$$

Como $A(x)$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo, a área será máxima no ponto vértice dessa parábola. Assim quando a área cercada for máxima, x será:

$$x_v = \frac{-240}{2.(-2)} = 60$$

Se $x = 60$ então $y = 240 - 2.(60) = 120$. Logo para que a área do retângulo a ser cercado seja máxima suas dimensões deverão medir 120 metros para o lado paralelo ao rio, e 60 metros para os lados perpendiculares.

Situação 3: Numa certa empresa estima-se que o número mínimo de peças produzidas por um trabalhador sem experiência nenhuma seja de 200 peças no primeiro mês. Com o passar dos meses o trabalhador vai adquirindo experiência e a sua eficiência passa a ser maior até atingir um limite teórico máximo de produção, que para essa empresa, estima-se em torno de 400 peças produzidas ao mês. Para estimar o número n de peças produzidas mensalmente por um funcionário com t meses de experiência de trabalho a empresa utiliza um modelo de curva de aprendizagem baseado na função $n(t) = 400 - 200.(0,8)^t$. O funcionário é considerado eficiente e recebe um aumento em seu salário após ultrapassar o número de 350 peças produzidas em um mês. Dessa forma sendo $n(t) = 350$ temos que:

$$350 = 400 - 200.(0,8)^t \Rightarrow 0,25 = 0,8^t \Rightarrow t = log_{0,8}\, 0,25 \Rightarrow t \cong 6,2$$

Sendo assim com 7 meses de experiência o funcionário será considerado eficiente para a empresa. Na figura 4.10 podemos visualizar o gráfico da função $n(t)$, observe que nesse modelo a partir de um certo tempo de experiência o número de peças produzidas pelo trabalhador praticamente não se altera, tendendo a uma estabilização.

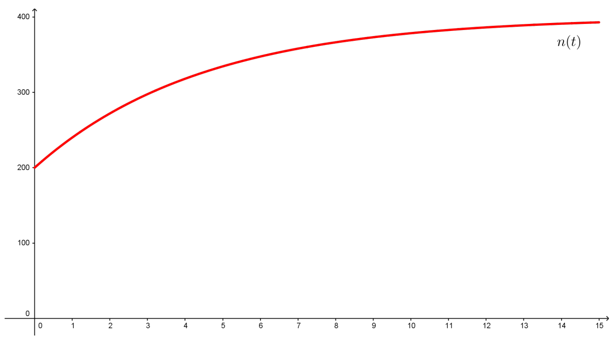

Figura 4.11: Número de peças X tempo de experiência
Fonte: O Autor, 2016.

Situação 4: Após a fundação de uma empresa, criou-se uma estimativa que o número de funcionários dela cresceria de acordo com a lei $f(t) = 400 + 50.log_4(t+2)$, onde t é o tempo em anos de existência da empresa (Iezzi and Dolce, 2010). De acordo com o enunciado, quantos funcionários a empresa possuía na sua fundação? Após quantos anos de existência a empresa atingirá o número de 550 funcionários?

No momento em que a empresa foi fundada temos que $t = 0$, assim:

$$f(0) = 400 + 50.log_4\ 2 \Rightarrow f(0) = 400 + 50.(0,5) \Rightarrow f(0) = 425$$

Portanto no momento em que a empresa foi fundada haviam 425 funcionários nela. Para acharmos tempo transcorrido até que o número de funcionários chegue a 550, substituiremos na função $f(t) = 550$, logo:

$$f(t) = 400 + 50.log_4\ (t+2) \Rightarrow 550 = 400 + 50.log_4\ (t+2) \Rightarrow 3 = log_4\ (t+2) \Rightarrow t+2 = 4^3 \Rightarrow t = 62$$

Assim segundo a função a empresa atingirá o número de 550 funcionários 62 anos após a sua fundação.

As situações apresentadas anteriormente são apenas alguns exemplos de modelos matemáticos associados aos tipos de funções abordados nesse trabalho. Esses modelos foram formulados para servirem como recurso didático nas aulas de matemática, e por isso geralmente não representam a realidade com um grau de fidelidade adequada para a partir deles tomar decisões ou fazer previsões.

Capítulo 5

A modelagem matemática como estratégia de ensino de funções

As atividades de modelagem matemática descritas nesse capítulo foram desenvolvidas na turma de 1° ano do Curso Técnico em Logística Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Mato Grosso – Campus Primavera do Leste (IFMT/PDL). A turma era composta por 30 alunos, sendo 4 meninos e 26 meninas, a maioria deles oriundos da rede pública municipal e estadual.

Figura 5.1: Turma do Curso Técnico em Logística 2016 IFMT/PDL
Fonte: O Autor, 2016.

Como o conteúdo de funções está presente no currículo dessa turma, surgiu a curiosidade de utilizar a modelagem matemática envolvendo problemas relacionados a área do curso, como uma estratégia de ensino-aprendizagem em sala de aula, objetivando motivar os alunos a partir do processo de modelagem a estudarem os conceitos matemáticos relacionados com funções: afim, quadrática, exponencial e logarítmica.

O Curso Técnico em Logística está diretamente relacionado com as áreas de administração, comércio e economia. O conceito de logística apareceu em meio as atividades de administração de grandes empresas e uma das principais atribuições desse profissional é planejar a movimentação de recursos para que a empresa funcione bem, minimizando custos e maximizando lucros. Consequentemente foi orientado aos alunos que no decorrer do processo de modelagem, na fase de pesquisa, procurassem obter dados que tivessem alguma ligação com essas áreas.

A modelagem matemática foi escolhida por ser uma metodologia condizente com os pensamentos da escola nova, que contrapõe o ensino tradicional. Segundo Saviani (2009, p.42), a escola nova buscou considerar o ensino como um processo de pesquisa, onde as atividades desenvolvidas seguiriam os seguintes passos:

> [...] o ensino seria uma atividade (1° passo) que, suscitando determinado problema (2° passo), provocaria o levantamento de dados (3° passo), a partir dos quais seriam formuladas as hipóteses (4° passo) explicativas do problema em questão, empreendendo alunos e professores, conjuntamente, a experimentação (5° passo), que permitiria confirmar ou rejeitar as hipóteses formuladas. (Saviani, 2009, p.42)

Esses passos são muito semelhantes as fases de modelagem matemática apresentados na figura 3.1 do capítulo 3 desse trabalho, são eles: interação com a situação inicial (problemática), matematização, resolução e interpretação de resultados e validação. Essas fases constituem os procedimentos necessários para a realização das atividades de modelagem descritas na sequência.

Para abordar o ensino de funções através da modelagem matemática foi elaborada uma sequência didática de atividades que foram desenvolvidas pelos alunos em grupos.

Figura 5.2: Grupos realizando as atividades de modelagem
Fonte: O Autor, 2016.

Nessas atividades o aluno parte de uma situação inicial (problema) e deve percorrer um determinado caminho para chegarem a uma situação final, que representa a solução para o problema. Os conceitos matemáticos eram abordados no decorrer desse caminho sempre que os alunos procuravam respostas para os problemas que surgiam e conforme manifestavam algumas dificuldades para a continuação das atividades. A seguir desenvolveremos essa sequência didática conforme realizado pelos alunos em sala de aula.

5.1 Estudando função afim a partir das funções: custo, receita e lucro

Como já foi mencionado anteriormente, o Curso Técnico em Logística está diretamente ligado as áreas de administração e economia, e uma das principais atribuições desse profissional é diminuir custos e aumentar o lucro de uma empresa. Sendo assim uma importante aplicação da matemática, que está relacionada com essas áreas, são as funções: custo, receita e lucro, que na realidade são modelos matemáticos de funções.

Segundo Silva (2016), a função custo está relacionada aos gastos efetuados por uma empresa, indústria ou loja, na produção ou aquisição de algum produto. O custo pode possuir duas partes: uma fixa e outra variável. Então o custo total num determinado período de tempo pode ser obtido através da expressão:

$$C = CF + CV$$

onde: C é o custo total, CF o custo fixo, e CV o custo variável.

Já a receita está relacionada com o faturamento bruto de uma empresa, dependendo do número de unidades vendidas ao preço de mercado, de um determinado produto nesse período de tempo. Podemos obtê-la através da expressão:

$$R = P.X$$

onde: R é a receita, P o preço de mercado, e X é o número de unidades vendidas.

O lucro líquido nesse determinado período de tempo pode ser obtido através da subtração da receita total R pelo custo total C. Portanto:

$$L = R - C$$

onde: L é o lucro líquido, R a receita e C o custo total.

Dando início a primeira atividade de modelagem, a turma constituída por trinta alunos foi subdividida em cinco grupos, e foi proposto aos grupos que realizassem uma pesquisa em empresas, lojas ou indústrias da cidade, com o objetivo de obter dados referentes ao custo fixo mensal dessa empresa, custo variável em função de uma certa quantidade de produção e venda no mês, e o preço de mercado que o produto é comercializado. Essa fase correspondeu a fase de interação dos alunos com os dados do problema.

Após a coleta de dados, os alunos foram questionados em sala de aula sobre qual seria o lucro líquido mensal da empresa (a depender de uma certa quantidade de produção e comercialização) e qual deveria ser a quantidade produzida e comercializada para não haver prejuízo em um determinado mês. Nesse momento definiu-se a problemática e os alunos elaboraram as situações problema descritas no quadro 5.1.

Quadro 5.1: Problemáticas elaboradas pelos alunos

Grupos	Situação inicial
1	A empresa HGL transportes tem um custo fixo mensal estimado em R$ 6.400,00 mensais. Há um custo variável estimado de R$ 90,00 ao mês para cada aluno que a empresa transporta, e é cobrado uma mensalidade de R$ 240,00 de cada aluno transportado. Qual será o custo, receita e lucro dessa empresa em função da quantidade de alunos transportados?
2	O espetinho do Gaúcho localizado no Bairro PVA2 produz e comercializa espetinhos. O custo fixo mensal é de R$ 4.000,00 incluindo energia, produtos para revenda entre outros. Além disso tem um custo variável de R$ 2,00 para cada espetinho produzido. Se o preço de venda de cada espetinho é R$ 4,00 qual será o custo, receita e lucro desse estabelecimento em função da quantidade de espetinhos produzidos e vendidos?
3	Um vendedor de espetinhos tem um custo fixo de R$ 200,00 ao mês e um custo variável de R$ 2,00 por espetinho produzido. Se o preço de venda do espetinho é R$ 5,00 qual será o custo, receita e lucro desse vendedor para x espetinhos produzidos e vendidos em um mês?
4	Uma pequena lanchonete localizada no bairro Buritis, produz e comercializa o Big Homer's, lanche tradicional dessa lanchonete. O custo fixo mensal dessa lanchonete é R$ 15.000,00 onde estão inclusos despesas com água, energia e outros. Além disso, há um custo variável de R$ 16,00 para cada lanche produzido. Se o preço de venda do Big Homer's é R$ 21,00 qual será o custo, receita e lucro dessa lanchonete para x lanches produzidos e vendidos em um mês?
5	Um vendedor de pamonha tem custo fixo mensal de R$ 280,00 e um custo variável de R$ 3,50 para cada pamonha produzida. Se o preço de venda da pamonha é R$ 5,00 qual será o custo, receita e lucro desse vendedor se forem vendidas x pamonhas em um mês?

Fonte: O Autor, 2016.

Para desenvolver as fases seguintes do processo de modelagem, vamos utilizar como referência a situação proposta pelo grupo 5, que inclusive refere-se a dados reais relativos a família de uma das alunas do grupo, que produz e vende pamonhas na feira municipal de Primavera do Leste.

Dando início a fase de matematização, com base nos dados coletados foram determinadas as funções custo, receita e lucro:

- **Função Custo C(x)**

Como vimos anteriormente, o custo total mensal C é soma do custo fixo CF com o custo variável CV, ou seja, sendo $CF = 280$ e $CV = 3,5.x$ (onde x é a quantidade de pamonhas) então:

$$C(x) = 3,5x + 280$$

Esse modelo nos fornece o custo total em função da quantidade x de pamonhas produzidas pelo vendedor.

- **Função Receita R(x)**

O preço de venda de cada pamonha é R$ 5,00. Admitindo que o preço de venda independe de outros fatores, então o modelo matemático que fornecerá a receita (faturamento bruto) desse vendedor em função da quantidade x de pamonhas produzidas e vendidas, é:

$$R(x) = 5x$$

- **Função Lucro L(x)**

O lucro líquido mensal $L(x)$ será uma função afim obtida pela diferença entre a função receita $R(x)$ e a função custo $C(x)$, assim:

$$L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(x) = 5x - (3,5x + 280) \Rightarrow L(x) = 1,5x - 280$$

O modelo acima fornecerá, o lucro líquido mensal em função da quantidade (x) de pamonhas produzidas e comercializadas em um determinado mês.

Para testar os modelos acima os alunos construíram uma tabela onde atribuíram diferentes valores a quantidade de pamonha produzida e comercializada em um determinado mês, obtendo para cada um desses valores o custo, receita e lucro através dos modelos matemáticos elaborados.

Tabela 5.1: Custo, receita e lucro em reais

Quant. de pamonhas	C(x)	R(x)	L(x)
0	280	0	-280
50	455	250	-205
100	630	500	-130
150	805	750	- 55
200	980	1000	20
250	1055	1250	95
300	1330	1500	170

Fonte: O Autor, 2016.

Além disso para finalizar a situação foi proposto uma lista de atividades com o objetivo de aprofundar os conceitos envolvendo função afim. Em uma dessas atividades os alunos construíram em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções custo C(x) e receita R(x) com base na tabela 5.1, e aí observaram que dependendo da quantidade(x) de unidades produzidas e comercializadas o vendedor terá prejuízo ou lucro em um determinado mês.

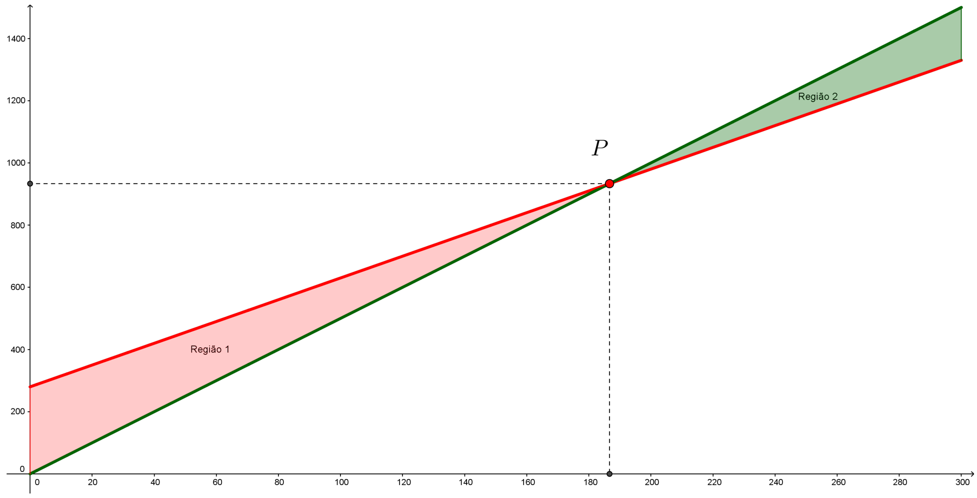

Figura 5.3: Gráfico de $C(x)$ e $R(x)$
Fonte: O Autor, 2016.

No gráfico da figura 5.3 verifica-se que as retas se interceptam no ponto $P = \left(\dfrac{560}{3}, \dfrac{2800}{3}\right)$, chamado de ponto crítico, pois em P não haverá prejuízo nem lucro, já que a receita será suficiente para igualar o custo total.

Observa-se ainda, que se tomarmos qualquer ponto da região 1 do gráfico, então $C(x) > R(x)$, logo se em um determinado mês forem produzidas menos de 187 pamonhas, haverá prejuízo. Se tomar um ponto da região 2 percebe-se que $R(x) > C(x)$, ou seja, se forem produzidas e comercializadas 187 pamonhas ou mais, o vendedor terá algum lucro.

Através dessa atividade de modelagem foi possível abordar não apenas conceitos sobre função afim, como também proporcionalidade, sistemas de equação linear e intersecção de retas.

5.2 A função quadrática e a receita máxima obtida

A maximização nos lucros seja a curto ou longo prazo é um dos principais objetivos de qualquer empresa ou profissional liberal. E para que isso aconteça vale qualquer investimento ou qualificação. Empresas que investem pesado nesse objetivo veem num determinado período de tempo a compensação do investimento realizado.

No item anterior vimos o que é custo, receita e lucro, com base em modelos onde o preço de venda é fixo, ou seja, não varia de acordo com a demanda de mercado de um determinado produto. Vimos que o lucro é a diferença entre a receita total e o custo total. Por consequência para maximizar esse lucro deve-se procurar um nível de produção em que essa diferença seja máxima.

Na atividade de modelagem a seguir vamos considerar um novo modelo em que o preço de venda do produto comercializado varia de acordo com a quantidade desse produto que será comercializado em um determinado intervalo de tempo.

Para essa atividade de modelagem, os alunos utilizaram o problema formulado na seção 5.1, porém foram acrescentados dados hipotéticos à situação para definir uma nova problemática. Continuaremos utilizando como exemplo o problema do vendedor de pamonhas para descrever as atividades realizadas no decorrer do processo. Vamos ao problema: "supondo que em média sejam vendidas 500 pamonhas por mês a um preço de R$ 5,00 e que o vendedor tenha observado que toda vez que baixava o preço da pamonha em R$ 0,20 (limitando o desconto em R$ 1,00) vendia 24 pamonhas a mais. Nessas condições qual deverá ser o preço de venda para que a receita obtida seja máxima?"

Dando início a fase de interpretação e matematização do problema, organizou-se em uma tabela algumas das correspondências entre o preço de venda (p) em reais e o número de pamonhas(x) vendidas no mês. Conforme ilustrado na tabela abaixo:

Tabela 5.2: Relação entre p e x

Preço un. em R$ (p)	N° de pamonhas vend. (x)
5	500
4,8	524
4,6	548
4,4	572
4,2	596
4	620

Fonte: O Autor, 2016.

Nessas condições, analisando a tabela percebe-se que existe uma relação próxima de linearidade entre p e x. Então essa relação pode ser escrita através de uma função afim onde o preço de venda depende da quantidade de pamonhas vendidas, logo:

$$p(x) = ax + b$$

Para encontrar os valores de a e b e determinarmos qual lei relaciona essas grandezas, foram escolhidos dois valores da tabela para x e p e substituído na equação obteve-se um sistema linear $2X2$:

$$\begin{cases} 5 = 500a + b \\ 4 = 620a + b \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema encontramos que $a = \dfrac{-1}{120}$ e $b = \dfrac{55}{6}$, logo a função afim que relaciona o número de pamonhas vendidas com o preço de venda é:

$$\text{p(x)=} \frac{-x}{120} + \frac{55}{6}$$

A receita conforme definimos na seção anterior, pode ser obtida através do produto entre o preço unitário (p) e o número de unidades vendidas (x). Logo:

$$R(x) = p.x \Rightarrow R(x) = x.\left(\frac{-x}{120} + \frac{55}{6}\right) \Rightarrow R(x) = \frac{-1}{120}x^2 + \frac{55}{6}x$$

Como $R(x)$ é uma função quadrática onde a<0, seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo conforme a figura 5.4:

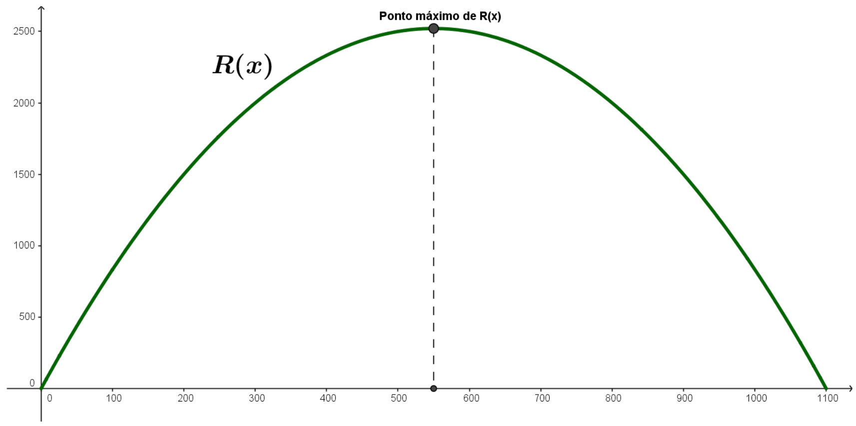

Figura 5.4: Receita máxima
Fonte: O Autor, 2016.

Desse modo a receita será máxima no ponto vértice de R(x). Como definimos no capítulo 4, $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Mas o que nos interessa é o número x de pamonhas vendidas quando a receita for máxima, portanto:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-\frac{55}{6}}{-\frac{2}{120}} \Rightarrow x = 550$$

Se a receita será máxima quando forem vendidas 550 pamonhas, então como $p(x) = -\dfrac{x}{120} + \dfrac{55}{6}$, o preço que o vendedor deverá cobrar para que obtenha uma receita máxima será:

$$p(550) = -\frac{550}{120} + \frac{55}{6} = \frac{550}{120} \cong 4,58$$

Para testar o resultado encontrado os alunos completaram a tabela 5.2 incluindo uma nova coluna com a receita obtida, podendo assim verificar que a maior receita obtida corresponde ao vértice da função quadrática $R(x)$.

Nessa atividade de modelagem foram abordados diversos conceitos relacionados a função quadrática, como gráfico, concavidade da parábola, vértice, ponto de máximo e mínimo. Além de sistemas de equações lineares e função afim.

5.3 Função exponencial e logarítmica, e os rendimentos da caderneta de poupança

A caderneta de poupança (ou poupança como é popularmente conhecida) é dos tipos de investimento mais procurados pela população física ou jurídica em nosso país. Isso porque ela oferece menos risco de perda. Segundo o Banco Central, os valores aplicados em conta poupança sofrem variações mensais de acordo com a soma da remuneração básica dada pela taxa referencial (TR) e a remuneração adicional que é calculada com base na taxa Selic, sendo que essas incidem sobre o menor saldo de cada período de rendimento.

Para a atividade de modelagem proposta a seguir, os grupos realizaram uma pesquisa nos Bancos de Primavera do Leste, coletando informações sobre o rendimento da caderneta de poupança. Em sala de aula foi solicitado aos alunos que usando a função lucro $L(x)$ da seção 5.1, substituíssem a variável x por um valor em que $L(x)$>0, e aí considerando que esse lucro seria aplicado na poupança, determinou-se a problemática de cada grupo. Continuaremos utilizando como exemplo a situação ilustrada pelo grupo 5: Considerando que o vendedor de pamonhas obteve um lucro total de R$ 920,00 em um mês, e supondo que ele aplicou todo esse dinheiro na caderneta de poupança com rendimento aproximado de 0,6% ao mês. Qual será o capital em 12 meses de aplicação? E em 5 anos? E após t meses?

Segundo Iezzi and Dolce (2010, p.231), "o mecanismo pelo qual essa aplicação irá crescer, mês a mês, é conhecido como regime de capitalização acumulada ou regime de juros compostos". Nesse sistema de capitalização ao final de cada período (mês) a taxa de juros incide sobre o montante do período anterior (capital + juros), formando um novo montante. Assim sendo o valor aplicado pelo vendedor de pamonhas formará um novo montante M (capital aplicado + rendimentos) a cada novo período de tempo t (em meses) que o capital ficar aplicado. Vamos determinar alguns desses montantes para os primeiros meses de aplicação:

- Ao final do primeiro mês de aplicação a taxa de juros (0,6% = 0,006) recai sobre o capital inicial investido (R$ 920,00) e os juros obtidos são incorporados ao capital, produzindo o primeiro montante: $M_1 = 920 + 920.(0,006) = 920.(1 + 0,006) = 920.(1,006) = 925,52$.

- Ao final do segundo mês a taxa de juros recai sobre o primeiro montante M_1 e os juros são incorporados a ele, produzindo o segundo montante: $M_2 = 925,52 + 925,52.(0,006) = 920.(1,006) + 920.(1,006).(0,006) = 920.(1,006).(1 + 0,006) = 920.(1,006)^2 = 931,07$

- Ao final do terceiro mês a taxa de juros recai sobre o segundo montante M_2 e os juros são incorporados a ele produzindo o terceiro montante: $M_3 = 931,07 + 931,07.(0,006) = 920.(1,006)^2 + 920.(1,006)^2.(0,006) = 920.(1,006)^2.(1 + 0,006) = 920.(1,006)^3 \cong 936,66$

Podemos observar nos valores acima que o montante obtido após um período de t meses, será igual ao produto do capital inicial aplicado com o valor $(1 + taxa)^t$. Assim sendo após t meses o montante a ser resgatado nessa aplicação pode ser obtido através da função exponencial:

$$M(t) = 920.(1,006)^t$$

De posse do modelo matemático que fornece a quantidade de dinheiro a ser resgatado pelo vendedor após um determinado período de tempo que esse fique aplicado na caderneta de poupança, os alunos construíram uma tabela com alguns dos possíveis valores do resgate e posteriormente construíram o gráfico de $M(t)$.

Tabela 5.3: Montante gerado pela aplicação

Tempo em meses (t)	Montante em reais (M)
0	$920.(1,006)^{0} = 920,00$
12	$920.(1,006)^{12} = 988,47$
24	$920.(1,006)^{24} = 1062,04$
36	$920.(1,006)^{36} = 1141,08$
48	$920.(1,006)^{48} = 1226,00$
60	$920.(1,006)^{60} = 1317,25$
72	$920.(1,006)^{72} = 1415,28$

Fonte: O Autor, 2016.

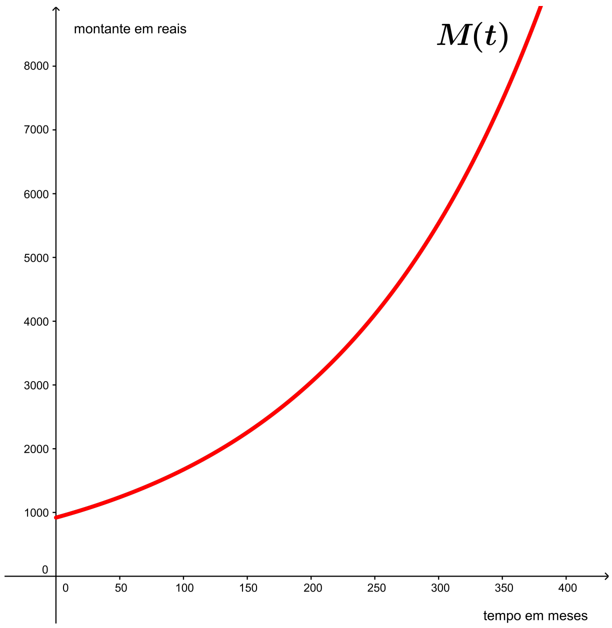

Figura 5.5: Gráfico de $M(t)$
Fonte: O Autor, 2016.

Assim sendo respondendo o problema inicial, no caso desse vendedor de pamonhas que aplicou o lucro de um mês na poupança (R$ 920,00), se ele deixar esse dinheiro aplicado, ao final de 12 meses terá R$ 988,47. Se o valor permanecer aplicado por 5 anos (60 meses), ao final terá R$ 1317,25.

Na sequência da atividade foi proposta aos grupos a seguinte problemática: Considerando a situação anterior, em quantos meses o dinheiro aplicado dobrará seu valor? E para triplicar serão necessários quantos meses? E para que aumente k vezes qual é o tempo necessário?

Para resolver a primeira parte do problema os grupos substituíram no modelo exponencial obtido o montante pelo dobro do capital inicial investido, e resolvendo a equação exponencial resultante obtiveram o tempo procurado. No caso do vendedor de pamonhas, o capital inicial investido foi R$ 920,00. Como queremos que ele dobre, então o montante será:

$$M = 920.2 \Rightarrow M = 1840$$

Substituindo em $M(t) = 920.(1,006)^t$ teremos que:

$$1840 = 920.(1,006)^t \Rightarrow 2 = 1,006^t \Rightarrow log_{1,006}\ 2 = log_{1,006}\ 1,006^t \Rightarrow log_{1,006}\ 2 = t \Rightarrow t = \frac{log\ 2}{log\ 1,006} \Rightarrow t \cong 115,9$$

Portanto considerando que a taxa de juros seja fixa, para que o valor aplicado pelo vendedor de pamonhas dobre, serão necessários 116 meses de aplicação. Para acharmos o tempo necessário que o dinheiro deve ficar investido para que renda k vezes o capital investido basta substituir o montante pelo produto entre k e capital aplicado. Logo, no exemplo do vendedor de pamonhas temos que:

$$M = 920.k$$

Substituindo esse valor na expressão $M(t) = 920.(1,006)^t$ resulta em:

$$920.k = 920.(1,006)^t \Rightarrow k = 1,006^t$$

Aplicando logaritmo na base 1,006 em ambos os lados da expressão teremos:

$$log_{1,006}\ k = log_{1,006}\ 1,006^t \Rightarrow t = log_{1,006}k$$

Assim a função logarítmica $t(k) = log_{1,006}k$ fornece o tempo necessário que se deve esperar para que o capital inicial aplicado renda k vezes o seu valor. Após obter o modelo os alunos criaram uma tabela, e construíram o gráfico de t em função de k, e puderam realizar analises verificando o tempo necessário para que o capital inicial investido multiplique algumas vezes (para $k \geq 2$).

Tabela 5.4: Tempo necessário para que o capital multiplique k vezes

N° de vezes que o capital irá multiplicar ($k \geq 2$)	Tempo de espera em meses (t)
2	$log_{1,006}2 \cong 116$
3	$log_{1,006}3 \cong 184$
4	$log_{1,006}4 \cong 232$
5	$log_{1,006}5 \cong 270$
6	$log_{1,006}6 \cong 299$

Fonte: O Autor, 2016.

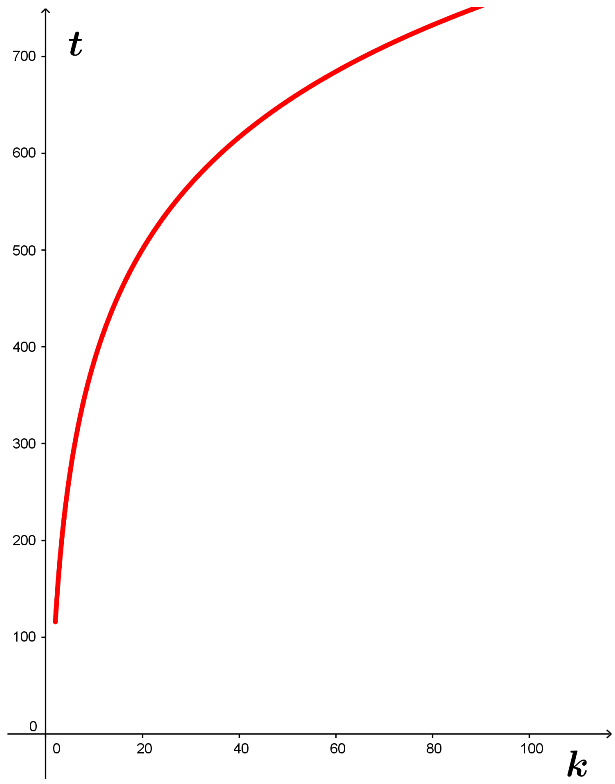

Figura 5.6: Gráfico de t em função de k
Fonte: O Autor (2016)

Nessa atividade de modelagem além dos conceitos de função exponencial e logarítmica, foram abordados no decorrer das aulas conceitos sobre juros compostos, potenciação, equação exponencial e logaritmos.

Assim finalizamos essa sequência didática que objetivou o ensino de funções, e foi formulada a partir de dados coletados pelos alunos, sendo que a maioria das atividades desenvolvidas foram em grupo, esses são alguns dos fatores que tornam esse tipo de atividade diferente das aulas tradicionais de matemática, pois proporciona o aprendizado através da interação dos conceitos com a realidade dos alunos. Convém mais uma vez ressaltar que a maioria dos conteúdos previstos para essa turma no ano letivo em curso, foram abrangidos nessas atividades desenvolvidas, não deixando de lado definições e conceitos mais formais, pois isso também é muito importante para a formação dos estudantes.

Capítulo 6

Resultados obtidos

Um dos objetivos desse trabalho de pesquisa conforme já descrito, é comparar os resultados obtidos no processo de ensino-aprendizagem através de modelagem matemática e pelo método tradicional de ensino. Para coletar dados que permitissem fazer essa análise, aulas envolvendo o conteúdo de funções foram desenvolvidas com base nessas duas metodologias de ensino, seguindo o embasamento teórico descrito nos primeiros capítulos. No decorrer desse processo avaliações teóricas foram aplicadas com a intenção de verificar a aprendizagem dos alunos em relação aos conceitos que eram abordados, os resultados dessas avaliações serão apresentados a seguir. Além disso ao final da sequência didática apresentada no capítulo anterior em que foram propostas atividades de modelagem matemática, foi explicado aos alunos que isso tratava-se de uma outra metodologia de ensino, diferente do método tradicional que era o que vinha sendo utilizado em nossas aulas. Foi solicitado então que eles respondessem um questionário avaliando as atividades desenvolvidas e comparando essa metodologia com o método tradicional de ensino. Além disso esse questionário continha questões que objetivavam saber se os alunos gostavam de estudar matemática, quais são as maiores dificuldades que eles encontram nessa disciplina, e como eram abordados os conteúdos no ensino fundamental pelos professores deles.

Apesar da turma ser composta por 30 alunos, no momento em que foi aplicado o questionário, 4 deles não estavam presentes na sala de aula, portanto 26 alunos responderam às perguntas. A seguir apresentaremos através de quadros os resultados obtidos com esse questionário e discutiremos as respostas dos alunos.

Quadro 6.1: Respostas dos alunos para a pergunta N° 1

Pergunta 1: Você gosta de estudar matemática? Justifique sua resposta	
Sim 17 responderam	**Não** 9 responderram
Justificativas mais citadas por quem respondeu SIM	**Justificativas mais citadas por quem respondeu NÃO**
Porque aprender matemática é essencial para o meu desenvolvimento, pois ela está relacionada com diversas áreas do conhecimento, além de estar presente em diversas atividades do dia-a-dia. (11 respostas)	Tenho dificuldade em entender o conteúdo e isso acaba influenciando. (4 respostas)
Matemática dentre as outras matérias é a que tenho mais facilidade em absorver os conceitos e aplica-los no meu cotidiano. (3 respostas)	Tenho dificuldades em aprender, além disso não tenho muita dedicação e vontade. (2 repostas)
Desde o início sempre tive facilidade em aprender matemática, tenho alguma dificuldade em relacionar a matemática com outras áreas do conhecimento. (2 respostas)	Matemática é uma disciplina muito complexa. (1 resposta)
Apesar de ter algumas dificuldades estou começando a entender melhor os conceitos, e a matemática é admirável por possuir vários caminhos para se chegar a um resultado final, além de ser uma ciência que constantemente aparece em nosso cotidiano. (1 resposta)	Tenho enorme dificuldade em assimilar o conteúdo, realizar os cálculos e concentrar nas aulas. (2 respostas)

Fonte: O Autor, 2016.

Nessa pergunta inicial o objetivo era saber qual é o sentimento dos alunos em relação a disciplina de matemática, uma vez que isso pode ser considerado um fator relevante para o desempenho deles nas aulas. Dos alunos que responderam o questionário 65,38% disseram gostar de estudar essa disciplina, e dentre as justificativas apresentadas por eles destaca-se: o fato de terem facilidade em compreender os conceitos, a importância que a matemática tem em relação a outras áreas do conhecimento, e a aplicabilidade dela no dia-a-dia. Já 34,62% dos alunos manifestaram não gostar da disciplina, e atribuíram como justificativa para a resposta o fato de possuírem muita dificuldade em entender e assimilar o conteúdo, além da disciplina ser complexa, e para alguns faltar interesse e vontade em estudar.

Com isso observa-se que há um número considerável de alunos que gostam da disciplina e portanto estão dispostos a estudar e aprender matemática, e para esses percebe-se pelas respostas que existe uma preocupação em aprender os conceitos e conseguir relacionar a matemática com outras áreas aplicando os conceitos em situações do cotidiano. Enquanto que para um grupo menor que diz ter dificuldades e não gostar muito da disciplina, o foco é diferente cabendo ao professor buscar novas metodologias que visem mudar essa realidade.

Quadro 6.2: Respostas dos alunos para a pergunta N° 2

Pergunta 2: Durante a sua trajetória escolar, na maioria das vezes nas aulas de matemática os conteúdos eram abordados por meio de pesquisa e interpretação de situações reais do cotidiano?		
Sim, frequentemente	**As vezes**	**Nunca**
Não houve resposta	12 responderam	14 responderam

Fonte: O Autor, 2016.

A segunda pergunta tinha por objetivo verificar se nas aulas de matemática dos anos anteriores os conteúdos eram ensinados de forma contextualizada, por meio de situações problema que relacionavam a teoria com o dia-a-dia do aluno. Nenhum dos alunos respondeu que isso era feito frequentemente, 12 deles (aproximadamente 46,15%) disseram que esse tipo de aula acontecia as vezes, e 14 alunos (53,85%) responderam que nunca acontecia.

Esses dados ajudam a reforçar as teorias apresentadas nos capítulos anteriores, em que diversos autores afirmam que a maioria das aulas de matemática em nossas escolas ainda acontecem de forma tradicional. Lembrando que os alunos dessa turma vem de diferentes "esferas educacionais"(municipal, estadual e particular), o que ajuda a generalizar esse conceito para todas as redes de ensino.

Quadro 6.3: Respostas dos alunos para a pergunta N° 3

Pergunta 3: Descreva como eram as aulas na maioria das vezes
Principais respostas apresentadas pelos alunos:
O Professor iniciava a aula corrigindo os exercícios da aula anterior, e ao passar um novo conteúdo copiava no quadro e explicava usando exemplos do livro, ou as vezes do nosso dia-dia, para demonstrar que a matemática não é somente abstrata. (13 respostas)
Na maioria das vezes era utilizado o método tradicional, o professor explicava, os alunos faziam perguntas e logo após eram realizados exercícios para fixar os conceitos. (7 respostas)
Na maioria das vezes era utilizado o método tradicional, as aulas eram pouco interessantes. (2 respostas)
As aulas eram boas, muitos trabalhos realizados, tarefas para assimilar o conteúdo. (2 respostas)
Os conteúdos eram explicados e depois passava exercícios do livro, geralmente os mais fáceis, os mais difíceis eram deixados sem fazer. (1 resposta)
Muitas vezes o professor trabalhava com resolução de problemas, dependendo do conteúdo fazíamos pesquisa aplicada. (1 resposta)

Fonte: O Autor, 2016.

Através da terceira questão podemos ter uma ideia (segundo os alunos) de como eram ministradas as aulas de matemática para eles no ensino fundamental. Na realidade ela complementa a segunda questão, e deixa claro que a maior parte dessas aulas eram baseadas no método tradicional de ensino, onde a metodologia gira somente em torno de exposições teóricas, deduções de fórmulas e teoremas, resolução de exemplos e exercícios de fixação, dos quais o aluno acaba memorizando através de repetições. Na aula seguinte o professor começa corrigindo alguns exercícios para recapitular o conteúdo e continua a ementa da disciplina.

Quadro 6.4: Respostas dos alunos para a pergunta N° 4

Pergunta 4: Em relação aos conteúdos de matemática abordados em sala de aula, o que você tem mais dificuldade?			
Assimilar o conteúdo	**Interpretar as atividades**	**Efetuar cálculos**	**Relacionar a teoria com a prática**
6 assinalaram	16 assinalaram	5 assinalaram	13 assinalaram

Fonte: O Autor, 2016.

Através dessa questão procuramos descobrir quais dificuldades os alunos mais sentem ao estudar matemática. Das quatro opções dadas aos alunos (que são as mais citadas em geral), duas delas se destacaram sendo as mais assinaladas: interpretar as atividades (61,53% dos alunos) e relacionar teoria com a prática (50% dos alunos).

Embora grande parte desses discentes apresentem dificuldades na hora de efetuar cálculos, essa não foi uma das opções mais assinaladas pelo grupo. Isso por que segundo eles as maiores dificuldades estão na hora de interpretar atividades contextualizadas e relacionar a teoria dos conceitos estudados com a prática. Conforme mencionado nesse trabalho (na parte teórica relativa ao método tradicional de ensino), essas dificuldades são reflexos causados por essa metodologia, que pouco incentiva os alunos a pesquisar e criar elos entre teoria e prática.

Quadro 6.5: Respostas dos alunos para a pergunta N° 5

<table>
<tr><td colspan="4">Pergunta 5: Com qual dos métodos de ensino trabalhados você se identificou mais? Porquê?</td></tr>
<tr><td>Tradicional</td><td>6 responderam</td><td>Modelagem</td><td>20 responderram</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificativas mais citadas por quem respondeu TRADICIONAL</td><td colspan="2">Justificativas mais citadas por quem respondeu MODELAGEM</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Por ter mais costume com esse método absorvo melhor os conteúdos. (4 respostas)</td><td colspan="2">Porque podemos usar dados reais do nosso cotidiano, além disso esse método é mais dinâmico proporcionando uma maior interação entre os alunos. (7 respostas)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Por que consegui entender mais o conteúdo por essa metodologia, pois mesmo que o conteúdo seja desconhecido relacionamos ele a algo conhecido do nosso dia-a-dia. (2 respostas)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Pois não nos sobrecarrega com tantas informações de uma só vez, facilitando assim o aprendizado. (1 resposta)</td><td colspan="2">Gostei mais do ensino através de modelagem pelo fato de envolver os alunos com pesquisa envolvendo fatos reais. (2 respostas)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acredito que quando trabalhamos com modelagem matemática, por envolver situações do cotidiano o aluno aprende melhor o conteúdo. (1 resposta)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fica mais fácil de entender o conteúdo explicado, além de proporcionar que os alunos vão a campo pesquisar e coletar dados. (1 resposta)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Porque para aprender um conteúdo me identifico mais com o método tradicional. (1 resposta)</td><td colspan="2">Porque apresenta interpretações de situações reais, e isso é muito bacana para que possamos ver as diversas aplicações da matemática e ter uma maior vontade de estudar. (1 resposta)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Porque facilitou a compreensão dos conteúdos. (1 resposta)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Porque é uma forma mais dinâmica e prática de se aprender matemática. (1 resposta)</td></tr>
</table>

Fonte: O Autor, 2016.

A quinta pergunta do questionário tem como objetivo identificar com qual dos métodos trabalhos nessa pesquisa o aluno se identificou mais: o método tradicional de ensino, ou a modelagem matemática? Dos alunos que responderam ao questionário 76,92% deles disseram ter se identificado mais com a modelagem matemática, pois essa metodologia é mais dinâmica, usa dados reais do dia-a-dia, chama mais a atenção na hora das explicações, proporciona interatividade entre os alunos, facilita a compreensão dos conteúdos e possibilita trabalhar com pesquisa envolvendo situações do cotidiano. Já para um grupo menor de estudantes cerca 23,08%, o método tradicional de ensino é melhor, pois segundo eles, já estão acostumados e por isso absorvem melhor os conteúdos, além disso foi citado que essa metodologia não sobrecarrega muito os alunos com várias informações ao mesmo tempo.

Com base nessas respostas podemos afirmar que a metodologia adotada nesse trabalho (modelagem matemática) foi bem aceita pelos alunos dessa turma, haja visto que a maioria deles nunca haviam tido contato com aulas de matemática baseadas nessa metodologia, e já fazendo uma primeira comparação entre o ensino através de modelagem matemática e pelo método tradicional de ensino, podemos observar pelas respostas dessa pergunta que há expectativas por parte da maioria dos alunos de que essa metodologia seja mais utilizada nas aulas de matemática.

Quadro 6.6: Respostas dos alunos para a pergunta N° 6

Pergunta 6: Para os próximos conteúdos a serem estudados você escolheria qual método?			
Tradicional	**Depende do Conteúdo**	**Modelagem**	**Nenhum**
6 respostas	4 respostas	16 respostas	Não houve respostas

Fonte: O Autor, 2016.

Com a última pergunta do questionário queríamos confirmar se realmente os alunos gostariam de ter novas experiências com aulas de matemática que utilizem a modelagem como metodologia de ensino, e para comprovar as respostas da questão anterior a maioria dos alunos (61,54%) disseram que entre essa metodologia e o método tradicional escolheriam a modelagem matemática. Houve ainda uma porcentagem pequena de alunos (15,38%) que disseram que a escolha entre um dos dois métodos dependeria do conteúdo a ser estudado. E para 6 alunos (23,08% do total) o método tradicional de ensino seria a metodologia escolhida.

Embora haja um pequeno grupo de alunos que tenha assinalado preferir o método tradicional de ensino, esse grupo participou e envolveu-se com as atividades propostas nas aulas em que foi utilizada a modelagem matemática como metodologia, alcançando juntamente com os demais alunos da sala resultados satisfatórios. Esses resultados puderam ser comprovados através das notas obtidas em uma avaliação que foi aplicada após a realização das atividades de modelagem (ver apêndice 2), e relacionou os conceitos matemáticos abordados no decorrer da elaboração dos modelos matemáticos, onde destacamos os conceitos de função afim, quadrática, exponencial e logarítmica, com situações problema do cotidiano. Os resultados obtidos pelos alunos nessa avaliação estão descritos na tabela a seguir.

Tabela 6.1: Notas obtidas pelos alunos (modelagem)

Nota	**Número de alunos**
10	03
8,8	06
7,5	11
6,3	07
5,0	01
3,8	02

Fonte: O Autor, 2016.

Já nas aulas em que foi utilizado o método tradicional de ensino como metodologia principal, não havia muita interação entre os alunos, mesmo quando era proposto que as atividades acontecessem coletivamente. Além disso percebeu-se que vários alunos não acompanhavam as explicações o tempo todo, muitas vezes dispersavam no decorrer da aula e aí na hora de fazer as atividades não conseguiam e desistiam já nos primeiros obstáculos encontrados. Ao final de cada etapa em que os conteúdos eram ensinados através da metodologia tradicional, também era realizada uma avaliação objetiva para verificar a aprendizagem dos alunos. Num total foram realizadas 3 avaliações, a primeira envolvendo o conteúdo de função afim, a segunda envolvendo função quadrática e a terceira envolvendo função exponencial e logarítmica. Na tabela 6.2 encontra-se um resumo das médias obtidas pelos discentes nessas avaliações.

Tabela 6.2: Notas obtidas pelos alunos (método tradicional)

Nota	**Número de alunos**
10	01
9,7	01
8,8	01
7,8	01
6,8	02
6,2	06
5,5	04
5,3	05
3,2	06
1,8	03

Fonte: O Autor, 2016.

Analisando os dados, na avaliação realizada após a modelagem matemática ser utilizada como metodologia de ensino (tabela 6.1) tivemos 27 alunos que conseguiram uma nota superior à média adotada pela instituição que é de 6,0 pontos (representando 90% da turma). Nessa avaliação somente 3 alunos (que representam 10% da turma) tiveram um desempenho abaixo da média. Já em relação as notas das avaliações realizadas após os conteúdos serem abordados através do método tradicional de ensino (tabela 6.2) podemos perceber que apenas 12 alunos tiveram desempenho acima da média (cerca de 40% da turma), enquanto 18 alunos (representando 60% da turma) ficaram com notas abaixo da média da instituição.

Além disso a média aritmética da turma nas avaliações seguintes as aulas que utilizaram o método tradicional de ensino como metodologia foi de aproximadamente 5,3 pontos. Enquanto na avaliação posterior as aulas em que a modelagem foi a metodologia utilizada, a média da turma foi 7,4 pontos.

Considerações finais

.

O desenvolvimento dessa pesquisa possibilitou que fosse realizada análise comparativa entre os resultados obtidos nas aulas de matemática de uma determinada turma utilizando duas metodologias de ensino: o método tradicional e a modelagem matemática. Além disso apresenta como proposta para o ensino de funções, uma sequência didática elaborada a partir de dados coletados pelos alunos e que utiliza a modelagem matemática como método de trabalho.

O ensino tradicional e a modelagem matemática possuem aspectos comuns, e talvez o maior deles seja o de projetar a educação como um processo de desenvolvimento pessoal. Porém no ensino tradicional o aluno é um coadjuvante desse processo, enquanto na modelagem matemática ele torna-se protagonista da sua aprendizagem, tendo a oportunidade de desenvolver habilidades e competências que não são alcançadas quando é utilizado o método tradicional, como por exemplo realizar pesquisas no seu cotidiano, trabalhar em grupo e atribuir um significado concreto aos conceitos aprendidos.

Ao ministrar-se aulas do mesmo conteúdo utilizando duas metodologias de ensino praticamente opostas, para uma turma de 30 alunos do curso Técnico em Logística integrado ao ensino médio no IFMT/Primavera do Leste, verificou-se que a maior parte dos alunos tiveram um melhor desempenho nas aulas em que a modelagem matemática foi a estratégia de ensino adotada, apesar de alguns ainda preferirem o ensino tradicional, como mostram os quadros 6.1 à 6.6. Evidenciou-se que o aproveitamento dos alunos nas avaliações aplicadas no decorrer das aulas, se mostrou mais satisfatório após serem realizadas as atividades propostas na sequência didática do capítulo 5, o que nos permite concluir que os objetivos desse trabalho foram alcançados e que, portanto, a modelagem matemática pode ser uma metodologia eficaz no ensino de funções, principalmente ao introduzir ou finalizar os conteúdos, pois ela proporciona ao professor contextualizar os conceitos despertando o interesse e facilitando ao aluno a compreensão.

Porém não convém substituir totalmente as aulas tradicionais por essa metodologia, pois o método tradicional conforme citado nessa pesquisa também caracteriza-se como um método científico de ensino, e dependendo do conteúdo, da turma e do tipo de aula, pode também ser muito útil no processo ensino-aprendizagem. O que defende-se nesse trabalho é que esse método não seja o único ou o mais utilizado pelos professores de matemática durante suas aulas. Isto posto, o grande desafio é procurar meios para tornar nossas aulas mais atrativas e que estimulem o interesse e a criatividade dos alunos, uma vez que estamos em tempos onde desenvolver-se cognitivamente é uma demanda frente aos avanços tecnológicos que surgem. Por isso é necessária uma renovação na forma de ensinar, mas sem se desfazer do passado e principalmente das contribuições positivas que as teorias educacionais nos trouxeram.

Embora os dados obtidos nessa pesquisa indiquem êxito em relação aos objetivos propostos, há que se reforçar que isso sinaliza que mais experiências como essa devem acontecer para que se possa de fato generalizar algo. Assim espera-se que esse trabalho motive mais professores a utilizar a modelagem matemática como estratégia de ensino e comparem os resultados obtidos com os das aulas tradicionais. Pois dada a importância do assunto é necessário o desenvolvimento de mais pesquisas como essa em outras escolas distribuídas por todas as redes de ensino do nosso país.

Nesse sentido a modelagem matemática é uma metodologia de ensino eficaz no ensino de funções e pode trazer resultados mais satisfatórios que os alcançados pelo método tradicional de ensino, por aproximar a matemática de outras áreas, despertar o interesse pela aplicação dos conceitos, estimular a criatividade e desenvolver habilidades em resolver problemas.

Referências Bibliográficas

Almeida, L. W., Silva, K. P. d., e Vertuan, R. E. (2012). Modelagem matemática na educação básica. *São Paulo: Contexto*.

Barbosa, J. C. (2001). Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. *Reunião anual da ANPED*, 24(7):1–15.

Barbosa, J. C. (2009). Modelagem e modelos matemáticos na educação científica. *Alexandria: Revista de Educaçao em Ciencia e Tecnologia*, 2(2):69–85.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto.

Bassanezi, R. C. (2015). Modelagem matemática: teoria e prática. *São Paulo: Contexto*.

Biembengut, M. S. e Hein, N. (2002). *Modelagem matemática no ensino*. Editora Contexto.

Brasil, M. (1999). *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio*. MEC,SEB.

Brasil, M. (2006). Orientações curriculares para o ensino médio. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEB*.

Cardoso, F. H. (2015). Utilização do software freemat no ensino de: funções, matrizes e sistemas lineares. *Barra do Garças: UFMT. Dissertação (Mestrado em Matemática)*, PROFMAT.

Dambrosio, B. S. (1989). Como ensinar matemática hoje. *Temas e Debates. SBEM. Ano II*, 2:15–19.

Fortes, E. V. e Oliveira, A. M. (2014). O uso de modelagem matemática no ensino de funções nas séries finais do ensino fundamental: Um estudo de caso. *Itinerarius Reflectionis*, 9(2).

Gadotti, M. (1996). História das idéias pedagógicas. *São Paulo: Ática, 8ª edição.*

Houaiss, A. (2001). *Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa.* Ed. Objetiva.

Iezzi, G. e Dolce, O. (2012). Matemática ciência e aplicações. *São Paulo: Saraiva*, 1.

Leão, D. M. M. (1999). Paradigmas contemporâneos de educação: escola tradicional e escola construtivista. *Cadernos de pesquisa*, 107:187–206.

Leithold, L. (2001). *Matemática aplicada à economia e administração.* Harbra.

Lima, E. L. (2013). *Números e funções reais.* Sociedade Brasileira de Matemática.

Lima, M. C. M. (2016). Função exponencial natural: uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas. *Rio de Janeiro. UNIRIO. Dissertação (Mestrado em Matemática)*, PROFMAT.

Oliveira, B. A. e Duarte, N. (1985). *Socialização do saber escolar*, volume 18. Cortez Editora.

Prado, I., Farha, V., e Laranjeira, M. (1997). Parâmetros curriculares nacionais matemática. *Secretaria de Educação Fundamental/MEC*, página 142.

Santos, D. B. M. (2016). Um panorama de pesquisas sobre o uso da modelagem matemática no ensino médio: 2010 a 2014.

Saviani, D. (2008). *Escola E Democracia-Comemorativa.* Autores associados.

Silva, J. A. F. (2005). Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem na matemática: algumas considerações. *Artigo) Universidade Católica de Brasılia–UCB. Brasılia–DF.*

Silva, M. H. M. e Rezende, W. M. (1999). Análise histórica do conceito de função. *Caderno Dá Licença. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense*, 2:28–33.

Silva, T. M. (2014). Resolução de problemas de otimização: uma ferramenta na sala de aula. *Barra do Garças: UFMT. Dissertação (Mestrado em Matemática)*, PROFMAT.

Apêndice

.

A.1 Questionário respondido ao final da atividade de modelagem

QUESTIONÁRIO

Prezado(a) aluno(a), este questionário visa coletar informações para a pesquisa referente ao ensino aprendizagem de funções por meio de modelagem matemática. Essas informações serão processadas e publicadas em minha dissertação de mestrado, que visa comparar o ensino através do método tradicional e por modelagem matemática. Não é necessário identificação nenhuma, apenas que responda o questionário levando em consideração as aulas de matemática desenvolvidas nesse ano letivo.

01) Você gosta de estudar matemática? Justifique sua resposta.

____

____

02) Durante a sua trajetória escolar, na maioria das vezes nas aulas de matemática os conteúdos eram abordados por meio de pesquisa e interpretação de situações reais do cotidiano?

( ) sim, frequentemente   ( ) as vezes   ( ) nunca

03) Descreva como eram essas aulas na maioria das vezes.

____

____

____

04) Em relação ao conteúdo de matemática, o que você tem mais dificuldade?

( ) assimilar o conteúdo ( ) interpretar as atividades

( ) efetuar cálculos ( ) relacionar a teoria com a prática

Nesse ano letivo de 2016 trabalhamos nas aulas de matemática com diferentes metodologias de ensino, dentre as quais podemos destacar o ensino tradicional e a modelagem matemática. No método de ensino tradicional foram realizadas abordagens teóricas do conteúdo de funções, onde o professor apresentou os principais conceitos e definições do conteúdo, mostrou a aplicação desses conceitos através de exemplos, e encaminhou listas de atividades referentes ao conteúdo que estava sendo estudado. Já na modelagem matemática tivemos a oportunidade por meio de uma problemática real, de pesquisar dados, elaborar hipóteses, modelar funções, e testar a aplicação desses modelos para a solução do problema inicial. Sendo assim levando em consideração esses dois métodos, responda as questões a seguir:

5) Com qual dos métodos você se identificou mais?

( ) ensino tradicional ( ) modelagem matemática

Porquê?

____

____

____

6) Para os próximos conteúdos a serem estudados você escolheria qual método?

( ) ensino tradicional ( ) modelagem matemática

( ) nenhum desses ( ) depende do conteúdo

Justifique sua resposta.

____

____

____

____

Obrigado por sua resposta!

A.2 Avaliação (atividade de modelagem)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
MATO GROSSO
CAMPUS PRIMAVERA DO LESTE

Ensino Médio Integrado - Curso Técnico em Logística

Avaliação de matemática

Aluno(a): ....

Considere a seguinte situação: Um artesão produz peças de artesanato em madeira. O custo para produção de cada peça é de aproximadamente R$ 5,00. Além disso ele possui despesas fixas que giram em torno de R$ 200,00 ao mês. O preço de venda de cada peça produzida é R$ 9,00. Nessas condições:

1. Elabore os modelos matemáticos que expressam em função da quantidade de peças produzidas e vendidas, o custo total, receita e lucro do artesão ao mês.

2. Qual é o número mínimo de peças que o artesão terá que produzir e vender em um determinado mês para não tomar prejuízo?

3. Construa o gráfico das funções custo e receita, mostrando o ponto de intersecção entre eles. Em seguida faça uma análise do gráfico.

4. Supondo que em média por dia o artesão produza 13 peças, e que ele trabalhe 22 dias em um mês, quantas peças foram produzidas nesse mês? Se ele conseguir vender todas essas peças, qual foi seu lucro nesse mês?

5. Sabendo que a expressão $R(x) = -20x^2 + 280x$ informa a receita mensal do artesão em função do preço de venda de cada peça (x), determine o preço que ele deve vender cada peça para que sua receita seja máxima.

6. Supondo que o artesão tenha aplicado o lucro da questão 4 na poupança, a uma taxa de juros mensais de 0,65%, qual será a lei que irá expressar o capital $C(x)$ em função do tempo em meses t que o dinheiro ficar aplicado?

7. Construa um gráfico da função obtida no exercício anterior mostrando o capital obtido se o dinheiro ficar aplicado entre 0 e 120 meses.

8. Considerando a situação da questão 6, quanto tempo o dinheiro terá que ficar aplicado para que dobre de valor?