Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Um olhar especial sobre a matemática financeira aplicada ao ensino médio

Cecilia Cleude Gonçalves

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr.Adilson Antônio Berlatto**

Trabalho financiado pela Capes

Barra do Garças - MT

Abril de 2017

Um olhar especial sobre a matemática financeira aplicada ao ensino médio

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Cecilia Cleude Gonçalves e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 5 de junho de 2017.

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Prof. Dr. Mauricio Donizetti Pieterzack

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

G635o Gonçalves, Cecilia Cleude.
Um olhar especial sobre a matemática financeira aplicada ao ensino médio / Cecilia Cleude Gonçalves. -- 2017
xii, 82 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Adilson Antônio Berlatto.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2017.
Inclui bibliografia.

1. Matemática financeira. 2. Ensino médio. 3. Educação financeira. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 – Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8576 - Email : profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO : "Um olhar especial sobre a matemática financeira aplicada ao ensino médio"

AUTOR : Cecilia Cleude Gonçalves

defendida e aprovada em 28/04/2017.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca / Orientador Doutor Adilson Antônio Berlatto
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Carlos Rodrigues da Silva
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Mauricio Donizetti Pieterzack
Instituição : Universidade Federal de Goias

Barra do Garças, 28/04/2017.

À minha doce amada filha Jheniffer Gonçalves e ao meu querido esposo José Marcleide pela dedicação e compreensão para comigo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força e ânimo para jamais desistir. Ao meu orientador Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto pelo apoio e incentivo. A todos os meus colegas de curso que sempre me ajudaram quando precisei. A minha filha Jheniffer por ter a paciência ao ver minha atenção dividida com os estudos. Ao meu esposo, Marcleide, que em nenhum momento deixou de acreditar que eu conseguiria, me apoiou em todos os momentos de dificuldade e proporcionou a nossa filha toda a atenção, dedicação e esforço que eu não pude dar nesses dois anos, principalmente durante a minha ausência física por conta das viagens e estudos. Aos meus pais, Avelino Gonçalves da Silva (in memoriam) e Conceição Santana da Silva que me criaram e me incentivaram a estudar. A minha sogra Maria Barbosa dos Santos, que não mediu esforços para cuidar da nossa pequena Jheniffer, sei que sem sua ajuda tudo seria muito mais difícil. Aos meus irmãos, em especial, a madrinha Divina, minha conselheira e incentivadora, e além do mais, sempre soube me ouvir e me compreender, e demais familiares que sempre me incentivaram. A minha primeira professora Maria Aparecida, que me ensinou as primeiras lições das quais me lembro até hoje. Ao PROFMAT, pela oportunidade e a CAPES, pelo apoio financeiro. Enfim a todos amigos e colegas que sempre me incentivaram e torceram por mim.

Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes.

Marthin Luther King.

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma proposta alternativa para se ensinar a matemática financeira tendo com foco o poder de decisão do consumidor diante de uma situação de compra. Para alcançar tal objetivo, propusemos uma análise desde as circunstâncias atuais da economia brasileira, exemplos de como a matemática financeira influencia na vida das pessoas até os pressupostos teóricos que fundamentam o desenvolvimento deste trabalho. Dentre os conteúdos de matemática financeira estudamos os que são pré requisitos para o estudo proposto. E com relação às aplicações e sugestões estão: o relato da oficina pedagógica realizada com os alunos do 2º ano do ensino médio do Colégio Estadual Professor Geraldo Ribeiro da Silva; recomendação do uso de aplicativos para celulares com objetivo de monitorar as finanças diária e por último, o que tem de inovador na educação financeira no Brasil.

Palavras chave: Matemática financeira, ensino médio e educação financeira.

Abstract

This paper presents an alternative proposal to teach financial mathematics, focusing on the decision-making power of the consumer in the face of a purchasing situation. In order to reach this goal, we have proposed an analysis from the current circumstances of the Brazilian economy, examples of how financial mathematics influences people's lives to the theoretical assumptions underlying the development of this work. Among the contents of financial mathematics we study those that are prerequisites for the proposed study. With regard to the applications and suggestions is the report of the pedagogical workshop held with the students of the second year of high school of the State College Professor Geraldo Ribeiro da Silva; Recommendation of the use of mobile applications to monitor daily finances and, finally, what is innovative about financial education in Brazil.

Keywords: Financial mathematics, high school and financial education.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

"A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."

(Galileu Galilei)

Viver bem em pleno século XXI, onde as informações circulam muito rápido e em grande quantidade, graças a evolução tecnológica e a disseminação da internet, tem sido um grande desafio para toda sociedade. E no âmbito escolar não tem sido diferente. Manusear e adequar tantas possibilidades e estratégias que são oferecidas aos jovens com o ambiente de sala de aula, tem sido muito difícil para os professores e demais profissionais da educação, pois estudar requer muita concentração e esforço para quem deseja sobressair diante da concorrência no estudo e no mercado de trabalho. Este estudo visa contribuir com o ensino da matemática nos dias atuais, por isso segue a vertente de, inicialmente, conhecer a realidade e a partir de uma análise das circunstâncias vivenciadas pela população brasileira; na sequência, escolher uma linha de pesquisa que, de alguma forma, pudesse contribuir para melhorar a vida das pessoas. Com o tema escolhido, propor a aplicação de uma metodologia em sala de aula tendo, como foco, o cotidiano dos alunos, principalmente com o entendimento relacionado a operações financeiras. Por último, elencar algumas tecnologias inovadoras disponíveis e suas aplicabilidades como sugestões futuras que possam subsidiar novas ações que contribuam para uma boa formação dos alunos.

A preocupação de integrar e proporcionar aos jovens participação ativa no contexto escolar, tem sido constante desde a proposta da reforma do ensino médio nos primeiros anos do século XXI. Para Maia e Carneiro (2000, p. 47), "Coloca-se um desafio para todos que atuam na área de educação, como os políticos e gestores estaduais: construir uma escola adequada à formação dos jovens, que garanta as condições de desenvolvimento da personalidade e de inserção na sociedade". Porém, essas mudanças tem muito a ver com a postura do professor como mediador deste processo. E é justamente esta problemática que motivou os rumos deste trabalho: trabalhar a matemática financeira de maneira que possibilite a construção de novas posturas humanas, principalmente na área da educação financeira. E o ponto de partida para essa mudança é o desafio de sair do comodismo da sala de aula e enfrentar novos caminhos. Essa necessidade de mobilidade por parte do professor é explanada da seguinte forma:

> Este é um dos princípios que orientam a reforma curricular do ensino médio. As decisões sobre o que os alunos devem aprender estão a critério dos professores.(...) O que parece ideal, entretanto, pode se revelar imobilizador se os professores não conseguirem estabelecer uma ruptura com aquilo que convencionalmente se faz: seguir orientações de outros níveis de ensino, como, por exemplo, do ensino superior ou, simplesmente, considerar que o conteúdo dos livros didáticos merece plena aceitação porque supostamente se baseia em "critérios científicos". (Maia e Carneiro, 2000, p.47)

Os anos se passaram desde estas iniciativas, porém os rumos da educação brasileira pouco evoluíram, em nota de manifestação sobre a reformulação do ensino médio no Brasil:

> O país está inteiramente em descompasso com o mundo (...). As maiores dificuldades estão no ensino médio, que permanece com um currículo excessivamente acadêmico, inteiramente desconectado da realidade do mercado de trabalho e pouquíssimo atraente para os jovens. Prova disso são as elevadíssimas taxas de evasão, de 9,5% na primeira série, 7,1% na segunda e 5,2% na última. Pior: o Brasil possui 1,7 milhão de adolescentes entre 15 e 17 anos fora da escola, idade em que deveriam estar cursando o ensino médio. O último Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), divulgado no início do mês, deu a dimensão do desastre do ensino médio nacional, estagnado desde 2011 e o desempenho dos alunos em matemática foi o pior desde 2005. A tragédia se traduz em outros dados: por ano, um milhão e 200 mil alunos abandonam as salas de aula e apenas um em cada dez alunos do grau médio estão satisfeitos com o ensino que recebem, segundo pesquisa do Instituto Inspirare. (São Paulo, 2016, p.1)

Para os, professores atuantes na rede pública do ensino básico no Brasil, este fato tem sido uma preocupação constante. Porém, é de conhecimento de todos que são muitas questões inerentes a essa problemática, que vão além das competências dos profissionais da escola, mas, estas questões não serão discutidas neste trabalho. A partir dessa iniciativa de trabalhar a matemática financeira, propiciar ao aluno conhecimento e habilidades que vão ao encontro de tudo que vem sendo discutido e proposto pela reformulação do ensino médio, uma vez que se propõe o estudo através de projetos (metodologias) conectados com a realidade.

A seguir faremos uma explanação de como este trabalho ficou estruturado por capítulo. No primeiro capítulo intitulado Matemática Financeira: da realidade brasileira ao currículo escolar, foi subdividido em três partes: A crise econômica no Brasil - desemprego e endividamento dos cidadãos, aos olhos da matemática financeira e a matemática financeira na educação básica. É indiscutível que os escândalos políticos provocados pela corrupção que dominaram os noticiários nacionais em 2016, culminaram nas graves crises política e econômica do país. Estes fatos contribuíram com a crescente taxa de desemprego e, consequentemente, no endividamento dos cidadãos. E foi esse elo de ligação entre a realidade e o estudo da matemática que incentivou o tema deste trabalho.

Na segunda parte, foi abordada a forma de como os juros interferem na vida das pessoas e como o estudo da matemática financeira pode auxiliar os cidadãos para compreender os cálculos e suas aplicações envolvidos. Este é um assunto tão urgente que Domingos (2016) fez o seguinte questionamento: "Se a partir de hoje você não recebesse mais o seu ganho mensal, por quanto tempo conseguiria manter seu atual padrão de vida?" São questões como esta que se pretende analisar. Enfim, quer observar se cidadão brasileiro sabe usar o seu dinheiro de modo inteligente, se tem o hábito de guardar uma reserva financeira e fazer com que esse dinheiro se multiplique ou gasta tudo o que ganha sem se preocupar com o futuro.

Na terceira e última parte deste capítulo, procura-se argumentar teoricamente sobre a necessidade de trabalhar os conteúdos da Matemática Financeira no ensino médio de forma contextualizada. A partir da colocação dos PCN[1] sobre a inserção do ensino da matemática financeira desde as atividades simples do cotidiano, como por exemplo, ir a uma padaria até as mais elaboradas, como o financiamento de uma dívida ou do carro próprio, diante dessa abordagem, propor metodologias que possam contribuir na formação de consumidores prudentes, capazes de analisar as vantagens e desvantagens de uma transação comercial. Porém, quando o assunto é o estudo contextualizado, logo se depara com a necessidade de resolver problemas vivenciados no dia a dia, e isto, também será explorado com alguns exemplos.

O segundo capítulo é tratado com o tema Sistematizando o conhecimento em

[1]Parâmetros Curriculares Nacionais

matemática financeira. De início, um breve comentário sobre a escolha e distribuição dos livros didáticos para as escolas públicas do país pelo Ministério da Educação. Com os conteúdos preliminares, pretende-se fazer uma revisão sobre os conceitos elementares quando o assunto é a matemática financeira, ou seja, as ideias que norteiam a construção progressiva dos conteúdos seguintes. No momento em que são expostos os conteúdos da Matemática Financeira eleitos para aplicação no Ensino Médio, tem-se a pretensão de expor as ideias principais e os exemplos resolvidos que subsidiam a proposta de execução nesta fase do ensino. E por último, são apresentados alguns conteúdos matemáticos do currículo do ensino médio, os quais são possíveis elencar estratégias de estudo junto aos conceitos da matemática financeira.

A parte principal deste trabalho, está no terceiro capítulo, subdividido em três partes. A primeira, consta-se o relato da experiência de aplicação da metodologia proposta para o ensino da matemática financeira. A segunda parte se baseia na metodologia em si, onde estão descritos detalhadamente o passo a passo da proposta, finalizando com sugestões de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula. A terceira e última parte destaca as sugestões futuras do que atualmente é oferecido pela tecnologia para aplicação por parte do cidadão, visando melhorar o comportamento financeiro e também algumas propostas pedagógicas autorizadas e disponíveis para as instituições de ensino que pretendem adequar a Educação Financeira dentro da sua grade curricular.

Uma visão geral deste trabalho é que, a partir das necessidades vigentes colocadas pela reformulação do ensino médio, surge o anseio de se fazer uma contribuição nesta construção. Mesmo com as dificuldades, é proposto o uso das tecnologias no ensino da matemática financeira, desde a exibição de uma reportagem que retrata a vida real até o uso da calculadora científica e das planilhas eletrônicas como ferramenta de suporte para os cálculos inerentes a essa disciplina. Sempre visando trabalhar questões pertinentes ao cotidiano e também sugestões de atividades educacionais, aplicativos e tendências tecnológicas para a educação financeira.

Capítulo 1

Matemática Financeira: da realidade brasileira ao currículo escolar.

Neste capítulo faremos um prognóstico de como a Matemática Financeira é abordada no currículo escolar do país. Para começar, propomos uma visão panorâmica da atual situação econômica brasileira, sendo que muito tem se falado em crise da economia, desemprego e consequentemente o endividamento dos cidadãos. Na sequência, explanamos sobre o poder dos juros na vida financeira das pessoas. Com esse texto pretendemos mostrar ao indivíduo a necessidade de entender o funcionamento dos juros bancários. E por último, é feita a fundamentação teórica dos conteúdos da matemática financeira no ensino médio, de acordo com os PCN, Referenciais Curriculares do Estado de Goiás e de alguns estudiosos da área que defendem a contextualização do estudo da matemática financeira, bem como a necessidade da implantação da educação financeira na grade curricular.

1.1 A crise econômica no Brasil: desemprego e endividamento dos cidadãos.

No atual contexto da economia brasileira, onde a mídia expõe o desemprego como principal fator de endividamento de um grande número de pessoas, torna-se conveniente que a escola dê sua contribuição quanto ao entendimento de como funciona a matemática dos juros sobre juros que agem em desfavor do enfraquecido poder aquisitivo do consumidor.

Em se tratando do desemprego no Brasil, os números não são nada animadores. Segundo o ranking global elaborado pela agência Austin Rating[1], o desemprego no Brasil é o 7º maior do mundo em comparação com 51 países, a taxa de desemprego subiu para 11,6% no trimestre encerrado em julho de 2016 e alcançou o maior índice já assinalado pela série histórica da Pnade[2] Contínua do IBGE[3].

Porém, há estudiosos da Economia que veem a crise econômica no Brasil como uma consequência da crise política que aqui se instalou. Em entrevista ao Estadão[4], a economista italiana Ter-Minassian[5] (2016) afirma que: " O Brasil não sai da crise econômica se não resolver a crise política"e ainda comparou a situação do Brasil com a Itália na época da Operação Mãos Limpas. E essa operação ela considera como benéfica para a Itália e ainda afirma que inspirou a Operação Lava Jato aqui no Brasil. Diz: "Depois dos impactos veio o crescimento ". Ela disse estar muito preocupada com a situação vivida pelos brasileiros e reafirma "Não há dúvida de que a grande diferença dessa crise econômica no Brasil, em relação a outras, é a situação política". Veja um trecho da entrevista:

> **A economia é refém da política: não há como sair da crise econômica sem resolver a política?** Essa é a minha visão _ a minha e de todos os observadores da economia brasileira. Não há dúvida de que a grande diferença desse crise econômica no Brasil, em relação a outras, é a situação política. O governo perdeu o controle da base aliada. (...) Tudo isso não ajuda a economia. E ainda há o impacto da Lava Jato, uma grande discussão a respeito da corrupção, sobre a indústria da construção, sobre a Petrobrás e toda a sua cadeia de fornecedores, que tem um peso importante para o País. O resultado de tudo isso é que a incerteza política se espalha. Compromete os ânimo dos investidores. Também recai sobre os consumidores o **aumento do desemprego** que tem impacto sobre a renda. As pessoas se retraem. Na minha opinião, para uma retomada econômica gradual e sustentável, é fundamental reduzir a incerteza política. (Ter-Minassian, 2016)

Além do mais, com a culminância da crise, consequentemente o desemprego e o consumismo que avança em nossa sociedade, é fácil ver relatos de pessoas que a cada dia estão com o poder aquisitivo mais comprometido. As inúmeras facilidades do mercado

[1]Austin Rating é uma agência classificadora de risco de crédito de origem brasileira. Foi a primeira empresa nacional a conceder ratings no Brasil.

[2]Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios.

[3]Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

[4]Jornal Impresso e Digital.

[5]Economista italiana que ficou 37 anos no Fundo Monetário Internacional (FMI), ex-diretora do Departamento Fiscal do FMI e atualmente consultora do Fundo e de outras instituições internacionais, como o Banco Mundial.

financeiro como cheque pré-datado, cartão de débito e crédito, cheque especial, carnê de loja, empréstimo pessoal, prestação de casa e de carro, seguros e muitas outras opções, acabam servindo de armadilha. Muita gente mesmo sem perceber ou levar isso em consideração engrossam as estatísticas das pessoas que gastam mais dinheiro do que ganham. Segundo os especialistas em educação financeira, este fato proporciona que o cidadão entre definitivamente na lista dos endividados. Esse número vem crescendo consideravelmente como mostra a mídia:

> O ano de 2016 começou batendo recorde de brasileiros endividados, que não conseguem pagar as contas. Culpa principalmente do desemprego. Quantas pessoas estão nesta situação? O número é impressionante, quase 60 milhões de pessoas, um recorde, desde que a contagem passou a ser feita, em 2012. Por isso, a Serasa Experian criou uma cartilha para tentar ajudar a quem está nessa situação. Mal o ano começou e já somos 59 milhões de brasileiros endividados, quase cinco milhões a mais do que em janeiro do ano passado. (Brasil, 2016)

Quando o assunto é retomada do crescimento da economia brasileira, há um consenso de opiniões que essa retomada será a passos lentos, mas que já é possível falar em retomada. Meirelles (2016), o então Ministro da Fazenda, declarou "Hoje, vemos a economia começar a reagir, com o índice de confiança do consumidor e do empresário melhorando, além da recuperação da atividade industrial, isso não é uniforme, mas o que importa é a tendência, que já é positiva". Por sua vez, o economista Igor Velecico, diz para Carneiro (2016) em entrevista para a folha de São Paulo, "que apesar do ritmo apático já se pode falar em fase de estabilização da economia e isso é um bom indicativo". Portanto, diante desta realidade, toda cautela com as finanças é bem vinda e necessária uma vez que em tempos de crise qualquer deslize com as contas pode ser suficiente para um descontrole financeiro.

1.2 Aos olhos da matemática financeira

Um olhar diferente sobre a matemática financeira não requer nada de novo ou receitas mirabolantes, a proposta é analisar e colocar em prática os conceitos da matemática financeira, em particular o cálculo dos juros sobre juros em favor da conta bancária dos cidadãos e não das instituições financeiras. Visando alcançar esse objetivo, o foco principal deste trabalho é sempre colocar em questão o seguinte: Qual é a melhor opção de escolha para o consumidor? Para responder essa pergunta, o cidadão precisa saber decidir de qual lado ficar. Deve entender quais das opções, dentro do seu poder de compra, é a melhor opção para se utilizar. E esse poder de decisão vai ser trabalhado através de resolução e análise de situações problemas com o intuito de propiciar ao aluno a reflexão em busca do desenvolvimento crítico, acerca das opções que o mercado financeiro oferece nas transações comerciais do cotidiano. Para ilustrar o poder de decisão diante de uma situação de compra, pode-se considerar o seguinte exemplo: Um carro popular é vendido por R$ 30.000,00 à vista ou no crediário, em três parcelas mensais de R$ 11.000,00 cada uma, sendo a primeira parcela com vencimento um mês após a compra. Vamos analisar qual é a melhor alternativa para o cliente, sabendo que ele tem a opção de aplicar seu dinheiro a juros compostos à uma taxa mensal de 1,5% e ainda pode optar pela compra à vista, uma vez que dispõe atualmente deste saldo.

Uma maneira de resolver essa questão é a seguinte: no caso em que o cliente opte em pagar parcelado, os R$ 30.000,00 aplicados a juros compostos, no período de um mês a taxa de 1,5% a.m.(ao mês), renderá juros: $J = 30.000 \cdot 1 \cdot 0,015 = 450,00$, ou seja, um mês após a compra, o cliente terá: $30.000 + 450,00 = 30.450,00$, ao desembolsar os R$ 11.000,00 da primeira parcela, ficará com: $30,450 - 11.000 = 19.450,00$. Esse valor pode ser novamente aplicado a juros compostos por mais um mês, pela mesma taxa de juros, e renderá de juros: $J = 19.450 \cdot 1 \cdot 0,015 = 291,75$, totalizando, $19.450 + 291,75 = 19.741,75$. Ao desembolsar os R$ 11.000,00 da segunda parcela, o cliente terá disponível para aplicação no último mês: $19.741,75 - 11.000 = 8.741,75$. O que renderá, $J = 8.741,50 \cdot 1 \cdot 0,015 = 131,12$, totalizando, $8.741,50 + 131,12 = 8.872,87$. Como deverá desembolsar R$ 11.000,00 da última parcela, perceba que, o cliente deverá recorrer a outras fontes, para poder quitar o carro, uma vez que, $8.872,62 - 11.000 = -2.127,38$. Ou seja, ao final dos três meses vai faltar R$ 2.127,38 para quitar a dívida. Então, nesse caso, melhor seria o pagamento à vista, pois no instante de pagar a última prestação irá faltar dinheiro.

Perceba, que tudo é questão de análise em cada proposta. Veja que nessa balança financeira são as taxas de juros do financiamento e da aplicação disponível para o cliente, que determinam qual rumo seguir diante de tal transação. Uma observação simples que pode ser feita em relação a essas taxas, antes de qualquer outra análise, é verificar se a aplicação de acordo com a taxa disponível, gera um montante superior ao valor da compra a prazo. Por exemplo, o valor de R$ 30.000,00 inicial, sem retirar a entrada de R$ 11.000,00, aplicados a juros compostos à taxa de 1,5% ao mês durante os três meses, renderia R$ 1.370,35 de juros, totalizando R$ 31.370,00 valor inferior aos R$ 33.000,00 a serem pagos caso o cliente opte pela compra a prazo, já que a taxa de juros do financiamento durante os três meses irá gerar R$ 3.000,00 de juros. Daí, já seria possível tirar algumas considerações sobre a melhor opção de compra para o cliente. Uma outra maneira de análise dessa mesma situação, seria pagar os R$ 11.000,00 de entrada e aplicar os R$ 19.000,00 restantes pelo regime de capitalização composta e com os juros arrecadados nessa aplicação, conseguir algum desconto no pagamento do restante. O consumidor pode assumir uma postura de negociador diante da oferta de venda.

A partir de investigações dessa natureza onde é possível fazer a melhor escolha, uma vez que as escolhas na vida financeira têm suas consequências assim como tudo na vida. Mas, uma negociação comercial errônea para o consumidor, pode colocá-lo em grande dificuldade financeira por longo tempo e isso pode afetar diretamente a qualidade de vida da família.

À primeira vista, pode-se achar que seja melhor priorizar em cursar uma faculdade e conquistar espaço no mercado de trabalho. Essa decisão terá muito a ver com a quantidade de dinheiro que entrará na conta bancária por meio do trabalho ao longo da vida profissional. Porém, é importante observar que, um dos fatores que pode determinar o sucesso ou o fracasso financeiro são as decisões assumidas diante das transações financeiras do dia a dia. Segundo Franco (2016, p. 113), "um dos principais objetivos da educação financeira é a orientação de como as pessoas podem conviver melhor com o dinheiro". Para isso, a Educação Financeira deve ser prematura e constante, uma vez que agir como cidadão consciente pode fazer toda a diferença. Por exemplo, propor uma metodologia onde, futuramente, o aluno terá condições de julgar qual é a melhor opção para sua saúde financeira, dentro das opções que o mercado oferece; ter a possibilidade de discernir quando um anúncio pode representar uma armadilha na qual ele pode perder parte de sua renda. Antes de entrar no mérito de qual lado optar, é conveniente conhecer as taxas de juros praticadas pelas instituições financeiras quando se ganha juros e quando se paga juros. Em se tratando de ganhar juros, logo vem em mente a caderneta de poupança. E é reconhecido que essa é a forma mais simplificada e cômoda de se ganhar juros, porém, sua taxa de remuneração gira em torno dos 0,7% a.m., isso equivale a uma taxa anual inferior a 9%. Mas, quando o assunto é pagar juros, as taxas não são nada tímidas e em algumas linhas de crédito como, por exemplo, o cheque especial, a taxa ultrapassa os 12% a.m., que corresponde a um patamar próximo aos 300% a.a.(ao ano), podendo exceder esses valores dependendo da instituição financeira escolhida. Veja esses valores nas tabelas de taxas disponíveis no site oficial do Banco Central do Brasil ou as que estão no Apêndice A.3, figuras A.1 e A.2, acessada em 12/02/2017.

Sobre as linhas de crédito, Ilídio Pereira de Sá[6] recomenda:

> É claro que o consumidor só deve contratar uma linha de crédito em caso de emergência, devido aos juros altos. Havendo dívidas acumuladas, renegocia-las com os credores. Outra dica é tomar muito cuidado com o uso dos cheques especiais ou dos cartões de crédito. (Sá, 2011, p.34)

Portanto, quando o assunto é financiamento, em outras palavras, ou empréstimo de dinheiro, todo cuidado é pouco. Muitas vezes, o cliente necessita com urgência de um bem essencial e prefere pagar os juros e adquiri-lo, a prudência nesse caso é de extrema importância. Pesquisar a menor taxa de juros disponível, pagar a entrada com o maior valor possível e parcelar o valor restante no número mínimo de vezes que couber no orçamento, são atitudes positivas uma vez que, quanto maior a dívida e o tempo para pagá-la, mais juros serão cobrados em desfavor do consumidor. Consequentemente, pagar juros significa empobrecer o saldo bancário. No entanto, a dica é fazer um planejamento a longo prazo, priorizar as compras à vista e conseguir um bom desconto.

1.3 A matemática financeira na educação básica.

Essa necessidade de despertar no aluno um censo crítico a respeito de suas atividades financeiras tendo a matemática como meio facilitador, está proposto no PCN, o qual define a matemática como “uma ciência que se faz necessária no nosso dia-a-dia, tornando-se cada vez mais importante e indiscutível a necessidade que temos dela, seja para tarefas simples como comprar um pão ou para tarefas complexas como lançar um foguete”. E acrescenta:

[6] Doutorando em Educação Matemática (UNIBAN-SP), Mestre em Educação Matemática (Universidade Santa Úrsula, RJ) e Licenciado em Matemática(UERJ)

> Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. (Brasil, 2000, p.251)

Ainda nos PCN de matemática, um dos temas transversais propostos intitulado, "Trabalho e Consumo" expõe que às vezes o consumo é apresentado como forma e objetivo de vida, transformando bens supérfluos em vitais, levando ao consumismo. Propõe ainda, que os conhecimentos matemáticos aplicados em situações reais, tem o poder de modificar pensamentos e atitudes que podem transformar e mudar o comportamento na vida de muitas pessoas:

> Os conteúdos matemáticos fornecem o instrumental necessário para a compreensão dos dados e informações colhidos em atividades sobre a situação de trabalho e emprego, salários, estudos comparativos de preços de produtos, verificação de vantagens e desvantagens das compras a crédito etc. (Brasil, 2000, p.370)

Outro fator que deve ser levado em consideração em se tratando do ensino da matemática e bem como o ensino da Matemática Financeira é a contextualização. Porém, este é um problema vivenciado por diversos educadores:

> As linhas de frente da Educação Matemática têm hoje um cuidado crescente com o aspecto sociocultural da abordagem Matemática. Defendem a necessidade de contextualizar o conhecimento matemático a ser transmitido, buscar suas origens, acompanhar sua evolução, explicitar sua finalidade ou seu papel na interpretação e na transformação da realidade do aluno. É claro que não se quer negar a importância da compreensão, nem tampouco desprezar a aquisição de técnicas, mas busca-se ampliar a repercussão que o aprendizado daquele conhecimento possa ter na vida social, nas opções, na produção e nos projetos de quem aprende. (Fonseca, 1995, p.53)

A necessidade de trabalhar os conteúdos da matemática financeira visando a aplicabilidade em situações do cotidiano tem sido defendida pelos estudiosos dessa linha de pesquisa. Veja, por exemplo,

> Portanto, através de atividades contextualizadas e que proporcionem significado no cotidiano, é possível oferecer condições para que o aluno seja capaz de tomar decisões mais acertadas, no manuseio com o dinheiro, tornando-se protagonista de suas ações nesta sociedade capitalista que supervaloriza o dinheiro, muitas vezes, em detrimento de diversos outros valores. (Marques, 2016, p.63)

É com base nessa perspectiva de ensino que este trabalho está sendo embasado. Ou seja, pretende-se com a resolução e análise de situações problemas do cotidiano, que dão opção de escolha ao consumidor e a partir de então, desenvolver o poder de questionamento e decisão do aluno. Estas atitudes poderão proporcionar ao estudante a capacidade de ser o protagonista de uma história financeira de sucesso ao longo da vida. Com isso, através do estudo contextualizado da matemática financeira, espera-se estreitar a relação entre a matemática e o contexto econômico vivenciado, levando em consideração os parâmetros da ciência formal porém, conectado com a realidade.

A Secretaria Estadual da Educação de Goiás lançou, através da Coordenação de Ensino Médio, os Referenciais Curriculares para o Ensino Médio no Estado. Na Área - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Componente Curricular - Matemática no Eixo 5: Tratamento da Informação Tema 1: Matemática Financeira traz como justificativa a fundamental importância do estudo dos conteúdos como porcentagens, juros simples e compostos, entre outros relacionados a esse tema a sua aplicação na resolução de situações da vida cotidiana, como, por exemplo, calcular um desconto ou decidir por uma compra à vista ou a prazo. Dentre as orientações metodológicas cita:

> – Selecionar notícias de jornais que envolvam o conceito de porcentagem e usá-las para fazer estimativas e comparações;
>
> – Estimar descontos, lucros, prejuízos e cálculos de prestações;
>
> – Comparar preços à vista ou a prazo e determinar o valor dos juros cobrados;
>
> – Discutir, analisar e comparar os juros aplicados nas transações bancárias;
>
> – Analisar os juros cobrados pelo cartão de crédito.
> (Abreu, 2010, p.82)

Quanto as iniciativas da comunidade acadêmica brasileira e outros segmentos da sociedade, em relação ao ensino da Matemática Financeira nas escolas que atendem a educação básica, vê-se a preocupação de introduzir ao currículo escolar, a Educação Financeira, tendo em vista que jugam necessário que essa aprendizagem deve começar na escola. Para Souza (2016, p. 6) "(...), consideramos que o ensino de Matemática Financeira deve ser iniciado o mais cedo possível, de forma contextualizada e adequada à faixa etária do educando".

No XI Encontro Nacional da Educação Matemática em Curitiba no Paraná, uma das propostas apresentada foi:

> O presente artigo tem como objetivo apresentar uma proposta de um programa de Educação Financeira para a Educação Básica das escolas públicas. A proposta pretende discutir a inserção do tema como parte da formação matemática de estudantes considerando a atual estrutura da matemática escolar vigente. (Silva, 2013, p.1)

Com essa mesma preocupação, a AEFB[7], em parceria com a ENEF[8], criada por meio do Decreto Federal 7.397/2010, tem proporcionado meios de disseminar o estudo da Educação Financeira no Brasil, através de uma plataforma de ensino pela internet. A escola que optar por trabalhar com esse método, pode fazer uma inscrição, pela qual adquire direito de receber material didático para alunos e professores. Também serão disponibilizados cursos de capacitação para os docentes atuantes.

Sobre as finanças individuais e familiares, tem como objetivos específicos:

> – Compreender as noções básicas de finanças e economia para que desenvolvam uma leitura crítica das informações financeiras presentes na sociedade;
>
> – Aprender a utilizar os conhecimentos de matemática (escolar e financeira) para fundamentar a tomada de decisões em questões financeiras;
>
> – desenvolver um pensamento analítico sobre questões financeiras, isto é, um pensamento que permita avaliar oportunidades, riscos e as armadilhas em questões financeiras;
>
> – Desenvolver uma metodologia de planejamento, administração e investimento de suas finanças através da tomada de decisões fundamentadas matematicamente em sua vida pessoal e no auxílio ao seu núcleo familiar;
>
> – Analisar criticamente os temas atuais da sociedade de consumo. (Silva, 2013, p.13)

Enquanto essas propostas estão em discussão e/ou em fase experimental com projetos pilotos, cabe aos professores de matemática atuantes desenvolverem atividades educacionais que vão ao encontro das reais necessidades dos alunos. Quanto a relevância do ensino da matemática financeira no ensino médio de forma contextualizada, a partir de situações problemas vivenciadas pelos educandos, propostas nesta dissertação, e da necessidade da

[7]Associação da Educação Financeira do Brasil
[8]Estratégia Nacional de Educação Financeira

implantação da educação financeira na grade curricular, podemos destacar alguns pesquisadores que compartilham essas ideias. Segundo, Oliveira e Pinheiro (2009, p. 2), " Quando problematizamos nossas aulas a partir de situações do cotidiano, levamos os alunos a tomarem consciência da necessidade de conhecimentos específicos para resolver o problema e, consequentemente, a construção de novos". E ainda, no que diz respeito ao uso consciente do dinheiro e os conceitos advindos da educação financeira, Franco (2016, p. 113) considera:

> " Torna-se cada vez mais importante o uso racional e consciente do dinheiro no dia a dia, tanto pessoal quanto familiar. Pode-se dizer, então, que a educação financeira é fundamental em toda sociedade isto porque ela faz parte da vida econômica de toda população quer jovem, quer adulta".

No entanto, diante de tudo que foi exposto até aqui, pode se perceber que o tema Matemática Financeira aplicada ao cotidiano é bastante atual. No banco de dissertações do PROFMAT este tem sido um tema recorrente, ainda mais, pela atual crise econômica do país que tem provocado atenção dos cidadãos e do governo. Em análise quanto a importância deste tema, temos:

> Ao consultarmos, em maio de 2016, a lista das dissertações de mestrado dos alunos do PROFMAT que tinham abordado esse tema, encontramos mais de 80 dissertações sobre Matemática Financeira entre as mais de 2.400 já defendidas. Entretanto, verificamos que a maioria dos títulos abordava pesquisas sobre o trabalho com Matemática Financeira no Ensino Médio. (Souza, 2016, p.13)

Contudo, o interesse e a escolha por esta linha de estudo e pesquisa, vem ao encontro da necessidade do "melhor pensar e fazer"novas ações visando a melhoria da educação brasileira, colocando em prática as novas metodologias e as boas ideias defendidas em busca da educação de qualidade.

Capítulo 2

Sistematizando o conhecimento em matemática financeira

Neste capítulo abordaremos os conteúdos que evidenciam a Matemática Financeira desde as noções básicas até os conceitos mais elaborados. Inicialmente mostraremos a questão de como os livros didáticos são escolhidos e distribuídos para as escolas públicas no país. Nos Conteúdos Preliminares o intuito é promover uma revisão das noções primitivas dos conteúdos necessários para se entender a Matemática Financeira. Em seguida, dispusemos os conteúdos que a priori são apresentados nos livros didáticos do ensino médio tendo como tema a Matemática Financeira com exemplos resolvidos.

2.1 Os livros didáticos

Até a década de 90, quando se pensavam em melhorar a qualidade da educação no Brasil, as principais preocupações eram a construção de novos prédios para abrir mais escolas, aumentar o quadro de professores e destinar mais recursos financeiros. Hoje, porém, essas ações continuam sendo necessárias, mas a prioridade deve ser a qualidade, como o exposto a seguir:

> (...), mas hoje o acesso a educação fundamental é praticamente universal, o problema prioritário passa a ser à qualidade. Mais escolas, professores e recursos financeiros continuam sendo necessários sobretudo no Ensino Médio, mas os resultados escolares dependem menos disso e mais de outros fatores que são mais difíceis de modificar. Dentre estes fatores, os métodos de ensino, a qualidade dos livros didáticos, a liderança dos diretores e a autonomia das escolas. (Matos, 2013, p.13)

Dentre os tópicos citados por Matos (2013, p. 13) está a qualidade do livro didático. Esta qualidade tem sido uma preocupação do MEC[1] e é através do FNDE[2], órgão responsável pelas políticas educacionais do governo federal, que é proposto às escolas que façam analise das obras através do guia do livro didático. Este órgão adquiri e fornece os livros didáticos a todos os alunos do ensino fundamental e médio das escolas públicas. São fornecidos também, além das coleções de livros didáticos, outras categorias que se fizerem necessárias, como por exemplo, obras literárias e dicionários. Para que nenhum aluno seja excluído, os livros aprovados também são oferecidos em versões diversificadas como vídeo, braile e MecDaisy[3]. O PNLD[4] é feito em ciclos trienais, ou seja, a cada ano um segmento, que pode ser: os anos iniciais do Ensino Fundamental, os anos finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio recebem as coleções que deverão ser conservadas e devolvidos para a escola pelos alunos, para que possam ser reaproveitadas por outros alunos num período de três anos.

Porém, o termo qualidade do livro didático vai além da logística de entrega: diz respeito ao conteúdo. E este quesito tem todo um ciclo a ser percorrido antes de chegar nas mãos dos alunos e professores. No primeiro momento, é lançado um edital especificando todos os quesitos obrigatórios para inscrição dos títulos. Após esse processo, o MEC avalia essas obras e elabora o chamado Guia do Livro Didático, o qual é composto por resenhas de cada obra aprovada. Este guia é encaminhado para as escolas pelo FNDE. A escolha do livro didático é feita pelos professores e equipe pedagógica da escola a partir da análise das resenhas contidas no guia. As coleções de livros selecionadas nesta avaliação pedagógica são distribuídas às escolas para serem utilizadas no triênio.

Foram analisados três obras de autores participantes do Brasil (2014), sendo matemática a componente curricular do ensino médio para saber como a matemática financeira é abordada atualmente nos livros didáticos. Esses autores são Smolle (2013), Dante (2012) e Paiva (2013).

Smolle (2013) aborda a matemática financeira na parte 1 dos conteúdos do 3º

[1]Ministério da Educação

[2]Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, autarquia federal criada pela Lei nº 5.537, de 21 de novembro de 1968, e alterada pelo Decreto-Lei nº 872, de 15 de setembro de 1969, é responsável pela execução de políticas educacionais do MEC.

[3]O MecDaisy trata-se de uma ferramenta tecnológica que permite a produção de livros em formato digital acessível.

[4]Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é um instrumento do governo federal utilizado para compra e distribuição dos livros para as escolas públicas.

ano, intitula como noções básicas da matemática financeira e subdivide em seis partes: introdução, a linguagem da matemática financeira, porcentagem, identificando dois tipos de juros, fórmula para calcular juros simples e fórmula para calcular juros compostos. Na introdução faz um exemplo de empréstimo de dinheiro em uma financeira e mostra as contas comparando os juros simples como sendo a forma que o cidadão faz os cálculos e os juros compostos sendo os cálculos aplicados pela financeira. No desenvolver do capítulo procura contextualizar com situações do cotidiano e trás uma seção contendo questões retiradas de diferentes bancos de questões como ENEM[5] e das universidades federais.

Dante (2012), volume 3 destinado ao 3º ano, na primeira parte do capítulo 1 encontra-se a Matemática financeira e aborda os seguintes: porcentagem, fator de atualização, juros, equivalência de taxas. Os conteúdos são abordados de forma clara e contextualizada, porém apresenta atividades e conceitos de forma excessiva.

Por essas duas obras podemos concluir que a parte da matemática financeira é insuficiente no quesito de abrangência e inclusive, tem autores que nem sequer trazem esse conteúdo, como é o caso Paiva (2013).

2.2 Conteúdos preliminares

Para fundamentar e orientar essa parte dos conteúdos foram consultados os seguintes autores: (Dante, 2012), (Hazzan, 2005), (Morgado, 2014), (Morgado, 2015) e Smolle (2013).

2.2.1 Frações e porcentagem

É costumeiro, na vida real, ouvir expressões como "Quantos por cento dos alunos compareceram?", ou "Quantos por centos você pode pagar de entrada?"e muitas outras. Nesta seção trataremos das ideias primitivas que fundamentam o conhecido termo "por cento".

Definição 2.1 Uma *fração* é um número que pode representar parte de um inteiro ou parte de uma quantidade, e pode ser escrita como o quociente entre dois números a e b, com a e b inteiros e b diferente de zero. Assim, $\frac{a}{b}$ é a representação genérica da fração, onde a é chamado de *numerador* e **b** é chamado de *denominador*.

[5]Exame Nacional do Ensino Médio

Exemplo 2.1 Uma pizza foi dividida em 12 partes iguais, como mostra a figura 2.1 Pablo comeu as partes não estão coloridas. Como se pode encontrar a fração que representa as partes que Pablo comeu?

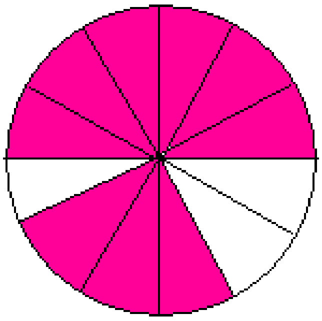


Figura 2.1: Exemplo de divisão de figura em partes iguais

A fração $\frac{3}{12}$ representa as partes que Pablo comeu em relação a quantidade de partes que a pizza foi dividida. O número 12 é o denominador, indica quantas partes iguais o inteiro foi dividido, e o 3 é o numerador, que indica quantas partes foram consideradas. Veja que a fração $\frac{3}{12}$ pode ser escrita pela sua equivalente $\frac{1}{4}$.

Definição 2.2 *Porcentagem* é o nome que se dá a uma fração de denominador 100 ou qualquer outra fração equivalente a ela. O símbolo % corresponde ao centésimo.

Vejamos um exemplo de como se pode utilizar a porcentagem.

Exemplo 2.2 O que significa dizer "empresto meu dinheiro a juros de 5%". Significa que a cada R$ 100,00 emprestados eu recebo R$ 5,00 de juros.

Os livros didáticos atuais tem a preocupação de desenvolver os conceitos matemáticos de acordo com a realidade do aluno desde as séries iniciais. Veja o exemplo a seguir, retirado de um livro didático do 6 $^{\underline{o}}$ano do Ensino Fundamental:

> Na embalagem de um certo biscoito é apresentada a informação de que uma porção de 30g contém o equivalente a 7% das necessidades diárias de quilocalorias de uma pessoa, isso tomando como referência uma dieta de 2.000 kcal diárias. Veja como podemos calcular quantas quilocalorias contém cada porção de 30 g do biscoito, ou seja, calcular 7% de 2.000 kcal. Temos que 100% correspondem ao todo, ou seja, 2.000 kcal. Assim, segue que: $7\%\ de\ 2000 = \frac{7}{100}\ de\ 2000 = \frac{7}{100} \cdot 2000 = 0,07 \cdot 2000 = 140$. Portanto, uma porção de 30 g desse biscoito contém 140 kcal. (Pataro, 2015, p.232)

2.2.2 Razões

Dizemos que razão é a comparação entre duas grandezas. Formalmente, temos a definição.

Definição 2.3 A *razão* entre os números x e y quaisquer, nesta ordem, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ e com $y \neq 0$, pode ser representada pela fração $\dfrac{x}{y}$ ou pela divisão de x por y.

Exemplo 2.3 Para Pataro (2015, p. 234), no livro do 7º ano do ensino fundamental, o conceito de razão está exemplificado a partir de uma situação cotidiana, em que compara a quantidade de cloro recomendada para o tratamento da água de uma piscina por litro de água.

Tabela 2.1: Quantidade de cloro recomendada para o tratamento de água de uma piscina.

Cloro (g)	Água (l)
1	100
2	200
3	300
10	1000
50	5000
65	6500

Observe que a quantidade de cloro muda de acordo com a quantidade de água, pois para 1g de cloro $\rightarrow$ 100 litros de água, 2 g de cloro $\rightarrow$ 200 litros de água e, assim, sucessivamente.

Escrevendo as frações correspondentes e simplificando-as temos:

$$\frac{1}{100},\ \frac{2}{200} = \frac{1}{100},\ \ldots\ ,\frac{65}{6500} = \frac{1}{100}$$

Veja que, ao simplificar as frações, obtêm-se uma fração irredutível(uma fração é chamada irredutível quando o numerador e o denominador são primos entre si, ou seja, não é possível simplificar) que é a mesma em todos os casos. A fração $\dfrac{1}{100}$ é a razão (coeficiente ou constante de proporcionalidade) entre as grandezas quantidade de cloro (em gramas) e quantidade de água (em litros), que se lê: *1 grama de cloro está para 100 litros de água.*

Exemplo 2.4 Em um concurso, 9 de um total de 120 candidatos inscritos foram aprovados. Qual é a razão entre o número de candidatos aprovados em relação ao número de candidatos inscritos no concurso? Podemos escrever essa razão assim: $\frac{9}{120}$, onde 9 das 120 pessoas inscritas foram aprovadas.

2.2.3 Números Proporcionais

Definição 2.4 Diz-se que a *Proporção* é a igualdade entre duas ou mais razões.

A questão da proporcionalidade tem grande utilidade na resolução de problemas no campo financeiro, por exemplo, no caso de um funcionário que não trabalhou o mês inteiro ou mesmo no cálculo das horas extras em relação as horas diárias de trabalho.

Exemplo 2.5 André presta serviços de manutenção de equipamentos em uma empresa. O salário mensal de um funcionário fixo dessa empresa para essa função é de R$ 2.000,00. André ganha pelos seus dias trabalhados proporcional aos 30 dias trabalhados por um funcionário fixo. Sabendo que André trabalhou 18 dias para essa empresa, qual deve ser o valor de seu pagamento?

Considerando o mês corrido com 30 dias, para saber quanto André recebeu de pagamento, basta dividir os R$ 2.000,00 por 30 dias e descobrir quanto vale o dia trabalhado. Depois é só multiplicar o resultado pelos 18 dias que ele trabalhou. Assim,

$$\frac{2000}{30} \cdot 18 = 66,66 \cdot 18 = 1.200,$$

ou seja, ele recebeu R$ 1.200,00 pelos 18 dias trabalhados.

2.2.3.1 Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são ditas diretamente proporcionais quando uma grandeza aumenta a outra também aumenta na mesma proporção. Do mesmo modo, se uma grandeza diminui a outra também diminui na mesma proporção.

Definição 2.5 Duas grandezas variáveis dependentes são *diretamente proporcionais* quando a razão entre os valores da 1ª grandeza é igual a razão entre os valores correspondentes da 2ª grandeza.

Exemplo 2.6 Imagine alguém dirigindo um carro a uma velocidade constante de $50km/h$, (1ª grandeza - velocidade (km)). Em uma hora e meia, ele percorrerá $75km$ (2ª grandeza -

espaço percorrido (km)). Se a velocidade dobrar, teremos $100km/h$. Assim, em uma hora e meia ele andará $150km$ e assim, sucessivamente. Daí, podemos concluir que o aumento é proporcional:

$$\frac{1}{2} = \frac{50\ km/h}{100\ km/h} = \frac{75\ km}{150\ km}.$$

2.2.3.2 Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são ditas inversamente proporcionais quando uma grandeza aumenta a outra diminui na mesma proporção. Do mesmo modo, se uma grandeza diminui a outra aumenta na mesma proporção.

Definição 2.6 Duas grandezas variáveis dependentes são *inversamente proporcionais* quando a razão entre os valores da 1ª grandeza é igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da 2ª grandeza.

Exemplo 2.7 Imagine alguém dirigindo um carro a uma velocidade constante de 60 km/h, (1ª grandeza - velocidade (km)), em uma hora (2ª grandeza - tempo gasto para percorrer (h)), ele percorrerá $60km$. Observe que quando duplicamos a velocidade, o tempo ficará reduzido a metade. Assim em 120 km/h o tempo gasto será de meia hora, ou seja, 30 minutos; quando quadruplicamos a velocidade, o tempo ficará reduzido a quarta parte. Do mesmo modo 240 km/h o tempo gasto será a quarta parte de uma hora, ou seja, 15 minutos. Daí, podemos concluir que o aumento da velocidade é inversamente proporcional ao tempo gasto para percorrer o mesmo percurso.

2.2.3.3 Regra de três simples

Uma das formas mais comum de calcular uma porcentagem é usando a proporção, conhecida como Regra de Três Simples. Essa regra consiste em encontrar um quarto valor desconhecido e pode ser utilizada no cálculo de alguns problemas simples de matemática financeira.

Exemplo 2.8 - Um calça jeans custa R$ 120,00. Paula pretende comprar a calça pagando à vista e por isso vai pagar 15% a menos que o preço anunciado. Quanto Paula irá economizar na compra?

Usando a noção de razão, vamos determinar o desconto concedido a Paula, ou seja, 15% de R$ 120,00.

Temos que R$ 120,00 corresponde ao todo 100 % e 15% é $\frac{15}{100}$. Assim, temos:

$$\frac{15}{100} \; de \; 120 = \frac{15}{100} \cdot 120 = 0,15 \cdot 120 = 18.$$

Isso quer dizer que o desconto de 15% sobre R$ 120,00 é igual a R$ 18,00.

Outra maneira de resolver esse problema é encontrar o valor correspondente a 1% de R$ 120,00. Em seguida, multiplicar esse valor por 15, já que, o valor percentual pedido são 15%. Daí,

$$\frac{1}{100} \; de \; 120 = \frac{1}{100} \cdot 120 = 0,01 \cdot 120 = 1,2 \cdot 15 = 18.$$

Ou seja, o desconto é de $R\$ \; 18,00$.

Agora, vamos resolver esse problema usando a Regra de Três Simples. Considere x o valor em reais do desconto de 15%. Essa é a primeira grandeza. A outra grandeza são os números de 0 a 100. Veja os dados representados na figura 2.2.

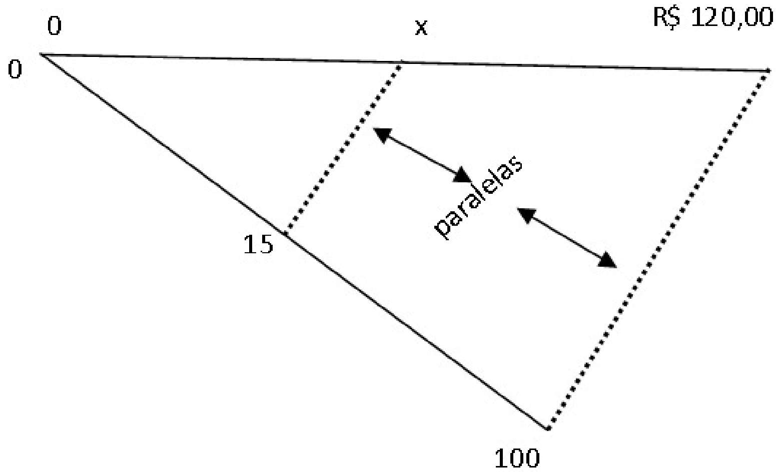


Figura 2.2: Dados sobre o problema

Pelo Teorema de Tales,

$$\frac{x}{120} = \frac{15}{100}.$$

Ou seja,

$$x = \frac{15}{100} \cdot 120 = 18.$$

Logo, o desconto é de $R\$ \; 18,00$.

2.3 Os conteúdos de matemática financeira no ensino médio.

2.3.1 Aumentos e descontos

2.3.1.1 Fator de atualização

Definição 2.7 A razão entre dois valores de uma grandeza em tempos divergentes (passado, presente ou futuro) é chamado de *fator de atualização (f).*

Na divisão entre dois números quaisquer, há três possíveis resultados: maior que 1, igual a 1 ou menor que 1. Quando igual a 1, diz-se que um valor é 100 %, ou seja, $f = 1$ (o fator é neutro). Porém, quando o resultado da divisão for *menor que 1*, por exemplo, $\frac{X}{Y} = 0,80$, diz-se: X é 20% menor que Y ou ainda, X é 80% de Y. No caso do resultado dessa divisão ser *maior que 1*, por exemplo, $\frac{X}{Y} = 1,10$, diz-se: X é 10% maior que Y ou X é 110% de Y, ou seja, 10% maior.

Resumindo: Na comparação de dois valores distintos de uma mesma grandeza,

$$f = \frac{valor\ novo}{valor\ antigo}$$

chama-se *Aumento (ou acréscimo de valor)* quando $f > 1$ e *Desconto (ou perda de valor)* quando $f < 1$ e se $f = 1$ quer dizer que não houve variação.

Para obter a taxa percentual(t) a partir do fator de atualização (f):

- Se $f > 1, f = 1 + t$; daí a taxa é t = f - 1, em números decimais, ou seja, obtém-se a taxa unitária sendo necessário multiplicá-la por 100 para converte-la em taxa percentual;

- Se $f < 1, f = 1 - t$; daí a taxa é t = 1 - f, em números decimais, ou seja, obtém-se a taxa unitária sendo necessário multiplicá-la por 100 para converte-la em taxa percentual.

Vamos entender os conceitos acima com o auxílio do exemplo 2.8.

Exemplo 2.9 Na famosa liquidação conhecida como "Black Friday"um patins infantil que custava R$ 170,00 estava sendo vendido por R$ 79,00. Vamos determinar o fator de atualização *(f)* e a taxa percentual *(t)* aplicados nesta promoção.

Usando

$$f = \frac{valor\ novo}{valor\ antigo} = \frac{79}{170} \cong 0,46,$$

temos que: $f = 0,46$ e $f = 0,46<1$, então, podemos concluir que este produto sofreu uma redução em relação ao valor inicial. Em outras palavras, 79 é 54% menor que 170, ou ainda, 79 é 46% de 170.

Para calcular a taxa percentual de desconto, vamos usar: Como $f < 1$, usa-se $f = 1 - t$.

Manipulando a igualdade $f = 1 - t$, obtemos: $t = 1 - f$, em números decimais. Substituindo, $f = 0,46$, temos:

$$t = 1 - 0,46 = 0,54$$

Portanto, a taxa unitária é $0,54$ em números. Para encontrar a taxa percentual basta multiplicar a taxa unitária por 100, daí $0,54 \cdot 100 = 54\%$ (Diz-se: 79 é 54% menor que 170)

2.3.1.2 Aumento e Desconto Sucessivos

A partir de vários fatores de atualização individuais é possível calcular o fator de atualização “acumulado”, isto é, para estabelecer vários *aumentos* e/ou *descontos* basta multiplicar todos os fatores individuais. Assim,

$$f_{acumulado} = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot \cdots$$

Exemplo 2.10 Sobre o preço de um certo produto foram aplicados um desconto de 12% e depois um acréscimo de 9%. Vamos determinar em termos de aumento e/ou desconto, o preço final em relação ao inicial.

Usando as fórmulas para encontrar os fatores de atualizações, fator acumulado e as taxas temos:

$$f_1 = 1 - 0,12 = 0,88$$

$$f_2 = 1 - 0,12 = 0,88$$

$$f_3 = 1 + 0,09 = 1,09,$$

Logo,

$$f_{acumulado} = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = 0,88 \cdot 0,88 \cdot 1,09 \cong 0,8440 < 1.$$

Dessa forma o preço final do produto em relação ao preço inicial **decresceu**. Para calcular a taxa, como $f < 1$, temos

$$t = 1 - 0,8440 = 0,156 \cdot 100 = 15,60\%.$$

Portanto, o preço final decresceu 15,60% em relação ao preço inicial.

2.3.2 Capital e juros

As palavras capital e juros são recorrentes quando o assunto é empréstimo de dinheiro, seja por uma instituição financeira ou por uma pessoa física que se dispõe a esse tipo de transação de maneira informal com base na confiança. O fato é que, quando alguém empresta um capital C (chamado de principal) a outrem por um certo período de tempo *(n)*, decorrido esse tempo, essa pessoa passa a ter direito em receber de volta o seu capital C, acrescido de uma remuneração J (chamada de juros) pelo empréstimo. É comum chamar de Montante *(M)* o valor total recebido após essa transação comercial. Assim, $C + J = M$. A razão $i = \dfrac{J}{C}$, que é a *taxa de crescimento do capital*, estará sempre relacionada ao período da operação e é chamada de *taxa de juros*.

É importante ressaltar a diferença entre os juros simples e compostos. Nos juros simples, o juro é calculado pelo produto do capital pela taxa em todos os períodos, ou seja, é sempre constante e os juros são pagos apenas no final da operação. Enquanto que nos juros compostos, a capitalização é feita sobre montante produzido no final de cada período. Exemplo: os juros do 1º período (capital vezes a taxa) são acumulados ao capital e formam juntos o primeiro montante M_1; os juros do 2º período (M_1 vezes a taxa) são acumulados ao M_1 e formam juntos o montante M_2, assim sucessivamente. Portanto, os juros que são gerados a cada período acumula ao montante inicial deste período e esta soma passa a render novos juros no próximo período.

Para melhor compreensão, se faz necessário distinguir uma taxa percentual de uma taxa unitária.

Definição 2.8 *Taxa Percentual* é uma forma especial de representar uma razão de denominador igual a 100. E esse denominador pode ser substituído pelo símbolo "%".

Exemplo 2.11 Dizer que a taxa i é igual a 4% a.m., significa que a cada R\$ 100,00 aplicados rendem R\$ 4,00 de juros por mês.

Definição 2.9 *Taxa Unitária* é resultante da divisão por 100 (taxa percentual), a qual é transformada em um número decimal equivalente.

Exemplo 2.12 Dizer que a taxa i é igual a 0,04 a.m., significa que a cada R\$ 1,00 aplicados rendem R\$ 0,04 de juros por mês.

Observação 2.1 Para converter a taxa percentual em taxa unitária basta dividir a taxa percentual por 100 e, consequentemente, para converter a taxa unitária em taxa percentual basta multiplicar a taxa unitária por 100..

Observação 2.2 Os dois itens que serão citados abaixo, são importantíssimos para a utilização das fórmulas dos juros e Montante que serão apresentados a seguir e devem ser observadas no regime de capitalização simples e composta.

1) A taxa *(i)* e o prazo como número de período *(n)* devem estar dispostos de acordo com a mesma unidade de tempo. Isto é, se o tempo está em ano a taxa deve ser anual, se o tempo estiver em mês a taxa deve ser mensal e assim por diante. Caso estejam em unidade de tempo diferentes, é imprescindível que se faça conversão para a mesma unidade.
2) A taxa de juros deve sempre estar convertida em taxa unitária, toda vez que, os cálculos forem efetuados sem usar o comando % da calculadora e/ou planilha eletrônica.

2.3.3 Progressões aritméticas e os juros simples

2.3.3.1 Progressões aritméticas

É habitual na vida cotidiana encontrar grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais. Por exemplo, a produção de calças em uma confecção aumentar mensalmente em 50 peças. Uma Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência de números $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ onde a diferença de um termo a_n qualquer da sequência, para $n \geq 2$, pelo seu termo imediatamente anterior a_{n-1} é uma constante, a qual dá se o nome de razão *(r)*. Assim, uma P.A. de razão r é uma sequência (a_n) que pode ser escrita como

$$a_n - a_{n-1} = r,$$

para todo n natural, incluindo o *zero*. Os termos de uma P.A. são numerados normalmente com os índices a partir do índice 1: $a_1, a_2, a_3, ...$, porém, em alguns casos (cálculos dos juros, por exemplo) é mais interessante começar pelo a_0, como mostra o exemplo 2.13.

2.3.3.2 Generalização da fórmula do termo geral da P.A.

Tomando uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ e usando $a_n - a_{n-1} = r$ advindo de sua definição, podemos escrever $a_2 = a_1 + r$. Como $a_3 = a_2 + r$ e substituindo o valor de a_2 em a_3, temos $a_3 = a_1 + r + r = a_1 + 2r$. Do mesmo modo, $a_3 = a_1 + 2r$ como $a_4 = a_3 + r$ e substituindo o valor de a_3 em a_4, temos: $a_4 = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$. E assim, sucessivamente.

De modo geral, fazendo esse procedimento n vezes teremos $(n-1)$ vezes a razão. Assim, podemos escrever: $a_n = \ a_1 \ + \ (n-1) \ \cdot \ r$.

Nessa fórmula, vamos adotar a seguinte termologia: a_n é o termo geral, a_1 o primeiro termo da sequência, n o número de termos considerados e r a razão da P.A.. Observe que, se tivéssemos começado por a_0, teríamos: $a_n = \ a_0 \ + \ n \ \cdot \ r$.

Este foi o método desenvolvido por Bertrand Russel para resolver os próximos termos.

Considere a seguinte sentença. $P(n) : a_n = a_1 + (n-1)r$, onde $n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Inicialmente, vamos verificar se o item (i) é verdadeira para n = 1.

(i) $P(1)$ é verdadeira, já que $a_1 = a_1$.

(ii) Suponhamos $P(n)$ verdadeira, para um certo $n \in \mathbb{N}$. Isto quer dizer que, para este valor de n, temos $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Somando r a ambos os lados dessa igualdade e fazendo as manipulações adequadas, obtemos $a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1)r + r = a_1 + nr$;

Portanto, $a_{n+1} = a_1 + nr$, o que mostra que *P(n+1)* é verdadeira.

Assim, provamos que se *P(n)* é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$, então *P(n+1)* também é verdadeira. Logo, pelo Princípio da Indução Finita, podemos concluir, que P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.3.3.3 Regime de capitalização simples

Uma das principais aplicações da Progressão Aritmética é a operação de empréstimo no regime de capitalização simples. Nesse sistema, podemos generalizar: Um capital C, aplicado a uma taxa de juros i ao período, produz juros J, no fim de n períodos.

Exemplo 2.13 Um capital de R\$ 1.000,00 foi aplicado a uma taxa de 5 % a.a. (ao ano) durante 4 anos, no regime de capitalização simples. Nesse sistema de capitalização, somente o capital aplicado é que rende juros então, o juro mensal será de $J = C \cdot i = 1000 \cdot 0,05 = 50$, sendo 4 anos de aplicação, total de juros produzidos neste período foi de R\$ 200,00 e o montante após 4 anos foi de R\$ 1.200,00. Veja esses valores na tabela 2.2:

Tabela 2.2: Sistema de capitalização de juros simples.

Período	Valor atual da dívida	Juro em R\$	Valor total
Início	1000	-	-
1 º ano	1000	50	1050 (a_1)
2 º ano	1050	50	1100 (a_2)
3 º ano	1100	50	1150 (a_3)
4 º ano	1150	50	1200 (a_4)

Observe que é possível escrever a sequência destes valores devidos em uma Progressão Aritmética. Usando como primeiro termo ($a_1 = 1050$) o valor após o primeiro ano, a razão ($r = 50$) e o período ($n = 4$). Usando $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, onde n é o numero de termos da P.A., temos:

$$a_4 = 1050 + (4-1) \cdot 50 = 1050 + (3) \cdot 50 = 1050 + 150 = 1200$$

Veja também que, essa P.A. poderia ser melhor visualizada usando (a_0) em vez do (a_1) no termo geral, assim: $a_n = a_0 + (n) \cdot r$, assim o capital inicial pode ser utilizado como ($a_0 = 1000$), daí:

$$a_4 = 1000 + (4) \cdot 50 = 1000 + 200 = 1200,$$

Assim, no final do 4º ano, o valor final da dívida é de R\$ 1.200,00.

2.3.3.4 Fórmula dos juros e do montante

Vimos pelo exemplo anterior que, no regime de capitalização simples, os juros em todos os períodos são iguais e é calculado pelo produto do *capital inicial* pela *taxa* naquele período. Então, para deduzir a fórmula do juros simples após um certo período, temos:
Considerando o *capital inicial C,* aplicado a juros simples à uma *taxa (i)* por um período, durante *n períodos* de tempo.

Tabela 2.3: Fórmula do juro simples a partir de n períodos de tempo.

Períodos	Cálculo do juro
Juros após 1 º período	$J_1 = C \cdot i$
Juros após 2 º período	$J_2 = C \cdot i + C \cdot i$
Juros após 3 º período	$J_3 = C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i$
.	.
.	.
.	.
Juros após n º período	$J_n = C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + \cdots + C \cdot i = (C \cdot i)n$

Portanto, podemos escrever a fórmula para o juros simples em n períodos tempos, como:

$$J = (C \cdot i)n.$$

A fórmula do Montante é consequência:

$$M = C + J = C + (C \cdot i)n,$$

colocando o C em evidência, temos:

$$M = C(1 + i \cdot n)$$

Exemplo 2.14 Um capital de R$ 2.200,00 é aplicado no regime de capitalização simples durante 6 meses, à taxa de 12% a.a.Vamos obter os juros e o montante.

De acordo com dados fornecidos, temos que $C = R\$\ 2.200,00$, taxa $i = 12\% a.a.$ Convertendo em taxa unitária, $i = \dfrac{12}{100} = 0,12$. Observe que o tempo está em meses, convertendo para anos, temos: $n = 6$ meses é igual $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$ ano. Aplicando a fórmula o juros simples produzido no período é:

$$J = (C \cdot i)n = (2200 \cdot 0,12)\frac{1}{2} = 132$$

Ou seja, os juros produzidos nesse período foi de R$ 132,00. Como o montante é a soma do capital com os juros, temos que $M = C + J = 2.200 + 132 = 2.332$. Com isso, o montante é de R$ 2.332,00.

Outra maneira de resolver, seria aplicar a fórmula do montante:

$$M = C(1 + i \cdot n)$$

e desse valor subtrair o capital inicial e assim obter os juros. Então,

$$M = C(1 + i \cdot n) = 2.200 \cdot (1 + 0,12 \cdot \frac{1}{2}) = 2.200 \cdot (1 + 0,06) = 2.200 \cdot 1,06 = 2.332.$$

Agora, basta usar:

$$J = M - C = 2.332 - 2.200 = 132,00.$$

Logo, o montante e os juros produzidos no referido intervalo de tempo são, respectivamente, R$ 2.332,00 e R$ 132,00.

2.3.4 Progressões geométricas e os juros compostos

2.4 Progressões geométricas

É comum ouvir expressões como "a população de insetos cresce exponencialmente"ou "o salário mínimo sobe de escada e o preço dos produtos de elevador". Estas expressões podem ser traduzidas a partir de uma Progressão Geométrica (P.G.), ou seja, uma sequência de números $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ onde a divisão de um termo a_n qualquer da sequência, para $n \geq 2$, pelo seu termo imediatamente anterior a_{n-1} é uma constante, a qual dá se o nome de *razão (q)*. Assim, uma P.G. de razão q é uma sequência (a_n) que pode ser escrita como

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q,$$

para todo n natural.

2.4.1 Generalização da fórmula do termo geral da P.G.

Tomando uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ e usando $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$ advindo de sua definição, podemos escrever:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$

$a_5 = a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q = a_1 \cdot q^4$

e, de um modo genérico, $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, onde n é o numero de termos da P.G.

Considere o termo geral da P.G. a seguinte sentença $P(n) : a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, onde $n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo o primeiro termo a_1 e razão q.

(i) $P(1)$ é verdadeira, já que $a_1 = a_1$.

Logo, P(1) é verdadeira.

(ii) Suponhamos P(n) verdadeira para um certo $n \in \mathbb{N}$. Isto quer dizer que, para este valor de n, temos: $P(n) : a_n = a1 \cdot q^{(n-1)}$

Multiplicando por q em ambos os lados dessa igualdade e fazendo as manipulações adequadas, obtemos:

$a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{(n-1)} \cdot q = a_1 \cdot q^n$;

Portanto,

$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$, o que mostra que *P(n+1)* é verdadeira.

Assim, provamos que *P(n)* é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$, então *P(n+1)* também é verdadeira. Logo, pelo Princípio da Indução Finita, podemos concluir, que *P(n)* é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.4.1.1 Progressões geométricas e o regime de capitalização composta

Uma das mais importantes aplicações da Progressão Geométrica é a operação de empréstimo submetido ao regime de capitalização composta. Este é o regime de capitalização usual das instituições financeiras e do comércio em geral. Neste sistema, o diferencial do juros simples é o fato de que os juros produzidos no primeiro período agregado ao capital inicial formando o montante M_1. Na realização do cálculo dos juros no segundo período o M_1 passa a ser o novo capital no qual a taxa é multiplicada e, assim, sucessivamente.

Exemplo 2.15 Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado a uma taxa de 5% a.a. durante 4 anos, no regime de capitalização composta. Nos juros compostos, o juro que é criado em cada período (montante do início do período multiplicado pela taxa) se acumula ao montante do início do período e essa nova quantia passa a render juro no próximo período. No entanto, nesse exemplo os juros produzidos nesse período de 4 anos foram de R$ 215,50 e o montante final foi de R$ 1.215,50.

Os valores encontrados ano a ano nesse regime de capitalização são:

Tabela 2.4: Valores agregados ano a ano pelo regime de capitalização composta.

Período	Valor Atual da dívida	Juros em R$	Valor total
Início	1000	-	-
1 º ano	1 000	50	1050
2 º ano	1 050	52,50	1102,50
3 º ano	1 102, 50	55,12	1157,62
4 º ano	1 157, 62	57,88	1215,50

Vamos escrever os valores da última coluna da tabela 2.4 como uma sequência que representa uma progressão geométrica. Assim, (1.050; 1.102,50; 1.157.62; 1.215,50) onde o primeiro termo ($a_1 = 1050$) após o primeiro ano, a razão ($q = 1 + i = 1 + 0,05 = 1,05$) como sendo o valor do fator multiplicativo que permite a atualização do valor e o período ($n = 4$). Usando $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, onde n é o numero de termos da P.G., temos:

$$a_4 = 1050 \cdot 1,05^{(4-1)} = 1050 \cdot 1,05^{(3)} = 1050 \cdot 1,157625 = 1215,50.$$

Veja também que essa P.G. poderia ser melhor visualizada usando (a_0) em vez do (a_1) no termo geral, assim: $a_n = \ a_0 \cdot \ q^{(n)}$ assim o capital inicial pode ser utilizado como ($a_0 = 1000$), daí:

$$a_4 = \ 1000 \cdot \ 1,05^{(4)} = \ 1000 \cdot \ 1,1,2155 = 1215,50.$$

Assim, no final do 4º ano, o valor final da dívida é de R$ 1.215,50.

2.4.1.2 Juros Compostos - fórmula do montante

Vimos que no regime de capitalização composta, os juros produzidos em cada período são anexados ao montante do início do período, e este passa ser o novo montante que irá produzir juros no período seguinte. Vamos adequar a fórmula do termo geral da P.G. provada por indução aos termos da fórmula do montante no regime de capitalização composta. Supondo o montante $M_n = a_n$, o capital $C = a_0$, um mais a taxa unitária de juros $(1 + i) = q$ e n é o período de tempo. Assim,

$$M_n = C(1 + i)^n$$

Exemplo 2.16 Aplicando R$ 4.000,00 a juros compostos, a 5% a.m. durante 4 meses, qual o valor do montante e dos juros adquiridos nesse período?

Utilizando os dados fornecidos, temos: $C = 4.000$, $i = 5\% a.m. = 0,05$ $n = 4$ meses, $M =?$ e $J =?$. Aplicando-os na fórmula do Montante para os juros compostos,

$$M_n = C(1 + i)^n,$$

substituindo os valores referidos, segue:

$$M_4 = 4000(1 + 0,05)^4.$$

Realizando a operação entre parêntese obtêm:

$$M_4 = 4000(1,05)^4.$$

Resolvendo a potenciação e usando seu valor aproximado, com duas casas decimais, temos:

$$M_4 \cong 4000 \cdot 1,21.$$

Estas operações resultaram no aproximado para o montante de:

$$M_4 \cong 4.840.$$

Logo, o montante é de R$ 4.840,00. Como o $M = C + J$, invertendo os termos da igualdade, temos, sem perca de generalidade $J = M - C$. Então, $J = 4.840 - 4.000 = 840$. Ou seja, os juros são R$ 840,00.

Observação 2.3 Ao executar de cálculos do juros compostos recomenda-se o uso da *calculadora científica ou das planilhas eletrônicas.* O uso da aproximação com duas casas decimais pode gerar uma diferença considerável nos cálculos. Por exemplo, $(1,05)^4 \cong 1,21550625 \cong 1,21$. Tomando, $4.000 \cdot 1,21 = 4.840$, enquanto, usando a calculadora científica esse valor seria superior, observe:

$$4.000 \cdot (1,05)^4 = 4.862,02.$$

Veja que há uma diferença maior do que R$ 22,00.

2.4.2 Taxas proporcionais e equivalentes

2.4.2.1 Taxas proporcionais

Dizemos que duas taxas de juros são proporcionais quando aplicadas ao mesmo capital inicial em períodos diferentes geram o mesmo montante.

Observação 2.4 Taxas proporcionais só ocorrem no regime de capitalização simples.

Exemplo 2.17 A taxa de 2% ao mês é proporcional a taxa de 24% a.a.. Vamos calcular os juros produzidos em 1 ano aplicando um capital inicial de R$ 100,00.

De acordo com dados do enunciado, temos que $i = \dfrac{2}{100} a.m. = 0,02$. Como 1 ano corresponde a 12 meses, então, $n = 12$ meses. Observe que a taxa e o tempo devem estar na mesma unidade. Tendo $C = 1.000$ e usando a fórmula dos juros simples

$$J = C \cdot i \cdot n,$$

substituindo os valores correspondentes e efetuando os cálculos, encontramos

$$J = 1.000 \cdot 0,02 \cdot 12 = 24.$$

Assim, os juros produzidos foram R$ 24,00. Ou ainda, usando a taxa de $\dfrac{24}{100} a.a. = 0,24$; $n = 1$ *ano* aplicados no mesmo capital de R$ 1.000,00 e calculando usando a fórmula dos juros simples,$J = C \cdot i \cdot n$, aplicando os valores especificados e efetuando as multiplicações necessárias, obtêm-se

$$J = 100 \cdot 0,24 \cdot 1 = 24.$$

Ou seja, os juros produzidos em 1 ano são de R$ 24,00. Neste caso, dizemos que as taxas 2% a.m. e 24% a.a. são taxas equivalentes.

2.4.2.2 Taxas equivalentes

Considerando o *regime de capitalização composta,* têm-se que duas *taxas são equivalentes* quando aplicadas em tempos diferentes a um mesmo capital inicial num mesmo período produzem o mesmo montante.

Observação 2.5 Taxas equivalentes só ocorrem no regime de capitalização composta.

Definição 2.10 Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I tal que

$$(1 + I) = (1 + i)^n.$$

Exemplo 2.18 Vamos determinar a taxa anual I de juros compostos equivalentes a 13% a.m.

Usando a fórmula de taxas equivalentes e os dados fornecidos, sendo a taxa unitária mensal fornecida $i = 0,13$ e $n = 12$ meses, temos

$$(1 + I) = (1 + 0,13)^{12}.$$

Resolvendo as operações, obtemos $1 + I = 4,3345231$. Usando o valor aproximando com duas casas decimais, segue que $1 + I = 4,33$, isso equivale a, $I = 4,33 - 1 = 3,33$, isto é, taxa unitária igual a 3,33. Para obter a taxa percentual, basta multiplicar o resultado por 100. Assim, $3,33 \cdot 100 = 333$. Ou seja, 333% a.a. Logo, a taxa anual equivalente a 13% a.m. é de 333%.

2.4.3 Equivalência de capitais

A importância fundamental em compreender equivalência de capitais nas aplicações práticas do cotidiano, é que este processo permite ao consumidor transformar formas de pagamentos (ou recebimentos) em outras equivalentes (deslocar quantias no tempo). Ou seja, permite escolher a melhor opção a partir da comparação entre as alternativas. Por exemplo, na compra de um bem em que se dispõe de fundos para a compra à vista e este mesmo bem é ofertado a prazo, em parcelas com valor fixo. O consumidor pode fazer o comparativo das duas opções através do conceito de equivalência, sabendo que seu dinheiro hoje pode ser aplicado a juros compostos por uma taxa específica.

Definição 2.11 No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0(1+i)^n$,

Entretanto, essa definição pode ser interpretada da seguinte forma: uma quantia, cujo valor atual é A, equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a $F = A(1+i)^n$,

Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais: Para obter o valor futuro, basta multiplicar o valor atual por $(1 \; + \; i)^n$. Para obter o valor atual, basta dividir o valor futuro por $(1 \; + \; i)^n$.

Para tornar esses conceitos mais compreensíveis vamos analisar o exemplo a seguir.

Exemplo 2.19 João Paulo pretende para comprar um novo aparelho de celular que custa R$ 2.100,00. E tem duas opções de pagamento para escolher:

i) à vista, com 8% de desconto.

ii) em três prestações mensais iguais fixas e sem descontos, com a primeira parcela a ser paga um mês após a compra.

Para ajudar João Paulo escolher a melhor opção, sabendo que seu dinheiro na poupança rende 0,756% ao mês, vamos analisar as possibilidades de compra disponíveis para ele. Considerando a igual ao valor a ser pago com o desconto e b o valor pago parcelado temos que:

i) Pagando à vista, ele tem 8% de desconto (D), então:

$$D = \frac{8}{100} \cdot 2.100 = 0,08 \cdot 2.100 = 168.$$

Daí, ele receberá $R\$ \ 168,00$ de desconto, logo, vai desembolsar $a = 2.100 - 168 = R\$ \ 1.932,00$ no ato da compra.

ii) No caso da compra parcelada e sabendo que seu dinheiro tem rendimento mensal de 0,756%, vamos usar a fórmula fundamental da equivalência de capitais para efetuar esse cálculo:
Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1+i)^n$, neste caso, $n = 3$ e $i = 0,756$ a.m., temos:

$$b = \frac{700}{1+0,00756} + \frac{700}{(1+0,00756)^2} + \frac{700}{(1+0,00756)^3} = 2.068,64.$$

Isto é, $b = 2.068,64$. Logo, no final dos três meses ele terá desembolsado R$ 2.068,64. Assim, comparando os valores obtidos $a = R\$ \ 1.932,00$ e $b = R\$ \ 2.068,64$, a melhor alternativa nesse caso é comprar à vista.

A seguir faremos mais um exemplo de situação problema enfrentada diariamente pelos consumidores. Com essa atividade tem-se a pretensão de justificar a necessidade da postura investigativa e observadora do cliente diante das opções de crédito oferecida pelas instituições financeiras.

Atividade 2.1 Pagamento da parcela mínima da fatura do cartão de crédito.

Vamos analisar a situação hipotética de um consumidor que tenha o saldo devedor de R$ 1.500,00 na fatura do cartão de crédito. Suponha que ele opte por pagar parcela mínima, que corresponda a 20% do total da fatura e que não adquira mais dívida nesse cartão nos próximos meses. Nesse momento vamos trabalhar apenas com os juros rotativos do cartão de crédito, os demais encargos cobrados neste tipo de financiamento serão trabalhados em outra atividade no capítulo três deste trabalho.

Vamos considerar quatro instituições financeiras denominadas por: banco A, banco B, banco C e banco D. As taxas são reais correspondentes ao dia pesquisado conforme tabela 2.5.

Tabela 2.5: Taxas de Juros: pessoa física. Site Oficial do Banco Central do Brasil: Acesso em: 20/12/2016 – cartão de crédito rotativo. Ver tabela completa no Apêndice A.3 - Figura A.2

Instituições Financeiras	(% ao mês)	(% ao ano)
Banco A	15,51	464,07
Banco B	17,03	560,25
Banco C	17,20	571,83
Banco D	18,05	632,66

Para compreender como funciona os juros cobrados nesse sistema de crédito, vamos calcular quanto esse consumidor pagará de juros ao longo dos meses, supondo que o consumidor seja cliente do banco B.

Parcela mínima.

$$20\% \cdot 1.500 = \frac{20}{100} \cdot 1.500 = 0,20 \cdot 1.500 = 300$$

Dessa forma, o valor a ser financiado será de: $1.500 - 300 = 1.200$, ou seja, R\$ 1.200,00. Assim, no final do primeiro mês, aplicados os juros rotativos, neste caso, $i = 17,03\%$a.m.$= 0,1703$, usando o raciocínio análogo ao cálculo do montante nos juros compostos, vamos calcular o saldo devedor:

$$1.200 \cdot (1 + i) = 1.200 \cdot (1 + 0,1703) = 1.200 \cdot (1,1703) = 1.404,36,$$

Isto é, R\$ 1.404,36. Observe que a expressão $1.200 \cdot (1 + i)$ pode ser reescrita da seguinte forma para $n = 1$:

$$1.200 \cdot (1 + i) = 1.500 \cdot \frac{80}{100} \cdot (1 + i) = 1.500 \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 + i).$$

No final do segundo mês, serão aplicados novamente os juros rotativos, onde a taxa continua, $i = 17,03\%$a.m.$= 0,1703$. Observe que, sobre o valor R\$ 1.404,36 $= 1.200 \cdot (1+0,1703) = 1.500 \cdot \frac{4}{5} \cdot (1+0,1703)$, antes de aplicar novamente os juros rotativos, o consumidor deverá efetuar o pagamento mínimo de 20% desse valor. Ou seja, os juros rotativos são incididos sobre 80% de R\$ 1.404,36, que 80% equivale a $\frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ e deve-se aplicar (1+0,1703). Esse cálculo pode ser escrito assim:

$$1.500 \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 + 0,1703) \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 + 0,1703) = 1.500 \cdot (\frac{4}{5})^2 \cdot (1,1703)^2 = 1.314,81,$$

isto é, R$ 1.314,81. Reescrevendo a expressão acima obtemos:

$$1.500 \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 + 0,1703)\frac{4}{5} \cdot (1 + 0,1703) = 1.500 \cdot (\frac{4}{5})^2 \cdot (1 + 0,1703)^2.$$

Para $n = 2$, podemos escrever:

$$1.500 \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 + i) \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 + i) = 1.500 \cdot (\frac{4}{5})^2 \cdot (1 + i)^2.$$

Prosseguindo, para $n = 3$, temos:

$$1.500 \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 + i) \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 + i) \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 + i) = 1.500 \cdot (\frac{4}{5})^3 \cdot (1 + i)^3.$$

Dessa forma, ao final de n meses o saldo devedor do cliente será de:

$$1.500 \cdot (\frac{4}{5})^n \cdot (1 + i)^n.$$

Considerando a expressão acima, qual o valor da dívida daqui um ano caso o consumidor seja cliente do banco A e/ou do banco D? Sabendo que um ano é igual a 12 meses, fazendo os cálculos para o banco A nesse caso, a taxa mensal $i = 15,51\% = 0,1551$, temos:

$$1.500 \cdot (\frac{4}{5})^{12} \cdot (1 + 0,1551)^{12} = 1.500 \cdot (\frac{4}{5})^{12} \cdot (1,1551)^{12} = 581,57.$$

Observando o fato de que a dívida inicial era de R$ 1.500,00 e um ano depois essa dívida está em R$ 581,57, poderia considerar que aproximadamente 61% da dívida teria sido paga, se não fosse o fato de o consumidor ter pago de parcela mínima mensal R$ 2.419,45, como mostra a tabela 2.6., onde V_1 representa o valor a ser financiado após o pagamento da parcela mínima e V_2 o valor da dívida aplicados após aplicar os juros rotativos.

Tabela 2.6: Cálculos da parcela mínima no banco A durante um ano.

n	V. inicial	Parc. mínima	V_1	J. rotativos	V_2
0	1.500,00				
1	1.500,00	300,00	1.200,00	186,12	1.386,12
2	1.386,12	277,22	1.108,90	171,99	1.280,89
3	1.280,89	256,18	1.024,71	158,93	1.183,64
4	1.183,64	236,73	946,91	146,87	1.093,78
5	1.093,78	218,76	875,02	135,72	1.010,74
6	1.010,74	202,15	808,59	125,41	934,00
7	934,00	186,80	747,20	115,89	863,09
8	863,09	172,62	690,48	107,09	797,57
9	797,57	157,51	638,05	98,96	737,02
10	737,02	147,40	589,61	91,45	681,06
11	681,06	136,21	544,85	84,51	629,36
12	629,36	125,97	503,48	78,09	581,58
Total		2.419,45			

Vejamos os cálculos agora para o banco D, onde a taxa mensal $i = 18,05\% = 0,1805$, durante os 12 meses. O valor da dívida é:

$$1.500 \cdot (\frac{4}{5})^{12} \cdot (1 + 0,1805)^{12} = 1.500 \cdot (\frac{4}{5})^{12} \cdot (1,1805)^{12} = 761,82.$$

Confira na tabela 2.7 os cálculo desse financiamento durante um ano, onde V_1 representa o valor a ser financiado após o pagamento da parcela mínima e V_2 o valor da dívida aplicados após aplicar os juros rotativos.

Tabela 2.7: Cálculos da parcela mínima no banco D durante um ano.

n	V. inicial	Parc. mínima	V_1	J. rotativos	V_2
0	1.500,00				
1	1.500,00	300,00	1.200,00	216,60	1.416,60
2	1.416,60	283,32	1.133,28	204,56	1.337,84
3	1.337,84	267,57	1.070,27	193,18	1.263,45
4	1.263,45	252,69	1.010,76	182,44	1.193,21
5	1.193,21	238,64	954,56	172,30	1.126,86
6	1.126,86	225,37	901,49	162,72	1.064,21
7	1.064,21	212,84	851,37	153,67	1.005,04
8	1.005,04	201,01	804,03	153,67	957,70
9	957,70	191,54	766,16	138,29	904,46
10	904,46	180,89	723,56	130,60	854,17
11	854,17	170,83	683,33	123,34	806,68
12	806,68	161,34	645,34	116,48	761,82
Total		2.686,04			

Veja que neste caso do banco D, com a taxa mensal um pouco mais alta que no banco A, dos R$ 2.686,04 pagos de parcela mínima mensal apenas R$ 738,18 foram abatidos na dívida inicial. Isso representa que, mesmo o cliente tendo pago quase o dobro da dívida inicial, ainda resta mais de 50% da dívida a ser paga. Isso, sem levar em consideração os demais encargos cobrados pelas instituições financeiras a cada mês. Diante disso, quando o assunto é empréstimo bancário pelas financeira o consumidor deve manter a postura de investigador, ou seja, analisar tudo que está pagando e fazer a melhor escolha.

Os conteúdos matemáticos aqui apresentados, vão de encontro às necessidades teóricas da proposta pedagógica em questão. Em cada tópico propusemos as definições acompanhadas de exercícios práticos resolvidos. Estes conceitos são os mais usados para fundamentar as atividades em sala. Entretanto, no momento de execução, pode ser que surjam novas necessidades de conhecimentos científicos até mesmo interdisciplinares. Como em qualquer seleção, esta foi feita visando atender certos critérios da aplicação da matemática financeira. Porém, podem ser insuficientes para nortear o trabalho diante dos diferentes contextos de aprendizagem.

Capítulo 3

Aplicações em sala de aula.

Neste capítulo abordaremos a história, contexto e realidade da escola onde foi realizada a oficina pedagógica, depois faremos um relato onde abordaremos desde a visão geral, processo, metodologia empregada, os resultados e reflexões. Pretendemos com as indicações de continuidade sugerir algumas atividades para sala de aula envolvendo a matemática financeira e, por último, com as sugestões, elencarmos algumas tecnologias disponíveis que poderão ser usadas em favor da educação financeira. Vale a pena ressaltar que o *software* utilizado neste trabalho foi a planilha eletrônica do *LibreOffice calc* versão 5.3.1 que é de distribuição livre e gratuita, e também da calculadora científica de fácil acesso aos professores e estudantes.

3.1 Colégio Estadual Professor Geraldo Ribeiro da Silva: história, contexto e realidade.

O Colégio Estadual Professor Geraldo Ribeiro da Silva, pertence a rede estadual de ensino de Goiás. Está situado à Rua Visconde de Mauá, s/n, Parque Real na cidade de Aparecida de Goiânia-GO, região metropolitana de Goiânia-GO. O prédio é de propriedade do Estado de Goiás e sua entidade mantenedora é a Secretaria Estadual de Educação e Cultura, cuja Lei de Criação e Denominação: nº 10.344 CEE 21/12/1987. Fundada em 21/12/1987 pelo então Governador do Estado Iris Rezende Machado, com nome em homenagem ao Sr. Geraldo Ribeiro da Silva, que foi professor da Rede Estadual de Goiás por mais de 30 anos e por ser morador e líder comunitário onde prestou muitos serviços a esta comunidade.

A escola tem uma infraestrutura modesta e antiga, com construções horizontais, é composta por oito salas de aulas; um ambiente de laboratório de tecnologias que funciona na mesma sala da biblioteca; uma sala de equipamentos musicais, materiais pedagógicos e esportivos que atendem os projetos Mais Educação e Banda; uma quadra coberta; uma cozinha pequena; banheiros e área externa coberta. As tecnologias disponíveis são: sete computadores ligados em rede, um aparelho de projetor de imagens; uma caixa de som e uma lousa digital. Os computadores não se encontram em bom funcionamento e o laboratório não dispõe de um técnico e/ou dinamizador. Por isso, comparando a outros laboratórios educacionais seu funcionamento deixa a desejar. As salas de aula estão equipadas com quadro branco e kit composto por pincel e apagador. O projeto "rádio na escola" é desenvolvido pelos próprios alunos no recreio nos turnos matutino e noturno. Atualmente são atendidos seiscentos e trinta alunos distribuídos nos três turnos. O maior número de alunos atendidos é no turno matutino, funciona com oito turmas do Ensino Fundamental 2ª fase, com uma média superior a quarenta alunos por sala. No turno vespertino, são oito turmas do Ensino Fundamental 1º fase e no turno noturno são atendidos os alunos do Ensino Médio com uma turma por série. O quadro de profissionais é composto por servidores efetivos e contratados, totalizando quarenta e oito trabalhadores. Os professores são licenciados e pós-graduados, incluindo dois mestres.

A unidade escolar está localizada em meio a setores residenciais de classe média-baixa nas proximidades da grande Goiânia. Como consequência de sua localização, atende alunos de baixa renda, que enfrentam problemas sociais como drogas e violência. A faixa etária abrange a infância, adolescência e fase adulta. A proposta do PPP[1] visa promover os princípios educacionais que estimulam as capacidades criativas, reflexivas e críticas dos alunos, professores e demais funcionários, a fim de contribuir para a formação de cidadãos ativos e participativos na sociedade.

3.2 Oficina pedagógica - relato

3.2.1 Visão geral

As atividades de campo que se refere o presente relato, teve como principal atividade a Oficina Pedagógica, intitulada como "Um olhar especial sobre a Matemática

[1]Projeto Político Pedagógico

Financeira aplicada ao Ensino Médio"(Veja o plano de aula no Apêndice A.1), realizada no colégio já referido, no turno noturno com os alunos do 2º ano B do ensino médio. Para um quantitativo de dezoito alunos, tendo sido ministradas quatro aulas que aconteceram nos dias 21 e 22 de novembro de 2016 nos dois primeiros horários, com duração de 45 minutos cada. Os profissionais da escola que apoiaram o desenvolvimento desta atividade foram: professor de matemática regente da turma o Prof. Me. Ricardo Ferreira da Cunha, coordenador pedagógico o Prof. Nael Ribeiro e a diretora, Prof. Sheila Borges.

O fator que motivou o desenvolvimento deste trabalho foi o cumprimento das normativas desta dissertação que, inicialmente, propôs a elaboração de um projeto de pesquisa que atendesse as necessidades da educação básica em alguma linha de pesquisa da matemática. O desenvolvimento desta oficina foi o ponto de culminância da ação pedagógica proposta no projeto. A escolha pela oficina pedagógica foi uma tentativa de motivar os alunos a participar assiduamente das aulas, tendo em vista que o foco principal é a busca pela integração da realidade do aluno com o ensino da matemática financeira, principalmente no que diz respeito ao poder de decisão do cidadão diante de uma situação de compra.

Os alunos foram deslocados da sala de aula de origem para o Laboratório de Informática, devido a disponibilidade dos recursos tecnológicos, que foram utilizados e também pela disposição das mesas redondas, o que facilita o trabalho em grupo.

Por ser uma turma de ensino médio noturno, alguns fatores negativos interferiram de maneira imediata no desenvolvimento do trabalho. Por exemplo, o portão fica aberto até às 19:15 hs e ainda é permitido a entrada no segundo horário. Assim, as aulas iniciaram com um certo atraso e houve movimentação de alunos, o que prejudicou o andamento normal previsto. Mesmo com esses transtornos, foram explicados os objetivos do trabalho e o detalhamento das etapas a serem cumpridas, visando o ensino-aprendizagem. Tudo isso teve que ser repetido a pedido de alguns alunos que chegaram no segundo horário. O momento da sensibilização e a motivação dos alunos, em relação ao tema e a proposta de estudo que seria desenvolvido, foi feita com a exibição do vídeo "Brasileiros gastam R$ 174 bi pagando juros de dívidas, diz Fecomércio[2]". O vídeo retrata o poderoso fermento que movimenta a economia - juros sobre juros, a partir da análise de situações reais com

[2]Federação do Comércio dos Estados. Por exemplo, A Federação do Comércio do Estado de Goiás (Fecomércio-GO) é a entidade superior de representação dos empresários do setor do comércio de bens, serviços e turismo.

entrevista do consumidor e a fala de especialistas em finanças. Houve um envolvimento quase que unânime da turma ao assistir o vídeo e a discussão posterior a ele. O conteúdo era uma matéria exibida no programa de televisão (Fantástico, 2016) e mostra a evolução de uma dívida com o banco que teve seu valor triplicado em pouco tempo.

Passada a discussão inicial, seguimos a dinâmica proposta para a aula, com a exposição dos conteúdos e pré requisitos para a fundamentação teórica necessária para resolução das situações problemas que seriam trabalhadas. Houve uma pequena interrupção com a entrada dos alunos no segundo horário, pois foi necessária a recepção e explicação da proposta do estudo em questão. E esta segunda aula se encerrou já com as divisões do grupos com seus respectivos temas para a próxima aula. No dia seguinte, os transtornos foram menores, já que era de conhecimento a dinâmica de trabalho do dia. Apenas alguns alunos que faltaram no dia anterior que foi necessário integrá-los aos grupos já em andamento. Essas duas aulas foram suficientes para o desenvolvimento do trabalho em grupo, discussões e troca de experiências e avaliação do trabalho realizado. No geral, podemos considerar que todas as etapas e metas planejadas foram concluídas com êxito em relação a proposta e a participação dos alunos.

3.2.2 Processo

Os professores atuantes sabem que há dificuldade em se cumprir rigorosamente o planejado, pois são muitos os imprevistos que fogem do controle no momento da aula. Neste caso específico, os transtornos já começaram na demora do início das atividades, devido aos atrasos e entradas no segundo horário. Para contornar essa situação, no dia seguinte foi feito um conscientização apelativa, buscando uma parceria com alunos, mediante a exposição da necessidade e da urgência em concluir todas as etapas com um padrão de qualidade nos quesitos participação e aprendizagem. Podemos dizer que a estratégia ajudou. Porém, não foi a totalidade dos alunos que aderiram, mas certamente foi bem mais participativo e com uma menor movimentação fora do horário.

Quando o assunto é o uso das tecnologias, é comum que ocorram alguns problemas. Mesmo mediante agendamento do laboratório de Informática e chegando com antecedência, houve o desaparecimento de um cabo da caixa de som e o mal funcionamento da lousa digital. Problemas esses que foram devidamente resolvidos: o coordenador tinha um cabo substituto em seu carro e a lousa digital foi substituída por pincel e quadro.

Outro problema enfrentado foi a rotatividade de alunos acentuada no turno noturno. Pois como a atividade teve sequência no dia seguinte, aconteceu de chegar alunos que não estava presente na aulas anteriores. Daí a necessidade de integrá-los no trabalho já em andamento. Isso demandou tempo com explicações e adequações para que o maior número de alunos pudessem participar da melhor maneira possível. A estratégia utilizada foi direcionar os novos alunos aos grupos já em andamento, sendo que nestes grupos aqueles alunos que tinham mais facilidade com o conteúdo repassaram os conceitos e a dinâmica de funcionamento do trabalho atual a esses alunos. O fato é que, mesmo contando com a colaboração preciosa desses alunos, pôde-se perceber a postura de alguns estudantes que não fizeram muito esforço em acompanhar efetivamente ao trabalho em ação. Mas mesmo assim, contribuíram de alguma maneira, principalmente nos momentos de discussões.

3.2.3 Metodologia empregada e atividades desenvolvidas

Os procedimentos metodológicos aplicados na oficina pedagógica se embasaram, inicialmente, numa pesquisa bibliográfica de acordo com o teor e a estruturação dos conteúdos a serem ministrados no decorrer da oficina. Após a pesquisa, foi feita uma investigação nos livros didáticos de ensino médio sobre a abordagem dos conteúdos de matemática financeira e finalmente foi decidido como seriam efetivamente trabalhados.

Para a execução da oficina, foram utilizados e confeccionados os seguintes aparatos metodológicos: elaboração e produção dos slides a serem utilizados na apresentação (pessoal, acadêmica, de acordo com as necessidades, objetivos e fins para a realização dessa interferência pedagógica na sala de aula) e introdução da temática proposta; pequisa e definição de um vídeo (jornalístico ou documentário) tendo como foco a matemática financeira, com o objetivo de sensibilizar e introduzir a ideia central do trabalho e a produção do material pedagógico para as atividades em grupos e outras particularidades que se fizeram necessárias.

As atividades desenvolvidas pelos grupos, na oficina, teve como foco o poder de decisão do cliente diante de uma situação de compra no cotidiano. A seguir apresentaremos algumas das situações problemas que foram desenvolvidas em sala.

Atividade 3.1 Claúdia quer adquirir dois pares de sapatos no valor total de R$ 220,00 e a loja oferece três opções de pagamento.

a) À vista, com 8% de desconto.

b) À vista, no cartão de débito, com 3,5% de desconto.

c) Em cinco prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo à primeira um mês após a compra.

Qual é a melhor opção para Claúdia, sabendo que seu dinheiro está aplicado na poupança e tem rendimento mensal de 0,76%?

Nos itens a) e b) basta calcular o desconto e subtrair do valor total, assim:

a) Para calcular o desconto (D_1) de 8%, temos:

$$D_1 = 8\% \ de \ 220 = \frac{8}{100} \ de \ 220 = \frac{8}{100} \cdot \ 220 = 0,08 \cdot \ 220 = 17,60.$$

Como $220 - 17,60 = 202,40$, então, o valor da compra com o desconto (V_1) é de: $V_1 = R\$ \ 202,40$.

b) Para calcular o desconto (D_2) de 3,5%, temos:

$$D_2 = 3,5\% \ de \ 220 = \frac{3,5}{100} \ de \ 220 = \frac{3,5}{100} \cdot \ 220 = 0,035 \cdot \ 220 = 7,70.$$

Como $220 - 7,70 = 212,30$, o valor da compra com o desconto (V_2) é de $V_2 = R\$ \ 212,30$.

Para o cálculo do item c), vamos usar a fórmula de capitais equivalentes. Como os dois primeiros itens estão na época 0, já que são pagamentos à vista, determinaremos o valor total a ser pago parcelado na época 0.

Para melhor entendimento o esquema abaixo representa os pagamentos mensais e iguais que deverão ser trazidos para a época 0.

Para obter o valor na época 0, basta dividir o valor futuro (F), nesse caso, $F = 44$ por $(1+i)^n$, onde n o período que vai ser trazido para a época 0. Vamos determinar a soma de todos os pagamentos na época 0, sabendo que o dinheiro vale para ele 0,76% a.m., temos:

$$V_3 = \frac{44}{1,0076} + \frac{44}{(1,0076)^2} + \frac{44}{(1,0076)^3} + \frac{44}{(1,0076)^4} + \frac{44}{(1,0076)^5} = 219,50$$

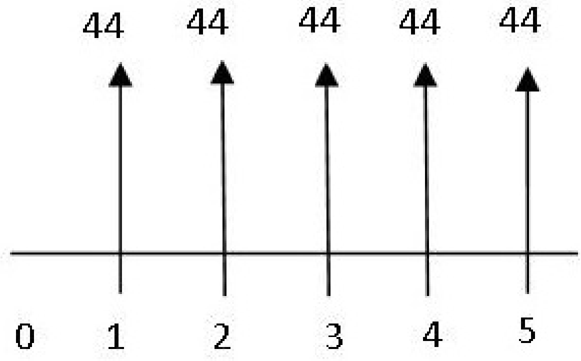


Figura 3.1: Pagamento em cinco parcelas mensais e iguais

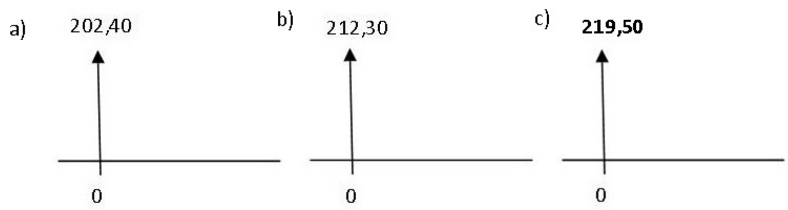


Figura 3.2: Esquema representando as três formas de pagamento na época 0.

A figura 3.2 mostra cada uma das três opções de pagamento. Comparando os valores na época 0, obtemos: $V_1 = R\$\ 202,40$, $V_2 = R\$\ 212,30$ e $V_3 = R\$\ 219,50$.

A melhor alternativa para Claúdia é a compra à vista no dinheiro e a pior é parcelado no cartão de crédito. Neste tipo de análise é possível tirar várias conclusões, uma vez que são vários fatores que podem interferir na decisão do cliente. Por exemplo, devido a grande violência tem pessoas que preferem ganhar um desconto menor e pagar no cartão débito do que transitar com dinheiro em espécie no bolso. Outro fator importante nesse tipo de análise, é verificar se a pessoa consegue uma remuneração mais expressiva para aplicar seu dinheiro. Assim, pode ser mais interessante aplicar o dinheiro e comprar a prazo. Veja esse exemplo na próxima atividade.

Atividade 3.2 Jonas é um agiota e empresta seu dinheiro a terceiros a juros de 6% ao mês. Qual é a melhor opção para Jonas, comprar à vista com 8% de desconto ou a prazo em cinco parcelas mensais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra?

Supondo que a compra seja os R\$ 220,00 da atividade anterior, no caso da compra à vista, pagará $V_1 = R\$\ 202,40$. Caso opte pela compra parcelada, façamos novamente as contas na época 0. Para obter o valor atual, basta dividir o valor futuro (F), nesse caso, $F = 44$ por $(1 + i)^n$, onde n o período que vai ser trazido para a época 0, sabendo que o dinheiro vale para ele, 6% ao mês. assim,

$$V_3 = \frac{44}{1,06} + \frac{44}{(1,06)^2} + \frac{44}{(1,06)^3} + \frac{44}{(1,06)^4} + \frac{44}{(1,06)^5} \cong 185,33$$

Comparando os valores na época 0, obtemos: $V_1 = R\$\ 202,40$ e $V_2 = R\$\ 185,33$ Veja que, nesse caso, a melhor alternativa é comprar a prazo. Isso é possível devido a capitalização mensal referente aos juros compostos. Em outras palavras, quando se retira a parcela mensal e aplica o restante do capital a uma taxa de 6% ao mês, consegue-se uma economia maior do que com pagamento à vista.

Atividade 3.3 Suponha que em janeiro de 2014, uma determinada moto custava R$ 5.048,00. E que em janeiro de 2017, esse mesmo modelo tem uma estimativa de ser vendida por R$ 6.795,00 ou com desconto à vista por R$ 6.500,00. Analise as seguintes opções:

a) Comprar parcelado em 36 meses, com parcelas fixas mensais no valor R$ 158,43.

b) Montar um plano de investimento mensal no valor de R$ 158,43 durante 36 meses, com taxa de rendimento de 1% a.m. e como o primeiro depósito imediato. Tendo como finalidade de comprar a referida moto em 2017 à vista.

Vamos determinar o valor da compra (V_1) no item a). Neste caso a conta é simples: $V_1 = 158,43 \cdot 36 = 5.703,48$, assim, em janeiro de 2017 o cliente terá desembolsado R$ 5.703,48. No item b), partindo da hipótese que pretende-se aplicar/poupar R$ 158,43 por mês ao longo de trinta seis meses, a uma taxa de 1% ao mês. O primeiro depósito será feito no ato (antecipado). Vamos calcular o valor do resgate no final desse período usando a planilha eletrônica livre do *LibreOffice Calc,* de fácil manuseio e muito eficiente. Inicialmente, os dados devem ser inseridos da seguinte forma.

	A	B	C	D	E
1					
2		Função	Dados	Descrição	
3		TAXA	1%	Taxa de Juros ao mês	
4		NPER	36	Prazo em meses	
5		PGTO	R$ 158,43	Prestação	
6		VP	NÃO TEM	Valor Presente	
7		TIPO	1	Antecipado	
8		VF	?	Valor Futuro	

Figura 3.3: Dados sobre o problema

Para calcular o valor do resgate (VF) da célula C8, basta seguir os seguintes passos: Abrir no *LibreOffice Calc*: fórmulas - inserir função; Selecionar a opção "financeira"; Selecionar a opção VF e por último relacionar os dados da tabela (figura 3.3) com os argumentos da função. Após preencher cada campo, o resultado aparece no "Resultado da fórmula=" como mostra a figura 3.4. Agora basta, clicar no OK que o cálculo aparece no documento do *LibreOffice Calc* em uso. Observe que é necessário colocar o sinal (-) negativo antes da referência da prestação (Pgto), para que o valor resultante da fórmula não fique negativo.

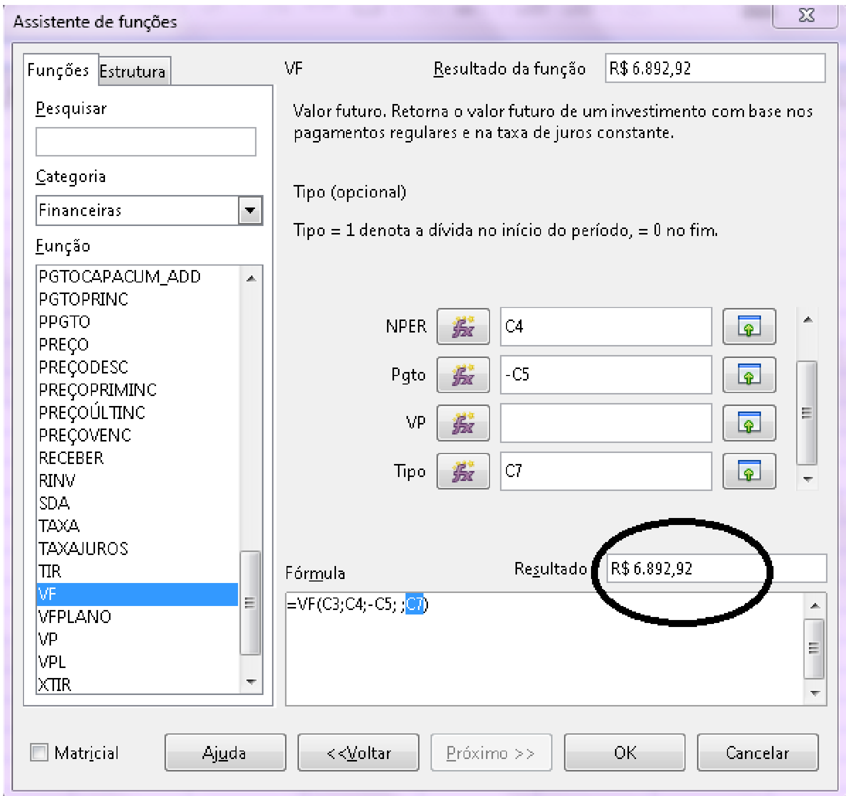


Figura 3.4: Valores aplicados no segmentos de função

Observe que o valor a ser resgatado no final do período de aplicação é de R$ 6.892,92, valor superior aos R$ 6.500,00 que serão necessários para aquisição da moto à vista. Uma observação interessante que vale a pena ser ressaltada entre o item a) e b) é que, em ambos os casos, o consumidor terá desembolsado o mesmo valor de R$ 5.703,48. Porém, no caso da aplicação financeira ele pode comprar a moto à vista por R$ 6.500,00 e ainda embolsar mais de R$ 300,00.

Entretanto, o que pode ser percebido com essa análise, é que quando se tem o interesse em adquirir um bem deve-se priorizar o planejamento a longo prazo. Conquistar uma taxa de juros suficiente à qual a pessoa consiga fazer render seu capital de forma que seja superior ao financiamento; essa taxa recebe o nome de *taxa mínima de atratividade.* Ou seja, o investimento só é atrativo se render, no mínimo a essa taxa.

3.2.4 Resultados e reflexões

De maneira geral, os discentes reagiram de forma positiva diante do formato de trabalho da oficina pedagógica. As atividades desenvolvidas envolveram questões financeiras simples e tinham ligação com o cotidiano dos alunos, por isso foram um meio facilitador do processo ensino e aprendizagem do conteúdo proposto. Os esforços em aplicar metodologias de ensino diferentes tem sido uma forma de incentivo ao estudante, principalmente quando se consegue trabalhar o conteúdo com conexão efetiva ao seu convívio diário.

Nesta perspectiva, foi comprovada a relevância em propor questões que estimulem o poder de decisão do cidadão enquanto consumidor, diante das opções de venda oferecidas pelo comércio. Foi possível perceber que a matéria e seus conceitos só se tornam interessantes para os alunos quando se consegue despertar o interesse pelo tema, seja pelo contexto com a realidade ou pelo desafio proposto.

O desenvolvimento desta oficina proporcionou a integração dos conteúdos científicos de um jeito, digamos, prático. Buscando, a partir dos conceitos mais simples da matemática financeira compreender desde as noções básicas, como a interpretação da porcentagem como uma fração de denominador cem, até uma análise de capitais em diferentes tempos.

Quando se propõe que os alunos compreendam a matemática financeira como parte do cotidiano, se faz necessário questionar, propiciar o desenvolvimento do senso crítico, para que eles aprendam usar os conceitos matemáticos de forma efetiva, exigindo assim, postura de um ser humano interessado e principalmente proativo.

3.3 Indicação de continuidade - replanejamento.

Com esta seção pretendemos reestruturar, dinamizar e inovar a proposta pedagógica que foi trabalhada. A partir de tudo que foi vivenciado, este é o momento de manter o que deu certo, melhorar alguns pontos que não foram tão positivos e também, sugerir algo de inovador em relação a educação financeira para a vida.

3.3.1 Proposta de atividades educacionais

Após análise e observações sobre tudo que foi exposto até aqui, faremos algumas sugestões de atividades envolvendo a matemática financeira, de modo que, diferencie do que usualmente estão expostos nos livros didáticos, tendo como objetivo estimular o estudante a vislumbrar novos olhares quanto ao ensino da matemática.

3.3.2 Objetivos

O desenvolvimento das atividades a seguir tem, dentre outros objetivos:

- Reconhecer os conhecimentos da Matemática Financeira como parte essencial da vida cotidiana;
- Instruir os cidadãos através dos cálculos matemáticos no sentido de analisar criticamente as operações financeiras de que faz uso diário;
- Proporcionar o poder de decisão diante das expectativas e necessidades das demandas comerciais provenientes da vida pessoal e/ou profissional.

O intuito dessas atividades é que o aprendizado dos conteúdos da Matemática Financeira amplie a capacidade de resolução de problemas e cálculos relacionados às operações financeiras, as quais os indivíduos estão diariamente envolvidos por viverem em uma sociedade capitalista e globalizada.

3.3.3 Público-alvo e noções básicas

Estas atividades podem ser desenvolvidas com os alunos do Ensino Médio desde o 1º Ano, porém nesta série pode ser conveniente algumas adaptações das situações problemas, devido a necessidade dos conhecimentos prévios de alguns conteúdos matemáticos. No entanto, este material está voltados para os alunos dos 2º e o 3º anos, mas nada impede que haja alguma ressalva e adequação por parte do professor. Neste tipo de metodologia, em que se pretende resolver, analisar e compreender situações reais de transações comerciais, supondo que os alunos não tenham visto ou mesmo não se recorde de alguns conceitos, é conveniente que se faça uma revisão dos conteúdo necessários para cada atividade, para que eles possam acompanhar satisfatoriamente o desenvolvimento desta proposta de trabalho. Neste caso, conceitos básicos como: razão, proporção, porcentagem, juros simples e compostos, progressões aritméticas e geométricas entre outros.

3.3.4 Materiais pedagógicos e tecnologias disponíveis

Diante de tantas informações e aparelhos eletrônicos de alta tecnologia nas mãos dos alunos. Os professores estão a cada dia mais desafiados em usar estes recursos como forma de auxílio na prática pedagógica. Pois, a tecnologia deve ser explorada a favor da busca pelo conhecimento, bem como ser uma aliada do professor na conquista do interesse e participação dos alunos dentro da sala de aula. No entanto, os aparelhos celulares, tablets e os próprios computadores da escola poderão ser utilizados para visualização de reportagens e documentários, pesquisas na internet, calculadoras e planilhas eletrônicas.

3.3.5 Procedimentos metodológicos

Neste formato de atividade, sugere-se quatro momentos a ser vivenciados: Sensibilização, conceitos matemáticos preliminares, resolução de situações problemas e troca de experiências. A sensibilização pode ser feita com a leitura de um texto apropriado, vídeo motivacional, reportagens jornalísticas ou mesmo um documentário. Por exemplo, ao trabalhar questões do ENEM ou da OBMEP[3] sobre a Matemática Financeira, passar vídeos sobre reportagens de alunos bem sucedidos nesse tipo de prova e os benefícios para a vida desses jovens que conseguem sobressair nesses exames, as novas oportunidades e

[3]Olimpíada Brasileiras das Escolas Públicas.

os novos horizontes a serem percorridos. Agora, quando o assunto são os conceitos, definições e exemplos, a aula expositiva na lousa vem como uma boa opção; é um momento dos alunos fazerem anotações, revisar os conteúdos e tirar suas dúvidas. Na hora da resolução dos exercícios o professor e algum aluno monitor ficam disponíveis para auxiliar os grupos; pode sugerir que façam pequenos grupos munidos da calculadora e de outros instrumentos tecnológicos ou não, por exemplo, o livro didático como suporte e pesquisa. Enfim, é o instante dos alunos colocarem em prática tudo que estudou sobre o assunto, já que uma boa maneira de aprender matemática é praticando-a. Depois que todos os grupos terminarem a tarefa é hora de trocar ideias, propor a resolução na lousa pelos alunos e fazer avaliação necessária para o memento. É importante que o professor faça uma pausa na aula e proporcione com os aluns um momento de repensar tudo que foi trabalhado, tendo em vista que essa integração pode ser muito produtiva.

3.3.6 Possíveis dificuldades na hora da execução da aula

Mesmo que o professor tenha a aula mais bem elaborada, motivada e condizente com a realidade do aluno é possível que alguma coisa não aconteça como planejou. Veja:

1. Despertar e prender a atenção dos alunos é uma das coisas mais difíceis na sala de aula, mesmo que consiga a atenção deles na hora da sensibilização pode ser que alguns ainda se dispersam depois, seja pela falta de afinidade com a matemática ou mesmo por displicência com os estudos;
2. A dificuldade em compreender os conteúdos matemáticos por uma grande parte dos alunos pode causar desinteresse pela atividade proposta (Sugestão: neste caso, é necessário que o professor planeje uma aula antecedente a esta atividade, para trabalhar esses conteúdos);
3. A falta de conhecimentos dos conteúdos pré-requisitos pode ser motivo para os alunos nem quererem começar a resolução das atividades (No entanto, é indispensável que antes da aplicação de qualquer atividade específica que se trabalhe os conteúdos preliminares);
4. Em se tratando do uso das tecnologias em sala de aula, não é a toa que seja esse o maior desafio do professor da atualidade, pois são tantos fatores que interferem no seu uso que muitos profissionais acabam não utilizando-as ou utilizando-as com menor frequência. As dificuldades variam desde: O manuseio do computador, celular e até mesmo da calculadora, já que é de conhecimento que muitos alunos que não possuem

computador em casa. A calculadora talvez não seja um instrumento que os interessem muito e o celular, apesar de usarem, pouco ou quase nada é usado para proporcionar o conhecimento escolar; Acesso à internet; Colocar em funcionamento os equipamentos por serem de uso coletivo não é difícil que algum cabo, controle e outros se percam e principalmente, manter o foco no estudo proposto, uma vez que quando o acesso a internet e o uso dos aparelhos celulares são permitidos é grande a possibilidade de perder a atenção dos alunos.

3.3.7 Calculadoras e as planilhas eletrônicas

Quando se propõe o uso da *calculadora científica* (ver observação 3.1) e da *planilha eletrônica* (ver o exemplo) na resolução dos exercícios da matemática financeira no ensino médio, o foco é o cálculo mais preciso e a facilidade. Tendo em vista que, os cálculos a "mão humana"nesse momento, além de lento, pode se esbarrar na falta de habilidade do aluno com os cálculos de números decimais. E isso, pode contribuir com o seu desinteresse pela atividade. Além do mais, em alguns casos nem é possível chegar a solução do problema sem o uso desses equipamentos, devido ao grande número de casas decimais. E vale ressaltar que, o uso dos valores aproximados irão gerar o resultado também aproximado.

Então, em busca de melhores resultados, pois o assunto em questão é a compreensão da matemática financeira no cotiano, o uso dessas tecnologias é adequada. Acompanhe a observação a seguir.

Observação 3.1 Mo momento em que os cálculos dos juros compostos se faz necessário, recomenda-se o uso da *calculadora científica*. Uma vez que, o uso da aproximação com duas casas decimais vai gerar uma diferença considerável nos cálculos. Por exemplo, aplicando R$ 5.000,00 a juros compostos, a uma taxa de 2% a.m. durante 12 meses, qual o valor do montante nesse período? Usando, a fórmula dos juros compostos $M_n = C(1+i)^n$, e os valores fornecidos pelo problema, a saber $i = 2\%a.m. = 0,02$, $n = 12$ meses e $C = 5.000$, obtemos $M_{12} = 5000(1 + 0,02)^{12} = 5000\ (1,02)^{12}$.

Veja o quão trabalhoso pode ser calcular $(1,02)^{12}$ através da multiplicação $1,02$ por ele mesmo 12 vezes:

$$\underbrace{(1,02 \cdot 1,02 \cdot \quad \cdots \quad \cdot 1,02)}_{12\ vezes}$$

Ou ainda, dado $(1,02)^{12} \cong 1,268241795 \cdot \cdot\cdot$, usando $(1,02)^{12} \cong 1,27$ aproximado para cima com duas casas decimais, multiplicado pelo capital R$ 5.000,00 resultaria num valor para o montante diferente do que obteria usando a calculadora científica.

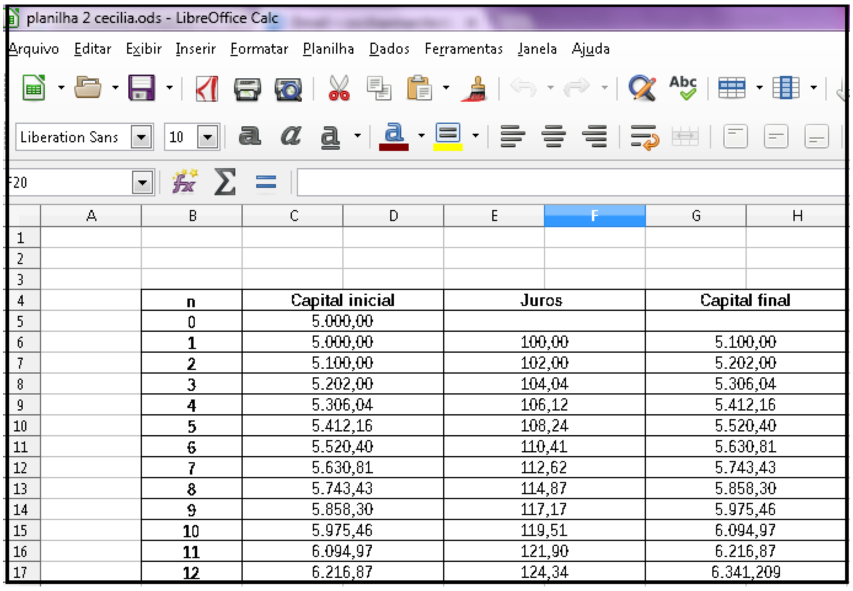
Veja na figura 3.5 um exemplo de calculadora científica disponível no comércio.

Figura 3.5: Modelo de calculadora científica encontrada no mercado.

Agora, vamos resolver esse mesmo exemplo usando a *planilha eletrônica* no *LibreOffice calc*. Para efetuar as operações matemáticas nesse programa, alguns padrões deve ser aplicados. Colocar os dados nas células definida por um par ordenado: da forma (coluna, linha), onde a coluna é representada por letra maiúscula a linha é expressa por números. O sinal da igualde serve para dar início a inserção das operações e funções matemática. As operações básicas no teclado são: o sinal de (+) para a adição, o hífen - para a subtração, o (*) para a multiplicação, a barra (/) para a divisão e o sinal (ˆ) é usado para a exponenciação, inclusive para os expoentes fracionários. O usa-se os parênteses para determinar as operações por ordem de prioridade.

Exemplo 3.1 Usando a planilha eletrônica do *LibreOffice calc.*

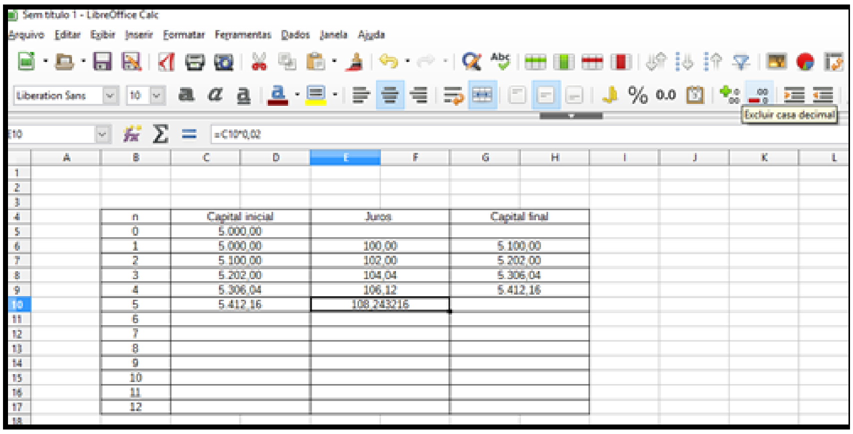
Primeiro vamos construir a planilha de capitalização a juros compostos do capital R$ 5.000,00, a juros de 2% ao mês nos primeiros meses. Para isso, abra a planilha no *LibreOffice calc* e digite a tabela conforme a figura 3.6.: para inserir o capital inicial e clicar em formatar com número para aparecer as casas do sistema monetário (ou selecionar a cédula e apertar Ctrl+Sift+1); inserir o mesmo capital inicial para n=1 e calcular o juros obtidos no primeiro mês através da fórmula (C5*0,02) que deve ser inserida na cédula correspondente a coluna JUROS e tempo n=1; após teclar enter aparecerá o valor de juro correspondente ao primeiro mês; para calcular o capital final referente ao primeiro mês basta inserir na cédula a coluna capital final e linha n=1 a fórmula (=C6+E6), pois isso representará a soma do capital inicial que está na cédula C6 com os juros que estão na cédula E6; o capital inicial do 2° mês corresponde ao capital final do 1° mês, então é só colocar a fórmula (=G6) na cédula correspondente e teclar enter; em seguida repete-se o processo feito no n=1 para obter os juros e o capital final correspondente ao segundo mês, e aos demais meses.



n	Capital inicial	Juros	Capital final
0	5.000,00		
1	5.000,00	100,00	5.100,00
2	5.100,00	102,00	5.202,00
3	5.202,00	104,04	5.306,04
4	5.306,04	106,12	5.412,16
5	5.412,16	108,24	5.520,40
6	5.520,40	110,41	5.630,81
7	5.630,81	112,62	5.743,43
8	5.743,43	114,87	5.858,30
9	5.858,30	117,17	5.975,46
10	5.975,46	119,51	6.094,97
11	6.094,97	121,90	6.216,87
12	6.216,87	124,34	6.341,209

Figura 3.6: Primeiras linhas da planilha usando o LibreOffice calc.

Uma função interessante que deve ser observada neste caso, é o uso das casas decimais: para excluir casa decimal e deixar apenas duas depois da virgula selecionar a cédula e clicar em "excluir casa decimal"; caso queira voltar é só clicar em "adicionar casa decimal".



n	Capital inicial	Juros	Capital final
0	5.000,00		
1	5.000,00	100,00	5.100,00
2	5.100,00	102,00	5.202,00
3	5.202,00	104,04	5.306,04
4	5.306,04	106,12	5.412,16
5	5.412,16	108,243216	
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

Figura 3.7: Planilha usando o LibreOffice calc.

Vale ressaltar que, os cálculos da planilha são os mesmos procedimentos usados para o montante no juros compostos, só que, aqui usou a capitalização mensal. O qual, o capital inicial de cada mês é o juro mais o capital final do mês anterior, o juro é a taxa, neste caso, $(2\% = 0,02)$ vezes o capital inicial do mês referente e o capital final é a soma do capital inicial e o juro produzido no período.

3.3.8 Exemplos de atividades

3.3.8.1 Pagamento da parcela mínima da fatura do cartão de crédito.

Com essa atividade pretende-se mostrar a real situação do consumidor quando ele opta por pagar a *parcela mínima da fatura do cartão de crédito*. Com os cálculos dos juros cobrados nesse tipo de "financiamento" pretende-se comprovar que mesmo o consumidor tendo efetuado o pagamento da parcela mínima referente ao saldo devedor ele corre o risco de chegar no mês seguinte tendo um valor muito pequeno abatido no valor inicial da dívida ou até mesmo ver esse valor aumentar. Os cálculos poderão ser feito com o auxílio da calculadora e das planilhas eletrônicas.

Atividade 3.4 Pagamento do mínimo: Aprenda a calcular a dívida do cartão de crédito nesta circunstância.

Dentre as muitas opções de crédito ao consumidor, está o pagamento da parcela mínima da fatura mensal do cartão de crédito (que normalmente não ultrapassa os 20 % do total da fatura) e os juros cobrados por esse financiamento é um dos mais caros do mercado, podendo chegar à 18% a.m., o que equivale um patamar de juros anual superior aos 600%.

Para entender melhor a evolução da dívida de um cartão de crédito, vamos trabalhar com a situação hipotética de um consumidor que tem um saldo devedor R$ 1.500,00.

1) Quanto essa pessoa deverá pagar caso opte pelo pagamento da parcela mínima, sabendo que o valor mínimo fixado pelo banco é 20% do valor total da fatura? E qual o valor que deverá ser financiado?

Usando as noções básicas de razão, temos que $R\$ \ 1.500,00$ corresponde ao todo, ou seja, 100 %. E, 20% é $\frac{20}{100}$. Assim,

$$\frac{20}{100} \ de \ 1.500 = \frac{20}{100} \cdot 1.500 = 0,20 \cdot 1.500 = 300$$

Logo, o valor mínimo da fatura a ser pago é: $R\$ \ 300,00$. Assim, serão financiados: $1.500 - 300 = 1.200,00$. isto é, $R\$ \ 1.200,00$.

Utilizando a tabela 2.5 mostra as taxas de juros da operação de crédito para pessoa física – cartão de crédito rotativo para as quatro instituições financeiras mais conhecidas do país atualizada pelo Banco Central do Brasil. Visando preservar a imagem dessas Instituições tomaremos como nome fictícios de banco A, banco B, banco C e banco D. Porém, as taxas são reais correspondentes ao dia pesquisado.

2) Usando esses valores das taxas mensais de juros da operação de crédito para pessoa física – cartão de crédito rotativo, vamos calcular os valores dos juros cobrados por cada uma das referidas instituições financeiras sobre o valor financiado. Vejamos como isso é feito

Calculando os juros por Instituições:

Banco A: $15,51 \ \% \ de \ 1200 \ = 0,1551 \cdot 1200 = 186,12;$

Banco B: $17,03 \ \% \ de \ 1200 \ = 0,1703 \cdot 1200 = 204,36;$

Banco C: $17,20 \ \% \ de \ 1200 \ = 0,1720 \cdot 1200 = 206,40;$

Banco D: $18,05 \ \% \ de \ 1200 \ = 0,1805 \cdot 1200 = 16,60.$

Além dos juros rotativos, há a cobrança dos encargos multa por atraso e os juros de mora, pelo atraso no pagamento da dívida financiada.

3) Suponha que todos os quatro bancos referidos cobram de multa por atraso a uma taxa mensal de 2% e os juros de mora a uma taxa mensal de 1% sobre a dívida

financiada. Calcule esses valores em reais.

Considerando que a dívida é igual a R$ 1.200,00 em todos os bancos, então o valor da multa e dos juros de mora também são respectivamente iguais a 2 % de $1.200 = 0,02 \cdot 1.200 = 24,00$ e 1% de $1.200 = 0,01 \cdot 1.200 = 12,00$ em todas essas instituições financeiras.

4) Contabilizando os valores já calculados dos juros rotativos mais multa por atraso e juros de mora, cada banco totaliza o que chamamos de encargos.

Tabela 3.1: Total de encargos em valores reais.

Inst.Financeiras	J. Rotativos	Multas por atraso	J. de Mora	T.de Encargos
Banco A	186,12	24,00	12,00	222,12
Banco B	204,36	24,00	12,00	240,36
Banco C	206,40	24,00	12,00	242,40
Banco D	216,60	24,00	12,00	252,60

No mês seguinte, no entanto, a dívida que era de R$ 1 200,00 sofre esse acréscimo de encargos, por exemplo, no banco D de R$ 252,60 e passa a ser de R$ 1.452,60. Valor esse, se comparado com os R$ 1.500,00 da dívida inicial praticamente teve redução mínima. A mostra a atualização da dívida um mês após o pagamento da parcela mínima nas quatros instituições financeiras.

Tabela 3.2: Valor da dívida em reais um mês após o financiamento.

Inst.Financeiras	Total de Encargos	Valor da dívida
Banco A	222,12	1 422,12
Banco B	240,36	1 440,36
Banco C	242,40	1 442,40
Banco D	252,60	1 452,60

E se por ventura no segundo mês, de novo o dinheiro não foi suficiente para quitar a fatura e novamente a pessoa optar em pagar a parcela mínima da fatura do cartão de crédito, todos os encargos mencionados serão cobrados novamente. Façamos as contas para o novos valores.

Calculando 20% do total da fatura em débito para pagamento da parcela mínima:

$$Banco\ A : 0,2 \cdot 1422,12 = 284,42$$

$$Banco\ B: 0,2 \cdot 1440,36 = 288,07$$

$$Banco\ C: 0,2 \cdot 1442,40 = 288,48$$

$$Banco\ D: 0,2 \cdot 1452,60 = 290,52$$

Daí, por exemplo, no banco A após o pagamento da parcela mínima no valor de R$ 284,42, a dívida que era de R$ 1.422,12 passa a ser de R$ 1.137,70 a tabela a seguir mostra essas dívidas atualizadas.

Tabela 3.3: Valor da dívida em reais após o pagamento da parcela mínima da fatura do cartão de crédito no segundo mês de financiamento.

Inst.Financeiras	Parcela Mínima	Valor da dívida
Banco A	$284,42$	$1\ 137,70$
Banco B	$288,07$	$1\ 152,28$
Banco C	$288,48$	$1\ 153,92$
Banco D	$290,52$	$1\ 162,08$

Independentemente se a dívida será quitado no próximo mês, o certo é que todos os encargos serão cobrados novamente. Vamos refazer esses cálculos.

Calculando os 2% da multa por atraso e 1% de juros de mora, calculando esses valores para todos o bancos, temos:

$$Banco\ A: 0,02 \cdot 1137,70 = 22,75 \quad e \quad 0,01 \cdot 1137,70 = 11,38$$

$$Banco\ B: 0,02 \cdot 1152,28 = 23,04 \quad e \quad 0,01 \cdot 1152,28 = 11,52$$

$$Banco\ C: 0,02 \cdot 1153,92 = 23,08 \quad e \quad 0,01 \cdot 1153,92 = 11,54$$

$$Banco\ D: 0,02 \cdot 1162,08 = 23,24 \quad e \quad 0,01 \cdot 1162,08 = 11,62$$

Usando os valores tabela 2.5 para as taxas de juros para Pessoas Físicas na opção cartão de crédito rotativo, temos:

$$Banco\ A: 0,1551 \cdot 1137,70 = 176,46$$

$$Banco\ B: 0,1703 \cdot 1152,28 = 196,23$$

$$Banco\ C: 0,1720 \cdot 1153,92 = 198,47$$

$$Banco\ D: 0,1805 \cdot 1162,08 = 209,75$$

Usando os valores acima calculados totalizam os encargos das quatros instituições financeiras em estudo.

Tabela 3.4: Total de encargos.

Inst.Financeiras	J. Rotativos	Multas por atraso	J. de Mora	T.de Encargos
Banco A	176,46	22,75	11,38	210,59
Banco B	196,23	23,04	11,52	230,79
Banco C	198,47	23,08	11,54	233,09
Banco D	209,75	23,24	11,62	244,61

Ao final desse mês, atualizando os valores, somando os total de encargos mais a dívida ativa, temos:

Tabela 3.5: Novos valores da dívida em reais um mês após o novo financiamento.

Inst.Financeiras	Total de Encargos	Valor da dívida
Banco A	210,59	1 348,29
Banco B	230,79	1 383,07
Banco C	233,09	1 387,01
Banco D	244,61	1 406,69

5) Analisando.

Observe o poder que essa opção de pagamento tem em empobrecer o consumidor e enriquecer os cofres bancários. Tomando como base o pagamento da parcela mínima da fatura do cartão de crédito, por exemplo, para o Banco D nesses dois meses consecutivos, o cliente desembolsou duas parcelas, sendo a primeira de R$ 300,00 e a segunda de R$ 290,52 totalizando R$ 590,52. Como um mês após o último financiamento o consumidor tem neste banco a dívida de R$ 1.406,69 e a dívida inicial era de R$ 1.500,00, conclui-se que dos R$ 590,52 pagos ao banco apenas R$ 93,31 foram de fato abatidos na dívida.

No entanto, outro fator que pode complicar ainda mais a situação financeira do cliente nesse sistema de pagamento e que deve ser muito bem observado é que quanto menor a taxa percentual da parcela mínima menor é o valor abatido na dívida e consequentemente maiores serão os encargos que podem ultrapassar fácil o valor da dívida.

Veja por exemplo, a situação de quando a taxa da parcela do valor mínimo é fixada em 15% do valor total da fatura, isso corresponde a 15% de R$ 1.500,00 = R$

225,00. Usando as taxas percentuais de encargos do banco D, já citados, juros rotativos 18,05% de R$ 1.275,00 = R$ 230,14, juros por atraso no pagamento 2% de R$ 1.275,00 = R$ 25,50 e juros de mora 1% de R$ 1.275,00 = R$ 12,75, totalizando R$ 268,39 e somados aos R$ 1.275,00 que é o valor financiado chega aos R$ 1.543,39, valor esse que ultrapassa os R$ 1.500,00 da sua dívida inicial. Observe que só nesse primeiro mês de financiamento da dívida os R$ 225,00 pagos para o banco não diminuiu em nada a dívida ao contrário teve um aumento de R$ 43,39.

Além desses encargos, a alíquota diária do IOF[4] de acordo com a Receita Federal a partir de janeiro de 2008 para o crédito rotativo passou de 0,0041% para 0,0082% e ainda é cobrado nessas operações outra taxa chamada incidência extra de 0,38% sobre o valor total da operação independente do prazo.

Veja que nesses estudos não está sendo considerado novos gastos no mês seguinte com o cartão de crédito o que é quase impossível, pois com a praticidade e conveniência numa sociedade cada vez mais violenta, essa moeda de plástico caiu de vez na preferência do cliente.

Diante dessa problemática os especialistas em economia sugere que talvez a melhor solução ao consumidor seja quebrar o cartão para evitar novos gastos e procurar o banco emissor a fim de negociar melhores condições de pagamento. Veja também no apêndice as novas regras para o crédito rotativo do cartão de crédito proposta pelo Governo Federal em dezembro de 2016.

3.3.8.2 Questões do Enem e da Obmep

Pretende-se com essa atividade despertar o interesse dos alunos pelas aulas de Matemática Financeira, tendo em vista que o Ensino Médio é a fase de transição do adolescente que é sustentado pela família para o jovem que busca sua própria autonomia.

Atividade 3.5 *Matemática Financeira Aplicada em questões do ENEM e da OBMEP.*

1. (Questão 163 do Enem 2015 - 2º Dia Caderno 8 - Rosa, Página 27). Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180.000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500, 00 mais juro

[4] Imposto sobre Operações Financeiras

de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento desse forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

a) $R\$ \ 2\ 075,00$

b) $R\$ \ 2\ 093,00$

c) $R\$ \ 2\ 138,00$

d) $R\$ \ 2\ 255,00$

e) $R\$ \ 2\ 300,00$

Analisando detalhadamente e retirando os dados fornecidos pelo problema. Este é o momento compreender a situação problema. Na compreensão entra ler e reler a questão quantas vezes precisar afim de entender o enunciado verbal, identificar as principais partes do problema, a incógnita, colher os dados e certificar que não ficou nenhuma dúvida do que se pretende encontrar.

1. Dados fornecidos pelo enunciado:

Valor total do Financiamento Imobiliário: R$ 180. 000,00;

Taxa Efetiva de juros: 1% ao mês;

1ª prestação um mês após liberação do recurso: R$ 500, 00;

Valor da prestação mensal: R$ 500, 00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento);

Observação: A cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

2. Estratégias de resolução:

Depois de conhecer bem os elementos da questão, é hora de partir para prática. A seguir apresentaremos dois métodos de resolução para esse problema.

Método A

Em se tratando de uma questão do Enem e tendo o tempo como fator agravante não seria nada interessante calcular os juros mês a mês até chegar ao décimo mês. Note que é fundamental que o aluno tenha compreendido que independente de quanto vai pagar de juros o que vai ser abatido na dívida a cada pagamento é R$500,00; caso contrário, poderia se perder em contas e gastar o tempo de maneira desnecessária. Outro fator que se mal interpretado pode provocar complicações, é que os juros de 1% sobre o saldo devedor é calculado no valor devido antes do pagamento. Na tabela 3.6 estão os cálculos mês a mês:

Tabela 3.6: Cálculo dos juros compostos mê a mês.

Financiamento Imobiliário	Valor da dívida	Juros 1 % ao mês
Mês 0	R$ 180 000,00	-
1º mês	R$ 180 000,00	R$ 1 800,00
2 º mês	R$ 179 500,00	R$ 1 795,00
3 º mês	R $ 179 000,00	R$ 1 790,00
4 º mês	R$ 178 500,00	R$ 1 785,00
5 º mês	R$ 178 000,00	R$ 1 780,00
6 º mês	R$ 177 500,00	R$ 1 775,00
7 º mês	R$ 177 000,00	R$ 1 770,00
8 º mês	R$ 176 500,00	R$ 1 765,00
9 º mês	R$ 176 000,00	R$ 1 760,00
10 º mês	R$ 175 500,00	R$ 1 755,00

Sabendo que o valor da parcela é R$ 500,00 mais o juro de 1% sobre o saldo devedor, obtemos os valores que constam na tabela 3.8.

Tabela 3.7: Valor da parcela mês a mês

Financiamento Imobiliário	Valor da parcela
1 º mês	R$ 2 300,00
2 º mês	R$ 2 295,00
3 º mês	R$ 2 290,00
4 º mês	R$ 2 285,00
5 º mês	R$ 2 280,00
6 º mês	R$ 2 275,00
7 º mês	R$ 2 270,00
8 º mês	R$ 2 265,00
9 º mês	R$ 2 260,00
10 º mês	R$ 2 255,00

Portanto, o valor da décima prestação é de R$ 2.255,00.

Método B

Quando o enunciado deixa claro que a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 é simples perceber que após dez meses o valor abatido na dívida é R$

5.000,00, ou seja, $10 \cdot 500 = 5.000$. Assim o saldo devedor em dez meses é $180.000,00 - 5.000,00 = 175.000,00$, isto é, R$175.000,00. Mas cuidado, o valor da prestação é R$ 500,00 mais juro de 1% sobre o valor devido antes do pagamento. Então, 1% *de* $175.500 = 1.755$. Logo,

$$R\$ \ 500,00 + R\$ \ 1.755,00 = R\$ \ 2.255,00.$$

A análise é uma apreciação sobre tudo que foi trabalhado, por exemplo, esses dois métodos chegaram na mesma resposta, mas qual dos é mais vantajoso para a ocasião? Depende, o método A é mais trabalhoso porém, mais seguro e o método B por ser muito direto pode ser mais fácil errar. Será que esses dois caminhos esgotariam as possibilidades de resolução? É um momento de provocar discussões, verificações e enfim, tirar as conclusões do que pode ser aprimorado, modificado e mantido.

2. (Questão 07 da OBMEP 2014 - 1ª Fase, Nível 2.) Rodrigo comprou três cadernos iguais em uma promoção na qual o segundo e o terceiro cadernos eram vendidos, respectivamente, com 20% e 40% de desconto sobre o preço do primeiro. No dia seguinte, terminada a promoção, Gustavo comprou três cadernos iguais aos de Rodrigo, todos sem desconto. Percentualmente, quanto Rodrigo pagou a menos que Gustavo?

a) 20%

b) 25%

c) 28%

d) 20%

e) 30%

Uma sugestão de solução seria assim:

Suponha que cada caderno custe x reais. Assim Rodrigo pagou: x reais pelo primeiro caderno; pelo segundo obteve um desconto de 20%, assim: $100\% - 20\% = 80\% \cdot x$, ou seja, $\frac{80}{100} \cdot x = 0,8 \cdot x$ e pelo terceiro caderno obteve um desconto de $100\% - 40\% = 60\% \cdot x$, que equivale a $\frac{60}{100} \cdot x = 0,6 \cdot x$. Sendo assim, pela compra dos três cadernos Rodrigo pagou $x + 0,8 \cdot x + 0,6 \cdot x = 2,4 \cdot x$.

Por sua vez, Gustavo comprou os mesmos três cadernos sem desconto. Ou seja, Gustavo pagou x reais por cada caderno. Como $3 \cdot x$ reais. Então Rodrigo pagou, $3 \cdot x - 2,4 \cdot x = 0,6 \cdot x$ a menos que Gustavo.

Sendo assim, usando os conhecimentos de razão e proporção, podemos escrever:

$$\frac{3x}{0,6x} = \frac{100\%}{y},$$

onde y representa a porcentagem de desconto que Rodrigo teve em relação ao que Gustavo pagou.

Fazendo as manipulações necessárias, obtemos:

$$y = \frac{0,6x}{3x} = 0,2.$$

Em porcentagem, $0,2 \cdot 100 = 20\%$, isto é, Rodrigo pagou 20 % a menos que Gustavo. Portanto, a alternativa correta é a letra a).

3.3.9 Sugestões futuras

Diante de tudo que foi compartilhado neste trabalho e tendo como objetivo deixar algumas sugestões futuras para os leitores em relação à matemática financeira e suas atividades diárias, listamos alguns itens que podem ser úteis.

3.3.9.1 O uso dos aplicativos como suporte para a gestão financeira.

Na atual crise econômica do Brasil e com as inúmeras tecnologias disponíveis no mercado, o consumidor deve analisar e adequar o seu uso em favor da sua vida financeira. Em tempos de crise, ter as contas na ponta do lápis ou mesmo, em algum aplicativo, facilita em termos de conhecimento e controle da real situação da conta bancária. Atitudes como essas evitam, por exemplo, os gastos desnecessários com o consumo do dia a dia. Além disso, a organização e o autocontrole são fortes aliados de quem quer ser bem sucedido no campo financeiro.

O bom uso dos aplicativos como suporte para gestão financeira vem ganhando a cada dia novos adeptos, veja cinco desses aplicativos que podem ser baixados no *tablet* ou no *smartphone*: *Moni*, *Mobills*, *Minhas Economias*, *Organizze* e *Finance*. Abaixo se encontra a descrição de aplicabilidade de cada um:

– Moni: O aplicativo possibilita adicionar ganhos e gastos, podendo monitorar o saldo final em uma lista. Um dos recursos permite a emissão de um "lerta vermelho", assim que as contas atingirem um saldo, pré-definido, que o usuário considere preocupante. Também é possível escrever observações sobre cada gasto, para que sirva de lembrete o motivo da saída. Disponível apenas para Iphone;

– Mobills: Antes de utilizar o aplicativo, é necessário fazer um cadastro.. Nele é possível estabelecer um orçamento mensal, onde o aplicativo, automaticamente avisa quando 80% deste valor é alcançado. Os gastos são colocados em gráficos, dividido por tipo de despesa, além de alertas sobre contas pendentes. O app também permite conferir o orçamento planejado e o status atual, caso o usuário tenha necessidade. Disponível apenas para Android;

– Minhas Economias: O aplicativo tem uma interface que sincroniza as informações do usuário, com as do site, onde ele pode acessar pelo computador (www.minhaseconomias.com.br). O início é um pouco mais trabalhoso, pois precisa cadastrar todas categorias e despesas. Mas a partir do segundo mês, o uso fica facilitado e mais rápido. O app possibilita a comparação dos meses, o que ajuda a verificar as contas. Disponível para Iphone e Android;

– Organizze: A interface do aplicativo é moderna e de fácil acesso. Porém, para o usuário editar os relatórios, é necessário acessar a versão no site (www.organizze.com.br). Para ter utilizar mais serviços, como criação de subcategorias, comparação de gastos previstos e efetuados, o cliente paga uma taxa de $R\$9,99$. Disponível para Iphone e Android;

– Finance O app é destinado a usuários que já têm mais facilidade em utilizar aplicativos de finanças. Pois, ele possibilita colocar fotos dos recibos e o cadastro de contas bancárias, cartões de crédito e transferências. Também utiliza termos mais técnicos, o que pode desestimular quem não tem noções básicas de orçamento pessoal. Disponível para Iphone e Android. (Junior, 2015, p.8)

3.3.9.2 Programa de educação financeira nas escolas coordenado pela Associação de Educação Financeira do Brasil (AEF-Brasil)

Com a intenção de promover melhores conhecimentos a respeito da Educação Financeira no Brasil, surgiu uma mobilização multisetorial que busca desenvolver e apoiar ações nesta área, ENEF (2017), cujo objetivo é cooperar para o consolidação da cidadania ao viabilizar e colaborar com iniciativas que auxiliem a população quanto a tomada de decisões financeiras mais autônomas e inteligentes.

A ENEF foi criada pelo Decreto Federal 7.397/2010 em conjunto com a articulação de oito órgãos e entidades governamentais e quatro organizações da sociedade civil, que juntos compõem o CONEF[5], a qual foi firmada como política de Estado de caráter permanente, tendo como principais características a garantia da gratuidade das iniciativas promovidas ou que dão suporte e, bem como, sua imparcialidade comercial.

A AEF-Brasil, a partir da celebração de um convênio com o Comitê Nacional de Educação Financeira, esfera competente pelo tema Educação Financeira no Brasil, ficou sendo a entidade responsável pelo gerenciamento e efetivação dos projetos desta Estratégia.

Dentre os programas e projetos ofertados estão Educação Financeira nas Escolas, AEF-Brasil (2017) estão subdivididos em Ensino Fundamental e Ensino Médio, visando contribuir com as questões elementares da escola atual, promovendo a consciência em Educação Financeira desde as primeiras séries do Ensino Fundamental. Em se tratando da aprendizagem, a ideia é desenvolver o senso crítico das áreas do conhecimento em Educação Financeira e, além disso, colaborar para o melhor desenvolvimento cognitivo dos alunos em Língua Portuguesa e Matemática, já que seus conceitos e ação pedagógica foram planejados atingir também esse objetivo. Para isso, o programa dispõe de dois métodos para propagação de sua tecnologia de ensino:

1. Formato Aberto: A partir de uma plataforma virtual onde os recursos didáticos estão disponíveis para download, e visam dar suporte as Unidades Escolares de todo o Pais que busquem aplicar esse Programa com aos alunos do Ensino Médio.

2. Formato Assistido: Em cooperação com o Ministério da Educação, as escolas públicas do Ensino Médio, que foram atendidas pelo projeto piloto, nas categorias Ensino Médio Inovador e Mais Educação, teve acesso aos materiais impressos e aos seus professores foram oferecidos capacitação presencial e a distância, pela AEF-Brasil, com objetivo de cooperar com a temática em sala de aula e bem como auxiliar os alunos no estudo do material em questão; além do mais, a Associação procura por novas parcerias com instituições educacionais, através de franquia social, para aplicar esse método de ensino com seus alunos. Daí, é concedida autorização para reprodução do material e também acesso aos informativos de execução em redes e ambientes educacionais.

[5]Comitê Nacional de Educação Financeira

3.3.9.3 Portal DSOP de educação financeira

O doutor em Educação Financeira pela Florida Christian University Reinaldo Domingos[6] presidente do portal DSOP[7]- Educação Financeira, desenvolveu muitos projetos que contribuíram com a Educação Básica no Brasil. Foi responsável pela idealização da a 1ª Coleção Didática sobre educação financeira para o ensino básico e publicou pela Editora DSOP, da qual também é presidente, muitos livros sobre o assunto.

O portal oferece também o *Programa DSOP de Educação Financeira nas Escolas,* que foi elaborado pedagogicamente com o objetivo atender todos os segmentos da educação básica no País. Isso foi possível graças à criação em 2010 da ENEF por parte do Governo Federal que regulamentou essas ações na área da Educação Financeira no Brasil. Assim por:

> Contribuir para a criação de uma nova geração de pessoas independentes financeiramente, que aprenderam desde cedo a utilizar o dinheiro de maneira saudável e consciente para a realização de seus sonhos. É a partir deste objetivo principal que está fundamentado o Programa DSOP de Educação Financeira nas Escolas. (DSOP, 2017)

A Instituição de Ensino que tiver intenção de incluir a Educação Financeira na sua grade curricular através deste programa, deverá entrar em contato com um representante por meio de mensagem virtual pelo portal DSOP. Uma vez a escola habilitada, passa a ter direito ao emprego da Metodologia DSOP, sendo disponibilizado apoio e consultoria para adequação no ambiente escolar, capacitação pedagógica aos professores, plano de aula estruturado, palestras aos pais e/ou responsáveis e todo material didático para os alunos e professores.

Neste portal, ainda são oferecidos cursos de formação na área da Educação Financeira desde carga horária pequena até cursos voltados ao Ensino Superior - Lato Sensu. Disponibilizam também cursos com a Metodologia DSOP na área de Idiomas e bem como outras parcerias.

[6] Veja sua Biografia no Apêndice A.2

[7] A sigla DSOP significa Diagnosticar, Sonhar, Orçar e Poupar. São os 4 pilares que fundamentam esta metodologia

Considerações finais

A matemática financeira têm inúmeras aplicabilidades na vida das pessoas, por isso, o estudo dessa disciplina associada aos princípios da educação financeira deveria fazer parte do currículo escolar desde as séries iniciais e continuar com mais intensidade no ensino médio. Nas séries iniciais as crianças serão ensinadas a partir dos princípios básicos que norteiam uma boa educação financeira, enquanto que, no ensino médio, o jovem começa a tomar as primeiras decisões quanto à sua vida financeira e as noções básicas trazidas consigo podem fazer toda a diferença nessas tomadas de decisões.

Não precisa ser nenhum especialista no assunto para perceber que a educação financeira no Brasil é falha. Uma vez que a educação financeira não faz parte do currículo e analisando os livros didáticos foi percebido que a matemática financeira proposta não é suficiente e muitas vezes não é trabalhada como deveria.

Neste trabalho, procuramos trabalhar algumas ações com o objetivo de contribuir de forma efetiva com a inserção da matemática financeira nas práticas da sala de aula e na vida das pessoas. Uma das ações por exemplo, ensinando os caminhos para analisar qual é a melhor opção de compra para o consumidor e sugerindo alguns aplicativos para celulares que estão disponíveis no mercado, onde o cidadão pode acompanhar assiduamente as atividades financeiras do dia a dia.

Buscamos elencar fatos e situações do cotidiano, de maneira que o aluno conseguisse acompanhar e pudesse perceber que, com um pouco de persistência e estudo, é possível acompanhar o raciocínio exposto e tornar-se capacitado para desenvolver as equações, efetuar os cálculos, sistematizar os fatos e finalmente, tirar suas próprias conclusões a respeito do que foi estudado.

Além disso, tínhamos como meta contribuir na educação financeira dos alunos, proporcionar uma postura crítica e investigativa diante das transações comerciais, ou seja, despertar quesitos como a prudência e o planejamento a longo prazo.

Sabemos que, no geral as pessoas são imediatistas. E no campo das finanças essa postura parece ser mais comum ainda. Sabemos ainda que o consumismo imediato pode provocar complicações a longo prazo pois, a partir do momento que o cidadão adquire uma dívida a qual não consegue cumprir com o pagamento, ou mesmo, comprometa boa parte da renda com prestações altas e longas, não será fácil restabelecer a harmonia de suas finanças.

A longo do trabalho percebemos a importância da educação financeira na escola. Como uma das principais funções da escola é formar cidadãos conscientes, em outras palavras, pretende-se, que a escola forneça aos alunos uma base sólida que os prepare para enfrentar questões como estas da vida financeira. Quanto mais cedo e com mais intensidade for essa formação, maior é a chance de obtermos pessoas conscientes e instruídas que farão toda diferença na sociedade. O consumismo atualmente tem sido colocado como prioridade principalmente na vida dos jovens, por isso pretendemos com essas práticas diferenciadas, atingir positivamente o aluno, propiciando-lhe um melhor entendimento e capacidade de como lidar com o dinheiro, visando o sucesso financeiro.

Através deste trabalho conseguimos alcançar os objetivos propostos como: despertar o interesse dos alunos em relação ao estudo da matemática financeira a partir de situações do cotidiano; constatar a possibilidade de se desenvolver metodologia alternativa para o ensino desse conteúdo e o uso de ferramentas tecnológicas como meio facilitador para a realização dos cálculos.

Concluímos através deste trabalho para que tenhamos cidadãos críticos e autônomos das decisões na vida financeira, existe uma multiplicidade de pequenos fatos que devem ser levados em consideração ao longo dos anos. A começar pela ensinamento escolar e lógico, não menosprezando os valores e conceitos familiares.

Referências Bibliográficas

[1] Abreu, M.C.R.; Moreira, M. *Referenciais curriculares para o ensino médio: componente curricular- matemática.* 2. ed. Goiânia: Formato, 2010.

[2] AEF-Brasil, *Educação financeira nas escolas.* Disponível em: <http://www.aefbrasil.org.br/index.php/programas-e-projetos/educacao-financeira-nas-escolas/> Acesso em: 01 de mar. 2017.

[3] Agência Senado. *Brasil tem mais de 22 milhões de desempregados, alerta Ataídes.* Disponível em: <http://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2016/10/19/nova-metodologia-do-ibge-eleva-desempregados-para-22-7-milhoes-diz-ataides>. Acesso em: 16 jan. 2017.

[4] Brasil, Bom dia. *Número de brasileiros endividados sobe para 59 milhões.* Publicado em: 21/01/2016. Disponível em: <http://g1.globo.com/bom-dia-brasil/noticia/2016/01/numero-de-brasileiros-endividados-sobe-para-59-milhoes.html> Acesso em: 15 ago. 2016.

[6] Brasil, Ministério da Educação. *Guia de livros did'aticos: PNLD 2015: ensino médio: matemática.* Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2014.

[6] Brasil, Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, parte III.*, Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

[7] Carneiro, M.F.M. *Retomada da economia brasileira deve demorar anos, indica FGV.* Folha de São Paulo, publicado em 17 de set. de 2016. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/mercado/2016/08/1803803-retomada-da-economia-brasileira-deve-demorar-anos-indica-fgv.shtml>. Acesso em: 15 nov. 2017.

[8] Dante, L.R. *Matemática: contexto e aplicações.* Vol.3. São Paulo: Ática, 2012.

[9] Domingos, R. *DSOP na Câmara dos Deputados - A importância da Educação Financeira nas escolas.* Publicado em: 06 de dez.de 2016. Disponível em: <http://www.dsop.com.br/> Acesso em: 15 de jan. 2017.

[10] DSOP-Educação Financeira. *DSOP nas escolas.* Disponível em: <http://www.dsop.com.br/escolas/> Acesso em: 15 jan. 2017.

[11] ENEF- Educação Financeira. Disponível em: <http://www.vidaedinheiro.gov.br/index.php> Acesso em: 01 nov. 2016.

[12] Fantástico. *Brasileiros gastam R$ 174 bi pagando juros de dívidas, diz Fecomércio.* 16 de outubro de 2016. Disponível em: <http://g1.globo.com/fantastico/noticia/2016/10/brasileiros-gastam-r-174-bi-pagando-juros-de-dividas-diz-fecomercio.html>.Acesso em: 18 out. 2016.

[13] Fonseca, M.C.F.R. Por que ensinar matemática, *Presença Pedagógica*, v.1, n. 6, Belo Horizonte, mar/abril, 1995.

[14] Franco, E.N. *A matemática financeira e o ensino médio,* Uberaba: UFTM, 2016. 135f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2016.

[15] Hazzan, S.; Ponpeo, J.N. *Matemática finançeira.* 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

[16] Junior, E.P. Aplicativos como suporte para gestão financeira. *Perspectiva ISAE,* Paraná, 32ª ed., p.8, abr/maio 2015. Disponível em: <http://http://www.isaebrasil.com.br/revista/edicao32/#/8 > Acesso em: 09 out. 2016.

[17] Maia, E; Carneiro, M. *A Reforma do Ensino Médio em Questão.* São Paulo: Biruta, 2000.

[18] Martelo, A. *Retomada do crescimento econômico pode ser rápida, diz Meirelles.* Disponível em: <http://www.secovipr.com.br/Retomada+do+crescimento+economico+pode+ser +rapida+diz+Meirelles+104+11843.shtml.> Acesso em: 08 fev. 2016.

[19] Marques, E. *Matemática financeira no ensino médio: capitalização e amortização com o uso de planilha eletrônica.* São Luís: UFM, 2016. 68f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2016.

[20] Matos, V.F. *O Ensino de Sistemas de Equações Lineares: Uma Abordagem Geométrica.* Uberaba: UFTM, 2013. 66f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Triâgulo Mineiro, Uberaba, 2013.

[22] Morgado, A.C.; Wagner, E.; Zany, S.C. *Progressões e matemática financeira.* 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[22] Morgado, A.C.; Carvalho, P.C.P. *Matemática discreta.* Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[23] Paiva, M.R. *Matemática - Paiva.* 2. ed. Vol.3. São Paulo: Moderna 2013.

[25] Pataro, P.M.; Souza, J. *Matemática: Vontade de Saber.* 3. ed. 6º ano - Ensino Fundamental. São Paulo: FTD, 2015.

[25] Pataro, P.M.; Souza, J. *Matemática: Vontade de Saber.* 3. ed., 7º ano - Ensino Fundamental. São Paulo: FTD, 2015.

[26] Pinheiro, N.A.M.; Oliveira, J.A. Contextualizando a matem ática por meio de projetos de trabalhos. *Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em ciências* Florianópolis, 2009. Disponível em: <http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viienpec/pdfs/311.pdf> Acesso em: 10 out. 2016.

[27] Sá, I.P. *Matemática financeira para educadores críticos.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2011.

[28] São Paulo, Conselho Estadual de Educação, *Manifestação do Conselho Estadual de Educação: reforma do ensino médio.* Publicado em: 13/10/2016. Disponível em: <http://www.ceesp.sp.gov.br/comunicado.php?id=439> Acesso em: 10 jan. 2017.

[29] Silva, A.M.; Powell, A.B. *Um programa de educação financeira para a matemática escolar da educação básica.* Curitiba: SBM, 2013.

[30] Smole, K.S.; Diniz, M.I. *Matemática ensino médio.* 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[31] Souza, G.F. *O letramento financeiro e a matemática financeira básica no ensino fundamental.* Rio de Janeiro: PUCRJ, 2016. 89f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

[32] Ter-Minassian, T. *Brasil não sai da crise econômica se não resolver a crise política.* Publicado em: 27 mar. 2016. Estadão Economia e Negócios. Disponível em: <http://economia.estadao.com.br/noticias/geral,brasil-nao-sai-da-crise-economica-se-nao-resolver-a-crise-politica,10000023324.> Acesso em: 16 dez. 2016.

Apêndice: Material adicional

A.1 Plano de aula

Unidade Temática: Matemática financeira

Data: 21 e 22/11/2016. Série: 2º ano B. Turno: Noturno.

Conteúdos:

Porcentagem; Juros simples e compostos; Taxas proporcionais e equivalentes; Capitais equivalentes.

Objetivos específicos

1. Calcular as porcentagens de desconto e/ou acréscimo numa situação problema;
2. Analisar e determinar em uma situação problema o desconto, acréscimo, lucros, prejuízos e cálculos de prestações;
3. Determinar o valor solicitado a partir do uso das fórmulas de juros simples e composto;
4. Comparar os preços à vista com os preços a prazo e determinar a taxa de juros aplicadas;
5. Compreender quando se usa as taxas proporcionais ou equivalentes;
6. Aplicar a fórmula equivalência de capitais;
7. Analisar o capital nos diferentes períodos, sendo capaz de perceber e comparar os juros aplicados nas transações comerciais e bancárias;
8. Manusear as calculadoras científicas e planilhas eletrônicas na resolução dos exercícios.

Procedimento metodológicos

- Apresentação do autor(a) e explanação dos objetivos da realização da oficina pedagógica;
- Exibição de um filme visando sensibilizar os alunos sobre a importância do assunto em questão;
- Aula expositiva no quadro sobre os conceitos matemáticos pré requisitos para a resolução dos exercícios;
- Trabalho em grupos para a resolução das situações problemas propostos;
- Momento de discussão e troca de experiência entre os grupos;
- Discussão final e avaliação dessa interferência em sala de aula.

Recursos didáticos

- Apresentação de slides;
- Vídeo;
- Aulas dialogadas e expositivas;
- Trabalhos em grupos com o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas para auxiliarem nos cálculos;
- Síntese ao final dos trabalhos com exposição dos grupos no quadro.

Avaliação

Propor uma avaliação qualitativa, a partir das discussões e exposição dos grupos com interferência e sugestões do professor regente. Discussão dos pontos positivos e negativos com sugestões que poderão ser usadas como contribuições futuras.

A.2 Biografia de Reinaldo Domingos

Veja a seguir, algumas descrições de suas atividades e da sua biografia:

Reinaldo Domingos é doutor em Educação Financeira, escritor, educador e terapeuta financeiro. Presidente da DSOP Educação Financeira e da Editora DSOP, publicou o best-seller Terapia Financeira, que conta com mais de 200 mil cópias vendidas. Também publicou os livros Livre-se das Dívidas, Eu mereço ter dinheiro!, Ter Dinheiro Não Tem Segredo, Mesada Não É Só Dinheiro, Sabedoria Financeira e Papo Empreendedor, além da série infantil O Menino do Dinheiro - Sonhos de Família, Vai à Escola, Ação Entre Amigos, Num Mundo Sustentável, Pequeno Cidadão, O Menino e o Dinheiro, O Menino, o Dinheiro e os Três Cofrinhos, e O Menino, o Dinheiro e a Formigarra.
Doutor em Educação Financeira pela Florida Christian University, idealizou em 2009 a primeira Coleção Didática de Educação Financeira para o Ensino Básico do País, composta por 15 livros do aluno e 15 do professor, com os respectivos planos de aula, já adotada por diversas escolas públicas e privadas brasileiras.
Em 2012 desenvolveu um programa especial para o jovem aprendiz com a publicação do livro Educação Financeira para Jovens Aprendizes, junto do livro do professor. Outro programa especial foi a criação do livro para a Educação de Jovens e Adultos (EJA), acompanhado do caderno do professor. Também em 2012 adaptou para o Ensino a Distância (EAD) o Curso DSOP de Educação Financeira, baseado em seu livro Terapia Financeira. Indo ao encontro de sua missão, lançou duas coleções: O Menino do Dinheiro e O Menino e o Dinheiro compostas por seis livros, em cinco idiomas: Inglês, Espanhol, Francês, Alemão e Mandarim.
DSOP Educação Financeira Reinaldo Domingos Idealizador, fundador e presidente da Associação de Educadores Financeiros (Abefin), uma associação civil sem fins lucrativos ou econômicos de natureza de direito privado, que tem por finalidade social apoiar o fortalecimento, o aprimoramento, o desenvolvimento, a qualificação e a capacitação do educador financeiro no Brasil, legitimando e dando visibilidade à atividade.
Presidente do Grupo Confirp de Contabilidade, uma das maiores empresas de consultoria contábil do Brasil, foi governador do Rotary International Distrito 4.610 na gestão 2009-2010 e participa ativamente de diversas organizações não governamentais. A criação da Metodologia DSOP de Educação Financeira, agora adaptada ao ensino escolar, é baseada na experiência de vida de Reinaldo Domingos, empresário bem-sucedido que conquistou sua independência financeira aos 37 anos. Nascido em Casa Branca, interior de São Paulo, filho de pai ferroviário e mãe autônoma, aos 12 anos realizou o primeiro dos seus muitos sonhos: comprar uma bicicleta. Foi assim, priorizando seus sonhos e sabendo exatamente quanto custavam e quanto deveria poupar para alcançá-los, que aprendeu a ter o dinheiro como um aliado, usando-o com responsabilidade e foco na satisfação pessoal e familiar. Com o aprendizado adquirido, quer, por meio das atividades da DSOP Educação Financeira, ajudar as pessoas a se tornarem educadas e independentes financeiramente. (DSOP, 2017)

A.3 Tabelas de juros. Fonte: Banco Central do Brasil, acessado em:12/02/2017

Data	Data fim	Depósitos até 03.05.2012			Depósitos a partir de 04.05.2012 (*)		
		Remuneração básica	Remuneração adicional	Remuneração total	Remuneração básica	Remuneração adicional	Remuneração total
21/12/2016	21/01/2017	0,2099	0,5000	0,7109	0,2099	0,5000	0,7109
22/12/2016	22/01/2017	0,1657	0,5000	0,6665	0,1657	0,5000	0,6665
23/12/2016	23/01/2017	0,1501	0,5000	0,6509	0,1501	0,5000	0,6509
24/12/2016	24/01/2017	0,1545	0,5000	0,6553	0,1545	0,5000	0,6553
25/12/2016	25/01/2017	0,1904	0,5000	0,6914	0,1904	0,5000	0,6914
26/12/2016	26/01/2017	0,2212	0,5000	0,7223	0,2212	0,5000	0,7223
27/12/2016	27/01/2017	0,2186	0,5000	0,7197	0,2186	0,5000	0,7197
28/12/2016	28/01/2017	0,2020	0,5000	0,7030	0,2020	0,5000	0,7030
01/01/2017	01/02/2017	0,1700	0,5000	0,6708	0,1700	0,5000	0,6708
02/01/2017	02/02/2017	0,1996	0,5000	0,7006	0,1996	0,5000	0,7006
03/01/2017	03/02/2017	0,2120	0,5000	0,7131	0,2120	0,5000	0,7131
04/01/2017	04/02/2017	0,2448	0,5000	0,7460	0,2448	0,5000	0,7460
05/01/2017	05/02/2017	0,1824	0,5000	0,6833	0,1824	0,5000	0,6833
06/01/2017	06/02/2017	0,1647	0,5000	0,6655	0,1647	0,5000	0,6655
07/01/2017	07/02/2017	0,1451	0,5000	0,6458	0,1451	0,5000	0,6458
08/01/2017	08/02/2017	0,1805	0,5000	0,6814	0,1805	0,5000	0,6814
09/01/2017	09/02/2017	0,1946	0,5000	0,6956	0,1946	0,5000	0,6956
10/01/2017	10/02/2017	0,1816	0,5000	0,6825	0,1816	0,5000	0,6825
11/01/2017	11/02/2017	0,2263	0,5000	0,7274	0,2263	0,5000	0,7274
12/01/2017	12/02/2017	0,1695	0,5000	0,6703	0,1695	0,5000	0,6703
13/01/2017	13/02/2017	0,1421	0,5000	0,6428	0,1421	0,5000	0,6428
14/01/2017	14/02/2017	0,1385	0,5000	0,6392	0,1385	0,5000	0,6392
15/01/2017	15/02/2017	0,1632	0,5000	0,6640	0,1632	0,5000	0,6640
16/01/2017	16/02/2017	0,1929	0,5000	0,6939	0,1929	0,5000	0,6939
17/01/2017	17/02/2017	0,1816	0,5000	0,6825	0,1816	0,5000	0,6825
18/01/2017	18/02/2017	0,1890	0,5000	0,6899	0,1890	0,5000	0,6899
19/01/2017	19/02/2017	0,1517	0,5000	0,6525	0,1517	0,5000	0,6525
20/01/2017	20/02/2017	0,1290	0,5000	0,6296	0,1290	0,5000	0,6296
21/01/2017	21/02/2017	0,1265	0,5000	0,6271	0,1265	0,5000	0,6271
22/01/2017	22/02/2017	0,1606	0,5000	0,6614	0,1606	0,5000	0,6614
23/01/2017	23/02/2017	0,1930	0,5000	0,6940	0,1930	0,5000	0,6940
24/01/2017	24/02/2017	0,2052	0,5000	0,7062	0,2052	0,5000	0,7062
25/01/2017	25/02/2017	0,1677	0,5000	0,6685	0,1677	0,5000	0,6685
26/01/2017	26/02/2017	0,1689	0,5000	0,6697	0,1689	0,5000	0,6697
27/01/2017	27/02/2017	0,1273	0,5000	0,6279	0,1273	0,5000	0,6279
28/01/2017	28/02/2017	0,0894	0,5000	0,5898	0,0894	0,5000	0,5898
01/02/2017	01/03/2017	0,0302	0,5000	0,5304	0,0302	0,5000	0,5304
02/02/2017	02/03/2017	0,0391	0,5000	0,5393	0,0391	0,5000	0,5393
03/02/2017	03/03/2017	0,0401	0,5000	0,5403	0,0401	0,5000	0,5403
04/02/2017	04/03/2017	0,0328	0,5000	0,5330	0,0328	0,5000	0,5330
05/02/2017	05/03/2017	0,0328	0,5000	0,5330	0,0328	0,5000	0,5330
06/02/2017	06/03/2017	0,0255	0,5000	0,5256	0,0255	0,5000	0,5256
07/02/2017	07/03/2017	0,0406	0,5000	0,5408	0,0406	0,5000	0,5408
08/02/2017	08/03/2017	0,0062	0,5000	0,5062	0,0062	0,5000	0,5062
09/02/2017	09/03/2017	0,0383	0,5000	0,5385	0,0383	0,5000	0,5385

Figura A.1: Remuneração dos Depósitos de Poupança

		Taxas de juros	
Posição	Instituição	% a.m.	% a.a.
1	BANIF BRASIL BM S.A.	0,00	0,00
2	BCO INDUSVAL S.A.	1,56	20,45
3	BCO SOFISA S.A.	2,03	27,34
4	BCO RIBEIRAO PRETO S.A.	2,41	33,12
5	BCO ALFA S.A.	3,33	48,08
6	BCO CAPITAL S.A.	4,36	66,88
7	BCO FATOR S.A.	4,41	67,88
8	BANCOOB	4,42	68,02
9	BCO LUSO BRASILEIRO S.A.	4,62	72,02
10	BCO CCB BRASIL S.A.	5,03	80,18
11	BCO PAULISTA S.A.	5,37	87,37
12	BCO LA NACION ARGENTINA	5,41	88,14
13	BCO DO NORDESTE DO BRASIL S.A.	7,03	125,99
14	BRB - BCO DE BRASILIA S.A.	7,65	142,21
15	BCO BANESTES S.A.	8,25	158,90
16	BCO DO EST. DO PA S.A.	9,88	209,65
17	BCO DA AMAZONIA S.A.	10.48	230.82
18	BCO SAFRA S.A.	11,34	263,07
19	BCO RENDIMENTO S.A.	11,76	279,71
20	BCO DO EST. DE SE S.A.	11,96	287,91
21	BCO DO ESTADO DO RS S.A.	12,02	290,61
22	BCO DO BRASIL S.A.	12,13	295,12
23	BCO DAYCOVAL S.A	12,21	298,45
24	CAIXA ECONOMICA FEDERAL	12,26	300,51
25	BCO BRADESCO S.A.	12,34	303,90
26	BANCO GERADOR S.A.	12,68	318,77
27	ITAÚ UNIBANCO BM S.A.	12,99	332,98
28	BCO CITIBANK S.A.	14,52	408,60
29	BCO SANTANDER (BRASIL) S.A.	15,15	443,30
30	BCO MERCANTIL DO BRASIL S.A.	16,37	516,92

Figura A.2: Pessoa Física - Cheque Especial. Período: 23/01/2017 a 27/01/2017

		Taxas de juros	
Posição	Instituição	% a.m.	% a.a.
1	SENFF S.A. - CFI	2,40	32,91
2	BANCO INTERMEDIUM S/A	4,07	61,46
3	BCO BMG S.A.	4,20	63,75
4	BCO OLÉ BONSUCESSO CONSIGNADO S.A.	4,75	74,57
5	NOVO BCO CONTINENTAL S.A. - BM	5,61	92,51
6	BCO DAYCOVAL S.A	5,68	94,09
7	BANCO SEMEAR	7,29	132,75
8	CCB BRASIL S.A. - CFI	7,56	139,75
9	BCO INDUSTRIAL DO BRASIL S.A.	7,80	146,21
10	BANCO GERADOR S.A.	8,38	162,60
11	BANCOOB	9,02	181,86
12	BCO DO EST. DO PA S.A.	9,61	200,74
13	BCO BANESTES S.A.	10,68	237,87
14	BCO MERCANTIL DO BRASIL S.A.	11,38	264,39
15	BCO DO BRASIL S.A.	12,37	305,13
16	BCO SAFRA S.A.	12,60	315,29
17	BANCO ORIGINAL	12,62	316,11
18	FINAMAX S.A. CFI	13,07	336,63
19	BCO DO NORDESTE DO BRASIL S.A.	13,24	344,84
20	BCO DO ESTADO DO RS S.A.	13,44	354,04
21	KREDILIG S.A. - CFI	14,15	389,56
22	BCO BRADESCO CARTOES S.A.	15,16	443,91
23	BCO ITAUCARD S.A.	15,50	463,70
24	BCO CITIBANK S.A.	15,54	465,85
25	PORTOSEG S.A. CFI	15,62	470,77
26	SOROCRED CFI S.A.	15,62	470,87
27	CARUANA SCFI	15,91	487,89
28	HS FINANCEIRA	16,02	495,02
29	BCO DO EST. DE SE S.A.	16,08	498,32
30	BANCO PAN	16,29	511,82
31	PERNAMBUCANAS FINANC S.A. CFI	16,71	538,57
32	VIA CERTA FINANCIADORA S.A. - CFI	16,88	549,88
33	CAIXA ECONOMICA FEDERAL	16,89	550,36
34	MIDWAY S.A. - SCFI	17,01	558,69
35	BCO BRADESCO S.A.	17,09	564,10
36	CREDIARE CFI S.A.	17,09	564,37
37	BCO SANTANDER (BRASIL) S.A.	17,10	564,60
38	BCO LOSANGO S.A.	17,12	565,92
39	FIN. ITAÚ CBD CFI	17,19	571,07
40	BANCO BRADESCARD	17,42	587,13
41	PARANA BCO S.A.	17,43	587,29
42	BANCO CBSS	17,69	606,41
43	HIPERCARD BM S.A.	17,90	621,33
44	LUIZACRED S.A. SOC CFI	18,04	632,00
45	ITAÚ UNIBANCO BM S.A.	18,05	632,41
46	BV FINANCEIRA S.A. CFI	18,16	640,59
47	BCO CSF S.A.	18,35	655,00
48	BCO CETELEM S.A.	18,65	678,24
49	OMNI SA CFI	19,14	717,80
50	BCO TRIANGULO S.A.	19,98	789,46
51	AVISTA S.A. CFI	25,03	1.359,82

Figura A.3: Pessoa Física - Cartão de crédito rotativo. Período: 23/01/2017 a 27/01/2017