Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

O Ensino de Matrizes Utilizando Teoria dos Grafos

Suelma Luiza Alves de Souza

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto**

Barra do Garças - MT

Abril de 2017

O Ensino de Matrizes Utilizando Teoria dos Grafos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Suelma Luiza Alves de Souza e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças - MT, 27 de maio de 2017.

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Prof. Dr. Daniel da Silveira Guimarães
Prof. Dr. Mauricio Donizetti Pieterzack

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S729e SOUZA, Suelma Luiza Alves de.
O ensino de matrizes utilizando teoria dos grafos / Suelma Luiza Alves de SOUZA. -- 2017
xv, 116 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Adilson Antônio Berlatto.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2017.
Inclui bibliografia.

1. Contextualização. 2. Matrizes. 3. Teoria dos grafos. 4. Ensino médio. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em ____ de ____________ de ________
e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

____
Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto

____
Prof. Dr. Mauricio Donizetti Pieterzack

____
Prof. Dr. Daniel da Silveira Guimarães

À Deus.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me ajudado, dado forças e sabedoria para superar os momentos de dificuldade durante a realização deste trabalho, pois sem sua permissão nada seria possível.

Em especial agradeço, ao professor Dr. Adilson Antônio Berlatto por ter aceito me orientar na realização deste trabalho, tendo muita paciência e me incentivando nas horas das dificuldades. Por ter sido um ótimo professor, procurando sempre tirar minhas dúvidas nas disciplinas do mestrado, pela sua amizade e pelos seus conselhos. Não esquecerei das suas explicações que me engrandeceram muito e buscarei sempre aplicar esse conhecimento na minha carreira docente. Com o senhor aprendi muito mais do que conteúdos das disciplinas, mas sim como levar esse aprendizado para a minha vida pessoal, me fez amadurecer e mudar minha forma de pensar.

Agradeço ao Dr. Miguel por ter me ajudado nos momentos difíceis da minha vida.

Agradeço à minha família, em especial, meu pai (falecido) e minha mãe por ter me dado a vida e ao meus irmãos Sebastião que me criou, Maria, João (falecido) e Sérgio que me ajudaram direta ou indiretamente, pois sem eles não teria alcançado esta vitória. Eles foram importantes por ter me incentivado esta etapa de minha vida, dando-me suporte e ânimo a todo instante, não me deixando desistir.

Agradeço ao Márcio Alves Arruda e sua família por me acolher e me incentivar nos meus momentos de estudo que foram fundamentais na realização do meu trabalho.

Agradeço às pessoas que partiram estendendo a seus familiares que estão vivos, Jovina do Carmo e Maria Medeiros no ano de 2016 em que me incentivaram nos meus momentos de estudo com sabedoria e alegrias dando conselhos que me ajudaram a superar as minhas dificuldades no decorrer deste curso.

Agradeço aos professores da UFMT: Dr. Carlos, Dr. Daniel, Dr. Juan, Dr.

Márcio, Dr. Tibério e Ms. Renato. Vocês foram fundamentais para meu crescimento profissional e pessoal.

Agradeço às minhas amigas: Abadia, Deuseny, Elenice e todos que contribuíram diretamente ou indiretamente para a conclusão desta dissertação, o meu muito obrigado.

Agradeço à Escola Estadual Marechal Eurico Gaspar Dutra por ter concedido o espaço e me acolher nos momentos de estudo que precisei, buscando sempre passar informações desenvolvidas para o engrandecimento deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas da turma de 2015, pelas colaborações nos estudos, auxiliando-me nos momentos de fraqueza e dificuldades.

Agradeço ao Profmat pela oportunidade, e a UFMT por ter me apoiado e acolhido.

Muito obrigado a todos.

Aos que aqui chegaram,
vale lembrar o ditado da persistência:

Água mole em pedra dura,
tanto bate até fura.

Ditado popular.

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma proposta sobre aplicações de matrizes utilizando teoria dos grafos, será mostrado uma sequência didática acessível aos docentes e discentes, possibilitando uma nova metodologia do ensino de matrizes na educação básica. Para elaboração dessa sequência, opta-se por introduzir e apresentar o ensino de matrizes utilizando teoria dos grafos de forma contextualizada, usando argumentos geométricos e algébricos. Neste processo obteve-se como resultado uma possível reestruturação nos métodos de ensino de matrizes, oferecendo ao aluno um significado do seu cotidiano buscando relacionar com o conteúdo abordado pelo professor. De acordo com a metodologia aplicada, os alunos conseguiram entender de forma clara, as resoluções dos problemas gerando um padrão de aprender conteúdos matemáticos de forma real e positiva.

Palavras chave: Contextualização, Matrizes, Teoria dos Grafos, Ensino Médio.

Abstract

In this work, a proposal on matrix applications using graph theory is presented, a didactic sequence will be shown that is accessible to teachers and students, making possible a new methodology for the teaching of matrices in basic education. In order to elaborate this sequence, it is chosen to introduce and present the teaching of matrices using graph theory in a contextualized way, using geometric and algebraic arguments. This process resulted in a possible restructuring in the methods of teaching of matrices, offering to the student a meaning of their daily life, seeking to relate with the content addressed by the teacher. According to the applied methodology, the students were able to clearly understand the resolutions of the problems generating a pattern of learning mathematical contents in a real and positive way.

Keywords: Contextualization, Matrices, Theory of Graphs, High School.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

A sociedade contemporânea é complexa e multifacetada, impondo uma maneira de ver o mundo sob vários ângulos ao mesmo tempo. E essa heterogeneidade implica na construção de modelos para representar as situações vivenciadas, sendo que para estes registros é utilizada a linguagem natural ou algum tipo de diagrama.

É notório que a matemática, dentro de toda essa complexidade em que a sociedade se desenvolve, caracteriza-se como ciência de extrema importância para o desenvolvimento das civilizações, pois por meio dela pode-se modelar, descrever e resolver problemas, dos mais simples aos mais complexos, em diversas atividades humanas.

Atualmente, observa-se que a resolução de problemas tem relevante importância em ciências aplicadas tais como: matemática, sociologia, filosofia, geografia e ciência da computação. Matrizes e grafos são algumas das ferramentas destas aplicações.

O desenvolvimento dessa pesquisa foi conduzida pelas experiências pessoais em ministrar aulas para o ensino médio noturno, turno em que, frequentemente, acolhe alunos trabalhadores, que por esse motivo só dispõem do tempo em sala de aula para realizar as atividades didáticas. Consequentemente, apresentam um pouco mais de dificuldade em se motivarem com os conteúdos ministrados. O foco será dado no estudo de matrizes e teoria do grafos de maneira a despertar no aluno o interesse, fazendo com que eles possam atribuir um novo significado para a matemática escolar.

Para isso é preciso compreender como uma matriz é definida. Dados números naturais m e n define-se uma matriz real de ordem m por n ou simplesmente uma matriz m por n (escreve-se m x n) como uma tabela formada por números reais, distribuídos em m linhas e n colunas. Por exemplo: a tabela

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

representa matriz 4 x 3, ou seja, tem 4 linhas e 3 colunas.

Matrizes são peças fundamentais para representar em forma de tabelas, mas podemos associá-las a outros conteúdos da matemática e fazer diversas aplicações através de situações problema. Para isso, é preciso analisar as matrizes como elementos de um conjunto e não apenas como tabelas.

No entanto, atualmente, as aplicações que envolvem matrizes não estão ainda inseridas na maioria dos livros didáticos. De acordo com a tabela abaixo, foram analisados seis livros do ensino médio e percebe-se que há uma carência de aplicações práticas que envolvam matrizes. Entre os livros supracitados, dois deles expõe apenas uma aplicação sobre a teoria dos grafos, porém não explora o conteúdo citado e nem esclarece sua relação com as matrizes.

Como é possível observar, Dante (2005) faz aplicação com a área de computação gráfica envolvendo conceitos tais como: rotação, escala, translação e composição de transformações geométricas.

Livros × Aplicações	**Tabelas numéricas**	**Aplicação na área computação**	**História de matrizes**	**Aplicação sobre teoria dos grafos**
Dante (2005)	×	×		
Iezzi (2007)			×	
IezzieDolce (2004)	×			×
Paiva (1999)	×			×
Barroso (2010)	×			
Ribeiro (2008)	×			

Tabela 1: Livros versus Aplicações

Conforme a Tabela 1, os professores de matemática deixam de trabalhar o conteúdo, muitas vezes, devido à escassez de material didático. Sendo assim, o profissional pode buscar alternativas para ministrar o conteúdo através de solução de problemas utilizando acepções concretas de acordo com a realidade dos alunos.

O ensino de matrizes por meio da teoria dos grafos torna-se significativo por ser uma ferramenta que possui inúmeras aplicações no nosso dia-a-dia.

A definição de um grafo G, de acordo com Lipschutz (2004), consiste em dois objetos: i) um conjunto $V(G)$ cujos elementos são chamados vértices de G; ii) um conjunto $A(G)$ de pares não ordenados de vértices distintos, chamados arestas de G.

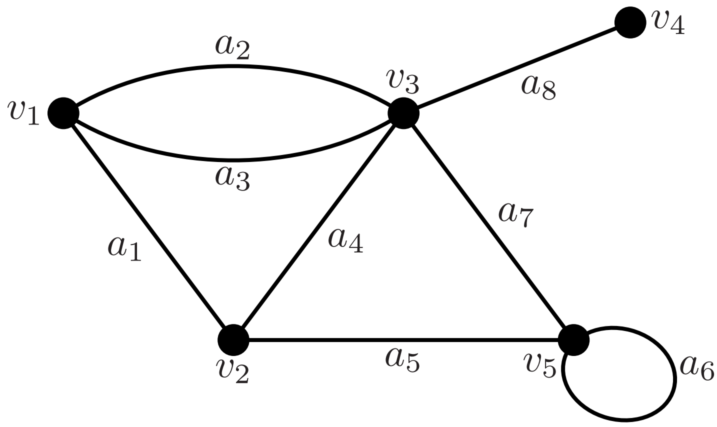


Figura 1: Elementos de um Grafo.

Como podemos observar na Figura 1, esse grafo possui 5 vértices, que são v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 e possui 8 arestas, que são $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, a_7 e a_8. Essa é uma ferramenta matemática de grande importância para a solução de diversas situações problemas em várias áreas do conhecimento.

Na área da matemática, os grafos que se encontram nos exemplos do cotidiano das pessoas, estão associados, por exemplo, a procura do menor caminho a ser percorrido, localização em mapas, como uma pessoa pode influenciar a outra e como o desenho de um grafo se relaciona com as matrizes, entre outras aplicações.

Esta pesquisa apresenta uma proposta didática desenvolvida com uma turma do 2º ano do ensino médio - noturno, sobre matrizes e teoria dos grafos. Através de atividades simples e contextualizadas, levando em consideração o lúdico, busca-se valorizar o pensamento crítico do educando na perspectiva de uma maior interação do aluno com o objeto de ensino, evidenciando a importância dos conceitos matemáticos.

O exercício da prática pedagógica exige do docente o desenvolvimento de situações que proporcionem ao estudante uma aprendizagem significativa de forma crítica em relação aos conteúdos apresentados. Por isso faz-se necessário que os métodos usados pelos professores colaborem para a estruturação do pensamento dos educandos. Sendo assim, a abordagem sobre o tema terá o foco voltado para os argumentos algébricos, geométricos e aplicações contextualizadas nas diversas áreas do conhecimento.

O trabalho será estruturado em dois capítulos. No primeiro serão abordados, a história, a representação, os tipos de matrizes e as operações com matrizes. Na sequência será exposto a história dos grafos, sua representação e os tipos de grafos, e também a matriz de adjacência. Os conceitos históricos apresentados foram fundamentados nas obras de Boyer (1996) e Iezzi (2007). O capítulo será finalizado com a apresentação de uma explanação sobre matrizes relacionando com a teoria dos grafos para o processo ensino aprendizagem.

No segundo capítulo, serão aplicadas atividades sobre o ensino de matrizes utilizando a teoria dos grafos através de exemplos do dia a dia dos alunos. Também será desenvolvido conteúdo da própria matemática de acordo com a grade curricular, relacionando com a contextualização e explorando a ideia de matrizes que já foi ministrado pelo professor da turma. Com isso será focado os conceitos sobre melhor caminho, conceitos sobre grafos, grafos no ensino de matrizes e multiplicação de matrizes utilizando grafos.

Para finalizar, será realizado uma análise qualitativa de acordo com os dados obtidos na aplicação proposta nas considerações finais, os métodos que utilizaremos nesta análise serão questionários que abordam as opiniões, expectativas e avaliação dos alunos, bem como o relatório de todo processo.

Capítulo 1

Matrizes e Grafos

O desenvolvimento dos conceitos teóricos sobre matrizes e grafos foi fundamentado nos livros Dante (2005), Ribeiro (2008), Iezzi et al (2007), Hefez (2012), Gersting (2004) e Lipschutz (2004) em que todos apresentam questões de forma clara e sucinta sobre os temas abordados sendo que os dois últimos retratam a teoria dos grafos, em que expõe uma ordem lógica relacionando-os com problemas contextualizados e retratam situações que podem ser utilizadas no dia a dia das pessoas.

Segundo Soares (2010), a educação tem por objetivo auxiliar os indivíduos a identificar o papel que ocupa no mundo de maneira que superem a alienação. Sendo assim, levar o aluno a desenvolver o raciocínio lógico para interpretar e solucionar problemas contextualizados, certamente é de grande valia para seu desenvolvimento intelectual, pessoal e acadêmico.

Partindo desses referenciais, foram expostos alguns exemplos simples e chegamos a questões que envolvem alguns assuntos, tais como: conceitos históricos e teóricos sobre matrizes e grafos, retratando com imagens e exemplos na abordagem apresentada, finaliza-se com uma explanação sobre matrizes envolvendo a teoria dos grafos.

1.1. Matrizes

O currículo dos livros didáticos no ensino de matrizes vem trazendo importantes conteúdos representados em forma de tabela, mas também, pode ser representados em forma de conjuntos de acordo com Gersting (2004) e Hefez (2012). Nesta seção, serão abordadas a história das matrizes, sua representação, os tipos de matrizes e suas operações, além de exemplos práticos que dêem um real significado ao conteúdo citado.

1.1.1. Conceitos históricos

O britânico Arthur Cayley (1821 - 1895) foi um dos maiores contribuintes pela evolução nos estudos de matemática na área da Álgebra, no século XIX.

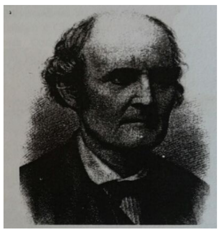


Figura 1.1: Arthur Cayley

Cayley nasceu em Richmond na Inglaterra e desde cedo demonstrou grande vocação para os estudos. Por sugestão de alguns de seus professores, seus pais resolveram enviá-lo para estudar em Cambridge, em vez de colocá-lo nos negócios da família. Em 1838 entra na escola Trinity College, onde iria se graduar com distinção máxima. Na sequência torna-se professor, no próprio Trinity, mas desiste três anos depois, pois sua permanência exigiria abraçar a carreira religiosa, o que não estava em seus planos. Durante os quinze anos seguintes, dedicou-se à advocacia, mas com certeza não integralmente, como mostram os mais de duzentos artigos que publicou no período, na área da matemática. Foi também nessa época que conheceu James Joseph Sylvester (1814 - 1897), outro dos grandes estudiosos da Álgebra na Inglaterra no século citado, com quem estabeleceu sólida amizade consolidada até por áreas de pesquisa comuns, como a teoria dos invariantes. Em 1863 aceita convite para ocupar uma nova cadeira de matemática pura criada em Cambridge, do qual ficou até a sua morte. Durante um semestre de 1882 ele não ocupou essa cadeira, devido ao fato de ter ministrado cursos nos Estados Unidos.

Em quantidades de produção matemática, em todos os tempos, Cayley talvez só seja superado por Euler e Cauchy. E, embora sua obra seja diversificada, foi no campo da álgebra, com a grande facilidade que tinha para formulações abstratas, que mais se sobressaiu.

O início da teoria das matrizes remonta a um artigo de Cayley em 1855. Diga-se de passagem, porém, que o termo matriz já fora usado, com o mesmo sentido, cinco anos antes por Sylvester. Nesse artigo, Cayley fez questão de salientar que, embora logicamente a idéia de matriz proceda a de determinante, historicamente ocorreu o contrário: de fato, os determinantes já eram usados há muito na resolução de sistemas lineares. Quanto às matrizes, Cayley introduziu-as para simplificar a notação de uma transformação linear.

A definição de produto de matrizes foi apresentada por Cayley (1858), no trabalho intitulado "A Memoir on the Theory of Matrices", que foi publicado em 1858 na revista Philosophical Transactions of the Royal Sociey of London. Neste trabalho, Cayley notou que a multiplicação de matrizes, como ele a definiu, simplificava em muito o estudo de sistemas de equações lineares. Também observou que esta multiplicação deixava apresentar propriedades importantes, como a não comutatividade e a lei do corte que depende do seu determinante. Sabe-se que uma matriz não nula não é necessariamente invertível, pois para ser inversa tem que ser quadrada e seu determinante ser diferente de zero. Curiosamente, foi só num outro artigo, três anos depois, que Cayley introduziu o conceito de adição de matrizes e o de multiplicação de matrizes por escalares, chamando inclusive a atenção para as propriedades algébricas dessas operações, enfatizando que sua grande preocupação era com a forma e a estrutura em álgebra.

1.1.2. Representação de matrizes

Definição 1 Dados números naturais m e n, define-se uma **matriz real de ordem** m **por** n ou simplesmente uma matriz m por n (escreve-se $m \times n$) como uma tabela formada por números reais, distribuídos em m linhas e n colunas. Estes números reais são chamados entradas da matriz.

Exemplo 1 A matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

é uma matriz 3×3, ou seja, tem 3 linhas e 3 colunas, as entradas na primeira linha da matriz são dadas pelos números reais 2, 1 e 0, as entradas na segunda linha da matriz são dadas pelos números reais 4, 7 e 8 e as entradas na terceira linha da matriz são dadas pelos números reais 3, 5 e 4.

É usual indicarmos as entradas de uma matriz qualquer A pelos símbolos A_{ij}, ou por a_{ij}, onde o índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento se encontra.

Uma matriz $m \times n$ é representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

ou por $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ou simplesmente por $A = [a_{ij}]$, quando a ordem da matriz estiver subentendida.

Exemplo 2 Seja a matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

De acordo com o exemplo acima, a matriz A é de ordem 3 x 4, ou seja, possui 3 linhas e 4 colunas. Os elementos da matriz são dados por, $a_{11} = 2, a_{12} = 3, a_{13} = 4, a_{14} = 1, a_{21} = 5, a_{22} = 6, a_{23} = 7, a_{24} = 8$, $a_{31} = 3, a_{32} = 5, a_{33} = 6$ e $a_{34} = 2$.

Dependendo dos valores de m e n, uma matriz $m \times n$ recebe um nome especial que será apresentado nos tipos de matrizes.

1.1.3. Tipos de matrizes

Definição 2 Toda matriz $1\times n$ é chamada uma *matriz linha*, ou seja possui uma linha e n colunas.

Exemplo 3 A matriz B abaixo é um exemplo de matriz linha,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

No exemplo acima a matriz linha possui uma linha e quatro colunas, ou seja, é da forma 1×4.

Definição 3 Toda matriz $m \times 1$ é chamada uma *matriz coluna*, ou seja possui m linhas e 1 coluna.

Exemplo 4 A matriz C abaixo é um exemplo de matriz coluna,

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

No exemplo acima a matriz possui quatro linhas e uma coluna, ou seja, é da forma 4×1.

Definição 4 Toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero é denominada *matriz nula*.

Exemplo 5 A matriz D abaixo, dada por

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

é uma matriz nula do tipo 2×3, ou seja, possui duas linhas e três colunas.

Definição 5 Toda matriz $n \times n$ é chamada de *matriz quadrada*, ou seja, possui n linhas e n colunas. Sua representação é da forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 6 Considere a matriz A, definida por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

No exemplo acima, a matriz quadrada é de ordem 4, possui quatro linhas e quatro colunas, ou seja, é da forma 4×4.

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem n, as entradas a_{ii}, onde $i = j$, com $1 \leq i \leq n$, formam a diagonal principal de A.

Definição 6 Uma *matriz diagonal de ordem n* é uma matriz quadrada de ordem n em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

A matriz diagonal F é dada por:

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 7 A matriz diagonal de ordem n cujas entradas da diagonal principal são iguais ao número real 1, é dada por:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

No exemplo acima a matriz é denotada por I e é chamada *matriz identidade de ordem n* e também pode ser denotada por I_n.

Definição 7 Uma *matriz triangular superior de ordem n* é uma matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero. Uma matriz desta forma pode ser representada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Observa-se que uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n é triangular superior se $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$.

Exemplo 8 Considere a matriz G definida por:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definição 8 Uma *matriz triangular inferior de ordem n* é uma matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero. Uma matriz desta forma pode ser representada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Observa-se que uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n é triangular superior se $a_{ij} = 0$ sempre que $i < j$.

Exemplo 9 A matriz H definida por

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

é uma matriz triangular inferior.

1.1.4. Operações com matrizes

Definição 9 Dizemos que duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, de mesma ordem, são *iguais*, escrevendo $A = B$, quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todos i,j tais que $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

De acordo com definição de igualdade de matrizes, temos que para serem iguais duas matrizes devem ser do mesmo tipo e apresentar todos os elementos correspondentes (elementos com índices iguais) iguais.

Exemplo 10 Considere a matriz A e a matriz B representadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix},$$

temos que $A \neq B$.

Logo, $a_{11} = b_{11} = 1$, mas, $a_{12} = -4 \neq b_{12} = 2$, $a_{21} = 2 \neq b_{21} = -4$ e $a_{22} = b_{22} = -3$, para todo $1 \leq i \leq 2$ e para todo $1 \leq j \leq 2$.

Portanto, as matrizes A e B são diferentes.

Exemplo 11 A matriz A e a matriz B são definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 3 & y \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se x e y denotam números reais, as matrizes A e B serão iguais se os seus elementos correspondentes forem iguais. Observa-se que $a_{12} = b_{12} = 0$ e $a_{21} = b_{21} = 3$. Temos que $a_{11} = x$ e $b_{11} = 1$ são correspondentes. Também temos que $a_{22} = y$ e $b_{22} = -1$ são correspondentes. Então, para que a igualdade se satisfaça, $x = 1$ e $y = -1$. Portanto, $A = B$ se, e somente se, $x = 1$ e $y = -1$.

Definimos a seguir a *operação de adição* das matrizes $m \times n$.

Definição 10 Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, a *soma de* A e B, denotada $A + B$, é a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todos i,j tais que $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

De acordo com definição de adição de matrizes, temos que a soma de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo 12 Considere a matriz A e a matriz B definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \\ 2 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Temos que $C = A + B$ implica

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \\ 2 & 9 & -5 \end{pmatrix},$$

logo

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Definição 11 Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ define-se uma matriz oposta de A como a matriz $-A = [-a_{ij}]$.

Exemplo 13 A matriz A é representada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Observa-se que,

$$-A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

é a matriz oposta de A.

Teorema 1.1 Se A, B e C são matrizes reais de ordem $m \times n$, valem as seguintes propriedades:

1. Associatividade: $(A+B)+C = A+(B+C)$;

2. Comutatividade: $A+B = B+A$;

3. $\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ é o elemento neutro da adição de matrizes;

4. todo elemento tem simétrico: para todo A do tipo $m \times n$: existe $(-A)$, ou seja o simétrico de A então $A + (-A) = \overline{0}$.

Demonstração

As propriedades acima decorrem diretamente das definições de igualdade e adição de matrizes.

1. Se $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$, então

$$\begin{aligned} A+(B+C) &= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = \\ &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = (A+B)+C, \end{aligned}$$

pois vale a associatividade da adição de números reais.

2. Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, então

$$\begin{aligned} A+B &= [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = \\ &= [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A, \end{aligned}$$

pois vale a comutatividade da adição de números reais.

3. Se $A = [a_{ij}]$ e $\overline{0} = [m_{ij}]$, então

$$\begin{aligned} A+\overline{0} &= [a_{ij}] + [m_{ij}] = [a_{ij} + m_{ij}] = \\ &= [a_{ij} + \overline{0}] = a_{ij} = A, \end{aligned}$$

Uma vez que o zero é elemento neutro da adição em $\mathbb{R}$.

4. Se $A = [a_{ij}]$, $-A = [-a_{ij}]$ e $\overline{0} = [m_{ij}]$, então

$$\begin{aligned} A + (-A) &= [a_{ij}] + [(-a_{ij})] = [a_{ij} + (-a_{ij})] = \\ &= [a_{ij} - a_{ij}] = [m_{ij}] = \overline{0}, \end{aligned}$$

Uma vez que o zero é elemento neutro da adição em $\mathbb{R}$.

Definimos a seguir uma *operação de diferença* das matrizes $m \times n$.

Definição 12 Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, chama-se diferença $A - B$ a matriz soma de A com a oposta de B.

De acordo com definição de diferença de matrizes, temos que a diferença de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e $-B$.

Exemplo 14 A matriz A, a matriz B e a matriz $-B$ são representadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$-B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 & -1 \\ -1 & 2 & 6 & -2 \\ -5 & -6 & -7 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fazendo $C = A + (-B)$ implica,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 & -1 \\ -1 & 2 & 6 & -2 \\ -5 & -6 & -7 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -8 & -3 \\ 0 & 5 & 10 & -3 \\ -2 & -7 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos definir agora o produto de uma matriz por um escalar.

Definição 13 Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, defini-se o produto de A pelo número real k, como $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$.

Exemplo 15 A matriz A representada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vamos multiplicar A por -2.

$$(-2).A = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar a matriz $-2A$, basta multiplicar (-2) em cada entrada de A, ou seja,

$$(-2).A = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.2 O produto de um número por uma matriz apresenta as seguintes propriedades:

1. $k(A+B) = kA + kB$;
2. $(k+y)A = kA + yA$;
3. $k(yA) = (ky)A$;
4. $1A = A$;

em que A e B são matrizes quaisquer do tipo $m \times n$ e k e y são números reais.

Demonstração

1. De fato, sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ matrizes de ordem $m \times n$ e k um número real. Então:

$$\begin{aligned} k(A+B) &= k[a_{ij} + b_{ij}] = [k(a_{ij} + b_{ij})] = [ka_{ij} + kb_{ij}] = \\ &= [ka_{ij}] + [kb_{ij}] = k[a_{ij}] + k[b_{ij}] = kA + kB, \end{aligned}$$

onde foi utilizada a distributividade da multiplicação em relação à adição de números reais.

2. De fato, sejam k e y números reais e $A = [a_{ij}]$, uma matriz de ordem $m \times n$. Então:

$$\begin{aligned} (k+y)A &= (k+y)[a_{ij}] = [k(a_{ij}) + y(a_{ij})] = [ka_{ij} + ya_{ij}] = \\ &= [ka_{ij}] + [ya_{ij}] = k[a_{ij}] + y[a_{ij}] = kA + yA, \end{aligned}$$

onde foi utilizada a distributividade da multiplicação em relação à adição de números reais.

3. Se $A = [a_{ij}]$ e k e y são números reais, então

$$\begin{aligned} x(yA) &= x(y[a_{ij}]) = x[ya_{ij}] = [x(y.a_{ij})] = [(x.y)a_{ij}] = \\ &= (xy)[a_{ij}] = (xy)[a_{ij}] = (xy)A; \end{aligned}$$

onde foi utilizada a associatividade em relação a mutiplicação.

4. Se $A = [a_{ij}]$ e 1 é um número real, então

$$1A = 1[a_{ij}] = [1a_{ij}] = [a_{ij}] = A$$

onde foi utilizada a associatividade em relação a multiplicação.

Vamos definir agora o produto de duas matrizes.

Definição 14 Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ duas matrizes. O produto de A por B, denotado por AB, é definido como a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{in}b_{nj},$$

para todos i, j tais que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq p$.

Para obter o elemento da matriz AB que se encontra na i-ésima linha e j- ésima coluna, na matriz A, destaque a i-ésima linha, e na matriz B, a j-ésima coluna. Feito isto, multiplique ordenadamente o primeiro elemento da linha com o primeiro elemento da coluna, o segundo elemento da linha com o segundo elemento da coluna, etc., o último elemento da linha com o último elemento da coluna e finalmente some todos esses números.

Exemplo 16 Dada a matriz A e a matriz B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Percebe-se que $C = AB$ equivale a

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Com isso,

$$C = \begin{pmatrix} 2(1) - 5(2) & 2(3) - 5(-2) & 2(4) - 5(-6) \\ 1(1) + 2(2) & 1(3) + 2(-2) & 1(4) + 2(-6) \\ 1(1) + 3(2) & 1(3) + 3(-2) & 1(4) + 3(-6) \end{pmatrix}$$

e conlui-se que

$$C = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 38 \\ 5 & -1 & -8 \\ 7 & -3 & -14 \end{pmatrix}.$$

Note que para o produto de A por B estar definido, o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B. Assim, se A e B são matrizes 3×2 e 2×3, respectivamente, o produto AB está definido e é uma matriz 3×3.

Uma condição necessária para que $AB = BA$ é que A e B sejam matrizes quadradas de mesma ordem. Mas, esta condição não é suficiente de acordo com o exemplo abaixo.

Exemplo 17 Considere a matriz A e a matriz B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que $AB \neq BA$.

Fazendo a multiplicação de A por B obtemos,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado multiplicando B por A tem-se que

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comparando AB e BA pode-se observar que,

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

Portanto $AB \neq BA$.

De acordo com o exemplo acima, percebe-se que a multiplicação de matrizes não possui a propriedade comutativa.

No teorema abaixo são apresentadas algumas propriedades da multiplicação de matrizes.

Teorema 1.3 Desde que as operações sejam possíveis, temos:

1. $(A+B)C = AC+BC$ (distributividade à direita da multiplicação em relação à adição);

2. $A(B+C) = AB+AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição);

3. $(AB)C = A(BC)$ (associatividade);

4. $AI = IA = A$ (existência do elemento identidade);

em que A, B e C são matrizes quaisquer do tipo $m \times n$.

Demonstração

1. Suponhamos que as matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$ sejam de ordens $m \times n$, $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente. Temos que

$$\begin{aligned}
[(A+B)C]_{ik} &= \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})c_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}c_{jk}+b_{ij}c_{jk}) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{jk} = [AC]_{ik} + [BC]_{ik}.
\end{aligned}$$

   Logo a propriedade é válida.

2. Análoga a (1).

3. Suponhamos que as matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$ sejam de ordens $m \times n$, $n \times p$ e $p \times r$, respectivamente, fazendo $AB = [d_{ij}]$, $ABC = [e_{il}]$ e $BC = [f_{jl}]$ sejam de ordens $m \times p$, $m \times r$ e $n \times r$ teremos:

$$\begin{aligned}
[(AB)C]_{il} &= e_{il} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})c_{kl} = \\
&= \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}.c_{kl}) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.f_{jl} = [A(BC)]_{il}.
\end{aligned}$$

   Logo a propriedade é válida.

4. Sejam as matrizes dadas por: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $I_n = [\delta_{ij}]_{n\times n}$, então temos que $AI_n = [b_{ij}]_{n\times n}$

$$\begin{aligned} AI &= a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + a_{i3}\delta_{3j} + \cdots + a_{ii}\delta_{ii} + \cdots + a_{in}\delta_{nj} = \\ &= a_{i1}0 + a_{i2}0 + a_{i3}0 + \cdots + a_{ii}1 + \cdots + a_{in}0 = a_{ii} \end{aligned}$$

para todos i e j, então $A.I_n = A$.

Para $I_n.A = A$ é análogo a $A.I_n = A$.

Vamos definir agora potência de uma matriz.

Definição 15 Dados A matriz de ordem $n \times n$ e $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, define-se

$$A^0 = I_n,\ A^1 = A \text{ e } A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k \text{ fatores}}.$$

Exemplo 18 Seja a matriz A representada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

De acordo com a definição de potenciação de matrizes, temos que A^2 a seguinte matriz:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}^2.$$

Calculando obtemos,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 28 & 22 & -2 \\ 23 & 7 & 22 \\ 24 & -2 & 42 \end{pmatrix}.$$

Com isso,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 28 & 22 & -2 \\ 23 & 7 & 22 \\ 24 & -2 & 42 \end{pmatrix}.$$

Vamos definir matriz transposta.

Definição 16 Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, chamamos de *transposta* de A, e denotamos por A^t, a matriz $B = [b_{ij}]_{n \times m}$, onde

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para todos i, j tais que $1 \leq i \leq n$ e para todo $1 \leq j \leq m$.

Exemplo 19 Considere a matriz representada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

A matriz transposta de A é

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 & 1 \\ -5 & 1 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Logo, para obter a matriz transposta basta trocar as linhas pelas colunas.

1.2. Grafos

No estudo da tecnologia as multimídias passam a ser usadas como meio importante na busca de informações. E é nesta passagem que a teoria dos grafos se torna uma ferramenta fundamental para processar informações através de algoritmos, transformando dados tecnológicos em uma representação visual, conforme Lipschutz (2004) e Gersting (2004) que fazem relação entre grafos e exemplos práticos da realidade social: "...Dizemos que a maior vantagem de um grafo é sua representação visual da informação".

Para Malta (2008), os grafos apresentam aspectos relevantes que merecem ser discutidos na educação básica através de uma metodologia que explore a resolução de problemas, tornando o indivíduo autônomo, criativo e capaz de aprender a aprender.

Desta forma, nesta seção serão expostos conceitos históricos, definição de grafos, suas representações, tipos de grafos, alguns teoremas e sua matriz de adjacências, buscando sempre colocar exemplos do cotidiano escolar.

1.2.1. Conceitos históricos

No século XIII na pequena cidade de Konigsberg da antiga Prussia, hoje conhecida como Kaliningrado na atual Rússia, haviam sete pontes, seis delas interligavam duas ilhas às margens do Rio Pregel e uma fazia a ligação entre as duas ilhas. Os habitantes da cidade discutiam a possibilidade em percorrer todas as pontes sem repetir o caminho e voltar ao ponto de partida.

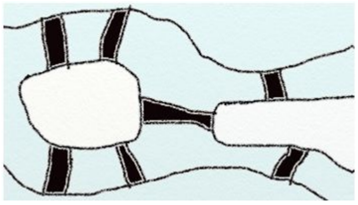


Figura 1.2: 7 Pontes na cidade de Konigsberg

Essa discursão ao longo do tempo transformou-se em lenda. Até que em 1736 o matemático suíço Leohnard Euler provou que não existia essa possibilidade.

Euler usou um modelo simplificado das ligações entre as regiões e estabeleceu um teorema que diz em que condições são possíveis percorrer cada linha exatamente uma vez e voltar ao ponto inicial. De acordo com Cardoso e Matos (2014), este foi o primeiro problema envolvendo grafo e partir daí ocorreu o desenvolvimento dessa teoria.

Euler nasceu em 15 de abril de 1707 na Basileia em São Petersburgo e faleceu em 18 de setembro de 1783. Sendo seus pais, Paul Euler e Margaret Brucker, com um ano de idade, foi criado na cidade de Riehen. Paul Euler desejava que ele seguisse os seus passos e o enviou para a Universidade de Basel para prepará-lo para o ministério, mas geometria se tornou logo o assunto favorito dele. Pela intercessão de Bernoulli, Euler obteve o consentimento de seu pai para mudar para a matemática. Na Rússia exerceu a função de professor de Física da academia em 1730, professor de Matemática em 1733 e um ano após casou-se, deixando a casa de Bernoulli.

Figura 1.3: Leonhard Euler

O reconhecimento de Euler aumentou depois da publicação de vários artigos e de seu livro Mechanica (1736-37), que apresentou pela primeira vez a dinâmica Newtoniana em forma de análise matemática. Em 1741, Euler se juntou à Academia de Ciência de Berlim, onde permaneceu durante 25 anos. Foi o matemático mais proeminente na história. Os 866 livros e artigos que escreveu representam aproximadamente um terço de todas as pesquisas realizadas em matemática, teorias físicas, e engenharia mecânica publicadas entre 1726 e 1800. Na matemática pura, integrou o cálculo diferencial de Leibniz e o método de Newton em análise matemática; refinou a noção de uma função; criou muitas notações matemáticas comuns, incluindo o e, i, o símbolo do π e o símbolo do γ e pôs a fundação para a teoria de funções especiais, introduzindo as funções transcendetais β e γ.

Em 1962, Ford[1] e Fulkerson[2], desenvolveram a teoria dos fluxos em redes (é um grafo dirigido e sem laços). Um dos mais importantes resultados da teoria dos grafos e muitas outras aplicações desta teoria vem sendo desenvolvidas na área de Pesquisa Operacional. Os grafos são usados na área de informática na criação de fluxogramas, redes de comunicação tais como: redes Lan e WLan, modelos de fluxo de dados, algoritmos de

[1]Lester Randolph For Jr. nasceu em 23 de setembro de 1927 Houston - Estados Unidos da América, trabalhou na área da matemática e na programação de fluxos em redes.

[2]Delbert Ray Fulkerson nasceu em 14 de agosto de 1924 em Tamms, Illinois, Estados Unidos da América, e morreu em 10 de janeiro de 1976, trabalhou na área de otimização.

escalonamento, layout de circuitos, algoritmos de pesquisa, ordenação e modelos de máquinas de estados finitos.

1.2.2. Representação de grafos

A palavra gráfico é, muitas vezes, usada para qualquer representação visual de dados, como na Figura 1.4. Os gráficos que vamos tratar nessa subseção são chamados de grafos, onde sua representação visual é um conjunto não-vazio de vértices e um conjunto de arestas tais que cada aresta conecta dois vértices.

Fonte: Google Maps.

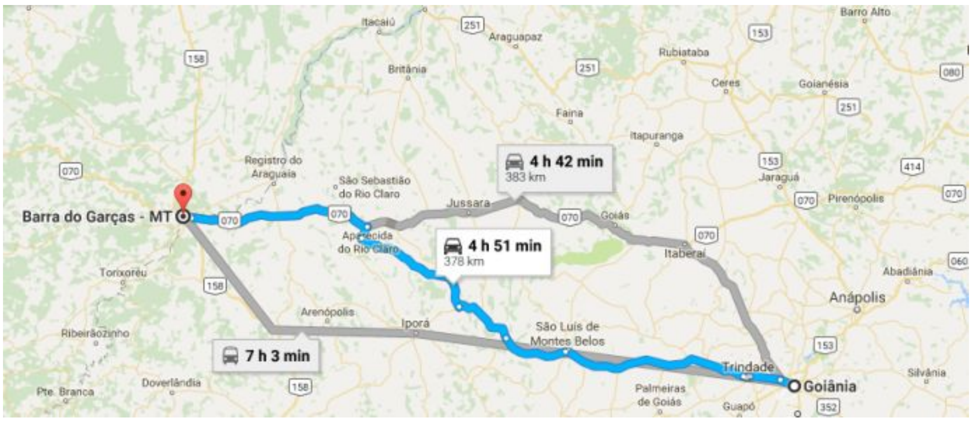


Figura 1.4: Caminhos possíveis entre as cidade Goiânia-GO e Barra do Garças-MT

Exemplo 20 A figura 1.4 pode ser interpretada como um grafo: o conjunto de vértices no mapa dos caminhos possíveis de Goiânia-GO a Barra do Garças-MT é {Barra do Garças, Aparecida do Rio Claro, São Luís de Montes Belos, Goiânia}. O grafo da Figura 1.5 possui 4 vértices e 5 arestas; Barrra do Garças, São Luís de Montes Belos e Goiânia são exemplos de vértices e Barra do Garças - Aparecida do Rio Claro e Aparecida do Rio Claro - Goiânia são exemplos de arestas.

Denotando ARC por Aparecida do Rio Claro, SL por São Luís de Montes Belos, BG por Barra do Garças e GYN por Goiânia, de acordo com a Figura 1.5 temos o grafo do mapa dos caminhos possíveis entre as cidades de BG a GYN.

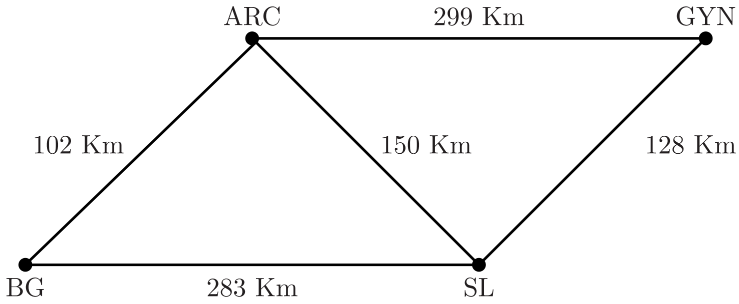


Figura 1.5: Grafo do mapa de BG a GYN.

Definição 17 Um *grafo* G consiste em dois objetos: i) um conjunto $V(G)$ cujos elementos são chamados vértices de G; ii) um conjunto $A(G)$ de pares não ordenados de vértices, chamados arestas de G.

No decorrer deste trabalho consideraremos no máximo um aresta entre dois vértices. A intenção foi apresentar os conceitos da forma mais simplificada possível.

Definição 18 *Arestas paralelas* são duas arestas com mesmas extremidades.

Exemplo 21 No grafo da Figura 1.6, as arestas a_1 e a_2 são paralelas.

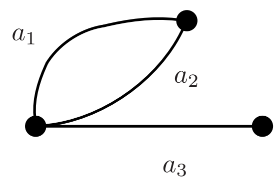


Figura 1.6: Arestas paralelas

Dependendo da aplicação, as arestas podem ou não ter direção, existir em apenas um sentido ou nos 2 sentidos conforme a necessidade do sistema. Se o grafo for direcionado, seu sentido é indicado na aresta por uma seta, como veremos adiante.

1.2.3. Tipos de grafos e terminologia

Definição 19 Um *grafo orientado* G, consiste em: i) um conjunto $V = V(G)$ cujos elementos são chamados vértices de G; ii) um conjunto $A = A(G)$ de pares ordenados de vértices (u, v), chamados de arestas orientadas de G.

Escreve-se $G(V, A)$ quando quer-se enfatizar as duas partes de G. Também escreve-se $V(G)$ e $A(G)$ para denotar, respectivamente, o conjunto de vértices e o conjunto de arestas de um grafo G.

Supondo que $a = (u, v)$ é uma aresta orientada em G, usa-se as seguintes terminologias: a inicia em u e termina em v; u é o ponto inicial de a e v é o ponto final de a; v é um sucessor de u.

Exemplo 22 O grafo da Figura 1.7, mostra um grafo direcionado, com 3 vértices e 3 arestas. Suas arestas são: $(v_1, v_3), (v_2, v_3)$ e (v_2, v_1).

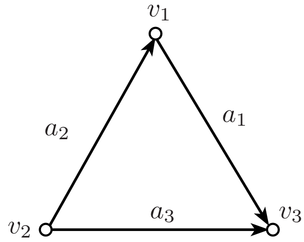


Figura 1.7: Grafo orientado.

Um outro tipo de grafo que pode ser associado às suas arestas, passando pelos vértices correspondente a aresta, é dado por:

Definição 20 Um *grafo com pesos* é um grafo onde cada aresta está associada a um valor numérico.

Exemplo 23 O grafo da Figura 1.4 mostra um grafo com pesos, pois a distância de Goiânia-GO a Barra do Garças-MT passando por Aparecida do Rio Claro é de 401 Km e passando por outro trecho São Luís de Montes belos e Aparecida do Rio Claro é de 380 Km.

Para continuarmos nosso estudo, precisamos de algumas definições precisas.

Definição 21 a) Quando existe uma aresta ligando dois vértices dizemos que os *vértices são adjacentes.*
b) *Aresta incidente* aos vértices é aquela que liga dois vértices distintos.

Exemplo 24 O grafo da Figura 1.8 apresenta que v_2 e v_3 são vértices adjacentes mas v_2 e v_4 não são vértices adjacentes, já que não existe aresta conectando-os. Ainda, a_2 é uma aresta incidente aos vértices v_1 e v_2 .

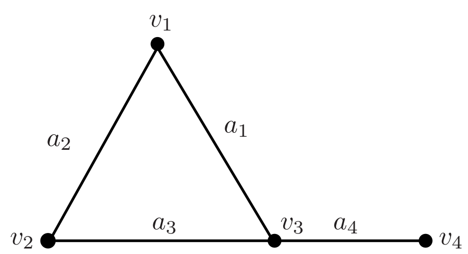


Figura 1.8: Grafo de 4 vértices.

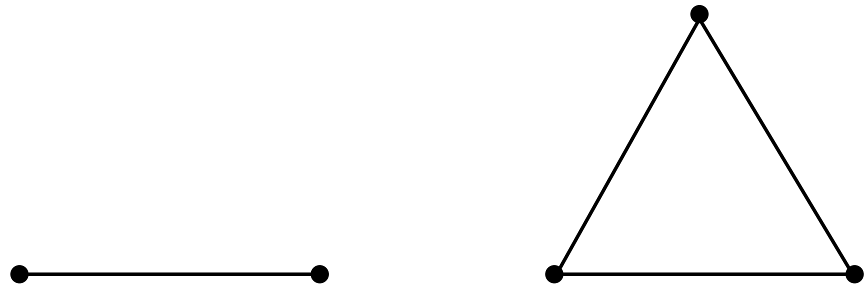
Definição 22 O *grau de um vértice v* em um grafo G (escreve-se $g(v)$) é o número de extremidades de arestas naquele vértice v. Isto é, que são incidentes a v.

Exemplo 25 Considere o grafo da Figura 1.8 temos que os graus $(g(v))$ de seus vértices são:

$$g(v1) = 2, g(v2) = 2, g(v3) = 3 \text{ e } g(v4) = 1.$$

Definição 23 *Grafo regular* é um grafo em que todos os vértices tem o mesmo grau.

Exemplo 26 Os grafos da Figura 1.9, são regulares pois todos os vértices em cada figura possuem o mesmo grau.



(a) *Grafo* com 2 vértices

(b) *Grafo* com 3 vértices

Figura 1.9: Grafo regular com 2 e 3 vértices

De acordo com os exemplos abordados, existem muitas situações problemas que podem ser representados por um grafo, por exemplo: um mapa de estradas, rede de comunicação, mapas, rotas de distribuição de produtos e serviços como uma instalação de 3 casas de água, enérgia e gás e a estrutura química de uma molécula.

Neste trabalho, vamos utilizar arestas paralelas apenas para a explicação do grafo da ponte de Konigsberg, durante o desenvolvimento das terminologias utilizaremos grafos sem arestas paralelas, com o intuito de não expor definições demais para o aluno na primeira exposição, sendo que a aplicação desta proposta de ensino não foi complicar e sim facilitar.

Definição 24 Dado um grafo G com $v_0, v_1, v_2, ..., v_n \in V(G)$, dizemos que um *caminho* do vértice v_0 para o vértice v_n é uma sequência alternada de vértices e arestas da forma

$$v_0, a_0, v_1, a_1, v_2, a_2, ..., v_{n-1}, a_{n-1}, v_n$$

de vértices e arestas onde, para cada i onde $0 \leq i \leq n-1$, as extremidades da aresta a_i, contém os vértices v_i e v_{i+1}.

Exemplo 27 No grafo da Figura 1.5, um caminho do vértice ARC para o vértice SL consiste na sequência ARC, BG, ARC, GYN, SL.

Exemplo 28 No grafo da Figura 1.5, um caminho do vértice GYN para o vértice BG consiste na sequência GYN, ARC, SL, BG.

Definição 25 O *comprimento de um caminho* em um grafo é a soma dos pesos das arestas de um grafo. Caso ele nao seja com peso, considera-se que cada aresta tenha peso 1.

Exemplo 29 O comprimento do caminho descrito na Figura 1.5, do vértice ARC para o vértice SL passando por GYN é $299 + 128 = 427$.

Exemplo 30 O comprimento do caminho descrito na Figura 1.5, do vértice GYN para o vértice BG passando por ARC é $299 + 102 = 401$.

Definição 26 *Caminho Fechado* é aquele que começa e termina no mesmo vértice.

Exemplo 31 Na Figura 1.5, um caminho fechado do vértice BG para o vértice BG consiste na sequência BG, BG-ARC, ARC, ARC-GYN, GYN, GYN-SL, SL, SL-BG, BG.

Definição 27 *Trilha* é um caminho onde pode haver repetição de vértices mas não de arestas.

Exemplo 32 No grafo da Figura 1.5, uma trilha do vértice BG para o vértice ARC consiste na sequência BG, BG-ARC, ARC, ARC-SL, SL, SL-GYN, GYN, GYN-ARC, ARC.

O mais essencial é saber identificar quais vértices estão conectados entre si por quantas arestas.

Definição 28 Um grafo G é *conexo* se, dados dois vértices quaisquer de G, existe um caminho ligando-os.

Exemplo 33 O grafo da Figura 1.10 (a) é conexo, pois existe um caminho entre quaisquer dois dos seus vértices. Entretanto, o grafo da Figura 1.10 (b) não é conexo, uma vez, que não existe um caminho entre os vértices v_4 e v_5.

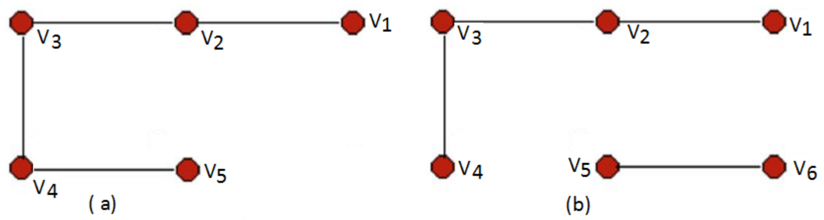


Figura 1.10: Grafo conexo e grafo não conexo

Cada uma das arestas que ligam os vértices é chamado de conexão.

Definição 29 Um *ciclo* em um grafo é um caminho de algum vértice v_0 para ele mesmo tal que nenhuma aresta aparece mais de uma vez, v_0 é o único vértice que aparece mais de uma vez e v_0 aparece apenas nas extremidades.

Logo, ciclo é um caminho que começa e acaba com o mesmo vértice.

Exemplo 34 No grafo da Figura 1.5, o caminho ARC, GYN, SL, ARC é um ciclo, onde os pontos de cada vértice, mostra as conexões de seus vértices.

Com essas definições e exemplos dados, pode-se observar que os grafos são geralmente representados graficamente da seguinte maneira: é desenhado um círculo para cada vértice. Para cada aresta, é desenhado uma reta conectando suas extremidades. Cada representação mostra uma etapa do processo; são estabelecidos pontos e criados conexões entre eles. Assim, é possível visualizar melhor as possibilidades.

Definição 30 *Grafo planar* é um grafo que pode ser representado em um plano de modo que as arestas não se cruzem.

Existem diversas situações do dia a dia que envolvem grafos planares uma delas é quando o grafo possa ser usado com pessoas que projetam circuitos integrados querem que todos os componentes em uma camada do chip formem um grafo planar, de modo a não haver cruzamento de conexões.

Exemplo 35 A princípio o grafo na Figura 1.11 é possível ser representado sem que as arestas se cruzem. Para saber se um grafo é planar, é preciso tentar desenhá-lo num plano de modo que suas arestas não se cruzem.

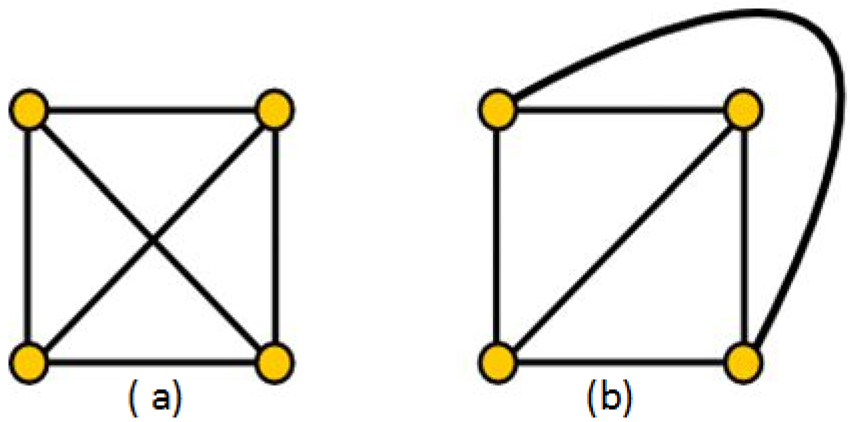


Figura 1.11: Grafo planar

Definição 31 Um *grafo completo* é um grafo onde todo par de vértices é ligado por uma aresta. O grafo completo com n vértices é denotado por K_n.

Exemplo 36 O grafo K_6, Figura 1.12 é um exemplo de grafo completo.

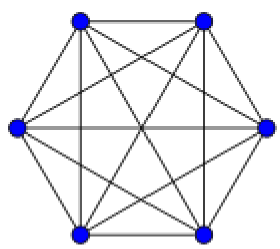


Figura 1.12: Grafo completo K_6

Definição 32 Um *grafo é bipartido*, se seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos diferentes não-vazios $N1$ e $N2$ tais que dois vértices são adjacentes se, e somente se, um deles pertence a $N1$ e o outro pertence a $N2$. Se $|N1| = m$ e $|N2| = n$, um tal grafo é denotado por $K_{m,n}$.

Exemplo 37 O problema das instalações de luz, telefone e TV cabo é um exemplo de grafo bipartido, pois seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos diferentes não-vazios $N1$ representado pela luz, telefone e TV a cabo e $N2$ representado pela a casa 1, a casa 2 e a casa 3. Suponha que de um lado da rua são construídas três casas e as conexões de luz, telefone e tv a cabo estão do outro lado da rua. É possível instalar os três itens nas três casas sem que eles se conectem no caminho?

Sabe-se que dois vértices são adjacentes se, e somente se, um deles pertence a $N1$={luz, telefone, Tv a cabo} e o outro pertence a $N2$={casa 1, casa 2, casa 3}. $|N1| = 3$ e $|N2| = 3$, um tal grafo é denotado por $K_{3,3}$ de acordo com a Figura 1.13.

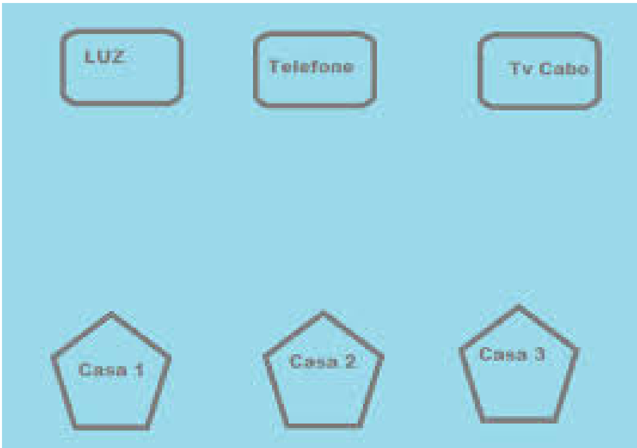
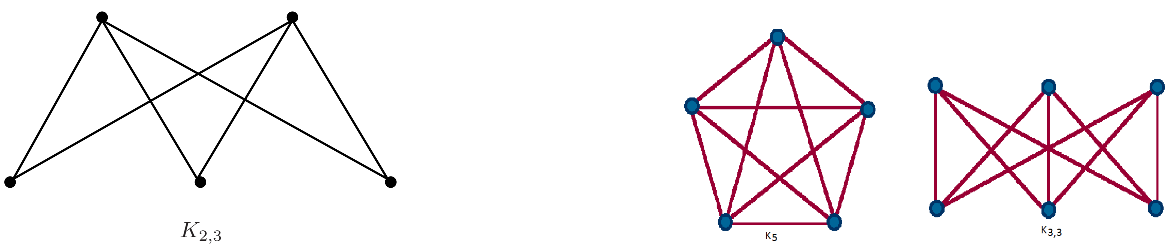


Figura 1.13: Instalações de luz, telefone e TV cabo

Exemplo 38 Os grafos $K_{2,3}$, K_5 e $K_{3,3}$ de acordo com a Figura 1.14 são exemplos da forma $K_{m,n}$.



(a) $K_{2,3}$

(b) K_5 e $K_{3,3}$

Figura 1.14: $K_{2,3}$, K_5 e $K_{3,3}$

Há grafos que são planares como $K_{2,3}$ e que não são planares como K_5 e $K_{3,3}$ de acordo com a Figura 1.14.

Teorema 1.4 (de Kuratowski) Um grafo é não - planar se, e somente se, ele é da forma K_5 ou da forma $K_{3,3}$.

Grafos planares e não planares dão resoluções de outros tipos de exemplos similares, tais como: ligar luz, gás e telefone a duas casas sem que as linhas se cruzem ou ligar luz, gás e telefone a três casas sem que as linhas se cruzem. No primeiro caso um grafo representado é planar, pois há ligações entre eles e no segundo caso um grafo representado é não-planar, pois não há ligações entre eles.

Um outro problema que vale ser mencionado é pensar numa fábrica de placas de cicuito integrado; encontrar esquemas de ligação que evitem cruzamento é crucial para baratear os custos de manufatura. Quanto menos camadas, mais rápido e rentável se torna o serviço.

Uma matriz $n \times n$ cujo valor na linha i e coluna j, onde $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, fornece o número de arestas do *i-ésimo* ao *j-ésimo* vértice.

Definição 33 Suponha que G é um grafo orientado com n vértices e suponha que os vértices de G tenham sido ordenados e são denominados como $v_1, v_2, ..., v_n$. Então, a *matriz de adjacências* $A = [a_{ij}]$ do grafo B é a matriz $n \times n$ definida a seguir:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma aresta entre } v_i \text{ e } v_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Na computação, uma maneira padrão de manter na memória de um computador um grafo finito direcionado ou não-direcionado (com n vértices) é geralmente representado por sua matriz de adjacências.

Exemplo 39 Considere o grafo da Figura 1.15. Os vértices são ordenados como v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Observe que cada vértice $v_i - v_j$ de G é representado duas vezes, sendo $a_{ij} = 1$ e $a_{ji} = 1$.

A matriz de adjacências do grafo na figura 1.15 em relação à ordenação v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 é uma matriz 5×5.

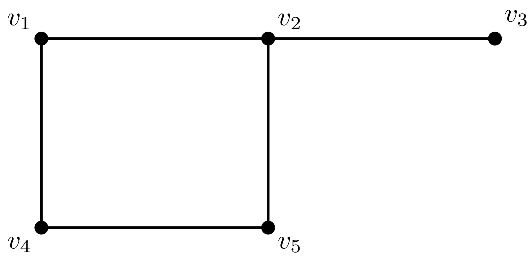


Figura 1.15: Grafo de 4 vértices

Então a matriz de adjacência do grafo é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz de adjacências de um grafo depende da ordenação dos vértices do grafo. Isto é, uma ordem diferente dos vértices gera uma matriz de adjacências diferente. Entretanto, quaisquer duas matrizes de adjacências estão intimamente relacionadas, podendo uma ser obtida a partir da outra pela simples troca de posição de linhas e colunas. Por outro lado, a matriz de adjacências não depende da ordem na qual as arestas (pares de vértices) ocorrem.

Existem variações da representação acima. Se G é um grafo que contém arestas paralelas, normalmente atribuímos a A_{ij} o número de arestas

(v_i, v_j). Ademais, se G é um grafo com pesos, a_{ij} pode representar o peso de (v_i, v_j).

Exemplo 40 Considere o grafo da Figura 1.16, com vértices v_1, v_2, v_3 e v_4.

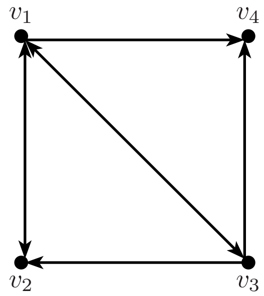


Figura 1.16: Grafo de 4 vértices

Suponha que os vértices são ordenados na ordem citada. Então a matriz de adjacências A do grafo G é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Considere as potências $A, A^2, A^3, ...$ da matriz de adjacências $A = [a_{ij}]$ do grafo G. Usaremos a notação

$$a_k(i,j) = (A^k)_{ij}, \text{ onde } i,j \in \{1,2,...,n\}, \text{ onde } k \in \mathbb{N}.$$

Note que $a_1(i,j) = a_{ij}$ dá o número de caminhos de comprimento 1 do vértice v_i para o vértice v_j. Pode-se mostrar que $a_2(i,j)$ dá o número de caminhos de comprimento 2 do vértice v_i para o vértice v_j, como será feito a seguir.

Proposição 1 Seja A a matriz de adjacências de um grafo G. Então, $a_k(i,j) = (A^k)_{ij}$, o elemento ij, onde $i,j \in \{1,2,...,n\}$, representa o número de caminhos de comprimento k de v_i para v_j.

Demonstração

Será feita por indução sobre k. Note que um caminho de comprimento 1 de v_i para v_j é precisamente uma aresta (v_i, v_j).

Pela definição da matriz de adjacências A, $a_1(i,j) = a_{ij}$ é o numero de arestas de v_i para v_j. Portanto, a proposição é verdadeira para $k = 1$.

Suponha $k > 1$. (Assumindo que G tem m vértices) Como $A^k = A^{k-1}A$,

$$a_k(i,j) = \sum_{s=1}^{m} a_{k-1}(i,s)a_1(s,j)$$

$$a_k(i,j) = \sum_{l=1}^{m} a_{k-1}(i,l)a_1(l,j)$$

$$a_k(i,j) = (A^k)_{ij} = (A^{k-1}.A)_{ij} = \sum_{l=1}^{m} (A^{k-1})_{il}A_{lj}.$$

Por indução, $a_{k-1}(i,s)$ dá o número de caminhos de comprimento $k-1$ de v_i para v_s, e $a_1(s,j)$ dá o número de caminhos de comprimento 1 de v_s para v_j. Então, $a_{k-1}(i,s)a_1(s,j)$ dá o número de caminhos de comprimento k de v_i para v_j, onde v_s é o penúltimo vértice.

Logo, todos os caminhos de comprimento k de v_i para v_j podem ser obtidos somando $a_{k-1}(i,s)a_1(s,j)$ para todo s. Isto é, $a_k(i,j)$ é o número de caminhos de comprimento k de v_i para v_j.

Portanto, a proposição é verdadeira para todo k natural.

Exemplo 41 Considere novamente a Figura 1.16, contém o grafo G, cuja matriz de adjacências A. A potência A^2 é dada por:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que $a_2(1,1) = 2$, pois existem dois caminhos de comprimento 2 de v_1 para v_1 em que estes são: v_1-v_2-v_1 e v_1-v_3-v_1 vale ressaltar também que $a_2(4,1) = 0$, pois não existe um caminho de comprimento 2 de v_4 para v_1.

Supondo que os vértices da matriz tenham uma ordem fixa. Temos a seguinte observação:

Observação 1 Suponha que A é a matriz de adjacências do grafo G contendo $r+1$ vértices e seja B_r a matriz

$$B_r = A + A^2 + A^3 + ... + A^r.$$

Então, o elemento ij, onde $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ da matriz B_r, dá o número de caminhos possíveis de v_i para v_j, com comprimento no máximo r. Vale observar que se $B_{ij} = 0$, para alguns $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, então o grafo G não é conexo pois não existe um caminho ligando dois de seus vértices.

Exemplo 42 Olhando para a Figura 1.16, do grafo G, cuja matriz de adjacências A, A^2 e A^3, então, o elemento ij, onde $i, j \in \{1, 2, 3\}$ da matriz B_r, dá o número de caminhos possíveis de v_i para v_j, com comprimento no máximo r, com $r \leq 3$. Então:

$$B_3 = A + A^2 + A^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.4. Caminhos eulerianos

Partindo do problema da Ponte de Konigsberg, Euler ficou intrigado com o problema popular entre os habitantes desta cidade. O rio atravessa a cidade e bifurca-se em torno de uma ilha. Diversas pontes atravessam o rio. O problema é decidir se uma pessoa poderia passear por toda a cidade cruzando cada ponte apenas uma vez.

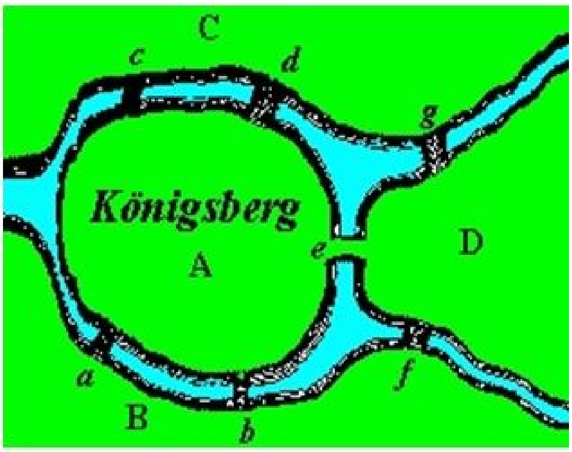


Figura 1.17: Ponte de Konigsberg

Jurkiewicz (2007) retrata que o problema se originou a um grafo com arestas múltiplas, o que não afetará a solução do problema das pontes de Konigsberg. Euler mostrou que a resposta era negativa, estabelecendo assim uma condição necessária; embora se acredite que a suficiência não lhe fosse desconhecida.

Dessa forma, é possível resolver o problema andando todos caminhos possíveis por tentativa e erro dos habitantes, mas a ideia de Euler era representar a situação por um grafo, com as pontes representadas por arestas e as partes em terra da cidade representadas por vértices.

Definição 34 Um *caminho euleriano* em um grafo G é um caminho que usa cada aresta em G exatamente uma vez.

Partindo do caminho euleriano pode existir um caminho aberto ou fechado. É no final do caminho que será decidido se terá um caminho aberto ou um fechado. Quando sai e chega no mesmo vértice têm-se um caminho euleriano fechado. Quando sai de um vértice e chega em outro vértice diferente do que saiu têm-se um caminho euleriano aberto.

Nesses caminhos eulerianos, é necessário passar por todas arestas do grafo e sem repetí-las. Com isso, pode-se identificar se um grafo qualquer terá caminhos eulerianos ou não.

Exemplo 43 Os grafos das Figuras 1.18 e 1.19 são caminhos eulerianos? Apenas vale ressaltar que a resposta se dá por tentativa, verificando se é possível desenhar todo o grafo sem levantar o lápis do papel e sem desenhar duas vezes qualquer aresta.

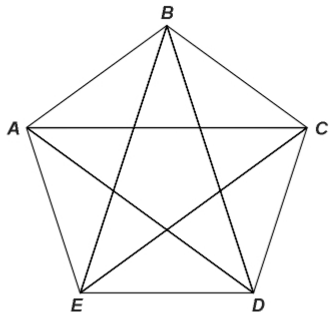
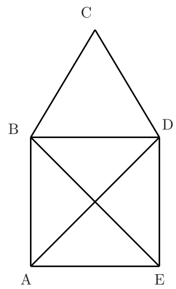
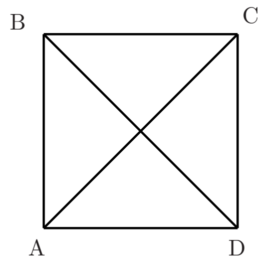


Figura 1.18:



(a) casinha



(b) janela

Figura 1.19:

A existência de um caminho euleriano em um determinado grafo depende dos graus de seus vértices. Um vértice par é um vértice de grau par e um vértice ímpar é um vértice de grau ímpar. Acontece que todo grafo tem um número par de vértices ímpares.

Ao responder em quais das figuras citadas contém caminhos eulerianos, conforme Jurkiewicz (2007), em outras palavras, podemos desenhar um grafo euleriano (ou melhor), uma representação gráfica dele sem retirar o lápis do papel e retornando ao ponto inicial. Para isto, vamos utilizar grafos conexos e finitos, se for contrário, um caminho de Euler pode não existir.

Suponha, que um grafo tem um vértice ímpar n de grau $2x + 1$ com $x \in \mathbb{N}$ e que existe um caminho euleriano no grafo que não começa em n. Para cada aresta que usamos para chegar em n, existe uma outra aresta ainda não usada para sair de n, até que se tenha usado os x pares de arestas. Continuando esse processo até chegarmos em n não terá nenhuma nova aresta para sairmos. Dessa forma, se o caminho não começa em n, ele tem que terminar em n. O caminho começa em n ou não, e, nesse último caso, ele termina em n. Portanto, se existem mais de dois vértices ímpares no grafo, não pode existir um caminho. Há dois casos possíveis, onde um caminho de euleriano possa existir - em um grafo sem vértices ímpares ou com dois vértices ímpares.

Observe o grafo sem vértices ímpares. Tome qualquer vértice m e comece um caminho euleriano. Quando entrar um vértice diferente, sempre terá uma outra aresta para sair até chegar de volta a m. Se usar todas as arestas do grafo, acabou. Se não, existe algum vértice m_1 de seu caminho com arestas que não foram usadas. Faça um caminho euleriano que começa e termina em m_1, conforme anteriormente, usando todas as novas arestas. Esse ciclo pode ser aumentado ao caminho original como uma volta a mais. Se usar, todas as arestas, acabou. Senão, continue esse processo até usar todas as arestas.

Se existirem exatamente dois vértices ímpares, pode-se começar um caminho de Euler em um deles e terminar em outro. Se o caminho não passou por todas as arestas, pode-se adicionar ciclos extras como no caso anterior.

Observe que o grafo da Figura 1.18 possui um caminho euleriano fechado, pois usa cada aresta somente uma vez e todos os seus vértices possuem graus pares. Para ter uma possível solução, basta ligar $A - B - C - D - E - A - C - E - B - D - A$.

Agora, observe que o grafo da Figura 1.19 (a casinha), possui um caminho euleriano aberto, pois dois de seus vértices possuem grau ímpar. Para ter uma possível solução, basta ligar $A-B-C-D-E-A-D-B-E$, começa em A e termina em E ou começou em E e terminou em A. Isto é possível porque sempre começa no vértice de grau ímpar e termina em outro vértice de grau ímpar. Se não começa no ponto E em algum momento entra em E, em seguida terá que sair por uma de suas arestas. Logo após terá que entrar em E. O vértice A tem três arestas incidentes a ele, então ele tem grau 3. O vértice E tem três arestas incidentes a ele, o mesmo tem grau ímpar, e os vértices B, C e D possuem grau par, C grau 2, B grau 4 e D grau 4.

Portanto, se o grau é ímpar e se não começa em E terá que terminar em E, do mesmo modo se começa em E não consigo terminar em E. Ou seja, começar em um dos vértices que tem grau ímpar e terminar em um outro que tem grau ímpar.

Já o grafo da Figura 1.19 (janela), não possuem todos os graus pares e nem dois de seus vértices são ímpares, pois possui 4 vértices com grau ímpar sendo A grau 3, B grau 3, C grau 3 e D grau 3. Logo não possui um caminho euleriano fechado e nem aberto.

Observe que o grafo da Figura 1.20 possui arestas paralelas, e para que exista um caminho euleriano nele, é necessário e suficiente no máximo dois vértices ímpares.

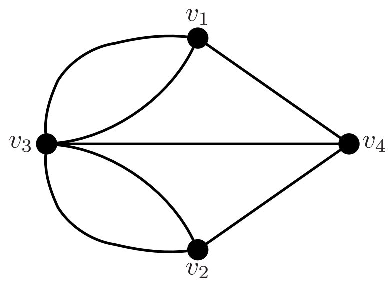


Figura 1.20: Exemplo de um Grafo da ponte de Konigsberg

De acordo com Gersting (2004) Euler encontrou um algoritmo simples e eficiente para determinar, para um grafo arbitrário, se existe um caminho euleriano.

O teorema 1.5 será útil para dar-se a solução do problema das Pontes de Konigsberg que será feito posteriormente.

Teorema 1.5 Existe um caminho euleriano em um grafo conexo se, e somente se, não existem vértices ímpares ou existem exatamente dois vértices ímpares.

O teorema prevê uma solução simples para determinar se um caminho é euleriano, sobre caminhos de Euler que é um algoritmo para determinar se existe um caminho de Euler em um grafo conexo arbitrário. Para fazer com que ele pareça mais com um algoritmo, tem que fazer uma hipótese que vai simplificar o problema, a de que o grafo não tem laços. Se o grafo G tiver laços, pode-se retirá-los considerando um grafo modificado H. Se este tiver uma caminho de Euler, o primeiro também tem - sempre que chegarmos a um vértice contendo um laço, percorremos o laço.

No algoritmo correspondente, os dados de entrada correspondem a um grafo conexo representado por uma matriz de adjacência A de ordem $n \times n$. Partindo do algoritmo é preciso contar o número de vértices adjacentes a cada vétice e determinar se esse é o número par ou ímpar. Se existem números ímpares demais, não existe um caminho de Euler. A variável total guarda o número de vértices ímpares encontrados no grafo.

1.3. Grafos e Contextualização.

A investigação sobre os conceitos de matrizes e de grafos serão fundamentadas nos estudos de Soares (2009), Lipschutz (2004), Iezzy (2004), Iezzy (2007), Anton (2001), Barroso (2010), Boyer (1996) e Gersting (2004). Destacaremos a importância dos grafos no processo de ensino/aprendizagem na educação básica, tendo por objetivo facilitar ao estudante o desenvolvimento do raciocínio crítico perante o conteúdo aplicado na área da matemática, promovendo, assim, que ele encontre a matriz de adjacências $A = [a_{mn}]$ do grafo estudado. Serão desenvolvidas atividades contextualizadas e interdisciplinares envolvendo situações problemas no cotidiano do aluno. Dessa forma, despertando um maior interesse e motivando os estudos sobre os conteúdos matemáticos.

Contextualizar significa, de acordo com Ferreira (1992), interpretar ou analisar, tendo em conta o contexto em que está inserido. De acordo com os PCN (2002), a contextualização de problemas pode ser feita por meio de situações problemas, devendo o educador ter o cuidado em diferenciar problemas "abertos" e "fechados" sendo que o último não traz desenvolvimento pleno do raciocínio. Por isso, torna-se cada vez mais importante inserir problemas contextualizados "abertos" no contexto matemático.

> A contextualização pode ser feita por meio da resolução de problemas, mas aqui é preciso estar atento aos problemas "fechados", porque esses poucos incentivam o desenvolvimento de habilidades. Nesse tipo de problema, já de antemão o aluno identifica o conteúdo a ser utilizado, sem que haja maiores provocações quanto à construção de conhecimento e quanto à utilização de raciocínio matemático. (PCN, 2002, p. 83)

Diante do conceito da contextualização é preciso introduzir algo a mais, que desperte o interesse dos discentes, motivando-os ao processo de ensino-aprendizagem. Para isso, é preciso associar as operações de matrizes com o cotidiano do aluno através de situações problemas envolvendo, por exemplo, aplicações que utilizam a teoria dos grafos.

Para Soares (2009), é de fundamental importância expor problemas do dia a dia em sala de aula buscando melhor compreensão do conteúdo explorado na escola.

> "... Sabemos que há muita matemática presente no cotidiano dos alunos, como também há muitos tópicos de matemática que não serão diretamente relacionados com qualquer experiência vivida fora da escola. Podemos explorar as experiências dos alunos pensando em contribuir para que entendam melhor sua realidade e possam ser melhor preparados para o enfrentamento de seus problemas".(SOARES, 2009, p. 18)

Para trabalhar com os alunos do 2º ano do ensino médio o conteúdo de Matrizes, foi selecionada como metodologia a Teoria dos Grafos, destacando o problema histórico da Ponte de Konigsberg.

Os PCN (2002) ressaltam que existem outros tipos de problemas a serem trabalhados na escola, relativos a conjuntos finitos e com enunciados de fácil entendimento. Também expõe uma ideia de uso grafos de forma clara e sucinta, através do exemplo das sete pontes de Konigsberg tratado por Euler e destacando a importância da resolução de outros tipos de problemas, que podem ser inseridos no ensino médio.

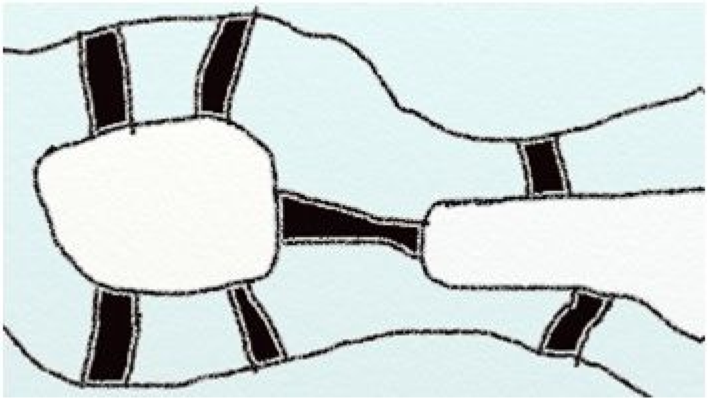


Figura 1.21: Mapa com as Pontes de Konigsberg.

> Um exemplo clássico é o problema das pontes de Konigsberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: "Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?" (PCN; 2002, p. 94)

Vamos usar o exemplo do problema da Figura 1.21, que é baseado na cidade de Konigsberg (território da Prússia até 1945, atual Kaliningrado), para fazer a relação entre o ensino de matrizes com a teoria dos grafos. Ao analisar a pergunta como seria possível fazer um passeio a pé pela cidade de forma a se passar uma única vez por cada uma das sete pontes, Leonhard Euler em 1736, resolveu o famoso problema histórico de matemática das sete pontes de Königsberg, em que provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições, conforme Cardoso e Matos (2014).

Para encontrar a solução do problema, Euler usou um raciocínio muito simples, trocou as pontes por curvas transformadas em caminhos (arestas) do grafo e trocou as ilhas e os dois lados do rio que serão as intersecções em pontos (vértices) do grafo.

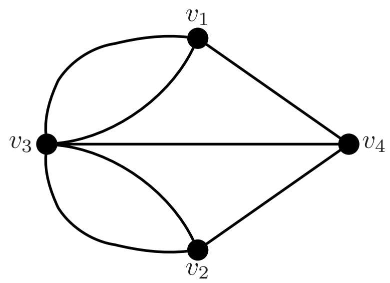


Figura 1.22: Grafo representando as sete pontes de Konigsberg

De acordo com a Figura 1.22, o grafo representado pelas sete pontes de Konigsberg, observamos que os vértices são dados por v_1, v_2, v_3 e v_4, suas arestas são dadas por $v_1 - v_3, v_3 - v_2, v_1 - v_4, v_2 - v_4$ e $v_3 - v_4$. Conforme o Teorema 1.5, Euler percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se houvesse exatamente zero ou dois vértices de onde saísse um número ímpar de caminhos. A razão disso é que de cada vértice deve haver um número par de caminhos, pois será preciso um caminho para "entrar"e outro para "sair", ou também pode haver um vértice que saia e outro que se chega, ambos com uma única aresta incidente.

Lipschutz (2004), expõe de forma clara a definição de grafo euleriano atravessável: Um *grafo é dito atravessável* se pode ser desenhado sem quebras nas curvas e sem repretição de arestas, isto é, se existe um caminho que inclua todos os vértices e use cada aresta exatamente uma vez.

Também Lipschutz (2004), ressalta que uma *trilha é dita atravessável* já que nenhuma aresta é usada duas vezes. Com essas definições citadas, apresentamos agora com detalhes como Euler provou que o grafo da Figura 1.22 não é atravessável e, portanto, a caminhada de Konigsberg é impossível.

Sabe-se que primeiramente um vértice é par ou ímpar dependendo do seu grau ser um vértice de grau par ou um vértice de grau ímpar. Suponha que um grafo é atravessável e que em um dado vértice p não comece nem termine uma trilha atravessável. Afirmamos que p é um vértice ímpar. De fato, sempre uma trilha atravessável chega em p por uma aresta, deve existir uma aresta ainda não usada pela qual a trilha pode sair de p. Portanto, as arestas na trilha incidentes a p devem aparecer aos pares, e, portanto, p é um vértice par. Logo, se um vértice q é impar, a trilha atravessável precisa começar ou terminar em q. Consequentemente, um multigrafo com mais de dois vértices ímpares não pode ser percorrido. Observe que o multigrafo corresponde ao problema das pontes de Koniserg tem quatro vértices ímpares. Por isso, não se pode caminhar por Konisberg de forma que cada ponte seja percorrida exatamente uma vez.

Como os graus de todos os vértices são ímpares, é fácil verificar que este grafo não apresenta nem um trilho, nem um ciclo euleriano, visto que ele não satisfaz o teorema de Euler.

Por outro lado, conforme o Teorema 1.5, Euler também percebeu que os dois pontos com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente. Se não houver pontos com número ímpar de caminhos, deve-se iniciar e terminar o trajeto no mesmo ponto, podendo esse ser qualquer ponto do grafo. Isso não é possível quando temos dois pontos com números ímpares de caminhos, sendo obrigatoriamente um o início e outro o fim.

Logo é impossível atravessar todas as pontes uma vez só e voltar ao lugar de partida.

Com a forma geométrica apresentada sobre a representação do grafo das sete pontes de Konigsberg, também Netto (1979) ressalta que o grafo pode-se relacionar com a estrutura física em forma de matriz para fazer cálculos, ou seja, o grafo possui quatro vértices. Então, para ser representado em forma de matriz é preciso usar uma matriz de ordem 4 x 4, ou seja, possua 4 linhas e 4 colunas.

A representação do grafo das sete pontes de Konigsberg em forma de matriz é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que que a soma da primeira linha vale 3, a soma da segunda linha vale 5, a soma da terceira linha vale 3 e a soma da quarta linha vale 3. De acordo com o Teorema 1.5, essa matriz tem que ter somente duas somas ímpares, e nesse caso todas as quatro são ímpares. Dessa forma a matriz adjacência do grafo não faz uma trilha, pois tem que começar em qualquer soma ímpar e terminar no outro soma ímpar. Portanto, pela matriz de adjacências do grafo das sete pontes de Konigsberg, não existe tal caminho a percorrer, porque temos mais de dois pontos com números ímpares de caminhos, sendo que para existir tal possibilidade, obrigatoriamente tem que ter um no início ímpar, outro no fim ímpar e os demais serem pares.

Vimos até aqui, sobre as definições de matrizes e suas operações, sobre definição de grafos e seus tipos, buscando fazer uma relação com matrizes. Aplicaremos estes conceitos agora no capítulo 2, onde vamos trabalhar situações problemas em sala de aula com atividades contextualizadas, buscando despertar motivação e entusiasmo nos alunos, fazendo com que eles realizem o que está sendo proposto com interesse de acordo com a sua realidade social.

Capítulo 2

Matrizes e grafos em sala de aula.

Pesquisas na área da educação e da matemática realizadas por Soares (2009), Malta (2010) e Gualandi (2012), vêm apresentando importantes problemas que podem ser aplicados no cotidiano escolar, de forma a enriquecer o currículo e o conhecimento prático matemático dos alunos. Dentro desta perspectiva e de acordo com o PPP - Projeto Político Pedagógico (2016), o trabalho desenvolvido na Escola Estadual Marechal Eurico Gaspar Dutra na turma do 2º ano foi realizado através de aplicações com grafos, mas buscando em algumas aulas fazer uma relação com o ensino de matrizes. Pode-se dizer, como Malta (2008, p. 11), que " a teoria dos grafos apresenta aspectos pertinentes que merecem espaço no currículo da Escola Básica". Para que esse ensino possa ser efetivado, despertando o interesse e a motivação dos alunos na resolução das atividades propostas, deve-se levar em consideração as metodologias aplicadas pelo professor.

Neste capítulo, serão desenvolvidas atividades que envolvam caminhos e grafos, relacionando com matrizes e suas operações, utilizando exemplos contextualizados e buscando propor resolução de situações problemas. Para finalizar as aplicações realizadas na sala de aula, foram utilizados recursos computacionais, pois as matrizes podem ser trabalhadas utilizando softwares por meio de calculadora usada como meio de efetuar operações. O ensino das matrizes pode se tornar um assunto interessante, onde os alunos passam a usar tecnologias que despertam sua curiosidade e fazem com que busquem mais conhecimento, transformando situações do seu cotidiano como um processo de aprendizagem.

2.1. Conhecendo a escola

Afim de aplicar o ensino de matrizes utilizando grafos, é preciso sair da teoria abordada no capítulo anterior e partir para a prática que será desenvolvida na Escola Estadual Marechal Eurico Gaspar Dutra (Figura 2.1), tendo como proposta atividades contextualizadas que envolvam o cotidiano do aluno, buscando superar e sanar suas dificuldades perante situações práticas.

Figura 2.1: Escola Estadual Marechal Eurico Gaspar Dutra

A Escola Estadual Marechal Eurico Gaspar Dutra está localizada na cidade de Barra do Garças MT, a uma distância de 515 km de Cuiabá, situada na região oeste de Mato Grosso por onde corre o rio Garças. Sua extensão territorial é de cerca de 9.078,984 km^2 e possui aproximadamente 58.690 habitantes de acordo com Censo (2016)

A escola atende a uma comunidade estudantil diversificada, oriunda da maioria dos bairros da cidade e dos distritos de Vale dos Sonhos e Indianópolis, bem como dos municípios circunvizinhos Pontal do Araguaia-MT e Aragarças-GO. Percebe-se que os alunos são de famílias pertencentes às diversas classes sociais, constituindo uma diversidade cultural expressiva, inclusive com clientela indígena.

Os cursos oferecidos são Ensino Fundamental - 3º ciclo da Escola Organizada por Ciclos de Formação Humana, de acordo com Grosso (2016), onde proporciona a todos os alunos uma educação de qualidade e inclusiva, e Ensino Médio Regular, que é organizada por meio do sistema seriado. Atualmente a escola atende nos três turnos, com uma clientela aproximada de 1093 alunos, perfazendo ao todo 22 turmas, sendo 11 do período matutino, 5 do período vespertino e 6 do período noturno.

Em sua infraestrutura, a escola possui 22 salas de aulas, uma sala de informática, uma biblioteca com grande acervo de livros, uma sala de vídeo, um laboratório de ciências e uma quadra coberta. Todas as salas de aula mencionadas são climatizadas com capacidade para 30 alunos. Há também salas anexas de Ensino Médio: 04 turmas no distrito de Vale dos Sonhos e 05 turmas no distrito de Indianópolis, fruto de uma parceria com a Prefeitura Municipal, totalizando 131 alunos.

A Escola foi fundada em abril de 1974 para suprir a necessidade de profissionais habilitados Técnico em Comércio e Técnico em Contabilidade que antes eram oferecidos pela Escola Estadual Heronides Araújo. Em

1976 foi implantado o Ensino Fundamental de 1ª a 4ª série no período matutino, de 5ª a 8ª série, no período vespertino e continuando no período noturno os cursos profissionalizantes. Nesse mesmo ano, criaram-se algumas extensões do Curso Técnico em Araguaiana-MT e em Nova Xavantina-MT. Em 1996, com a extinção dos cursos profisionalizantes nas escolas públicas, foi implantado o Ensino Médio, tendo, então, como objetivo preparar os alunos para ingressarem nas universidades.

A filosofia da escola é despertar no educando a criticidade na sua formação sociocultural, proporcionando-lhe oportunidades de conhecer e exercer a cidadania, cultivando o conhecimento que o levará a tolerância e o respeito à pluralidade étnico, cultural e de gênero, para atuar como sujeito de transformação dentro de uma democratização do conhecimento.

O objetivo geral da escola é proporcionar aos educadores e educandos condições para transformar as informações em conhecimentos necessários à vida e a vivência em sociedade, com vista ao exercício da cidadania participativa, sensibilizando-os de seus direitos e deveres, como ser do mundo e no mundo.

Os profissionais da educação desta escola investem em iniciativas e projetos que valorizam cada vez mais a qualidade do ensino público, mas apesar disso a escola apresenta alguns problemas tais como: índice de aprovação do 1º ano do Ensino Médio noturno abaixo de 50%, alto índice de reprovação no Ensino Médio e de evasão especificamente no período noturno. E assim, com responsabilidade e compromisso, a Escola Estadual Marechal Eurico Gaspar Dutra, através de todos os profissionais que nela atuam, procura sempre superar as dificuldades que a educação enfrenta.

2.2. Público alvo e atividades envolvidas

A escola é inevitalvemente um lugar de relacionamentos humanos em exercício cotidianamente. Não se resume basicamente ao lugar de transmissão de conhecimentos por área, pois se os relacionamentos são vividos em ambiente escolar, conhecimentos relativos a esses relacionamentos também precisam ser considerados. Assim, é fundamental que educadores se tornem importantes pesquisadores nessa área. Considerando também os relacionamentos com o ambiente ao qual estamos todos inseridos e todas as práticas pedagógicas em torno de todos os ensinamentos.

Diante dessas informações, foi realizado um estudo abrangente através de pesquisas bibliográficas e uma pesquisa na grade curricular do 2º ano, para verificar como é o ensino de matrizes e se no currículo é trabalhado a teoria de grafos, buscando, assim, propor uma nova abordagem de ensino.

Para fazer a aplicação do ensino de matrizes utilizando teoria dos grafos foi selecionada uma turma do 2º ano do Ensino Médio do período noturno composta por 30 alunos. Veja as Figuras 2.39 ((a) e (b)), as atividades foram realizadas entre os dias 29 de setembro e 27 de outubro de 2016 e foram utilizadas 5 aulas todas as quintas feiras com duração de uma hora.

(a) (b)

Figura 2.2: Alunos do $2^{\underline{o}}$ Ano

Nesta unidade de ensino foram aplicadas atividades simples e de fácil entendimento, mas que requerem concentração para desenvolver um raciocínio lógico, buscando ter em vista uma aprendizagem mais significativa por meio de situações problemas. Também foi explorado a ideia de matrizes já ministrado pelo professor titular. No intuito de facilitar a compreensão, em todas as aulas foram utilizados os seguintes recursos didáticos: notebook, data show, caixa de som, quadro branco, pincel para quadro branco e atividades impressas.

2.3. Aplicação sobre qual é o melhor caminho

Nas atividades propostas foram envolvidos os conteúdos tais como: raciocínio lógico, ponto, retas, segmentos de retas e distâncias.

No primeiro dia, 29 de setembro, foram apresentados alguns slides sobre como é formado a estrutura de grafos, como localizar um caminho a ser percorrido e como escolher o melhor trajeto através de um grafo feito a partir de vários filmes (arestas) interligados pelos atores (vértices), onde que as arestas são dadas por; 1 - Os miseráveis, 2 - Batman: o cavaleiro das trevas ressurge, 3 - X men: o filme, 4 - A grande aposta, 5 - O código da vinci, 6 - Onze homens e um segredo, 7 - O resgate do soldado Ryan, 8 - Psicopata americano, 9 - Senhor dos anéis - a sociedade do anel, 10 - Clube da luta e 11 - Troia, de acordo com a Figura 2.3.

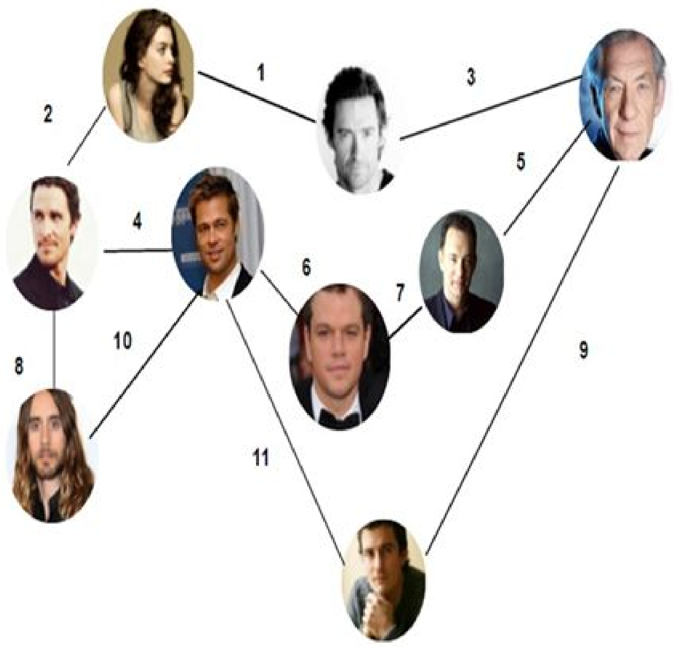


Figura 2.3: Estrutura de filmes representados por um grafo

Desse modo, os alunos compreenderam como são feitas as ligações de um caminho por meio de uma estrutura chamada grafos.

A metodologia aplicada foi aula expositiva-dialogada com exemplos do dia a dia e verificação dos conhecimentos prévios dos alunos. Logo após, foi exposto os conceitos de ponto, retas e distâncias com exemplos de caminhos percorridos.

Em seguida, a turma foi dividida em grupos, para resolução de situações problemas em atividades impressas. Para realizar essa abordagem de ensino, (ver a Figura 2.4), foram executadas atividades contextualizadas envolvendo aplicações do melhor caminho, dando início à abordagem sobre a teoria do grafos.

Aplicamos várias atividades que podem ser encontradas no Apêndice. Aqui serão explanadas as Atividades 1, 4, 5 e 8.

Figura 2.4: Alunos desenvolvendo atividades

O objetivo das atividades propostas, de forma geral, foi o aprofundamento e a consolidação dos conhecimentos já adquiridos, o desenvolvimento da autonomia intelectual permitindo que o aluno possa intervir criticamente nas ações do cotidiano utilizando o raciocínio lógico através de situações problemas envolvendo segmentos de retas, curvas, perímetro e organização numérica em ordem crescente.

As atividades realizadas contribuíram para o desenvolvimento da capacidade em selecionar conceitos matemáticos para resolver problemas simples envolvendo segmentos de retas e curvas e numeração em ordem crescente, promovendo o despertar da confiança para a análise e o enfrentamento de situações novas.

A dinâmica das aulas e atividades propostas despertaram o interesse de toda a turma, todos buscaram resolver os problemas, utilizando os conhecimentos já adquiridos e mesmo enfrentando alguns obstáculos, tentaram solucionar os desafios demonstraram entusiasmo.

Em algumas atividades, os alunos usaram caminhos diferentes para resolver os problemas e a maioria chegou ao resultado correto. Em outras a intervenção da professora foi necessária, pois o auxílio na retomada do conteúdo contribuiu significamente nas soluções dos problemas.

2.3.1. Atividade 1

Desenhe uma casa igual a esta sem tirar o lápis do papel, e sem passar duas vezes pelo mesma aresta.

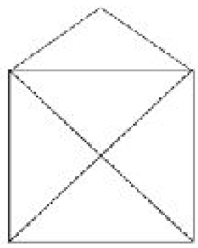


Figura 2.5: Casinha

Observando as soluções obtidas, conclui-se que a maioria dos alunos tiveram dificuldades em resolver o problema, mesmo sendo aparentemente simples. Mas sua resolução requer um pensamento mais crítico e por isso, no primeiro momento, eles não acharam fácil. A estratégia utilizada pelo estudante 01, foi a numeração ordinal e o caminho percorrido por ele foi marcado em ordem crescente, com essa resolução foi aplicado os conhecimentos de pontos, segmentos de retas e raciocínio lógico.

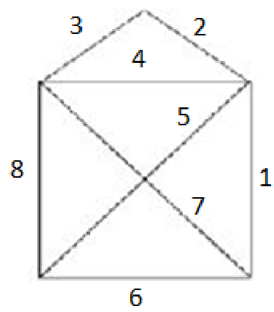


Figura 2.6: Atividade 1 - Estudante 01

Já o estudante 02, fez a resolução de forma diferente. Colocou passo a passo, setas direcionadas representando os caminhos percorridos. Dessa forma ele chegou no resultado com êxito e demonstrou o mesmo conhecimento dos conteúdos supracitados.

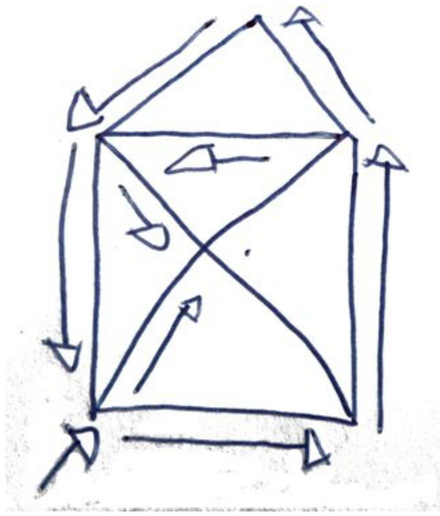


Figura 2.7: Atividade 1 - Estudante 02

Uma resolução da atividade: Para desenhar uma casa igual a do enunciado desta atividade sem tirar o lápis do papel, e sem passar duas vezes pelo mesma aresta é preciso subir uma diagonal, desce e forma um triângulo, sobe e fecha o quadrado, em seguida faz o triângulo do telhado e finaliza descendo com a outra diagonal.

2.3.2. Atividade 4

Qual é a menor distância que deve percorrer a ponta de um lápis de modo que cubra toda a figura?

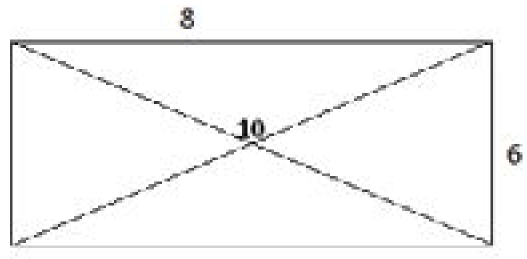


Figura 2.8: Retângulo

A aplicação desta atividade foi muito importante para o ensino - aprendizagem, pode-se notar que todos os alunos chegaram a uma mesma solução, mas, tiveram a intervenção da professora de como encontrar um perímetro de uma figura geométrica.

Observando o método do estudante 06, observa-se que o mesmo utilizou a estratégia de aproveitar o conhecimento ministrado pela professora e percebeu que o perímetro é a soma de todo o contorno da figura, levando-o a encontrar o menor caminho. Considerando que o lado de 6 cm, teria que ser repetido mais uma vez.

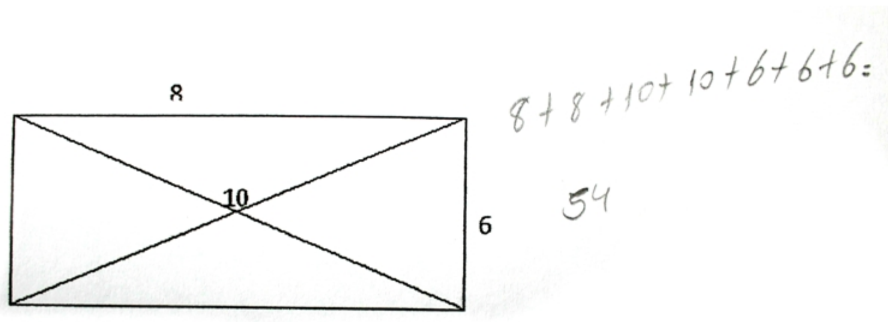


Figura 2.9: Atividade 1 - Estudante 06

Uma resolução da atividade: Para cobrir toda a figura, procurando qual é a menor distância que devemos percorrer com a ponta de um lápis, vamos cobrir a figura toda. Sabemos que as medidas dos lados do retângulo valem 6 e 8 e da diagonal do retângulo vale 10. Como queremos o menor caminho, sempre iremos ter que repetir um lado a mais para percorrer toda a figura, para isto, vamos escolher então o menor lado. Dessa forma vamos repetir o lado de medida 6 duas vezes. Logo, pode tirar o lápis do papel, pois terá que passar por um lado mais de uma vez.

$$6 + 6 + 6 + 8 + 8 + 10 + 10 = 54$$

Portanto, a menor distância vale 54.

2.3.3. Atividade 5

Em cada caso, veja se é possível fazer as ligações de água, luz e telefone nas respectivas casas, de modo que essas ligações não se cruzem nenhum momento.

Na questão a) temos:

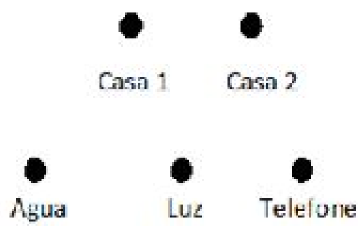


Figura 2.10: Instalações em duas casas

Observando as atividades ressalta-se que no primeiro momento, os alunos tiveram uma certa dificuldade, pois queriam fazer ligações de água com energia, ou de energia com telefone, durante as atividades foi explicado que deveriam ligar a água, luz e telefone em cada uma das casas, com isso eles compreenderam o problema exposto. A aplicação na questão b foi mais complexa, os alunos tiveram mais trabalho para pensar e descobrir a resposta, devido a um raciocínio lógico expandido. Embora com algumas dificuldades, conseguiram encontraram a mesma solução.

Olhando a atividade do estudante 07, é possível observar que na sua resolução não houve ligações entre os segmentos de retas e curvas, embora a maioria dos alunos também chegaram ao mesmo resultado.

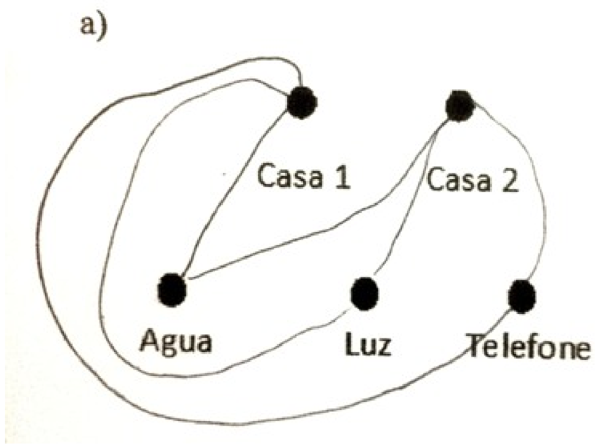


Figura 2.11: Atividade 1 - Estudante 07

Na questão b) temos agora 3 casas, mas com o mesmo problema.

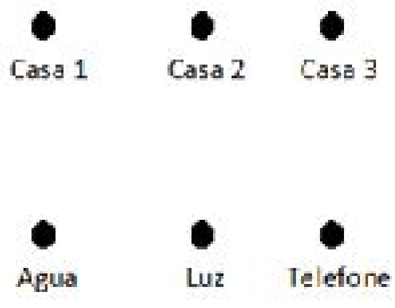


Figura 2.12: Instalações em três casas

Analisando o método do estudante 08, o qual utilizou a estratégia de aproveitar o conhecimento que já tinha feito na questão anterior, a respeito de curvas e segmentos de retas, percebeu que o problema não possui solução.

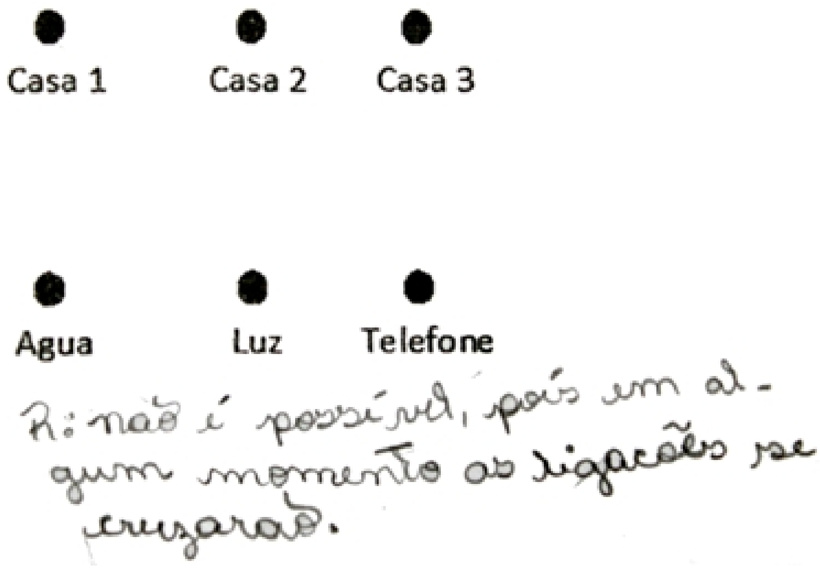


Figura 2.13: Atividade 1 - Estudante 08

De fato, é possível fazer as ligações de água, energia e telefone nas duas casas, conforme pede o enunciado. Para fazer as ligações nas três casas, por tentativa e erro, é impossível ligar as três casas com as três diferentes utilidades sem pelo menos uma das ligações cruzarem com as outras, porque algumas se cruzam em um momento utilizando retas e curvas para realizar todas as instalações.

2.3.4. Atividade 8

(Olimpíadas de matemática prova fase 2 nível 1 2008) Os círculos da figura abaixo foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi bem preenchida.

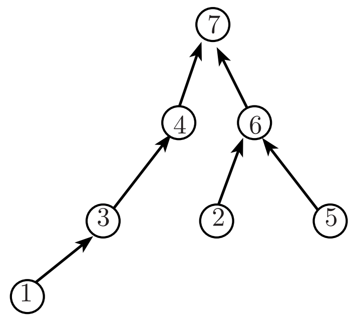


Figura 2.14: Números de 1 a 7

Complete a figura abaixo com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.

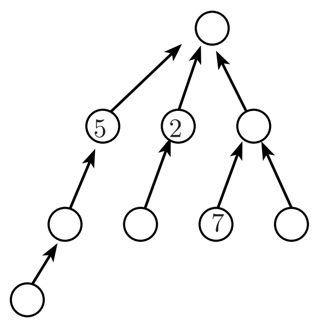


Figura 2.15: Números de 1 a 9 para preencher

A aplicação desta atividade foi muito eficaz, visto que ela é de fácil compreensão e que os alunos realizaram com muita rapidez.

Analisando o método do estudante 10, o qual utilizou a estratégia de aproveitar o conhecimento que já tinha adquirido anteriormente sobre localização de caminhos, percebe-se que ele conseguiu resolver as atividades com muita motivação.

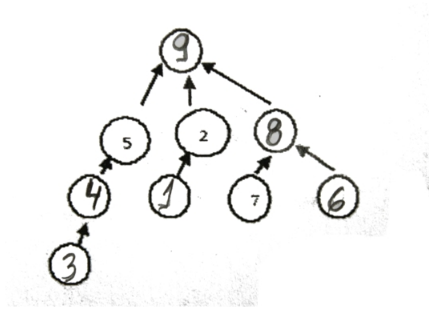


Figura 2.16: Atividade 1 - Estudante 10

Uma resolução da atividade: A figura será preenchida, quando colocar nos círculos os números de 1 a 9, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. De fato, como as flechas indicam de um número menor para um maior, vamos começar pelo 2 desse modo o único número menor do que 2 é 1. Vamos analisar agora o número 5, como o número 1 e o número 2 já foram utilizados, resta colocar primeiro o 3 e o 4 que são os dois únicos números que podem ser colocados antes do 5. Vamos analisar o número 7 que já foi preenchido, sabemos que um número maior do que 7 é o 8, logo o 8 será usado acima do número 7, e do lado do número 7, o único número que resta para ser usado é o 6. Para finalizar o último número que é maior que 5, 2 e 8 será o que falta que é o 9.

2.4. Aplicação com grafos envolvendo caminhos

No segundo dia, 06 de outubro a aula foi iniciada com uma breve revisão da aplicação sobre como escolher o melhor caminho em uma situação dada. Uma das metodologias aplicadas foram aulas expositivas-dialogadas, relatando a história da ponte de Konigsberg, enfatizando seu lugar, origem e solução. Em seguida foi exposto um vídeo com pequenos trechos do filme a Origem focando no conceito de grafo. Logo após foram realizadas atividades escritas sobre situações problemas envolvendo figuras e com objetivo de verificação de aprendizagem, foi realizada a correção no quadro, envolvendo as participações dos alunos.

Aplicamos várias atividades que podem ser encontradas no Apêndice deste trabalho, mas aqui serão explanadas as atividades 1 e 4.

Os alunos desenvolveram a habilidade de encontrar quais caminhos que ligam Spa (São Paulo) a Rec (Recife) e percorrer a ponte de Konigsberg, identificando qual é o menor caminho, sendo que o objetivo alcançado é procurar o melhor caminho, diferenciar e distinguir quais possam ser percorridos, instigando-os a busca de novas soluções.

No decorrer das atividades, a maioria dos alunos compreenderam os problemas expostos e encontraram o melhor caminho em forma de estrutura de grafos, pois cada um deles usaram recursos diferentes para resolvê-los. Mas, os dois alunos chegaram ao mesmo resultado. Com isso, ficaram motivados para realizarem outras atividades com muito entusiasmo e houve a participação de todos.

2.4.1. Atividade 1

Caminhos Máximo / Mínimo:

Utilizando um grafo para representar estradas que unem cidades, sendo os vértices as cidades e as arestas as distâncias entre as cidades, pergunta-se: Quais os caminhos (se exisir algum) que ligam Spa (São Paulo) à Rec (Recife)?

Existindo mais de um caminho, qual o mais curto?

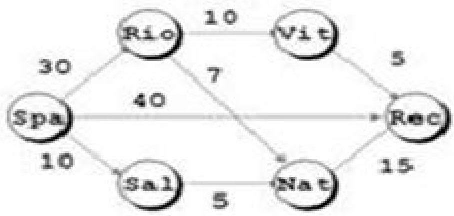


Figura 2.17: Caminho de Spa a Rec

Com a realização das atividades, foi possível verificar que todos os alunos compreenderam o problema exposto. Alguns utilizaram resultados detalhados e outros já fizeram de forma rápida, colocando somente o resultado total.

O estudante 05 colocou a solução de forma completa e de fácil entendimento usando a estratégia como apresenta a Figura 2.18.

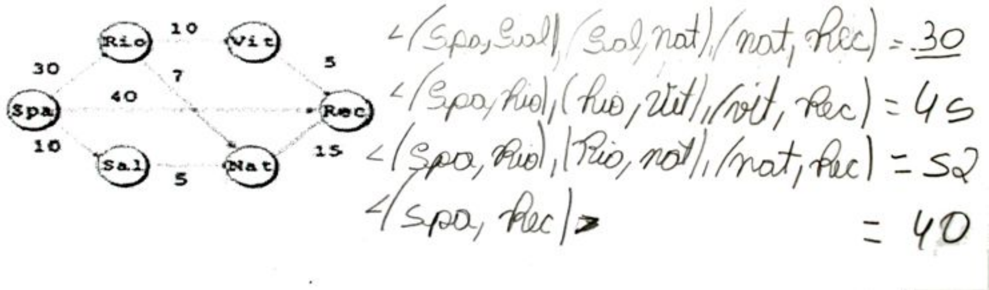


Figura 2.18: Atividade 1 - Estudante 5

Já o estudante 06, colocou somente o resultado indicando o caminho mais curto usando a estratégia como apresenta a Figura 2.19.

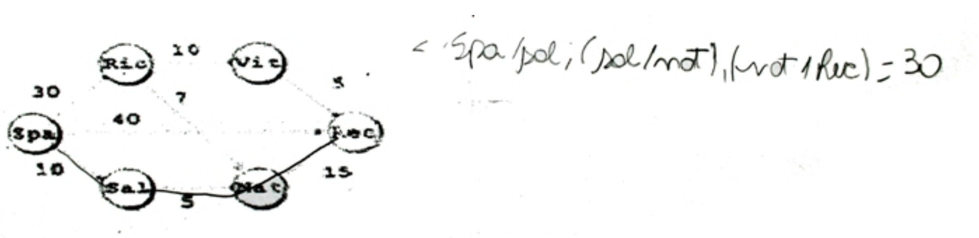


Figura 2.19: Atividade 1 - Estudante 6

Uma resolução da atividade: Para resolver a primeira pergunta do problema, é preciso encontrar se existe algum caminho, analisando o trajeto da figura, identificamos 4 tipos de caminhos que são eles:

$$Comprimento(Spa - Sal - Nat - rec) = 10 + 5 + 15 = 30.$$

$$Comprimento(Spa - Rio - Vit - rec) = 30 + 10 + 5 = 45.$$

$$Comprimento(Spa - Rio - Nat - rec) = 30 + 7 + 15 = 52.$$

$$Comprimento(Spa - rec) = 40.$$

Para resolver a segunda pergunta do problema, como observamos que existe mais de um caminho, temos que compará-los e escolher o mais curto. Portanto, temos que a soma de cada caminho mede 30, 45, 52 e 40, dentre estes valores o menor será 30.

2.4.2. Atividade 4

Seria possível fazer um passeio a pé pela cidade de forma a se passar uma única vez por cada uma das sete pontes?

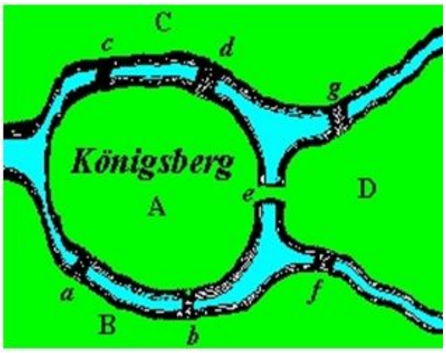


Figura 2.20: Ponte de Konigsberg

Analisando as atividades é possível verificar que a maioria dos alunos entenderam o problema exposto. Alguns fizeram de forma rápido colocando somente o resultado final.

Analisando a atividade do aluno 06, observa-se que respondeu somente “não”, mas percorreu diversos caminhos de forma completa.

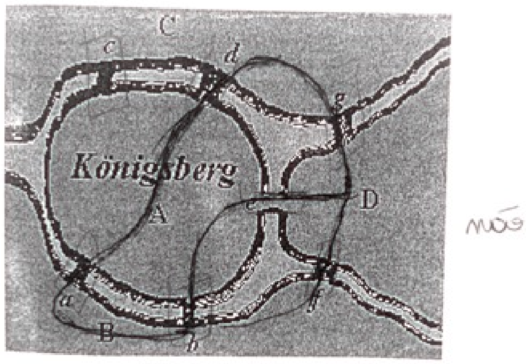


Figura 2.21: Atividade 4 - Estudante 5

De acordo com o teorema de Euler, não existe tal possibilidade, pois todos os seus vértices possuem grau ímpar, e para ser possível todos eles têm que ter grau par.

De acordo com a Figura 2.20, o grafo que representa as 7 pontes de Konigsberg, para atravessar todas essas linhas sem jamais repetir nenhuma, e chegar ao ponto de partida, ele notou que, para não repetir linhas, todo ponto a que ele chegasse deveria permitir uma saída, exceto, os pontos inicial e final. Ou seja, para todo o ponto, exceto os de começo e fim, cada entrada deve possuir uma saída correspondente: ele deve possuir um número par de conexões. Se ele possui um número ímpar, digamos, 3, se entrar, sairá dele e, na próxima entrada, não terá como sair, ao menos que ele seja um ponto final.

Observando o grafo, todos os pontos possuem um número ímpar de linhas, quando o número máximo é dois (entrada e saída). Assim, Euler concluiu de uma vez por todas que não é possível atravessar as sete pontes de Konigsberg sem jamais repetir nenhuma.

2.5. Aplicação com grafos envolvendo matrizes

No terceiro dia, 13 de outubro, os conteúdos aplicados foram: Uma representação de grafos, grafos dirigidos, influências numa família, definição de matrizes, representação genérica de uma matriz e grafos dirigidos por dominância. A aula foi iniciada com uma breve revisão histórica sobre grafos e matrizes. Em seguida, foi exposto no quadro o problema a ponte de Konisberg e, partindo dela, desenhou-se sua representação através da imagem de um grafo, ressaltando a importância de como identificar os vértices e arestas.

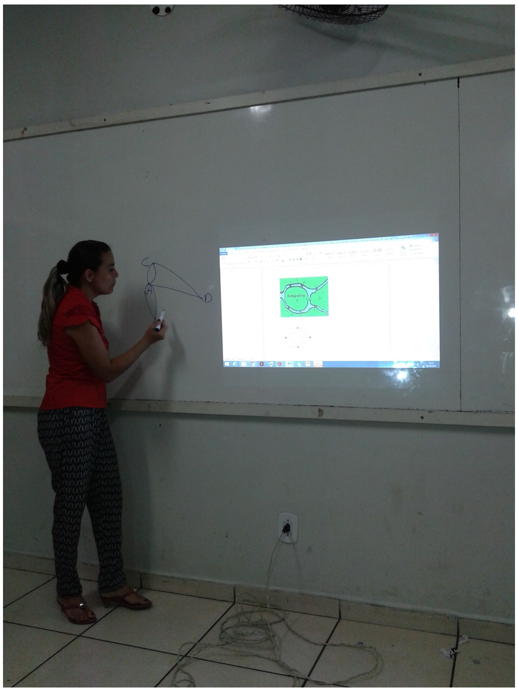


Figura 2.22: Explicação de como desenhar um grafo

Na sequência foi mostrado exemplo de grafo representado por três cidades no data show. Onde a partir dele, foi associada sua matriz de adjacências. Também foi explicado o conceito de matriz, através da teoria dos grafos, com exemplos do cotidiano do aluno.

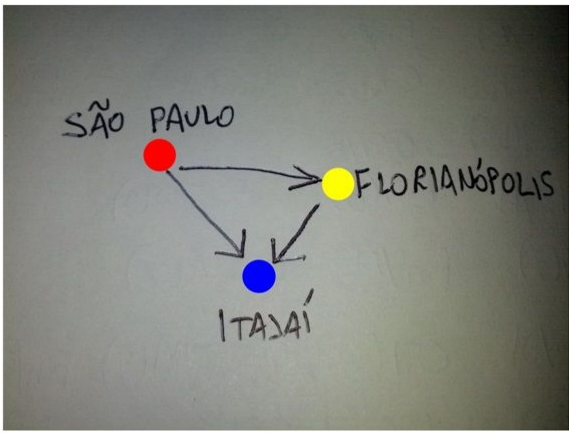
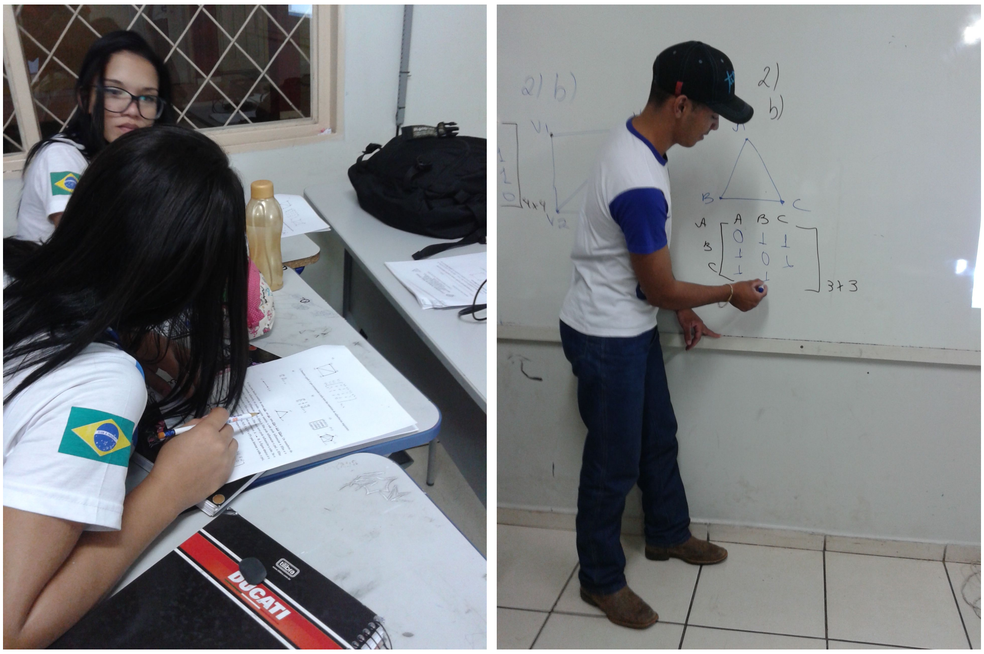


Figura 2.23: Grafo representando 3 cidades

Em seguida, foram realizadas atividades sobre grafos relacionados com o ensino de matrizes. Para verificação da aprendizagem as atividades foram corrigidas no quadro, observando-se qual foi o entendimento dos alunos. Foram aplicadas várias atividades, que podem ser encontradas no Apêndice.

Os objetivos foram buscar o aprendizado de passar de uma representação para outra, fazendo com que o aluno seja capaz de a partir de um grafo, associar uma matriz de adjacências e o processo inverso, utilizando o conhecimento já adquirido. Os problemas desenvolveram, nos alunos, a habilidade de identificar quais os conteúdos matemáticos podem ser úteis em sua resolução e a habilidade de identificar qual o grau de dominância uma família possui.

No início dos problemas, alguns alunos tiveram dificuldades, pois perceberam que em algumas atividades precisariam de atenção para acompanhar uma ordem certa de encontrar um caminho de um vértice para o outro, mas, ao longo da atividade, chegaram ao mesmo resultado. Portanto, os alunos ficaram empenhados durante as outras atividades. Ao final aparentou-se que eles poderiam resolver qualquer uma delas. Com isso, realizaram outras atividades bastantes motivados, tanto que fizeram questão de resolver os problemas no quadro, veja Figura 2.39.



(a) (b)

Figura 2.24: Alunos realizando atividades

2.5.1. Atividade 1

Ache a matriz de adjacências $A = [a_{ij}]$ do grafo de cada figura abaixo:

a)

Figura 2.25: Grafo com 2 vértices

Observando as soluções obtidas, pode-se analisar que alguns alunos, a princípio, não tinham ideia de como fazer essa representação. Mas com o auxílio e orientação da professora, chegaram no mesmo resultado ao resolver o problema. Pode-se observar aqui, o interesse e dedicação dos alunos.

O estudante 01 usou a estratégia como apresenta a Figura 2.26. É possível observar que ele representou a matriz dentro do parênteses identificando os seus elementos na linha que são v_1 e v_2 e na coluna que são v_1 e v_2, cuja resolução desta atividade foi completa indicando até a ordem da matriz.

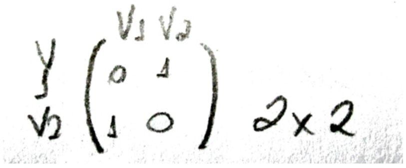


Figura 2.26: Atividade 1 - Resolução do estudante 01

Já o estudante 06, usou a estratégia como apresenta a Figura 2.27; representou a matriz em forma de tabela identificando os seus elementos na linha que são v_1 e v_2 e na coluna que são v_1 e v_2.

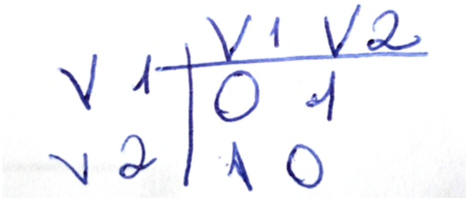


Figura 2.27: Atividade 1 - Resolução do estudante 06

Uma resolução da atividade: Para achar a matriz de adjacências $A = [a_{ij}]$ do grafo da Figura 2.25 dada, é preciso perceber que ele possui 2 vértices. Ou seja teremos uma matriz de ordem 2. Como o grafo não possui direção, pode ser considerados caminhos de ida e volta; escrevemos $A \leftrightarrow B$. Portato o grafo está associado a uma matriz de adjacências quadrada 2×2, que é dada abaixo.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

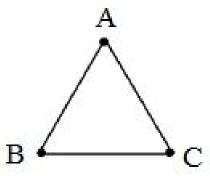


Figura 2.28: Grafo com 3 vértices

Verificando as soluções obtidas, pode-se considerar que a maioria dos alunos ja conseguiam realizar essa representação. Com o auxílio da professora, chegaram ao resultado com muito empenho em solucionar o problema.

O estudante 03 usou a estratégia como apresenta a Figura 2.29. É possível observar que ele representou a matriz dentro do colchete identificando os seus elementos na linha que são A, B e C e na coluna que são A, B e C, cuja resolução desta atividade foi quase que de imediato indicando até a ordem da matriz.

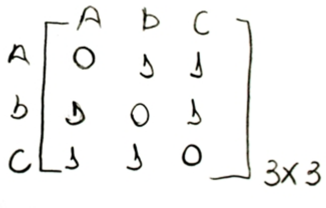


Figura 2.29: Atividade 1 - Resolução proposta pelo estudante 03

Resolução da atividade: A solução desse item é feito análogo ao item (a), a resposta encontra-se na Figura 2.29.

c)

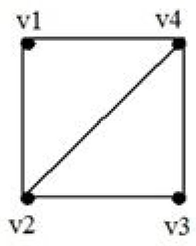


Figura 2.30: Grafo com 4 vértices

Analisando as soluções obtidas, observa-se que todos alunos conseguiram realizar essa representação. Observa-se que estavam motivados, uma vez que já tinham resolvidos outros problemas.

O estudante 02, usou a estratégia como apresenta a Figura 2.31. Pode-se observar que ele representou a matriz dentro de colchetes, identificando os seus elementos na linha que são v_1, v_2, v_3 e v_4 e na coluna que são v_1, v_2, v_3 e v_4. A resolução desta atividade foi rapidamente feita, indicando também a ordem da matriz.

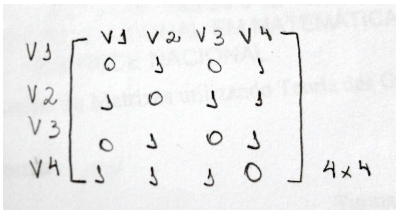


Figura 2.31: Atividade 1 - Solução apresentada pelo estudante 02

Resolução da atividade: A solução desse item é feito análogo ao item (a), a resposta encontra-se na Figura 2.31.

2.5.2. Atividade 2

Desenhe o grafo G que corresponde a cada uma das matrizes de adjacências seguintes:

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Analisando as soluções obtidas, pode-se observar que alguns alunos, a princípio, não tinham ideia de como fazer esse desenho, pois teriam que fazer o inverso do que eles estavam fazendo até o momento. Mas depois de algumas ideias discutidas entre discentes e a docente, chegaram ao mesmo resultado.

O estudante 04 usou a estratégia como apresenta a Figura 2.32. É possível observar que ele desenhou o grafo direcionado identificando os seus elementos, que são os vértices dados por v_1 e v_2 e sua aresta dada por v_1 - v_2, cuja resolução foi completamente realizada com o auxílio dos colegas.

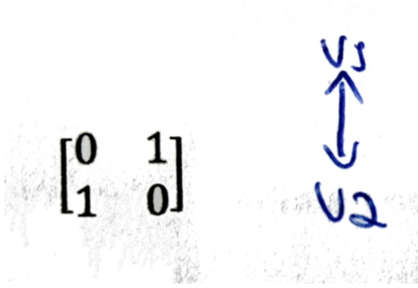


Figura 2.32: Atividade 1 - Estudante 04

Uma resolução da atividade: Para desenhar o grafo G que corresponde a matriz de adjacências dada, é preciso identificar que ela é uma matriz de adjacências quadrada 2×2. Dessa forma, o grafo associado deve possuir 2 vértices. Nesse caso ele terá direção, onde podemos expressar da forma $A \leftrightarrow B$.

Portanto, partindo de uma matriz de adjacências quadrada 2×2, o desenho do grafo G de 2 vértices é dado abaixo.

Figura 2.33: Grafo com 2 vértices

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observando as soluções obtidas, pode-se analisar que a maioria dos alunos, a princípio já tinham ideia de como fazer o desenho. Compreenderam o processo de realização no item anterior.

O estudante 03 usou a estratégia como apresenta a Figura 2.34, onde é possível observar que ele desenhou o grafo direcionado identificando os seus elementos que são os vértices dados por v_1, v_2 e v_3, suas aresta dadas por v_1 - v_2, v_1 - v_3 e v_2 - v_3.

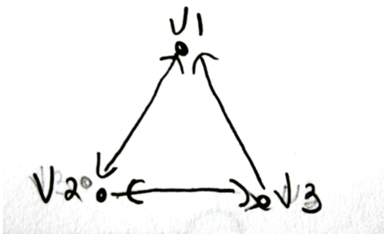


Figura 2.34: Atividade 1 - Solução encontrado pelo estudante 03

Resolução da atividade: A solução desse item é feito análogo ao item (a), a resposta encontra-se na Figura 2.34.

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Analisando as soluções obtidas, percebe-se que a maioria dos alunos já sabiam fazer o desenho. O estudante 02 usou a estratégia como apresenta a Figura 2.35. É possível observar que ele desenhou o grafo direcionado identificando os seus elementos que são os vértices dados por v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 suas aresta dadas por v_1 - v_2, v_1 - v_3, v_1 - v_4, v_1 - v_5, v_2 - v_3, v_2 - v_3, v_2 - v_4, v_3 - v_4, v_4 - v_5.

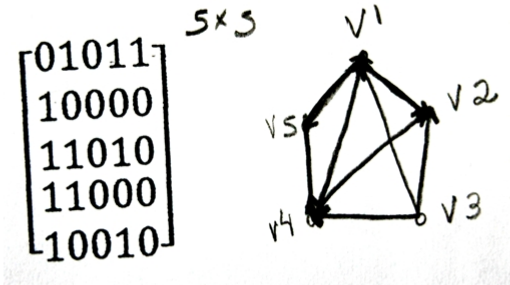


Figura 2.35: Atividade 1 - Solução proposta pelo estudante 02

Resolução da atividade: A solução desse item é feito análogo ao item (a), a resposta encontra-se na Figura 2.35.

2.5.3. Atividade 3

Uma certa família consiste de uma mãe, um pai, uma filha e dois filhos. Os membros da família exercem influência, ou poder, seguinte maneira: a mãe pode influenciar a filha e o filho mais velho; o pai pode influenciar os dois filhos; a filha pode influenciar o pai; o filho mais velho pode influenciar o filho mais novo; o filho mais novo pode influenciar a mãe. Se o membro da família A influencia o membro B, nós simbolizamos $A \longrightarrow B$. A Figura 2.36 é o grafo dirigido que resulta, onde usamos as letras M, P, FA, FV e FN para denotar a mãe, o pai, a filha, o filho mais velho e o filho mais novo, respectivamente.

Ache a matriz de adjacências $A = [a_{ij}]$ do grafo abaixo:

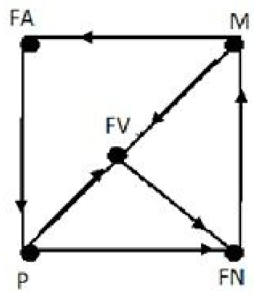


Figura 2.36: Grafo representando a estrutura de uma família

Observando as soluções realizadas pelos discentes, percebe-se que todos conseguiram realizar as atividades com facilidade.

O estudante 02 usou a estratégia apresentada na Figura 2.37. É possível observar que ele representou a matriz dentro do colchete identificando os seus elementos na linha que são M, P, FA, FV e FN e na coluna que são M, P, FA, FV e FN, cuja resolução desta atividade foi de imediato indicando até a ordem da matriz.

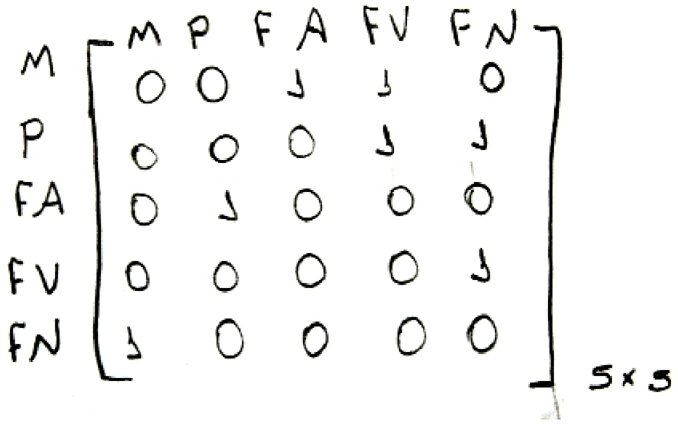


Figura 2.37: Atividade 1 - Estudante 02

Resolução da atividade

Vamos definir este padrão de influência familiar com um grafo dirigido cujos vértices são os cinco membros a família. Se o Membro da família A influencia o membro B, nós escrevemos $A \to B$. A figura é o grafo dirigido que resulta, onde usamos as letras M, P, FA, FV e FN para denotar a mãe, o pai, a filha, o filho mais velho e o filho mais novo, respectivamente. A matriz de adjacências de vértices deste grafo dirigido é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6. Aplicação multiplicação de matrizes com grafos

No quarto dia, 20 de outubro, as atividades propostas foram envolvidos os seguintes conteúdos: grafos, matrizes e multiplicação de matrizes. A aula foi iniciada com uma breve revisão explicando os conceitos de matrizes obtidas a partir de grafos, com exemplos associados ao cotidiano do aluno. Em seguida, os alunos desenvolveram as atividades em sala de aula sobre as representações de matrizes de adjacências do grafo dado e a operação dada em cada caso.

Figura 2.38: Alunos

Nas atividades que foram apresentadas neste dia, os alunos desenvolveram a capacidade de passar de uma representação para outra, de grafo para matriz de adjacência, fazendo com que o aluno seja capaz de percorrer com um caminho de comprimento 1 e um caminho de comprimento 2 por meio de um grafo direcionado, efetuar a multiplicação de matrizes e comparar com caminho de comprimento 2, ou seja, ao multiplicar a mesma matriz do grafo com apenas um caminho de comprimento 1 duas vezes é o mesmo que obter uma matriz do grafo percorrendo um caminho de comprimento 2. Sendo que o objetivo alcançado é calcular, comparar e utilizar o ensino de matrizes aos diversos termos associados a grafos.

Poucos alunos apresentaram dificuldades em compreender e fazer as atividades como percorrer com dois passos no grafo, no inicio eles já sabiam como resolver com um passo, a maioria conseguiam assimilar a operação de matrizes envolvendo grafos. Portanto, os alunos ficaram empenhados em resolvê-las, uma vez que já tinham o conhecimento prévio de aulas anteriores. Para verificação de aprendizagem, as atividades foram corrigidas no quadro, onde uma aluna se propôs a resolver uma questão, dando sua resposta com a ajuda da professora.

(a) Realizando o grafo de 2 vértices. (b) Realizando o grafo de 4 vértices.

Figura 2.39: Alunas efetuando as multiplicação de matrizes.

Para finalizar, outra aluna se propôs a resolver uma questão envolvendo um grafo de 4 vértices, efetuando suas operações com matrizes, dando sua resposta com a ajuda da professora. Com isso, houve a percepção de que a aluna ficou bastante motivada.

2.6.1. Atividade 1

Construa a matriz de adjacências do grafo dirigido ilustrado na figura dada:

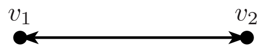


Figura 2.40: Grafo com 2 Vértices

a) A matriz M para caminhos de comprimento 1:

Observando as soluções realizadas pelos discentes, verifica-se que todos obtiveram sucesso na resolução. Analisando a atividade do estudante 01, que usou a estratégia apresentada na Figura 2.41, é possível observar que ele representou a matriz corretamente.

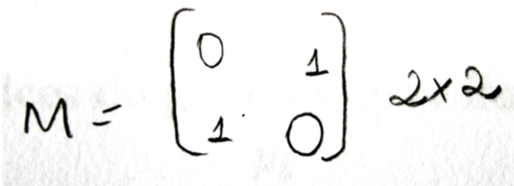


Figura 2.41: Atividade 1 - Solução proposta pelo estudante 01

Uma resolução da atividade: Seja G o grafo orientado com 2 vértices de acordo com a Figura 2.40 e que os vértices de G tenham sido ordenados e são denominados v_1 e v_2. Então, a matriz de adjacências $M = [m_{ij}]$ do grafo G de caminhos de comprimento 1 é a matriz 2×2 definida como:

Note que $m_{11} = 0$ dá o número de caminhos de comprimento 1 do vértice v_1 para o vértice v_1, $m_{12} = 1$ dá o número de caminhos de comprimento 1 do vértice v_1 para o vértice v_2, $m_{21} = 1$ dá o número de caminhos de comprimento 1 do vértice v_2 para o vértice v_1, $m_{22} = 0$ dá o número de caminhos de comprimento 1 do vértice v_2 para o vértice v_2.

Portanto, a matriz M de adjacência é dada por:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) A matriz N para caminhos de comprimento 2:

Analisando as soluções obtidas, alguns alunos conseguiram realizar com uma certa dificuldade essa representação, pois teriam que percorrer dois passos. Porém, como tinha que pensar mais precisaram do apoio da professora para chegar ao resultado final.

O estudante 02 usou a estratégia como apresenta a Figura 2.42, onde observa-se que ele representou a matriz de modo correto.

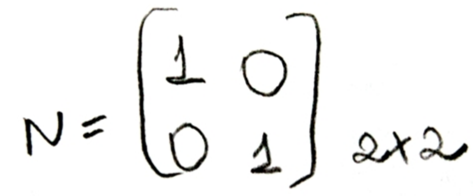


Figura 2.42: Atividade 1 - Estudante 02

Uma resolução da atividade: Seja G um grafo orientado simples com 2 vértices de acordo com a Figura 2.40, e que os vértices de G tenham sido ordenados e são denominados v_1 e v_2. Então, a matriz de adjacências $N = [n_{ij}]$ do grafo G com número de caminhos de comprimento 2 é a matriz 2×2 definida como:

n_{ij} = número caminhos comprimento 2 de v_i a v_j

Pode se mostrar que n_{ij} dá o número de caminhos de comprimento 2 do vértice v_i para o vértice v_j.

Observe que $n_{11} = 1$, pois existe um caminho de comprimento 2 de v_1 para v_1, $n_{12} = 0$, não existe um caminho de comprimento 2 de v_1 para v_2, $n_{21} = 0$, pois não existe um caminho de comprimento 2 de v_2 para v_1, $n_{22} = 1$, existe um caminho de comprimento 2 de v_2 para v_2.

Logo a matriz não é de adjacências é dada por:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Encontre a matriz M^2 e compare com o item b:

Observando as atividades, é possível verificar que todos os alunos realizaram a operação citada. A resolução da questão foi realizada quase que imediato, alguns colocaram somente o resultado total. Todos acharam que a resolução do problema foi similar com o que o professor já havia dado em outras atividades.

Olhando para atividade do estudante 02, que usou a estratégia como apresenta a Figura 2.43, que resolveu a atividade detalhadamente como que forma sua resolução, adquirindo o resultado final.

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 2.43: Atividade 1 - Resolução encontrado pelo estudante 02

Uma resolução da atividade: Seja M_{ij}, a matriz de adjacências de um grafo G. Então M_{ij}, o ij-ésimo elemento da matriz M^2, dá o número de comprimento 2 por meio de caminhos de v_i para v_j em que $i, j \in \{1, 2\}$.

Seja a matriz M dada por:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando $M^2 = M.M$ temos que:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Também foram aplicadas atividades com 3 vértices e 4 vértices. As resoluções dos itens a, b e c são idênticas à resolução da atividade descrita em2.6.1 para fixação do conteúdo abordado.

2.7. Aplicação multiplicação de matrizes obtidas a partir de grafos e tecnologias

No quinto dia, 27 de outubro, a aula foi iniciada com aplicações práticas na sala de aula através do data show. Foi introduzido o sítio https://matrixcalc.org/pt/, que se trata de uma página por meio da internet de navegação, onde que é representado por uma calculadora de matrizes que faz operações envolvendo matrizes. Logo após, foi explicado como utilizar a página, citando cada passo, como inserir dados e efetuar as multplicações de matrizes.

Figura 2.44: Explicação da utilização do sítio https://matrixcalc.org/pt/

Nas atividades que foram apresentadas neste dia, para encontrar a matriz M^2, que a atividade envolvendo 3 vértices os alunos desenvolveram a capacidade de efetuar a multiplicação de matrizes utilizando os diversos termos associados a grafos.

Buscando reforçar mais a aprendizagem, foi proposto aos alunos que tinham celulares com internet para entrar no endereço e efetuarem as operações supracitadas. Houve participação da maioria deles, que realizaram a atividade com êxito.

Figura 2.45: Aluna utilizando o celular

Neste dia, foram utilizadas as atividades da aula anterior: "Aplicação Multiplicação de Matrizes com Grafos", especificamente as atividades 1, 2 e 3 (c), mas será mostrada a atividade 2 que é dada pelo grafo de 3 vértices.

2.7.1. Atividade 2

Foram realizadas as multiplicações de matrizes de vértices do grafo dirigido ilustrado de acordo com a Figura 2.46.

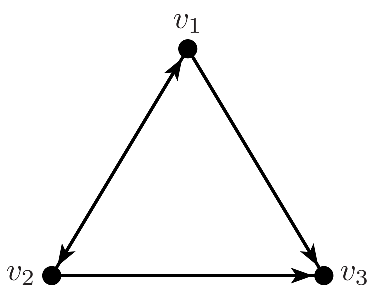
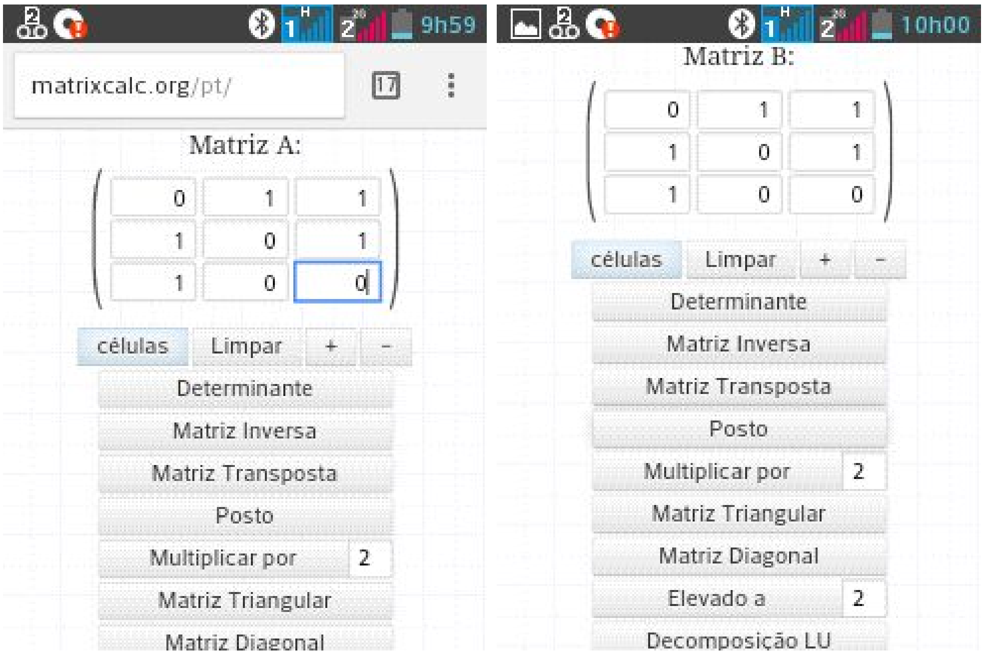


Figura 2.46: produto

c) Encontre a matriz M^2.

Observando a resolução do item c, é possível verificar que a maioria dos alunos participaram com a resolução do problema exposto. A matriz foi inserida na página https://matrixcalc.org/pt/, em que foi mostrado como encontrar a resolução do problema através do data show e da partipação de alguns alunos com o uso do celular.

O estudante 10 usou a estratégia colocando passo a passo como inserir uma matriz no programa e como obter sua resolução, adquirindo o resultado final.



(a) matriz M. (b) matriz M.

Figura 2.47: Multiplicação da matriz $M.M$

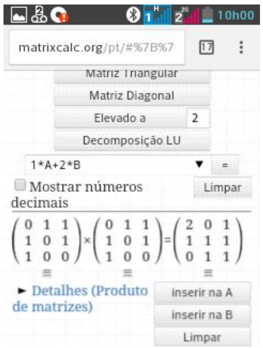


Figura 2.48: Produto

Também foram aplicadas as atividades 1 e 3, realizadas pelos alunos de modo análogo com a atividade 2.

Percebe-se que os alunos ficaram empenhados e motivados, durante as realizações das atividades propostas, conseguiram fazer a escolha do melhor caminho, partindo de um grafo fazer sua representação em forma de matrizes e calcular a multiplicação de matrizes com muito interesse, procurando sempre comparar com a realidade do seu cotidiano.

Considerações finais

Ao finalizar o conteúdo ministrado, foi realizada uma outra metodologia por meio de questionários, onde os alunos responderam sobre o que acharam das atividades propostas.

Por meio do relato de experiência, foi possível verificar que o conhecimento matemático adquirido durante as atividades propostas contribuíram para o processo ensino-aprendizagem dos estudantes, pois propiciou-lhes uma melhor forma de estudar e interpretar uma situação problema.

É costume, na matemática, para maioria dos estudantes, decorar fórmulas e fazer cálculos que são úteis apenas para cumprir o cronograma da grade curricular impostas pelos sistemas de ensino. Com isso, os conhecimentos adquiridos por eles muitas vezes são esquecidos após a realização das atividades avaliativas. Dessa forma, o ensino de matrizes utilizando a teoria dos grafos, se for bem aplicado em sala de aula, proporcionará um conhecimento contextualizado dos conteúdos propostos.

De acordo com o estudante 1, a aprendizagem pode ser reforçada, "[...] Pois a partir dessas atividades pode reforçar para ela mesma que matemática não é somente cálculos, mas sim um minuncioso processo de observação".

Desse modo, as atividades foram realizadas pelos alunos, exceto poucas questões, onde que tiveram ajuda dos professores, pois acharam mais trabalhosas. Cabe observar que a resolução de um problema depende do conhecimento do dia a dia que o aluno tem acerca dos conteúdos referentes a proposta mencionada.

Alguns alunos falaram que a proposta equiparou e ajudou com o conteúdo que estavam estudando com o professor em sala de aula. Diante disso, conforme o estudante 2 expõe, o conhecimento adquirido desenvolve em seu processo de ensino aprendizagem "[...] Pois facilita muito o conteúdo que estamos estudando nos dá um melhor conhecimento sobre matrizes".

Vale também mostrar a importância do professor como orientador para sanar às dúvidas dos discentes. Desse modo eles acharam que as atividades propostas foram possíveis de resolvê-las por mais amplas que fossem as situações problemas propostas pelo professor. O ensino de grafos é um instrumento capaz de promover um verdadeiro conhecimento matemático. À respeito da dificuldade na realização das atividades, o estudante 3 fala que "Achei muito interessante, porque comecei a me desenvolver na matéria".

Também de acordo com eles, a aprendizagem pode contribuir nos estudos de matrizes, pois compreenderam que se pode aprender conteúdos mais avançados a partir de conceitos simples. As atividades possibilitaram uma revisão de conteúdos importantes, intermediando uma preparação para outras avaliações que os alunos pretender fazer como ENEM, olimpíadas de matemática e vestibulares. Como o estudante 4 expõe que "Achou interessante, pois serve para muitas coisas, principalmente para o ENEM".

Verifica-se as possibilidades do uso do conhecimento adquirido durante a resolução do problema; pode-se observar que os alunos perceberam que o conhecimento adquirido poderia ser utilizadas em várias situações do seu dia a dia que envolvessem os conteúdos estudados. De acordo com o estudante 5, o conhecimento pode ser utilizado em questões "Como influênciar uma pessoa, como entender um mapa, como um filme é montado, pontos estratégicos, como verificar quais são as direções possíveis".

É sempre possível melhorar uma aula, dessa forma os alunos que participaram da realização das atividades fizeram algumas críticas ou sugestões que possam contribuir para as atividades e para o processo de ensino-aprendizagem. Por exemplo o estudante 6 relata que "Primeiramente o docente tem que trazer mais novidades dentro do conteúdo aplicado para fazer o aluno focar nas explicações, mostrar vídeos aulas, mostrar mais a prática e ser interativo". Já o estudante 5 ressalta que "Passar mais vídeos, filmes, histórias sobre os assuntos, etc...".

Veja que a maioria dos alunos se adaptaram ao ensino de matrizes por meio de grafos, através da visualização gráfica de um desenho que é muito importante, facilitando a compreensão e o conhecimento do ensino de matrizes. Quando perguntado qual metodologia preferiam, segundo o estudante 1, "Com grafos, porque por meio deles entende-se melhor a estrutura das matrizes e possibilita o surgimento de discussões que chamam a atenção dos alunos". Já o estudante 7 ressalta que, "Por meio de grafos por melhor entendimento por usar imagem".

O ensino de matrizes utilizando a teoria dos grafos foi muito importante para o resultado dos alunos na realização das atividades propostas, pois estabelece uma metodologia de ensino que direciona os alunos na resolução dos problemas, gerando um padrão ao se aprender conteúdos matemáticos de forma real e positiva.

Verifica-se que a proposta exposta é realmente válida e que alcançou o objetivo almejado, possibilitando no processo ensino e aprendizagem de forma expressiva, tirando da cabeça dos alunos os "porquês" da matemática, dando um significado de acordo com a realidade deles, tornando o ensino de matrizes algo interessante e apreciável.

No futuro, para adequar ainda mais esta proposta pedagógica, sugere-se aos docentes que trabalhem com os alunos os conceitos de grafos e utilizem em suas aulas novas tecnologias tais como: data-show, notebook e caixa de som, transmitindo vídeos e aplicativos matemáticos que tornam as aulas mais práticas e atrativas para os alunos. Outra pespectiva: existem diversos aplicativos, dentre eles destacamos o Matrixcalc que dentro da proposta nos permite calcular as operações de matrizes. Por meio desse método podemos expandir as possibilidades de ensino e aprendizagem do ensino de matrizes utilizando grafos.

Deve-se ressaltar que todos os alunos participantes da execução do ensino de matrizes conseguiram resolver os problemas matemáticos propostos. Observando que o ensino supracitado foi compreendido e executado com êxito, em todas as etapas, pela maioria dos alunos, mostrando que sua utilização como metodologia proporciona uma aprendizagem real dos conteúdos matemáticos, pois, o aluno terá mais que um conhecimento matemático, ele construirá um pensamento crítico e lógico que será primordial na sua vida social, contribuindo para futuras escolhas.

Neste raciocínio, sabe-se que novos conhecimentos são sempre adquiridos: pode-se verificar que qualquer metodologia que o professor use pode ser adaptada à realidade dos alunos. É muito importante ressaltar que os professores devem estar sempre à procura de novas tecnologias, como por exemplo, o programa matrixcalc, para o ensino da matemática, além de buscar o maior número de recursos para isso.

Presume-se que este trabalho sirva de motivação para o início de um estudo acurado do ensino de matrizes utilizando teoria dos grafos e que essa proposta seja trabalhada por outros educadores com o uso de programas e aplicativos na área da matemática, com o objetivo de melhorar a qualidade de ensino nas unidades educacionais.

Também futuramente, podem ser trabalhadas arestas paralelas de um grafo, laço, multígrafo (arestas múltiplas) e adição de matrizes utilizando grafos, abordando várias dimensões de acordo com o estudo desenvolvido em matriz de adjacências.

Referências Bibliográficas

ANTON, H., RORRES, C., e DOERING, C. I. (2001). Álgebra linear com aplicações. *8ª edição. Porto Alegre: Bookman.*

BARROSO, J. M. et al. (2010). *Conexões com a Matemática. 1ª edição*, volume 2. Moderna, São Paulo.

BOYER, C. B. (1996). História da matemática. 2ª edição–tradução: Elza f. *São Paulo: Edgard Blücher LTDA.*

BRASIL, M. (2002). Pcn+ do ensino médio: orientações educacionais complementares aos pcn. *Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC*, páginas 87–111.

CARDOSO, C. d. S. e MATOS, F. A. d. (2014). Grafos eulerianos e aplicações em sala de aula.

CAYLEY, A. (1858). A memoir on the theory of matrices. *Philosophical transactions of the Royal society of London*, 148:17–37.

DANTE, L. R. (2005). Matemática: vol. único. *1ª edição. São Paulo: Ática.*

DUTRA, E. E. M. E. G. (2016). Projeto político pedagógico.

FERREIRA, A. B. d. H. (1992). Minidicionário aurélio. *Rio de Janeiro: Nova Fronteiro.*

GERSTING, J. L. (2004). Fundamentos matemáticos para a ciência da computação: um tratamento moderno de matemática discreta. *5ª edição. Rio de Janeiro: LTC.*

GROSSO, M. (2016). Secretaria de estado de educação. *Escola Ciclada de Mato Grosso.*

GUALANDI, J. H. (2012). Investigações matemáticas com grafos para o ensino médio. Dissertação de Mestrado, Belo Horizonte.

HEFEZ, A. e Fernandez, C. d. S. (2012). Introdução à álgebra linear. *Rio de Janeiro: SBM.*

IEZZI, G. et al. (2004). Matemática - ciência e aplicações, 9ª edição. *2º ano. São Paulo: Scipione.*

IEZZI, G. et al. (2007). Fundamentos da matemática elementar. volume 4. *2ª edição. São Paulo: Atual.*

JURKIEWICZ, S. (2007). Grafos: Uma introdução. *Rio de Janeiro: SBM.*

LIPSCHUTZ, S. LIPSON, M. (2004). Teoria e problemas de matemática discreta. *2ª edição. Porto Alegre: Bookman.*

MALTA, G. H. S. (2008). *Grafos no Ensino Médio: uma inserçao possível.* Tese de Doutorado, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL.

NETTO, P. O. B. (1979). *Teoria e modelos de grafos.* São Paulo: E. Blücher.

PAIVA, M. (1999). Coleção base: matemática. volume único. *São Paulo: Moderna.*

RIBEIRO, J. (2007). Matemática–ciência e linguagem. *Volume 2 São Paulo: Editora Scipione.*

SOARES, E. S. (2009). Ensinar matemática: desafios e possibilidades. *Belo Horizonte: Dimensão.*

Apêndices: Atividades aplicadas e questionário

.

Universidade Federal de Mato Grosso
Campus Universitário do Araguaia
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

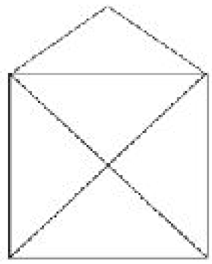
O Ensino de Matrizes utilizando Teoria dos Grafos

Suelma Luiza Alves de Souza

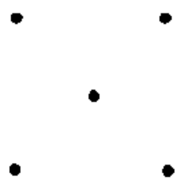
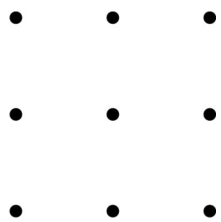
Nome: ____ Turma: _______

1ª Atividade (melhor caminho)

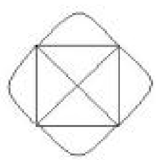
1) Desenhe uma casa igual a esta sem tirar o lápis do papel, e sem passar duas vezes pelo mesmo lugar.



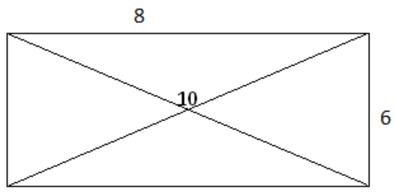
2) Ligue todos os pontos sem tirar o lápis do papel usando apenas 4 segmentos:

a)  b) 

3)Deve-se passar sobre as linhas sem passar duas vezes pela mesma linha e sem levantar a caneta ou o lápis.

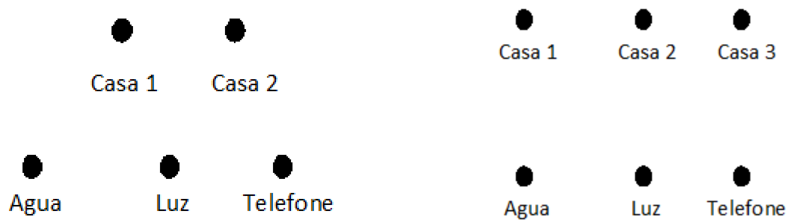


4) Qual é a menor distância que deve percorrer a ponta de um lápis de modo que cubra toda a figura?



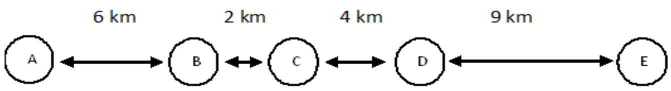
5) Em cada caso, veja se é possível fazer as ligações de água, luz e telefone nas respectivas casas, de modo que essas ligações não se cruzem nenhum momento.

a)b)

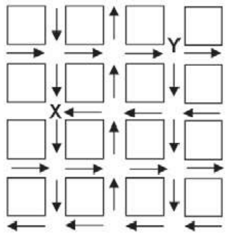


6) (Olimpíadas de matemática prova fase 1 nível 2 2007) José e seus parentes moram em algumas cidades A, B, C, D e E, indicadas na figura com as distâncias entre elas. Ele saiu de sua cidade e viajou 13 km para visitar seu tio, depois mais 21 km para visitar sua irmã e, finalmente, mais 12 km para ver sua mãe. Em qual cidade mora a mãe de José?

a) A b) B c) C d)D e) E



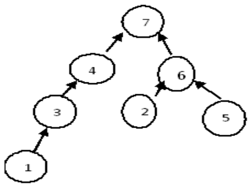
7) (Enem 2009) O mapa abaixo representa um bairro de determinada cidade, no qual as flechas indicam o sentido das mãos do tráfego. Sabe-se que esse bairro foi planejado e que cada quadra representada na figura é um terreno quadrado, de lado igual a 200 metros.



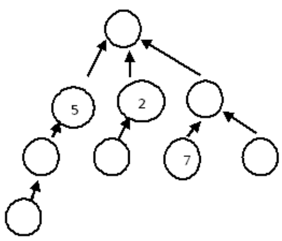
Desconsiderando-se a largura das ruas, qual seria o tempo, em minutos, que um ônibus, em velocidade constante e igual a 40 km/h, partindo do ponto X, demoraria para chegar até o ponto Y?

A) 25 min. B) 15 min.C) 2,5 min.D) 1,5 min.E) 0,15 min.

8) (Olimpíadas de matemática prova fase 2 nível 1 2008) Os círculos da figura abaixo foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontamde um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi bem preenchida.



Complete a figura abaixo com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.



Universidade Federal de Mato Grosso
Campus Universitário do Araguaia
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

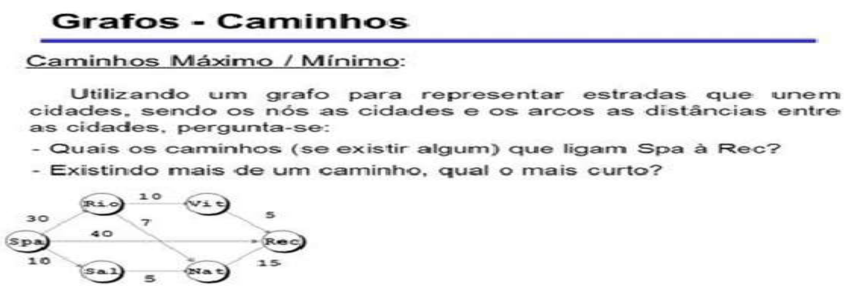
O Ensino de Matrizes utilizando Teoria dos Grafos

Suelma Luiza Alves de Souza

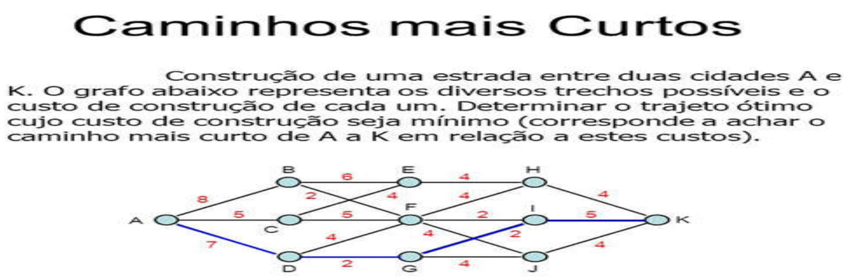
Nome: ____ Turma: _______

1ª Atividade (melhor caminho)

1)

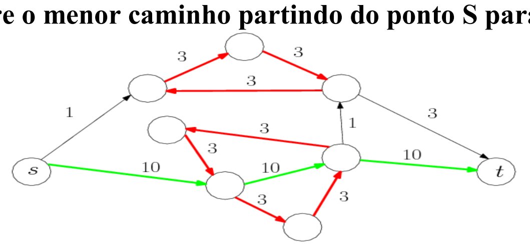


2)

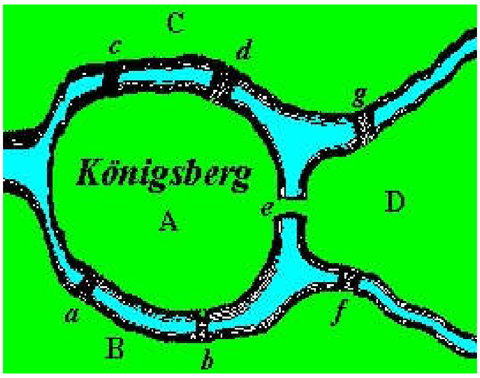


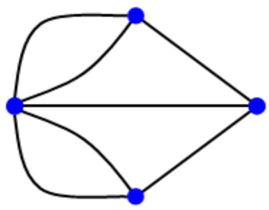
3)

Encontre o menor caminho partindo do ponto S para chegar ao ponto T.



4) Seria possível fazer um passeio a pé pela cidade de forma a se passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto de partida?





Universidade Federal de Mato Grosso
Campus Universitário do Araguaia
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

O Ensino de Matrizes utilizando Teoria dos Grafos

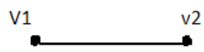
Suelma Luiza Alves de Souza

Nome: ____ Turma: _______

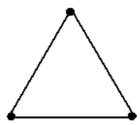
2ª Atividade (Ensino de matrizes utilizando grafos)

1) Ache a matriz de adjacências A= $[a_{ij}]$ do grafo de cada figura:

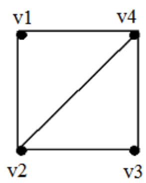
a)



b)



c)



2) Desenhe o grafo G que corresponde a cada uma das matrizes de adjacências seguintes:

a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

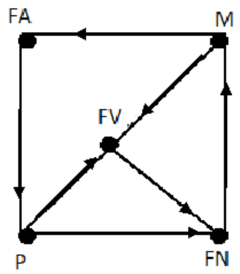
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 01011 \\ 10000 \\ 11010 \\ 11000 \\ 10010 \end{bmatrix}$$

3) Uma certa família consiste de uma mãe, um pai, uma filha e dois filhos. Os membros da família exercem influencia, ou poder, seguinte maneira: a mãe pode influenciar a filha e o filho mais velho; o pai pode influenciar os dois filhos; a filha pode influenciar o pai; o filho mais velho pode influenciar o filho mais novo; o filho mais novo pode influenciar a mãe. Se o membro da família A influencia o membro B, nós escrevemos A $\rightarrow$ B. A figura abaixo é o grafo dirigido que resulta, onde usamos as letras M,P, FA, FV e FN para denotar a mãe, o pai, a filha, o filho mais velho e o filho mais novo, respectivamente.

Ache a matriz de adjacências A= $[a_{ij}]$ do grafo abaixo:



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Campus Universitário do Araguaia
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

O Ensino de Matrizes Utilizando Teoria dos Grafos

Nome: ______________________________ Turma: ____

3ª Atividade (Multiplicação de matrizes)

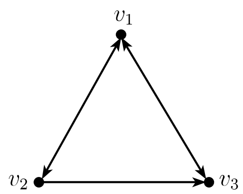
1. Construa a matriz de vértices do grafo dirigido ilustrado na figura dada:

a) A matriz M para um passo:

b) A matriz N para dois passos:

c) Encontre a matriz M^2 e compare com o item a:

2. Construa a matriz de vértices do grafo dirigido ilustrado na figura dada:

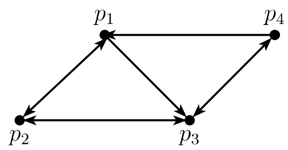


a) A matriz M para um passo:

b) A matriz N para dois passos:

c) Encontre a matriz M^2 e compare com o item a:

③ Construa a matriz de vértices do grafo dirigido ilustrado na figura dada:



a) A matriz M para um passo:

b) A matriz N para dois passos:

c) Encontre a matriz M^2 e compare com o item a:

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO		
UFMT	Campus Universitário do Araguaia Instituto de Ciências Exatas e da Terra MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL	PROFMAT
O Ensino de Matrizes Utilizando Teoria dos Grafos		

Nome: ______________________________ Turma: ____

Questionário Avaliação

1 O conhecimento matemático adquirido durante as atividades propostas contribuíram para o seu processo ensino aprendizagem? Por quê?

2 Na sua avaliação, o que você achou das atividades propostas?

3 Cite algumas situações do dia a dia que você poderá utilizar o conhecimento adquirido.

4 Quais são as suas críticas ou sugestões que possam contribuir para as atividades e para o processo de ensino - aprendizagem?

5 Como vocês preferem o ensino de matrizes? Com grafos ou por meio tradicional?