

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

*Geometria das dobraduras e
aplicações no Ensino Médio*

Ana Cecília Del Moro
Dissertação de Mestrado

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Ana Cecília Del Moro

Geometria das dobraduras e aplicações no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves

USP – São Carlos
Julho de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D331g Del Moro, Ana Cecília
Geometria das dobraduras e aplicações no Ensino
Médio / Ana Cecília Del Moro; orientador Alexandre
Casassola Gonçalves. -- São Carlos, 2017.
60 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Dobradura. 2. Axiomas de Huzita-Atori. 3.
Construções geométricas. I. Casassola Gonçalves,
Alexandre, orient. II. Título.

Ana Cecília Del Moro

The geometry of paper foldings and applications to the High
School level

Master dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-
USP, in partial fulfillment of the requirements for the
degree of Mathematics Professional Master's Program.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves

USP – São Carlos
July 2017

“Poderoso é o sol da verdade.”
Eurípedes Barsanulfo

Dedico este trabalho a todos os educadores e matemáticos que se encantam com a arte de ensinar e se alegram ao ver o brilho nos olhos de seus alunos ao descobrirem o maravilhoso mundo da matemática, no qual a lógica, a natureza e a arte interagem harmoniosamente.

Agradecimentos

Agradeço aos meus queridos pais Cidinha (in memorian) e Marino, meus primeiros mestres, exemplos de honestidade, dedicação e amor, que me apoiaram em todos os momentos. Graças a vocês (papai e mamãe), hoje sou educadora.

Agradeço aos meus irmãos Guto, Velená, Xandre, Jael (in memorian) e Raquel por serem essa família maravilhosa, exemplos de união e irmandade.

Agradeço à Tânea, irmã de coração, que me sustentou o ânimo sempre que as dificuldades apareceram e que, no dia a dia de nossa convivência, fortaleceu o meu amadurecimento.

Agradeço aos meus evangelizadores: Ana Maria, Célia Regina e Fernando Jorge. Nossas conversas sinceras, carregadas de afeto, despertaram em mim minhas capacidades para concluir este trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Alexandre Casassola, por ter dividido comigo suas experiências de professor, educador, orientador e amigo, contribuindo com minha formação profissional e pessoal.

Agradeço a Alzira Amui e a Eurípedes Barsanulfo pela Educação através da Metodologia do Amor, que vivencio e que me fortalece todos os dias.

Graças a todos citados e a muitos outros amigos não citados, finalizo este simples trabalho com muita alegria.

RESUMO

DEL MORO, A. C. **Geometria das dobraduras e aplicações no Ensino Médio**. 2017. 60 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Este trabalho tem como foco a dobradura em sala de aula, auxiliando o professor em sua prática docente. Com dobras simples de serem realizadas a dobradura pode auxiliar o aluno a desenvolver a concentração, estimular a criatividade, concretizar uma ideia ou pensamento no momento em que surge a forma no papel e, conseqüentemente, o aluno interioriza o aprendizado desejado. Os tópicos estudados versam sobre a construção dos principais polígonos regulares e de um sólido espacial, o tetraedro. São também estudadas algumas aplicações aritméticas, como divisão de segmentos e raízes quadradas e cúbicas.

Palavras-chave: Dobradura, Axiomas de Huzita-Atori, Construções geométricas.

ABSTRACT

DEL MORO, A. C. **The geometry of paper foldings and applications to the High School level.** 2017. 60 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

This work aims to study the activity of paper folding in the classroom as an auxiliary resource for the teacher. The folders are quite simple and will improve the students' skills on concentration, creativity, and the ability to realize on paper his/her thoughts and ideas. The covered topics range from the construction of the main regular polygons, a spatial solid (tetrahedron), through some arithmetic applications, like division of a segment and square and cubic roots.

Keywords: Paper foldings, Huzita-Hatori axioms, geometric constructions.

Sumário

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	ix
Introdução	xiii
Capítulo 1. Os Axiomas de Huzita-Hatori	1
Capítulo 2. Polígonos Regulares	7
2.1 O que são polígonos regulares	7
2.2 Triângulo Equilátero	10
2.3 Quadrado	14
2.4 Hexágono	15
2.5 Octógono	19
Capítulo 3. Os Segredos do Pentágono	25
3.1 Pentágono Regular - razão áurea	25
3.2 Pentágono - primeira dobradura	27
3.3 Pentágono - segunda dobradura	32
3.4 Pentágono - terceira dobradura	34
Capítulo 4. Construção do tetraedro (tridimensional)	39
Capítulo 5. Dobraduras e Aritmética	46
5.1 Dobradura e Divisão por “ n ”	46
5.2 Dobradura e Progressão Geométrica	49
5.3 Dobradura e Raiz Quadrada	52
5.4 Dobradura e Raiz Cúbica	54
Bibliografia	60

Lista de Figuras

1.1	Huzita-1.	2
1.2	Huzita-2.	3
1.3	Huzita-3.	3
1.4	Huzita-4.	3
1.5	Huzita-5.	4
1.6	Equivalente euclidiano ao axioma Huzita-5	4
1.7	Huzita-6.	5
1.8	Huzita-7.	5
1.9	Equivalente euclidiano ao axioma Huzita-7.	6
2.1	Losango.	8
2.2	Retângulo.	8
2.3	Pentágono regular.	9
2.4	Pentágono com lados diferentes.	9
2.5	Pentágono com ângulos diferentes.	9
2.6	Retângulo.	10
2.7	Dobra EF	10
2.8	Dobra BG	11
2.9	Dobra HG	11
2.10	Ângulo $H\hat{I}B$	12
2.11	Ponto I	12
2.12	Ângulo $G\hat{B}H$	13
2.13	Triângulo equilátero.	13
2.14	Dobra BF e segmento EF	14
2.15	Quadrado.	14
2.16	Ângulos \hat{C} e \hat{D}	15
2.17	Triângulo equilátero.	15

2.18	Corte do triângulo.	16
2.19	Segmento GJ	16
2.20	Dobra HK	17
2.21	Segmento LB	17
2.22	Dobra dos vértices até o centro.	17
2.23	Ângulos $Q\hat{P}G$ e $P\hat{Q}G$	18
2.24	Ângulos internos em P e Q	18
2.25	Hexágono Regular.	19
2.26	Quadrado.	19
2.27	Dobra em BF	20
2.28	Dobra em EG	20
2.29	Dobra em HG	20
2.30	Pontos I e J	21
2.31	Octógono regular.	21
2.32	Diagonais do quadrado.	21
2.33	Bissetriz do ângulo $E\hat{G}F$	22
2.34	Bissetrizes dos ângulos $E\hat{G}H$ e $F\hat{G}H$	22
2.35	Octógono com lados congruentes.	23
3.1	Diagonais e lados do pentágono.	26
3.2	Pentágono Inscrito.	26
3.3	Ponto B'	26
3.4	Quadrado $ABCD$	27
3.5	Segmento EF	28
3.6	Dobra BF	28
3.7	Dobra GF	29
3.8	Quadrado aberto com dobra em BH	29
3.9	Segmento OO'	30
3.10	Ponto P	30
3.11	Ponto Q	30
3.12	Encontrando os pontos V e R	31
3.13	Pentágono regular.	31

3.14	Dobra e segmento BO .	32
3.15	Dobra e segmento EH .	32
3.16	Dobra KQ .	33
3.17	Dobra bissetriz de $F\hat{K}Q$.	33
3.18	Dobra bissetriz de $E\hat{K}P$.	33
3.19	Corte sobre FP .	34
3.20	Pentágono obtido (2ª dobradura).	34
3.21	Nó e pentágono.	35
3.22	Ângulos congruentes e triângulo isósceles.	35
3.23	Triângulos congruentes.	35
3.24	Diagonais.	36
3.25	Diagonais e ângulos congruentes.	36
3.26	Ângulos congruentes.	36
3.27	Ângulos internos congruentes.	38
4.1	Triângulo equilátero.	39
4.2	Dobra da altura AD .	39
4.3	Alturas BE e CF .	40
4.4	Dobra em EF .	40
4.5	Sobreposição BC com FE .	41
4.6	Divisão da altura AD .	41
4.7	Alturas divididas.	41
4.8	Triângulos equiláteros e vincos.	42
4.9	Colapso dos lados de ABC .	42
4.10	Embrulhando a pirâmide.	42
4.11	Tetraedro realizado.	43
4.12	Segmentos paralelos a BC .	44
4.13	Faces do tetraedro.	44
5.1	Segmento AD .	47
5.2	Dobra EF .	47
5.3	Diagonal AC .	47

5.4	Segmento GH .	48
5.5	Segmento TU .	48
5.6	Segmento $T'U'$ e divisão.	49
5.7	Dobras EF e GH .	50
5.8	Pontos U e A_1 .	50
5.9	Dobra sobre UA_1 .	50
5.10	Dobra sobre A_1A_2 .	51
5.11	Dobra sobre A_2A_3 .	51
5.12	Pontos E e F .	52
5.13	Segmentos GE e HF .	52
5.14	Corte em HF .	53
5.15	Segmento JI .	53
5.16	Ponto F' e raiz quadrada.	54
5.17	Triângulo Retângulo.	54
5.18	Pontos E e F .	55
5.19	Segmentos GF e HE .	55
5.20	Pontos I e J .	55
5.21	Segmentos JK e IL .	56
5.22	Dobra do axioma 6.	56
5.23	Reta t e pontos P e Q .	57
5.24	Ângulos retos.	57
5.25	Triângulos semelhantes.	57

Introdução

No trabalho de docência, vivenciamos, diariamente, a maravilhosa e árdua tarefa de ensinar. Consideramos árdua, porque cada aluno possui um mundo íntimo diferenciado, solicitando do professor estímulos variados para que possa atender a todos. Como coloca Alzira em [3]:

Ensinar não é um processo simples. Requer experiência e habilidades especiais, principalmente quando o educador souber compreender a riqueza que o processo oferece.

Ao ensinar a um aluno, estamos trabalhando com seu pensamento. Por isso, não basta transmitir apenas conhecimentos, é necessário descobrir o caminho que direciona aquele aluno a construir o **seu** conhecimento.

A aprendizagem é realizada, de forma clara, criativa e com expansão do pensamento. Para que isso aconteça, é preciso que o educador não perca a cadência do estímulo, promovendo meios para que o educando pense e busque respostas coerentes com o que está sendo ensinado [3].

Cadência do estímulo: é importante que o professor estimule constantemente seu aluno a pensar, para isso é preciso espaço, para que o aluno participe, erre, corrija, acerte, crie e *expanda seu pensamento*.

Mas, muitas vezes, ansioso com o cumprimento do conteúdo curricular, o professor se esquece da *riqueza* que é o processo de ensinar, que envolve etapas importantes como ***observar, comparar, sentir, vivenciar, concluir e formular resultados***. Se lembrarmos o processo pelo qual os matemáticos descobriram os teoremas, verificaremos que eles seguiram um caminho bem próximo do que escrevemos acima e a proposta é que o aluno reconstrua esse caminho para que o aprendizado se faça nele, para que aprender seja, acima de tudo, uma grande descoberta.

Observar:

Não basta olhar e nem tocar; é importante que a criança seja estimulada para que compreenda o que lhe está sendo pedido. Para observar, é preciso ter estímulo e atenção. O educador não deve solicitar muitas informações ao mesmo tempo. É preciso aprender a olhar, descobrir, para depois se discutir as informações recebidas [3].

Quando o pensamento é valorizado pela observação, há formação de novas imagens e ideias. Esse trabalho deve ser realizado, muitas vezes, por meio de repetições contínuas e prazerosas, incorporando sempre novas observações [3].

Toda descoberta da Matemática se inicia na observação (de necessidades, de padrões, da natureza, etc), e cabe ao professor estimular o aluno a observar, explorar, ser curioso, estar atento ao que lhe rodeia.

Comparar:

Estimular a criança a perceber as diferenças que ela encontrar durante a observação, para que ela possa desenvolver um pensamento comparativo. É fundamental, nessa fase, o reconhecimento

do igual e do diferente. Para fazer essa distinção, é preciso atenção até mesmo quanto aos detalhes perceptivos que, muitas vezes, não são trabalhados, o que exige uma maior reflexão. Assim, o professor vai formando novos conceitos no campo da comparação, ampliando o raciocínio lógico e comparativo da criança [3].

Sentir:

Para perceber o sentido real da observação programada, a criança deve ser estimulada a trabalhar com seus sentidos: a tocar, cheirar, apalpar, ver, ouvir, para depois descrever o que realmente sentiu. Dessa forma, ela passa a descobrir outro mundo, que lhe permite valorizar tudo que está a sua volta. Esse trabalho ativa o campo perceptivo, amplia os canais da inteligência e do raciocínio, desenvolvendo uma melhor operacionalidade mental para o ato de aprender [3].

O processo de sentir é uma continuidade dos processos de observar e comparar. Para que o aluno possa sentir, é necessário que o professor estimule seus sentidos, que ele possa ver, tocar, dobrar, cortar, colorir, falar, se manifestar, ouvir, etc. Ao explorar mais sentidos, o aluno estará estimulando setores variados de seu cérebro e ampliando sua inteligência, seu raciocínio.

Vivenciar:

O aluno necessita aplicar o conhecimento descoberto, *partir para experiências que lhe deem outros caminhos*. Nesse processo, o aluno desenvolve sua autonomia, levantando hipóteses, argumentando, descobrindo novos caminhos, aprendendo com suas novas construções, se interessando por outros assuntos.

Concluir:

Essa etapa define a conclusão do raciocínio da criança, quando ela se torna capaz de compreender o processo que lhe foi apresentado [3].

Concluir é etapa muito importante no processo de aprendizagem, pois é nesse instante que o aluno se torna consciente do caminho percorrido. Para concluir o processo, é necessário relembrar todas as etapas construídas, reconhecer as dificuldades, as descobertas e principalmente solidificar o aprendido.

Por acreditar nesse método de educar é que propomos atividades com dobraduras para o ensino da Matemática. Ao realizar as dobraduras, inicia-se o processo de **observação**, no qual os alunos acompanham as dobras que o professor faz - é importante que este realize as dobras com paciência e aguarde que o aluno descubra como realizar cada dobra (se o professor realizar o trabalho para o aluno, este perderá a oportunidade de aprender). O processo de **comparação** é importante quando o aluno apresentar dificuldades para realizar as dobras: o professor pode realizar a dobra correta e a dobra incorreta feita pelo aluno, dando a oportunidade do aluno perceber em que está errado. A dobradura possibilita a prática da motricidade do aluno e também a organização de seus pensamentos, pois o fato de ter que seguir passos lhe propicia essa organização. Com a **vivência**, o aluno constrói o pensamento lógico. Após cada dobradura, o professor pode questionar se o resultado alcançado é realmente o que se desejava construir e como é possível provar isso, despertando na sala um debate que ajudará na **conclusão final**. Podem surgir novas ideias para novas dobraduras e, dessa maneira, a dobradura pode ser um importante instrumento nas aulas de Matemática.

Capítulo 1

Os Axiomas de Huzita-Hatori

O ponto de partida de qualquer teoria matemática é frequentemente o que chamamos de princípios ou **axiomas**. Estes são fatos apresentados sem demonstração, e por isso mesmo, usados para a construção de demonstrações de todos os demais fatos da teoria. O exemplo mais comum de um sistema e seu conjunto de axiomas é provavelmente a Geometria Plana Euclidiana, na qual todos os fatos são derivados dos postulados sobre relações intuitivamente simples entre pontos e retas do plano.

Para a teoria de dobraduras, algo parecido ocorre. Os axiomas de Huzita-Hatori resumem os princípios que têm sido usados com essa finalidade, tanto em termos teóricos (o que é, ou não é, possível de obter-se em dobraduras), como na prática com o uso dos papéis.

Cabe aqui uma reflexão sobre o *ser ou não ser construtível* nas dobraduras. Esse conceito está atrelado à ideia de que tudo que se obtém nas dobraduras provém do conjunto de axiomas apresentado adiante, ou seja, das técnicas fundamentais que serão “aceitas” nas construções de dobras. Isso não impede contudo que dobras mais arbitrárias, que fujam a esses princípios, não possam ser realizadas. Entendemos que tais dobras são utilizadas principalmente por mãos de artistas talentosos. No entanto, por fugirem ao formalismo matemático dos axiomas, não trataremos delas. Essas ideias podem, inclusive, ser utilizadas em uma atividade com a turma, visando a discussão do conceito

de axiomas, tanto em dobraduras como em outras áreas. Pode-se propor, por exemplo, discutir as vantagens e desvantagens de se trabalhar com axiomas.

Axiomas da Geometria do Origami, conhecidos como os Axiomas de Huzita

A ideia básica é que construir uma *dobra* na folha equivale a traçar uma *reta* no plano. Assim, os elementos considerados suficientes para a obtenção do traçado de retas, de acordo com os postulados euclidianos, deverão também permitir a construção de dobras equivalentes àquelas retas.

1. Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 , existe apenas uma dobra que passa por eles.

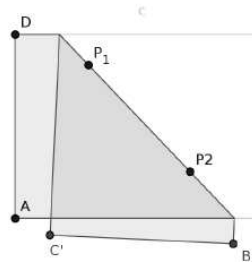


Figura 1.1: Huzita-1.

- O Axioma 1 equivale ao axioma fundamental da Geometria Plana: dados 2 pontos distintos, P_1 e P_2 , existe apenas uma reta do plano que contém os 2 pontos.
2. Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 , existe apenas uma dobra que coloca P_1 sobre P_2 .
 - O Axioma 2 equivale a um fato fundamental da Geometria Plana: dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 , existe apenas uma reta r tal que qualquer ponto $V \in r$ é equidistante de P_1 e P_2 .

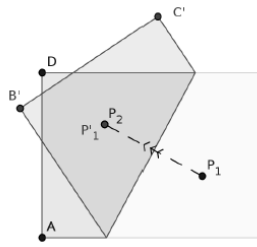


Figura 1.2: Huzita-2.

3. Dadas as retas, r_1 e r_2 , existe uma dobra que coloca r_1 sobre r_2 .

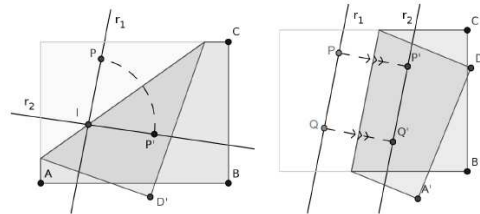


Figura 1.3: Huzita-3.

- O Axioma 3 equivale a um fato fundamental da Geometria Plana: dadas duas retas distintas, r_1 e r_2 , existe apenas uma reta r , tal que qualquer ponto $V \in r$ é equidistante de r_1 e r_2 .
4. Dados um ponto P e uma reta r , existe uma dobra única que é perpendicular a r e que passa por P .

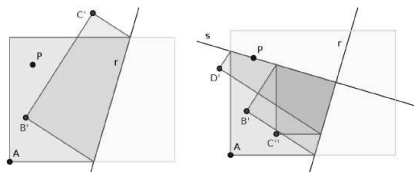


Figura 1.4: Huzita-4.

- O Axioma 4 equivale a outra consequência dos postulados da Geometria Plana: dados um ponto P e uma reta r , existe uma única reta que é perpendicular a r e que passa pelo ponto P .
5. Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta r_1 , existe uma dobra que coloca P_1 sobre r_1 e que passa por P_2 .

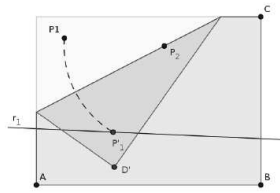


Figura 1.5: Huzita-5.

- O Axioma 5 equivale ao seguinte teorema da Geometria Plana: dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 , e uma reta r_1 , existe uma reta r que passa pelo ponto P_2 e é eixo de simetria entre os pontos P_1 e $P'_1 \in r_1$.

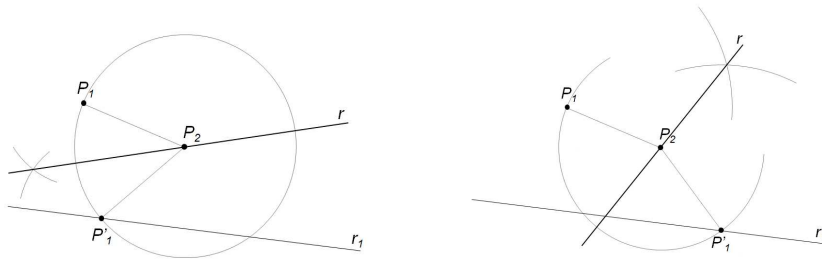


Figura 1.6: Equivalente euclidiano ao axioma Huzita-5

6. Dados dois pontos, P_1 e P_2 , e duas retas, r_1 e r_2 , existe uma dobra que leva simultaneamente P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2 .

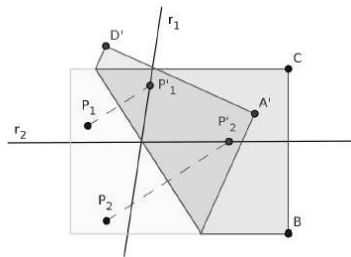


Figura 1.7: Huzita-6.

- O Axioma 6 não possui correspondência com a Geometria Plana.

7. Dados um ponto P e duas retas, r_1 e r_2 , existe uma dobra que coloca P sobre r_1 e que é perpendicular a r_2 .

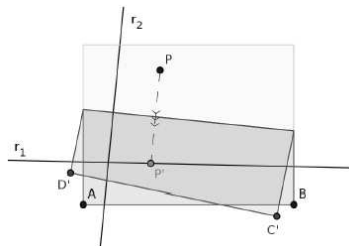


Figura 1.8: Huzita-7.

- O Axioma 7 equivale também a um teorema da Geometria Plana: dados um ponto P e duas retas, r_1 e r_2 , existe uma única reta r que é perpendicular a r_2 e eixo de simetria entre os pontos P e P' , onde $P' \in r_1$.

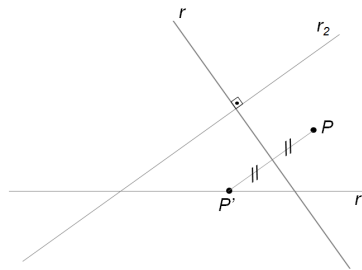


Figura 1.9: Equivalente euclidiano ao axioma Huzita-7.

Atividade Proposta 1.1. Seriam os axiomas de Huzita-Hatori *suficientes* para embasar todos os tipos de dobraduras possíveis? Procure analisar essa questão após pesquisar alguns trabalhos de Robert J. Lang, Herman Van Goubergen, Toshie Takahama, Valentina V. Gonchar, dentre outros. Qual a sua conclusão ?

Atividade Proposta 1.2. Procure uma dobradura simples e interessante (que pode ser encontrada em várias páginas da *internet*, como por exemplo www.comofazerorigami.com.br), e que siga os axiomas de Huzita-Hatori. Realize essa dobradura e identifique, em cada dobra realizada, qual axioma foi utilizado.

Capítulo 2

Polígonos Regulares

Muitos são os estudos relativos aos polígonos regulares e podemos obter esses polígonos por meio de dobraduras. Neste capítulo, vamos construir, a partir de uma folha sulfite A4, o triângulo equilátero, o quadrado, o hexágono regular e o octógono regular. Deixaremos o capítulo 3 para a construção do pentágono regular.

2.1 O que são polígonos regulares

Por definição, são considerados polígonos regulares as figuras geométricas que:

- são planas, simples e fechadas;
- são formadas por segmentos de reta que determinam uma região poligonal convexa (isto é, seus ângulos internos são menores que 180°);
- possuem lados congruentes;
- possuem ângulos congruentes.

Não raras vezes acredita-se, equivocadamente, que se um polígono possui os lados congruentes, então necessariamente terá os ângulos congruentes ou o inverso. Isso não é verdade, como mostramos nos exemplos a seguir:

- O losango possui todos os lados congruentes, porém, seus ângulos não são todos congruentes.

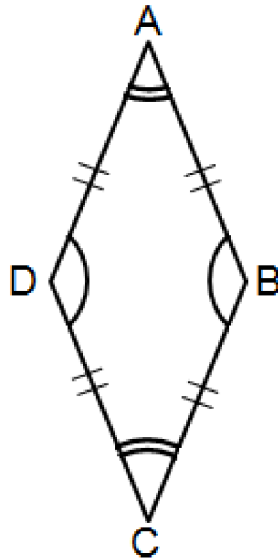


Figura 2.1: Losango.

- O retângulo possui os ângulos congruentes (retos), porém seus lados, em geral, não são congruentes.

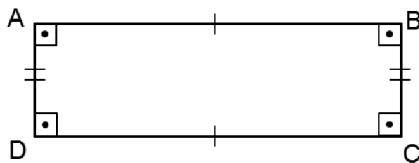


Figura 2.2: Retângulo.

- Um pentágono regular pode ser modificado para que seus lados não sejam mais congruentes, mantendo seus ângulos com as mesmas medidas (congruentes).

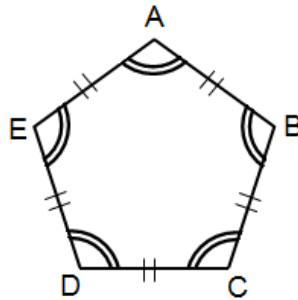


Figura 2.3: Pentágono regular.

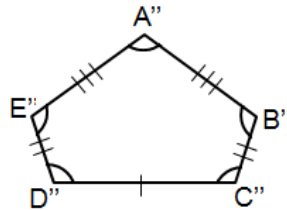


Figura 2.4: Pentágono com lados diferentes.

- O mesmo pentágono regular pode ser modificado de forma a manter a medida de seus lados, mas alterando os valores de ângulos.

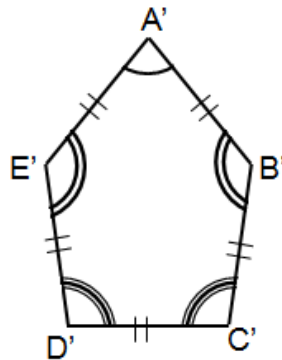


Figura 2.5: Pentágono com ângulos diferentes.

Os polígonos regulares possuem uma característica importante: são todos inscritíveis em uma circunferência. A recíproca no entanto é falsa: *nem*

todos os polígonos inscritíveis são regulares.

Iniciamos, agora, a construção de alguns polígonos regulares por dobraduras. Para todos, partiremos de uma folha de papel sulfite A4, que é um dos formatos mais comuns utilizados. Identificaremos esta folha como o retângulo $ABCD$ (figura 2.6).

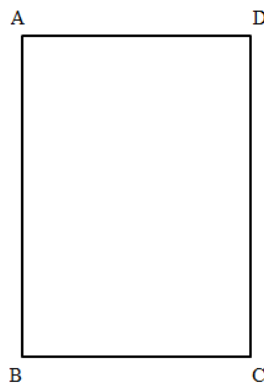


Figura 2.6: Retângulo.

2.2 Triângulo Equilátero

I - Dobre a folha de maneira que \overline{DC} fique sobre \overline{AB} (axioma-3) determinando os pontos médios E e F dos lados \overline{AD} e \overline{BC} respectivamente.

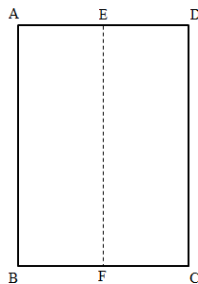


Figura 2.7: Dobra EF .

II - Fixando o ponto B , leve o vértice C ao segmento \overline{EF} (axioma-5), determinando os pontos I e G , rotacionando sobre o eixo \overline{BG} .

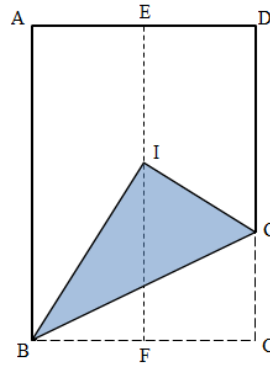


Figura 2.8: Dobra BG .

III - Fixando o ponto G , faça uma dobra que contenha os pontos G e I (axioma-1), determinando o ponto H .

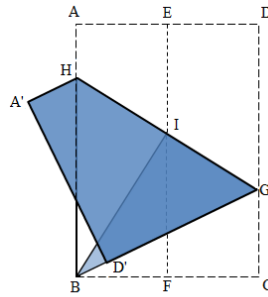


Figura 2.9: Dobra HG .

IV - Os pontos H , B e G determinam o triângulo equilátero.

Justificativa da construção:

Pelos Axiomas de Huzita-Hatori, a dobra feita no passo II da construção do

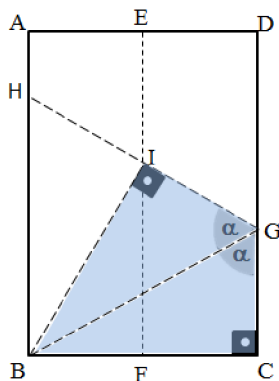


Figura 2.10: Ângulo $H\hat{I}B$.

triângulo equilátero sobrepõe os triângulos BCG e BGI . Assim, concluímos que $\triangle BCG \cong \triangle BIG$.

Como o ângulo $H\hat{I}B$ é suplementar ao ângulo $G\hat{I}B$, temos que $H\hat{I}B = 90^\circ$.

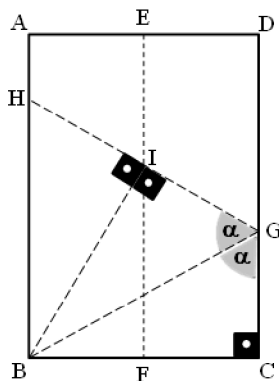


Figura 2.11: Ponto I .

Como o ponto I pertence ao segmento \overline{EF} , que é paralelo e equidistante de \overline{AB} e \overline{DC} , uma aplicação do Teorema de Tales fornece $\overline{HI} \cong \overline{GI}$. Assim $\triangle BIH \cong \triangle BIG$ (LAL) e portanto, o ângulo $B\hat{G}I \cong B\hat{H}I = \alpha$.

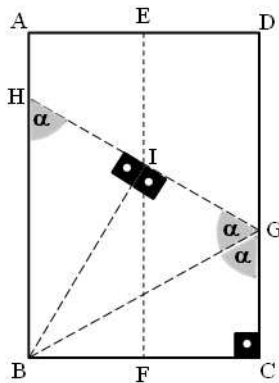


Figura 2.12: Ângulo \hat{GBH} .

Como $\overline{DC} // \overline{AB}$, temos que os ângulos $C\hat{G}B$ e $G\hat{B}H$ são alternos internos; logo, $C\hat{G}B \cong G\hat{B}H = \alpha$.

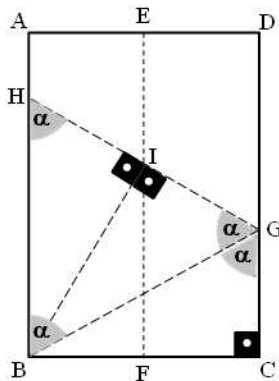


Figura 2.13: Triângulo equilátero.

Assim, temos que $B\hat{G}I \cong B\hat{H}I \cong G\hat{B}H \cong \alpha$. Como um triângulo que possui os três ângulos iguais também possui os lados iguais, concluímos que ΔBGH é EQUILÁTERO.

2.3 Quadrado

I - Fixando o ponto B , dobre a folha de maneira que \overline{BC} fique sobre \overline{AB} (axioma-3), determinando os pontos E e F sobre os lados \overline{AB} e \overline{DC} respectivamente.

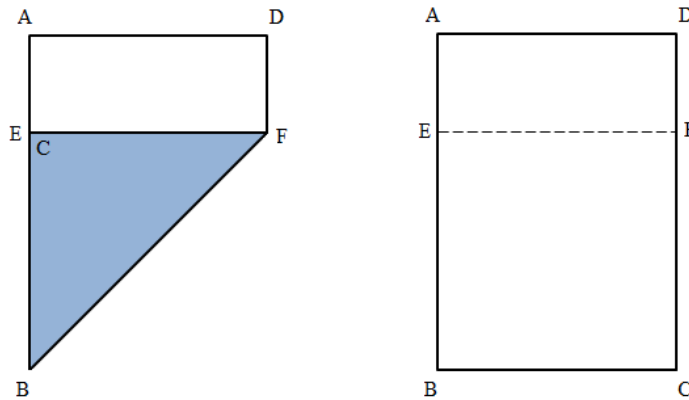


Figura 2.14: Dobra BF e segmento EF .

II - Usando uma tesoura ou uma régua, corte a folha na reta \overline{EF} , conforme a figura.

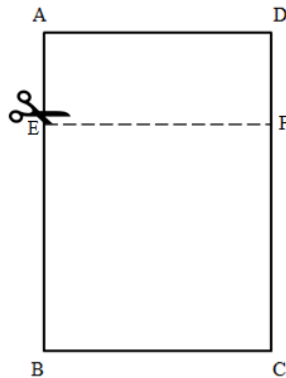


Figura 2.15: Quadrado.

Os pontos E , F , C e B determinam o quadrado.

Justificativa da construção:

Pelos Axiomas de Huzita-Hatori, a dobra feita no passo I da construção do quadrado sobrepõe os triângulos BCF e BEF . Assim, $\hat{FEB} \cong \hat{FCB} = 90^\circ$; logo, $\overline{EF} // \overline{BC}$.

Ainda pela mesma dobra, temos que $\overline{BE} \cong \overline{BC}$ e $\overline{EF} \cong \overline{CF}$; logo, podemos afirmar que $EBCF$ é um quadrado.

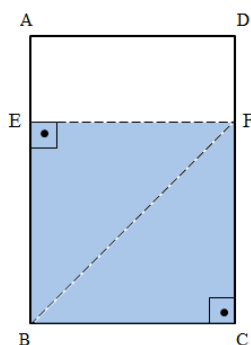


Figura 2.16: Ângulos \hat{C} e \hat{D} .

2.4 Hexágono

I - Repita os passos da construção do triângulo equilátero feita anteriormente, obtendo a figura abaixo.

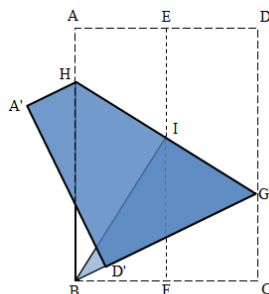


Figura 2.17: Triângulo equilátero.

II - Usando uma tesoura, corte sobre as retas \overline{HG} e \overline{BG} .

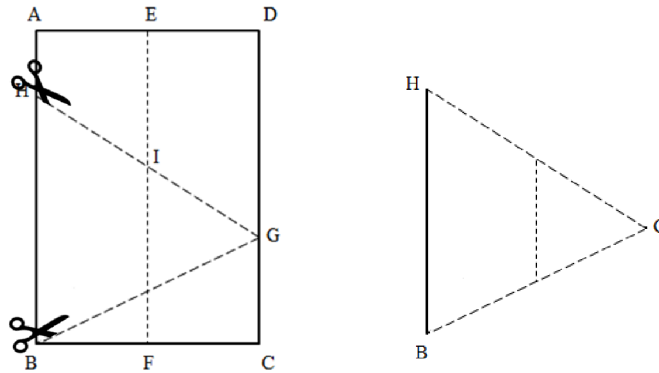


Figura 2.18: Corte do triângulo.

III - Agora, dobre o $\triangle GHB$ de maneira que o ponto H coincida com o ponto B , fixando o ponto G (axioma-2) e determinando o ponto J , conforme a figura. Note que, por comodidade, rotacionamos o triângulo da figura 2.18, colocando o lado HB como base do mesmo.

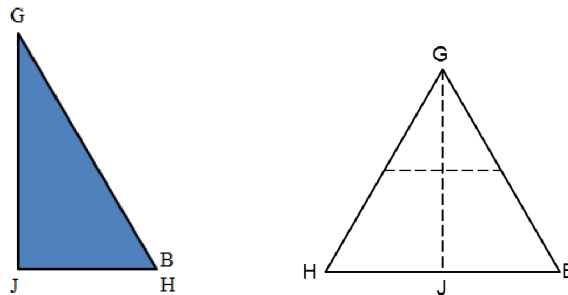


Figura 2.19: Segmento GJ .

IV - Dobre o $\triangle GHB$ de maneira que o ponto B coincida como o ponto G , fixando o ponto H e determinando o ponto K , conforme a figura 2.20.

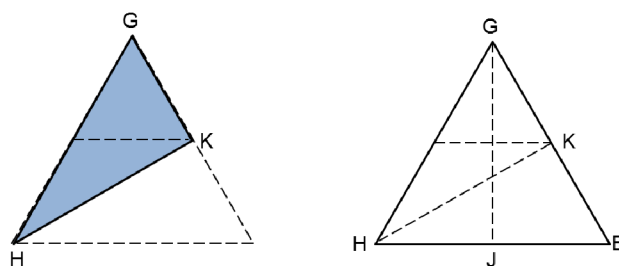


Figura 2.20: Dobra HK .

V - Ainda no $\triangle GHB$ faça uma dobra, fixando o ponto B e levando o ponto H até o ponto G , determinando o ponto L , conforme a figura 2.21

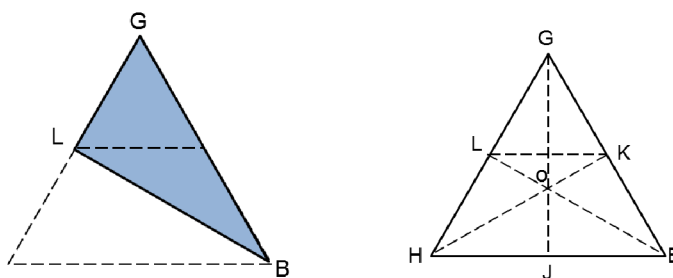


Figura 2.21: Segmento LB .

Observe na figura 2.21 que os segmentos \overline{GJ} , \overline{BL} e \overline{HK} determinam o ponto O .

VI - Dobre os vértices G , H e B todos até o ponto O . Os pontos P , Q , R , S , T e U determinam o hexágono regular.

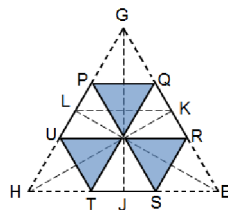


Figura 2.22: Dobra dos vértices até o centro.

Justificativa da construção:

Ao realizar o passo III na construção do hexágono, determinamos o segmento \overline{GJ} , que é bissetriz do ângulo \hat{G} (axioma-3). Como no triângulo equilátero a bissetriz também é a altura, temos que \overline{GJ} é perpendicular ao lado \overline{HB} (figura 2.19).

O segmento \overline{PQ} é perpendicular à altura \overline{GJ} pelo axioma 7, então temos que $\overline{PQ} \parallel \overline{HB}$, logo $Q\hat{P}G \cong \hat{H} = 60^\circ$ e $P\hat{Q}G \cong \hat{B} = 60^\circ$.

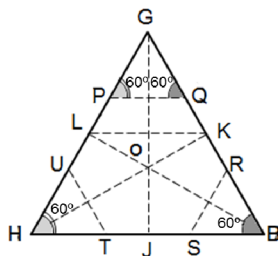


Figura 2.23: Ângulos $Q\hat{P}G$ e $P\hat{Q}G$.

Mas, como o ângulo $Q\hat{P}G$ é suplementar ao ângulo $Q\hat{P}U$ e o ângulo $P\hat{Q}G$ é suplementar ao ângulo $P\hat{Q}R$, concluímos que $Q\hat{P}U \cong P\hat{Q}R = 120^\circ$.

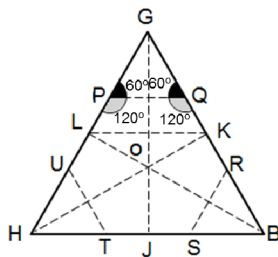


Figura 2.24: Ângulos internos em P e Q .

De forma análoga, temos que $Q\hat{R}S \cong R\hat{S}T \cong S\hat{T}U \cong T\hat{U}P = 120^\circ$.

Assim, o hexágono construído possui todos os ângulos internos iguais a 120° .

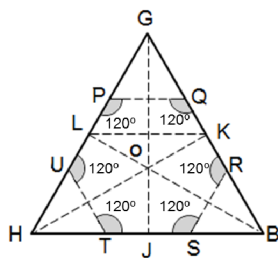


Figura 2.25: Hexágono Regular.

Quanto aos lados, vemos que, devido à simetria das dobraduras, vale $\overline{PQ} = \overline{RS} = \overline{UT}$ e $\overline{QR} = \overline{TS} = \overline{PU}$. Por fim, o triângulo QRO é equilátero, já que $\widehat{OQR} = \widehat{ORQ} = 60^\circ$. Como esse triângulo tem o lado QO em comum com o triângulo equilátero PQO , segue que $\overline{PQ} = \overline{QR}$. Portanto, o hexágono também possui os lados congruentes e é regular.

2.5 Octógono

I - Partimos do quadrado $BCFE$ construído anteriormente na seção 2.3.

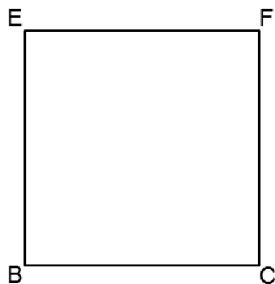


Figura 2.26: Quadrado.

II - Dobre o quadrado $BCFE$ de maneira que o ponto C coincida como o ponto E fixando os pontos B e F , conforme a figura.

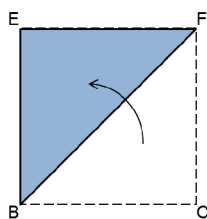


Figura 2.27: Dobra em BF .

III - Leve o ponto B ao ponto F , determinando o ponto G .

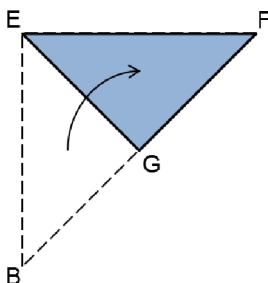


Figura 2.28: Dobra em EG .

IV - Agora, leve o ponto E até o ponto F , determinando o ponto H . Desfaça essa última dobra.

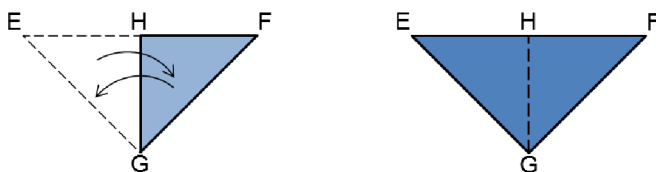


Figura 2.29: Dobra em HG .

V - Fixando o ponto G , faça uma dobra que leve o segmento \overline{GE} sobre o segmento \overline{GH} (axioma-3), determinando o ponto I . Analogamente, faça uma dobra que leve o segmento \overline{GF} sobre o segmento \overline{GH} , determinando o ponto J .

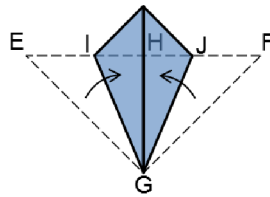


Figura 2.30: Pontos I e J .

VI - Utilizando uma tesoura, corte sobre o segmento \overline{IJ} . Em seguida, desfaça todas as dobras. Os pontos I, J, K, L, M, N, O e P determinam o octógono regular.

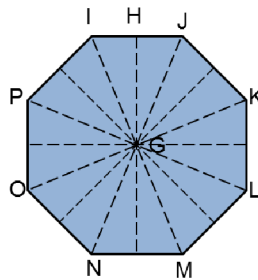


Figura 2.31: Octógono regular.

Justificativa da construção:

Observe que os segmentos \overline{BF} e \overline{CE} são diagonais do quadrado $BCFE$. Logo, formam 90° entre si.

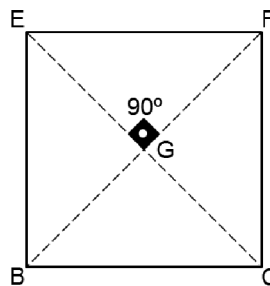


Figura 2.32: Diagonais do quadrado.

A dobra do passo IV determina o segmento \overline{GH} que, pela construção, é perpendicular ao lado \overline{EF} . Observe que \overline{GH} é bissetriz do ângulo \widehat{EGF} , logo $\widehat{EGH} \cong \widehat{FGH} = 45^\circ$

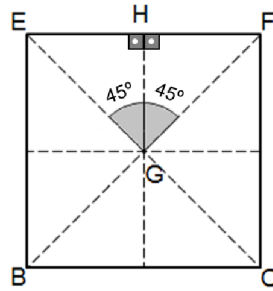


Figura 2.33: Bissetriz do ângulo \widehat{EGF} .

A dobra do passo V determina os segmentos \overline{GI} e \overline{GJ} , que são bissetrizes dos ângulos \widehat{EGH} e \widehat{FGH} , respectivamente. Assim, temos que os ângulos $\widehat{EGI} \cong \widehat{IGH} = \alpha = 22,5^\circ$. O segmento \overline{GI} também é bissetriz do ângulo \widehat{HIP} , logo $\widehat{HIG} \cong \widehat{PIG} = \beta$.

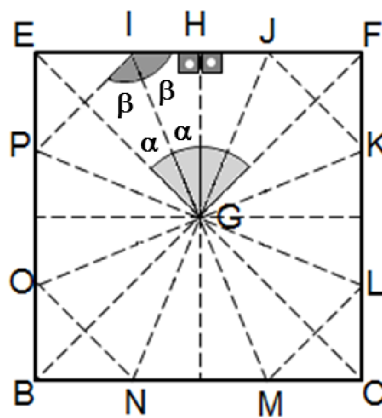


Figura 2.34: Bissetrizes dos ângulos \widehat{EGH} e \widehat{FGH} .

No $\triangle HIG$ temos que $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, logo $\beta = 67,5^\circ$. Como $\widehat{HIG} \cong \widehat{PIG} = 67,5^\circ$, então o ângulo $\widehat{HIP} = 2 \times 67,5^\circ = 135^\circ$. Podemos

fazer o mesmo raciocínio para todos os outros ângulos e concluiremos que todos os ângulos internos desse octógono são congruentes e medem 135° .

Por fim, justifiquemos que os lados desse octógono também são congruentes. Notamos que no passo VI, após o corte sobre o segmento IJ , a primeira dobra a ser desfeita nos retorna um pentágono que tem G como um de seus vértices. Olhando com atenção, vemos que esse pentágono está contido no triângulo retângulo EGF (passo V), o qual equivale a um quarto do quadrado $EBCF$ inicial. Portanto, as duas últimas “desdobras” replicam esse pentágono mais 3 vezes, justapondo-os pelos ângulos retos. Cada lado do octógono surge ou como uma dobra sobre IJ , ou como a junção de duas dobras, uma sobre IH e outra sobre HJ , de forma que qualquer lado é necessariamente congruente a IJ .

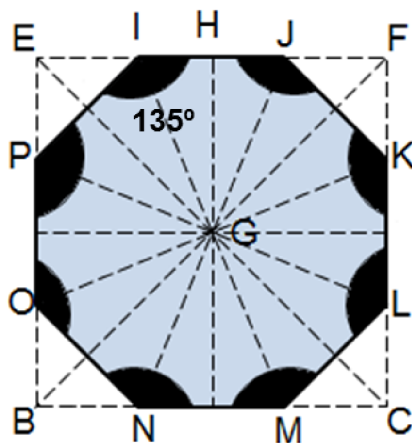


Figura 2.35: Octógono com lados congruentes.

Atividade Proposta 2.1. Nesse capítulo construímos algumas figuras geométricas regulares. Você saberia construir dobraduras de figuras geométricas não regulares, como:

- Um losango, cujo ângulo agudo mede 60° ?

- Um trapézio isósceles ?
- Um trapézio retângulo ?
- Um triângulo retângulo ?

Dica: procure partir de dobras de figuras regulares simples, como quadrado, triângulo equilátero, etc.

Atividade Proposta 2.2. Seja P_n um polígono de n lados, convexo, e inscrito numa circunferência. Explique o porquê: se P_n possuir lados congruentes então seus ângulos internos são congruentes. Por outro lado, mostre com um **exemplo** que P_n pode ter ângulos internos congruentes, ser inscritível, mas não ter lados congruentes.

Capítulo 3

Os Segredos do Pentágono

Figuras regulares de números de lados pares (como o quadrado, o hexágono e o octógono) são mais simples de obtermos, seja pela construção com régua e compasso ou pela dobradura. Já figuras regulares de lados ímpares (como o pentágono, o heptágono, o nonágono) são mais difíceis de serem construídas com régua e compasso. Porém, como em uma brincadeira, dobramos uma fita de papel e obtemos um pentágono regular. Por que isso acontece é o que vamos explicar, utilizando três dobraduras diferentes para o pentágono.

3.1 Pentágono Regular - razão áurea

Nós já sabemos, por definição: um pentágono para ser regular precisa ter todos os lados com a mesma medida e todos os ângulos congruentes. Mas, uma característica bastante interessante do pentágono regular é que a razão entre a sua diagonal e seu lado é igual à razão áurea ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$). Vejamos o porquê.

Partimos do pentágono regular $ABCDE$, cujos lados medem l e cujas diagonais medem d , como mostra a figura 3.1. Inscrevemos esse pentágono numa circunferência. Usando o teorema do arco capaz, obtemos que duas diagonais que concorrem num vértice dividem o ângulo interno correspondente em 3 ângulos congruentes. Chamamos esse ângulo interno de 3α (figura 3.2).

Os ângulos centrais, definidos por cada lado, valem 2α , logo $10\alpha =$

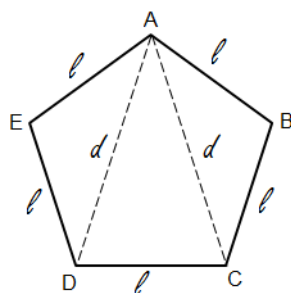


Figura 3.1: Diagonais e lados do pentágono.

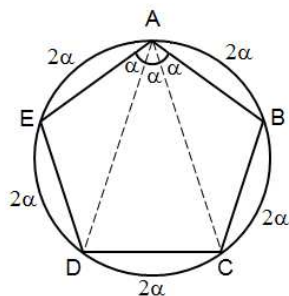


Figura 3.2: Pentágono Inscrito.

$360^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$, confirmando que o ângulo interno do pentágono é igual a $3\alpha = 108^\circ$.

Fazendo uma dobra que leve o segmento AB sobre o segmento AD definimos o ponto B' . Observe que $\overline{B'C} = \overline{BC} = l$; logo, o $\Delta B'CD$ é isósceles. Portanto, o ângulo $D\hat{B}'C = 2\alpha$.

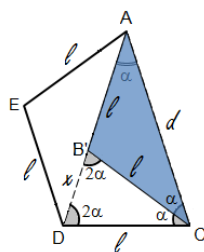


Figura 3.3: Ponto B' .

Pelo caso de semelhança AA para triângulos, temos que o $\Delta DAC \approx \Delta B'CD$; assim concluímos que:

$$(3.1) \quad \frac{l}{x} = \frac{d}{l} \Rightarrow x = \frac{l^2}{d}.$$

E como $x = d - l$, temos que

$$(3.2) \quad d - l = \frac{l^2}{d} \Rightarrow d^2 - dl - l^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{l}\right)^2 - \frac{d}{l} - 1 = 0;$$

logo,

$$(3.3) \quad \frac{d}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{Razão Áurea}).$$

3.2 Pentágono - primeira dobradura

Esta primeira construção é exibida em [1, p. 32-37]. A propriedade explorada nesta construção é que o lado do pentágono é o segmento áureo da diagonal.

Vamos à dobradura! Observamos que, dessa vez, iremos justificar as medidas durante a própria dobradura.

Partimos da construção do quadrado $ABCD$. Por conveniência, supomos que o lado desse quadrado seja igual a 2. A demonstração de que o pentágono é de fato regular será proposta como um exercício (3.1)

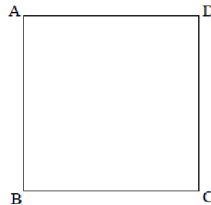


Figura 3.4: Quadrado $ABCD$.

- I - Dobre o quadrado, levando os vértices B e C sobre os vértices A e D , respectivamente, determinando o segmento EF .

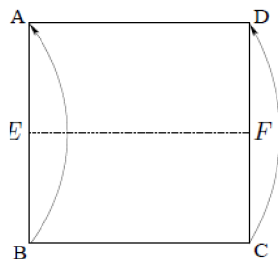


Figura 3.5: Segmento EF .

Observe que o retângulo $BEFC$ tem medidas $2 : 1$

- II - Faça uma dobra sobre a diagonal BF (somente com a parte de cima do papel).

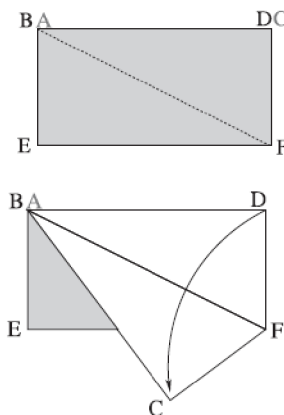


Figura 3.6: Dobra BF .

Pelo Teorema de Pitágoras no $\triangle BEF$, temos que $\overline{BF} = \sqrt{5}$.

- III - Agora, leve o segmento CF sobre o segmento BF fixando o ponto F , determinando o ponto C' e o segmento GF .

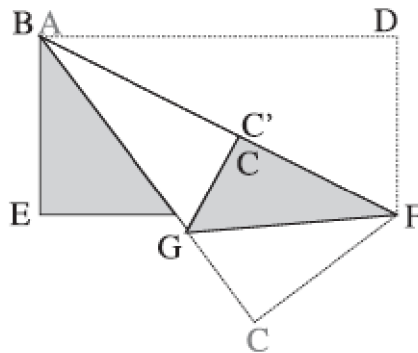


Figura 3.7: Dobra GF .

Como $\overline{BF} = \sqrt{5}$ e $\overline{CF} = 1$, temos que $\overline{BC'} = \sqrt{5} - 1$.

IV - Abrindo o quadrado e deixando apenas a dobra do segmento GF , levamos o lado AB sobre o segmento BF , obtendo a dobra BH .

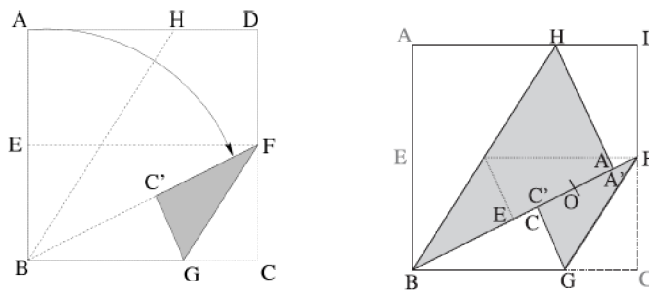


Figura 3.8: Quadrado aberto com dobra em BH .

Nessa figura, temos que $\overline{C'A'} = \overline{BA} - \overline{BC'}$. Logo, $\overline{C'A'}$ é o que resta da diferença do lado 2 com $\sqrt{5} - 1$. Determinamos o ponto O na metade do segmento $C'A'$, conforme a figura anterior.

V - Novamente, abra o quadrado $ABCD$ e dobre sobre o segmento EF . Marque o ponto O' determinando BO' com a mesma medida de AO .

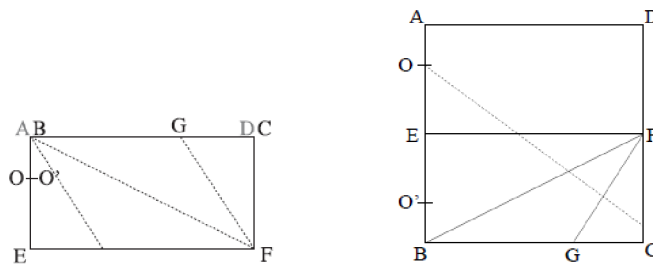


Figura 3.9: Segmento OO' .

VI - Temos que $OO' = \sqrt{5} - 1$. Agora, fixe o ponto O e leve o ponto O' até o lado AD , determinando o ponto P .

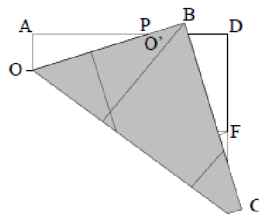


Figura 3.10: Ponto P .

VII - De forma análoga à da dobra anterior, fixe o ponto O' e leve o ponto O até o lado BC , determinando o ponto Q . Observe que $\overline{OO'} = \overline{OP} = \overline{O'Q} = \sqrt{5} - 1$.

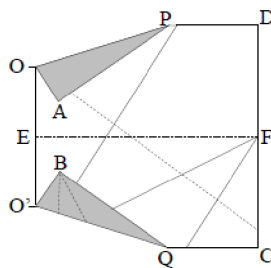


Figura 3.11: Ponto Q .

VIII - Nesse passo, mantenha dobrado somente os segmentos OP e $O'Q$. Fixe o ponto P e leve o ponto O sobre o segmento EF , determinando o ponto V . A dobra feita sobre P também determina o ponto R na sua interseção com $O'Q$. Observe que o ponto V **não** coincide com o ponto F .

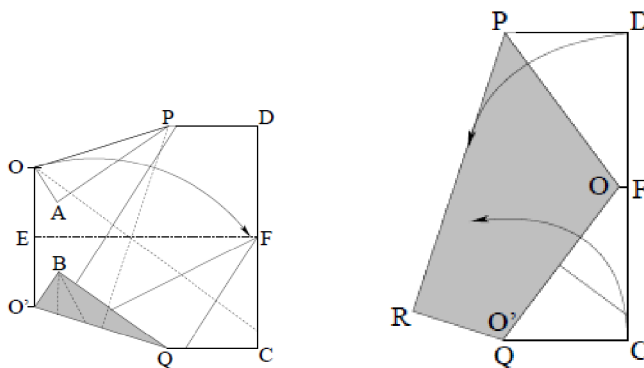


Figura 3.12: Encontrando os pontos V e R .

IX - Leve o ponto D sobre o quadrilátero $OPRO'$ dobrando sobre o segmento PV . De forma análoga, leve o ponto C sobre o quadrilátero $OPRO'$, dobrando sobre o segmento QV . Volte apenas a dobra feita sobre o eixo PR e obtemos o pentágono $OPVQO'$, que realmente é regular, pois pelas dobras temos que $\overline{OP} = \overline{PV} = \overline{VQ} = \overline{QO'} = \overline{O'O} = \sqrt{5} - 1$.

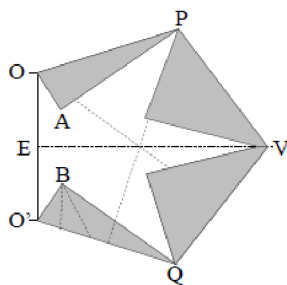


Figura 3.13: Pentágono regular.

3.3 Pentágono - segunda dobradura

Esta segunda dobradura traz um processo bem mais simples de construção, o que facilita trabalhar com os alunos. Porém, ao buscarmos justificar que este pentágono é regular observamos que há uma aproximação nos cálculos. Pudemos perceber que este pentágono, na verdade, **não é** regular. E vamos deixar para o leitor este desafio, descobrir (através da razão da diagonal e do lado do pentágono) essa aproximação.

Também iniciaremos essa dobradura a partir do quadrado $ABCD$, ou melhor ainda, da dobra EF , que divide este quadrado ao meio (ver figura 3.5).

- I - Fixando o ponto B , leve o ponto E até o segmento \overline{BC} , determinando o segmento \overline{BO} . Volte essa dobra.

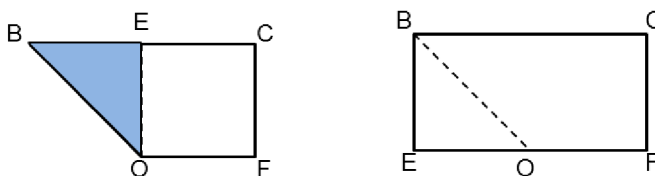


Figura 3.14: Dobra e segmento BO .

- II - Fixando o ponto E , leve o ponto B até o segmento \overline{EF} , determinando o segmento \overline{EH} . Volte essa dobra. Observe que o encontro dos segmentos \overline{BO} e \overline{EH} determinam o ponto I .

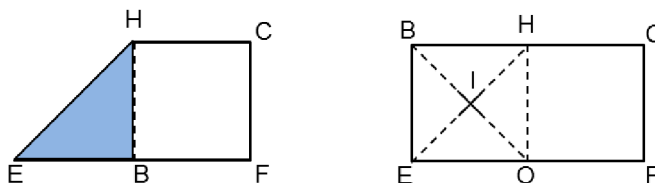


Figura 3.15: Dobra e segmento EH .

III - Faça uma dobra que leve o ponto F até o ponto I , determinando o segmento KQ e o ponto P .

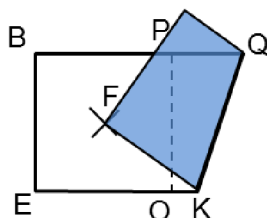


Figura 3.16: Dobra KQ .

IV - Fixando o ponto K , leve o segmento KF sobre o segmento KQ . Observe que a dobra resultante é de fato *sobre o segmento KP* .

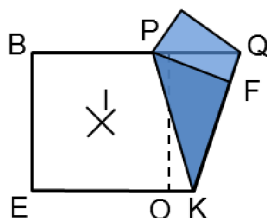


Figura 3.17: Dobra bissetriz de $F\hat{K}Q$.

V - Fixando o ponto K , leve o segmento KE sobre o segmento KP .

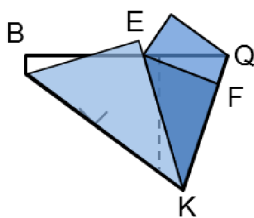


Figura 3.18: Dobra bissetriz de $E\hat{K}P$.

VI - Faça uma dobra para trás sobre o segmento KE . Em seguida, corte sobre o segmento FP .

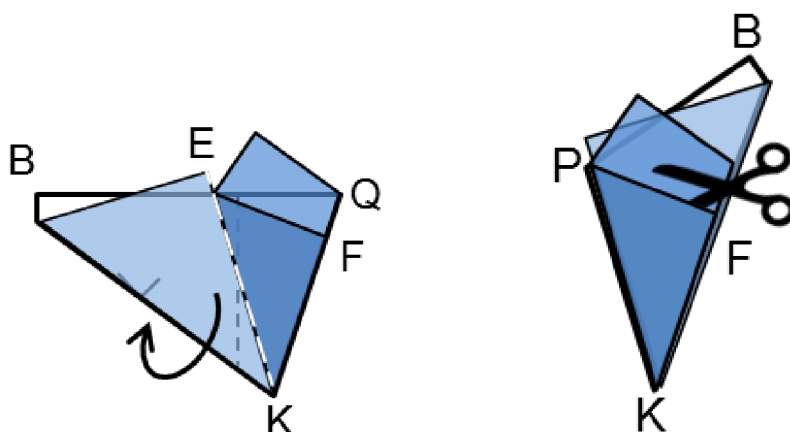


Figura 3.19: Corte sobre FP .

VII - Abrindo totalmente o papel obtemos o pentágono.

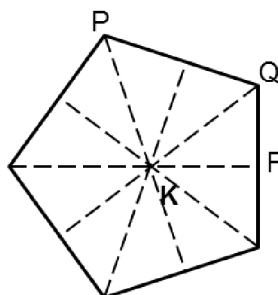


Figura 3.20: Pentágono obtido (2^{a} dobradura).

3.4 Pentágono - terceira dobradura

Esta terceira dobradura muitas vezes, é feita pelos alunos na escola como uma brincadeira para construir uma estrela de 5 pontas. Ao observar como eles obtêm o pentágono regular de forma tão simples e rápida, resolvemos incluí-la neste estudo.

Esta terceira construção, encontrada em [2], consiste em darmos um nó em uma fita de papel.



Figura 3.21: Nó e pentágono.

Observe que o nó forma um pentágono regular. E porque isso acontece?

Como os lados da fita são paralelos, ao realizarmos a primeira dobra, obtemos um triângulo isósceles na região sobreposta, pois os ângulos são alternos internos, como mostra a figura abaixo.



Figura 3.22: Ângulos congruentes e triângulo isósceles.

Nas duas próximas dobras teremos a mesma sobreposição, obtendo os mesmos ângulos para os triângulos AEC , ABD e CDA , que serão todos isósceles e congruentes.

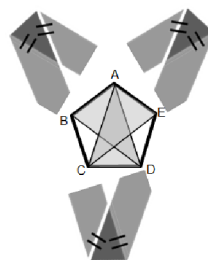


Figura 3.23: Triângulos congruentes.

Observe que $\overline{AB} // \overline{CE}$, $\overline{AC} // \overline{DE}$, $\overline{BC} // \overline{AD}$, $\overline{AC} // \overline{DE}$, $\overline{BC} // \overline{AD}$, $\overline{BD} // \overline{AE}$, pois representam a largura da fita de papel, onde os ângulos alternos internos são congruentes.

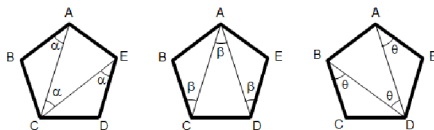


Figura 3.24: Diagonais.

Juntando todos os ângulos numa mesma figura, temos:

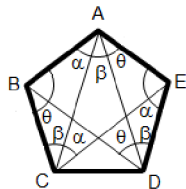


Figura 3.25: Diagonais e ângulos congruentes.

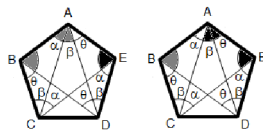


Figura 3.26: Ângulos congruentes.

Como os triângulos ADB e ACE são isósceles, temos que:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \hat{A}BD &\cong \hat{B}AD = \alpha + \beta, & \text{e} \\ \hat{A}EC &\cong \hat{E}AC = \beta + \theta. \end{aligned}$$

Portanto, no $\triangle ADB$, obtemos $2\alpha + 2\beta + \theta = 180^\circ$. Já no $\triangle ACE$, fica $2\beta + 2\theta + \alpha = 180^\circ$. Disso concluímos:

$$(3.5) \quad 2\alpha + 2\beta + \theta = 2\beta + 2\theta + \alpha \Rightarrow \alpha = \theta.$$

No trapézio $ABDE$ temos:

$$(3.6) \quad \widehat{ABD} + \widehat{AED} = \alpha + \beta + \alpha + \beta + \alpha = 3\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

Assim, \widehat{ABD} é suplementar de \widehat{AED} . Logo, o trapézio $ABDE$ está inscrito numa circunferência.

Da mesma maneira, no trapézio $ABCE$ obtemos:

$$(3.7) \quad \widehat{ABC} + \widehat{AEC} = \alpha + \beta + \alpha + \alpha + \beta = 3\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

E, portanto, \widehat{ABC} é suplementar de \widehat{AEC} . Logo, o trapézio $ABCE$ está inscrito na circunferência.

Podemos afirmar que o pentágono $ABCDE$ é inscritível em uma circunferência, que é a mesma que circunscreve ambos os trapézios $ABDE$ e $ABCE$. Por fim, concluímos:

- $\widehat{BCA} \cong \widehat{BDA}$ (possuem o mesmo arco capaz AB) $\Rightarrow \beta \cong \theta \Rightarrow \alpha \cong \beta$.
- $\widehat{CDB} \cong \widehat{CAB}$ (possuem o mesmo arco capaz BC) $\Rightarrow \widehat{CDB} = \alpha$.
- $\widehat{DCE} \cong \widehat{DAE}$ (possuem o mesmo arco capaz DE) $\Rightarrow \widehat{DCE} = \theta = \alpha$.

Assim, cada vértice do pentágono “enxerga” qualquer lado não adjacente sob um mesmo ângulo α (vide figura 3.27). Em particular qualquer ângulo interno vale 3α . Isso ainda não é suficiente para afirmarmos que o pentágono é regular (veja o exercício 2.2)! É necessário elaborar explicações sobre os triângulos formados com os vértices do pentágono. Deixaremos como exercício essa elaboração (exercício 3.4).

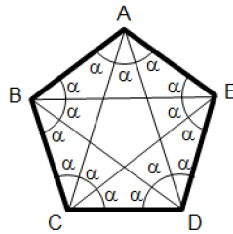


Figura 3.27: Ângulos internos congruentes.

Atividade Proposta 3.1. Finalize a explicação de por que o pentágono obtido na 1ª dobradura é regular. Dica: prove que ao menos três diagonais medem 2 e, por semelhança de triângulos, juntamente com a razão áurea, três triângulos da forma "lado-lado-diagonal" são congruentes e possuem um ângulo de 108° . Argumente que os outros dois ângulos internos do pentágono são iguais e, portanto, também medem 108° .

Atividade Proposta 3.2. No passo III da 2ª dobra do pentágono, o ponto P é construído (figura 3.16). Tente justificar com cálculos por que P está na bissetriz do ângulo $F\hat{K}Q$, justificando, assim, a afirmação do passo IV.

Atividade Proposta 3.3. Prove que o pentágono encontrado na 2ª dobradura não é regular. Sugerimos que utilize a razão áurea entre a diagonal e o lado para essa demonstração.

Atividade Proposta 3.4. Finalize com a explicação de por que o pentágono obtido na 3ª dobradura é regular.

Atividade Proposta 3.5. Construa, através de dobraduras, o retângulo áureo, ou seja, um retângulo cuja razão entre os lados seja áurea.

Capítulo 4

Construção do tetraedro (tridimensional)

A Matemática do origami no plano é encantadora. Podemos descobrir muitas formas interessantes e realizar cálculos extraordinários. Mas, não podemos deixar de mencionar a Matemática do origami no espaço. Utilizaremos a dobradura do triângulo equilátero, anteriormente vista, para construir o tetraedro regular (pirâmide de base triangular), que provavelmente é o sólido mais simples, constituído de 4 faces triangulares.

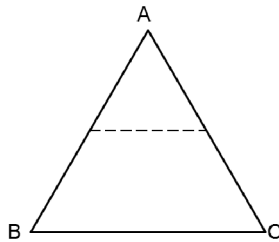


Figura 4.1: Triângulo equilátero.

I - Fixando o ponto A , leve o ponto B sobre o ponto C , determinando o segmento AD .

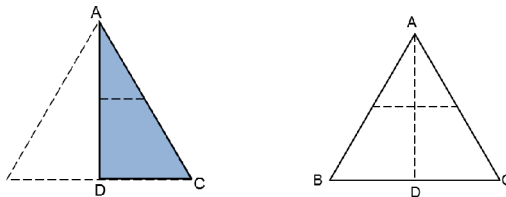


Figura 4.2: Dobra da altura AD .

Observe que o segmento AD é a altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado BC .

- II - Repita o mesmo procedimento do passo I para os lados AC e AB , determinando as alturas BE e CF . Observe que o ponto H é o encontro das 3 alturas. Logo, é o Ortocentro do $\triangle ABC$.

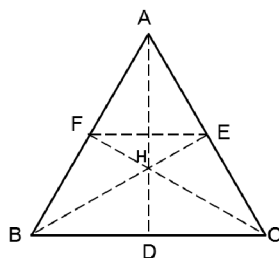


Figura 4.3: Alturas BE e CF .

- III - Faça uma dobra de maneira que o ponto A coincida com o ponto D , determinando o segmento EF . Em seguida, leve o ponto A até o ponto médio do segmento EF . Vire o papel do lado contrário.

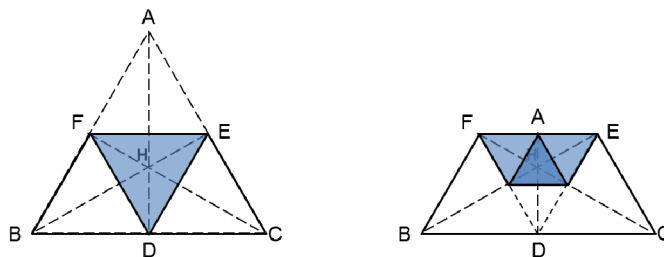


Figura 4.4: Dobra em EF .

- IV - Faça uma dobra de maneira que o segmento BC sobreponha o segmento FE , como na figura 4.5.
- V - Abra todo o triângulo e observe os vincos (dobras) que já foram realizados. Nesses últimos passos, dividimos a altura AD em 4 partes congruentes (figura 4.6).

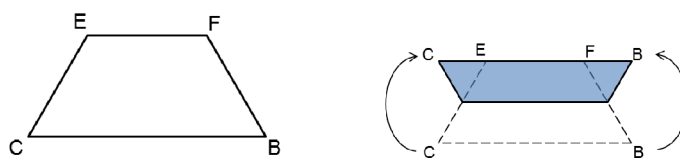


Figura 4.5: Sobreposição BC com FE .

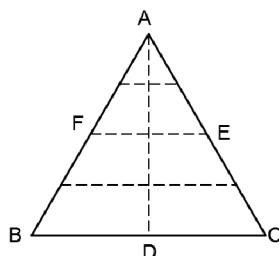


Figura 4.6: Divisão da altura AD .

VI - Repita os passos *III* a *VI* para os vértices C e B , dividindo as alturas BE e CF também em 4 partes congruentes.

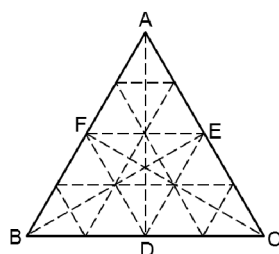


Figura 4.7: Alturas divididas.

Observe que os vincos dividiram o triângulo equilátero ABC em vários triângulos equiláteros menores. Essas dobras foram para vincar o papel, auxiliando-nos a realizar os próximos passos. A partir de agora, a dobradura sairá do plano, resultando num sólido geométrico.

Na figura a seguir, é importante destacar o ΔPQR , bem ao centro, os segmentos PA , QC e RB e os pontos S e T .

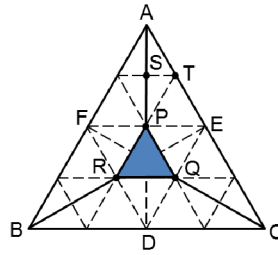


Figura 4.8: Triângulos equiláteros e vincos.

VII - Dobre o ΔABC de maneira que o segmento FA coincida com o segmento EA , o segmento FB coincida com o segmento DB e o segmento DC coincida com o segmento EC . Observe que, após a dobra, os pontos E , D e F coincidem.

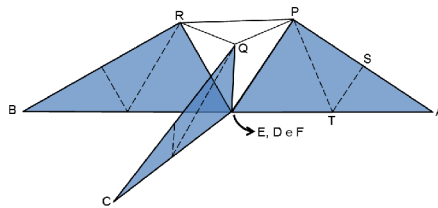


Figura 4.9: Colapso dos lados de ABC .

VIII - Faça três dobras consecutivas: a primeira no segmento PE , depois no segmento PT e, por último, uma dobra no segmento ST .

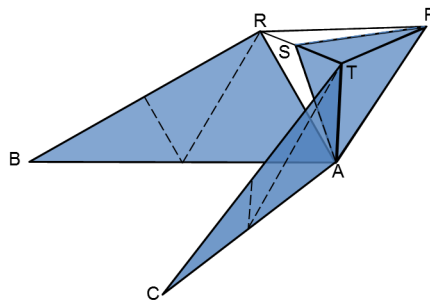


Figura 4.10: Embrulhando a pirâmide.

Observe que os pontos T e A coincidem, respectivamente, com os pontos Q e E .

IX - Para obter o tetraedro regular, repita o passo *VIII* primeiro para o segmento QC (comece dobrando para o lado em que terminou a dobra anterior) e depois para o segmento RB (nessa última dobra, é importante que o segmento RB fique por baixo das dobras anteriores, fazendo com que o tetraedro não se desfaça).

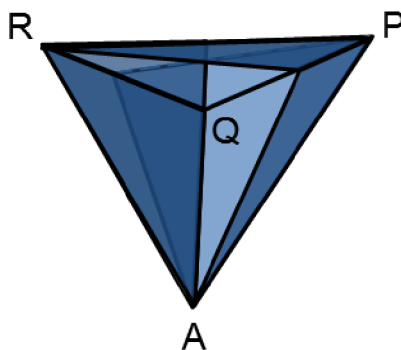


Figura 4.11: Tetraedro realizado.

Justificativa da construção:

Vamos demonstrar que essa construção realmente resulta em um tetraedro regular. Lembremos que este sólido geométrico é constituído por 4 faces que são triângulos equiláteros congruentes.

Observe a figura do passo *V* da construção (figura 4.6): como os segmentos EF , $E'F'$ e $E''F''$ são perpendiculares à altura AD , temos que $\hat{F} \cong \hat{F}' \cong \hat{F}'' \cong \hat{B} \cong 60^\circ$ e $\hat{E} \cong \hat{E}' \cong \hat{E}'' \cong \hat{C} \cong 60^\circ$. Por outro lado, os pontos F e E são pontos médios dos lados AB e AC . Logo, EF é base média do ΔABC e mede metade de BC . Da mesma forma, $E'F'$ e $E''F''$ medem $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ de BC , respectivamente.

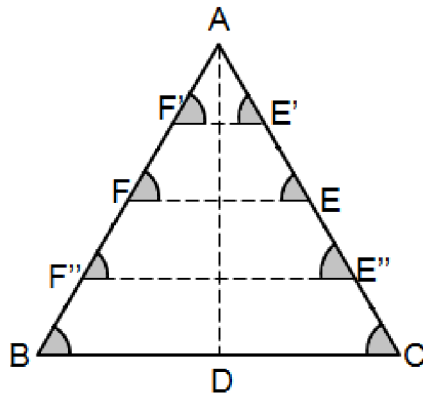


Figura 4.12: Segmentos paralelos a BC .

Essa mesma situação acontecerá nos passos que dividem as outras duas alturas (CF e BE). Concluimos então que todos os triângulos internos são equiláteros, pois seus ângulos internos são 60° e todos os lados serão $\frac{1}{4}$ do lado do $\triangle ABC$ equilátero.

Ao realizarmos o passo *VII*, observamos que os triângulos equiláteros PRQ , QEP , PFR e RDQ são as faces do tetraedro. Os próximos passos da construção são uma sobreposição dos outros triângulos nessas faces, concluindo-se que o tetraedro é **regular**, pois todas as faces são congruentes.

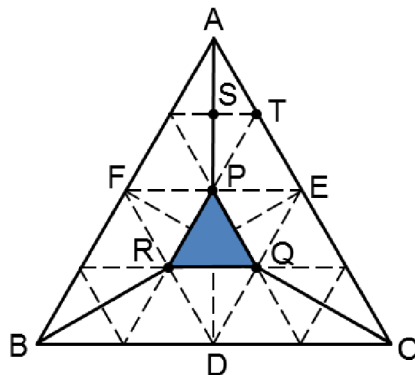


Figura 4.13: Faces do tetraedro.

Atividade Proposta 4.1. Nesse capítulo, construímos um tetraedro regular a partir de um triângulo equilátero. Você seria capaz de construir um cubo a partir de um quadrado ? Essa construção é de fato possível, e há diversas formas de fazê-la. Uma delas está descrita no vídeo

<https://www.youtube.com/watch?v=P3zTxXQ8E1o>. Tente reproduzi-la e procure compreender quais axiomas foram utilizados.

Capítulo 5

Dobraduras e Aritmética

Como vimos anteriormente, a arte da dobradura - do ponto de vista matemático - está fortemente relacionada aos elementos da geometria plana e espacial, indispensáveis para a *justificativa ou demonstração* de que as dobras efetivamente geram com precisão os objetos que foram construídos (a maioria deles regulares, ressaltando-se as imperfeições físicas do papel). Relacionar a abstração geométrica com a Beleza, o Lúdico e a Emoção do concretizar na matéria o conceito matemático antes apenas idealizado já é fato suficiente para justificar a motivação de se (re)introduzir as dobraduras como conteúdo dos cursos de Matemática do Ensino Médio, ou mesmo Fundamental.

Mas pode-se ir adiante: há como relacionar dobraduras com outras áreas da Matemática ? Neste capítulo mostraremos aplicações de dobraduras para alguns temas de interesse no Ensino Fundamental e Médio: a divisão de segmentos em números inteiros, progressões geométricas, e extração de raízes quadradas e cúbicas.

5.1 Dobradura e Divisão por “ n ”

Nesta seção, veremos como é possível obter um segmento que mede $\frac{1}{n}$ de outro segmento dado, para qualquer “ n ” inteiro através de dobraduras.

I - Inicialmente vamos determinar o segmento que equivale a $\frac{1}{2}$ do segmento

AD . Na folha sulfite A4, supomos que $\overline{AD} = 1$.

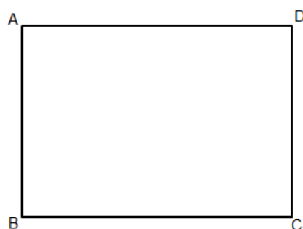


Figura 5.1: Segmento AD .

Fazemos uma dobra, levando os pontos A e B sobre os pontos D e C respectivamente, obtendo o segmento EF , onde $\overline{AE} = \overline{ED} = \frac{1}{2}$.

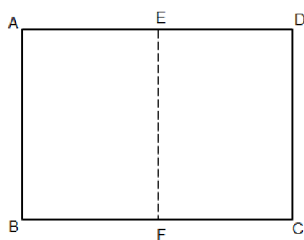


Figura 5.2: Dobra EF .

II - Agora, determinamos o segmento que equivale a $\frac{1}{3}$ de AD . Faça uma dobra que contenha os pontos A e C , determinando a diagonal AC do retângulo $ABCD$.

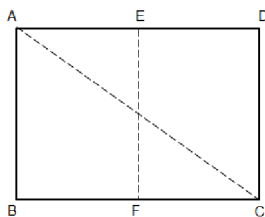


Figura 5.3: Diagonal AC .

A próxima dobra determina a diagonal DF do retângulo $EFCD$ e o encontro das duas diagonais determina o ponto P_3 . Observe que os triângulos ADP_3 e CFP_3 são semelhantes, pois $\widehat{DP_3A} \cong \widehat{FP_3C}$ (OPV), $P_3\widehat{DA} \cong P_3\widehat{FC}$ e $P_3\widehat{AD} \cong P_3\widehat{CF}$ (alternos internos). Logo, temos que:

$$(5.1) \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AP_3}}{\overline{P_3C}} \Rightarrow 2 = \frac{\overline{AP_3}}{\overline{P_3C}} \Rightarrow 2\overline{P_3C} = \overline{AP_3}.$$

Faça uma dobra que contenha o ponto P_3 e que seja perpendicular ao lado AD , determinando o segmento GH .

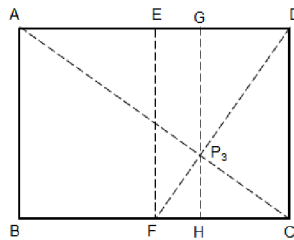


Figura 5.4: Segmento GH .

Como $\frac{\overline{GD}}{\overline{AG}} = \frac{1}{2}$, obtemos $\overline{GD} = \frac{1}{3}\overline{AD}$, como queríamos determinar.

III - Por recorrência podemos determinar o segmento que equivale a $\frac{1}{n}$ de AD . Isso significa que devemos partir de um segmento que equivale a $\frac{1}{n-1}$ de AD . Seja TD esse segmento, e TU a dobra perpendicular a AD , determinamos o ponto U sobre BC .

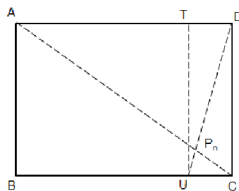


Figura 5.5: Segmento TU .

Temos que $\frac{\overline{AD}}{\overline{T'D}} = n - 1$. Fazemos a dobra sobre DU . E o encontro dessa dobra com a diagonal AC define o ponto P_n . Assim como no caso anterior, temos:

$$(5.2) \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{UC}} = \frac{\overline{AP_n}}{\overline{P_nC}} \Rightarrow n - 1 = \frac{\overline{AP_n}}{\overline{P_nC}} \Rightarrow (n - 1)\overline{P_nC} = \overline{AP_n}.$$

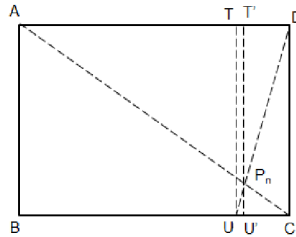


Figura 5.6: Segmento $T'U'$ e divisão.

IV - Novamente construindo o segmento $T'U'$ perpendicular a AD e passando por P_n , obtemos:

$$(5.3) \quad \frac{\overline{T'D}}{\overline{AT'}} = \frac{\overline{P_nC}}{\overline{AP_n}} = \frac{1}{n - 1} \Rightarrow \overline{AT'} = (n - 1)\overline{T'D}$$

E portanto $\overline{AD} = n\overline{T'D}$.

5.2 Dobradura e Progressão Geométrica

Através de algumas dobras simples, podemos construir uma sequência de segmentos que aumentam seu tamanho numa Proporção Geométrica (PG).

I - Partindo de uma folha sulfite A4, dobre-a ao meio, levando os pontos A e B , respectivamente, aos pontos D e C , determinando o segmento EF . Dobre a folha novamente ao meio, agora levando os pontos B e C , respectivamente, aos pontos A e D , determinando o segmento GH .

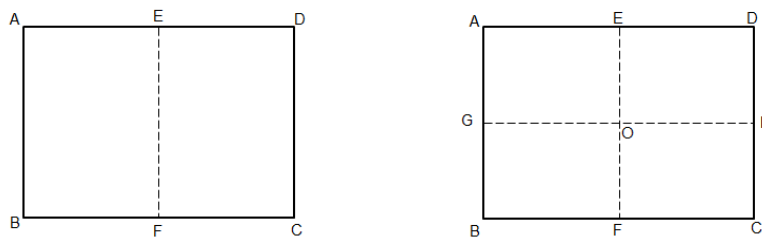


Figura 5.7: Dobras EF e GH .

II - Chamando de ponto O o encontro dos segmentos EF e GH , determine o ponto U , distando 1 unidade de O , e o ponto A_1 , distando uma medida qualquer a de O .

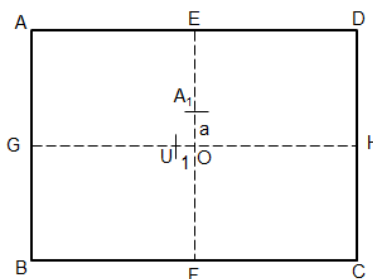


Figura 5.8: Pontos U e A_1 .

III - Faça uma dobra que contenha os pontos U e A_1 (axioma-1), determinando a reta r , que conterá UA_1 .

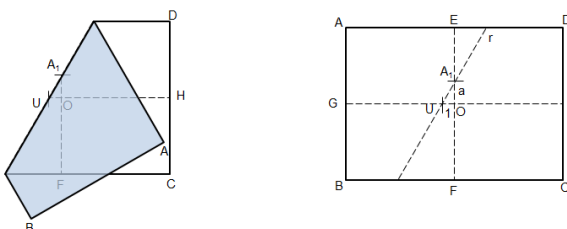


Figura 5.9: Dobra sobre UA_1 .

IV - Faça uma dobra que passe pelo ponto A_1 e que seja perpendicular à reta r (axioma-4), determinando o ponto A_2 e a reta s , que conterá A_1A_2 .

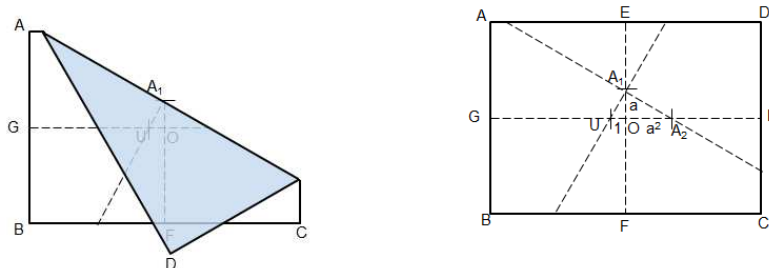


Figura 5.10: Dobra sobre A_1A_2 .

A partir de agora, repetimos a dobra anterior, determinando os pontos $A_3, A_4, A_5 \dots$. Obviamente estaremos limitados ao tamanho do papel. Vamos repetir a dobra mais uma vez para que fique mais claro.

V - Faça uma dobra que contenha o ponto A_2 e que seja perpendicular à reta s , determinando o ponto A_3 e a reta t contendo o segmento A_2A_3 .

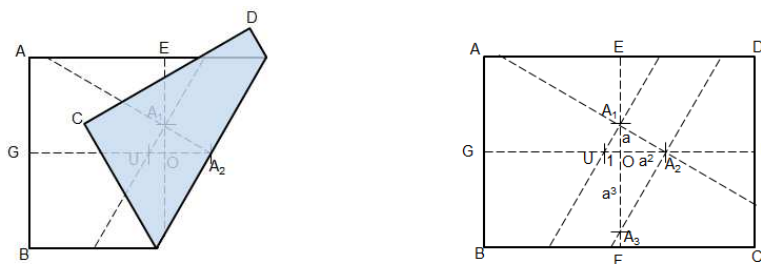


Figura 5.11: Dobra sobre A_2A_3 .

VI - Onde está a PG? Afirmamos que as medidas $\overline{OU}, \overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots$ estão numa progressão geométrica de razão $\overline{OA_1} = a$. Esse fato pode ser provado usando-se a semelhança dos triângulos retângulos obtidos nas dobras. Deixamos como um exercício (exercício 5.1) a sua demonstração.

5.3 Dobradura e Raiz Quadrada

Vamos demonstrar como podemos determinar a raiz quadrada de um número real positivo x , dado como comprimento de um segmento, através de dobraduras.

- I - Partindo de uma folha sulfite A4 com vértices $ABCD$, marque os pontos E e F , tais que $\overline{BE} = 1$ e $\overline{EF} = x$.

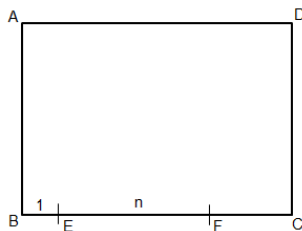


Figura 5.12: Pontos E e F .

- II - Faça dobras que contenham os pontos E e F e que sejam perpendiculares ao lado BC , determinando os segmentos GE e FH .

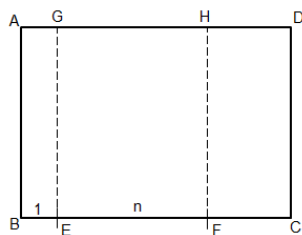


Figura 5.13: Segmentos GE e FH .

- III - Utilizando uma tesoura, corte sobre o segmento \overline{HF} , descartando o retângulo $HFCD$.

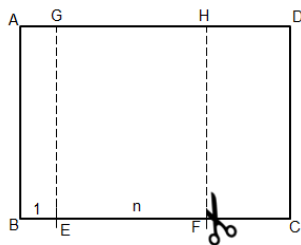


Figura 5.14: Corte em HF .

IV - A partir do retângulo $ABFH$, dobre de modo que os pontos F e H coincidam com os pontos B e A , respectivamente, determinando o segmento JI .

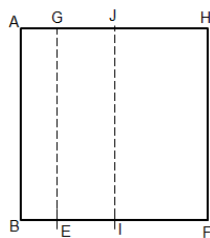


Figura 5.15: Segmento JI .

V - Fixe o ponto I e leve o ponto F até o segmento GE (axioma-5), determinando o ponto F' (ver figura 5.16).

O segmento EF' tem medida igual a \sqrt{x} . O que é bem simples de se justificar pela dobra realizada no passo V. Ao levar o ponto F ao segmento GE , garantimos que $\overline{IF} = \overline{IF'} = \frac{x+1}{2}$, sendo possível construir uma semicircunferência de centro I que contenha os pontos F e F' , conforme a figura 5.17.

Logo, o $\Delta BF'F$ é retângulo em F' . Como $\overline{BE} = 1$ e $\overline{EF} = x$ pelas

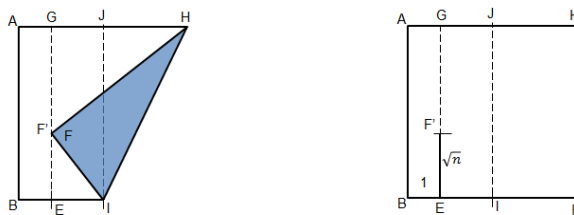


Figura 5.16: Ponto F' e raiz quadrada.

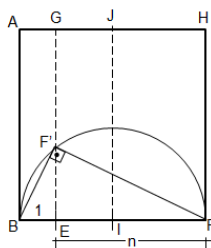


Figura 5.17: Triângulo Retângulo.

relações métricas no triângulo retângulo, temos que:

$$(5.4) \quad \overline{EF'}^2 = \overline{BE} \cdot \overline{EF} \Rightarrow \overline{EF'}^2 = 1 \cdot x \Rightarrow \overline{EF'} = \sqrt{x},$$

como queríamos demonstrar.

5.4 Dobradura e Raiz Cúbica

Através das dobraduras também podemos determinar a raiz cúbica de um número real positivo a . Para tanto, buscamos uma dobradura que realize os passos contrários à construção demonstrada na seção 5.2 deste capítulo.

- I - Partindo de um retângulo $ABCD$, marque sobre o segmento BC os pontos E e F , tais que $\overline{BE} = \overline{EF} = 1$.

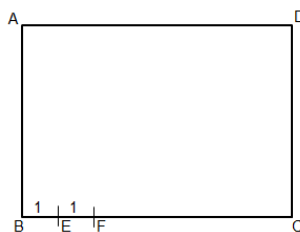


Figura 5.18: Pontos E e F .

II - Faça uma dobra que passe pelo ponto F e que seja perpendicular ao lado BC , determinando o segmento GF . Analogamente, construa uma dobra passando por E e perpendicular a BC , definindo o ponto H .

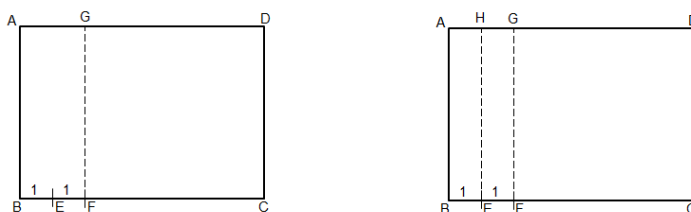


Figura 5.19: Segmentos GF e HE .

III - Sobre o segmento AB marque os pontos I e J , tais que $\overline{BI} = \overline{IJ} = a$.

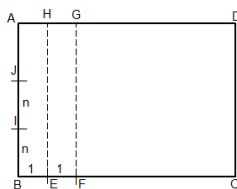


Figura 5.20: Pontos I e J .

IV - Faça uma dobra que contenha o ponto J e que seja perpendicular ao segmento AB , determinando o segmento JK . E faça uma dobra que

contenha o ponto I e que seja perpendicular ao segmento AB , determinando o segmento IL .

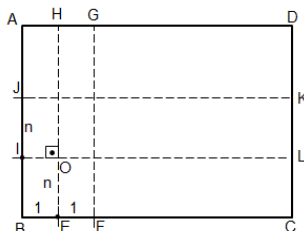


Figura 5.21: Segmentos JK e IL .

Vamos nomear de ponto O o encontro dos segmentos HE e IL , os quais formam 90° entre si.

V - Dobre, levando o ponto I sobre o segmento GF e o ponto E sobre o segmento JK (axioma-6), determinando os pontos I' e E' e a reta t .

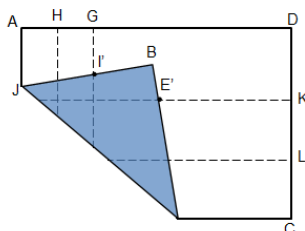


Figura 5.22: Dobra do axioma 6.

Observe que a reta t determina os pontos P e Q , respectivamente, nos segmentos II' e EE' , onde $\overline{OP} = \sqrt[3]{a}$.

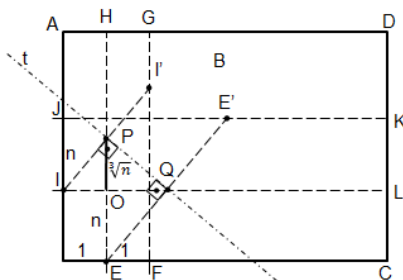


Figura 5.23: Reta t e pontos P e Q .

Justificativa da construção:

Pela construção podemos afirmar que $\hat{I}PQ \cong \hat{P}QE = 90^\circ$, logo $\Delta IPO \approx \Delta PQO \approx \Delta QEO$.

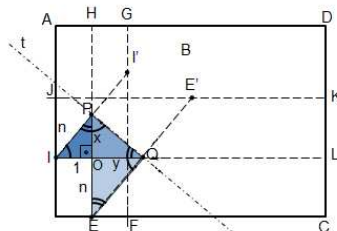


Figura 5.24: Ângulos retos.

Chamando \overline{OP} de x e \overline{OQ} de y , teremos os triângulos da figura a seguir.

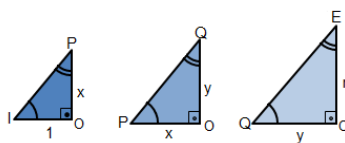


Figura 5.25: Triângulos semelhantes.

Assim, nos $\triangle IPO$ e $\triangle QEO$, temos:

$$(5.5) \quad \frac{1}{y} = \frac{x}{a} \Rightarrow y \cdot x = a \Rightarrow y = \frac{a}{x}.$$

Já, nos $\triangle PQO$ e $\triangle QEO$, temos

$$(5.6) \quad \frac{y}{a} = \frac{x}{y} \Rightarrow x \cdot a = y^2.$$

Substituindo $y = \frac{a}{x}$ em $x \cdot a = y^2$, deduzimos

$$(5.7) \quad x \cdot a = \left(\frac{a}{x}\right)^2 \Rightarrow x \cdot a = \frac{a^2}{x^2} \Rightarrow x^3 \cdot a = a^2 \Rightarrow x^3 = a \Rightarrow x = \sqrt[3]{a}.$$

Atividade Proposta 5.1. Na construção das dobras da seção 5.2, prove que $\overline{OA_2} = a^2$, $\overline{OA_3} = a^3$, ..., $\overline{OA_n} = a^n$, ou seja, que as medidas dos segmentos OA_n se encontram numa progressão geométrica de razão a .

Atividade Proposta 5.2. Dado um retângulo $ABCD$ no papel, obtenha, a partir de dobraduras, um quadrado com área igual à desse retângulo.

Atividade Proposta 5.3. Na seção 5.1, fizemos dobraduras que determinaram a divisão de um segmento em um número inteiro n de pedaços. Porém, pelo método apresentado, quanto maior o valor de n , mais dobras teremos que fazer. Para alguns valores de n , podem existir dobraduras que simplifiquem essa divisão. Procure descobrir:

- Como determinar o tamanho do segmento que representa $\frac{1}{9}$ de AB com apenas 6 dobras.
- Como determinar o tamanho do segmento que representa $\frac{1}{10}$ de AB com apenas 6 dobras.
- Como determinar o tamanho do segmento que representa $\frac{1}{12}$ de AB com apenas 6 dobras.

- Como determinar o tamanho do segmento que representa $\frac{1}{15}$ de AB com o menor número de dobras possível.

Atividade Proposta 5.4. Faça uma dobradura que determine a raiz quadrada do produto entre dois números ($\sqrt{x \cdot y}$).

Atividade Proposta 5.5. Será possível criar uma dobradura que determine $\sqrt[4]{x}$? E $\sqrt[5]{x}$?

Bibliografia

- [1] Cavacami, Eduardo e Furuya, Yolanda K. S., *Explorando Geometria com Origami*, <http://www.dm.ufscar.br/yolanda/origami/origami.pdf>, Departamento de Matemática UFSCAR, pag. 2 a 6, e pag. 28 a 33.
- [2] Lang, Robert J., *Origami*⁵, Ed. CRC Press, EUA, 2011, pag. 395 a 396.
- [3] Amui, Alzira B. França, *Fundamentos Educacionais para a Escola do Espírito*, Editora Esperança e Caridade, 2011, pag. 92 a 95.
- [4] Lang, Robert J., <http://www.langorigami.com/>.