



ELOY NICOTERA JUNIOR

**CÁLCULO VISUAL:  
UMA APRESENTAÇÃO DO TEOREMA DE MAMIKON**

**Santo André, 2017**





**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

**CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO**

**ELOY NICOTERA JUNIOR**

**CÁLCULO VISUAL:  
UMA APRESENTAÇÃO DO TEOREMA DE MAMIKON**

**Orientador: Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO ELOY NICOTERA JUNIOR,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI.

**SANTO ANDRÉ, 2017**

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Nicotera Junior, Eloy  
CÁLCULO VISUAL : UMA APRESENTAÇÃO DO TEOREMA DE  
MAMIKON / Eloy Nicotera Junior. — 2017.

82 fls. : il.

Orientador: Sinuê Dayan Barbero Lodovici

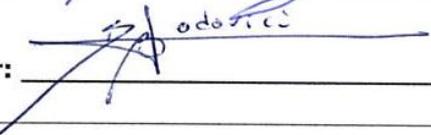
Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo  
André, 2017.

1. Teorema de Mamikon. 2. Cálculo Visual. 3. Geometria. 4. Geometria  
Dinâmica. 5. Geometria Diferencial. I. Lodovici, Sinuê Dayan Barbero. II.  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,  
2017. III. Título.

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.**

Santo André, 02 de Maio de 2017.

Assinatura do autor: 

Assinatura do orientador:  odorsci





**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Fundação Universidade Federal do ABC**  
**Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática**  
**em Rede Nacional**

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017  
profmat@ufabc.edu.br

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Eloy Nicotera Junior, realizada em 10 de fevereiro de 2017:

---

Prof.(a) Dr.(a) **Sinuê Dayan Barbero Lodovici** (UFABC) – Presidente

---

Prof.(a) Dr.(a) **Ana Carolina Boero** (UFABC) – Membro Titular

---

Prof.(a) Dr.(a) **Renato Alessandro Martins** (UNIFESP) – Membro Titular

---

Prof.(a) Dr.(a) **Daniel Miranda Machado** (UFABC) – Membro Suplente

---

Prof.(a) Dr.(a) **Alexandre Lymberopoulos** (USP) – Membro Suplente



---

*“Quando os matemáticos estão pensando sobre seus problemas, não estão pensando em suas várias aplicações, mas sim em busca da beleza.”*

(Manjul Bhargava, Professor da Universidade de Princeton e ganhador da Medalha Fields em 2014.)



---

## RESUMO

---

O Teorema de Mamikon traz caminhos geométricos alternativos ao Cálculo para determinar área e volumes. Este método tem uma abordagem dinâmica e requer poucos conhecimentos da Matemática Superior, o que permite a possibilidade de ser apresentado para alunos ainda nas séries iniciais do ensino básico.

Por ser um trabalho novo, quase todos os trabalhos e artigos sobre o teorema são publicações dos próprios autores e acreditamos que esta seja a primeira apresentação em português.

Nos primeiros capítulos, temos a apresentação e desenvolvimento do teorema, contando com demonstrações intuitivas e visuais e são facilmente entendidas, principalmente se apresentadas com softwares de visualização como o Geogebra<sup>1</sup> e o Cabri<sup>2</sup>. Seguimos com aplicações a algumas das principais funções em  $\mathbb{R}^2$ .

No terceiro capítulo, apresentamos algumas ferramentas e fórmulas dos vetores e do Cálculo Vetorial, necessários para o capítulo seguinte, onde trazemos a demonstração formal do caso geral usando Geometria Diferencial.

**Palavras-chave:** Teorema de Mamikon, Cálculo Visual, Geometria, Geometria Dinâmica, Geometria Diferencial.

---

1 <http://www.geogebra.org>

2 <http://www.cabri.com/>



---

## ABSTRACT

---

Mamikon's Theorem presents an alternative geometric path to Calculus to determine areas and volumes. The method has a dynamic approach and only a modest background is needed, which bring us possibilities to be introduced to students in elementary levels.

Because it's a new work, almost all papers and articles are authored by the original authors and we believe this is the first presentation in Portuguese.

The first chapters have a presentation and development of the theorem counting on with a visual and intuitive demonstration that can be easily understood, mainly if presented with visualization programs like Geogebra and Cabri. We follow with applications to usual functions in  $\mathbb{R}^2$ .

In third chapter, we present some tools and formulas from vectors and vector calculus, required to understand the next chapter, where we write the formal and general proof of the theorem using Differential Geometry.

**Keywords:** Mamikon's Theorem, Visual Calculus, Geometry, Dinamic Geometry, Differential Geometry



---

# CONTEÚDO

---

INTRODUÇÃO	1
1 TEOREMA DE MAMIKON E A TANGENTE QUE VARRE	3
1.1 Evolução do Teorema	3
1.2 Aplicação em polígonos	6
1.3 Teorema de Pitágoras	8
1.4 Aplicação em Cascas Esféricas	9
1.5 Tangente que varre e feixe de tangentes de comprimento constante	11
1.6 Tangente que varre com comprimento variável.	12
2 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE MAMIKON	15
2.1 Subtangentes utilizadas para desenhar retas tangentes à curvas planas	15
2.1.1 Subtangentes de comprimento constante	17
2.1.2 Subtangentes lineares	19
2.2 Funções Exponenciais	20
2.3 Área de um segmento hiperbólico.	22
2.4 Área do Segmento Parabólico	25
2.4.1 Um tratamento alternativo para a parábola.	28
2.5 Potências reais positivas	30
2.5.1 Tratamento alternativo para potências positivas	32
2.6 Potências de expoente negativo	34
2.7 Tratamento alternativo para potências negativas	36
2.8 Uma aplicação reversa do Teorema de Mamikon	37
2.8.1 Área de uma região polar	38
2.8.2 Área da região delimitada por $f(\theta) = \operatorname{tg}\theta$ .	39
3 VETORES E FUNÇÕES VETORIAIS	41
3.1 Vetores	41
3.1.1 Norma de um vetor	42
3.1.2 Ângulo entre dois vetores	43
3.1.3 Posição relativa entre dois vetores	44

3.1.4	Produto Vetorial	44
3.1.5	Área do paralelogramo	45
3.2	Funções Vetoriais	46
3.2.1	Significado geométrico de derivada	47
3.2.2	Regras de derivação	48
3.2.3	Comprimento de arco	49
3.2.4	Parametrização de uma curva	51
3.2.5	Parametrização pelo comprimento de arco	53
3.2.6	Curvatura	55
3.2.7	Vetor Normal	57
3.3	Superfícies Parametrizadas	57
3.3.1	Área de uma superfície parametrizada	59
4	DEMONSTRAÇÃO	63
4.1	Coroa Circular	64
4.2	Helicóide	67
4.3	Caso Geral	69
A	APÊNDICE A	75
A.1	Superfícies Regradas Desenvolvível	75
A.1.1	Superfície regradada em $\mathbb{R}^3$	75
A.1.2	Superfícies desenvolvíveis	76
B	APÊNDICE B	79
B.1	Retas tangentes e a derivada	79
B.1.1	Derivada da função potência.	81
B.1.2	Derivada da função exponencial.	81
	Bibliografia	83

---

## INTRODUÇÃO

---

Este trabalho tem como base o livro *New Horizons in Geometry* [6], de Tom Apostol e Mamikon Mnatsakanian, que traz uma abordagem visual e inovadora para muitos dos problemas clássicos do Cálculo. Os autores utilizam métodos geométricos que requerem pouco ou nenhuma fórmula para resolver estes problemas.

Mamikon, hoje autor de mais de 80 trabalhos, concebeu as ideias principais de seu trabalho em 1959, quando estudante de graduação na *Yerevan University* na Armênia. Ainda jovem, apresentou seu método para matemáticos soviéticos, porém estes o negaram dizendo "*Não pode estar certo. Você não pode resolver problemas de Cálculo tão facilmente*".

Em seguida, Mamikon obteve o título de Ph.D. em Física e tornou-se professor de astrofísica da *Yerevan University*. Mamikon publicou seu trabalho em 1981, mas não obteve grande repercussão. Provavelmente, por ter publicado em russo em um jornal armênio de circulação limitada [13].

Em 1990, Mamikon viajou para a Califórnia com o objetivo de estudar terremotos. Quando a União Soviética colapsou, Mamikon ficou extraditado nos Estados Unidos e com o auxílio de alguns matemáticos começou a trabalhar na *UC Davis* e para o Departamento de Educação da Califórnia, onde desenvolveu seu método para uma ferramenta de ensino universal de modo que alunos pudessem experimentar com a ajuda de computadores e diagramas. Ele ensinou seu método em diversas escolas, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio e demonstrava-o para professores em conferências. Tanto os professores quanto os alunos ficaram entusiasmados, pois este método dinâmico não requer o formalismo da Álgebra, Trigonometria ou Cálculo.

Alguns anos mais tarde em visita à *Caltech* conheceu Tom Apostol [1], mostrando os potenciais que seu método poderia trazer para o ensino de Matemática, especialmente quando combinado com as ferramentas modernas de visualização que a tecnologia nos trouxe.

---

<sup>1</sup> Tom Apostol é membro da *Caltech* desde 1950. Atua na área de Teoria dos Números e é autor de mais de 100 trabalhos e 61 livros, dentre os quais estão os dois volumes de Cálculo publicados e traduzidos para diversos idiomas há mais de 50 anos.

Desde então, Mamikon e Apostol publicaram 30 trabalhos em conjunto, a maioria na área da Geometria. Juntos conquistaram três *Lester R. Ford Awards*<sup>2</sup> por cinco trabalhos publicado na *American Mathematical Monthly*, em 2004, 2007 e 2009.

O método de Mamikon requer pequenas bases matemáticas e sempre que possível apela para o toque intuíto dos alunos para chegar a resultados e conclusões surpreendentes. De maneira geral, Mamikon e Apostol abordam a geometria clássica com uma visão moderna bem como a geometria moderna utilizando-se de um toque clássico. Os resultados discutidos pelos autores são inovadores e, quando não, apresentam abordagens não usuais para obter generalizações inesperadas.

O trabalho destes autores pode trazer para os alunos do ensino básico um primeiro contato com problemas normalmente resolvidos com o uso do Cálculo e de Equações Diferenciais. Com seu teorema, muitos destes problemas podem ser resolvidos apelando para noções da Geometria e um toque de imaginação para abordar as figuras de uma forma dinâmica.

---

<sup>2</sup> Prêmio concedido aos melhores artigos publicados no periódico *American Mathematical Monthly*.

---

## TEOREMA DE MAMIKON E A TANGENTE QUE VARRE

---

Muitos problemas do Cálculo Diferencial podem ser resolvidos utilizando-se um inovador método visual sem o uso de fórmulas. Este método é baseado no *Teorema da Tangente que Varre*<sup>1</sup> de Mamikon, um resultado geometricamente intuitivo que pode ser apresentado a jovens estudantes, mesmo aqueles com pouco ou nenhum conhecimento de cálculo.

Neste primeiro capítulo introduziremos o Teorema de Mamikon apresentando a tangente que varre uma curva e o feixe de tangentes<sup>2</sup> correspondente a ela.

Um outro resultado que veremos é que ao assumir o Teorema de Mamikon como base podemos provar um dos mais importantes e conhecidos teoremas da geometria.

### 1.1 EVOLUÇÃO DO TEOREMA

O método de Mamikon teve início com um simples problema de geometria, muitas vezes apresentado aos alunos do final do Ensino Fundamental. Determinar a área de uma coroa circular dado uma corda, de comprimento  $a$ , da circunferência maior que seja tangente à circunferência interior.

---

1 Tradução própria do original *Sweeping Tangent*.

2 Do original *Tangent Cluster*.

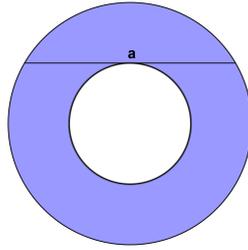


Figura 1: Coroa circular.

Este problema é facilmente resolvido observando que a circunferência menor de raio  $r$  tem área  $\pi r^2$  e a circunferência maior de raio  $R$  tem área  $\pi R^2$ , então a área da coroa circular será dada por  $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$ . Mas os raios e o segmento  $a$  formam um triângulo retângulo de catetos  $a/2$  e  $r$  e hipotenusa  $R$ , então pelo Teorema de Pitágoras temos que  $R^2 - r^2 = (a/2)^2$ . Logo, a área procurada será  $\pi a^2/4$ . Ou seja, a resposta depende apenas do comprimento de  $a$  e não dos raios das circunferências.

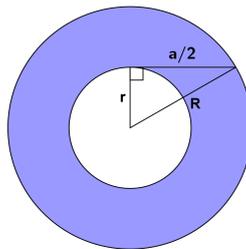


Figura 2: Coroa circular e o triângulo retângulo.

Mamikon notou que se soubéssemos que a resposta dependia apenas de  $a$  poderia haver outra forma de abordar o problema. Como os comprimentos dos raios não influenciam na resposta, podemos diminuir o tamanho de  $r$  até que a circunferência menor torne-se um ponto. Transformaríamos nossa figura em um disco de diâmetro  $a$ , logo, sua área será  $\pi a^2/4$ . Mamikon ainda perguntou-se se haveria outra forma de mostrar que a resposta depende apenas de  $a$ . Trouxe, então, uma ideia dinâmica ao problema. Tomando a metade da corda  $a$  como um vetor de comprimento  $L$  tangente à circunferência interior e movendo este vetor sobre a circunferência podemos ver que ele varre toda a região da coroa, então sua área pode ser determinada somando todos estes vetores criados por esse movimento de rotação.

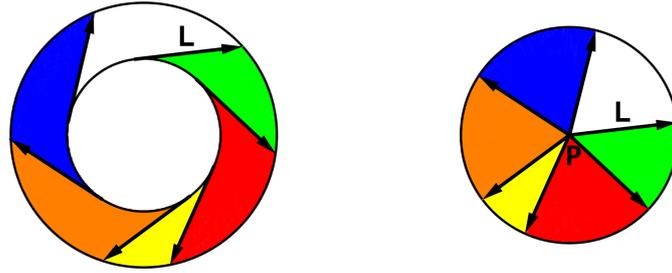


Figura 3: Coroa varrida pelo vetor de comprimento fixo e a região composta pela translação dos vetores .

Agora, transladando estes vetores paralelamente um ao outro de modo que a origem destes seja um ponto comum, ver  $P$  Figura (3), criamos um círculo. Uma outra maneira de analisarmos, é que enquanto o vetor  $L$  se move pela coroa sua imagem com origem fixa rotaciona ao redor de  $P$  desenhando o círculo de raio  $L$ . Portanto, as duas regiões tem áreas equivalentes.

Também foi percebido que esta forma dinâmica pode ser aplicada quando trocamos a circunferência interior por uma curva simples, fechada e convexa qualquer, a qual nos referiremos como *forma oval*. Na Figura (4) mostramos a mesma ideia usando duas elipses.

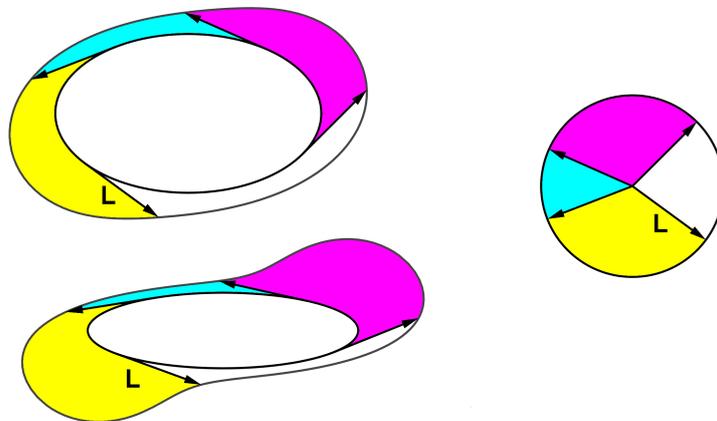


Figura 4: Tangente às elipses varrendo a coroa oval.

Enquanto o segmento tangente de tamanho fixo move-se ao longo das elipses ela varre uma região generalizada que chamaremos de *coroa oval*<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> No original, *Oval Ring*.

Novamente transladando cada segmento para o vértice comum  $P$ , enquanto a tangente desliza pelas elipses sua imagem gera um círculo de raio  $L$ . Então a área da coroa oval deve ser igual à área do círculo de raio  $L$ .

Veja que neste caso não podemos utilizar o Teorema de Pitágoras e para determinar a área provavelmente teríamos que recorrer ao Cálculo, caindo em uma tarefa não muito trivial. Inicialmente determinando uma equação para a curva interior, em seguida calcular sua derivada e um vetor tangente para descrever a coroa.

Se a região oval for uma elipse de eixos  $2a$  e  $2b$  centrada na origem, podemos considerar a equação paramétrica  $X(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$  e sua derivada  $X'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$ . A coroa oval será descrita por:

$$Y(t, v) = (a \cos(t), b \sin(t)) + v \frac{(-a \sin(t), b \cos(t))}{|(-a \sin(t), b \cos(t))|}, \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq v \leq L. \quad (1.1)$$

E sua área é dada ao resolver a integral dupla<sup>4</sup>:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial Y}{\partial t} \times \frac{\partial Y}{\partial u} \right\| dt dv \quad (1.2)$$

## 1.2 APLICAÇÃO EM POLÍGONOS

Ao invés de uma circunferência ou elipse como base da nossa figura, podemos considerar um polígono convexo? A resposta é sim. A propósito é muito mais fácil observar a relação entre a área da tangente que varre e do feixe de tangente quando consideramos polígonos. Abaixo mostramos um triângulo e um segmento tangente que se move sobre os lados.

---

<sup>4</sup> Trabalhamos mais detalhadamente e resolvemos esta integral no Capítulo [4](#)

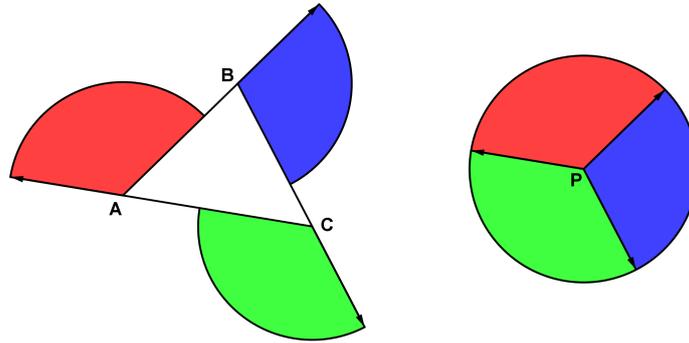


Figura 5: Tangente de comprimento constante movendo-se pelo triângulo.

Como os lados do triângulo são suportados por retas, a tangente que varre não muda de direção, logo não descreve nenhuma área ao se mover entre os vértices. A mudança de direção ocorrerá apenas quando a tangente passa por um dos vértices em direção ao lado consecutivo, onde irá descrever um setor circular com raio igual ao comprimento do segmento.

Ao percorrer o perímetro do triângulo a tangente que varre irá descrever três setores circulares de mesmo raio e que juntos completarão um círculo.

O mesmo vale para um polígono convexo qualquer. Em um polígono com  $n$  lados a tangente que varre irá descrever  $n$  setores circulares. Como o segmento tangente tem comprimento constante não precisamos nos preocupar com os “encaixes” destes setores e para verificar que realmente formarão um círculo basta notar que a abertura de cada um destes setores corresponde a um ângulo externo do polígono e lembrar que a soma de todos os ângulos externos de um polígono convexo é sempre  $360^\circ$ .

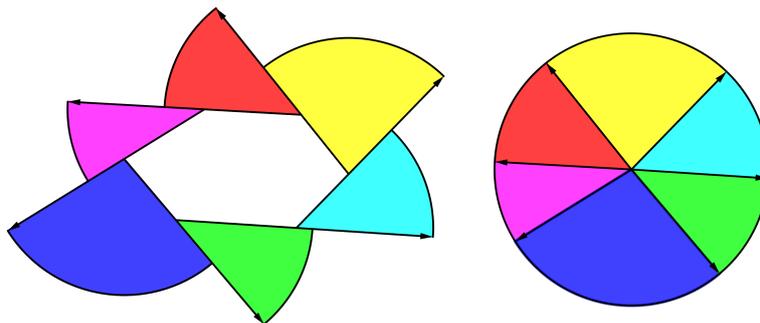


Figura 6: Tangente de comprimento constante movendo-se pelo hexágono.

Logo, a área da região varrida pela tangente ao caminhar pelos lados do polígono será igual à área do círculo cujo raio é o comprimento do segmento tangente.

A mesma ideia se aplicará se considerarmos uma curva convexa fechada<sup>5</sup> como o limite de polígonos convexos cujo número de lados tende ao infinito e estes tendem a comprimento zero, o que nos leva a:

**Teorema 1.1.** *Teorema de Mamikon para coroas ovais*

*Dada uma curva convexa fechada varrida por um segmento tangente de comprimento fixo, chamaremos de coroa oval a região delimitada por esta curva inicial e a curva obtida pela união dos pontos da outra extremidade dos segmentos tangentes. Toda coroa oval varrida por um segmento tangente de comprimento fixo terá área constante, independentemente do formato da curva. Ainda, a área dependerá apenas do comprimento  $L$  do segmento e é igual a  $\pi L^2$ . Ou seja, o movimento do segmento tangente sobre a curva descreve uma superfície de área equivalente a uma rotação completa deste segmento sobre um ponto fixo.*

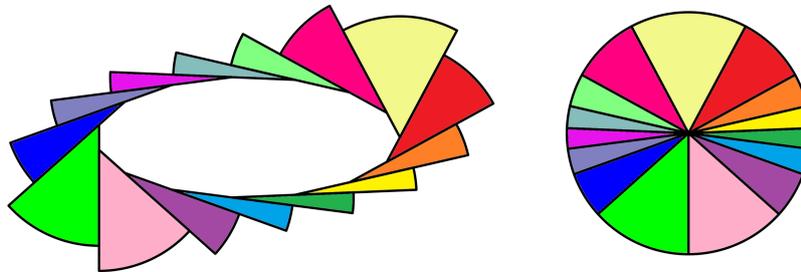


Figura 7: Tangente de comprimento constante movendo-se por um polígono convexo de muitos lados.

### 1.3 TEOREMA DE PITÁGORAS

Considerando uma coroa circular onde a circunferência interior tem raio  $r$  e a circunferência exterior raio  $R$ , sabemos que sua área será dada pela diferença  $\pi R^2 - \pi r^2$ .

<sup>5</sup> Neste caso consideramos a convexidade da curva fechada bem como a convexidade de polígonos.

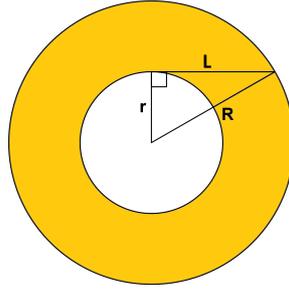


Figura 8: O Teorema de Mamikon implica o Teorema de Pitágoras.

Mas pelo Teorema de Mamikon vimos que sua área também é igual a  $\pi L^2$ , onde  $L$  é um segmento tangente à circunferência interior. Igualando as equações temos:

$$\begin{aligned}\pi R^2 - \pi r^2 &= \pi L^2 \\ R^2 - r^2 &= L^2 \\ r^2 + L^2 &= R^2\end{aligned}$$

ou seja, o Teorema de Pitágoras.

#### 1.4 APLICAÇÃO EM CASCAS ESFÉRICAS

Uma *casca esférica* é a região entre duas esferas concêntricas. A secção transversal por um plano que corte ambas as esferas será uma coroa circular cujos raios interior e exterior dependerão do plano de corte. Porém, o Teorema de Mamikon para coroas ovais implica um resultado inesperado.

**Teorema 1.2.** *Teorema de Mamikon aplicado em cascas esféricas*

*A área da coroa circular formada pela intersecção de um plano com as esferas concêntricas é constante, independentemente da posição e da inclinação do plano de corte.*

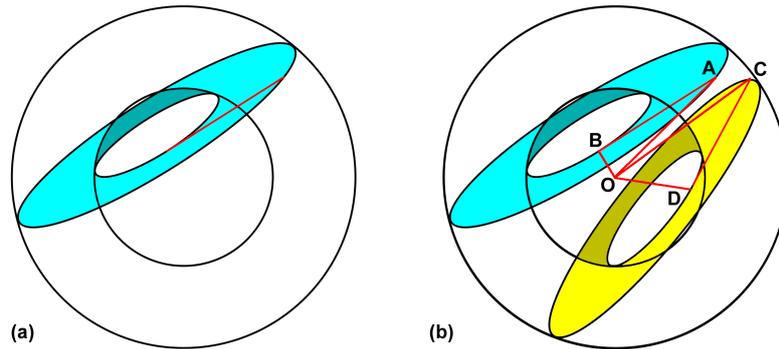


Figura 9: (a) Secção de uma casca esférica por um plano. (b) Triângulos  $OAB$  e  $OCD$  em duas secções quaisquer.

*Demonstração.* Vimos que a área de uma coroa circular depende unicamente do comprimento de uma corda da circunferência exterior que é tangente à circunferência interior. Veja que na coroa obtida na secção o segmento tangente é um segmento também tangente à esfera interna e, pela simetria da esfera, esse segmento terá comprimento constante independentemente da posição e inclinação do plano de corte, contanto que este plano seccione ambas as esferas.

Uma outra forma de fazer esta verificação é tomar dois planos quaisquer que cortem ambas as esferas. Tomemos  $r$  e  $R$  os raios das esferas interior e exterior e  $O$  o centro de ambas. Nas duas secções obteremos duas coroas, Figura 9. Considerando os triângulos  $OAB$  e  $OCD$  nas secções, onde  $A$  e  $C$  pertencem à esfera maior e  $B$  e  $D$  são os pontos de tangência com a esfera menor. Então,  $OAB$  e  $OCD$  são triângulos retângulos com um dos catetos medindo  $r$  e hipotenusa  $R$  e portanto são congruentes nos dando  $AB = CD = L$ .

Concluimos, então, que qualquer plano que intersecte ambas as esferas determinará uma secção de área igual a  $\pi L^2$ .  $\square$

Se esta propriedade for aplicada a duas fatias de mesma espessura obtidas por secções paralelas teremos que ambas fatias terão mesmo volume. Este fato tem aplicações à tomografia<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> Para mais detalhes, consulte [6].

## 1.5 TANGENTE QUE VARRE E FEIXE DE TANGENTES DE COMPRIMENTO CONSTANTE

Aqui traremos um versão estendida do Teorema de Mamikon. Considere uma curva plana suave <sup>7</sup> qualquer, que chamaremos de *curva de tangência*  $\tau$ . A reunião de todos os segmentos tangentes de comprimento constante define uma região que é cercada por  $\tau$  e por uma curva superior  $\sigma$  definida pela outra extremidade dos segmentos. A forma desta região depende da curva  $\tau$  e do comprimento do segmento tangente que vai de  $\tau$  até  $\sigma$ . Nos referiremos a esta região como a *região gerada pela tangente que varre*.

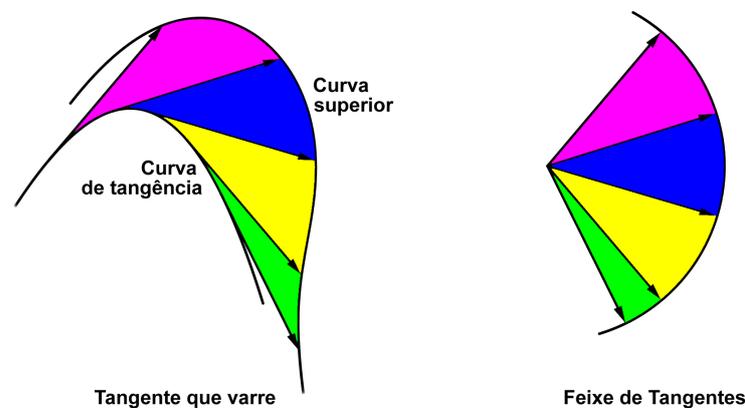


Figura 10: O feixe de tangentes correspondente à tangente que varre de comprimento constante é um setor circular.

Quando cada segmento é transladado paralelo um ao outro de modo que o ponto de tangência de todos seja trazido a um ponto comum teremos a região definida como feixe de tangentes. Poderíamos ter trazido a outra extremidade de cada segmento a um ponto comum, gerando um feixe de tangentes simétrico ao anterior.

Como cada segmento tem comprimento constante o feixe de tangentes é um setor circular cujo raio é o comprimento do segmento.

Afirmamos, então:

**Teorema 1.3.** *Teorema de Mamikon para segmentos tangentes de comprimento constante.*

<sup>7</sup> Curvas suaves são descritas em [3.3](#).

*A área descrita pela tangente que varre uma curva suave é igual à área do feixe de tangentes correspondente, independentemente da forma da curva inicial.*

Podemos ver esta aplicação no mundo real observando uma bicicleta fazendo uma mudança de trajetória. A roda da frente da bicicleta traça uma curva enquanto a roda traseira traça uma outra.

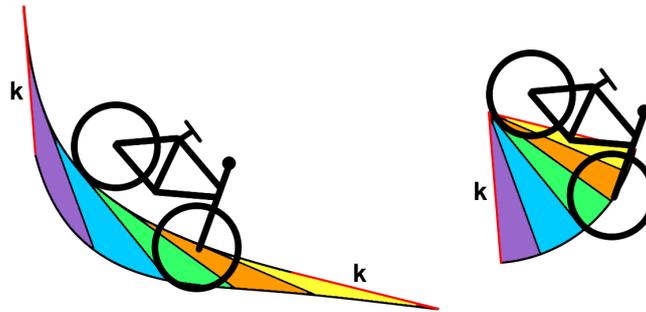


Figura 11: Determinar a área da região entre as marcas das duas rodas da bicicleta.

A área descrita pela tangente que varre, desde que o percurso da roda traseira não cruze com o percurso da roda dianteira, tem área igual a um setor circular dependendo apenas do comprimento da bicicleta e da mudança de ângulo entre a posição inicial e a posição final conforme mostramos acima<sup>8</sup>.

#### 1.6 TANGENTE QUE VARRE COM COMPRIMENTO VARIÁVEL.

Trazemos agora uma ideia um pouco mais abrangente, onde os segmentos tangentes que partem de  $\tau$  até a curva  $\sigma$  não precisam ter um comprimento constante. Considere a região da tangente que varre com comprimento variável e o feixe de tangentes correspondente quando trazemos todos os pontos de tangência para o ponto comum  $O$ , ilustrado à baixo.

<sup>8</sup> Situações mais gerais da bicicleta podem ser vistas em [6].

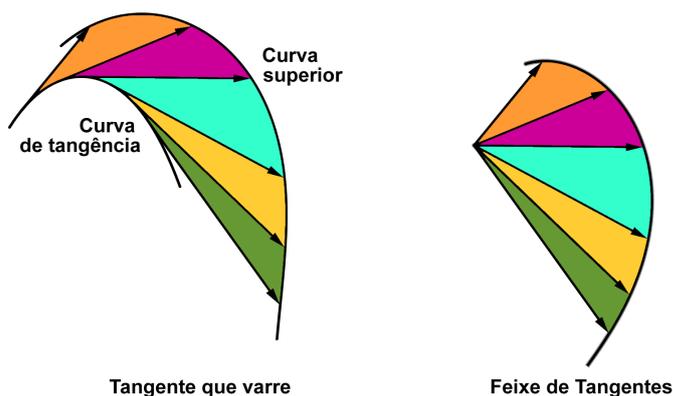


Figura 12: Tangente que varre e feixe de tangentes com comprimento variável.

O Teorema de Mamikon sugere que ambas as figuras têm a mesma área. Essa verificação pode ser feita considerando o Teorema 1.3 e ao fazer um recorte contínuo em uma região da tangente que varre de comprimento constante cada segmento cortado ao ser transladado para o feixe de tangentes trará uma perda de área equivalente à primeira figura. Logo, o Teorema pode ser aplicado também à tangente que varre de comprimento variável.

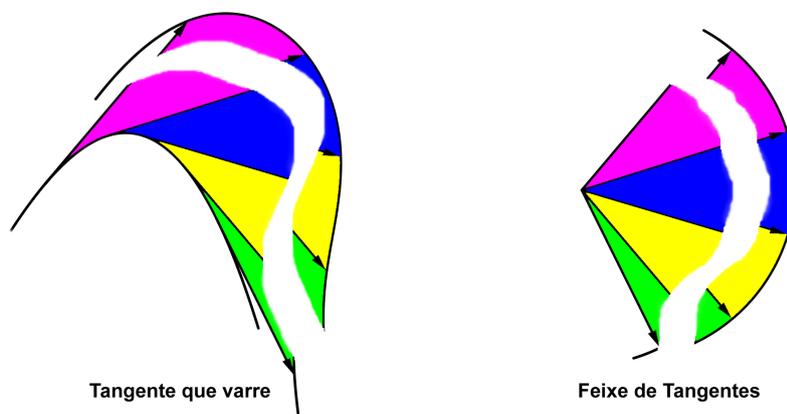


Figura 13: Os cortes retirados têm área equivalente.

No caso mais geral do Teorema de Mamikon a curva inicial nem mesmo precisa ser plana. Podemos considerar qualquer curva suave no espaço com os segmentos tangentes variando seu tamanho.

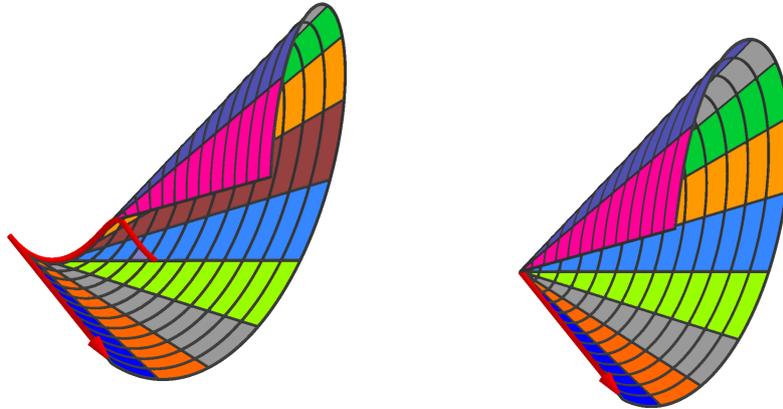


Figura 14: Tangente que varre e feixe de tangentes de uma curva espacial.

A região da tangente que varre está sobre uma superfície desenvolvível<sup>9</sup> que pode ser desenrolada em um plano sem distorção de área. Novamente a forma descrita pela tangente que varre depende apenas da curva inicial e de como os comprimentos e direção dos segmentos tangentes variam pela curva. Já o feixe de tangentes de uma curva no espaço será uma superfície cônica cujo vértice é o ponto comum a que transladamos os segmentos tangentes, ou seja, uma superfície que também pode ser desenrolada em um plano. Finalizamos então:

**Teorema 1.4.** *Forma Geral do Teorema de Mamikon.*

*A área da região formada pela tangente que varre ao percorrer uma curva espacial suave é igual à área de seu feixe de tangentes, que é descrito sobre uma superfície cônica.*

Ressaltamos aqui que as ideias apresentadas seguiram de maneira visual e intuitiva, porém a demonstração formal será apresentada no Capítulo 4.

<sup>9</sup> Comentaremos mais sobre este assunto em 4.3 e A.1.

---

## APLICAÇÕES DO TEOREMA DE MAMIKON

---

Neste capítulo iremos utilizar o Teorema de Mamikon para calcular a área sob algumas das principais funções apresentadas tanto aos alunos do Ensino Médio quanto nos cursos de Cálculo. Como já é sabido, a área formada entre uma curva e o eixo  $x$  é dada por uma integral. Porém, o Teorema da Tangente que Varre nos permite determinar estas áreas utilizando algumas noções básicas de Geometria.

Como o Teorema de Mamikon trabalha com segmentos tangentes à uma curva vamos iniciar apresentando um método para determinar estes segmentos usando a derivada de uma função<sup>1</sup>.

### 2.1 SUBTANGENTES UTILIZADAS PARA DESENHAR RETAS TANGENTES À CURVAS PLANAS

A reta tangente ao gráfico da função  $f$  passando pelo ponto  $(x, f(x))$  é a reta com inclinação, ou coeficiente angular, igual a  $f'(x)$ . Um método prático para desenhar esta reta é ligar o ponto  $(x, f(x))$  a algum outro ponto pertencente à reta tangente. Algumas vezes podemos determinar este outro ponto sem explicitar  $f'(x)$ . Como é o caso das curvas exponenciais, conforme veremos a seguir.

---

1 O leitor que necessitar relembra os conceitos de reta tangente e derivada pode consultar o Apêndice B

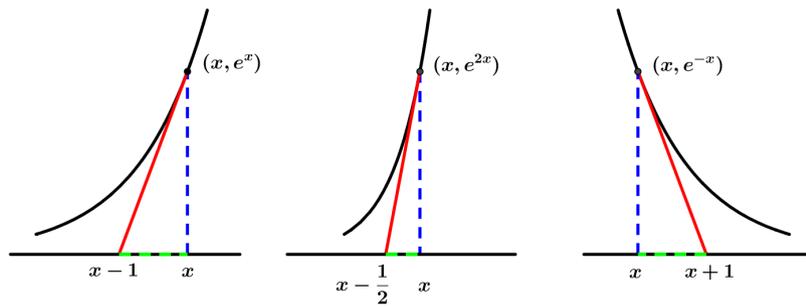


Figura 15: Desenhando retas tangentes às curvas exponenciais.

No primeiro desenho temos a reta que passa pelos pontos  $(x, e^x)$  e  $(x - 1, 0)$ . Esta reta é tangente à função  $f(x) = e^x$ , pois sua inclinação é  $e^x$ , ou seja, a derivada de  $f$ . No segundo, temos a reta que passa pelos pontos  $(x, e^{2x})$  e  $(x - \frac{1}{2}, 0)$  e é tangente à  $f(x) = e^{2x}$  e no terceiro temos a reta que passa pelos pontos  $(x, e^{-x})$  e  $(x + 1, 0)$  e é tangente à  $f(x) = e^{-x}$ .

De maneira geral, dada uma função  $y = f(x)$  podemos determinar um ponto  $x_0$  sobre o eixo  $x$  e que pertence à reta tangente à  $f$  lembrando que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x) - 0}{x - x_0} \\ x - x_0 &= \frac{f(x)}{f'(x)} \\ x_0 &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ x_0 &= x - s(x) \end{aligned}$$

onde definimos  $s(x) = f(x)/f'(x)$  como a *subtangente* de  $f$  para todo ponto  $x$  onde a derivada é não nula.

Desta forma, se  $s(x)$  é conhecida, para desenhar a reta tangente à  $f$  num ponto qualquer basta tomar os pontos  $(x, f(x))$  e  $(x - s(x), 0)$ . Lembramos aqui que os pontos  $(x, f(x))$ ,  $(x - s(x), 0)$  e  $(x, 0)$  formam um triângulo retângulo cuja base e altura são respectivamente  $s(x)$  e  $f(x)$  e a hipotenusa tem inclinação  $f'(x)$ .

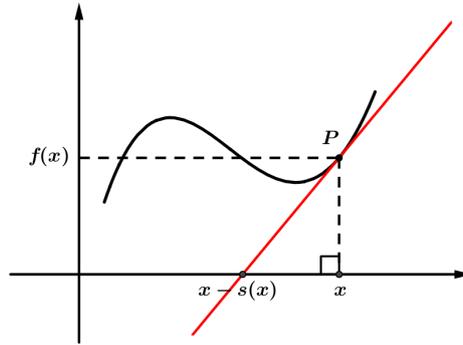


Figura 16: Retas tangente que passa pelos pontos  $(x, f(x))$  e  $(x - s(x), 0)$ .

### 2.1.1 Subtangentes de comprimento constante

Em 1684, Leibniz propôs o problema de determinar todas as curvas cujas subtangentes são constantes.

**Teorema 2.1.** *Toda função cujas subtangentes são constantes são as funções do tipo exponencial.*

*Demonstração.* Tomemos  $f(x) = y$  no conjunto das funções cujas subtangentes são constantes e a reta  $t$  tangente à  $f$  no ponto  $P = (x, y)$ . Considere o ângulo  $\varphi$  formado pela reta  $t$  e o eixo  $x$ , o ponto  $R$  intersecção da reta  $t$  e o eixo  $x$  e também o ponto  $Q = (x, 0)$ .

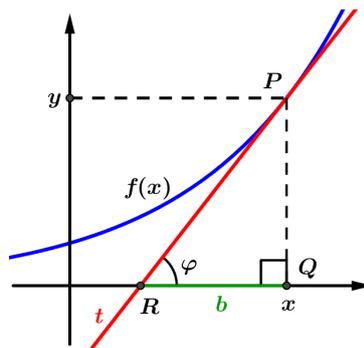


Figura 17: Subtangente constante de comprimento  $b$ .

O segmento  $\overline{RQ}$  representa a subtangente constante de comprimento  $b \neq 0$  e o segmento  $\overline{PQ}$  tem comprimento  $y$ , então temos que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{b}$ . Porém, uma outra forma de obter a  $\operatorname{tg} \alpha$  é usando a derivada de  $f$  no ponto  $(x, f(x))$  que é  $\frac{dy}{dx}$ . Logo:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{b} \\ \frac{b}{y} dy &= dx\end{aligned}$$

Mas esta é uma equação diferencial de variáveis separáveis [18], que pode ser resolvida integrando ambos os lados:

$$\begin{aligned}\frac{b}{y} dy &= dx \\ \int \frac{b}{y} dy &= \int dx \\ b \ln y &= x + c\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}b \ln y &= x + c \\ \ln y^b &= x + c \\ y^b &= e^{x+c} \\ y^b &= e^x e^c \\ y^b &= Ke^x \\ y &= Ke^{\frac{x}{b}}\end{aligned}$$

□

Ou seja, a solução para o problema de Leibniz, determinar uma curva cuja subtangente é  $s(x) = b$ , é uma curva exponencial [2] da forma  $y = Ke^{\frac{x}{b}}$  para algum  $K \neq 0$ . O que torna mais claro os exemplos apresentados na Figura 15.

2 Tanto Leibniz quanto Johann Bernoulli estudaram este problema e referiam-se a esta curva como *Logarithmica*. [7]

Gostaríamos de ressaltar que as funções  $y = Ka^{\frac{x}{b}}$ , com  $0 \leq a \neq 1$ , também possuem subtangentes constantes iguais a  $\frac{b}{\ln a}$ . Por conveniência, mas sem perda de generalidade, nas próximas secções trataremos apenas das funções exponenciais de base  $e$ .

### 2.1.2 Subtangentes lineares

As funções potência apresentam subtangentes lineares.

Tomando uma função  $f(x) = Kx^r$ , com  $K \neq 0$ , vamos calcular  $s(x)$ .

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= \frac{Kx^r}{Krx^{r-1}} \\ &= \frac{x}{r} \end{aligned}$$

Logo, para traçar uma reta tangente às funções  $f(x) = x^2$  e  $f(x) = x^3$ , basta tomar os pontos  $(x, x^2)$  e  $(x - \frac{x}{2}, 0)$  no primeiro caso e  $(x, x^3)$  e  $(x - \frac{x}{3}, 0)$  no segundo.

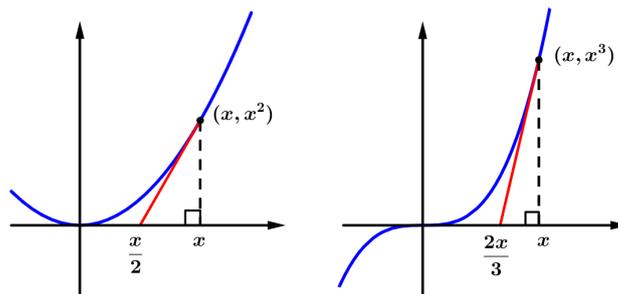


Figura 18: Tangentes às funções  $f(x) = x^2$  e  $f(x) = x^3$ .

O mesmo pode ser feito para a hipérbole  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Como  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ , temos  $s(x) = \frac{1/x}{-1/x^2} = -x$ . Logo, para obter a reta tangente tomamos os pontos  $(x, \frac{1}{x})$  e  $(x - (-x), 0)$ .

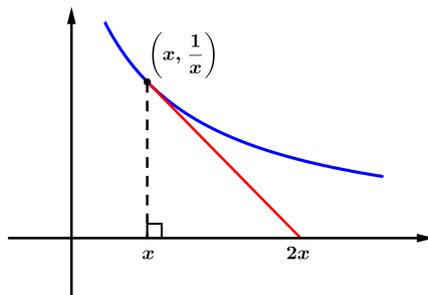


Figura 19: Tangente à hipérbole  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

## 2.2 FUNÇÕES EXPONENCIAIS

As funções exponenciais estão em toda parte nas aplicações da Matemática. Elas ocorrem em problemas relacionados ao crescimento populacional, decaimento radioativo, transmissão do fluxo de calor e outras situações físicas onde a taxa de crescimento/decrescimento de uma quantidade é proporcional à quantidade presente. Geometricamente, temos que a inclinação da reta tangente em cada ponto da curva será proporcional a altura da curva neste ponto.

Sabendo que a subtangente de uma curva exponencial é constante, podemos calcular a área da região sobre uma curva da forma  $f(x) = e^{\frac{x}{b}}$  usando o *Teorema da tangente que varre* de Mamikon.

Ao traçar a reta tangente no ponto  $(x, e^{\frac{x}{b}})$  dividimos a área sob a curva em duas partes. Um triângulo retângulo de área  $T$ , com catetos  $b$  e  $e^{\frac{x}{b}}$ , e a região sombreada à esquerda que vai de  $-\infty$  até  $x - b$  com área  $S$ . Mas esta região de área  $S$  pode ser descrita ao deslocarmos a tangente no sentido negativo sobre a curva, ou seja, esta é a região da *tangente que varre* a curva.

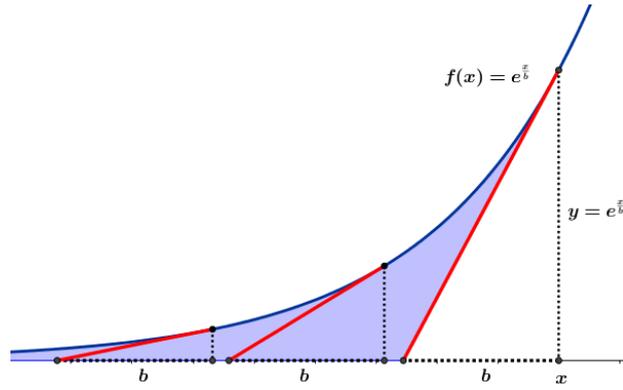


Figura 20: Região sombreada de área  $S$  e o triângulo de área  $T$ .

Deslocando cada segmento tangente para uma origem comum, o ponto  $(x - b, 0)$ , estaremos descrevendo o triângulo de área  $T$ .

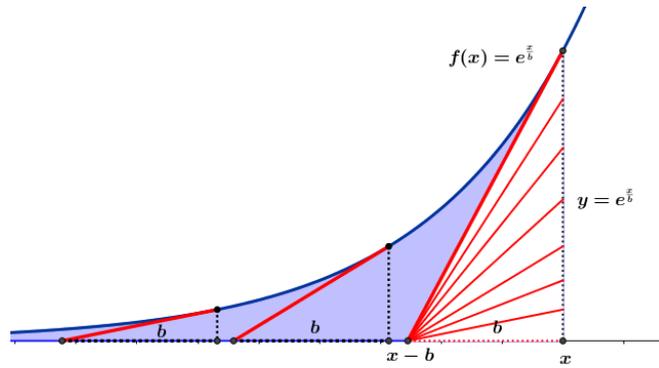


Figura 21: Segmentos tangentes transladados para o ponto  $x - b$ .

Essa equivalência se dá pelo fato das subtangentes serem constantes. Cada triângulo formado pelo segmento tangente tem base  $b$  e altura decrescendo de  $e^{\frac{x}{b}}$  conforme  $x$  vai para  $-\infty$ .

Portanto, ao transladar os segmentos tangentes para  $x - b$  estamos montando o *feixe de tangentes* da área  $S$  e pelo *Teorema de Mamikon* ambos possuem mesma área,  $S = T$ . Temos então, que a área sobre  $f$  de  $-\infty$  à  $x$  será dada por duas vezes a área  $S$ .

$$2T = 2 \frac{be^{\frac{x}{b}}}{2} = be^{\frac{x}{b}} \tag{2.1}$$

Na linguagem do cálculo, mostramos que:

$$\int_{-\infty}^x e^{\frac{t}{b}} dt = b e^{\frac{x}{b}} \quad (2.2)$$

O mesmo vale ao calcular a área no intervalo  $[x_0, x]$ .

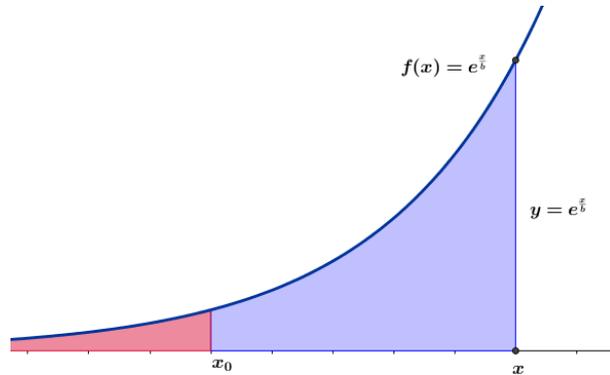


Figura 22: Área sob a curva de  $x_0$  a  $x$ .

Neste caso, o que temos que fazer é retirar a área que vai de  $-\infty$  à  $x_0$  de (2.1).

$$\int_{x_0}^x e^{\frac{t}{b}} dt = b \left[ e^{\frac{t}{b}} \right]_{x_0}^x = e^{\frac{x}{b}} - e^{\frac{x_0}{b}} \quad (2.3)$$

### 2.3 ÁREA DE UM SEGMENTO HIPERBÓLICO.

Um clássico resultado apresentado nos livros de Cálculo é:

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$$

Aqui deduziremos o mesmo resultado utilizando o fato das funções exponenciais terem subtangentes constantes.

As funções exponenciais e logarítmicas recebem um tratamento conjunto nos livros de Cálculo, ora definindo a função exponencial e trazendo a função logarítmica como a função inversa, por exemplo, em [1] [17], ora a função logarítmica de base  $e$  é definida como a área sob a curva de  $\frac{1}{x}$  e tratamos a exponencial como a inversa, por exemplo, em [4] [14]. Aqui adotaremos a primeira opção tendo em vista a forma que estas

funções são apresentadas no Ensino Médio, ou seja, definiremos a função exponencial inicialmente.

**Definição 2.2.** A função exponencial  $e^x$  é a função que tem subtangente constante e igual a 1 para  $x = 0$ .

**Teorema 2.3.** A área sob a função  $y = \frac{1}{x}$  e acima do eixo  $x$ , no intervalo  $[1, x]$ , é dada por  $A(x) = \ln x$ .

*Demonstração.* Considere o segmento hiperbólico abaixo da curva  $y = \frac{1}{x}$  no intervalo  $[1, x]$  cuja área é  $A(x)$ .

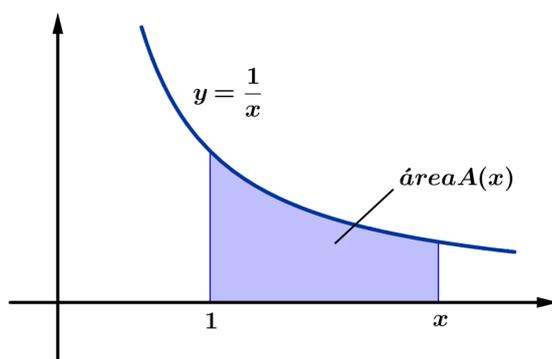


Figura 23:  $A(x)$  é a área abaixo da hipérbole  $y = \frac{1}{x}$  e acima do intervalo  $[1, x]$ .

Suponha que a função diferenciável  $A$  tenha sua inversa  $B$ . Então,  $y = A(x)$  se, e somente se,  $x = B(y)$ . Logo,  $B[A(x)] = x$  e também  $B'[A(x)]A'(x) = 1$ . A subtangente  $s$  associada a  $B$  é dada por:

$$s(y) = \frac{B(y)}{B'(y)} \quad (2.4)$$

E quando  $y = A(x)$ , temos:

$$s[A(x)] = \frac{B[A(x)]}{B'[A(x)]} = \frac{x}{1/A'(x)} = xA'(x) \quad (2.5)$$

Veja que quando o valor de  $x$  aumenta a área sob  $y = \frac{1}{x}$ , Figura (23), aumenta, porém esse acréscimo se torna cada vez menor<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Este fato pode ser melhor entendido ao estudar a primeira derivada de  $y$  ( $y' = -\frac{1}{x^2}$ ).

Abaixo trazemos um gráfico que ilustra o crescimento de  $A(x)$  num ponto  $(x, A(x))$  e onde a reta tangente corta o eixo  $y$  nos dando um segmento de comprimento  $x(A'(x))$ , pois este segmento é a subtangente da inversa de  $A(x)$ .

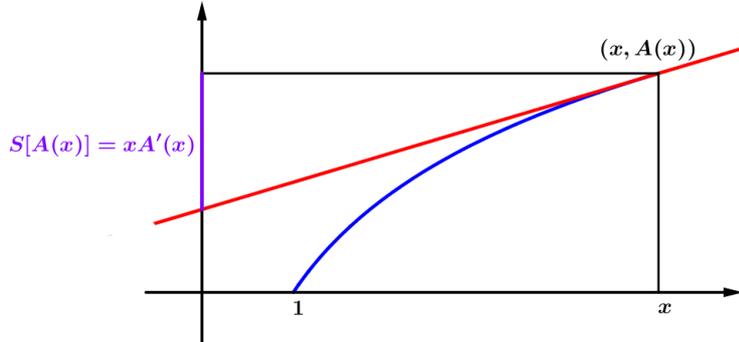


Figura 24: A reta tangente à  $A(x)$  corta um segmento no eixo  $y$  com comprimento  $xA'(x)$ .

Em particular, se  $f$  é uma função positiva crescente,  $A(x)$  pode ser definida como

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (2.6)$$

para algum ponto  $a$  fixado até um ponto  $x$  arbitrário, com  $a < x$ . Então,  $A$  é uma função crescente com derivada  $A'(x) = f(x)$ . Logo, a reta tangente corta um segmento de comprimento  $xf(x)$  no eixo  $y$ . Como já notado, este segmento é a subtangente da inversa de  $A$ . Temos também, que  $xf(x)$  é a área de um retângulo de base  $x$  e altura  $f(x)$  e quando  $f(x) = \frac{1}{x}$ , temos  $xf(x) = 1 = s$ .

Como a inversa de  $A$  tem subtangente constante 1, então  $B(y) = Ke^y$  para algum  $K$ . Como  $A(1) = 0$ , temos que  $B(y) = e^y$  e concluímos que  $A(x) = \ln x$ .  $\square$

Uma consequência imediata do resultado apresentado acima, em que  $A(x) = \ln x$ , é o cálculo da área sobre a curva logarítmica. Para obter a área sob  $A(x) = \ln x$ , ainda considerando sua inscrição no retângulo de base  $x$  e altura  $A(x)$ , basta subtrair a área acima da curva, Figura (24), a qual sabemos agora tratar-se de  $x = e^y$ . Temos então que esta área será  $x \ln x - e^y = x \ln x - x$ .

$$\int_1^x \ln t dt = x \ln x - x \quad (2.7)$$

## 2.4 ÁREA DO SEGMENTO PARABÓLICO

Um dos mais antigos problemas da Matemática foi o de determinar a área de figuras curvas. Os primeiros resultados nesta área remetem a Arquimedes de Siracusa que obteve uma estimativa para o  $\pi$  com duas casas decimais <sup>4</sup>, um fato notável para a época. Arquimedes explorou não só o comprimento e área de circunferência, mas também as cônicas e dentre elas a parábola, a qual trataremos aqui.

Arquimedes trouxe à Matemática os rudimentos do que se tornaria o Cálculo Integral ao trabalhar com o Método da Exaustão, que consistia em inscrever e circunscrever polígonos em figuras curvas.

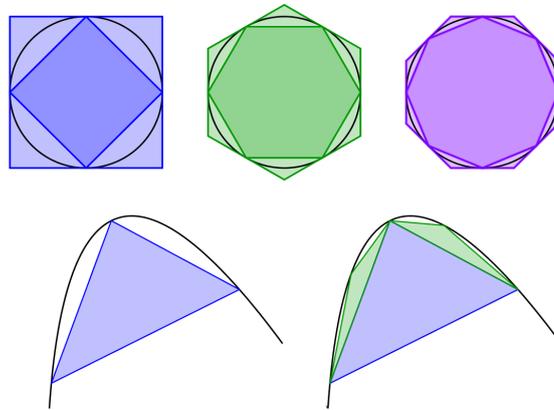


Figura 25: Método da Exaustão utilizado por Arquimedes.

Arquimedes mostrou que a área de um segmento qualquer da parábola, região determinada por um arco da parábola e pelo segmento que une as extremidades deste arco, é  $\frac{4}{3}$  da área do triângulo inscrito, onde dois vértices  $A$  e  $B$  são as extremidades do arco e o terceiro vértice  $P$ <sup>5</sup> é a intersecção da reta paralela ao eixo da parábola que passa pelo ponto médio de  $\overline{AB}$ .

4 Arquimedes situou o  $\pi$  entre os números  $3\frac{1}{7}$  e  $3\frac{10}{71}$

5  $P$  não necessariamente é o vértice da parábola.

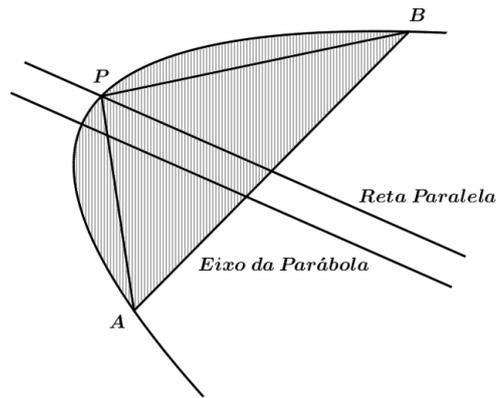


Figura 26: A área sobre a curva é  $\frac{4}{3}$  da área do triângulo  $APB$ .

Este feito torna-se ainda mais notável ao lembrar que Arquimedes baseava-se apenas na Geometria Euclidiana e muitos destes problemas tornaram-se mais simples após a invenção da Geometria Analítica e do Cálculo.

No final do Ensino Fundamental II a parábola é apresentada como um função onde seu eixo é sempre paralelo ao eixo  $y$ . Em nosso trabalho usaremos o nome de *segmento parabólico* como sendo a região entre o arco da parábola e o eixo  $x$ .

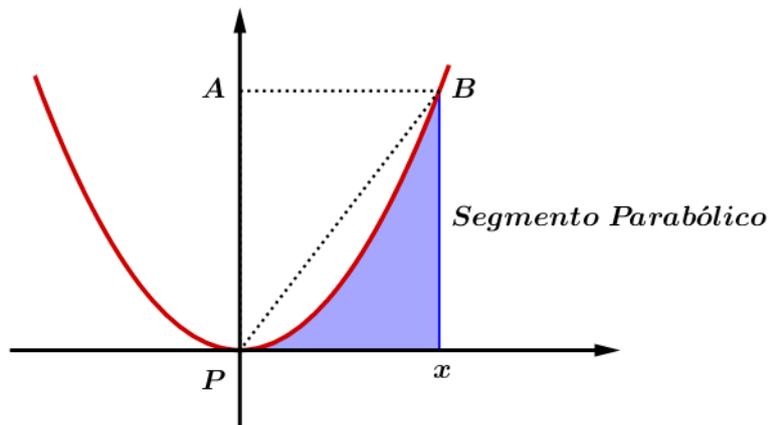


Figura 27: Segmento parabólico sobre  $f(x) = x^2$

O resultado de Arquimedes remete à área da parte superior ao segmento parabólico aqui definido. Esta área é  $\frac{4}{3}$  da área do triângulo  $APB$ ,  $\frac{2x^3}{3}$ , nos dando que a área do

segmento parabólico será  $\frac{x^3}{3}$ . Este resultado é obtido nos primeiros contatos com o cálculo integral.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \tag{2.8}$$

Usando segmentos tangentes à parábola podemos chegar ao mesmo resultado usando apenas conhecimentos da Geometria.

Considere o segmento parabólico de  $y = x^2$  no intervalo  $[0, x]$ . Este segmento pode ser inscrito em um retângulo de base  $x$  e altura  $x^2$  e área  $R$ . Neste caso, a área  $R$  é  $x^3$ , porém não necessitamos explicitar um valor de  $R$ .

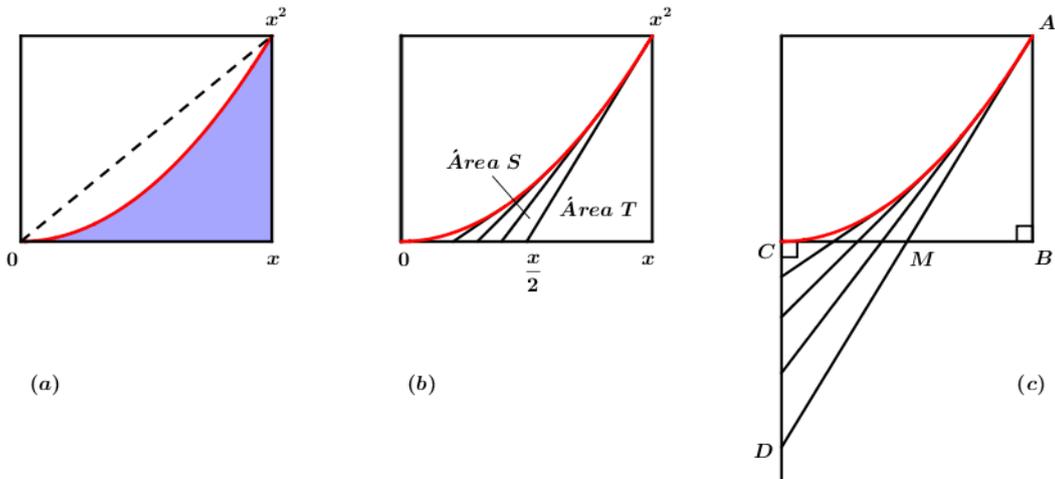


Figura 28: (a) Segmento Parabólico. (b) Tangente que varre a parábola cortada pelo eixo  $x$ . (c) Região obtida duplicando os segmentos tangentes em (b).

Ao observar a Figura (a) é fácil ver que a área do segmento parabólico é menor que  $\frac{R}{2}$ .

Para chegar ao nosso resultado, lembrando que o segmento  $\overline{BM}$  é a subtangente de  $y$  com comprimento  $\frac{x}{2}$  (18), necessitamos também de uma propriedade da tangente que varre chamada de *Propriedade do Redimensionamento*<sup>6</sup>.

**Lema 2.4.** *Se cada segmento da região da tangente que varre for redimensionado, isto é, expandido ou contraído, por um fator positivo  $t$ , então a área desta região será multiplicada por  $t^2$ .*

6 No original *Scaling Property*

Este fato pode ser observado ao notar que redimensionando os segmentos tangentes da região da tangente que varre estamos produzindo uma figura semelhante à original com razão  $t$  e, conseqüentemente, a razão de sua área será  $t^2$ .

Na Figura (b) o segmento parabólico está dividido em duas partes, a região da *tangente que varre* com área  $S$ , e um triângulo retângulo de área  $T$ .

Vamos mostrar que  $S = \frac{4T}{3}$  e como  $4T = R$ , a área do segmento parabólico será  $\frac{R}{3}$ , como esperado.

Considere a Figura (c) onde cada segmento tangente foi estendido até alcançar o eixo  $y$ . Veja que cada segmento teve seu comprimento multiplicado por um fator  $t = 2$ , observe os triângulos congruentes  $AMB$  e  $CMD$ . Logo, a área da *tangente que varre* redimensionada é  $4S$ . Esta região está dividida em duas partes pelo eixo  $x$ , a parte superior de área  $S$  e a inferior de área  $3S$ . Mas como  $AMB \equiv CMD$ , temos que  $3S = T$  e  $S = \frac{T}{3}$ .

Portanto,  $S + T = \frac{T}{3} + T = \frac{4T}{3}$  e como  $4T = R$ , concluímos que a área do segmento parabólico é  $\frac{R}{3}$ .

Neste caso,  $R = x^3$  chegamos à  $\frac{x^3}{3}$ , provando 2.8

#### 2.4.1 Um tratamento alternativo para a parábola.

Uma outra abordagem apresentada em [6] é a utilização de dois arcos de parábola inscritos no retângulo de base  $x$  e altura  $x^2$ , onde as duas parábolas dividem o retângulo em três regiões de mesma área.

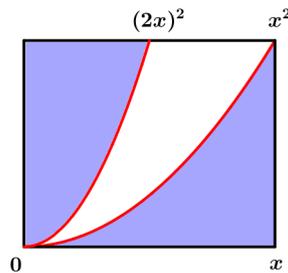


Figura 29: Parábola bisetora  $y = (2x)^2$  e a parábola  $y = x^2$  inscritas no retângulo.

As duas regiões à esquerda formadas pela parábola bisetora possuem mesma área. Este fato é melhor entendido tomando os segmentos de comprimento  $x_i$  paralelos ao

eixo  $x$  na altura  $x_i^2$ . A parábola  $y = (2x)^2$  divide estes segmentos ao meio e como as áreas podem ser obtidas com a soma destes segmentos ambas serão congruentes<sup>7</sup>.

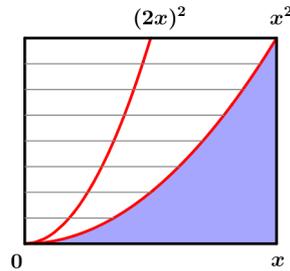


Figura 30: Segmentos de comprimento  $x_i$  divididos ao meio pela parábola bisetora.

Precisamos agora mostrar que a região sob a parábola  $y = x^2$  também é congruente as duas outras partes.

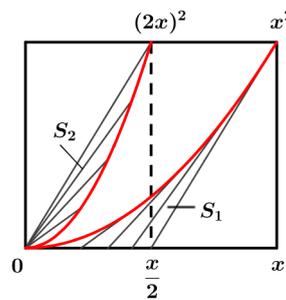


Figura 31: Região da tangente que varre  $S_1$  e seu feixe de tangentes  $S_2$ .

Na figura acima o triângulo à esquerda e acima da parábola  $(2x)^2$  e o triângulo abaixo de  $x^2$  tem mesma área. Logo, reduzimos nosso trabalho a mostrar que as regiões sombreadas  $S_1$ , abaixo de  $x^2$ , e  $S_2$ , acima de  $(2x)^2$ , têm mesma área.

$S_1$  é a região da tangente que varre da parábola  $x^2$ . Tomando um segmento tangente à  $x^2$  no ponto  $(t, t^2)$  sua outra extremidade no eixo  $x$  será  $(\frac{t}{2}, 0)$ <sup>(18)</sup>. Transladando cada um destes segmentos em  $\frac{t}{2}$  à esquerda os pontos  $(\frac{t}{2}, 0)$  serão levados à origem e o ponto  $(t, t^2)$  será levado para  $(\frac{t}{2}, t^2)$ , ou seja, sobre a parábola  $(2x)^2$ . Logo, a região  $S_2$  é o bloco de tangentes relacionado à região que varre  $S_1$  e pelo Teorema de Mamikon têm mesma área.

<sup>7</sup> O mesmo princípio é usado na soma de Riemann e também no Princípio de Cavalieri se aplicado ao plano (<http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=2861>).

Concluimos então, que cada região apresentada em [29](#) têm área equivalente a um terço da área do retângulo, mostrando que a área sob a parábola  $y = x^2$  é  $\frac{x^2}{3}$ .

## 2.5 POTÊNCIAS REAIS POSITIVAS

A mesma estratégia da secção anterior pode ser ampliada a qualquer potência  $x^r$ , com  $r > 0$ . Basta analisar que se  $f(x) = x^r$ , a reta tangente que passa pelo ponto  $(x, x^r)$  dividirá a região sob  $f$  em duas, a área  $S$  da *tangente que varre* e um triângulo retângulo de área  $T$ . Em seguida, usamos [2.4](#) para relacionar  $S$  e  $T$  com a área do retângulo em que  $f$  está inscrita. A relação será  $S + T = \frac{R}{r+1}$ , lembrando que este retângulo tem área  $R = x^{r+1}$ , chegaremos em  $S + T = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ .

Como exemplo, aplicaremos este processo para calcular a área sob  $f(x) = x^3$  no intervalo  $[0, x]$ , mostrando que esta área é  $\frac{x^4}{4}$ .

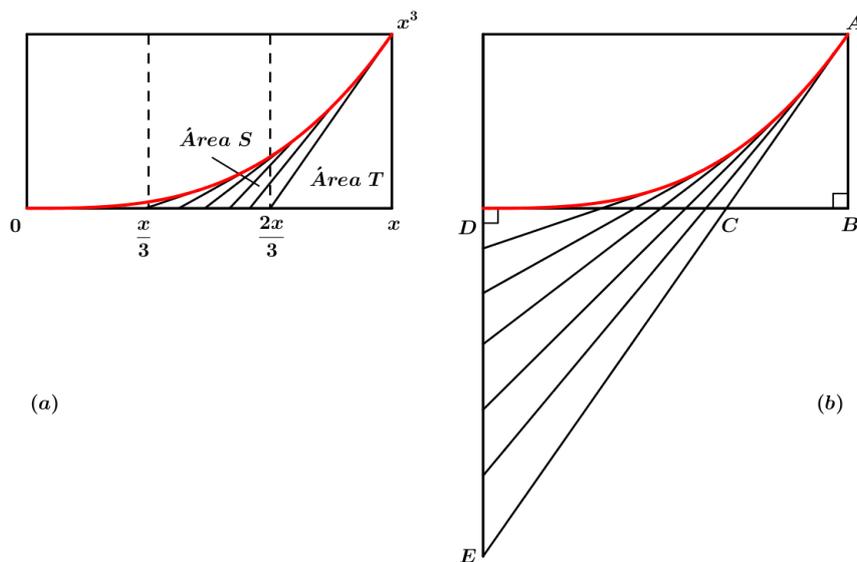


Figura 32: (a) Segmento cúbico dividido em duas regiões de áreas  $S$  e  $T$ . (b) Segmentos tangentes triplicados.

Na Figura (a) o segmento cúbico<sup>8</sup> está inscrito no retângulo de área  $R$  com base de comprimento  $x$  e altura  $x^3$ . A reta tangente no ponto  $(x, x^3)$  divide o segmento parabólico em duas partes, a área  $S$  da *tangente que varre* e um triângulo retângulo de base  $\frac{x}{3}$ , altura  $x^3$  e área  $T$ .

<sup>8</sup> Área entre a curva  $x^3$  e o eixo  $x$  no intervalo  $[0, x]$ .

Na Figura (b), estendemos cada segmento tangente até que estes cortem o eixo  $y$ , obtendo o triângulo  $EDC$  semelhante ao triângulo  $ABC$  na razão  $2 : 1$ . Como cada segmento foi multiplicado por 3 temos que a região da *tangente que varre estendida* terá área  $9S$ , Lema (2.4). Esta região é dividida em duas pelo eixo  $x$ , onde a parte superior tem área  $S$  e a inferior  $8S$ .

Como  $\triangle CDE \sim \triangle ABC$  na razão  $2 : 1$ , suas áreas terão a razão  $4 : 1$ . Logo,  $8S = 4T$  e  $S = \frac{T}{2}$ . Então, a área do segmento parabólico será  $S + T = \frac{T}{2} + T = \frac{3T}{2} = \frac{6T}{4}$  e como o retângulo de área  $R$  é composto por seis triângulo de área  $T$ , temos  $S + T = \frac{R}{4}$ . Como  $f(x) = x^3$ ,  $R = x^4$  e, usando a linguagem do Cálculo:

$$\int_0^x t^3 dt = \frac{x^4}{4}$$

Generalizando para qualquer  $r > 1$ , a função  $f(x) = x^r$  tem subtangente  $\frac{x}{r}$  e a região abaixo de  $f$  e acima do eixo  $x$  no intervalo  $[0, x]$  será dividida em duas pela reta tangente que passa em  $(x, x^r)$ . Um triângulo retângulo de base  $\frac{x}{r}$  no eixo  $x$ , altura  $x^r$  e área  $T$  e a região da *tangente que varre* de área  $S$ . Prolongando os segmentos tangentes, estes cortarão o eixo  $y$  ao serem multiplicados por  $r$ , a área da região da *tangente que varre redimensionada* será  $r^2S$  e esta é dividida pelo eixo  $x$  em duas, a parte superior que tem área  $S$  e a inferior de área  $(r^2 - 1)S$ .

Como o triângulo de área  $(r^2 - 1)S$  é semelhante ao triângulo de área  $T$  na razão  $(r - 1) : 1$ , temos que  $(r^2 - 1)S = (r - 1)^2T$  e  $S = \frac{(r-1)^2T}{(r^2-1)} = \frac{(r-1)T}{(r+1)}$ . Como o retângulo de área  $R$  é equivalente  $2rT$ , temos  $T = \frac{R}{2r}$  o que nos dá  $S + T = \frac{(r-1)T}{(r+1)} + T = \frac{R}{r+1}$ . Considerando  $f(x) = x^r$ ,  $R = x^{r+1}$ , o que nos dá na linguagem do Cálculo:

$$\int_0^x t^r dt = \frac{x^{r+1}}{r+1} \quad (2.9)$$

O método também é válido para  $r = 1$ , onde  $f(x) = x$ . Neste caso a área sobre  $f$  é um triângulo retângulo de base e altura  $x$  e sua área é a metade da área do quadrado de lado  $x$ , ou seja,  $\frac{x^2}{2}$ . Para este caso específico a região da *tangente que varre* terá área  $S = 0$ .

Para os casos em que  $0 < r < 1$  o gráfico da função muda sua forma de convexa para côncava e as retas tangentes estarão acima da curva intersectando o eixo  $y$ .

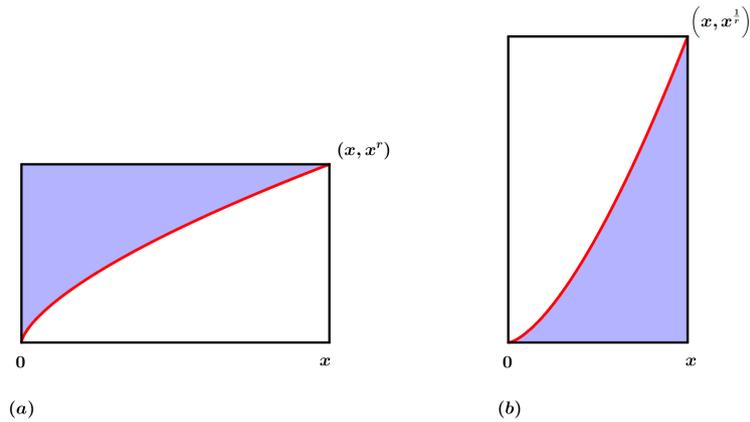


Figura 33: As áreas sombreadas são congruentes.

Porém, a parte sombreada na figura (a) é congruente ao segmento parabólico sob a função  $f(x) = x^{\frac{1}{r}}$  mostrado na figura (b). Como  $0 < r < 1$ , então  $\frac{1}{r} > 1$  e voltamos ao caso anterior, o que nos dá que área sombreada será  $\frac{R}{1+\frac{1}{r}}$ . Portanto, a área abaixo de  $x^r$  será dada por  $R - \frac{R}{1+\frac{1}{r}} = \frac{R}{r+1}$ , chegando a mesma fórmula em 2.9.

2.5.1 Tratamento alternativo para potências positivas

A segunda forma apresentada em 2.4.1 também pode ser generalizada para as potências  $x^r$ , com  $r > 1$ .

Considere o retângulo de área  $R = x^4$  dividido em três regiões pelas parábolas  $x^3$  e  $(3x)^3$  no intervalo  $[0, x]$ .

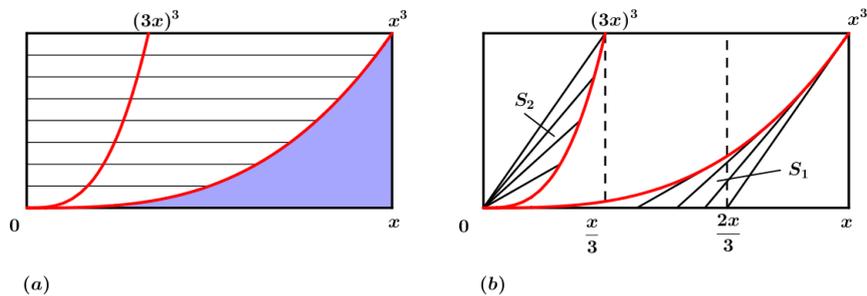


Figura 34: (a) Segmentos paralelos divididos na razão 1 : 2 pela curva  $(3x)^3$ . (b) As regiões  $S_1$  e  $S_2$  têm área iguais.

A parábola  $(3x)^3$  trissecta cada segmento horizontal apresentado na figura (a), logo a área da região acima desta curva é a metade da área da região entre as duas cúbicas.

Vamos mostrar que a região acima de  $(3x)^3$  é congruente à região abaixo de  $x^3$ . Analisando a figura (b), temos que os dois triângulos, à esquerda e à direita, têm mesma área. Transladando os segmentos tangentes que passam pelos pontos  $(t, t^3)$  e compõe a região  $S_1$  em  $\frac{2t}{3}$  para a esquerda as extremidades inferiores serão levadas à origem e as extremidades superiores para  $(\frac{t}{3}, t^3)$ , coincidindo com a curva  $(3x)^3$ . Logo, a região  $S_2$  é *bloco de tangentes* da região  $S_1$  e têm mesma área. Logo, a região acima de  $(3x)^3$  é congruente à região abaixo de  $x^3$ .

Como o retângulo está dividido na proporção  $1 : 2 : 1$ , temos que a área sob  $x^3$  no intervalo  $[0, x]$  equivale a um quarto da área do retângulo ou  $\frac{x^4}{4}$ .

Para os casos gerais onde  $r > 1$ , podemos considerar as curvas  $x^r$  e  $(rx)^r$  que dividirá o retângulo de área  $R$  em três partes. Como  $(rx)^r$  divide os segmentos paralelos ao eixo  $x$  na razão  $1 : (r - 1)$ , temos que a região acima desta curva terá área igual a  $\frac{1}{r-1}$  da região compreendida entre as parábolas.

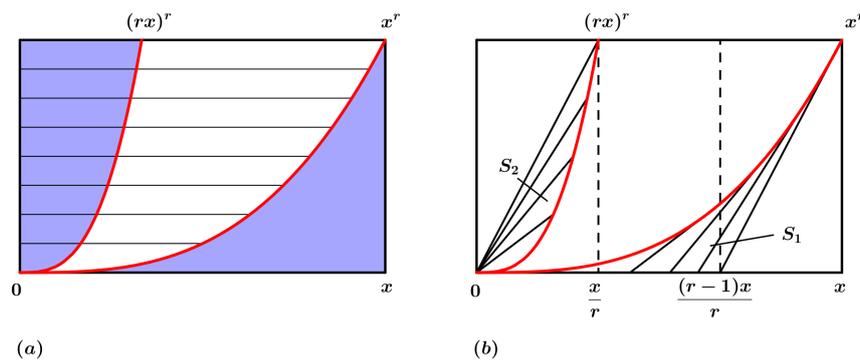


Figura 35: (a) Segmentos paralelos divididos na razão  $1 : (r - 1)$  pela curva  $(rx)^r$ . (b) As regiões  $S_1$  e  $S_2$  têm área iguais.

E novamente, a região acima de  $(rx)^r$  será congruente à região abaixo de  $x^r$ , pois ambas são compostas pelos triângulos retângulos de base  $\frac{x}{r}$  e altura  $x^r$  e a região  $S_2$  é o *bloco de tangentes* da região  $S_1$ .<sup>9</sup>

Logo, o retângulo está dividido na proporção  $1 : (r - 1) : 1$  e a área sob  $x^r$  no intervalo  $[0, x]$  será  $\frac{R}{r+1}$  e como o retângulo tem área  $R = x^{r+1}$ , chegamos em 2.9.

<sup>9</sup> As regiões  $S_1$  e  $S_2$  são as partes que sobram após retirarmos os triângulos abaixo de  $x^r$  e acima de  $(rx)^r$ , respectivamente.

2.6 POTÊNCIAS DE EXPOENTE NEGATIVO

Abordaremos agora a área sobre a curva  $y = x^{-r}$ , com  $r > 1$ , no intervalo  $[x, \infty[$ .

A área sob  $y$  pode ser dividida em duas partes, um triângulo retângulo de área  $T = \frac{x^{1-r}}{2r}$  e a região da *tangente que varre* com área  $S$ . Logo, a área procurada será dada por  $S + T$ .

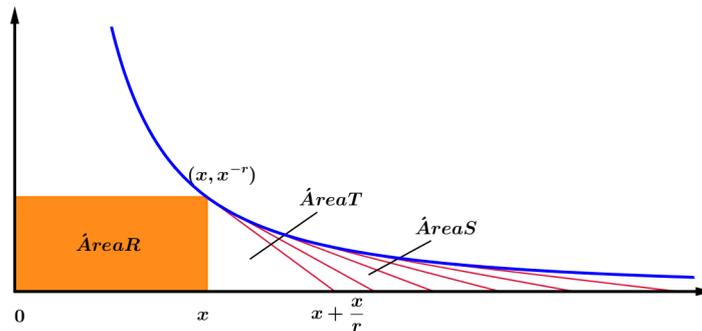


Figura 36: *Tangente que varre* de área  $S$  e triângulo de área  $T$  abaixo da curva  $y = x^{-r}$ , com  $r > 1$ .

Esta região é adjacente a um retângulo de área  $R = x^{1-r} = 2rT$ . Mostraremos que  $S + T = \frac{R}{r-1}$ <sup>10</sup>.

Multiplicando cada segmento tangente aos pontos  $(t, t^{-r})$ , com  $t \geq x$ , pelo fator  $r$  e deslocando-os para a esquerda, faremos com estes segmentos encontrem o eixo  $y$ .

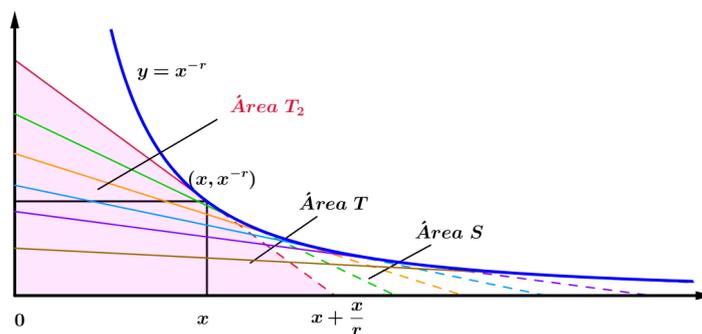


Figura 37: Os segmentos tangentes multiplicados por  $r$  e deslocados para a esquerda geram a região composta pelo triângulo  $T_2$  e a *tangente que varre original*.

<sup>10</sup> Esta parte nos mostra que, apesar do intervalo sobre  $y$  ser infinito, sua área é finita. Ou seja, a função converge.

Esta é a região da *tangente que varre redimensionada* e por 2.4 terá área  $r^2S$ . Mas esta região é composta por duas partes um triângulo retângulo sombreado de área  $T_2$  e a região  $S$  original. Note que o triângulo maior de área  $T_2$  obtido é semelhante ao triângulo menor de área  $T$  na razão  $(r + 1)$ , logo a área do triângulo maior será  $(r + 1)^2T$ . Temos, então que:

$$\begin{aligned} r^2S &= (r + 1)^2T + S \\ S &= \frac{(r + 1)^2T}{r^2 - 1} \\ S &= \frac{(r + 1)T}{r - 1} \end{aligned}$$

Logo, a área procurada é dada por:

$$S + T = \frac{(r + 1)T}{r - 1} + T = \frac{2rT}{r - 1} = \frac{R}{r - 1} \quad (2.10)$$

E como  $R = x^{1-r}$ , na linguagem do cálculo, a área sob  $y$  é dada pela integral imprópria:

$$\int_x^\infty t^{-r} dt = \frac{x^{1-r}}{r - 1} \quad (2.11)$$

Veja que usando o conceito das subtangentes este cálculo não necessitou de uma preocupação com o limite infinito da integral, porém obtivemos o mesmo resultado. Isso foi possível pelo fato de que como  $r > 1$  a função converge.

Para  $y = x^{-r}$ , com  $0 < r < 1$ ,  $y$  diverge no intervalo  $[x, \infty[$ . Porém, podemos calcular a área no intervalo  $[0, x]$ . Esta área será dada pela soma  $I + R$ , ilustrada abaixo:

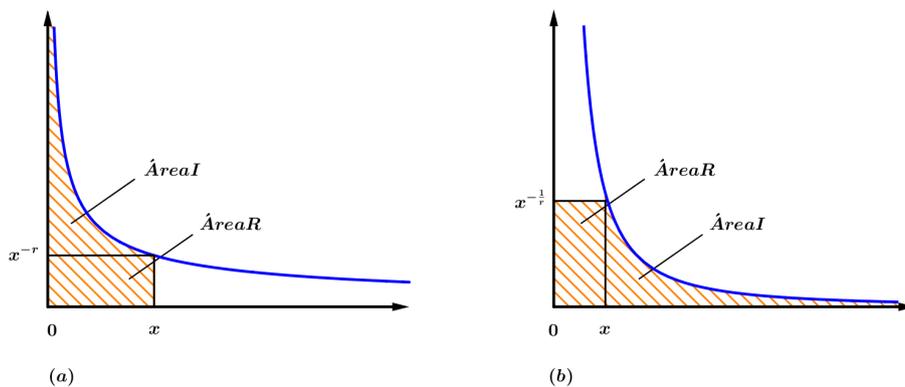


Figura 38: (a) Área de  $x^{-r}$ , com  $0 < r < 1$ , no intervalo  $[0, x]$  (b) Área de  $x^{-\frac{1}{r}}$ , com  $0 < r < 1$ , no intervalo  $[0, \infty[$

Note que ao refletir  $x^{-r}$  pela bissetriz do primeiro quadrante, obteremos o desenho da figura (b). Esta é a função  $y = x^{-\frac{1}{r}}$ , a inversa da curva original. Nesta nova curva o expoente é maior que 1 e podemos usar **2.11**:

$$I = \frac{x^{1-\frac{1}{r}}}{\frac{1}{r} - 1} \tag{2.12}$$

E para a área procurada basta somar a  $I$  a área do retângulo  $R = x^{\frac{1}{r}-r}$ . Tendo, então:

$$\int_0^x t^{-r} dt = I + R = \frac{x^{1-\frac{1}{r}}}{\frac{1}{r} - 1} + x^{\frac{1}{r}-r} = \frac{x^{1-r}}{1-r} \tag{2.13}$$

O caso  $r = 1$  foi mostrado em **2.3**, onde obtivemos  $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$ .

### 2.7 TRATAMENTO ALTERNATIVO PARA POTÊNCIAS NEGATIVAS

Uma outra forma para determinar a área sob  $f(x) = x^{-r}$ , com  $r > 1$ , é usando o Teorema da Tangente que Varre de Mamikon. A área abaixo de  $f$  é composta pelo triângulo de área  $T$  e a região da *tangente que varre* de área  $S$ .

Na figura abaixo, o *feixe de tangentes* de  $S$  obtido ao transladar cada segmento tangente para a origem. A curva do *feixe de tangentes* tem sua equação paramétrica em função do vetor tangente à  $f$ , ou seja  $v(t) = (-s(t), -f(t))$ , onde <sup>11</sup>  $s(t) = -\frac{x}{r}$ , porém não necessitamos explicitar esta curva. Pelo Teorema de Mamikon estas regiões têm mesma área  $S$ . Note que adjacente ao *feixe de tangentes* temos também um triângulo de área  $T$ .

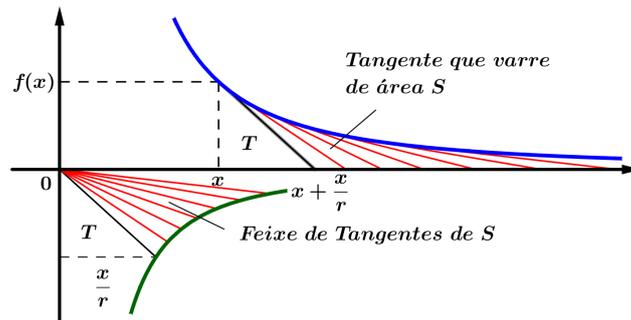


Figura 39: Região da *tangente que varre* e seu *feixe de tangentes*.

11  $s(t)$  é a subtangente de  $f$  já mostrada em **2.1.2**

Refletindo o *feixe de tangentes* e o triângulo pelo eixo  $x$  teremos uma região congruente com área  $S + T$ . Agora, estendendo esta região por um fator  $r$ , isto é, multiplicando cada coordenada  $x$  por um fator  $r$ , teremos uma nova região cuja área será  $r(S + T)$ .

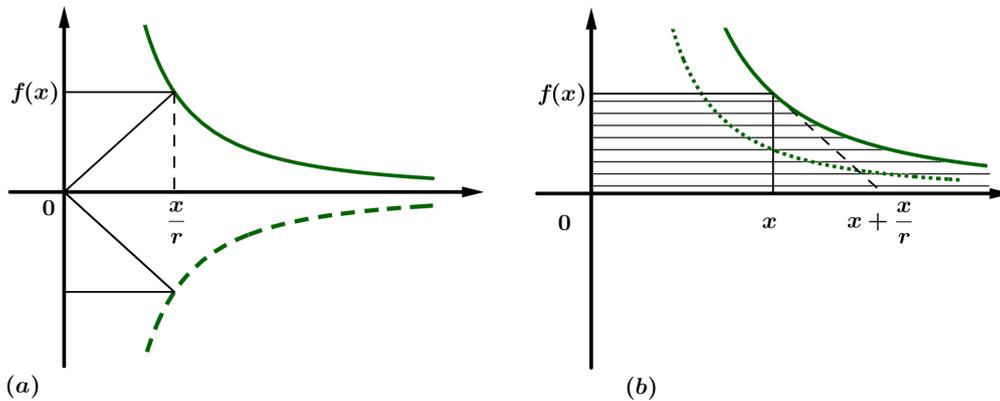


Figura 40: (a) Reflexão da área do *feixe de tangentes* e do triângulo (b) Região de (a) com cada coordenada  $x$  multiplicada por  $r$ .

Note que como a curva do *feixe de tangentes* é dada por  $s(t) = (-s(t), -f(t)) = (\frac{t}{r}, -t^{-r})$ , ao refletí-la pelo eixo  $y$  e multiplicando a primeira coordenada por  $r$ , obteremos a curva original  $(t, t^{-r})$ .

Portanto, esta área redimensionada é composta por um retângulo de área  $R$  e a região original de área  $S + T$  da figura 39. Logo,  $r(S + T) = R + (S + T)$ , e novamente:

$$S + T = \frac{R}{r - 1} \quad (2.14)$$

## 2.8 UMA APLICAÇÃO REVERSA DO TEOREMA DE MAMIKON

Nesta secção iremos mostrar uma aplicação reversa do Teorema de Mamikon. Porém, necessitaremos de uma fórmula para o cálculo de uma região descrita por uma equação polar.

Lembramos que a fórmula da área de um setor circular de raio  $r$  e ângulo central  $\theta$ , em radianos, é dada por:

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \tag{2.15}$$

2.8.1 Área de uma região polar

Consideremos uma região  $R$  limitada pela curva polar  $r = f(\theta)$  e pelos raios  $\theta = a$  e  $\theta = b$ , onde  $f$  é uma função contínua positiva e  $0 < b - a \leq 2\pi$ .

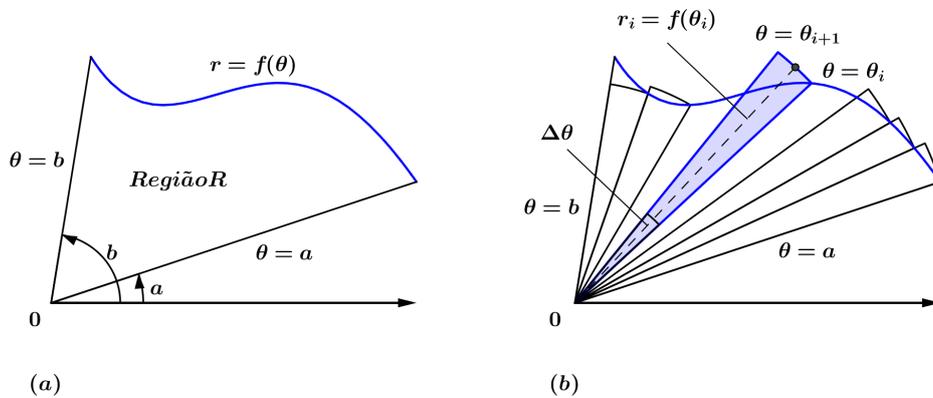


Figura 41: (a) Região  $R$  de área  $A$  (b) Divisão de  $R$  em  $n$  intervalos para aproximar a área  $A$ .

Dividindo a região  $R$  em intervalos com extremidades  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$  e largura  $\Delta\theta$ , podemos usar um setor circular de raio  $f(\theta_i)$  e ângulo central  $\Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$  como uma aproximação da área de cada um destes intervalos.

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}[f(\theta_i)]^2\Delta\theta_i \tag{2.16}$$

E a soma dos  $n$  intervalos seria uma aproximação para a área  $A$  de  $R$ .

$$A \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}[f(\theta_i)]^2\Delta\theta_i \tag{2.17}$$

Bem, conforme o número  $n$  aumenta esta aproximação se torna mais próxima do valor de  $A$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , temos que a fórmula para o cálculo de  $A$ , será:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\theta_i)]^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_a^b [f(\theta)]^2 d\theta \quad (2.18)$$

### 2.8.2 Área da região delimitada por $f(\theta) = \operatorname{tg}\theta$ .

Em algumas das aplicações apresentadas conseguimos calcular a área da região da *tangente que varre* pela equivalência com a área do seu *feixe de tangentes*, que era mais fácil de ser determinado.. Em alguns casos podemos usar o Teorema de Mamikon na direção inversa se a área da *tangente que varre* for mais simples de ser calculada do que a área do seu *feixe de tangentes*.

Mostraremos aqui uma prova geométrica para a fórmula:

$$\int_0^x \operatorname{tg}^2\theta d\theta = \operatorname{tg}x - x \quad (2.19)$$

A figura (a) mostra o gráfico polar da equação  $r(\theta) = \operatorname{tg}\theta$  enquanto  $\theta$  varia de 0 à  $x$ . A área sombreada  $A(x)$ , formada por cada segmento com uma das extremidades na origem e a outra na curva  $r$ , é dada por: (2.18)

$$A(x) = \int_0^x \operatorname{tg}^2\theta d\theta \quad (2.20)$$

Considere uma circunferência de raio unitário onde cada segmento tangente é cortado pela reta que passa em seu centro, mostrado na figura (b).

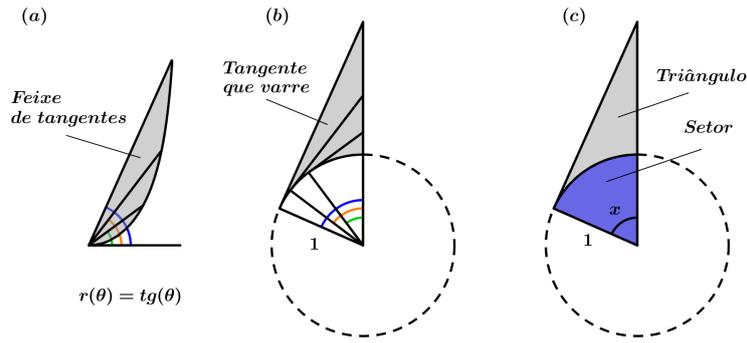


Figura 42: (a) A região à esquerda é o feixe de tangentes da tangente que varre em (b), ou seja, têm a mesma área. Em (c), o triângulo é composto pela tangente que varre e um setor circular.

Seja  $\theta$  o ângulo formado pelo raio ligado ao ponto tangente e a reta que passa pelo centro, então cada segmento tangente terá comprimento  $\text{tg}\theta$ . Logo, esta região sombreada na figura (b) é a tangente que varre correspondente ao feixe de tangentes na figura (a) e pelo Teorema de Mamikon têm mesma área  $A(x)$ .

Mas, área da tangente que varre pode ser calculada como a área do triângulo retângulo onde os catetos são o raio da circunferência de comprimento 1 e o segmento tangente de comprimento  $\text{tg}x$  menos a área do setor circular de ângulo  $x$ . Logo:

$$A(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \text{tg}^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \text{tg}x - \frac{x}{2} \quad (2.21)$$

# 3

---

## VETORES E FUNÇÕES VETORIAIS

---

"...a utilização da linguagem vetorial permite uma descrição elegante e unificada dos principais resultados da geometria Euclideana bem como possibilita uma transição natural da formulação axiomática para a descrição analítica (em coordenadas) dessa mesma geometria."(Miranda, Grisi, Lodovici,2015,p.1)

Nas próximas duas seções, mostraremos alguns resultados da Álgebra Linear e do Cálculo Vetorial para auxiliar o entendimento da demonstração do Teorema de Mamikon. De maneira alguma temos como objetivo esgotar todas as propriedades dos vetores e do Cálculo Vetorial, mas sim explorar aquelas que serão de grande importância no próximo capítulo.

### 3.1 VETORES

A seguir iremos relembrar algumas propriedades e demonstrações da álgebra dos vetores. Consideraremos o espaço Euclidiano do  $\mathbb{R}^3$  onde todo vetor  $u = (u_1, u_2, u_3)$  pode ser escrito como  $u = u_1i + u_2j + u_3k$ , com  $i, j$  e  $k$  base canônica do  $\mathbb{R}^3$ . As operações seguirão as definições usais. Dados dois vetores  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos a soma e a multiplicação por escalar dados por:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

$$\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$$

Também usaremos a definição usual de produto interno:

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

### 3.1.1 Norma de um vetor

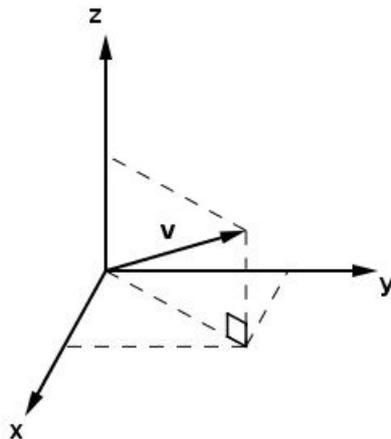


Figura 43: Vetor  $v$

Dado um vetor  $v = (v_1, v_2, v_3)$  pertencente ao  $\mathbb{R}^3$ , chamamos de *norma* o comprimento deste vetor, o qual será denotado por  $\|v\|$ . A norma de um vetor é dada por:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Observamos também que  $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ .

Um vetor é chamado de *unitário* quando sua norma é 1. Dado um vetor  $v \neq 0$ , temos que:

$$u = \frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{v}{\|v\|}$$

Então  $u$  é um vetor unitário com mesmo sentido e direção de  $v$  e chamamos o vetor  $u$  de *versor* de  $v$ .

## 3.1.2 Ângulo entre dois vetores

Dados dois vetores  $u$  e  $v$  definimos  $\theta$ , com  $0 \leq \theta < \pi$ , o ângulo formado por  $u$  e  $v$ .

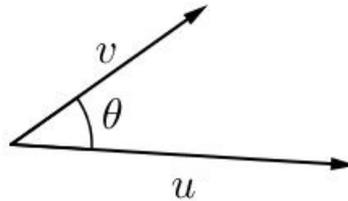


Figura 44: Ângulo  $\theta$  entre  $u$  e  $v$

Para calcular o ângulo  $\theta$  note que os vetores  $u$ ,  $v$  e  $u - v$  formam o triângulo representado abaixo:

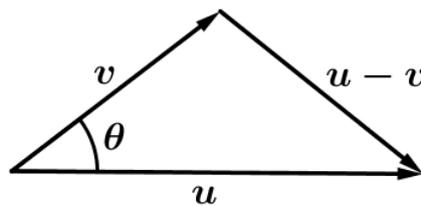


Figura 45: Representação do vetor  $u - v$

Pelo Teorema dos Cossenos, temos que:

$$\begin{aligned}
 \|u - v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta \\
 (u - v)(u - v) &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta \\
 \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta \\
 \cos\theta &= \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

## 3.1.3 Posição relativa entre dois vetores

Dois vetores  $u$  e  $v$  são *paralelos* se o ângulo  $\theta$  entre eles for  $0$  ou  $\pi$ . Logo:

$$\begin{aligned}\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} &= \cos 0 \\ \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} &= 1 \\ u \cdot v &= \|u\| \|v\|\end{aligned}\quad (3.2)$$

Como consequência se  $u$  e  $v$  forem vetores unitários, então:

$$u \cdot v = 1 \quad (3.3)$$

Dois vetores  $u$  e  $v$  são *ortogonais* quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , logo:

$$\begin{aligned}\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} &= \cos \frac{\pi}{2} \\ \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} &= 0 \\ u \cdot v &= 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

Note que a recíproca também é verdadeira. Tome dois vetores  $u$  e  $v$  tal que o produto interno seja zero, temos:

$$\begin{aligned}u \cdot v &= 0 \\ \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} &= 0 \\ \cos \theta &= 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

Como  $0 \leq \theta \leq \pi$ , temos que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Portanto,  $u$  e  $v$  são ortogonais.

## 3.1.4 Produto Vetorial

Sejam dados  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$ . O produto vetorial, indicado por  $u \times v$ , será o vetor obtido pelo determinante<sup>1</sup>:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

Uma consequência do produto vetorial é que  $u \times v$  será ortogonal tanto a  $u$  quanto a  $v$ .

<sup>1</sup> Consulte, para mais detalhes, [11].

## 3.1.5 Área do paralelogramo

Se  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$  são dois vetores não paralelos, cujo ângulo entre eles é  $\theta$ , então  $u$  e  $v$  são lados consecutivos de um paralelogramo.

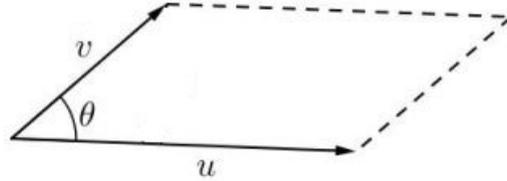


Figura 46: Paralelogramo gerado por  $u$  e  $v$ .

Temos então que:

**Teorema 3.1.**  $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - |u \cdot v|^2$

*Demonstração.*

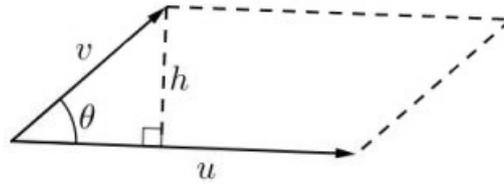
$$\begin{aligned}
 & \|u\|^2 \|v\|^2 - |u \cdot v|^2 = \\
 &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \\
 &= (u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2) \\
 &\quad - u_1^2 v_1^2 - 2u_1 u_2 v_1 v_2 - 2u_1 u_3 v_1 v_3 - u_2^2 v_2^2 - 2u_2 u_3 v_2 v_3 - u_3^2 v_3^2 \\
 &= u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 - 2u_1 u_2 v_1 v_2 - 2u_1 u_3 v_1 v_3 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_3^2 - 2u_2 u_3 v_2 v_3 + \\
 &\quad u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)^2 + u_1 v_2 - u_2 v_1 \\
 &= \|u \times v\|^2 \quad \square
 \end{aligned}$$

**Teorema 3.2.**  $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo formado por  $u$  e  $v$ .

*Demonstração.* De [3.1](#) temos que  $|u \cdot v|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta$ , logo:

$$\begin{aligned}
 \|u \times v\|^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - |u \cdot v|^2 \\
 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta \\
 &= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\
 &= \|u\|^2 \|v\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta \quad \square
 \end{aligned}$$

Mostraremos a seguir que a área  $S$  do paralelogramo formado por  $u$  e  $v$  é dada pela norma de  $u \times v$ .

Figura 47: Paralelogramo gerado por  $u$  e  $v$ .

Temos da geometria que:

$$\begin{aligned} S &= \|u\| \cdot h \\ S &= \|u\| \|v\| \operatorname{sen}\theta \\ S &= \|u \times v\| \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.2 FUNÇÕES VETORIAIS

Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento de seu domínio um elemento de sua imagem. Uma *função vetorial*, ou função a valores vetoriais, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Estamos particularmente interessados em funções vetoriais  $\mathbf{r}$  cujos valores são vetores tridimensionais. Isso significa que, para todo número  $t$  no domínio de  $\mathbf{r}$  existe um único vetor de  $V^3$  denotado por  $r(t)$ . Se  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  são as componentes do vetor  $r(t)$ , então  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções a valores reais chamadas *funções componentes* de  $\mathbf{r}$  e podemos escrever:

$$r(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)i + g(t)j + h(t)k \quad (3.7)$$

Usamos a letra  $\mathbf{t}$  para denotar a variável independente porque ela representa o tempo na maioria das aplicações de funções vetoriais.

A *derivada* de uma função vetorial  $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$ , onde  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções diferenciáveis, é dada por:

$$r'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t)) \quad (3.8)$$

**Definição 3.3.** Uma curva  $\alpha(t)$  é dita *suave* em um intervalo  $I$  se  $\alpha'(t)$  é contínua e  $\alpha'(t) \neq 0$  em  $I$ .

A partir deste momento, sempre que nos referirmos a uma curva ou função vetorial, estaremos considerando as mesmas curvas e funções suaves.

### 3.2.1 Significado geométrico de derivada

A derivada  $r'(t)$  é obtida do mesmo modo que nas funções a valores reais, ou seja, pelo limite:

$$\frac{dr}{dt} = r'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \quad (3.9)$$

O vetor  $r'(t)$  é um vetor tangente a  $r(t)$ . Para esta verificação, tomemos  $P$  e  $Q$  os vetores posição de  $r(t)$  e  $r(t+h)$ , logo  $\overrightarrow{PQ}$  representa o vetor  $r(t+h) - r(t)$ , que pode ser visto como um vetor secante à curva  $r(t)$ .

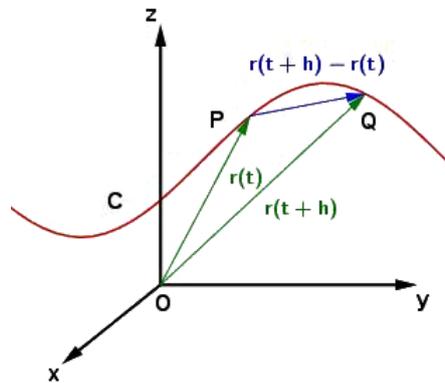


Figura 48: Vetor  $r(t+h) - r(t)$  secante à curva  $r(t)$

Porém, quando  $P$  se aproxima de  $Q$ , o vetor  $\overrightarrow{PQ}$  se aproxima da reta tangente à  $r(t)$ .

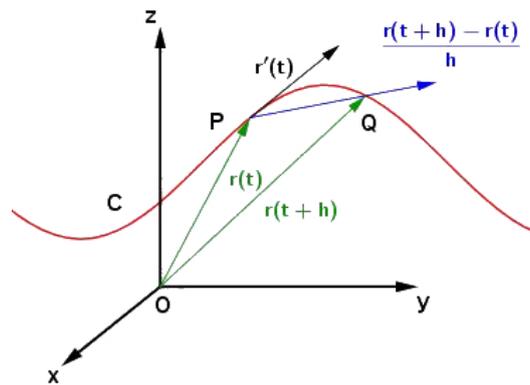


Figura 49: Limite de  $h$  tendendo a zero.

Logo, como  $h \rightarrow 0$ , temos que  $r'(t)$  é um vetor tangente à  $r(t)$ .

Denotaremos por  $T(t)$  o vetor unitário tangente à  $r(t)$ , dado por:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \quad (3.10)$$

### 3.2.2 Regras de derivação

As regras de derivação para funções vetoriais são definidas da mesma forma que nas funções a valores reais, com a exceção de que o resultado destas gera um vetor.

Abaixo mostraremos que a regra do produto tem seu equivalente nas funções vetoriais.

□

**Teorema 3.4.** *Suponha que  $u(t)$  e  $v(t)$  sejam funções vetoriais diferenciáveis. Então,*

$$\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$$

*Demonstração.* Sejam  $u(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  e  $v(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ , então:

$$u(t) \cdot v(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t) = \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i(t)$$

<sup>2</sup> As outras regras podem ser vistas em [18].

As regras usuais de derivação do produto fornecem:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt}[f_i(t)g_i(t)] \\
 &= \sum_{i=1}^3 [f'_i(t)g_i(t) + f_i(t)g'_i(t)] \\
 &= \sum_{i=1}^3 f'_i(t)g_i(t) + \sum_{i=1}^3 f_i(t)g'_i(t) \\
 &= u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

□

### 3.2.3 Comprimento de arco

Um dos problemas que o Cálculo pode resolver é o de determinar o comprimento de uma curva.

Dada uma função  $y = f(x)$ , com  $f$  contínua e  $a \leq x \leq b$ , podemos obter uma aproximação para o comprimento  $L$  desta curva  $C$  através de um poligonal, dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos com extremidades  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  e com larguras iguais a  $\Delta x$ . Se  $y_i = f(x_i)$ , então o ponto  $P_i(x_i, y_i)$  está em  $C$  e a poligonal com vértices em  $P_0, P_1, \dots, P_n$  é uma aproximação para  $L$ .

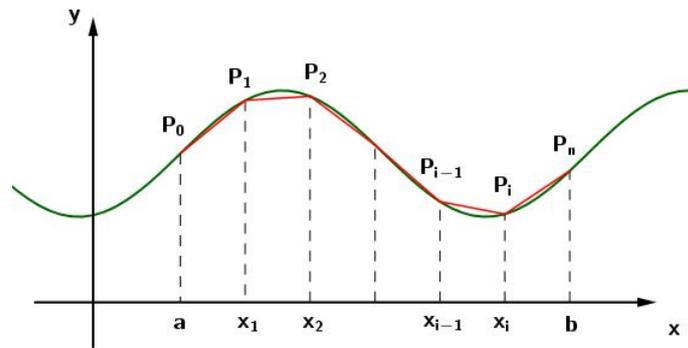
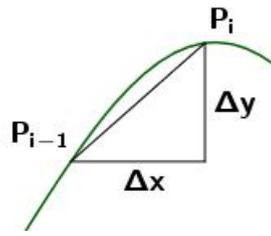


Figura 50: Aproximação do comprimento  $L$  por uma poligonal.

Veja que cada segmento  $P_{i-1}P_i$  tem seu comprimento dado por  $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ .

Figura 51:  $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 

Sendo  $L_1$  o comprimento da poligonal, este será dado por:

$$L_1 = \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \quad (3.12)$$

Conforme aumentamos o número de partições,  $n$ , o comprimento da poligonal se aproxima do comprimento de  $C$ . Logo,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \quad (3.13)$$

De onde temos que:<sup>3</sup>

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (3.14)$$

Suponha agora que  $C$  pode ser descrita pelas equações paramétricas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ , com  $\alpha \leq t \leq \beta$  em que  $dx/dt = f'(t) > 0$ , temos que:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \end{aligned} \quad (3.15)$$

O comprimento de uma curva espacial é definido de maneira análoga. Tomemos uma curva de equação vetorial  $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$ , com  $a \leq t \leq b$ , ou equivalente as

<sup>3</sup> Para maiores detalhes, [18].

equações paramétricas  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  e  $z = h(t)$ , com derivadas contínuas, é possível mostrar que:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2} dt \quad (3.16)$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (3.17)$$

Mas como  $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ , temos que  $\|r'(t)\| = \|f'(t)i + g'(t)j + h'(t)k\| = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}$ . Então podemos escrever que:

$$L = \int_a^b \|r'(t)\| dt \quad (3.18)$$

**Exemplo 3.1.** Vamos calcular o comprimento do arco da hélice circular da equação  $r(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$  do ponto  $(1, 0, 0)$  até o ponto  $(1, 0, \pi)$ .

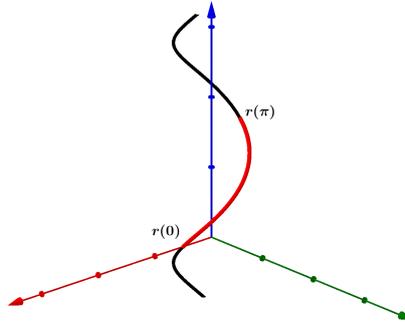


Figura 52:  $r(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

Dado  $r(t)$  acima, temos que  $r'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$ . Logo,

$$|r'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1} = \sqrt{2}$$

Veja que o arco de  $(1, 0, 0)$  até  $(-1, 0, \pi)$  é descrito quando o parâmetro varia de  $0 \leq t \leq \pi$ , então:

$$L = \int_0^\pi |r'(t)| dt = \int_0^\pi \sqrt{2} dt = \sqrt{2}\pi$$

### 3.2.4 Parametrização de uma curva

Uma curva  $C$  pode ser representada por mais de uma função vetorial dependendo do parâmetro que utilizamos. Por exemplo, as funções  $r_1(t) = (2t, t^2, \frac{t^3}{3})$ , com  $a \leq t \leq b$ , e

$r_2(u) = (2e^u, e^{2u}, \frac{e^{3u}}{3})$ , com  $\ln(a) \leq u \leq \ln(b)$  são parametrizações de uma mesma curva, representada abaixo:

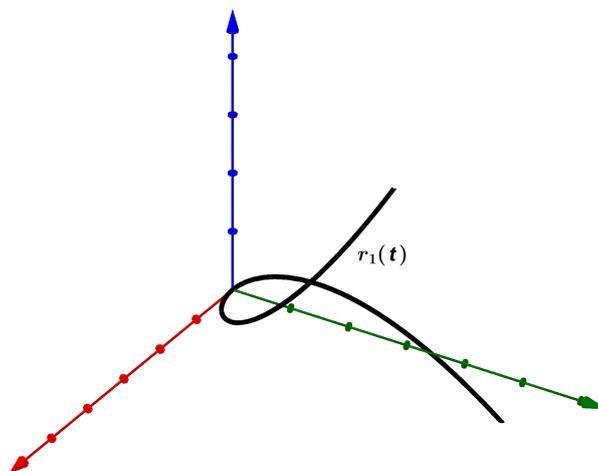


Figura 53: Esboço da curva  $r_1(t) = r_2(u)$ .

A diferença entre  $r_1$  e  $r_2$  se dá na velocidade que percorremos a curva.

Porém ao medir o comprimento de um arco de  $r_1(t)$  ou de  $r_2(u)$  desejamos obter a mesma resposta. Tomemos como exemplo o comprimento do arco do ponto  $(2, 1, \frac{1}{3})$  até  $(4, 4, \frac{8}{3})$  em  $r_1(t)$ .

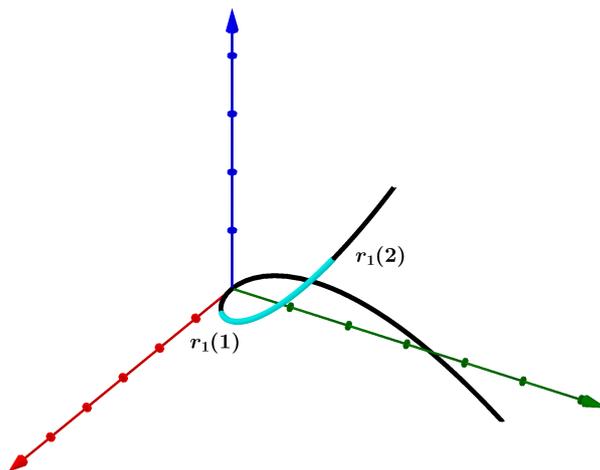


Figura 54: Arco de  $r_1(1)$  a  $r_1(2)$ .

Calculamos então:

$$\begin{aligned}
\|r_1'(t)\| &= \sqrt{(2)^2 + (2t)^2 + (t^2)^2} \\
&= \sqrt{(2)^2 + 2(2t^2) + (t^2)^2} \\
&= \sqrt{(2+t^2)^2} \\
&= 2+t^2
\end{aligned}$$

E como o arco de  $(2, 1, \frac{1}{3})$  até  $(4, 4, \frac{8}{3})$  é descrito quando  $1 \leq t \leq 2$ , temos:

$$L = \int_1^2 \|r_1'(t)\| dt = \int_1^2 2+t^2 dt = \frac{13}{3}$$

Veja que o mesmo comprimento é obtido com  $r_2(u) = (2e^u, e^{2u}, \frac{e^{3u}}{3})$ , com  $0 \leq u \leq \ln(2)$ .

$$\begin{aligned}
\|r_2'(u)\| &= \sqrt{(2e^u)^2 + (2e^{2u})^2 + (e^{3u})^2} \\
&= \sqrt{(2e^u)^2 + 2(2e^u e^{3u}) + (e^{3u})^2} \\
&= \sqrt{(2e^u + e^{3u})^2} \\
&= 2e^u + e^{3u}
\end{aligned}$$

$$L = \int_0^{\ln(2)} \|r_2'(u)\| du = \int_0^{\ln(2)} 2e^u + e^{3u} du = \frac{13}{3}$$

Como o comprimento da curva não depende da parametrização escolhida muitas vezes é conveniente adotarmos o comprimento de um arco da curva como seu parâmetro.

### 3.2.5 Parametrização pelo comprimento de arco

Ao reparametrizar uma curva  $r(t)$  em função do comprimento de arco  $s$ , tomamos  $t = a$  e definimos o ponto  $r(a)$  como o início do arco a ser medido, ou seja, o nosso zero, e calculamos o comprimento do arco até  $r(t)$ .

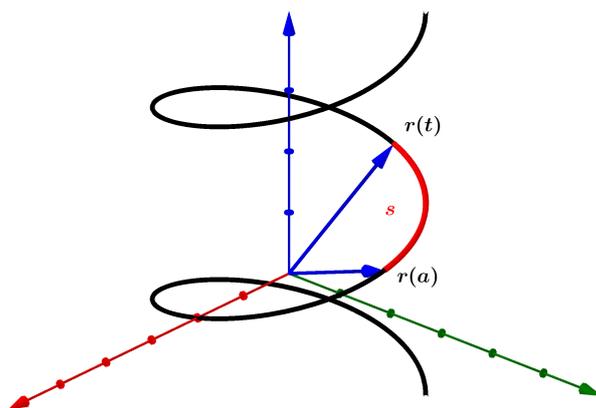


Figura 55: Comprimento de arco.

Para isso basta resolver a integral:

$$s = s(t) = \int_a^t \|r'(u)\| du$$

Note agora que ao escolher um valor para  $s$ , por exemplo  $s = 2$ , estamos determinando onde estará o vetor  $r(s)$  após percorrer o comprimento de dois arcos na curva.

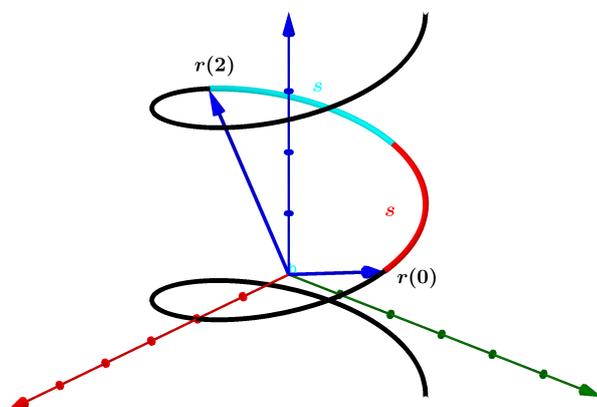


Figura 56: Arco de comprimento de 2.

Tomemos como exemplo a curva apresentada no Exemplo [3.1](#) e faremos sua parametrização pelo comprimento de arco.

$$s = s(t) = \int_0^t \|r'(u)\| du = \sqrt{2}t$$

Logo a parametrização pelo comprimento de arco será dada fazendo a substituição  $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$ , nos dando:

$$r(s) = \left( \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

Note que  $\|r'(s)\| = 1$  para todo  $s$  escolhido.

### 3.2.6 Curvatura

A curvatura de  $C$  em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto. A curvatura nos mostra o comportamento do vetor tangente  $T(t)$  ao percorrer a curva. Veja que o vetor  $T(t)$  tem uma pequena variação quando a curva se aproxima de uma reta e uma grande variação quando  $C$  se torce de maneira mais acentuada.

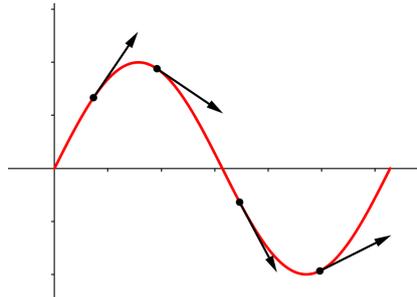


Figura 57: Variação do vetor tangente à curva.

**Definição 3.5.** Seja  $C$  uma curva parametrizada por comprimento de arco, sua curvatura  $k$  é definida como o módulo da taxa de variação do vetor tangente unitário  $T$  com relação ao comprimento do arco  $s$ .

$$k(s) = \left| \frac{dT}{ds} \right|$$

A curvatura também pode ser expressa em função de um parâmetro  $t$  qualquer como:

$$k(s) = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \left| \frac{dT/dt}{ds/dt} \right|$$

Lembrando que:

$$s = \int |r'(t)| dt$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\frac{ds}{dt} = |r'(t)|$$

Logo,

$$k(s) = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|} \quad (3.19)$$

**Exemplo 3.2.** Sabemos que a circunferência tem curvatura constante. Tomemos então, a circunferência com centro na origem e raio  $a$ . Esta circunferência tem equação paramétrica dada por  $r(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$  e sua derivada  $r'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t))$ .

O seu vetor tangente unitário (3.10) será:

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{r'(t)}{|r'(t)|} & (3.20) \\ &= \frac{(-a \sin(t), a \cos(t))}{\sqrt{(-a \sin(t))^2 + (a \cos(t))^2}} \\ &= \frac{(-a \sin(t), a \cos(t))}{\sqrt{a^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))}} \\ &= \frac{(-a \sin(t), a \cos(t))}{\sqrt{a^2}} \\ &= \frac{(-a \sin(t), a \cos(t))}{a} \\ &= (-\sin(t), \cos(t)) \end{aligned}$$

Temos então que  $|T(t)| = 1$  e segue de (3.19) que:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|} & (3.21) \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Ou seja, quanto maior for  $k$  mais acentuada será a curva.

### 3.2.7 Vetor Normal

Dada  $C$  uma curva suave no espaço temos diversos vetores ortogonais a  $C$ . Dentre eles o vetor  $T'(t)$ . Para verificar que  $T'(t)$  é ortogonal a  $C$ , basta lembrar que  $T(t) \cdot T(t) = 1$ , então:

$$\begin{aligned} [T(t) \cdot T(t)]' &= [1]' \\ T(t) \cdot T'(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Porém como  $T'(t)$  pode não ser unitário, definimos então o vetor unitário  $N(t)$  como:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

Note que nas curvas parametrizadas por comprimento de arco o vetor  $T'(t)$  pode ser escrito como:

$$T'(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} |T'(s)| = N(s) \cdot k(s) \quad (3.23)$$

### 3.3 SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

Bem como uma curva espacial pode ser representada por uma função paramétrica  $r(t)$ , uma superfície pode ser gerada por uma função  $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Uma forma de visualizar esta superfície é notar que para cada escolha de  $u$  e  $v$  no domínio  $D$  de  $S$  geramos um vetor cuja extremidade nos dá um ponto desta superfície.

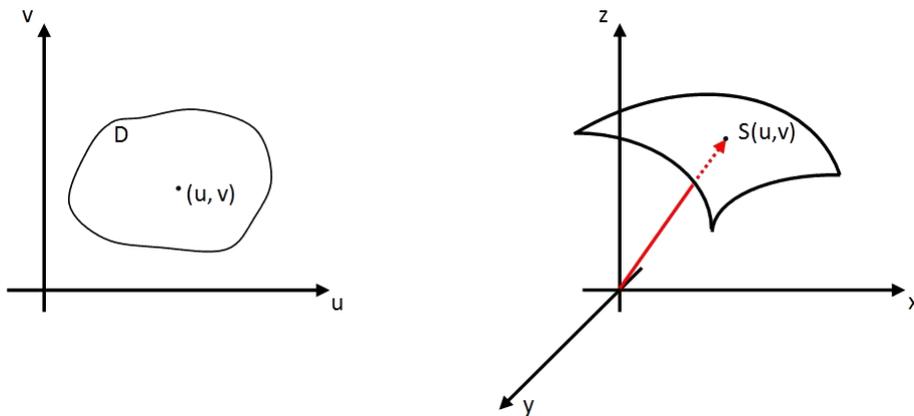


Figura 58: Representação de  $(u, v)$  em  $D$  e sua imagem em  $S$ .

Uma outra maneira de visualizar esta superfície, seria considerar uma das variáveis como uma constante. Então teríamos duas famílias de curvas  $S_1(u_0, v)$  e  $S_2(u, v_0)$ , ora considerando  $u$  constante e ora  $v$ .

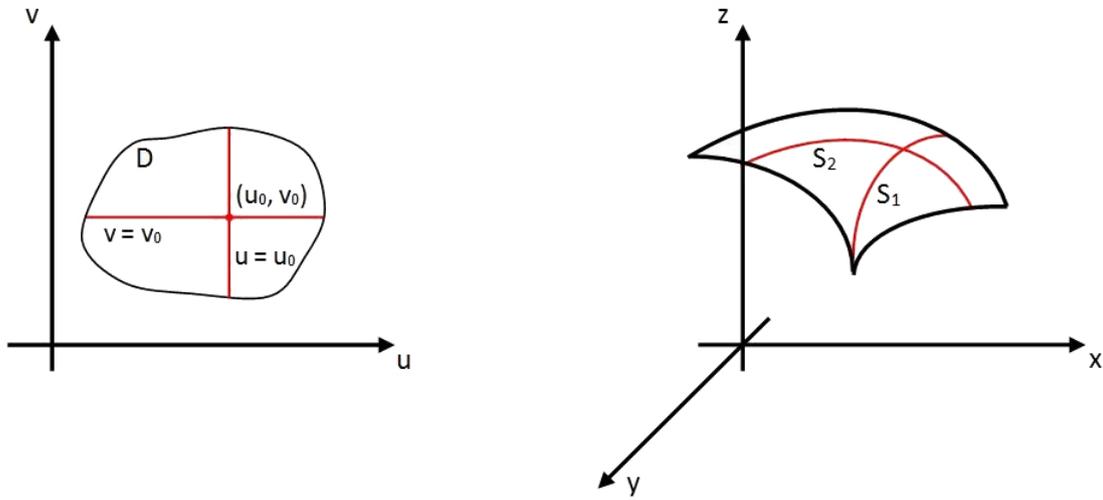


Figura 59: Curvas  $S_1(u_0, v)$  e  $S_2(u, v_0)$ .

Ao considerar  $u = u_0$  como constante, a reunião de todas as curvas  $v$  que cortam  $u_0$  formarão nossa superfície e de modo análogo se considerarmos  $v = v_0$  como constante, as curvas  $u$  formarão a superfície.

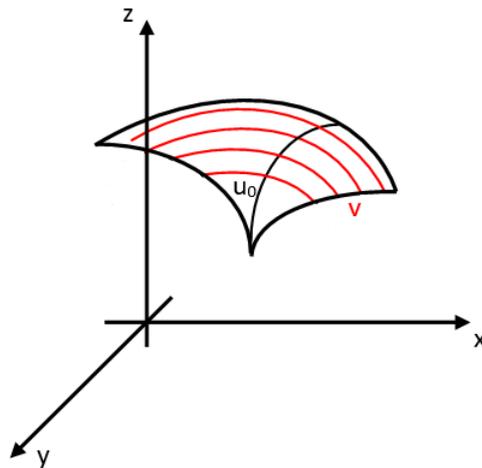


Figura 60: Curvas  $v$  cortando a curva  $u_0$ .

Note que as derivadas de  $S_1(u, v)$  e  $S_2(u, v)$  nada mais são que as derivadas parciais de  $S(u, v)$ , cuja notação usual é  $\frac{\partial S}{\partial u}$  e  $\frac{\partial S}{\partial v}$ .

### 3.3.1 Área de uma superfície parametrizada

Uma superfície parametrizada  $S$  é chamada de *suave*, ou *lisa*, numa região do plano  $uv$  se suas derivadas parciais forem contínuas no seu domínio  $D$  e  $\partial S/\partial u \times \partial S/\partial v \neq 0$ .

Ou seja, existe um vetor normal unitário, e portanto um plano tangente (ver [2]), para todo  $(u, v)$ .

Para calcular a área da superfície  $S$  subdividimos  $D$  em regiões retangulares por meio de retas paralelas aos eixos  $u$  e  $v$ .

Supondo que haja  $n$  retângulos, tomemos o  $k$ -ésimo retângulo  $R_k$ , cujo vértice inferior esquerdo seja o ponto  $(u_k, v_k)$ . Então sua área será dada por  $\Delta A_k = \Delta u_k \cdot \Delta v_k$ , onde  $\Delta u_k$  e  $\Delta v_k$  são as dimensões de  $R_k$ .

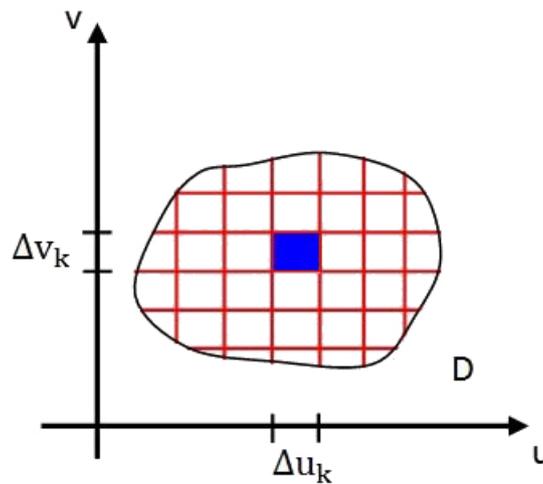


Figura 61:  $k$ -ésimo retângulo  $R_k$ .

A imagem de  $R_k$  em  $S$  será a porção curvilínea  $S_k$  cujo vértice será  $S(u_k, v_k)$ .

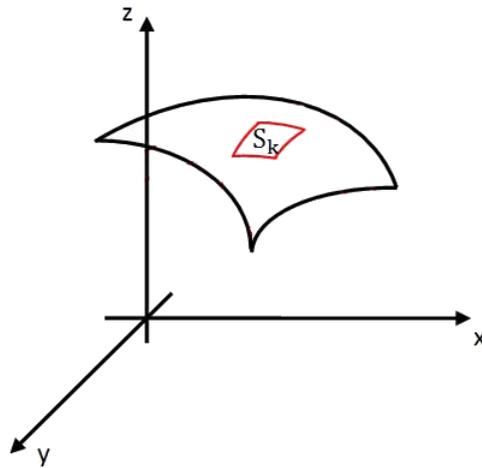


Figura 62: Imagem de  $R_k$  em  $S$ .

A área de  $S_k$  pode ser aproximada pela área do paralelogramo gerado pelos vetores secantes  $S(u_k, v_k + \Delta v_k) - S(u_k, v_k)$  e  $S(u_k + \Delta u_k, v_k) - S(u_k, v_k)$ . Porém, se  $\Delta u_k$  e  $\Delta v_k$  forem pequenos o suficiente esses vetores secantes podem ser aproximados pelos vetores tangentes  $\frac{\partial S}{\partial u} \Delta u_k$  e  $\frac{\partial S}{\partial v} \Delta v_k$ , onde as derivadas parciais são calculadas no ponto  $S(u_k, v_k)$ .

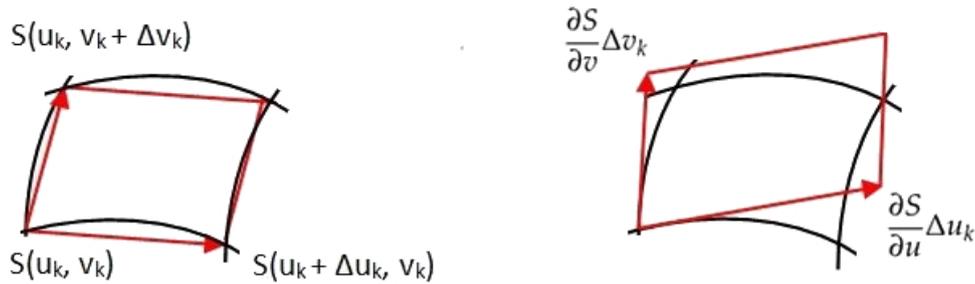


Figura 63: Paralelogramos gerados pelos vetores secantes e pelos vetores tangentes à  $S$ .

Assim a área de  $S_k$  pode ser aproximada pela área do paralelogramo gerado por estes vetores. E será dada por:<sup>4</sup>

$$S_k \approx \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\| \Delta u_k \Delta v_k = \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\| \Delta A_k$$

E a área da superfície  $S$  pode ser aproximada para:

$$S \approx \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\| \Delta A_k$$

<sup>4</sup> Para maiores detalhes, veja [2].

Ao aumentar o número de partições  $n$  as diferenças  $\Delta u_k$  e  $\Delta v_k$  diminuem. Supondo que  $n$  aumente o suficiente para que as diferenças tendam a zero, temos que a área de  $S$  será dada:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\| \Delta A_k$$

Ou o equivalente:

$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\| dA$$

**Exemplo 3.3.** Iremos neste exemplo aplicar a fórmula obtida para calcular a área de uma esfera de raio  $r$ . Para isso, vamos determinar uma parametrização conveniente onde a esfera é descrita pelo vetor  $r$  quando variamos os ângulos  $\varphi$  e  $\theta$  conforme mostrado abaixo.

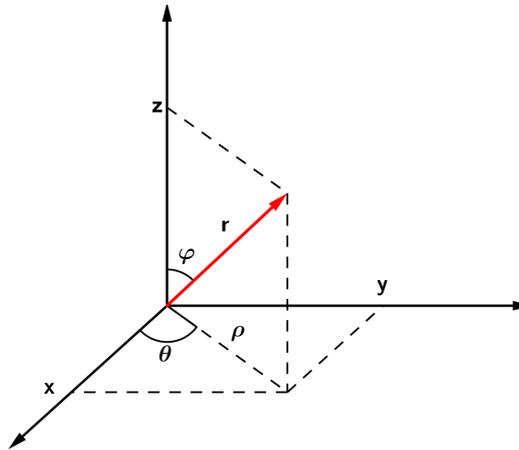


Figura 64: Componentes do vetor  $r$ .

Veja que:  $\cos \theta = \frac{x}{\rho}$ ,  $\sin \theta = \frac{y}{\rho}$ ,  $\sin \varphi = \frac{z}{r}$  e  $\cos \varphi = \frac{\rho}{r}$ . Isolando  $x$ ,  $y$  e  $z$  chegamos a:

$$F(\varphi, \theta) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi), \text{ com } 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

As derivadas parciais de  $F$  são:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, -r \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = (-r \sin \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \cos \theta, 0)$$

Calculando o produto vetorial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \times \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ r \cos \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta & -r \operatorname{sen} \varphi \\ -r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta)i + (r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta)j + (r^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \theta)k$$

$$= (r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta)i + (r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta)j + (r^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi)k$$

Segue então que:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial F}{\partial \varphi} \times \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\| &= \sqrt{(r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta)^2 + (r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta)^2 + (r^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi)^2} \\ &= \sqrt{r^4 \operatorname{sen}^4 \varphi \cos^2 \theta + r^4 \operatorname{sen}^4 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta + r^4 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{r^4 \operatorname{sen}^4 \varphi + r^4 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{r^4 \operatorname{sen}^2 \varphi} \\ &= r^2 |\operatorname{sen} \varphi| \end{aligned}$$

Logo a área da esfera é dada por:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 |\operatorname{sen} \varphi| \, d\varphi \, d\theta \\ &r^2 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi |\operatorname{sen} \varphi| \, d\varphi \right) d\theta \\ &r^2 \int_0^{2\pi} |-\cos \varphi|_0^\pi \, d\theta \\ &r^2 \int_0^{2\pi} 2 \, d\theta \\ &2r^2 |\theta|_0^{2\pi} \\ &4\pi r^2 \end{aligned}$$

---

## DEMONSTRAÇÃO

---

Neste capítulo traremos uma prova formal para o teorema da tangente que varre. Mamikon e Apostol demonstram o caso geral no Apêndice do livro *New Horizons in Geometry* [6] definindo uma superfície  $Y(s, u) = X(s) + uT(s)$  que é gerada pela curva suave  $X(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco, e os vetores unitários tangentes a esta sendo estendidos/comprimidos em função de uma variável  $u$ . Esta superfície é denominada a *tangente que varre*. Mostram, usando a Geometria Diferencial, que sua área depende apenas da curvatura da curva  $X$  e da variável  $u$ . Em seguida, supõe que ao fixar uma tangente inicial podemos escrever o comprimento de arco em função do ângulo formado entre esta tangente fixada e uma tangente arbitrária qualquer. Fazendo, então, uma mudança de variável para coordenadas polares, mostram que a área da tangente que varre é equivalente a área de uma superfície cônica, o *feixe de tangentes*, que é formado ao transladar paralelamente os vetores tangentes à curva  $X$  para um ponto comum.

Uma outra demonstração mais rigorosa foi apresentada por Mamikon em seu trabalho *On the Area of a Region on a Developable Surface* [13], porém esta foge ao escopo da nossa dissertação.

Aqui, preferimos uma abordagem mais direta calculando separadamente as área da tangente que varre e do feixe de tangentes definidas por Mamikon e mostramos que ambas são iguais.

Como introdução iremos provar o caso particular apresentado na Secção 1.1, a área da coroa circular [1] utilizando agora o *Cálculo Diferencial*.

---

1 Neste exemplo a coroa circular é a região descrita pela *tangente que varre* e o círculo de raio  $v$  é o *feixe de tangentes*.

## 4.1 COROA CIRCULAR

**Proposição 4.1.** *A área da coroa circular formada pelas circunferências concêntricas  $X$  e  $Y$  de raios  $r$  e  $R$ , respectivamente, é equivalente a área do círculo de raio  $v$  onde  $v^2 = R^2 - r^2$ .*

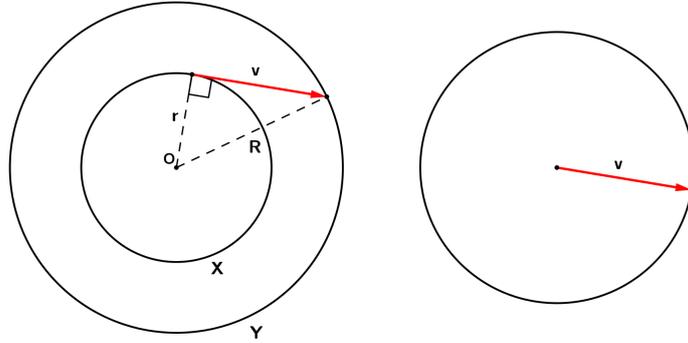


Figura 65: A coroa circular e o círculo com a mesma área.

*Demonstração.* Considere a circunferência  $X$  de centro na origem e raio  $r$ . Sua equação parametrizada por comprimento de arco será dada por  $X(s) = (r \cos(\frac{s}{r}), r \sin(\frac{s}{r}))$ .

A circunferência  $Y$  é descrita quando deslizamos o vetor  $v$ , múltiplo do vetor tangente à  $X$ , sobre a circunferência  $X$ .

Logo, a superfície  $S$  será gerada pela equação:

$$Y(s, u) = X(s) + uT(s), \text{ onde } 0 \leq u \leq v, 0 \leq s \leq 2\pi r \text{ e } T \text{ é o vetor tangente unitário}$$

e sua área será dada por:

$$\int_0^{2\pi r} \int_0^v \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \times \frac{\partial Y}{\partial u} \right\| du ds \quad (4.1)$$

Como a área do paralelogramo é calculada de maneira mais fácil usando o produto vetorial e o mesmo é definido no espaço, sem perda de generalidade tomemos  $X(s) = (r \cos(\frac{s}{r}), r \sin(\frac{s}{r}), 0)$ , então:

$$Y(s, u) = \left( r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) + u \left( -\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right)$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial s} &= \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) + u \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}& \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \times \frac{\partial Y}{\partial u} \right\| = \\ &= \left\| \left[ \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) + u \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) \right] \times \right. \\ & \quad \left. \left[ \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) \right] \right\| \\ &= \left\| \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) \times \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) + \right. \\ & \quad \left. u \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) \times \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) \right\|\end{aligned}$$

Calculando os produtos vetoriais temos:

$$\begin{aligned}\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) \times \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) &= \\ & \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right) & \cos\left(\frac{s}{r}\right) & 0 \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right) & \cos\left(\frac{s}{r}\right) & 0 \end{vmatrix} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) \times \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) &= \\ & u \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right) & -\frac{1}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right) & 0 \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right) & \cos\left(\frac{s}{r}\right) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{u}{r} k\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \times \frac{\partial Y}{\partial u} \right\| = \left\| -\frac{u}{r} k \right\| = \frac{u}{r}$$

Portanto, a área da coroa será dada por:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi r} \int_0^v \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \times \frac{\partial Y}{\partial u} \right\| dud s &= \\
 \int_0^{2\pi r} \int_0^v \frac{u}{r} dud s &= \\
 \int_0^{2\pi r} \left( \int_0^v \frac{u}{r} du \right) ds &= \\
 \int_0^{2\pi r} \frac{1}{r} \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^v ds &= \\
 \frac{v^2}{2r} \int_0^{2\pi r} ds &= \\
 \frac{v^2}{2r} [s]_0^{2\pi r} &= \\
 \pi v^2 &
 \end{aligned}$$

Ou seja, a área do círculo de raio  $v$ . □

Observamos que, utilizando as ferramentas da *Geometria Diferencial*<sup>2</sup>, poderíamos ter simplificado o cálculo das derivadas parciais:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Y}{\partial s} &= \frac{\partial X}{\partial s} + u \frac{\partial T}{\partial s} = T(s) + uT'(s) = T(s) + uk(s)N(s) \\
 \frac{\partial Y}{\partial u} &= T(s)
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \times \frac{\partial Y}{\partial u} \right\| &= \|[T(s) + uk(s)N(s)] \times T(s)\| \\
 &= \|T(s) \times T(s)\| + uk(s) \|N(s) \times T(s)\|
 \end{aligned}$$

Mas  $\|T(s) \times T(s)\| = 0$ , pois vetores paralelos não geram um paralelogramo, e  $\|N(s) \times T(s)\| = 1$ , pois  $N(s)$  e  $T(s)$  são unitários.

Logo,

$$\left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \times \frac{\partial Y}{\partial u} \right\| = uk(s) \tag{4.2}$$

Mas neste caso  $k(s) = \frac{1}{r}$ , (3.22). Então  $uk(s) = \frac{u}{r}$ , o que nos dá:

$$\int_0^{2\pi r} \int_0^v \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \times \frac{\partial Y}{\partial u} \right\| dud s = \int_0^{2\pi r} \int_0^v \frac{u}{r} dud s = \pi v^2$$

---

<sup>2</sup> Apresentadas no Capítulo 3.

## 4.2 HELICÓIDE

Podemos também considerar uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  gerada ao estender os vetores tangentes à uma curva suave.

**Proposição 4.2.** A área de uma superfície helicoidal<sup>3</sup> gerada por uma curva  $X(s)$ , com  $0 \leq s < 2\pi$ , e os vetores unitários tangentes a esta é equivalente a área de um cone cuja geratriz é o vetor tangente unitário de  $X$ .

*Demonstração.* Considere a curva  $X(s) = \left( \frac{\text{sen}(s)}{2}, -\frac{\text{cos}(s)}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}s \right)$  parametrizada por comprimento de arco.

O vetor tangente à  $X$  será  $X'(s) = \left( \frac{\text{cos}(s)}{2}, \frac{\text{sen}(s)}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ , que tem norma 1, logo  $X'(s) = T(s)$ .

Considere agora a superfície  $Y(s, u) = X(s) + uT(s)$ , com  $0 \leq s < 2\pi$  e  $0 \leq u \leq 1$ .

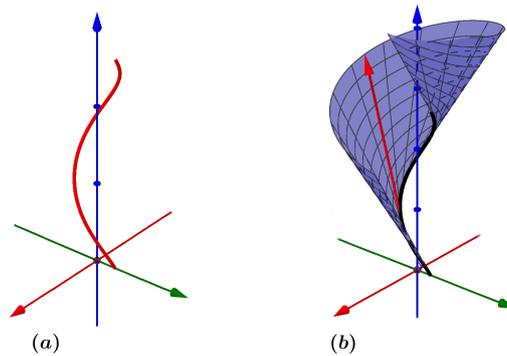


Figura 66: (a) Curva  $X(s)$ . (b) Superfície  $Y(s)$  gerada a partir da curva  $X(s)$ .

Pela Equação 4.2,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \times \frac{\partial Y}{\partial u} \right\| dud s = \int_0^{2\pi} \int_0^1 uk(s) dud s$$

Mas,

$$k(s) = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \left\| \left( -\frac{\text{sen}(s)}{2}, \frac{\text{cos}(s)}{2}, 0 \right) \right\| = \frac{1}{2} \quad (4.3)$$

Logo,

<sup>3</sup> Helicoide (do grego helicoeidés) ou helicoidal é uma superfície em formato de hélice.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^1 uk(s) \, dud s &= \\
\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{u}{2} \, dud s &= \\
\int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \frac{u}{2} \, du \right) ds &= \\
\int_0^{2\pi} \left[ \frac{u^2}{4} \right]_0^1 ds &= \\
\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} ds &= \\
\left[ \frac{s}{4} \right]_0^{2\pi} &= \\
\frac{\pi}{2} &
\end{aligned}$$

Considere agora o cone centrado na origem cuja geratriz é o vetor tangente unitário de  $X$ . Sua equação paramétrica é  $C(s, u) = uT(s)$ , com  $0 \leq s < 2\pi$  e  $0 \leq u \leq 1$ .

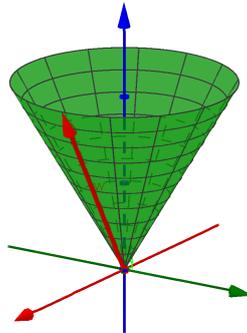


Figura 67: Cone centrado na origem.

Para obter a área da superfície  $C$  poderíamos usar a Equação [4.1](#), porém deixaremos este cálculo para o caso geral mais à frente. Por se tratar de um cone reto sabemos da geometria plana que sua área é dada por  $\pi r g$ , onde  $r$  é o raio da base e  $g$  é o comprimento da geratriz do cone. Como  $T(s) = X' = (s) \left( \frac{\cos(s)}{2}, \frac{\sin(s)}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$  temos o raio da base  $\frac{1}{2}$  e  $g$  tem o comprimento máximo de  $u$ , ou seja, 1. Logo, a área de  $C = \frac{\pi}{2}$ .

Concluimos, então que a área de  $Y$  é igual a área do cone  $C$ .

Como  $Y$  é descrita pelo movimento dos vetores tangentes sobre a curva, temos que esta é a tangente que varre. Ao trazer paralelamente os vetores tangentes para um ponto de origem comum formamos o cone  $C$ , ou seja, o feixe de tangentes de  $Y$ . E como mostramos acima, possuem mesma área.  $\square$

## 4.3 CASO GERAL

**Teorema 4.3.** *A área da tangente que varre de uma curva suave, onde o vetor aceleração não se anula, é igual à área do seu feixe de tangentes correspondente.*

*Demonstração.* Considere  $\alpha$  uma curva suave no espaço descrita pelo vetor  $X(s)$ , com  $X''(s) \neq 0$  para todo  $s$ , parametrizada pelo comprimento de arco no intervalo  $0 \leq a \leq s \leq b$ . Denotamos por  $T(s)$  o vetor unitário tangente a  $\alpha$ , ou seja,

$$T(s) = \frac{X'(s)}{|X'(s)|} = X'(s) \quad (4.4)$$

Considere agora a equação paramétrica:

$$Y(s, u) = X(s) + uT(s), \text{ com } 0 \leq u \leq f(s), \text{ onde } f(s) \text{ é uma função qualquer.} \quad (4.5)$$

Então  $Y$  gera uma superfície  $S$ .

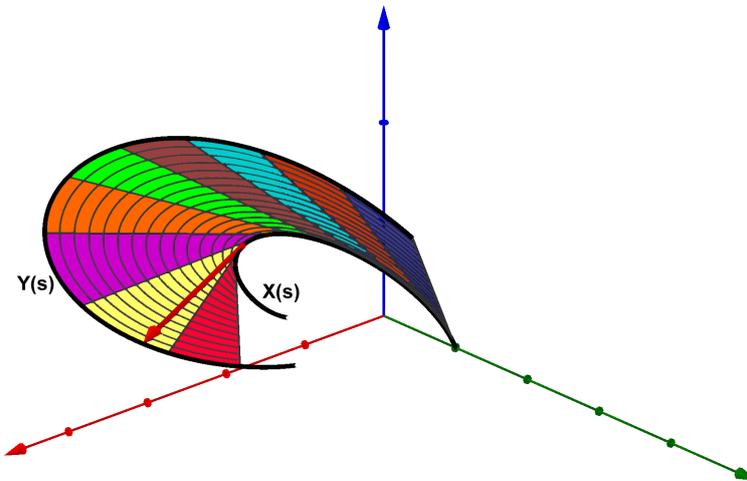
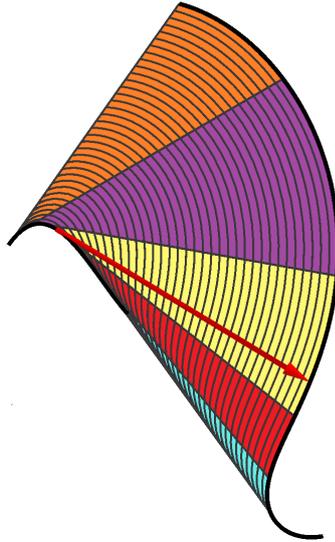


Figura 68: Área gerada sobre a curva  $X(s)$

Note que como  $Y$  varia em função de  $s$  e  $u$  no intervalo  $[a, b]$ ,  $S$  é gerada estendendo-se o vetor tangente  $T$  de  $X$  até a posição do vetor  $Y$  em  $(s, f(s))$ .

Figura 69: Planificação de  $Y(s)$ .

Geometricamente,  $S$  é uma superfície desenvolvível, isto é, ela pode ser desenrolada em um plano sem distorção, Apêndice (A.1). A superfície  $S$  é a região da tangente que varre mostrada nos capítulos anteriores.

A área de  $S$  é dada por:

$$a(S) = \int_a^b \int_0^{f(s)} \left\| \frac{\partial Y}{\partial u} \times \frac{\partial Y}{\partial s} \right\| du ds \quad (4.6)$$

Para resolver a integral calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = \frac{\partial X}{\partial s} + u \frac{dT}{ds} = T(s) + uT'(s) \quad (4.7)$$

e

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = T(s) \quad (4.8)$$

logo,

$$\frac{\partial Y}{\partial u} \times \frac{\partial Y}{\partial s} = (T(s) + uT'(s)) \times T(s) = T(s) \times T(s) + uT'(s) \times T(s) \quad (4.9)$$

Como  $T(s) \times T(s) = 0$ , temos então que:

$$a(S) = \int_a^b \int_0^{f(s)} \|uT'(s) \times T(s)\| \, duds \quad (4.10)$$

O feixe de tangentes  $S_1$  correspondente à superfície  $S$  é obtido ao transladar paralelamente os vetores tangentes a  $X$  para um ponto  $P$  de origem comum.

Uma parametrização da superfície  $S_1$  é dada por:

$$Y_1(s, u) = P + uT(s), \text{ com } 0 \leq u \leq f(s) \quad (4.11)$$

A superfície  $S_1$  é um cone generalizado<sup>4</sup> onde sua geratriz é dada pelo vetor  $uT(s)$  e  $P$  o seu vértice.

Sua área também pode ser obtida por:

$$a(S_1) = \int_a^b \int_0^{f(s)} \left\| \frac{\partial Y_1}{\partial u} \times \frac{\partial Y_1}{\partial s} \right\| \, duds \quad (4.12)$$

onde as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial s} = u \frac{dT}{ds} = uT'(s) \quad (4.13)$$

e

$$\frac{\partial Y_1}{\partial u} = T(s), \quad (4.14)$$

logo,

$$\frac{\partial Y_1}{\partial u} \times \frac{\partial Y_1}{\partial s} = uT'(s) \times T(s) \quad (4.15)$$

Portanto, a área de  $S_1$  é:

$$a(S_1) = \int_a^b \int_0^{f(s)} \|uT'(s) \times T(s)\| \, duds = a(S) \quad (4.16)$$

□

<sup>4</sup> Um cone generalizado é uma união de retas passando por um ponto  $P$  (chamado de vértice do cone) e pelos pontos de uma dada curva  $\delta$ .

Concluimos então que a área da região  $S$  descrita pela *tangente que varre* é igual a área  $S_1$  do *feixe de tangentes* correspondente à  $S$ .

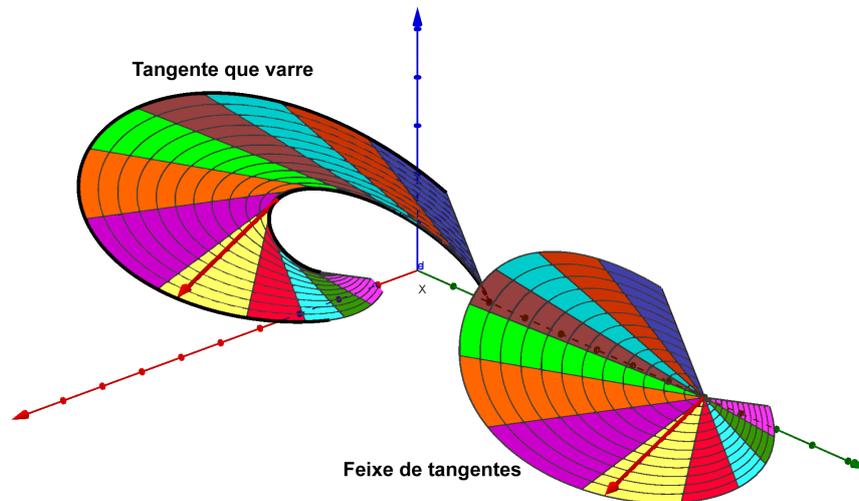


Figura 70: Superfície descrita pela *tangente que varre* e seu *feixe de tangentes* correspondente.

Esta demonstração também cobre as curvas no plano, bastando considerar uma das coordenadas do vetor  $X$  como uma constante. E neste caso o feixe de tangentes será um setor circular generalizado.

O teorema também é válido para as superfícies cujas curvas iniciais podem ser decompostas em uma soma ou diferença de um número finito de curvas que atendam as características descritas na hipótese. Isto deve dar conta das curvas não suaves, como por exemplo as curvas poligonais. E também aquelas que apresentam pontos de inflexão, onde a tangente que varre muda de direção podendo causar sobreposição da região gerada, conforme mostrado abaixo. Nestes casos, podemos dividir a curva em intervalos onde não tenhamos  $X' = 0$ .

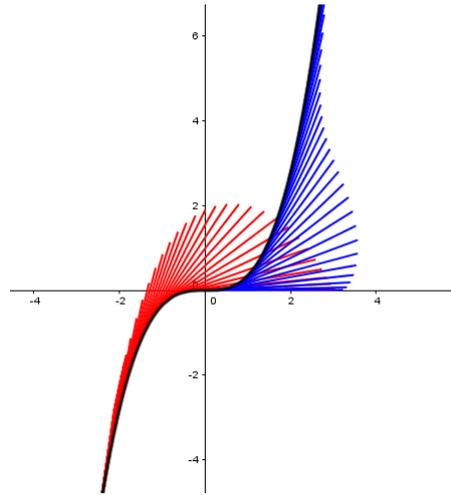


Figura 71:  $f(x) = x^3$  com inflexão em  $x = 0$ .

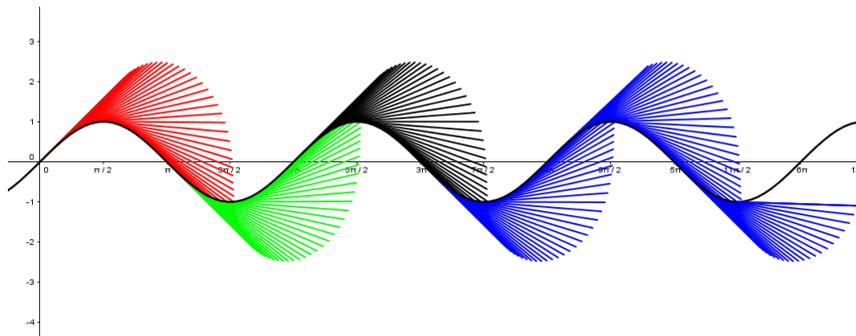


Figura 72:  $f(x) = \text{sen } x$  com inflexão em  $x = k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .



# A

---

## APÊNDICE A

---

### A.1 SUPERFÍCIES REGRADAS DESENVOLVÍVEL

Buscaremos neste parte caracterizar nossa superfície (4.5). As demonstrações dos teoremas abaixo citados podem ser vistas em [16] e [8].

#### A.1.1 Superfície regradada em $\mathbb{R}^3$

Intuitivamente, superfícies regradadas são superfícies geradas pela união de retas sobre uma curva em  $\mathbb{R}^3$ . Para o estudo dessas superfícies podemos utilizar o conceito de *família de retas a um-parâmetro*.

Uma *família de retas a um-parâmetro*  $(\alpha(t); \lambda(t))$  é uma correspondência que associa a cada  $t \in I$ , onde  $I$  é um intervalo aberto da reta real, um ponto  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$  e um vetor  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^3$ , com  $\lambda(t) \neq 0$  e tais que  $\alpha(t)$  e  $\lambda(t)$  sejam ambos diferenciáveis em  $t$ .

**Definição A.1.** Dada uma *família de retas a um-parâmetro*  $(\alpha(t); \lambda(t))$ , a superfície  $S$  parametrizada por:

$$\chi(t, v) = \alpha(t) + v\lambda(t) \quad t \in I; v \in \mathbb{R};$$

é chamada *superfície regradada* gerada pela família  $(\alpha(t); \lambda(t))$ . A curva  $\alpha(t)$  é chamada de *diretriz* da superfície e as retas  $L_t$  que passam por  $\alpha(t)$  e estão na direção de  $\lambda(t)$  são chamadas de *geratrizes* da superfície.

---

1 Sem perda de generalidade, supomos que  $\|\lambda(t)\| = 1$ .

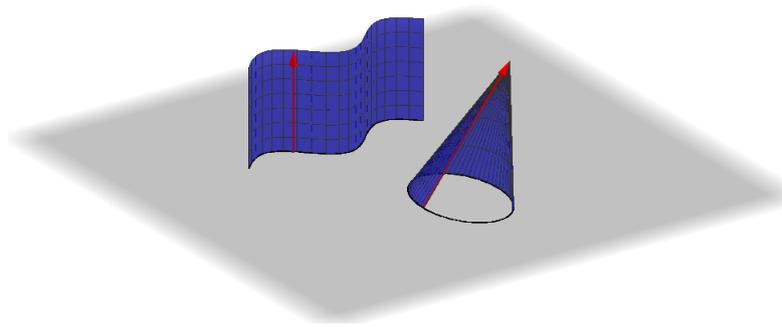


Figura 73: Superfícies regradas.

**Lema A.2.** *Seja  $S$  uma superfície parametrizada por  $\chi(t, v) = \alpha(t) + v\lambda(t)$ , com  $|\lambda(t)| = 1$  e  $|\lambda'(t)| \neq 0$ . Então é possível reparametrizar de forma única a superfície  $S$  para  $\chi(t, v) = \beta(t) + v\lambda(t)$ , com  $\beta'(t) \cdot \lambda'(t) = 0$ .*

Gostaríamos de notar aqui que [4.5](#) já atende as características de uma superfície regradada da forma  $\chi(t, v) = \beta(t) + v\lambda(t)$  com  $\beta'(t) \cdot \lambda'(t) = 0$ . Para esta verificação, basta usarmos [3.10](#) em [3.22](#).

$$\begin{aligned} T(s) \cdot T'(s) &= 0 \\ \frac{1}{|X'(s)|} T(s) \cdot T'(s) &= 0 \\ X'(s) \cdot T'(s) &= 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

### A.1.2 Superfícies desenvolvíveis

Uma *superfície desenvolvível* é uma superfície cuja curvatura Gaussiana<sup>2</sup> é zero, isto é, uma superfície que pode ser planificada sem distorção. Inversamente, é uma superfície que pode ser obtida ao “dobrar”, “torcer”, “enrolar” ou “cortar e colar” um plano. Em 3 dimensões toda superfície desenvolvível é uma superfície regradada, porém nem toda superfície regradada é desenvolvível<sup>3</sup>.

Alguns exemplos de superfícies desenvolvíveis são os *cilindros e cones generalizados*.

2 A definição pode ser vista em [\[8\]](#).

3 A definição de superfície regradada desenvolvível pode ser vista em <http://mathworld.wolfram.com/DevelopableSurface.html>. Para mais detalhes podemos consultar [\[15\]](#)

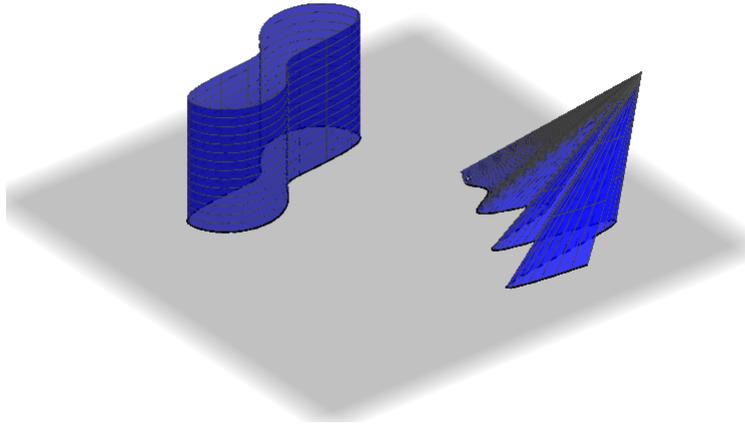


Figura 74: Cilindro e cone generalizados.

Um outro exemplo de superfície desenvolvível é aquela abordada em nosso trabalho, as *superfícies desenvolvíveis tangentes* que são construídas estendendo-se as retas tangentes a uma curva espacial.

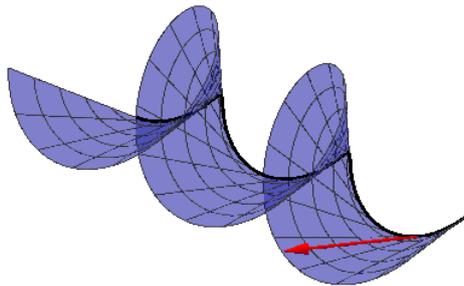


Figura 75: Superfície desenvolvível tangente.

Para mostrar que este último exemplo é uma superfície desenvolvível, usaremos a definição encontrada em [8].

**Definição A.3.** Uma superfície regrada  $\chi(t, v) = \alpha(t) + v\lambda(t)$  gerada pela família  $(\alpha(t), \lambda(t))$  com  $\|\lambda(t)\| = 1$  é chamada de *desenvolvível* se o produto misto

$$(\lambda(t) \times \lambda'(t), \alpha'(t)) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Vamos mostrar que 4.5 é uma superfície regrada desenvolvível.

*Demonstração.* Considere a superfície  $Y(s, u) = X(s) + uT(s)$ , onde  $T(s)$  é o vetor unitário tangente à  $X(s)$ . Sabemos que  $(T(s) \times T'(s), X'(s))$  pode ser obtido ao calcular o determinante da matriz 3x3 cujas linhas 1, 2 e 3 são dadas pelas coordenadas  $i, j$  e  $k$  dos vetores  $T(s)$ ,  $T'(s)$  e  $X'(s)$ , respectivamente. Mas, como  $T(s)$  e  $X'(s)$  são paralelos segue que  $(T(s) \times T'(s), X'(s)) = 0$ .  $\square$

Logo, nossa superfície pode ser planificada sem distorção de sua área. Este resultado é esperado, visto que já mostramos que a área descrita pela tangente que varre é equivalente à área de um cone formado pelo feixe de tangentes.

# B

---

## APÊNDICE B

---

### B.1 RETAS TANGENTES E A DERIVADA

O estudo das derivadas no Cálculo tem diversas aplicações como, por exemplo, determinar a velocidade instantânea de um corpo, verificar o crescimento/decrescimento de uma curva, achar pontos de extremo e também, a que vamos necessitar, encontrar a equação da reta tangente a uma curva.

Euclides define **reta tangente**<sup>1</sup> como a reta que intersesta a circunferência em um único ponto.

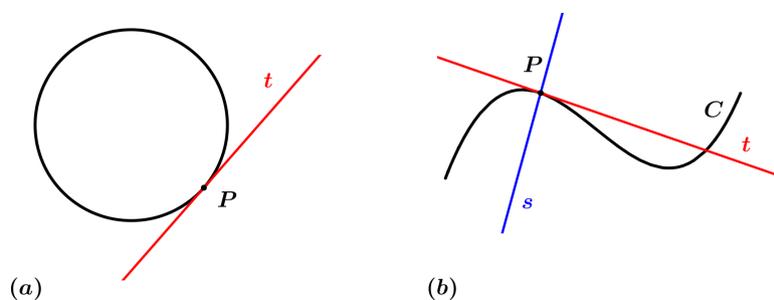


Figura 76: (a) Reta tangente a uma circunferência. (b) Reta tangente à uma curva.

Porém esta definição não se aplica a todas as curvas como mostrado na Figura (b) acima. A reta  $s$  intersesta a curva  $C$  em um único ponto, porém esta reta não se parece com a ideia que temos de tangente. Já a reta  $t$ , esta sim tangente à  $C$ , intersesta a curva em mais de um ponto.

---

<sup>1</sup> Do latim *tangens*, que significa tocando.

Para uma definição um pouco mais precisa, lembremos que uma reta estará determinada quando temos um de seus pontos e sua inclinação  $m$ .

Considere uma curva contínua  $C$ , de equação  $y = f(x)$ , e seja  $P = (x_0, f(x_0))$  um ponto desta curva. Tome um ponto  $Q = (x, f(x))$ , distinto de  $P$ , em  $C$ . A reta  $s = PQ$ , será uma reta secante<sup>2</sup> à curva  $C$  e sua inclinação será dado por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{B.1})$$

A medida que o ponto  $Q$  se desloca sobre  $C$  se aproximando de  $P$ ,  $x$  se aproxima de  $x_0$ , e a reta secante  $s$  tomará posições  $s_1, s_2, s_3, \dots$  e tende a coincidir com a reta  $t$ , tangente à curva no ponto  $P$ .

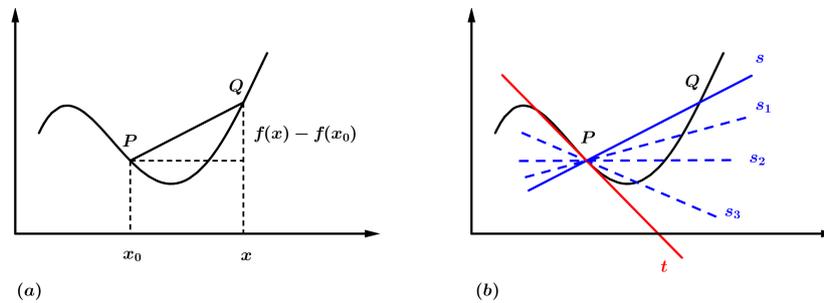


Figura 77: (a) Coeficiente angular da reta  $PQ$ . (b) Retas secantes à curva e reta tangente  $t$ .

Ou seja, o coeficiente angular  $m$  da reta tangente  $t$  pode ser obtido pelo limite de (B.1) quando  $Q$  se aproxima indefinidamente de  $P$ , ou seja, quando a distância entre  $x$  e  $x_0$  vai a zero.

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{B.2})$$

Conhecendo o coeficiente angular  $m$  da reta tangente no ponto  $P$ , a Geometria Analítica nos dá sua equação:

$$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0) \quad (\text{B.3})$$

Definimos então, a *derivada* de  $f$  no ponto  $P$  como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $x_0$ , e a indicamos por  $\frac{df}{dx}$ ,  $\frac{dy}{dx}$  ou simplesmente  $f'(x)$ .

<sup>2</sup> Do latim *secans*, que significa corte.

Porém nem sempre necessitamos explicitar um ponto específico  $x_0$ . Aplicando a mesma ideia a um ponto  $x$  qualquer e considerando um acréscimo  $\Delta X$ , ao calcular o limite de (B.2), quando este vai a zero, determinaremos a *função derivada*, ou simplesmente, a *derivada* de  $f$ , dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{B.4})$$

Mostraremos agora a aplicação a duas funções elementares.

### B.1.1 Derivada da função potência.

Dada uma função  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}\Delta x^3 + \dots + \binom{n}{n}\Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \binom{n}{3}x^{n-3}\Delta x^2 + \dots + \binom{n}{n}\Delta x^{n-1} \right) \\ &= \binom{n}{1}x^{n-1} + 0 = nx^{n-1} \end{aligned}$$

### B.1.2 Derivada da função exponencial.

Antes de calcular a derivada da função  $e^x$ , necessitamos mostrar um limite envolvendo a exponencial.

**Lema B.1.** *Seja  $e$  o número de Euler, então:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (\text{B.5})$$

*Demonstração.* Tomando  $e^x - 1 = k \Rightarrow e^x = k + 1 \Rightarrow \ln(e^x) = \ln(k + 1) \Rightarrow x \ln(e) = \ln(k + 1) \Rightarrow x = \ln(k + 1)$

Note que quando  $x$  tende à zero  $k$  também tende à zero, pois  $\ln(k+1) = 0 \Leftrightarrow k+1 = 1 \Leftrightarrow k = 0$ . Logo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\ln(k+1)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \ln(k+1)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(k+1)^{\frac{1}{k}}} \quad (\text{B.6})$$

Mas,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(k+1)^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\ln\left(\lim_{k \rightarrow 0} (k+1)^{\frac{1}{k}}\right)} \quad (\text{B.7})$$

Onde  $\lim_{k \rightarrow 0} (k+1)^{\frac{1}{k}} = e$ , [12], portanto:

$$\frac{1}{\ln\left(\lim_{k \rightarrow 0} (k+1)^{\frac{1}{k}}\right)} = \frac{1}{\ln(e)} = 1 \quad (\text{B.8})$$

□

Dada a função  $f(x) = e^x$ , temos que sua derivada será dada por:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \end{aligned}$$

---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo - Volume I*. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. 680 p. ISBN 9788560031634.
- [2] ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo - Volume II*. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. 672 p. ISBN 9788560031801.
- [3] APOSTOL, T. M. *A visual approach to calculus problems*. Engineering & Science, Califórnia, n. 3, p.22-31, 2000. Disponível em: <<http://calteches.library.caltech.edu/712/2/Calculus.pdf>>. Acesso em 06 de jun. 2016.
- [4] APOSTOL, T. M. *Calculus - Volume I*. Rio de Janeiro: Reverté, 2007. 771 p. ISBN 9788429150155.
- [5] APOSTOL, T. M.; MNATSAKANIAN, M. A. *Tangents and Subtangents Used to Calculate Areas*. The American Mathematical Monthly, Washington D.C., Vol. 109, n. 10, p.900-908, 2002. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/3072457>>. Acesso em 14 de mar. 2016.
- [6] APOSTOL, T. M.; MNATSAKANIAN, M. A. *New Horizons in Geometry*. Washington D.C.: The Mathematical Association of America, 2012. 520 p. ISBN 9780883853542.
- [7] CARMO, M. P. do *Johann Bernoulli on Exponential Curves ca. 1695 Innovation and Habituation in the Transition from Explicit Constructions to Implicit Functions*. Nieuw Archief voor Wiskunde, Utrecht, Vol. 14, p.1-20, 1996. Disponível em: <<http://www.math.rug.nl/henkbroer/vorigelezingen/beginstuk/bos.pdf>>. Acesso em 04 de ago. 2016.
- [8] APOSTOL, T. M.; MNATSAKANIAN, M. A. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Nova Jersey: Dover Publication, 2016. 503 p. ISBN 9780486806990.
- [9] EVES, H.W. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 1995. 843 p. ISBN 9788526806573.
- [10] GARBI, G.G. *A rainha das ciências*. São Paulo: Livraria da Física, 2006. 488 p.

ISBN 9788588325616.

- [11] GRISI, R., S.D. B. LODOVICI e D. MIRANDA *Geometria Analítica e Vetorial*. São Paulo: Livraria da Física, 2015. 292 p. Disponível em: <<http://hostel.ufabc.edu.br/daniel.miranda/livros/geometria-analitica/geometriaanaliticaevetorial-SGD.pdf>>. Acesso em 27 de out. 2016.
- [12] IEZZI, G., MURAKAMI, C. e MACHADO, N. J. *Fundamentos de matemática elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral*. São Paulo: Atual, 2013. 280 p.
- [13] MNATSAKANIAN, M. A. *On the Area of a Region on a Developable Surface*. Communicated by THE ARMENIAN ACADEMY OF SCIENCES, Armênia, Vol. 8, n. 2, p.97-102, 1981. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.474.6699>>. Acesso em 08 de out. 2016.
- [14] NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 580 p. ISBN 9788583370369.
- [15] RAUSSEN, M. *Elementary Differential Geometry: Curves and Surfaces*. Aalborg: Department of Mathematical Sciences, 2008. 160 p. Disponível em: <<http://people.math.aau.dk/raussen/INSB/AD2-11/book.pdf>>. Acesso em 20 de jan. 2017.
- [16] SILVA, F. N. *Superfícies regradas desenvolvíveis tipo tempo e tipo espaço no espaço de Minkowski*. 2013. 67 f. Dissertação de Mestrado em Matemática - Universidade de Brasília. Brasília. 2013. Disponível em: <<http://repositorio.unb.br/handle/10482/14154>>. Acesso em 27 de jun. 2016.
- [17] STEWART, J. *Single Variable Calculus: Early Transcendentals*. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 661 p. ISBN 9788522114610.
- [18] STEWART, J. *Single Variable Calculus: Vol. 2*. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 664 p. ISBN 9788522114634.