



ANDRÉ FERRAZ DE TOLEDO

**TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA: UMA ABORDAGEM
VISUAL PARA O ENSINO MÉDIO**

Santo André, 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

ANDRÉ FERRAZ DE TOLEDO

**TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA: UMA ABORDAGEM
VISUAL PARA O ENSINO MÉDIO**

Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Boero

Dissertação de mestrado apresentada ao
Centro de Matemática, Computação e Cognição
para obtenção do título de Mestre pelo Programa
de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional (PROFMAT)

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO ANDRÉ FERRAZ DE TOLEDO
E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. ANA CAROLINA BOERO.

SANTO ANDRÉ, 2017

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Toledo, Andre Ferraz de
Teorema Fundamental da Álgebra : Uma Abordagem Visual Para
o Ensino Médio / Andre Ferraz de Toledo. — 2017.

88 fls.

Orientadora: Ana Carolina Boero

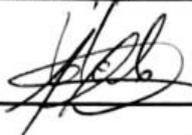
Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC,
PROFMAT, Santo André, 2017.

1. Teorema Fundamental da Álgebra. 2. Números Complexos. 3.
Polinômios. I. Boero, Ana Carolina. II. PROFMAT, 2017. III. Título.

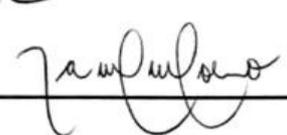
Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 13 de março de 2017.

Assinatura do autor: _____



Assinatura do orientador: _____





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profinat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Andre Ferráz de Toledo, realizada em 16 de dezembro de 2016:

Prof.(a) Dr.(a) **Ana Carolina Boero** (UFABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Rafael de Mattos Grisi** (UFABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Renato Alessandro Martins** (UNIFESP) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Cândido Faleiros** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Robson da Silva** (UNIFESP) – Membro Suplente



Dedico este trabalho à minha esposa Ana Cristina e às minhas filhas Marília e Maria Clara pela paciência e apoio dados durante esse árduo período.

Também dedico ao meu querido aluno Luick dos Santos Claro pela simplicidade e inteligência, que contribuíram muito em minha formação, em nosso pequeno período de convivência.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, à minha orientadora, Profa. Dra. Ana Carolina Boero, pela atenção, dedicação e paciência, sempre disposta a solucionar todos meus questionamentos.

Aos professores e gestores da escola Ayrton Busch de Bauru, em especial ao professor Hugo Leandro do Nascimento, por todo apoio dado.

Aos professores Dr. Rafael de Mattos Grisi e Luiz Cláudio Mesquita de Aquino, pelas excelentes contribuições prestadas.

Aos colegas de turma do PROFMAT, pelas contribuições fornecidas durante o curso.

RESUMO

O Teorema Fundamental da Álgebra é um tópico de grande relevância para a Matemática, com o qual o aluno toma contato na 3ª série do Ensino Médio. Talvez porque todas as demonstrações conhecidas desse resultado utilizem argumentos que não podem ser apresentados de modo preciso nessa etapa de ensino, sua abordagem em diversos livros didáticos resume-se, basicamente, a destacar algumas de suas consequências e aplicações. O propósito deste trabalho é fornecer um material que possa ser utilizado por professores da Educação Básica no intuito de explorar esse fascinante resultado. Para atingirmos esse objetivo, apresentamos uma breve contextualização história do Teorema Fundamental da Álgebra, que serve tanto para apontar sua utilidade em outros ramos da Matemática como também para observar a evolução de certos conceitos matemáticos. Em seguida, apresentamos uma prova rigorosa desse resultado, com o menor nível de complexidade possível, além de duas abordagens alternativas com apelo visual que podem ser utilizadas para apresentar uma justificativa de sua validade aos alunos do Ensino Médio.

Keywords: Teorema Fundamental da Álgebra, números complexos, polinômios

ABSTRACT

The Fundamental Theorem of Algebra is a topic of great relevance to Mathematics, with which the student makes contact in the 3rd grade of High School. Perhaps because all known demonstrations of this result use arguments that can not be accurately presented at this stage of teaching, its approach in several textbooks basically boils down to highlighting some of its consequences and applications. The purpose of this work is to provide a material that can be used by teachers of Basic Education in order to explore this fascinating result. To reach this goal, we present a brief history of the Fundamental Theorem of Algebra, which serves both to point out its usefulness in other branches of mathematics and also to observe the evolution of certain mathematical concepts. Next, we present a rigorous proof of this result, with the lowest level of complexity possible, as well as two alternative approaches with visual appeal that can be used to present a justification of its validity to high school students.

Keywords: Fundamental Theorem of Algebra, complex numbers, polynomials

CONTEÚDO

AGRADECIMENTOS	ix
INTRODUÇÃO	1
1 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	3
1.1 O Teorema Fundamental da Álgebra nos livros didáticos	5
1.1.1 Aplicações do Teorema Fundamental da Álgebra	14
1.2 Breve comentário sobre as exposições	22
2 NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS	24
2.1 Números complexos	24
2.1.1 O corpo dos números complexos	26
2.1.2 A forma algébrica de um número complexo	30
2.1.3 Conjugado e módulo de um número complexo	31
2.1.4 A forma trigonométrica ou polar de um número complexo	34
2.1.5 Extração de raízes	37
2.2 Polinômios	39
3 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA	41
3.1 Breve história do Teorema Fundamental da Álgebra	41
3.2 Demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra	45
4 ABORDAGENS VISUAIS DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA	48
4.1 Primeira abordagem	48
4.2 Segunda abordagem	55
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
A O COMPORTAMENTO DE $ P(z) $ PARA $ z $ SUFICIENTEMENTE GRANDE	63
B FUNÇÕES CONTÍNUAS E ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES BÁSICAS	65
Bibliografia	72

INTRODUÇÃO

As discussões sobre o ensino de Matemática na Educação Básica nos últimos anos apontam para alguns tópicos que, notoriamente, são muito pouco abordados no ambiente escolar. Dentre esses tópicos, podemos destacar as demonstrações de teoremas. De uma forma geral, o professor dedica grande parte de seu tempo ao ensino de técnicas de resolução de exercícios, ao invés de demonstrar como elas surgiram. A respeito disso, [23] menciona:

Nas suas observações de salas de aulas inglesas, Tonny Cotton (1998) notou que a aula de matemática é dividida em duas partes: primeiro, o professor apresenta algumas idéias e técnicas matemáticas e, depois, os alunos trabalham com exercícios selecionados.

Da mesma forma, os livros didáticos utilizados como material de apoio aos professores quase sempre reproduzem esse tipo de abordagem. Citando novamente [23]:

Geralmente, o livro didático representa as condições tradicionais da prática da sala de aula. Os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. Isso significa que a justificativa da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma.

Segundo [1]:

Sim, teoremas e demonstrações também são uma parte importante do ensino. É deplorável constatar que esses recursos tenham sido abandonados já há tantos anos! Como se pode falar de Matemática sem teoremas e demonstrações?! Isso é essencial no ensino, não pode faltar!

Acreditamos que as demonstrações de teoremas proporcionam ao aluno uma compreensão muito mais aprofundada do assunto estudado, além de estimular a curiosidade e a criatividade. Nesse contexto, resolvemos discorrer sobre o Teorema Fundamental da Álgebra, uma vez que as técnicas utilizadas para resolver exercícios envolvendo equações algébricas e números complexos invariavelmente recorrem a resultados que são decorrências de sua validade. Cientes da dificuldade de abordá-lo no

Ensino Médio em razão do alto nível de complexidade de sua demonstração, elaboramos esta dissertação com o propósito de minimizar a dificuldade que o professor encontra para apresentar esse assunto.

Para atingir esse objetivo, dividimos este trabalho em quatro capítulos.

No Capítulo 1, analisamos como o TFA é apresentado no material de apoio fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo — isto é, nos Cadernos do Professor e do Aluno — e nos livros didáticos utilizados pelos professores que ministram aulas de Matemática na Escola Estadual Professor Ayrton Busch, em Bauru.

No Capítulo 2, apresentamos algumas definições e resultados envolvendo números complexos e polinômios que são, de alguma forma, utilizados nesta dissertação.

Começamos o Capítulo 3 com uma breve contextualização história do Teorema Fundamental da Álgebra, que serve tanto para apontar sua utilidade em outros ramos da Matemática como também para observar a evolução de certos conceitos matemáticos. Em seguida, apresentamos uma prova rigorosa desse resultado, com o menor nível de complexidade possível, tendo como objetivo sanar uma possível lacuna na formação do professor do Ensino Básico.

Por fim, no Capítulo 4, nos valem do software GeoGebra para apresentar as ideias que estão por trás de duas demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra. Essas abordagens com apelo visual podem ser utilizadas para apresentar uma justificativa de sua validade aos alunos do Ensino Médio.

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Segundo o Currículo do Estado de São Paulo [21], os tópicos “equações algébricas” e “números complexos”, nos quais está inserido o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), são apresentados aos alunos na 3ª série do Ensino Médio. De acordo com Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

[...]

Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

[...]

Por fim, cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento.

Pensando em como organizar o ensino de Matemática na Educação Básica, *levando em conta a natureza peculiar dessa matéria, os alunos aos quais ela se destina e os motivos de sua inclusão no currículo*, o matemático brasileiro Elon Lages Lima [13] destacou os seguintes componentes, *suficientes para assegurar a harmonia do curso e necessários para o seu bom êxito*:

CONCEITUAÇÃO. A *conceituação* compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de idéias e fatos sob diferentes formas e termos. É importante ter em mente e destacar que a conceituação é indispensável para o bom resultado das aplicações.

MANIPULAÇÃO. A *manipulação*, de caráter principalmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado da Matemática, assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a música (ou mesmo como o repetido treinamento dos chamados “fundamentos” está para certos esportes, como o tênis e o voleibol). A habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente realmente nos pontos realmente cruciais, poupando-o da perda de tempo e energia com detalhes secundários.

APLICAÇÕES. As *aplicações* são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a auto-estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender.

De acordo com [13]:

Da dosagem adequada de cada um desses três componentes depende o equilíbrio do processo de aprendizagem, o interesse dos alunos e a capacidade que terão para empregar, futuramente, não apenas as técnicas aprendidas nas aulas, mas sobretudo o discernimento, a clareza das ideias, o hábito de pensar e agir ordenadamente, virtudes que são desenvolvidas quando o ensino respeita o balanceamento dos três componentes básicos.

Neste capítulo, levaremos em consideração esses três componentes para analisar como o TFA é apresentado no material de apoio fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo — isto é, nos Cadernos do Professor e do Aluno — e nos livros didáticos utilizados pelos professores que ministram aulas de Matemática na Escola Estadual Professor Ayrton Busch, em Bauru.

1.1 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA NOS LIVROS DIDÁTICOS

No Caderno do Professor para a 3ª série do Ensino Médio [20], Situação de Aprendizagem 5, encontramos a descrição do método de resolução de equações cúbicas proposto pelos italianos Tartaglia e Cardano. Posteriormente, o material faz um breve comentário sobre a busca por soluções de equações de grau maior que 3, onde é citado o TFA:

Para equações de 4º grau, procedimentos semelhantes levam a fórmulas ainda mais complicadas. Para equações de grau 5, no entanto, foi demonstrado pelo matemático Abel, em 1824, que não é possível expressar as soluções por meio de radicais. Algum tempo depois, Galois estendeu tal resultado para equações de grau maior que 5, de maneira que a busca de uma fórmula que englobe as soluções tornou-se um caminho inviável.

No fim do século XVIII, Gauss demonstrou o fato de que uma equação algébrica de grau n , ou seja, da forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ ($a_0 \neq 0$) tem pelo menos uma raiz; conseqüentemente, sempre n raízes, reais ou complexas. Tal fato é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra.

Ainda com relação ao Caderno do Professor [20], na Situação de Aprendizagem 6, encontramos uma dedução das fórmulas que relacionam coeficientes e raízes de

equações de 3º e 4º graus junto com o comentário de que tais relações podem ser generalizadas para uma equação algébrica de grau n .

Vale ressaltar que as explicações acima são encontradas apenas no Caderno do Professor. O Caderno do Aluno é composto basicamente por exercícios.

Em [6], o autor expressa claramente que o TFA será admitido sem demonstração, mas menciona que Gauss o demonstrou em 1799. Em seguida, ele enuncia o Teorema da Decomposição e observa que, como consequência desse resultado, toda equação de grau n tem exatamente n raízes complexas. O Teorema da Decomposição não é provado.

2 Teorema fundamental da Álgebra

O teorema fundamental da Álgebra, que admitiremos sem demonstração, diz que:

Toda equação algébrica $p(x) = 0$ de grau n ($n \geq 1$) possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

Esse teorema foi demonstrado em 1799 pelo matemático Carl F. Gauss, então com 21 anos, em sua tese de doutorado.

3 Decomposição em fatores de 1º grau

Usando o teorema fundamental da Álgebra, é possível demonstrar que:

Todo polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$) pode ser decomposto em um produto de n fatores de 1º grau.

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Naturalmente:

$$p(x) = 0 \Rightarrow a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = 0$$

ou seja, toda equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes complexas (reais ou não).

Exercícios resolvidos

1. Uma das raízes da equação $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ é 1. Resolva essa equação.

Fique atento!
Lembre-se de que resolver a equação significa determinar seu conjunto solução, que neste caso é formado pelo número 1 e pelas demais raízes.

Resolução:
Se 1 é raiz de $p(x) = 0$, temos:
 $p(x) = (x - 1)q_1(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$ ou $q_1(x) = 0$
 Observando que o grau de $q_1(x)$ é 2 e sabendo resolver uma equação do 2º grau, podemos dizer que $q_1(x) = 0$ fornece as outras raízes.
 Determinando $q_1(x)$ pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

1	2	-4	-2	4
	2	-2	-4	0

$q_1(x) = 2x^2 - 2x - 4$
 Determinando as raízes de $q_1(x) = 0$, vem:
 $2x^2 - 2x - 4 = 0$
 $\Delta = 4 + 32 = 36$
 $x = \frac{2 \pm 6}{4} \Rightarrow x' = 2$ e $x'' = -1$

Logo, as outras raízes são 2 e -1 e o conjunto solução da equação é $S = \{-1, 1, 2\}$.

Fique atento!
O polinômio $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ pode ser decomposto assim:
 $2(x + 1)(x - 1)(x - 2)$.

2. Resolva a equação $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$, sabendo que -2 e 1 são raízes da equação.

Resolução:
Se -2 e 1 são raízes de $p(x)$, temos:
 $p(x) = (x + 2)(x - 1)q_1(x) = 0$
 Pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, dividindo $p(x)$ por $x + 2$ e, em seguida, dividindo o quociente dessa divisão por $x - 1$, vem:

-2	1	-1	-7	1	6
1	1	-3	-1	3	0
	1	-2	-3	0	

$q_1(x) = x^2 - 2x - 3$

Figura 1: O TFA em [6].

Já em [9], os autores enunciam o TFA sem fazer qualquer menção à sua demonstração. Também não há referência a dados históricos. Em seguida, eles utilizam o TFA para provar o Teorema da Decomposição.

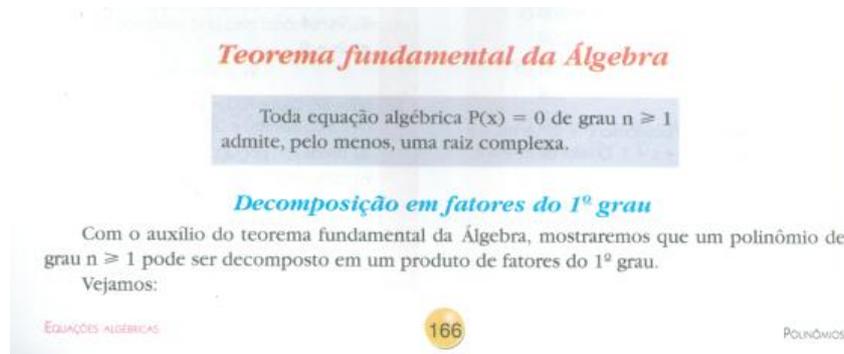


Figura 2: O TFA em [9] (1 de 2).

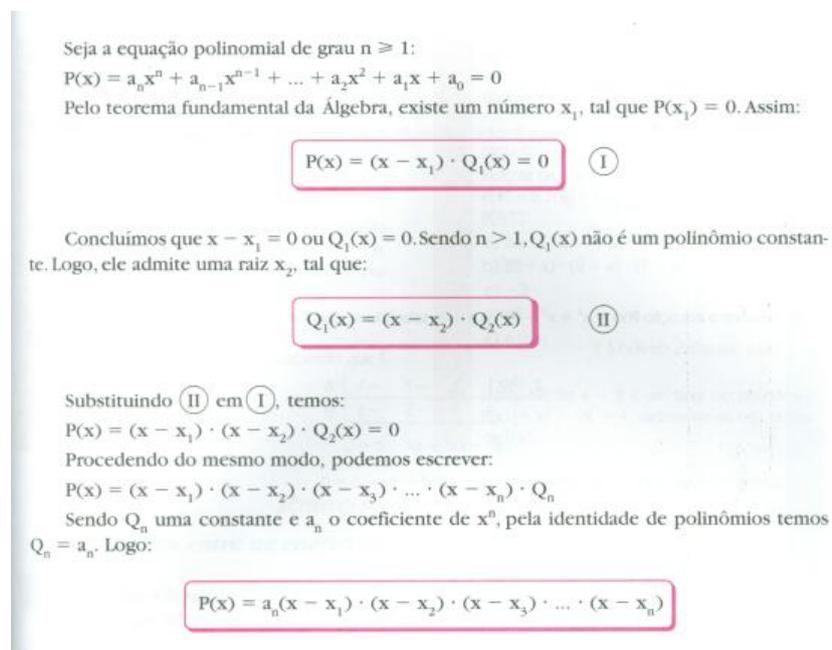


Figura 3: O TFA em [9] (2 de 2).

Em [11], o autor enuncia o TFA e expressa claramente que ele será admitido sem demonstração. Não há referências a dados históricos. Em seguida, apresenta o Teorema da Decomposição, ressaltando sua unicidade (a menos da ordem dos fatores).

85. Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.)

Todo polinômio P de grau $n \geq 1$ admite ao menos uma raiz complexa.

Admitiremos a validade deste teorema sem demonstração.

86. Teorema da decomposição

Todo polinômio P de grau n ($n \geq 1$)

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é:

$$P = a_n (x - r_1) (x - r_2) (x - r_3) \dots (x - r_n)$$

em que $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ são as raízes de P .

Com exceção da ordem dos fatores tal decomposição é única.

Demonstração

1ª parte: existência

a) Sendo P um polinômio de grau $n \geq 1$, podemos aplicar o T.F.A. e P tem ao menos uma raiz r_1 . Assim, $P(r_1) = 0$ e, de acordo com o teorema de D'Alembert, P é divisível por $x - r_1$:

$$P = (x - r_1) \cdot Q_1 \quad (1)$$

em que Q_1 é polinômio de grau $n - 1$ e coeficiente dominante a_n . Se $n = 1$, então $n - 1 = 0$ e Q_1 é polinômio constante; portanto, $Q_1 = a_n$ e $P = a_n(x - r_1)$, ficando demonstrado nosso teorema.

b) Se $n \geq 2$, então $n - 1 \geq 1$ e o T.F.A. é aplicável ao polinômio Q_1 , isto é, Q_1 tem ao menos uma raiz r_2 . Assim, $Q_1(r_2) = 0$ e Q_1 é divisível por $x - r_2$:

$$Q_1 = (x - r_2) \cdot Q_2 \quad (1')$$

Substituindo (1') em (1) resulta: $P = (x - r_1)(x - r_2) \cdot Q_2$ (2)

em que Q_2 é polinômio de grau $n - 2$ e coeficiente dominante a_n . Se $n = 2$, isto é, $n - 2 = 0$, então $Q_2 = a_n$ e $P = a_n(x - r_1)(x - r_2)$, ficando demonstrado nosso teorema.

Figura 4: O TFA em [11] (1 de 4).

c) Após n aplicações sucessivas do T.F.A. chegamos na igualdade:

$$P = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) \cdot Q_n \quad (n)$$

em que Q_n tem grau $n - n = 0$ e coeficiente dominante a_n ; portanto, $Q_n = a_n$ e

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$$

2ª parte: unicidade

Vamos supor que P admita duas decomposições:

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$$

$$P = a'_n(x - r'_1)(x - r'_2)(x - r'_3) \dots (x - r'_n)$$

Supondo reduzidos e ordenados os dois segundos membros, temos:

$$a_n x^n - a_n S_1 \cdot x^{n-1} + \dots = a'_n x^n - a'_n S'_1 \cdot x^{n-1} + \dots$$

e, pela definição de igualdade de polinômios, temos necessariamente:

$$n = m \quad \text{e} \quad a_n = a'_n$$

Ficamos com a igualdade:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = (x - r'_1)(x - r'_2)(x - r'_3) \dots (x - r'_n) \quad (I)$$

Atribuindo a x o valor de r_1 , temos:

$$0 = (r_1 - r'_2)(r_1 - r'_3)(r_1 - r'_4) \dots (r_1 - r'_n)$$

e, se o produto é nulo, um dos fatores $r_1 - r'_k$ é nulo; com uma conveniente mudança na ordem dos fatores, podemos colocar $r_1 = r'_1$.

A igualdade (I) se transforma em:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = (x - r_1)(x - r'_2)(x - r'_3) \dots (x - r'_n)$$

e em seguida em:

$$(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = (x - r'_2)(x - r'_3) \dots (x - r'_n)$$

Atribuindo a x o valor r_2 , temos:

$$0 = (r_2 - r'_3)(r_2 - r'_4) \dots (r_2 - r'_n)$$

e, analogamente, um dos fatores $r_2 - r'_k$ é nulo; com uma conveniente mudança na ordem dos fatores, podemos colocar $r_2 = r'_2$.

Figura 5: O TFA em [11] (2 de 4).

Continuando, $r_i = r'_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.
 As igualdades $m = n$, $a'_i = a_i$, $r'_1 = r_1$, $r'_2 = r_2$, $r'_3 = r_3$, ..., $r'_n = r_n$ são a prova da unicidade da decomposição.

87. Conseqüência do teorema da decomposição

Teorema

Toda equação polinomial de grau n ($n \geq 1$) admite n , e somente n , raízes complexas.

Demonstração

Seja a equação polinomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

Vimos na demonstração da existência da decomposição que P admite as raízes (distintas ou não) $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$. Provamos que são só essas as raízes de P ao provarmos a unicidade da decomposição.

88. Exemplos

1º) Fatorar o polinômio $P = 5x^4 - 5x^3 - 80x + 80$, sabendo que suas raízes são $1, -2, 2, -2i, 2i$.

$$P = 5(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 2i)(x - 2i)$$

2º) Qual é o conjunto solução da equação $7(x-1)(x-2)(x-3)^2 = 0$? De que grau é essa equação?

Temos:

$P = 7(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x - 3)(x - 3)$; as raízes de P são $1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3$ e 3 , portanto a equação é do 9º grau e seu conjunto verdade é $S = \{1, 2, 3\}$.

89. Observações

1º) Tendo em vista o teorema da decomposição, todo polinômio P de grau n ($n \geq 1$) pode ser encarado como o desenvolvimento de um produto de n fatores do 1º grau e um fator constante a_n , que é o coeficiente dominante em P .

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$$

Figura 6: O TFA em [11] (3 de 4).

2º) Nada impede que a decomposição de P apresente fatores iguais. Associando os fatores idênticos da decomposição de P , obtemos:

$$P = a_n(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}(x - r_3)^{m_3} \dots (x - r_p)^{m_p}$$

em que $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_p = n$ e $r_1, r_2, r_3, \dots, r_p$ são dois a dois distintos.

Neste caso, P é divisível separadamente pelos polinômios $(x - r_1)^{m_1}$, $(x - r_2)^{m_2}$, ..., $(x - r_p)^{m_p}$.

EXERCÍCIOS

259. Dada a equação polinomial $(x - 1)(x^2 - 4x + a) = (x^2 - 1)^2$,
 a) coloque-a na forma $P(x) = 0$;
 b) obtenha a para que 2 seja uma das raízes da equação.

Solução

a) Desenvolvemos os dois membros:

$$x(x^2 - 4x + a) - (x^2 - 4x + a) = (x^2 - 1)(x^2 - 1)$$

$$x^3 - x^2 - 4x^2 + (4 + a)x - a = x^4 - 2x^2 + 1$$

e transpomos:

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + (4 + a)x - a - x^4 + 2x^2 - 1 = 0$$

$$-x^3 - 2x^2 + (4 + a)x - (a + 1) = 0$$

$$\underbrace{x^3 + 2x^2 - (4 + a)x + (a + 1)}_{P(x)} = 0$$

b) 2 é raiz se, e só se, $P(2) = 0$, então:

$$P(2) = 2^3 + 2(2)^2 - (4 + a)2 + (a + 1) = 8 + 8 - 8 - 2a + a + 1 = 9 - a = 0 \implies a = 9$$

Resposta: $x^3 + 2x^2 - (4 + a)x + (a + 1) = 0$ e $a = 9$.

260. Determine m de modo que -2 seja raiz da equação $x^3 + (m + 2)x^2 + (l + m)x - 2 = 0$.

Figura 7: O TFA em [11] (4 de 4).

Em [12], os autores deixam claro que admitirão o TFA sem demonstração para, em seguida, demonstrar o Teorema da Decomposição. Eles chamam atenção para a unicidade da decomposição e destacam que uma das consequências desse resultado é que toda equação de grau n tem exatamente n raízes complexas. Não há referências a dados históricos.

3 Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

Todo polinômio de grau $n, n \geq 1$, admite ao menos uma raiz complexa.

Admitimos aqui a validade desse teorema sem demonstração.

4 Teorema da decomposição

Seja $p(x)$ um polinômio de grau $n, n \geq 1$, dado por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$$

Então, $p(x)$ pode ser decomposto em n fatores do 1º grau sob a forma:

$$p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$$

em que r_1, r_2, \dots, r_n são as raízes de $p(x)$ e a_n é o coeficiente dominante de $p(x)$.

Demonstração

Como $p(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, o TFA nos garante que $p(x)$ tem ao menos uma raiz complexa r_1 . Assim, $p(r_1) = 0$ e, pelo teorema de D'Alembert, $p(x)$ é divisível por $x - r_1$. Então:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x) \quad (II)$$

em que $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ e coeficiente dominante a_n (pois $(x - r_1)$ tem coeficiente dominante unitário). Temos que:

a) Se $n = 1$, então $q_1(x)$ é um polinômio de grau $1 - 1 = 0$, ou seja, $q_1(x)$ é um polinômio constante, dado por $q_1(x) = a_n$. Substituindo em (II), vem $p(x) = a_n(x - r_1)$ e o teorema fica demonstrado.

b) Se $n \geq 2$, então $n - 1 \geq 1$. Assim, podemos aplicar o TFA ao polinômio $q_1(x)$ (isto é, $q_1(x)$ tem ao menos uma raiz complexa r_2). Assim, $q_1(r_2) = 0$ e $q_1(x)$ é divisível por $x - r_2$:

$$q_1(x) = (x - r_2) \cdot q_2(x) \quad (III)$$

em que $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$ e coeficiente dominante a_n . Substituindo (3) em (II), resulta:

Figura 8: O TFA em [12] (1 de 2).

Se $n = 2$, $q_2(x)$ é um polinômio de grau 0, dado por $q_2(x) = a_n$. De (III), segue que $p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$, e o teorema fica demonstrado.

Aplicando sucessivamente n vezes o TFA, obtemos:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n) \cdot q_n(x)$$

em que $q_n(x)$ é um polinômio de grau $n - n = 0$, dado por $q_n(x) = a_n$. Assim:

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

Observações

- 1) Pode-se mostrar que, com exceção da ordem dos fatores do produto, a decomposição de $p(x)$ em termos de suas raízes é única.
- 2) Dizemos que cada um dos polinômios do 1º grau, $x - r_1, x - r_2, \dots, x - r_n$, é um fator de $p(x)$.
- 3) $p(x)$ é divisível por, individualmente, cada um de seus fatores.

Consequência do teorema da decomposição

Toda equação polinomial de grau $n, n \geq 1$, admite exatamente n raízes complexas.

Exemplo 1

Vejamus qual é a forma fatorada do polinômio:

$$p(x) = 2x^2 - 6x^2 + 8x - 24, \text{ cujas raízes são } -2, 2 \text{ e } 3$$

Pelo teorema da decomposição, podemos escrever:

$$p(x) = 2 \cdot (x - (-2)) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

isto é:

$$p(x) = 2(x + 2)(x - 2)(x - 3) = 2(x^2 + 4)(x - 3)$$

$$x^2 - (2)^2 = x^2 + 4$$

Figura 9: O TFA em [12] (2 de 2).

Em [19], o autor recorda que toda equação do 1º ou 2º grau possui raiz complexa. Em seguida, ele enuncia o TFA e atribui sua demonstração a Gauss. O Teorema da Decomposição é, então, demonstrado e, como consequência, observa-se que toda equação de grau n tem exatamente n raízes complexas.



Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático alemão cujo talento revelou-se precocemente. Doutorou-se aos 21 anos de idade.

Para responder à segunda pergunta, destacamos que toda equação do 2º grau pode ser representada sob a forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Para qualquer valor do discriminante dessa equação, $\Delta = b^2 - 4ac$, existem duas raízes quadradas complexas de Δ , w_1 e w_2 ; portanto, existem, em \mathbb{C} , os números $\frac{-b + w_1}{2a}$ e $\frac{-b + w_2}{2a}$, que são raízes da equação do 2º grau.

Concluimos, então, que toda equação do 2º grau possui raiz complexa.

Uma nova questão que surge naturalmente neste momento é:

- Existe alguma equação polinomial, de determinado grau, que não possua raiz complexa?

A resposta a essa pergunta é dada pelo **teorema fundamental da Álgebra**, cujo enunciado é:

Toda equação polinomial admite pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração desse teorema foi a tese de doutorado, na universidade de Helmstädt, do matemático alemão Carl Friedrich Gauss, publicada no ano de 1799. Embora outros matemáticos já tivessem tentado fazer essa demonstração, Gauss foi o primeiro a realizá-la com perfeição.

Gauss deu quatro demonstrações diferentes para o teorema fundamental da Álgebra, a última em 1850. Como todas elas exigem conhecimentos de Matemática superior, não faremos a demonstração desse teorema nesta obra.

4 Teorema da decomposição

Uma consequência imediata do teorema fundamental da Álgebra é o **teorema da decomposição**, apresentado a seguir.

Todo polinômio de grau n , com $n \geq 1$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, pode ser fatorado sob a forma $P(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$, em que $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ são todas as raízes de $P(x)$.

Demonstração

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n , com $n \geq 1$.

Pelo teorema fundamental da Álgebra, $P(x)$ admite uma raiz complexa r_1 . Logo, $P(x)$ é divisível por $x - r_1$ e, portanto:

$$P(x) = (x - r_1) \cdot Q_1(x) \quad (I)$$

em que $Q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$.

Se $n - 1 \geq 1$ temos, novamente pelo teorema fundamental da Álgebra, que $Q_1(x)$ tem uma raiz complexa r_2 e, portanto:

$$Q_1(x) = (x - r_2) \cdot Q_2(x) \quad (II)$$

em que $Q_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$.

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdot Q_2(x)$$

Aplicando n vezes esse procedimento, obtemos:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) \cdot Q_n(x)$$

Pela definição de identidade de polinômios, deduzimos que o coeficiente dominante a_n de $P(x)$ deve ser igual a $Q_n(x)$. Logo:

$$P(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$$

Figura 10: O TFA em [19].

Em [24], as autoras enunciam o TFA e creditam a Gauss sua demonstração. Na sequência, apresentam de maneira resumida a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolução de equações cúbicas sem termo quadrático. Elas mostram que um polinômio de 3º grau pode ser decomposto como produto de fatores de 1º grau e, em seguida, enunciam o Teorema da Decomposição e observam que ele assegura que todo polinômio de grau n tem exatamente n raízes complexas.

3. Teorema fundamental da Álgebra e teorema da decomposição

Ao provar que toda equação polinomial de grau n e coeficientes complexos tem ao menos uma raiz complexa, Gauss formulou a afirmação que ficou conhecida como **teorema fundamental da Álgebra (T.F.A.)**, e que é um dos teoremas básicos para o estudo das equações polinomiais:

Teorema fundamental da Álgebra

Toda equação polinomial de grau $n \geq 1$ admite, pelo menos, uma raiz complexa.

É importante notar que o T.F.A. nos assegura apenas que existe pelo menos um número que é solução de uma equação algébrica de grau $n \geq 1$; o teorema não nos informa quantas são as soluções nem como determiná-las. Não há fórmulas resolutoras para equações polinomiais de qualquer grau. Sabemos, no entanto, para a equação particular de grau 3:

$$x^3 + ax + b = 0$$

que uma das raízes pode ser calculada pela fórmula de Cardano-Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + w} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - w},$$

onde w indica a raiz quadrada de $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$.

Figura 11: O TFA em [24] (1 de 2).

Decomposição de um polinômio

Consideremos os polinômios $P_1(x) = 3x - 12$ e $P_2(x) = 3x^2 - 5ix - 2$:

- $P_1(x)$ tem raiz 4 e pode ser escrito $P_1(x) = 3(x - 4)$.
- $P_2(x)$ tem raízes $\frac{2i}{3}$ e i e pode ser escrito $P_2(x) = 3 \left(x - \frac{2i}{3}\right)(x - i)$.

Vamos mostrar que $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_3 \neq 0$, pode ser colocado na forma $P(x) = a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$, onde r_1, r_2 e r_3 são raízes de $P(x)$.

Pelo T.F.A., $P(x)$ admite uma raiz r_1 . Dividindo $P(x)$ por $x - r_1$, vem:
 $P(x) = (x - r_1) Q_1(x)$, onde grau de $(Q_1) = 2$.

Pelo T.F.A., existe raiz r_2 de $Q_1(x)$. Dividindo $Q_1(x)$ por $x - r_2$, vem:
 $Q_1(x) = (x - r_2) Q_2(x)$, onde grau de $(Q_2) = 1$.

Pelo T.F.A., existe a raiz r_3 de $Q_2(x)$; então:
 $Q_2(x) = (x - r_3) Q_3$, onde grau de $(Q_3) = 0$, ou seja, $Q_3 = a_3$.

Portanto, $P(x) = a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$.

Essa possibilidade de decompor um polinômio em fatores quando $n \geq 1$ é garantida pelo segundo teorema importante neste nosso estudo de polinômios:

Teorema da decomposição em fatores

Todo polinômio de grau n , com $n \geq 1$, pode ser fatorado em n fatores do 1º grau com coeficientes complexos.

O teorema nos assegura que o número de raízes complexas de um polinômio de grau $n \geq 1$ é exatamente n .

Observe que esses fatos não seriam verdade em \mathbb{R} .

Por exemplo, $x^2 + 1 = 0$ não possui nenhuma raiz em \mathbb{R} e não pode ser decomposto, em \mathbb{R} , em fatores do 1º grau. No entanto, $P(x) = x^2 + 1$ tem em \mathbb{C} duas raízes, $\pm i$, e pode ser decomposto em $P(x) = (x + i)(x - i)$.

Exemplos:

a) As raízes de $P(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ são $\frac{1}{3}$, 2 e -2; então:

Figura 12: O TFA em [24] (2 de 2).

Por fim, em [25], há uma pequena contextualização histórica do TFA, na qual são citados alguns matemáticos que tentaram demonstrá-lo antes de Gauss. O autor enuncia o TFA, expressando claramente que ele será admitido sem demonstração. Em seguida, o Teorema da Decomposição é demonstrado. Como consequência desse resultado, o autor destaca que toda equação de grau n tem n raízes complexas.

Teorema fundamental da álgebra

O **Teorema fundamental da álgebra** foi demonstrado satisfatoriamente pela primeira vez em 1798, na tese de doutorado de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que na época tinha apenas 20 anos. Isaac Newton (1642-1727), Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1790), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph Louis Lagrange (1736-1813) também realizaram tentativas de demonstrar esse teorema, porém nenhum deles obteve resultados totalmente satisfatórios.

Esse teorema será enunciado a seguir e considerado verdadeiro sem demonstrações.

Toda equação polinomial de grau n , com $n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.

Note que, dada uma equação polinomial de grau $n \geq 1$, o Teorema fundamental da álgebra garante somente que existe pelo menos um número complexo que é raiz dessa equação, não trazendo informações acerca de "quantas são" ou "quais são" essas raízes.

Em consequência desse teorema, temos o **Teorema da decomposição em fatores**, conforme segue.

Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_1 x^2 + a_0 x + a_0$, com $n \geq 1$. Pelo Teorema fundamental da álgebra, $p(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa, que chamaremos de r_1 . Logo, temos $p(r_1) = 0$. Como, de acordo com o Teorema de d'Alembert, o polinômio $p(x)$ é divisível por $x - r_1$, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x) \quad (I)$$

em que $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$.

Caso $n - 1 \geq 1$, de acordo com o Teorema fundamental da álgebra, $q_1(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa, r_2 . Pelo Teorema de d'Alembert, temos:

$$q_1(x) = (x - r_2) \cdot q_2(x) \quad (II)$$

em que $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$.

Fazendo a substituição de II em I:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot q_2(x)$$

Realizando esse procedimento n vezes, temos:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \dots \cdot (x - r_{n-2}) \cdot (x - r_{n-1}) \cdot (x - r_n) \cdot q_n(x)$$

em que $q_n(x)$ é um polinômio de grau $n - n = 0$, dado por $q_n(x) = a_0$ (identidade de polinômios).

Portanto:

$$p(x) = a_0 \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \dots \cdot (x - r_{n-2}) \cdot (x - r_{n-1}) \cdot (x - r_n)$$

De acordo com o Teorema da decomposição em fatores, todo polinômio de grau n , com $n \geq 1$, definido por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_1 x^2 + a_0 x + a_0$$

pode ser decomposto na forma:

$$p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \dots \cdot (x - r_{n-2}) \cdot (x - r_{n-1}) \cdot (x - r_n),$$

na qual $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-2}, r_{n-1}, r_n$ são as raízes do polinômio.

Carl Friedrich Gauss

Nascido em Brunswick, na Alemanha, em 1777, Gauss é considerado o maior matemático do século XIX e um dos maiores de todos os tempos. Gauss sempre relutou em publicar suas descobertas, motivo pelo qual algumas delas somente foram identificadas em seu diário matemático encontrado postumamente. Suas contribuições abrangem outras áreas do conhecimento, como Astronomia, Geodésia e Eletricidade. Gauss faleceu em 1855, no observatório astronômico de Göttingen, onde ocupava o posto de diretor havia quase quarenta anos.



Foto: Reprodução. São Paulo, 2014. Disponível em: <http://www.inec.org.br/>

▲ Carl Friedrich Gauss

268

Figura 13: O TFA em [25] (1 de 2).

Considerando o Teorema da decomposição, temos que uma equação polinomial de grau n , com $n \geq 1$, dada por $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, pode ser escrita como:

$$a_n (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\dots(x-r_{n-2})(x-r_{n-1})(x-r_n)=0$$

Assim, $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-2}, r_{n-1}, r_n$ são todas as raízes da equação, ou seja, $p(x)$ tem n raízes.

Uma equação polinomial de grau n tem n raízes complexas (não necessariamente distintas).

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R15 Escreva o polinômio $p(x)$ de raízes $-1, 2+i$ e $2-i$, tal que $p(2)=9$.

Resolução

Pelo Teorema da decomposição em fatores, o polinômio $p(x)$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n \cdot [x - (-1)] \cdot [x - (2+i)] \cdot [x - (2-i)] \\ &= a_n \cdot (x+1) \cdot (x-2-i) \cdot (x-2+i) \\ &= a_n \cdot (x+1) \cdot (x^2 - 4x + 5) \\ &= a_n \cdot (x^3 - 3x^2 + x + 5) \end{aligned}$$

Como $p(2)=9$, segue que:

$$\begin{aligned} p(2) &= 9 \Rightarrow a_n \cdot (2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 + 5) = 9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_n \cdot 3 = 9 \Rightarrow a_n = 3 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 \cdot (x^3 - 3x^2 + x + 5) \Rightarrow \\ &\Rightarrow p(x) = 3x^3 - 9x^2 + 3x + 15 \end{aligned}$$

R16 Sabendo que -4 e 3 são raízes da equação $x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 24x = 0$, determine as outras raízes dessa equação.

Resolução

Como -4 e 3 são duas raízes da equação, podemos decompô-la da seguinte maneira:

$$x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 24x = 0 \Rightarrow (x+4) \cdot (x-3) \cdot q_2(x) = 0$$

Obtemos $q_2(x)$, aplicando o Dispositivo de Briot-Ruffini na divisão da equação por $x+4$, e, em seguida, o quociente dessa divisão por $x-3$.

-4	1	3	-10	-24	0
3	1	-1	-6	0	0
		<small>11-4+3</small>	<small>-17-4-10</small>	<small>-6(-4)-24</small>	<small>0(-4)+0</small>
	1	2	0	0	0
		<small>13-1</small>	<small>23-6</small>	<small>03+0</small>	

Logo, $q_2(x) = x^2 + 2x$. Como as raízes da equação $x^2 + 2x = 0$ são $x_1 = 0$ e $x_2 = -2$, então as outras duas raízes da equação são 0 e -2 .

ATIVIDADES

Anote as respostas no caderno

50 Determine quantas raízes complexas, não necessariamente distintas, tem cada equação polinomial.

- a) $2x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 0$ 3 raízes
- b) $5x^3 - 6x^2 + 2x - x = 5x^3 - 3x^2 + x^3 - 5$ 4 raízes
- c) $x^3(7x^3 - 6x^2 - 5x + 1) = 0$ 5 raízes
- d) $x^3 - x^2(x^4 - 5x + 1) = 0$ 6 raízes

51 Qual é o conjunto-solução da equação $\frac{1}{5}(x-3)^6(x-1)^3(x+2)^3 = 0$? E qual é o grau dessa equação? $S = \{-2, 1, 3\}$; grau: 9

52 Decomponha o polinômio $p(x) = 3x^2 + 6x - 45$ em termos de suas raízes. $p(x) = 3(x+5)(x-3)$

53 Decomponha cada um dos polinômios a seguir em termos de suas raízes.

- a) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, em que $1, 3$ e -2 são raízes $p(x) = (x-1)(x-3)(x+2)$
- b) $q(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 9x - 4$, em que $4, -\frac{1}{2}$ e -2 são raízes $q(x) = (x-4)(x+\frac{1}{2})(x+2)$
- c) $r(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{53}{2}x + 35$, em que $-7, \frac{5}{2}$ e 2 são raízes $r(x) = (x+7)(x-\frac{5}{2})(x-2)$

54 Obtenha um polinômio $p(x)$ de grau:

- a) 3, cujas raízes são $-3, 2$ e 3
Possível resposta: $p(x) = 3x^3 - 6x^2 - 27x + 54$
- b) 4, cujas raízes são $3+i, 3-i, 2$ e -1
Possível resposta: $p(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 + 2x - 20$
- c) 5, cujas raízes são $3, -1, 0, 1$ e 3
Possível resposta: $p(x) = x^5 - 10x^4 + 9x^3$

Figura 14: O TFA em [25] (2 de 2).

1.1.1 Aplicações do Teorema Fundamental da Álgebra

Nesta subseção, apresentaremos as aplicações do TFA encontradas nos livros didáticos analisados. A primeira delas exemplifica a vantagem de considerar raízes complexas, mesmo se na maioria dos casos estamos interessados em raízes reais.

Relações entre coeficientes e raízes

O fato de todas as equações de grau n terem o mesmo número de raízes permite que sejam estabelecidas relações gerais entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica, as chamadas *Relações de Girard*. Veremos a seguir como esse assunto é apresentado em [6].

4 Relações de Girard

As relações de Girard* são fórmulas matemáticas que relacionam os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica. Vejamos algumas situações.

Na equação do 2º grau

Consideremos a equação algébrica do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) e sejam x_1 e x_2 as suas raízes.

A decomposição do primeiro membro em fatores do 1º grau é:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Desenvolvendo o produto, temos:

$$ax^2 + bx + c = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$

Dividindo todos os termos por a , vem:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Fique atento!
 x_1 e x_2 podem ser distintas ou não. As relações de Girard nas equações do 2º grau são a soma e o produto, já estudados no capítulo 4 do volume 1.

Na equação do 3º grau

Consideremos a equação algébrica do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) e sejam x_1 , x_2 e x_3 as suas raízes.

A sua decomposição em fatores do 1º grau é:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Desenvolvendo o produto, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3]$$

Dividindo todos os termos por a , vem:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Fique atento!

Partindo de $-\left(\frac{b}{a}\right)$, alternamos os sinais de $-$ e $+$ para $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, $\frac{e}{a}$, $\frac{f}{a}$, e assim por diante, de acordo com o grau da equação.

* Albert Girard, matemático francês (1595-1632).

Figura 15: Relações entre coeficientes e raízes em [6] (1 de 3).

Na equação de grau n

De forma análoga, considerando a equação algébrica de grau n :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

de raízes $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$, são válidas as seguintes relações entre as raízes e os coeficientes, conhecidas como *relações de Girard*:

1ª) A soma das raízes é:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

2ª) O produto das n raízes é:

$$x_1 x_2 x_3 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

3ª) A soma dos produtos das raízes, quando tomadas:

a) duas a duas, é:

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

b) três a três, é:

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-3} x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

c) quatro a quatro, é:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_5 + \dots + x_{n-4} x_{n-3} x_{n-2} x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-4}}{a_n}$$

Exercícios resolvidos

8. Escreva as relações de Girard para a equação algébrica $x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$, considerando x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação.

Resolução:

Pela equação, temos:

$$a_n = 1$$

$$a_{n-1} = 7$$

$$a_{n-2} = -3$$

$$a_0 = 5$$

Assim, obtemos as seguintes relações:

$$\bullet x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{7}{1} = -7$$

$$\bullet x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\bullet x_1 x_2 x_3 = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = (-1)^3 \frac{5}{1} = -5$$

Fazendo da forma prática, temos:

$$\bullet x_1 + x_2 + x_3 = -\left(\frac{7}{1}\right) = -7$$

$$\bullet x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = +\left(\frac{-3}{1}\right) = -3$$

$$\bullet x_1 x_2 x_3 = -\left(\frac{5}{1}\right) = -5$$

Figura 16: Relações entre coeficientes e raízes em [6] (2 de 3).

9. Resolva a equação $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$, sabendo que uma raiz é dupla.

Resolução:
Como uma raiz é dupla, vamos indicar as raízes por x_1, x_1 e x_2 .
Usando as relações de Girard, temos:
• $x_1 + x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 5$ (I)
• $x_1x_1 + x_1x_2 + x_1x_2 = 7 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 = 7$ (II)
• $x_1x_1x_2 = 3 \Rightarrow x_1^2x_2 = 3$ (III)

Da relação (I), temos:
 $2x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 5 - 2x_1$

Substituindo em (II), vem:
 $x_1^2 + 2x_1x_2 = 7 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1(5 - 2x_1) = 7 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_1^2 + 10x_1 - 4x_1^2 - 7 = 0 \Rightarrow -3x_1^2 + 10x_1 - 7 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3x_1^2 - 10x_1 + 7 = 0$
 $\Delta = 16$
 $x_1 = \frac{10 \pm 4}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{7}{3}$ e $x_1 = 1$

Vamos verificar qual dos valores de x_1 é raiz da equação inicial:
 $p\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{32}{27} \Rightarrow \frac{7}{3}$ não é raiz da equação

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz dupla da equação
Assim, se $x_1 = 1$, vem $x_2 = 5 - 2(1) = 3$.
Logo, $S = \{1, 3\}$.

10. Resolva a equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ sabendo que suas raízes estão em PA.

Resolução:
Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação, vamos representá-las por:
 $x_1 = \alpha - r; x_2 = \alpha; x_3 = \alpha + r$

Pela relação de Girard, temos:
 $x_1 + x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow \alpha - r + \alpha + \alpha + r = 9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = 3$

Como $x_2 = \alpha = 3$ é uma das raízes, temos:
 $p(x) = (x - 3)q(x) = 0$

3	1	-9	23	-15
	1	-6	5	0

$q(x) = x^2 - 6x + 5 = 0$

Resolvendo a equação, obtemos $x' = 5$ e $x'' = 1$.
Logo, $S = \{1, 3, 5\}$.

Exercícios

15. A equação $3x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$ admite raízes x_1, x_2 e x_3 . Escreva as relações de Girard para essa equação.

16. Consideremos a equação polinomial $x^3 - 2x^2 + ax + b = 0$. Sabendo que os números 1 e -3 são raízes da equação, calcule a terceira raiz e escreva a equação.

17. As raízes da equação polinomial $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$ estão em PA. Calcule essas raízes.

18. **ATIVIDADE EM DUPLA** Resolvam a equação algébrica $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a 5.

19. **ATIVIDADE EM DUPLA** Qual é o valor de k na equação algébrica $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ para que as raízes da equação estejam em PA?

20. **ATIVIDADE EM DUPLA** (ITA-SP) Os números a, b e c são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

21. **ATIVIDADE EM DUPLA** (EEM-SP) Determine as raízes da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$, sabendo que uma delas é dupla.

22. **ATIVIDADE EM DUPLA** (UFMG) Os números a, b e c são as raízes da equação $x^3 + x - 1 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de $\log\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

23. **ATIVIDADE EM DUPLA** (EEM-SP) Dada a equação algébrica $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$ e sabendo que o produto de duas de suas raízes é igual a 1, calcule as raízes da equação.

24. **ATIVIDADE EM DUPLA** (Mack-SP) As raízes da equação $x^3 - 6x^2 + kx + 64 = 0$ estão em PG. Nessas condições, calcule o coeficiente k .

25. Os números -2 e 3 são duas raízes da equação $2x^3 - x^2 + mx + n = 0$, em que $m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$. Determine a terceira raiz da equação e os valores de m e n .

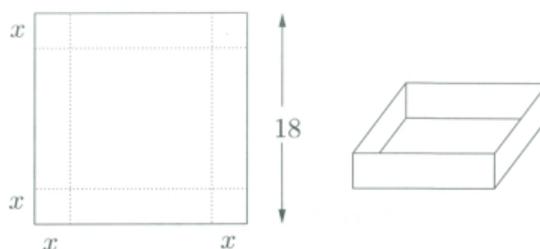
Figura 17: Relações entre coeficientes e raízes em [6] (3 de 3).

Também em [11], [12], [19] e [25], as Relações de Girard foram deduzidas primeiramente para equações do 2º grau e do 3º grau e, em seguida, apresentadas no caso de uma equação de grau n . Em [9] e [24], as relações de Girard foram apresentadas no contexto de equações de 2º, 3º e 4º grau, simplesmente.

Equações algébricas com coeficientes reais

Outro tópico relacionado ao TFA que possui destaque nos livros didáticos analisados diz respeito a propriedades de equações algébricas com coeficientes reais. Equações desse tipo ocorrem naturalmente em aplicações, como mostra o exemplo abaixo, extraído de [14].

Cortando-se quadrados em cada canto de uma folha de papelão quadrada, com 18cm de lado, e dobrando-se conforme a figura, obtém-se uma caixa retangular sem tampa. Qual deve ser o lado do quadrado a ser recortado para que o volume da caixa seja igual a 400cm^3 ?



As dimensões da caixa formada quando se recorta um quadrado de lado x são dadas por $18 - 2x$, $18 - 2x$ e x . Logo, o volume da caixa é $(18 - 2x)^2 x$ e a condição estabelecida pelo problema é expressa pela equação $(18 - 2x)^2 x = 400$ ou, equivalentemente, $4x^3 - 72x^2 + 324x - 400 = 0$ ou, ainda, $x^3 - 18x^2 + 81x - 100 = 0$.

A mais importante delas diz que se um número complexo não-real z é raiz de uma equação algébrica com coeficientes reais, então o seu conjugado complexo \bar{z} também é raiz dessa equação (e que z e \bar{z} têm a mesma multiplicidade).

Como consequência, concluímos que toda equação algébrica com coeficientes reais e grau ímpar tem ao menos uma raiz real, pois uma tal equação possui um número ímpar de raízes complexas e, dentre elas, as não-reais ocorrem aos pares.¹

Veremos a seguir como esse resultado é apresentado em [12].

¹ É importante observar que a existência de raízes reais para equações algébricas com coeficientes reais e grau ímpar pode ser deduzida por outros argumentos. O mais comum é utilizar o fato de que uma função polinomial real de grau ímpar p é contínua, $p(x) > 0$ para x suficientemente grande e $p(x) < 0$ para x negativo com $|x|$ suficientemente grande, o que acarreta a existência de pelo menos um ponto no qual p se anula. Como veremos no Capítulo 3 deste trabalho, alguns matemáticos fizeram uso desse resultado no intuito de demonstrar o TFA e, por isso, é importante que ele possa ser obtido por outros meios.

Teorema
 Se um número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação com coeficientes reais, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Demonstração
 Seja a equação $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ coeficientes reais.
 Da hipótese, z é raiz da equação, isto é, $p(z) = 0$.

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \Rightarrow \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{0}$$

Usando (I), podemos escrever:

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = 0$$

De (I) e (II), vem:

$$a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$$

Usando (IV), vem:

$$a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$$

isto é, $p(\bar{z}) = 0$, o que mostra que \bar{z} é raiz de $p(x) = 0$.

Observações

- 1) Se o número complexo $z = a + bi$, $b \neq 0$, é raiz com multiplicidade m de uma equação polinomial, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$, $b \neq 0$, também é raiz com multiplicidade m dessa equação.
- 2) Esse teorema nos garante que, numa equação de coeficientes reais, raízes complexas não reais sempre ocorrem aos pares ($a + bi$ e $a - bi$). Dessa forma, uma equação de grau ímpar apresenta ao menos uma raiz real.

Exemplo 1
 Se uma equação com coeficientes reais tem como raízes simples $3 - 2i$ e $1 + i$, então, necessariamente, duas outras raízes são $2i$ e $1 - i$, pelo teorema das raízes complexas. Assim, o menor grau que essa equação pode ter é 5.

Figura 18: Teorema das Raízes Conjugadas em [12] (1 de 2).

Exemplo 2
 Vamos obter o conjunto solução da equação $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$, sabendo que $2 + i$ é uma de suas raízes.
 Como $x = 2 + i$ é raiz, então $x = 2 - i$ também é raiz, e o polinômio dado é divisível por $(x - (2 + i))(x - (2 - i)) = (x - 2)^2 - i^2 = x^2 - 4x + 5$.
 Efetuando a divisão, temos:

$$\begin{array}{r} x^3 - 7x^2 + 17x - 15 \quad | \quad x^2 - 4x + 5 \\ - (x^3 + 4x^2 - 5x) \quad | \quad x - 3 \\ \hline - 3x^2 + 12x - 15 \\ + 3x^2 - 12x + 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

A outra raiz segue de $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$.

$$S = \{2 + i, 2 - i, 3\}$$

EXERCÍCIOS

- 32) Escreva uma equação de coeficientes reais, com grau mínimo, de modo que 2 , 3 e $2 - i$ sejam raízes simples.
- 33) Escreva uma equação de coeficientes reais, com grau mínimo, de modo que $i\sqrt{2}$ e $1\sqrt{3}$ sejam raízes simples.
- 34) Qual o menor grau que pode ter uma equação de coeficientes reais que admita como raízes 1 , 2 , $3 - i$ e $2i$?
- 35) Qual o menor grau que pode ter uma equação de coeficientes reais que admita i como raiz dupla e 2 como raiz simples?
- 36) Resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 19x - 13 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é $5 - 2i$.
- 37) Resolva a equação $9x^3 - 18x^2 + 46x^2 - 2x + 5 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é $1 + 2i$.

Figura 19: Teorema das Raízes Conjugadas em [12] (2 de 2).

As observações destacadas em [12] — a saber, se o número complexo $z = a + bi$, $b \neq 0$, é raiz com multiplicidade m de uma equação polinomial, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$, $b \neq 0$, também é raiz com multiplicidade m dessa equação e, conseqüentemente, numa equação de coeficientes reais, raízes complexas não reais sempre ocorrem aos pares $(a + bi$ e $a - bi)$ — constam em todos os livros didáticos analisados, com exceção de [6]. Contudo, apenas em [11] encontramos uma prova de que a multiplicidade de uma raiz e de seu conjugado complexo é a mesma. Notamos também que [11] é o único texto que apresenta um exemplo de equação algébrica com coeficientes complexos não-reais que possui um número complexo como raiz, mas não o seu conjugado.

Por fim, além das duas observações de [12], é interessante destacar uma outra consequência importante desse resultado: qualquer polinômio não-constante com coeficientes reais pode ser escrito como um produto de fatores lineares e quadráticos reais.²

De acordo com [21], uma habilidade a ser desenvolvida ao trabalhar o conteúdo “equações algébricas” e “números complexos” é a de saber reduzir a ordem de uma equação a partir do conhecimento de uma raiz. O teorema anterior é bastante utilizado para este fim (conforme ilustra a Figura 19). Um outro resultado que também se adequa a esse propósito é o chamado *Teorema das Raízes Racionais*. Ele consta em todos os textos analisados, embora [6], [19] e [25] não tragam sua demonstração.

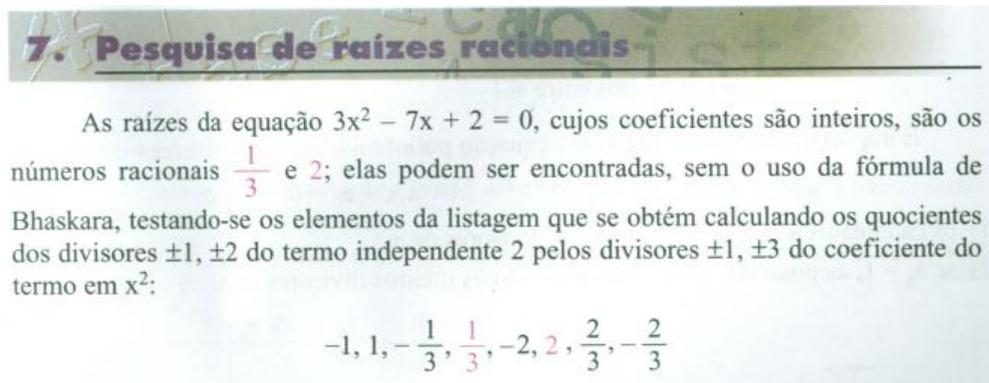


Figura 20: Teorema das Raízes Racionais em [24] (1 de 4).

² Basta observar que se z_0 é uma raiz real de um polinômio com coeficientes reais $p(x)$, então $(x - z_0)$ é um fator linear real de $p(x)$. Se z_0 é uma raiz complexa não-real de $p(x)$, então \bar{z}_0 também é uma raiz de $p(x)$ e $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ é um fator quadrático real de $p(x)$.

É óbvio que numa equação do 2º grau é mais rápido aplicar a fórmula de Bhaskara. Mas, nas equações polinomiais de grau $n \geq 3$, o recurso de pesquisar raízes racionais é de extrema utilidade porque facilita o processo de resolução.

Teorema: Se uma equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

de coeficientes inteiros admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, p e q primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Demonstração:

Se $\frac{p}{q}$ é raiz de $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, então:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando por q^n :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Isolando $a_n q^n$ num dos membros e no outro colocando p em evidência, vem:

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + a_{n-2} p^{n-3} q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

Então:

$$\left. \begin{array}{l} p \text{ divide } a_n q^n \\ p \text{ e } q \text{ primos entre si} \end{array} \right\} \Rightarrow p \text{ é divisor de } a_0$$

Isolando $a_n p^n$ num dos membros e no outro colocando q em evidência, vem:

$$q(a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n$$

Então:

$$\left. \begin{array}{l} q \text{ divide } a_n p^n \\ q \text{ e } p \text{ primos entre si} \end{array} \right\} \Rightarrow q \text{ é divisor de } a_n$$

É importante observar que numa equação polinomial com coeficientes inteiros:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

- 1) os candidatos a raízes inteiras são os divisores de a_0 .
- 2) se $a_n = 1$, as possíveis raízes racionais são os inteiros divisores de a_0 .

Figura 21: Teorema das Raízes Racionais em [24] (2 de 4).

Exercícios Resolvidos

ER11 Resolva $4x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 15x + 9 = 0$.

Resolução:
 Vamos pesquisar se a equação admite alguma raiz racional.
 p : divisor de 9 $\Rightarrow p = \pm 1, \pm 3, \pm 9$
 q : divisor de 4 $\Rightarrow q = \pm 1, \pm 2, \pm 4$
 Os candidatos a raízes racionais são todos os possíveis valores de $\frac{p}{q}$:
 $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm 9, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{9}{4}$

Verificamos (usando o dispositivo de Briot-Ruffini) que $\frac{1}{2}$ e 3 são raízes: dividindo o 1º membro da equação por $x - \frac{1}{2}$ e o quociente por $x - 3$, vem:

	4	-10	-2	-15	9
$\frac{1}{2}$	4	-8	-6	-18	0
3	4	4	6	0	

As demais raízes da equação são de:

$$4x^2 + 4x + 9 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} i$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{ \frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} i \right\}$.

ER12 Mostre que $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ é número inteiro.

Resolução:
 Vamos indicar o número real citado por x :
 $x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$
 Elevando os dois membros ao cubo, vem:
 $x^3 = (\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}})^3 + (\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}})^3 + 3\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} (\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}})$
 $x^3 = 7 + 5\sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{(7 + 5\sqrt{2})(7 - 5\sqrt{2})} \cdot x$
 $x^3 = 14 - 3x \Rightarrow x^3 + 3x - 14 = 0 \quad (1)$
 As possíveis raízes racionais são os divisores $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$ do termo independente -14.
 Testando, descobrimos que 2 é raiz; dividindo o primeiro membro de (1) por $x - 2$, vem:

	1	0	3	-14
2	1	2	7	0

Figura 22: Teorema das Raízes Racionais em [24] (3 de 4).

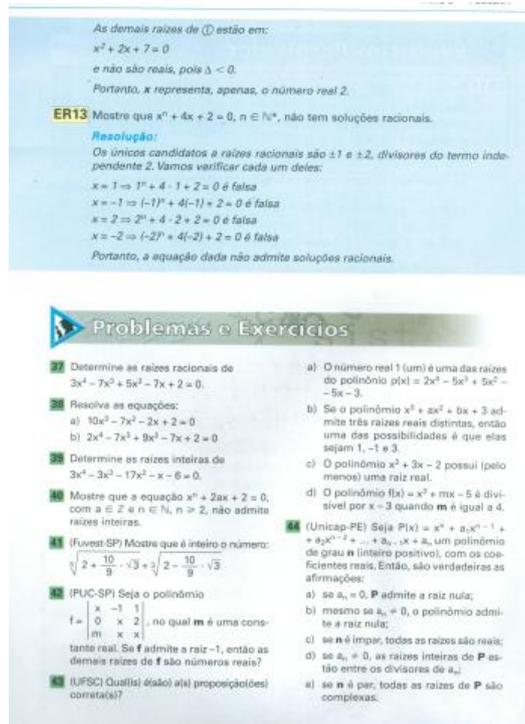


Figura 23: Teorema das Raízes Racionais em [24] (4 de 4).

1.2 BREVE COMENTÁRIO SOBRE AS EXPOSIÇÕES

Observamos que as abordagens do TFA variam muito pouco de um livro para outro: primeiro, o TFA é introduzido, sem demonstração; depois, enuncia-se (e, em alguns casos demonstra-se) o Teorema da Decomposição e, eventualmente, destaca-se a consequência de que toda equação de grau n tem exatamente n raízes complexas; em seguida, apresentam-se aplicações do TFA e algumas propriedades específicas de equações algébricas com coeficientes reais.

Quanto às aplicações, percebemos uma abordagem mais abrangente no Teorema da Decomposição, nas pesquisas de raízes racionais e nas Relações de Girard. Esse aspecto evidencia que a maior preocupação dos livros didáticos analisados está na busca por técnicas para encontrar raízes reais de equações algébricas.

Notamos também um aspecto que já havia sido apontado em [13]: a manipulação é, dos três, o componente mais difundido nos livros didáticos de Matemática voltados para o Ensino Médio. A sequência “exemplo — exercícios resolvidos — exercícios propostos”, presente em todos os textos analisados, tem o mérito de ajudar o aluno a

fixar os conceitos apresentados, mas não estimula sua criatividade e nem desenvolve a capacidade de raciocinar abstratamente.

Outro ponto que merece destaque é que poucos livros trouxeram informações históricas acerca do TFA. E os que trouxeram, não o fizeram de forma profunda.

O TFA tem uma importância extraordinária na história dos números complexos. O fato de todas raízes de um polinômio com coeficientes complexos serem, ainda, números complexos, foi o que abriu o caminho para o amplo reconhecimento desse conjunto numérico.

Ademais, ele é um resultado surpreendente! A equação $x^2 - 2 = 0$, por exemplo, tem coeficientes inteiros, porém suas soluções não são inteiras — sequer são racionais! Elas pertencem a um conjunto numérico mais amplo, o dos números reais, que engloba o dos números racionais. Do mesmo modo, a equação $x^2 + 1 = 0$ não possui solução real, embora seus coeficientes sejam reais. Suas soluções, i e $-i$, pertencem a um conjunto numérico ainda maior, o dos números complexos. Não seria razoável imaginar a possibilidade de exibir uma equação algébrica com coeficientes complexos que não tivessem solução complexa? Todavia, o TFA atesta que isso não ocorre! É realmente espetacular que não seja necessária uma “hierarquia sem fim” de conjuntos numéricos para resolver equações algébricas!

Ao se dar conta disso, é natural que o aluno queira saber por que isso vale. É natural que ele queira saber o que o conjunto dos números complexos tem de especial. Esses questionamentos, relacionados à componente *conceituação*, não são estimulados nos textos analisados. Em todos eles, o TFA foi apresentado como se fosse um axioma, sem qualquer explicação de por que se trata de um resultado plausível.

Como todas as demonstrações conhecidas do TFA utilizam argumentos que não podem ser apresentados de modo preciso no Ensino Médio, não faz sentido tentar prová-lo rigorosamente em sala de aula. Contudo, é possível justificar sua razoabilidade de maneiras simples e atraentes. Este é um dos propósitos deste trabalho.

NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

2.1 NÚMEROS COMPLEXOS

A forma como esse tópico é apresentado aos estudantes hoje em dia pode dar a impressão de que foram as equações de 2º grau com discriminante negativo que levaram à descoberta dos números complexos, quando, na verdade, foram as equações de 3º grau que apontaram a necessidade de considerá-los.

O ponto de partida dessa história é a publicação da *Ars Magna* de Girolamo Cardano, em 1545. Rafael Bombelli, um admirador dessa obra, utilizou o que hoje conhecemos como fórmula de Cardano-Tartaglia para encontrar soluções da equação $x^3 = 15x + 4$, obtendo

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Como é destacado em [15]:

Em rigor, uma equação era vista como a formulação matemática de um problema concreto; assim, se no processo de resolução aparecia uma raiz quadrada de um número negativo, isso era interpretado apenas como uma indicação de que o problema originalmente proposto não tinha solução.

Contudo, Bombelli percebeu que 4 é, de fato, uma solução de $x^3 = 15x + 4$. De acordo com [15]:

Assim, pela primeira vez, nos deparamos com uma situação em que, apesar de termos radicais de números negativos, existe verdadeiramente uma solução da equação proposta.

Bombelli, então, acenou para a possibilidade de existir uma expressão da forma $a + \sqrt{-b}$ que pudesse ser considerada raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$. Assumindo que, nesse caso, $a - \sqrt{-b}$ seria raiz cúbica de $2 - \sqrt{-121}$ e operando com tais expressões, ele obteve $a = 2$ e $b = 1$ e, finalmente, $2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$.

Após o trabalho de Bombelli, outros matemáticos passaram a manipular números complexos, embora se sentissem desconfortáveis com isso.

A representação geométrica dos números complexos foi decisiva para a sua legitimação. O primeiro a formular algo nesse sentido foi o autodidata Caspar Wessel, em 1797. Em [15], encontramos:

Tal como fazemos hoje em dia, ele [Wessel] representou o complexo $a + bi$ pelo vetor do plano com origem O — a origem do sistema de eixos coordenados — e com extremo no ponto P de coordenadas (a, b) . Depois, deu uma representação geométrica da soma de dois complexos $a + bi$ e $c + di$, representando-os pelos vetores OP e OQ , respectivamente, e observando que a soma estará representada pela diagonal do paralelogramo construído sobre OP e OQ .

De forma análoga, o produto desses complexos estará representado por um vetor OR tal que o comprimento de OR é o produto dos comprimentos de OP e OQ e o ângulo que OR forma com o eixo Ox é igual à soma dos ângulos formados por OP e OQ com esse eixo.

Em 1806, Jean-Robert Argand apresentou uma representação semelhante à de Wessel, observando que a multiplicação de 1 por i resulta em i e que a de i por i resulta em -1 . Ele pensou, então, em i como uma rotação de 90° em sentido anti-horário. Em [18], o autor aponta uma diferença sutil entre as duas interpretações:

[...] a interpretação geométrica dos números complexos como movimentos no plano é mais forte com Argand, enquanto que a visão das operações algébricas com segmentos (orientados) no plano é mais forte com Wessel.

Os trabalhos de Wessel e Argand tiveram pouco impacto sobre os matemáticos da época e a aceitação definitiva da representação geométrica dos números complexos só foi obtida com os trabalhos de Carl Friedrich Gauss.

Por fim, em 1837, Hamilton definiu de forma rigorosa o corpo dos números complexos tal qual conhecemos hoje. Este será o assunto das próximas subseções.

2.1.1 O corpo dos números complexos

Um *número complexo* é, por definição, um par ordenado de números reais. Denotaremos por \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Dados dois números complexos $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, definimos as operações de adição e de multiplicação da seguinte maneira:

$$z + w = (a + c, b + d) \quad \text{e} \quad zw = (ac - bd, ad + bc).$$

Definimos também

$$-z = (-a, -b)$$

e, para $z \neq (0, 0)$,

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

No que segue, denotaremos os números complexos $(0, 0)$ e $(1, 0)$ por 0 e 1 , respectivamente.

Proposição 2.1. *Seja $z = (a, b)$, $w = (c, d)$ e $t = (e, f)$ números complexos, valem:*

- (a) $(z + w) + t = z + (w + t)$ (*associatividade da adição*)
- (b) $z + w = w + z$ (*comutatividade da adição*)
- (c) $z + 0 = z$ (*elemento neutro da adição*)
- (d) $z + (-z) = 0$ (*elemento oposto*)
- (e) $(zw)t = z(wt)$ (*associatividade da multiplicação*)
- (f) $zw = wz$ (*comutatividade da multiplicação*)
- (g) $z \cdot 1 = z$ (*elemento neutro da multiplicação*)
- (h) $zz^{-1} = 1$, se $z \neq 0$ (*elemento inverso*)
- (i) $z(w + t) = zw + zt$ (*distributividade da multiplicação em relação à adição*)

Demonstração. (a) Mostraremos que $(z + w) + t = z + (w + t)$.

$$\begin{aligned}
 (z + w) + t &= ((a, b) + (c, d)) + (e, f) \\
 &= (a + c, b + d) + (e, f) \\
 &= ((a + c) + e, (b + d) + f) \\
 &= (a + (c + e), b + (d + f)) \\
 &= (a, b) + (c + e, d + f) \\
 &= (a, b) + ((c, d) + (e, f)) \\
 &= z + (w + t)
 \end{aligned}$$

(b) Mostraremos que $z + w = w + z$.

$$\begin{aligned}
 z + w &= (a, b) + (c, d) \\
 &= (a + c, b + d) \\
 &= (c + a, d + b) \\
 &= (c, d) + (a, b) \\
 &= w + z
 \end{aligned}$$

(c) Mostraremos que $z + 0 = z$.

$$\begin{aligned}
 z + 0 &= (a, b) + (0, 0) \\
 &= (a + 0, b + 0) \\
 &= (a, b) \\
 &= z
 \end{aligned}$$

(d) Mostraremos que $z + (-z) = 0$.

$$\begin{aligned}
 z + (-z) &= (a, b) + (-a, -b) \\
 &= (a + (-a), b + (-b)) \\
 &= (0, 0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(e) Mostraremos que $(zw)t = z(wt)$.

$$\begin{aligned}
 (zw)t &= ((a, b)(c, d))(e, f) \\
 &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) = \\
 &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\
 &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\
 &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\
 &= (a, b)(ce - df, cf + de) \\
 &= (a, b)((c, d)(e, f)) \\
 &= z(wt)
 \end{aligned}$$

(f) Mostraremos que $zw = wz$.

$$\begin{aligned}
 zw &= (a, b)(c, d) \\
 &= (ac - bd, ad + bc) \\
 &= (ac - bd, bc + ad) \\
 &= (ca - db, cb + da) \\
 &= (c, d)(a, b) \\
 &= wz
 \end{aligned}$$

(g) Mostraremos que $z \cdot 1 = z$.

$$\begin{aligned}
 z \cdot 1 &= (a, b)(1, 0) \\
 &= (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) \\
 &= (a, b) \\
 &= z
 \end{aligned}$$

(h) Mostraremos que $zz^{-1} = 1$.

$$\begin{aligned}
 zz^{-1} &= (a, b) \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) \\
 &= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2} \right) \\
 &= (1, 0) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(i) Mostraremos que $z(w + t) = zw + zt$.

$$\begin{aligned}
 z(w + t) &= (a, b)((c, d) + (e, f)) \\
 &= (a, b)(c + e, d + f) \\
 &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\
 &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\
 &= ((ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)) \\
 &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\
 &= (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) \\
 &= zw + zt
 \end{aligned}$$

□

Observação 2.2.

1. Um conjunto no qual estão definidas duas operações que gozam das propriedades apresentadas na Proposição 2.1 é denominado um corpo. O conjunto \mathbb{C} , munido das operações de adição e multiplicação de números complexos definidas no início desta seção, é denominado o corpo dos números complexos.

2. Na demonstração da Proposição 2.1, utilizamos o fato de que \mathbb{R} , munido das operações usuais de adição e multiplicação, é um corpo.
3. O corpo dos números complexos, assim como qualquer corpo, possui diversas propriedades que decorrem das apresentadas na Proposição 2.1. Por exemplo, valem as leis do cancelamento para a adição e multiplicação (isto é, $z + z_1 = z + z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$ e $zz_1 = zz_2, z \neq 0 \Rightarrow z_1 = z_2$, quaisquer que sejam $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$).

Como um número complexo $z = (x, y)$ é um par ordenado de números reais, podemos representá-lo graficamente como o ponto do plano cartesiano de abscissa x e ordenada y , ou como o vetor que liga a origem a este ponto. Nesse contexto, chamamos o plano cartesiano de *plano complexo*. Dizemos também que x é a *parte real* e y é a *parte imaginária* do número complexo $z = (x, y)$ e escrevemos $\operatorname{Re}(z) = x$ e $\operatorname{Im}(z) = y$. Note que se z e w são números complexos, então $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$ e que $\operatorname{Re}(-z) = -\operatorname{Re}(z)$. Analogamente, $\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$ e que $\operatorname{Im}(-z) = -\operatorname{Im}(z)$.

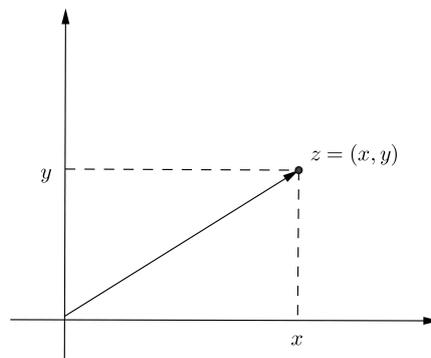


Figura 24: Representação gráfica de um número complexo.

Dados $z, w \in \mathbb{C}$, definimos as operações de *subtração* e *divisão* da seguinte maneira:

$$z - w = z + (-w)$$

e, para $w \neq 0$,

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}.$$

Além disso, a potenciação também é definida de maneira usual:

$$z^0 = 1, \quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ vezes}} \quad \text{e} \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

para $n \geq 1$ natural.

2.1.2 A forma algébrica de um número complexo

Praticamente todos os livros didáticos de Matemática voltados para o Ensino Médio apresentam os números complexos como sendo expressões da forma $z = x + yi$, com x e y números reais e i um “algarismo imaginário” tal que $i^2 = -1$. Veremos, a seguir, como obter uma tal representação.

Dado x um número real, o identificaremos com o número complexo $(x, 0)$. Em outras palavras, escreveremos $x = (x, 0)$. Dessa forma, passamos a ver \mathbb{R} como um subconjunto de \mathbb{C} . Observe que se x_1 e x_2 são números reais, então

$$x_1 + x_2 = (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0)$$

e

$$x_1 x_2 = (x_1 x_2, 0) = (x_1 x_2 - 0 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0) = (x_1, 0)(x_2, 0).$$

Note, ainda, que

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

o que significa que o número -1 possui uma raiz quadrada em \mathbb{C} . Denotaremos por i o número complexo $(0, 1)$, o qual será chamado de *algarismo imaginário*. Destacamos que

$$i^2 = -1.$$

Portanto, dado um número complexo qualquer $z = (x, y)$ temos que

$$\begin{aligned} z &= (x, y) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + (y, 0)(0, 1) \end{aligned}$$

isto é,

$$z = x + yi.$$

A representação

$$z = x + yi$$

é chamada de *forma algébrica* do número complexo $z = (x, y)$.

2.1.3 Conjugado e módulo de um número complexo

Dado um número complexo $z = x + yi$, definimos o seu *conjugado* como sendo o número complexo

$$\bar{z} = x - yi.$$

Graficamente, \bar{z} é o ponto do plano complexo obtido através da reflexão de z em relação ao eixo real, como ilustra a figura abaixo.

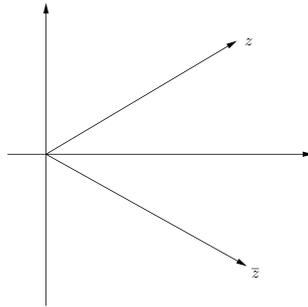


Figura 25: Representação gráfica do conjugado de um número complexo.

Proposição 2.3. Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos, valem:

- (a) $\overline{\bar{z}} = z$
- (b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- (c) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$
- (d) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- (e) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, se $w \neq 0$
- (f) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$
- (g) Se $z \in \mathbb{R}$, então $\bar{z} = z$.
- (h) Se n é um número inteiro positivo, então $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Demonstração.

- (a) $\bar{\bar{z}} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$.
- (b) Temos que $z + w = (a + c) + (b + d)i$ e, portanto, $\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$.

(c) Temos que $z - w = (a - c) + (b - d)i$ e, portanto, $\overline{z - w} = (a - c) - (b - d)i = (a - bi) - (c - di) = \bar{z} - \bar{w}$.

(d) Temos que $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$ e, portanto, $\overline{zw} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(e) Temos que $\frac{1}{w} = \frac{1}{c+di} = \frac{c-di}{c^2+d^2}$. Assim, $\frac{1}{\bar{w}} = \frac{1}{c-di} = \frac{c+di}{c^2+d^2} = \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}$. Portanto,

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{z \cdot \frac{1}{w}} = \bar{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \bar{z} \cdot \frac{1}{\bar{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

(f) $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2 \operatorname{Re}(z)$.

(g) Se $z \in \mathbb{R}$, então $b = 0$ e, portanto, $\bar{z} = z$.

(h) Decorre da aplicação sucessiva do item (d). □

O *módulo* de um número complexo $z = x + yi$ é definido por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Note que $|z|$ corresponde ao módulo do vetor que representa z .

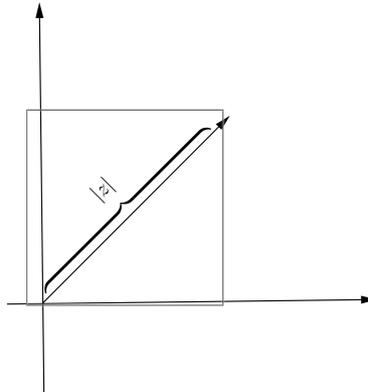


Figura 26: Representação gráfica do módulo de um número complexo.

Proposição 2.4. Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos, valem:

(a) $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ e $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

(b) $|z| = |-z|$

(c) $|z| = |\bar{z}|$

(d) $z\bar{z} = |z|^2$

$$(e) |zw| = |z||w|$$

$$(f) |z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}w) + |w|^2$$

$$(g) |z+w| \leq |z| + |w| \text{ (Desigualdade Triangular)}$$

$$(h) ||z| - |w|| \leq |z - w|$$

Demonstração.

$$(a) \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|. \text{ Analogamente, } |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

$$(b) |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = |-z|.$$

$$(c) |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\bar{z}|.$$

$$(d) z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

$$(e) |zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = (zw)(\bar{z}\bar{w}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2. \text{ Logo, } |zw| = |z||w|.$$

(f) Temos que

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} \\ &= (z+w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2 \\ &= |z|^2 + \bar{z}w + \bar{z}w + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}w) + |w|^2 \end{aligned}$$

(g) Temos que

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}w) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|\bar{z}w| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|\bar{z}||w| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Portanto, $|z+w| \leq |z| + |w|$.

(h) Temos que

$$|z| = |(z-w) + w| \leq |z-w| + |w|.$$

Logo, $|z| - |w| \leq |z-w|$. Analogamente,

$$|w| = |(w-z) + z| \leq |w-z| + |z| = |z-w| + |z|.$$

Logo, $-|z-w| \leq |z| - |w|$. Portanto, $||z| - |w|| \leq |z-w|$. □

Observação 2.5. Do item (d) da Proposição 2.4 segue que

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Em particular, se $|z|=1$, então $z^{-1} = \bar{z}$.

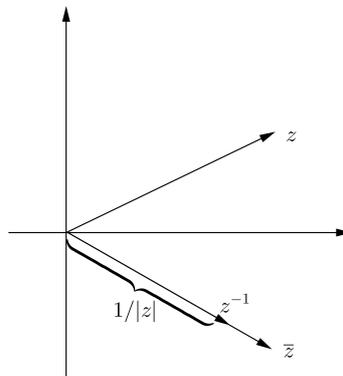


Figura 27: Representação gráfica do inverso de um número complexo.

2.1.4 A forma trigonométrica ou polar de um número complexo

Dado $z = x + iy$ um número complexo não nulo, seja θ o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor correspondente a z .

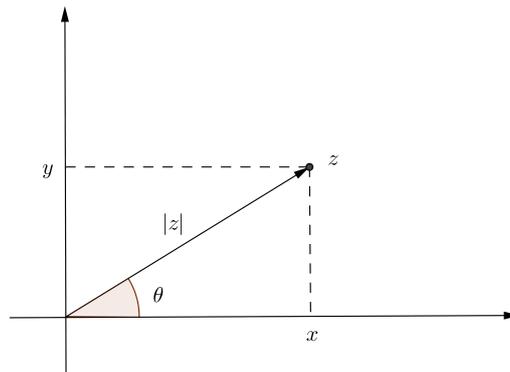


Figura 28: Representação trigonométrica ou polar de um número complexo.

Note que $x = |z|\cos \theta$ e $y = |z|\sen \theta$. Portanto,

$$z = |z|(\cos \theta + i\sen \theta).$$

Acabamos de mostrar que é possível escrever um número complexo $z \neq 0$ na forma

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad (2.1)$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$. Uma tal representação de z é denominada *trigonométrica* ou *polar*.

Se θ é um número real que satisfaz (2.1), então θ é dito um *argumento* de z . Note que z possui infinitos argumentos. O único argumento de z que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é chamado de *argumento principal* de z e é denotado por $\operatorname{Arg}(z)$.

A identidade

$$z = |z|(\cos \operatorname{Arg}(z) + i \operatorname{sen} \operatorname{Arg}(z))$$

é chamada a *forma trigonométrica* ou *forma polar* de z .

Exemplo 2.6. Vamos representar na forma polar o número complexo $z = -1 - i$.

Temos que $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Além disso, $\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen} \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Logo, um possível valor de θ é $\frac{5\pi}{4}$; outro é $-\frac{3\pi}{4}$ que, neste caso, será o argumento principal de z . Portanto, a forma polar de z é

$$z = \sqrt{2} \left(\cos -\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} -\frac{3\pi}{4} \right).$$

Com relação às operações que envolvem números complexos, exceto adição e subtração, é mais simples utilizarmos a forma polar ao invés da forma algébrica. Verificaremos essas propriedades na proposição a seguir:

Proposição 2.7. Sendo $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $w = |w|(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$ representações polares dos números complexos não nulos z e w , temos:

$$(a) \quad zw = |z||w|[\cos(\theta + \phi) + i \operatorname{sen}(\theta + \phi)]$$

$$(b) \quad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}[\cos(\theta - \phi) + i \operatorname{sen}(\theta - \phi)], \text{ se } w \neq 0.$$

Demonstração.

(a) Mostraremos que $zw = |z||w|[\cos(\theta + \phi) + i \operatorname{sen}(\theta + \phi)]$.

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \cdot |w|(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \\ &= |z||w|(\cos \theta \cos \phi + i \cos \theta \operatorname{sen} \phi + i \operatorname{sen} \theta \cos \phi + i^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi) \\ &= |z||w|[(\cos \theta \cos \phi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi) + i(\operatorname{sen} \theta \cos \phi + \cos \theta \operatorname{sen} \phi)] \\ &= |z||w|[\cos(\theta + \phi) + i \operatorname{sen}(\theta + \phi)] \end{aligned}$$

(b) Basta mostrar que multiplicando $\frac{|z|}{|w|}[\cos(\theta - \phi) + i\text{sen}(\theta - \phi)]$ por w , obteremos z .

Temos que $\frac{|z|}{|w|} \cdot |w| = |z|$ e também que $(\theta - \phi) + \phi = \theta$. Dessa forma,

$$\frac{|z|}{|w|}[\cos(\theta - \phi) + i\text{sen}(\theta - \phi)] \cdot w = |z|(\cos \theta + i\text{sen} \phi) = z,$$

de acordo com o item (a). Portanto,

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}[\cos(\theta - \phi) + i\text{sen}(\theta - \phi)].$$

□

A seguir, apresentaremos uma fórmula para o cálculo de potências de um número complexo conhecida como *fórmula de De Moivre*, em homenagem ao matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754).

Proposição 2.8 (Fórmula de De Moivre). *Se $z = |z|(\cos \theta + i\text{sen} \theta)$ é uma representação polar do número complexo z e n é um número inteiro, então*

$$z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)].$$

Demonstração. É fácil perceber que a fórmula é válida para $n = 0$ e $n = 1$. Para $n > 1$, ela decorre de aplicações sucessivas da fórmula utilizada na multiplicação. Trataremos agora do caso $n < 0$.

Seja m inteiro e positivo tal que $n = -m$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} [|z|(\cos \theta + i\text{sen} \theta)]^n &= [|z|(\cos \theta + i\text{sen} \theta)]^{-m} \\ &= \frac{1}{[|z|(\cos \theta + i\text{sen} \theta)]^m} \\ &= \frac{1}{|z|^m[\cos(m\theta) + i\text{sen}(m\theta)]} \\ &= \frac{1}{|z|^m}[\cos(0 - m\theta) + i\text{sen}(0 - m\theta)] \\ &= |z|^{-m}[\cos(-m\theta) + i\text{sen}(-m\theta)] \\ &= |z|^n[\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)]. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.9. Sendo $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, vamos calcular z^{10} .

Temos que $|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$.

Além disso, $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim,

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{10} &= [2(\cos \frac{\pi}{4} + i\text{sen} \frac{\pi}{4})]^{10} \\ &= 2^{10}(\cos \frac{10\pi}{4} + i\text{sen} \frac{10\pi}{4}).\end{aligned}$$

No entanto, $\frac{10\pi}{4} = 2\pi + \frac{2\pi}{4}$. Portanto,

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{10} &= 2^{10}(\cos \frac{\pi}{2} + i\text{sen} \frac{\pi}{2}) \\ &= 2^{10}(0 + i) \\ &= 2^{10}i.\end{aligned}$$

2.1.5 Extração de raízes

Sejam w um número complexo e $n \geq 1$ um número natural. Dizemos que o número complexo z é uma raiz n -ésima de w se

$$z^n = w.$$

É fácil ver que se $w = 0$, então a equação $z^n = w$ possui $z = 0$ como única solução. Mostraremos a seguir que se $w \neq 0$, então a equação $z^n = w$ possui exatamente n soluções distintas.

Proposição 2.10. *Fixemos $n \in \mathbb{N}^*$. Todo número complexo $w \neq 0$ possui exatamente n raízes n -ésimas distintas — a saber,*

$$\sqrt[n]{|w|} \left[\cos \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) + i\text{sen} \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

onde $\alpha = \text{Arg}(w)$ e $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left[\cos \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) + i\text{sen} \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

onde $\alpha = \text{Arg}(w)$. Escrevendo $w = |w|(\cos \alpha + i\text{sen} \alpha)$, vamos procurar todos os números complexos $z = |z|(\cos \theta + i\text{sen} \theta)$ tais que $z^n = w$, ou seja, tais que

$$|z|^n[\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)] = |w|(\cos \alpha + i\text{sen} \alpha).$$

A igualdade acima equivale a

$$|z|^n = |w|, \quad \cos(n\theta) = \cos \alpha \quad \text{e} \quad \text{sen}(n\theta) = \text{sen} \alpha.$$

Para satisfazer tais condições devemos ter $|z| = \sqrt[n]{|w|}$ e $n\theta = \alpha + 2k\pi$, ou seja, $\theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Dessa forma, as raízes n -ésimas de w são os números z_k , para $k \in \mathbb{Z}$. Tomando $k = 0, 1, \dots, n-1$, obtemos raízes n -ésimas distintas de w , ao passo que os demais valores de k fornecem apenas repetições das raízes z_0, z_1, \dots, z_{n-1} . Esse fato pode ser verificado tomando $k \in \mathbb{Z}$ e o escrevendo na forma $k = qn + r$, onde $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < n$.

Como

$$\frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha + 2(qn + r)\pi}{n} = \frac{\alpha + 2r\pi}{n} + 2q\pi$$

notamos que $z_k = z_r \in \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$. □

Observamos que todas as raízes n -ésimas de $w \neq 0$ têm o mesmo módulo, $\sqrt[n]{|w|}$. Logo, elas correspondem a n pontos sobre a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{|w|}$. Para valores inteiros de k , os argumentos crescem em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$, o que justifica o espaçamento uniforme das raízes nessa circunferência. Assim, as raízes n -ésimas de w são vértices de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência em questão.

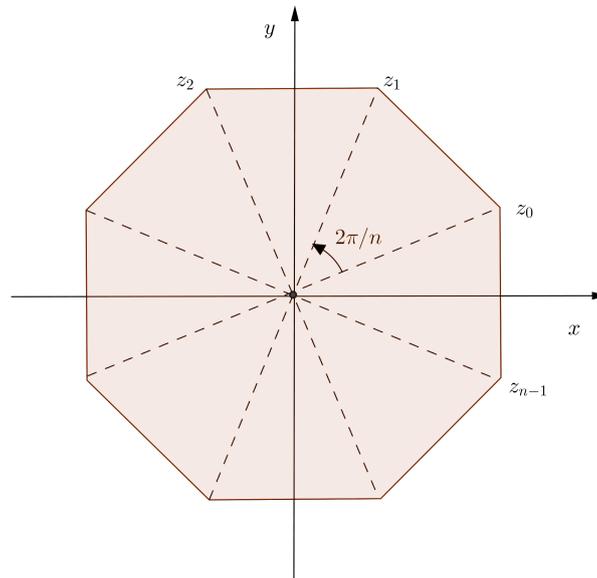


Figura 29: Representação gráfica das raízes n -ésimas de w .

2.2 POLINÔMIOS

Chamamos de *polinômio complexo* a uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

onde a_0, a_1, \dots, a_n são números complexos denominados os seus *coeficientes* e X é um símbolo, chamado de *indeterminada*. O conceito de polinômio contempla apenas a lista ordenada (a_0, a_1, \dots, a_n) de seus coeficientes e a maneira pela qual os somamos e multiplicamos. Dizemos que dois polinômios são *iguais* quando possuem os mesmos coeficientes.

A cada polinômio complexo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

associamos a função polinomial complexa $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Mostraremos, no fim desta seção, que duas funções polinomiais são iguais se, e somente se, os polinômios associados a ela também são iguais. Daí segue que existe uma correspondência biunívoca entre polinômios e funções polinomiais. Portanto, neste trabalho, não faremos distinção quando nos referirmos ao polinômio p ou à função polinomial p .

Definição 2.11. Dizemos que $\alpha \in \mathbb{C}$ é *raiz* de uma função polinomial p quando $p(\alpha) = 0$.

Proposição 2.12. Se o número complexo α é raiz de uma função polinomial p , então $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$ (isto é, existe uma função polinomial q tal que $p(x) = q(x) \cdot (x - \alpha)$).

Demonstração. Como α é raiz de p , temos que $p(\alpha) = 0$. Dessa forma

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - p(\alpha) \\ &= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) - (a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0) \\ &= a_n (x^n - \alpha^n) + a_{n-1} (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \dots + a_1 (x - \alpha). \end{aligned}$$

Tomando a soma $S_n = x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-3} + \dots + \alpha^{n-2} x + \alpha^{n-1}$, temos:

$$\begin{aligned} (x - \alpha) \cdot S_n &= x \cdot S_n - \alpha \cdot S_n \\ &= (x^n + \alpha x^{n-1} + \alpha^2 x^{n-2} + \dots + \alpha^{n-2} x^2 + \alpha^{n-1} x) \\ &\quad - (\alpha x^{n-1} + \alpha^2 x^{n-2} + \dots + \alpha^{n-2} x^2 + \alpha^{n-1} x + \alpha^n) \\ &= x^n - \alpha^n \end{aligned}$$

Logo, verificamos que

$$x^n - \alpha^n = (x - \alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-3} + \dots + \alpha^{n-2} x + \alpha^{n-1}).$$

Portanto, toda parcela de $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$, o que implica que $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$. \square

Definição 2.13. Dizemos que uma função polinomial dada por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

tem grau n se $a_n \neq 0$.

Quando somamos ou multiplicamos funções polinomiais p e q , obtemos como resultado novas funções polinomiais. O grau de $p + q$ não ultrapassa o maior dentre os graus de p e q , enquanto o grau de pq é a soma dos graus de p e q .

Da Proposição 2.12 segue que se uma função polinomial p de grau n tem como raízes distintas os números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, então existe uma função polinomial q de grau $n - k$ tal que

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_k)q(x).$$

Consequentemente, uma função polinomial de grau n tem no máximo n raízes.

Desta última afirmação segue que uma função polinomial p é identicamente nula (isto é, $p(x) = 0$ para todo x em seu domínio) se, e somente se, é da forma $p(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x + 0$.

Por fim, concluímos que duas funções polinomiais são iguais se, e somente se, os polinômios associados a ela também são iguais. Com efeito, dadas p e q funções polinomiais, temos que $p = q$ se, e somente se, $p - q$ é identicamente nula — e isto ocorre precisamente quando a diferença dos respectivos coeficientes dos polinômios associados às funções polinomiais f e g são nulas.

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

3.1 BREVE HISTÓRIA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Veremos a seguir, em ordem cronológica, os principais matemáticos que contribuíram de forma relevante na tentativa de demonstrar o TFA.

1608. Peter Roth, matemático alemão, afirmou que equações de grau n com coeficientes reais têm, no máximo, n soluções.

1629. Albert Girard, matemático belga, foi o primeiro a afirmar que toda equação de grau n com coeficientes reais tem exatamente n soluções. Ele, contudo, não mencionou que as soluções deveriam ser da forma $a + b\sqrt{-1}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

1637. René Descartes, matemático francês, resumiu (no terceiro e último livro de *La géométrie*) tudo o que se conhecia até então a respeito de equações algébricas. Em particular, ele observou que se α é raiz de um polinômio real, então $(x - \alpha)$ divide esse polinômio e apresentou sua famosa “regra dos sinais”, que estabelece um número máximo de raízes positivas e negativas que um polinômio real possui.

1702. Gottfried Wilhelm Leibniz, matemático alemão, ao tentar integrar funções racionais pelo método das frações parciais, indagou se seria sempre possível fatorar um polinômio real como um produto de fatores lineares e quadráticos reais. Face ao “contraexemplo” que encontrara, ele desistiu de tentar provar a existência de uma tal decomposição. Com efeito, dado um número real r , Leibniz acreditara que em

$$\begin{aligned} x^4 + r^4 &= (x^2 - r^2\sqrt{-1})(x^2 + r^2\sqrt{-1}) \\ &= (x + r\sqrt{\sqrt{-1}})(x - r\sqrt{\sqrt{-1}})(x + r\sqrt{-\sqrt{-1}})(x - r\sqrt{-\sqrt{-1}}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

o produto de quaisquer dois fatores lineares do lado direito nunca resultaria num polinômio quadrático real. Ele não percebeu que

$$\sqrt{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{-1}) \quad \text{e} \quad \sqrt{-\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{-1})$$

o que o levaria a multiplicar o primeiro e o terceiro fatores de (3.1), bem como o segundo e o quarto, obtendo

$$x^4 + r^4 = (x^2 + r\sqrt{2}x + r^2)(x^2 - r\sqrt{2}x + r^2).$$

De fato, é surpreendente que Leibniz não tenha completado quadrados para encontrar

$$x^4 + r^4 = (x^2 + r^2)^2 - 2x^2r^2 = (x^2 + r^2 - \sqrt{2}xr)(x^2 + r^2 + \sqrt{2}xr).$$

1746. Jean le Rond d'Alembert, matemático francês, foi o primeiro a tentar demonstrar que todo polinômio real pode ser decomposto como um produto de fatores lineares e quadráticos reais. Além de assumir previamente a existência de raízes em alguma extensão de \mathbb{R} , ele utilizou um resultado (atualmente conhecido como Teorema de Puiseux) que só viria a ser devidamente estabelecido em 1851. Embora Gauss não considerasse a prova de d'Alembert totalmente satisfatória, ele afirmou acreditar que uma demonstração rigorosa pudesse ser construída nas mesmas bases. E foi exatamente isso que Argand fez, anos mais tarde. Na França, o TFA é também conhecido como Teorema de d'Alembert.

1749. Leonhard Euler, matemático suíço, afirmou que todo polinômio real pode ser decomposto como um produto de fatores lineares e quadráticos reais. Ele apresentou uma prova rigorosa dessa afirmação para polinômios de grau menor ou igual a 6, mas apenas esboçou uma tentativa de demonstração do caso geral. Ele tentou mostrar que é possível decompor um polinômio mônico real de grau 2^n arbitrário como um produto de dois polinômios mônicos reais de grau 2^{n-1} . Além de assumir previamente a existência de raízes em alguma extensão de \mathbb{R} , não estava claro se os fatores obtidos na decomposição seriam, de fato, reais.

1759. François Daviet de Foncenex, matemático francês, elucidou algumas passagens da demonstração de Euler, mas também não conseguiu mostrar que os fatores obtidos eram reais.

1772. Joseph-Louis Lagrange, matemático italiano, preencheu as lacunas existentes nas provas de Euler e de Foncenex. Segundo Gauss, Lagrange apresentou a demonstração mais completa e rigorosa do TFA até 1799. Sua única falha foi assumir previamente a existência de raízes em alguma extensão de \mathbb{R} .

1795. Pierre Simon de Laplace, matemático francês, apresentou uma prova bastante elegante do TFA para polinômios reais, muito diferente das de Euler, Foncenex e Lagrange. Contudo, assim como seus predecessores, ele assumiu previamente a existência de raízes em alguma extensão de \mathbb{R} .

1798. James Wood, matemático inglês, publicou uma tentativa de demonstração do TFA para polinômios reais. Contudo, sua prova tinha falhas e passou praticamente desconhecida à época, sendo reabilitada por Frank Smithies em 2000.

1799. Carl Friedrich Gauss, matemático alemão, apresentou em sua tese de doutorado o que veio a ser considerada a primeira demonstração correta do TFA. Todas as tentativas anteriores assumiam a existência de raízes em alguma extensão de \mathbb{R} e tinham como objetivo mostrar que elas seriam da forma $a + b\sqrt{-1}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Gauss foi o primeiro a sentir necessidade de provar a existência dessas raízes.

Em [4], o autor descreve a linha de pensamento utilizada por Gauss:

Resolveremos a equação $z^2 - 4i = 0$ graficamente, mostrando que existe um valor complexo $z = a + bi$ que satisfaz à equação. Substituindo z por $a + bi$ e separando as partes real e imaginária na equação temos $a^2 - b^2 = 0$ e $ab - 2 = 0$. Interpretando a e b como quantidades variáveis e esboçando essas equações no mesmo sistema de eixos, um para a parte real a , outro para a parte imaginária b , temos duas curvas: uma consiste das retas $a + b = 0$ e $a - b = 0$, a outra é a a hipérbole retangular $ab = 2$.

É claro que as curvas têm um ponto de intersecção P no primeiro quadrante (e, incidentemente, outro P' no terceiro). Devemos notar em particular que um ramo da primeira curva se afasta da origem ao longo das direções $\theta = \frac{1\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ e que um ramo da segunda curva se aproxima assintoticamente das direções $\theta = \frac{0\pi}{4}$ e $\theta = \frac{2\pi}{4}$; o ponto de intersecção se encontra entre as duas últimas direções $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. As coordenadas a e b deste ponto de intersecção são a partes real e a parte imaginária do número complexo que é uma solução da equação $z^2 - 4i = 0$. Se nossa equação polinomial original fosse de terceiro grau, em vez de ser de segundo grau, haveria um ramo de uma curva aproximando-se das direções $\theta = \frac{1\pi}{6}$ e $\theta = \frac{3\pi}{6}$ e a outra curva se avizinharia das direções $\theta = \frac{0\pi}{6}$ e $\theta = \frac{2\pi}{6}$. Os ramos em cada caso são contínuos; por isso têm que se cortar em algum lugar entre $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$. Para uma equação de grau n haverá um ramo de uma curva tendo como direções assintóticas $\theta = \frac{1\pi}{2n}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2n}$, enquanto que um ramo da outra curva

terá direções assintóticas $\theta = \frac{0\pi}{2n}$ e $\theta = \frac{2\pi}{2n}$; esses ramos necessariamente se cortarão no intervalo entre $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{n}$, e as coordenadas a e b do ponto de intersecção serão a parte real e a parte imaginária de um número complexo que satisfaz à equação. Portanto vemos que, qualquer que seja o grau da equação polinomial, ela tem que ter ao menos uma raiz complexa. Com esse resultado demonstra-se facilmente a tese de Gauss, que o polinômio pode ser fatorado em fatores lineares e quadráticos.

No entanto, para os padrões atuais, a prova apresentada por Gauss em sua tese de doutorado não possui um nível de rigor adequado. As lacunas existentes nessa demonstração só foram preenchidas em 1920, pelo matemático russo A. M. Ostrowski. Em [17], o autor apresenta um comentário de Ostrowski sobre a prova de Gauss:

Enquanto a discussão, na primeira parte da tese de Gauss, das primeiras tentativas de provar o Teorema Fundamental da Álgebra é excelente pelo extraordinariamente completo e extenuante cuidado, a prova deste teorema na segunda parte está um tanto distante deste alto padrão. Não tanto porque é apresentada em uma aparência geométrica, mas principalmente porque a prova utiliza propriedades de curvas algébricas que não são provadas na tese, nem haviam sido provadas na literatura pré-Gaussiana.

Ao longo de sua vida, Gauss apresentou outras três provas do TFA. A segunda, publicada em 1816, é quase inteiramente algébrica: o único resultado analítico do qual lançou mão é o de que todo polinômio real de grau ímpar possui uma raiz real. Gauss utilizou as ideias de Euler e as simplificações de Foncenex para elaborar essa demonstração que, até mesmo para os padrões atuais, está absolutamente correta. No mesmo ano, Gauss publicou sua terceira prova, na qual utiliza conceitos topológicos e teoria da integração. Por fim, em 1849, Gauss publicou sua quarta prova. Dessa vez, o TFA é enunciado para polinômios complexos.¹ A quarta prova de Gauss é considerada um refinamento da primeira, mas, de acordo com o matemático estadunidense S. Smale, as falhas permaneceram:

¹ Observe que essa aparente generalização não traz novas informações. Com efeito, tendo estabelecido que todo polinômio real não constante tem pelo menos uma raiz complexa, é possível mostrar que todo polinômio complexo não constante tem pelo menos uma raiz complexa. De fato, seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio complexo não constante e considere $F(x) = P(x) \cdot \bar{P}(x)$, onde $\bar{P}(x) = \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n-1} x^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 x + \bar{a}_0$. Temos que $F(x)$ é um polinômio real não constante. Se existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $F(z_0) = 0$, então $P(z_0) = 0$ ou $\bar{P}(z_0) = 0$. No primeiro caso, z_0 é uma raiz de $P(z)$. No segundo, \bar{z}_0 é uma raiz de $P(z)$.

Pretendo mostrar a imensa falha que a prova de Gauss contém. Mesmo atualmente, é um ponto sutil que toda curva algébrica plana não pode entrar em um disco sem deixá-lo. De fato, embora Gauss tenha feito tal prova 50 anos depois [1849, a quarta prova de Gauss], a falha permaneceu. Até 1920, a prova de Gauss estava incompleta.

1806. Jean-Robert Argand, matemático (amador) suíço, publicou um ensaio sobre a representação dos números complexos que culminou numa prova do TFA. Em 1814, ele aprimorou essa demonstração, simplificando de maneira extraordinária as ideias de d'Alembert, e obteve o que pode ser considerada a mais simples e primeira² prova rigorosa do TFA.

3.2 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Em [8], encontramos:

[...] embora o TFA seja assunto obrigatório no Ensino Médio, muitos professores de matemática nunca viram, em seus cursos de licenciatura, uma demonstração desse importante resultado.

Nesse sentido, apresentaremos uma prova rigorosa do TFA com o menor nível de complexidade possível, tendo como objetivo sanar uma possível lacuna na formação do professor do Ensino Básico. A principal referência utilizada nesta seção é [17].

Teorema 3.1 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Seja $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, um polinômio com coeficientes complexos. Então existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.*

Demonstração. A estratégia adotada consiste dividi-lo nas duas afirmações a seguir:

AFIRMAÇÃO 1. Existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

AFIRMAÇÃO 2. $P(z_0) = 0$.

A AFIRMAÇÃO 1 garante a existência de um ponto de mínimo para a função $|P(z)|$ e decorre dos seguintes resultados:

² Além de ter sido o primeiro a demonstrar o TFA para polinômios complexos, a única “falha” de Argand foi utilizar um resultado que assegura, sob certas condições, a existência de um ponto de mínimo para uma função contínua, que só seria satisfatoriamente estabelecido por Weierstrass em 1874.

RESULTADO A. Existe $R > 0$ tal que $|z| > R \Rightarrow |P(z)| > |P(0)|$.

RESULTADO B. Existe $z_0 \in D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ tal que $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ para todo $z \in D(0, R)$.

De fato, do RESULTADO B segue que $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ quando $|z| \leq R$. Resta mostrar que $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ quando $|z| > R$. Pelo RESULTADO A, $|P(z)| > |P(0)|$ quando $|z| > R$. Mas $|P(0)| \geq |P(z_0)|$, uma vez que $0 \in D(0, R)$. Logo, $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ quando $|z| > R$. Portanto, $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Uma demonstração do RESULTADO A encontra-se no Apêndice A desta dissertação e uma demonstração do RESULTADO B, no Apêndice B.

A AFIRMAÇÃO 2, que demonstraremos a seguir, diz que se $|P(z_0)|$ é o menor valor assumido por $|P(z)|$, então $P(z_0) = 0$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $z_0 = 0$.³

Da Afirmação 1 segue que

$$|P(z)|^2 \geq |P(0)|^2 \quad (3.2)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Como $a_n \neq 0$, faz sentido falar no menor $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que o coeficiente do monômio z^k em $P(z)$ é não nulo. Colocando z^k em evidência, obtemos

$$P(z) = P(0) + z^k Q(z) \quad (3.3)$$

onde Q um polinômio complexo tal que $Q(0) \neq 0$.

Indicando por S^1 o círculo unitário centrado na origem do plano complexo, temos que

$$S^1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}.$$

De (3.2) segue que, para todo $r \geq 0$ e todo $w \in S^1$,

$$|P(rw)|^2 \geq |P(0)|^2.$$

Utilizando (3.3), obtemos

$$P(rw) = P(0) + r^k w^k Q(rw).$$

³ De fato, seja $p(z) = P(z + z_0)$. Temos que $p(z)$ é um polinômio complexo de grau n , cujo termo independente é $P(z_0)$. Como $|p(z)| = |P(z + z_0)| \geq |P(z_0)| = |p(0)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, concluímos que 0 é um ponto de mínimo de $|p(z)|$. Trabalhando com $p(z)$ em vez de $P(z)$, obteremos $p(0) = 0$ e, portanto, $P(z_0) = 0$.

Juntando essas informações, chegamos a $|P(0) + r^k w^k Q(rw)|^2 \geq |P(0)|^2$, ou seja, a

$$|P(0) + r^k w^k Q(rw)|^2 - |P(0)|^2 \geq 0.$$

Assim,

$$|P(0)|^2 + 2 \operatorname{Re}(\overline{P(0)} r^k w^k Q(rw)) + |r^k w^k Q(rw)|^2 - |P(0)|^2 \geq 0.$$

Simplificando e colocando r^k em evidência, chegamos a

$$2r^k \operatorname{Re}(\overline{P(0)} w^k Q(rw)) + r^{2k} |w^k Q(rw)|^2 \geq 0.$$

Dividindo por $r^k > 0$, obtemos

$$2 \operatorname{Re}(\overline{P(0)} w^k Q(rw)) + r^k |w^k Q(rw)|^2 \geq 0 \quad \forall r > 0, \forall w \in S^1.$$

Como a expressão do lado esquerdo é contínua em $r \in [0, +\infty[$ para cada $w \in S^1$ fixado, fazendo $r = 0$ obtemos

$$2 \operatorname{Re}(\overline{P(0)} Q(0) w^k) \geq 0, \quad \forall w \in S^1. \quad (3.4)$$

Seja $\alpha = \overline{P(0)} Q(0)$. Temos que $\alpha = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Faça, agora, $w = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$.

- Tomando $\theta = 0$, temos que $w^k = 1$. Logo, $\alpha w^k = \alpha$. De (3.4) segue que $2 \operatorname{Re}(\alpha w^k) = 2a \geq 0$.
- Tomando $\theta = -\frac{\pi}{k}$, temos que $w^k = -1$. Logo, $\alpha w^k = -\alpha$. De (3.4) segue que $2 \operatorname{Re}(\alpha w^k) = -2a \geq 0$.
- Tomando $\theta = -\frac{\pi}{2k}$, temos que $w^k = -i$. Logo, $\alpha w^k = b - ai$. De (3.4) segue que $2 \operatorname{Re}(\alpha w^k) = 2b \geq 0$.
- Tomando $\theta = -\frac{3\pi}{2k}$, temos que $w^k = i$. Logo, $\alpha w^k = -b + ai$. De (3.4) segue que $2 \operatorname{Re}(\alpha w^k) = -2b \geq 0$.

Portanto, $a = b = 0$. Assim, $\overline{P(0)} Q(0) = \alpha = 0$. Como $Q(0) \neq 0$, temos que $\overline{P(0)} = 0$ e, conseqüentemente, $P(0) = 0$. \square

4

ABORDAGENS VISUAIS DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Como dissemos anteriormente, todas as demonstrações conhecidas do TFA utilizam argumentos que não podem ser apresentados de modo preciso no Ensino Médio e, portanto, não faz sentido tentar prová-lo rigorosamente em sala de aula. Contudo, as idéias que estão por trás de algumas dessas demonstrações têm muito a acrescentar na formação do aluno.

O propósito deste capítulo é apresentar duas delas. Para este fim, utilizaremos o *GeoGebra*, software gratuito de matemática dinâmica, cujo download pode ser feito em <https://www.geogebra.org/download>.

Observamos que as escolas estaduais do Estado de São Paulo são equipadas com salas de informática, onde normalmente existem computadores em quantidade suficiente para que todos os alunos de uma mesma classe possam interagir com o GeoGebra. Caso isso não ocorra, é recomendável que o professor estabeleça uma situação para que todos os estudantes possam se familiarizar previamente com o software.

4.1 PRIMEIRA ABORDAGEM

Nesta primeira abordagem, procuraremos apresentar algumas ideias que estão por trás da primeira demonstração de Gauss do TFA.

Considere as partes real e imaginária de $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $\text{Re}(P(z))$ e $\text{Im}(P(z))$.

Exemplo 4.1. Seja $P(z) = z^2 + 3z + 5$. Fazendo $z = x + yi$, temos que

$$P(z) = (x + yi)^2 + 3(x + yi) + 5 = [(x^2 - y^2) + 3x + 5] + (2xy + 3y)i.$$

Logo, $\text{Re}(P(z)) = (x^2 - y^2) + 3x + 5$ e $\text{Im}(P(z)) = 2xy + 3y$.

A ideia é mostrar que as curvas $\text{Re}(P(z)) = 0$ e $\text{Im}(P(z)) = 0$ se encontram num ponto z_0 do plano complexo. Como $P(z) = \text{Re}(P(z)) + \text{Im}(P(z))i$, teremos que $P(z_0) = 0$.

Para valores grandes de $|z|$, o comportamento das curvas $\text{Re}(P(z)) = 0$ e $\text{Im}(P(z)) = 0$ fica parecido com o das curvas $\text{Re}(a_n z^n) = 0$ e $\text{Im}(a_n z^n) = 0$. Estas, por sua vez, são famílias de retas que passam pela origem e que se alternam em torno dela.¹

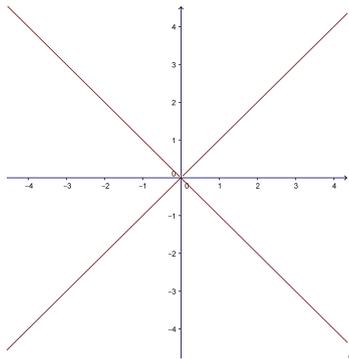


Figura 30: Em vermelho, $\text{Re}(z^2) = 0$; em azul, $\text{Im}(z^2) = 0$.

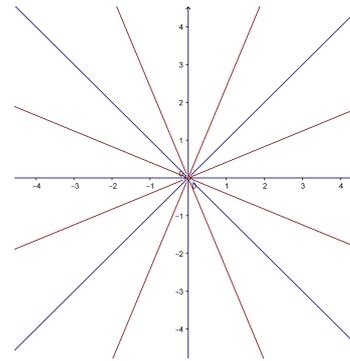


Figura 32: Em vermelho, $\text{Re}(z^4) = 0$; em azul, $\text{Im}(z^4) = 0$.

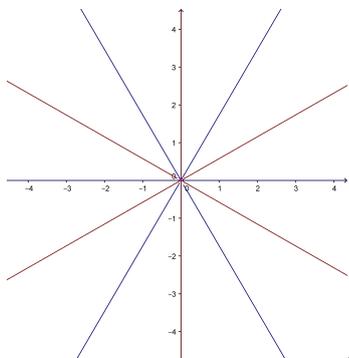


Figura 31: Em vermelho, $\text{Re}(z^3) = 0$; em azul, $\text{Im}(z^3) = 0$.

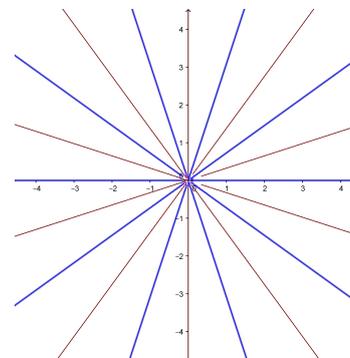


Figura 33: Em vermelho, $\text{Re}(z^5) = 0$; em azul, $\text{Im}(z^5) = 0$.

Tomando, portanto, um número real $R > 0$ suficientemente grande, as curvas $\text{Re}(P(z)) = 0$ e $\text{Im}(P(z)) = 0$ intersectarão alternadamente a circunferência de raio R centrada na origem.

¹ Fazendo $z = r \cos \theta + i \text{sen } \theta$, temos que $\text{Re}(z^n) = r^n \cos n\theta$ e $\text{Im}(z^n) = r^n \text{sen } n\theta$. Como $r^n \cos n\theta = 0 \Leftrightarrow n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e $r^n \text{sen } n\theta = 0 \Leftrightarrow n\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, a afirmação segue.

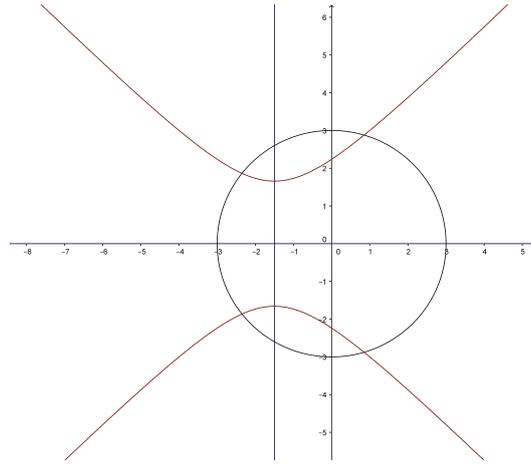


Figura 34: $\operatorname{Re}(P(z)) = 0$ em vermelho e $\operatorname{Im}(P(z)) = 0$ em azul, onde $P(z) = z^2 + 3z + 5$.

Os pedaços da curva $\operatorname{Re}(P(z)) = 0$ que estão fora dessa circunferência se conectam dentro dela. O mesmo ocorre com os pedaços da curva $\operatorname{Im}(P(z)) = 0$. Como $\operatorname{Re}(P(z)) = 0$ e $\operatorname{Im}(P(z)) = 0$ cruzam alternadamente a circunferência, elas acabarão se encontrando dentro dela.²

Com o auxílio do GeoGebra, é possível separar facilmente as partes real e imaginária de um polinômio complexo $P(z)$ qualquer, traçar as curvas $\operatorname{Re}(P(z)) = 0$ e $\operatorname{Im}(P(z)) = 0$ e observar que elas, de fato, se encontram. Explicaremos como proceder a seguir, tomando $P(z) = z^2 - 4i$ como exemplo.

- No menu superior, clique em *Exibir* e, em seguida, em *Janela CAS*.
- Na primeira linha da *Janela CAS*, digite $z^2 - 4i$ e tecla *enter*.

Observação: O GeoGebra não reconhece o “*i*” digitado; é preciso clicar no símbolo α do lado direito da *Janela CAS* e, então, selecionar o “*i*” dentro dele.

- Na segunda linha, digite *substituir*. Dois comandos aparecerão. Escolha *Substituir*[<Expressão>, <O Que>, <Por>]. Para preencher o campo <Expressão>, clique em $z^2 - 4i$ na primeira linha; no campo <O Que>, digite z ; por fim, no campo <Por>, digite $x + yi$ e, em seguida, tecla *enter*. Aparecerá a expressão $(x + yi)^2 - 4i$.

² É extremamente complicado mostrar rigorosamente que os pedaços de cada uma dessas curvas se conectam no interior da circunferência — e é justamente neste ponto que reside a crítica de Smale à primeira (e quarta) demonstração de Gauss, mencionada no Capítulo 3 deste trabalho. Também não é trivial mostrar que as curvas $\operatorname{Re}(P(z)) = 0$ e $\operatorname{Im}(P(z)) = 0$ se encontrarão no interior da circunferência. Uma justificativa deste fato pode ser encontrada no Apêndice A de [10].

- Na terceira linha, ao digitar `real`, aparecerá o comando `real(<x>)`. Para preencher o campo `<x>`, clique em $(x + yi)^2 - 4i$ na segunda linha. Ao teclar `enter`, teremos $x^2 - y^2$ como resultado.
- Na quarta linha, digite `imaginary`. O comando `imaginary(<x>)` surgirá. Para preencher o campo `<x>`, clique em $(x + yi)^2 - 4i$ na segunda linha. Em seguida, tecla `enter`. Aparecerá $xy - 4$.
- Por fim, copie a parte real obtida e cole-a na caixa *Entrada*. Iguale a zero e clique `enter`. Faça o mesmo com a parte imaginária.

O resultado deste procedimento pode ser conferido na figura abaixo. As cores de $\text{Re}(P(z)) = 0$ e de $\text{Im}(P(z)) = 0$ foram modificadas para vermelho e azul, respectivamente, a fim de facilitar a visualização.

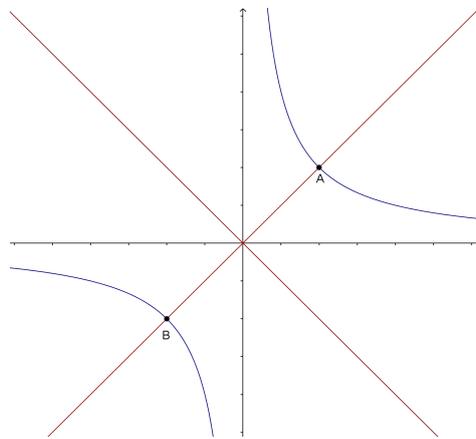


Figura 35: $z^2 - 4i = 0$.

Note que há pedaços da curva vermelha que se afastam da origem segundo as direções $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$ e que há pedaços da curva azul que se movem assintoticamente para as direções $\theta = 0\pi/4$ e $\theta = 2\pi/4$. Como esse pedaços se conectam, as duas curvas se encontrarão entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$.

E se nosso polinômio fosse de grau 3? A título de ilustração, propomos a análise do comportamento da equação $z^3 - 4i = 0$. O procedimento quanto aos comandos do GeoGebra são idênticos ao do caso anterior: substituindo z por $x + yi$, separando as partes real e imaginária e igualando-as a zero, obtemos a figura abaixo:

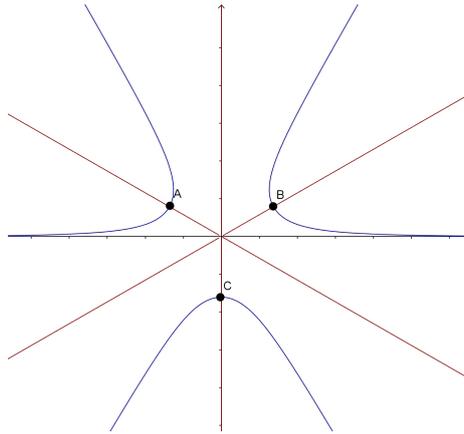


Figura 36: $z^3 - 4i = 0$

Agora, há pedaços da curva vermelha que se afastam da origem segundo as direções $\theta = \pi/6$ e $\theta = 3\pi/6$ e há pedaços da curva azul que seguem nas direções $\theta = 0\pi/6$ e $\theta = 2\pi/6$. Os ramos de cada curva são contínuos e, portanto, têm que se cortar entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi/3$.

Podemos generalizar para uma equação de grau n : neste caso, existirá um ramo de uma das curva tendo como direções assintóticas $\theta = \pi/2n$ e $\theta = 3\pi/2n$ enquanto que um ramo da outra curva terá direções assintóticas $\theta = 0\pi/2n$ e $\theta = 2\pi/2n$. Essas curvas necessariamente se cortarão entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi/n$.

O professor pode explorar ainda mais o GeoGebra e propor mais exemplos, aumentando o grau do polinômio e incluindo coeficientes complexos, como vemos a seguir:

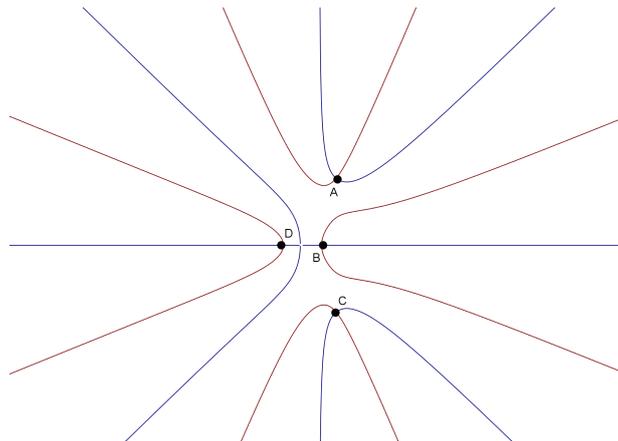


Figura 37: $p(z) = z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 1$

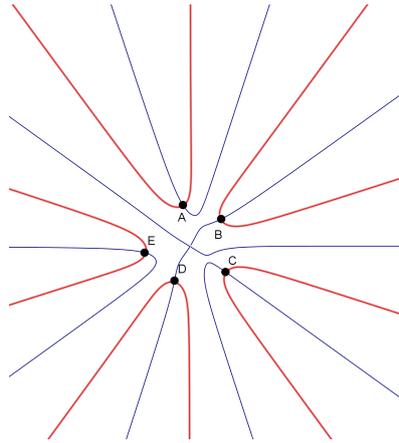


Figura 38: $p(z) = 3z^5 - iz^3 + (1 + 2i)z^2 + 5$

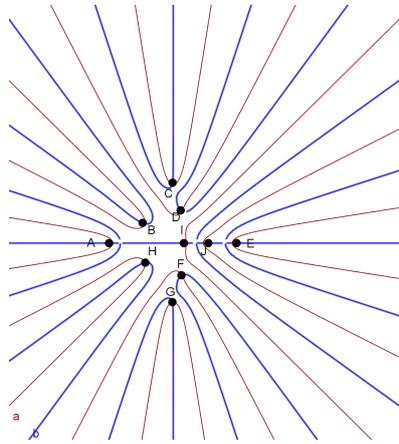


Figura 39: $p(z) = z^{10} - 6z^6 + 3z - 1$

Note que, em todos esses casos, o número de raízes complexas — identificadas pelos pontos de intersecção entre $\text{Re}(P(z)) = 0$ e $\text{Im}(P(z)) = 0$ — é exatamente igual ao grau do polinômio em questão. O professor deve estar atento aos casos que veremos a seguir:

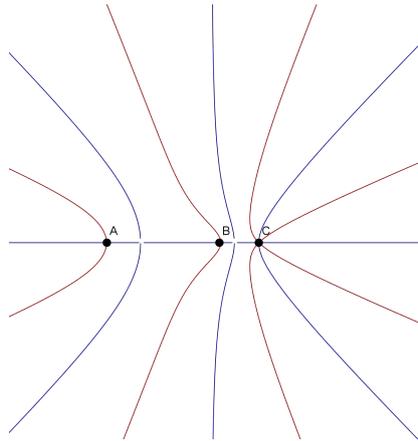


Figura 40: $p(z) = z^4 + z^3 - 5z^2 + 3z$

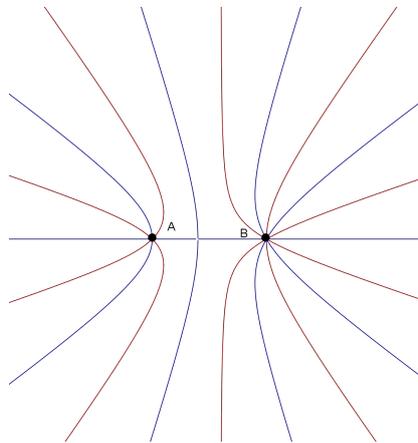


Figura 41: $p(z) = z^5 + z^4 - 5z^3 - z^2 + 8z - 4$

No caso de $p(z) = z^4 + z^3 - 5z^2 + 3z$, há 3 pontos de intersecção e no de $p(z) = z^5 + z^4 - 5z^3 - z^2 + 8z - 4$, apenas 2. Note que, na Figura 40, temos duas “curvas” cujas as partes real e imaginária se encontram no mesmo ponto (C). O mesmo ocorre com o ponto A da Figura 41 e, no caso do ponto B dessa mesma figura, observamos o encontro de 3 dessas “curvas”. Isto se deve ao fato de a multiplicidade de algumas raízes ser maior que 1. Podemos fatorar $z^4 + z^3 - 5z^2 + 3z$ como $(z - 1)^2 z(z + 3)$ e $z^5 + z^4 - 5z^3 - z^2 + 8z - 4$ como $(z - 1)^3 (z + 2)^2$. No primeiro caso, temos uma raiz com multiplicidade 2 e duas com multiplicidade 1; no segundo, uma raiz com multiplicidade 3 e outra com multiplicidade 2 — assim, a multiplicidade das raízes tem relação direta com a quantidade de “curvas” que se encontram num determinado ponto.

4.2 SEGUNDA ABORDAGEM

Seja $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Como antes, queremos mostrar que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.

Escrevendo z na forma polar, $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, chegamos a

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n + \dots + a_1 [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)] + a_0 \\ &= a_n r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) + \dots + a_1 r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) + a_0. \end{aligned}$$

Exemplo 4.2. Seja $P(z) = z^2 + 3z + 5$. Fazendo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, temos que

$$\begin{aligned} P(z) &= [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^2 + 3r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) + 5 \\ &= r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) + 3r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) + 5. \end{aligned}$$

Para valores de r próximos de 0, r^2, r^3, \dots, r^n são muito menores que r . Assim, o comportamento de $P(z)$ fica determinado, basicamente, por $a_1[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)] + a_0$, o que faz com que a curva descrita por $P(z)$ ao fixarmos um valor de r muito pequeno se pareça com uma circunferência centrada em a_0 .

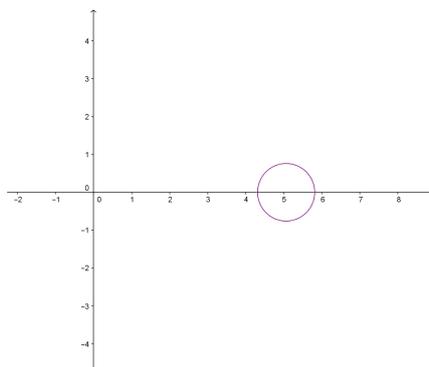


Figura 42: Curva descrita por $P(z) = z^2 + 3z + 5$ para $r = 0,25$.

Vejamos, agora, o que ocorre para valores grandes de r . Ao escrever

$$P(z) = r^n \left[a_n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) + \dots + \frac{a_1 (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}{r^{n-1}} + \frac{a_0}{r^n} \right]$$

vemos que o comportamento de $P(z)$ fica determinado, basicamente, por $a_n r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$, o que faz com que a curva descrita por $P(z)$ ao fixarmos um valor de r muito grande se assemelhe a uma circunferência de centro na origem e raio r^n (percorrida n vezes).

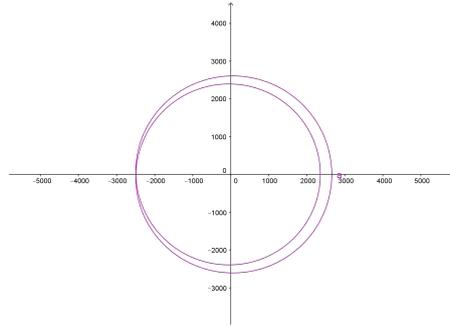


Figura 43: Curva descrita por $P(z) = z^2 + 3z + 5$ para $r = 50$.

Assim, para r pequeno, a origem fica no exterior da curva fechada descrita por $P(z)$. Para r grande, a curva descrita por $P(z)$ também é fechada e dá n voltas em torno da origem. Como as curvas descritas por $P(z)$ são fechadas e evoluem continuamente à medida que r aumenta, para algum valor de r a origem terá que pertencer à curva $P(z)$. Logo, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$. Em nosso exemplo, isto se dá para $r = \sqrt{5}$.

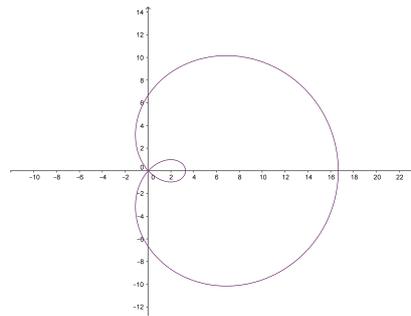


Figura 44: Curva descrita por $P(z) = z^2 + 3z + 5$ para $r = \sqrt{5}$.

As figuras acima são facilmente construídas no GeoGebra. No caso do exemplo dado, isto é, $P(z) = z^2 + 3z + 5$, basta executar os seguintes comandos:

- Na caixa *Entrada*, digite *curva*. Aparecerá uma série de comandos que podem ser escolhidos.
- Escolha *Curva*[<Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>].
- Na primeira ocorrência de <Expressão>, digite $r^2 \cdot \cos(2t) + 3 \cdot r \cdot \cos(t) + 5$; na segunda, digite $r^2 \cdot \sin(2t) + r \cdot \sin(t)$; em <Variável>, digite t ; em <Valor Inicial>, digite 0; por fim, em <Valor Final>, digite 6.28.

- Clique *enter*. Automaticamente aparecerá a opção de criar um controle deslizantes. Crie-o, e a figura aparecerá. Ao movimentar o ponto em cima do controle deslizante criado, poderemos verificar de forma dinâmica o comportamento de $P(z)$ com a variação de r .

Encerraremos esta seção exibindo uma outra possibilidade de uso do GeoGebra, a fim de explorar em detalhes a construção da imagem de $|z|=r$ por $P(z)$.³

Fixe $r > 0$. A curva azul representa $|z|=r$. Note que, quando variamos o ângulo t no controle deslizante, a curva azul é percorrida inteiramente, uma única vez. A curva vermelha representa a imagem de $|z|=r$ por $P_1(z) = (1+i)z^2$. Note que, quando variamos o ângulo t no controle deslizante, percorremos a curva vermelha duas vezes.

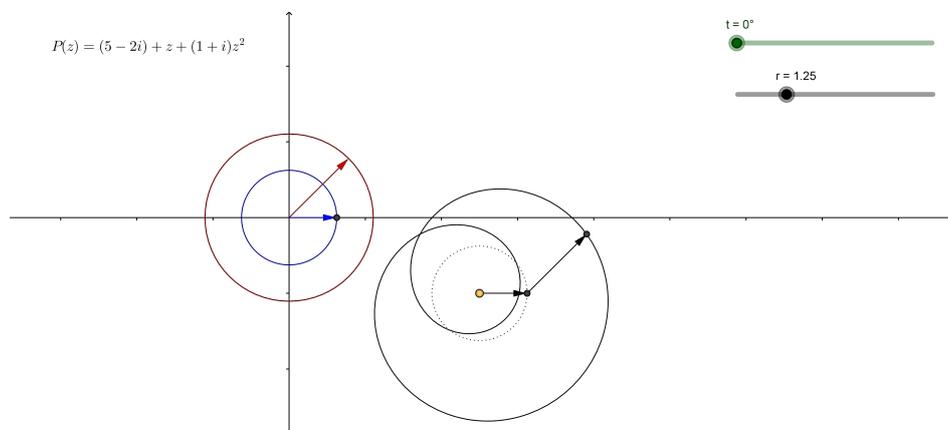


Figura 45: $t = 0$.

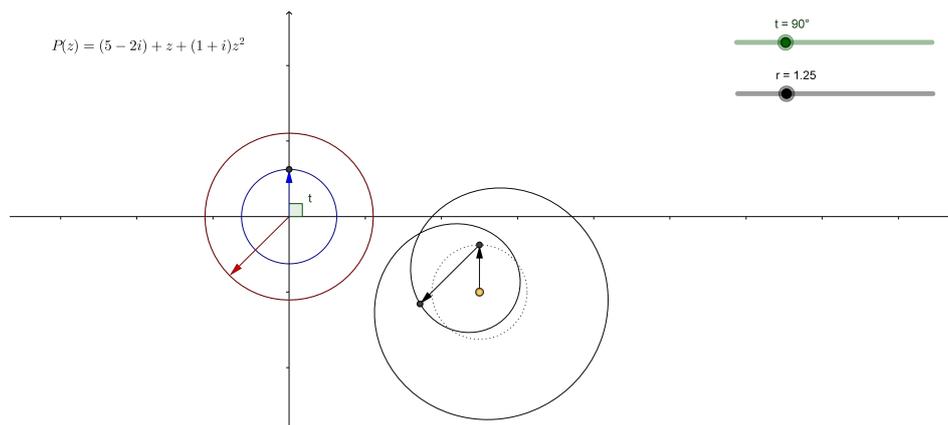


Figura 46: $t = \pi/2$.

³ O arquivo original foi elaborado pelo Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi, a quem novamente agradecemos pela contribuição.

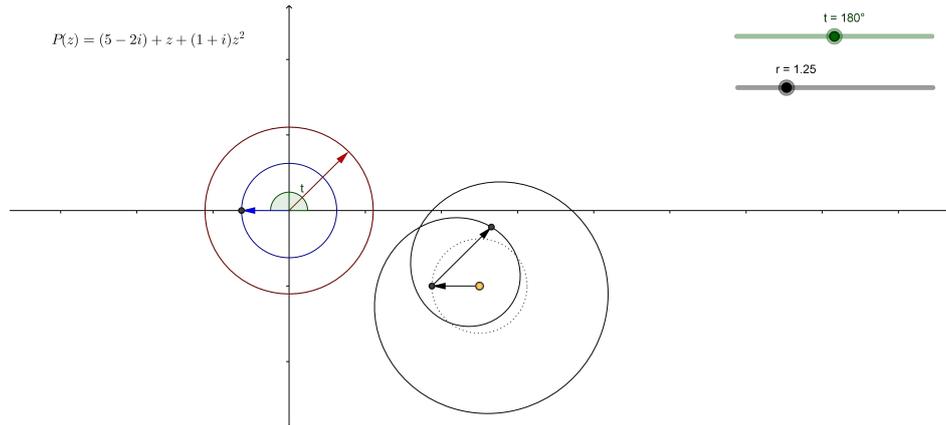


Figura 47: $t = \pi$.

Em amarelo, temos o termo independente $5 - 2i$. Em lilás (tracejado), temos a curva que representa a imagem de $|z| = r$ por $P_2(z) = (5 - 2i) + z$. Por fim, em preto, temos a imagem de $|z| = r$ por $P(z) = (5 - 2i) + z + (1 + i)z^2$.

Fazendo r variar de valores muito pequenos a muito grandes, podemos observar o mesmo comportamento descrito anteriormente:

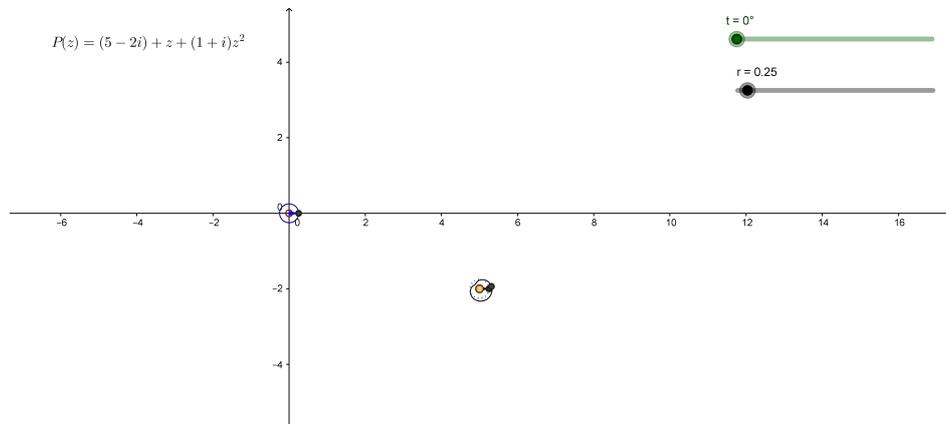


Figura 48: $r = 0,25$.

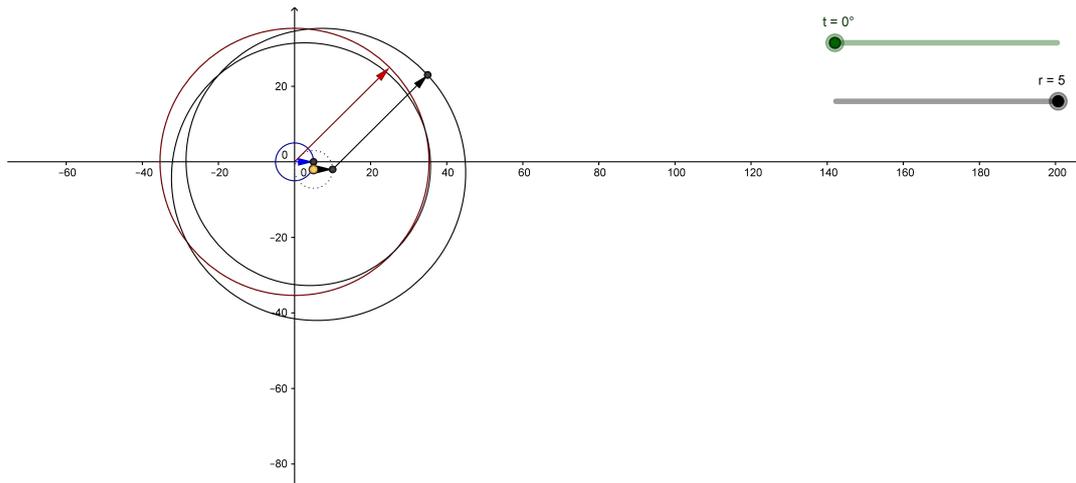


Figura 49: $r = 5$.

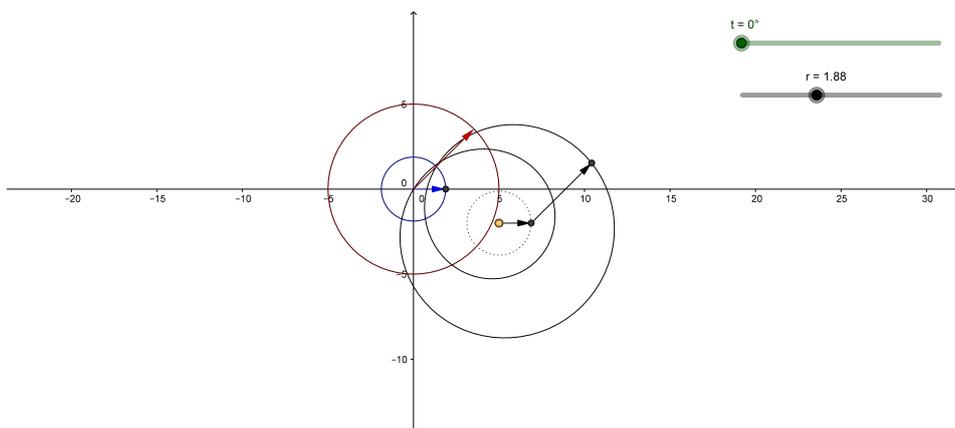


Figura 50: $r = 1,88$.

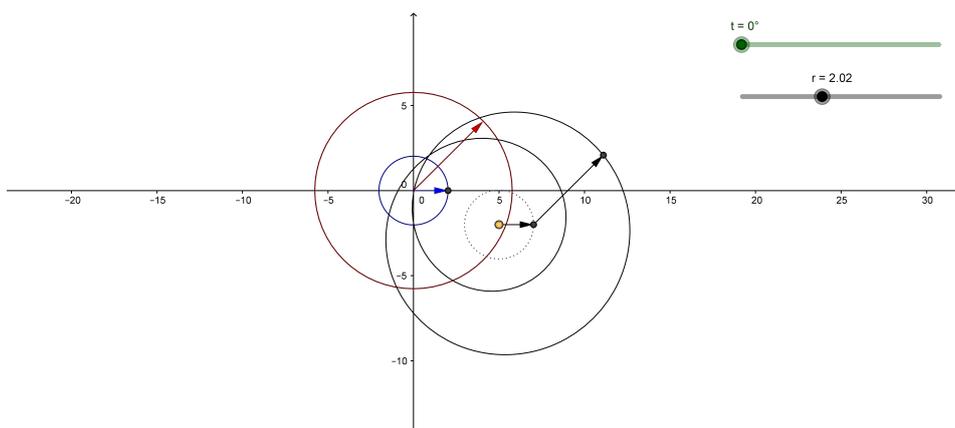


Figura 51: $r = 2,02$.

Descreveremos, a seguir, o procedimento para construir essas figuras no GeoGebra.

- Na caixa *Entrada*, digite r e crie um controle deslizante. Com o botão direito do mouse, clique no controle deslizante criado, selecione *Propriedades* e ajuste o intervalo para $\min = 0$ e $\max = 5$.
- Na caixa *Entrada*, digite angulo . Escolha a opção *Ângulo[<objeto>]*. Digite t no lugar de $\langle \text{objeto} \rangle$ e, em seguida, crie um novo controle deslizante. Ajuste o intervalo para $\min = 0$ e $\max = 6.28$.
- Na caixa *Entrada*, digite $O = (0,0)$.
- Na caixa *Entrada*, digite $a(t) = \text{curva}[r*\cos(t), r*\sin(t), t, 0, 6.28]$.
- Na caixa *Entrada*, digite $A = (r*\cos(t), r*\sin(t))$.
- Na caixa *Entrada*, digite vetor e escolha a opção *Vetor[<Ponto Inicial>, <Ponto Final>]*. Em *Ponto Inicial*, digite O e, em *Ponto Final*, A .
- Na caixa *Entrada*, digite $m(x,y) = \text{sqrt}(x^2+y^2)$.
- Na caixa *Entrada*, digite $g(x,y) = \text{atan2}(y,x)$.
- Na caixa *Entrada*, digite $b(t) = \text{curva}[m(1,1)*r^2*\cos(2*t+g(1,1)), m(1,1)*r^2*\sin(2*t+g(1,1)), t, 0, 6.28]$.
- Na caixa *Entrada*, digite $B = (m(1,1)*r^2*\cos(2*t+g(1,1)), m(1,1)*r^2*\sin(2*t+g(1,1)))$.
- Na caixa *Entrada*, digite $\text{Vetor}[O,B]$.
- Na caixa *Entrada*, digite $C = (5,-2)$.
- Na caixa *Entrada*, digite $c(t) = \text{curva}[5 + r*\cos(t), -2 + r*\sin(t), t, 0, 6.28]$.
- Na caixa *Entrada*, digite $D = (5,-2) + a(t)$.
- Na caixa *Entrada*, digite $\text{Vetor}[C,D]$.
- Na caixa *Entrada*, digite $E = (c(t) + b(t))$.
- Na caixa *Entrada*, digite $\text{Vetor}[D,E]$.
- Na caixa *Entrada*, digite $d(t) = \text{curva}[c(t) + b(t), t, 0, 6.28]$.

Ao professor interessado em utilizar-se desse exemplo para uma apresentação dinâmica, basta acessar o endereço o <https://www.geogebra.org/m/aqjMgNnm>.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dentro dos conteúdos relacionados à Matemática no Ensino Médio, a Álgebra exerce um papel de grande relevância. Dessa forma, a apresentação do Teorema Fundamental da Álgebra nessa modalidade de ensino pode acrescentar significativamente à aprendizagem, pois ela tem como uma de suas funções dar sentido às técnicas que os alunos aplicam na resolução de exercícios.

Nas orientações gerais contidas no Caderno do Professor de Matemática elaborado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo encontram-se os conteúdos a serem trabalhados na 3ª série do Ensino Médio. Percebemos que os mesmos não se afastam do que usualmente é ensinado nas escolas, bem como do que é encontrado nos livros didáticos. Ainda com relação a essas orientações, vemos que as atividades propostas são independentes e podem ser exploradas pelos professores com maior ou menor intensidade. Nesse sentido, entendemos que a proposta apresentada de abordar o Teorema Fundamental da Álgebra produza significados contundentes no aprendizado de números complexos, polinômios e equações algébricas, que são conteúdos desse Caderno.

Vale ressaltar que as abordagens que propusemos no presente trabalho foram escolhidas de maneira a fomentar a curiosidade e intuição dos alunos. E como vemos em [2]:

A intuição é, na verdade, uma faculdade mental mais poderosa que o próprio raciocínio. É através dela que ocorrem as grandes criações do homem, nas artes, na filosofia e nas ciências.

Nesse contexto, também é indispensável que se apresente uma demonstração rigorosa do Teorema Fundamental da Álgebra voltada para professores da Educação Básica, uma vez que muitos não tiveram o devido contato com este resultado nem

mesmo na graduação e, portanto, é razoável supor que o trabalho apresentado possa, de alguma forma, auxiliar no aprendizado de tais conteúdos, tanto para alunos quanto para professores.

A

O COMPORTAMENTO DE $|P(z)|$ PARA $|z|$ SUFICIENTEMENTE GRANDE

Seja $P(z)$ um polinômio não constante com coeficientes complexos. A ideia da proposição abaixo é mostrar que $|P(z)|$ fica tão grande quanto se queira, desde que se tome $|z|$ suficientemente grande.

Proposição A.1 (RESULTADO A). *Seja $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, um polinômio com coeficientes complexos. Então existe $R > 0$ tal que $|z| > R \Rightarrow |P(z)| > |P(0)|$.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \\ &\geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \end{aligned}$$

para $z \neq 0$.

Note que, para $|z| > 1$, temos $|z|^k > |z|$ e, portanto, $\frac{1}{|z|^k} < \frac{1}{|z|}$ para todo $k \geq 2$ natural. Assim,

$$|P(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|}{|z|} \right).$$

Considere

$$\delta_1 = \frac{2(|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| + 1)}{|a_n|} > 0.$$

Note que

$$|z| > \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} < \frac{1}{\delta_1} = \frac{|a_n|}{2(|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| + 1)}$$

e, portanto,

$$|z| > \delta_1 \Rightarrow \frac{|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|}{|z|} < \frac{|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| + 1}{|z|} < \frac{|a_n|}{2}.$$

Daí segue que

$$|z| > \delta_1 \Rightarrow |a_n| - \frac{|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|}{|z|} > |a_n| - \frac{|a_n|}{2} = \frac{|a_n|}{2}.$$

Logo,

$$|P(z)| \geq |z|^n \cdot \frac{|a_n|}{2}$$

para $|z| > \max\{1, \delta_1\}$.

Fazendo $\delta_2 = \sqrt[n]{\frac{2|a_0|}{|a_n|}}$, observamos que

$$|z| > \delta_2 \Rightarrow |z|^n \cdot \frac{|a_n|}{2} > a_0.$$

Tomando $R = \max\{1, \delta_1, \delta_2\}$, chegamos a

$$|z| > R \Rightarrow |P(z)| > |a_0| = |P(0)|. \quad \square$$

Observação A.2. Se tivéssemos tomado $\delta_2 = \sqrt[n]{\frac{2c}{|a_n|}}$, onde $c > 0$ é um número real fixado, concluiríamos que

$$|z| > R \Rightarrow |P(z)| > c.$$

Isso é abreviado pela notação

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty.$$

B

FUNÇÕES CONTÍNUAS E ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES BÁSICAS

Definição B.1. Sejam $f : X \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, uma função e $z_0 \in X$. Dizemos que f é *contínua em z_0* se, para todo $\epsilon > 0$, é possível encontrar $\delta > 0$ tal que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Dizemos que f é *contínua* se é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Exemplo B.2 (Funções constantes e a função identidade são contínuas). Seja $c \in \mathbb{C}$ e sejam $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $f(z) = c$ e $g(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $\epsilon > 0$. Tomando $\delta = \epsilon$, temos que $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| = |c - c| = 0 < \epsilon$ e $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |g(z) - g(z_0)| = |z - z_0| < \delta = \epsilon$. Portanto, f e g são contínuas.

Exemplo B.3. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(z) = \operatorname{Re}(z)$. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $\epsilon > 0$. Tomando $\delta = \epsilon$, temos que $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| = |\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)| = |\operatorname{Re}(z - z_0)| \leq |z - z_0| < \delta = \epsilon$. Portanto, f é contínua.

Lema B.4. Sejam $f : X \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função e $z_0 \in X$.

- (1) Se f é contínua em z_0 , então existem $\delta, M > 0$ tais que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| < M$.
- (2) Se f é contínua em z_0 e $f(z_0) \neq 0$, então existem $\delta, M > 0$ tais que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M$.

Demonstração.

- (1) Note que $|f(z)| = |f(z) - f(z_0) + f(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)|$. Tome $\epsilon = 1$. Como f é contínua em z_0 , existe $\delta > 0$ tal que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < 1$. Assim, para todo $z \in X$ tal que $|z - z_0| < \delta$, temos que $|f(z)| < 1 + |f(z_0)|$. Tome $M = 1 + |f(z_0)|$.

(2) Note que $|f(z)| = |f(z_0) + f(z) - f(z_0)| \geq |f(z_0)| - |f(z) - f(z_0)|$. Tome $\epsilon = |f(z_0)|/2$ e observe que $\epsilon > 0$. Como f é contínua em z_0 , existe $\delta > 0$ tal que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < |f(z_0)|/2$. Assim, para todo $z \in X$ tal que $|z - z_0| < \delta$, temos que $|f(z)| > |f(z_0)| - |f(z_0)|/2 = |f(z_0)|/2$. Tome $M = |f(z_0)|/2$. \square

Proposição B.5. *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funções contínuas em $z_0 \in X$ e seja $c \in \mathbb{C}$. São também contínuas em z_0 as seguintes funções:*

- (a) $f + g$
- (b) cf
- (c) fg
- (d) $1/g$, se $g(z_0) \neq 0$

Demonstração.

(a) Seja $\epsilon > 0$. Como f e g são contínuas em z_0 , existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon/2$ e $|z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(z) - g(z_0)| < \epsilon/2$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Note que $\delta > 0$. Assim, se $z \in X$ e $|z - z_0| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |(f+g)(z) - (f+g)(z_0)| &= |f(z) + g(z) - (f(z_0) + g(z_0))| \\ &= |f(z) - f(z_0) + g(z) - g(z_0)| \\ &\leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $f + g$ é contínua em z_0 .

(b) Se $c = 0$, então cf é constante igual a 0 e, portanto, contínua. Assuma $c \neq 0$ e considere $\epsilon > 0$. Como f é contínua em z_0 , existe $\delta > 0$ tal que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon/|c|$. Assim, se $z \in X$ e $|z - z_0| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |(cf)(z) - (cf)(z_0)| &= |cf(z) - cf(z_0)| \\ &= |c(f(z) - f(z_0))| \\ &= |c||f(z) - f(z_0)| \\ &< |c| \cdot \epsilon/|c| \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, cf é contínua em z_0 .

(c) Temos que

$$\begin{aligned} |(fg)(z) - (fg)(z_0)| &= |f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| \\ &= |f(z)g(z) - f(z)g(z_0) + f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)| \\ &\leq |f(z)g(z) - f(z)g(z_0)| + |f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)| \\ &\leq |f(z)||g(z) - g(z_0)| + |g(z_0)||f(z) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Como f é contínua em z_0 , segue do item (1) do Lema B.4 que existem $\delta_1, M > 0$ tais que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z)| < M$. Logo, se $z \in X$ e $|z - z_0| < \delta_1$, então

$$|f(z)||g(z) - g(z_0)| + |g(z_0)||f(z) - f(z_0)| < M|g(z) - g(z_0)| + |g(z_0)||f(z) - f(z_0)|.$$

Seja $\epsilon > 0$. Como f é contínua em z_0 , existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon/(2|g(z_0)|)$ se $g(z_0) \neq 0$ ou $|z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ se $g(z_0) = 0$. Como g é contínua em z_0 , existe $\delta_3 > 0$ tal que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta_3 \Rightarrow |g(z) - g(z_0)| < \epsilon/(2M)$. Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Caso $g(z_0) \neq 0$, temos

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |(fg)(z) - (fg)(z_0)| < M \frac{\epsilon}{2M} + |g(z_0)| \frac{\epsilon}{2|g(z_0)|} = \epsilon.$$

Caso $g(z_0) = 0$, temos

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |(fg)(z) - (fg)(z_0)| < M \frac{\epsilon}{2M} + 0 \cdot \epsilon = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Portanto, fg é contínua em z_0 .

(d) Temos que

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)} \right| = \left| \frac{g(z_0) - g(z)}{g(z)g(z_0)} \right| = \frac{|g(z) - g(z_0)|}{|g(z)||g(z_0)|}.$$

Como g é contínua em z_0 e $g(z_0) \neq 0$, segue do item (2) do Lema B.4 que existem $\delta_1, M > 0$ tais que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(z)| > M$. Logo, se $z \in X$ e $|z - z_0| < \delta_1$, então

$$\frac{|g(z) - g(z_0)|}{|g(z)||g(z_0)|} < \frac{|g(z) - g(z_0)|}{M|g(z_0)|}$$

e, portanto,

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)} \right| < \frac{|g(z) - g(z_0)|}{M|g(z_0)|}.$$

Seja $\epsilon > 0$. Como g é contínua em z_0 , existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(z) - g(z_0)| < \epsilon M |g(z_0)|$. Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Temos que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)} \right| < \frac{|g(z) - g(z_0)|}{M|g(z_0)|} < \frac{\epsilon M |g(z_0)|}{M|g(z_0)|} = \epsilon.$$

Portanto, $1/g$ é contínua em z_0 . □

Exemplo B.6 (Funções polinomiais são contínuas). Seja $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Como a função identidade é contínua, do item (c) da Proposição B.5 segue que a função $z \mapsto z^k$ é contínua para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Do item (b) da Proposição B.5 segue que a função $z \mapsto a_k z^k$ é contínua para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Por fim, a função $z \mapsto a_0$ é constante e, portanto, contínua. Do item (a) da Proposição B.5 segue que p é contínua.

Exemplo B.7. Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, então $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = |f(z)|$ também o é. De fato, seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $\epsilon > 0$. Como f é contínua em z_0 , existe $\delta > 0$ tal que, para todo $z \in X$, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Logo, se $z \in X$ e $|z - z_0| < \delta$, então

$$|g(z) - g(z_0)| = ||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Portanto, g é contínua em z_0 .

Conforme dissemos no Capítulo 2 deste trabalho, o conjunto dos números reais, munido das operações usuais de adição e multiplicação, é um corpo. Além disso, nele está definida uma relação de ordem compatível com suas operações, o que o torna um *corpo ordenado*. O mesmo ocorre com o conjunto dos números racionais. O que diferencia os reais dos racionais é o fato de \mathbb{R} ser um *corpo ordenado completo*, isto é, de ter a seguinte propriedade: *todo subconjunto não vazio de números reais que é limitado superiormente tem supremo* (ou, equivalentemente, *todo subconjunto não vazio de números reais que é limitado inferiormente tem ínfimo*). Recordaremos a seguir tais definições:

Definição B.8. Seja X um conjunto não vazio de números reais.

- Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é *cota inferior* (respectivamente, *cota superior*) de X se $c \leq x$ (respectivamente, $c \geq x$) para todo $x \in X$.
- Dizemos que X é *limitado inferiormente* (respectivamente, *limitado superiormente*) se X possui uma cota inferior (respectivamente, cota superior).
- Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o *ínfimo* de X (e escrevemos $a = \inf X$) se
 - a é cota inferior de X e
 - nenhum número real maior que a é cota inferior de X .
- Dizemos que $b \in \mathbb{R}$ é o *supremo* de X (e escrevemos $b = \sup X$) se
 - b é cota superior de X e

– nenhum número real menor que b é cota superior de X .

Teorema B.9. *Sejam I_1 e I_2 intervalos não-vazios, fechados e limitados. Se $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é limitada (ou seja, existe um número real $c > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq c$ para todo $(x, y) \in I_1 \times I_2$).*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que f não seja limitada. Particione $I_1 \times I_2$ como na figura abaixo.

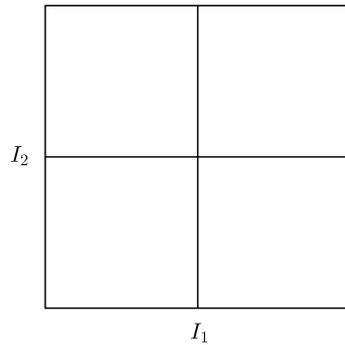


Figura 52: Particionando $I_1 \times I_2$.

Como f não é limitada em $I_1 \times I_2$, ela também não o será em algum dos quadrantes acima. Escolha um no qual isso ocorra. Repita o procedimento para esse quadrante, dividindo-o em outros quatro quadrantes ainda menores.

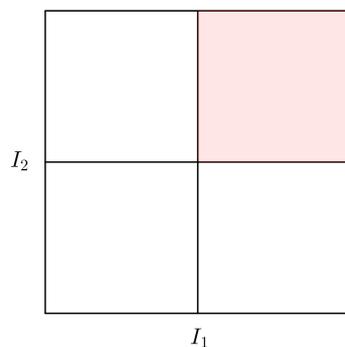


Figura 53: Selecionando o primeiro quadrante.

Existirá algum desses novos quadrantes no qual f não é limitada. Escolha um no qual isso ocorra. Continuando o processo, obteremos uma sequência $J_1, J_2, \dots, J_n, \dots$

de quadradinhos “encaixados” nos quais f não é limitada. Escreveremos $J_k = [a_1^k, b_1^k] \times [a_2^k, b_2^k]$.

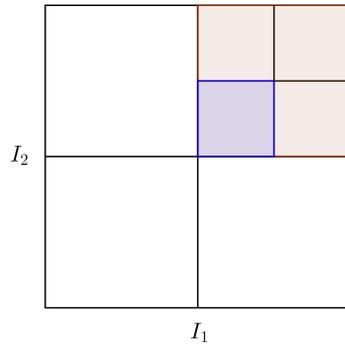


Figura 54: Selecionando o segundo quadradinho.

Temos que $\sup\{a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n, \dots\} = \inf\{b_1^1, b_1^2, \dots, b_1^n, \dots\}$. Seja t_1 este valor. Analogamente, $\sup\{a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^n, \dots\} = \inf\{b_2^1, b_2^2, \dots, b_2^n, \dots\}$. Seja t_2 este valor.

Considere $z_0 = (t_1, t_2)$. Temos que $z_0 \in I_1 \times I_2$. Como f é contínua em z_0 , segue do item (1) do Lema B.4 que existem $\delta, M > 0$ tais que, para todo $z \in I_1 \times I_2$, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| < M$. Mas o conjunto $\{z \in I_1 \times I_2 : |z - z_0| < \delta\}$ contém o quadradinho J_n para algum n suficientemente grande e isso contradiz o fato de f não ser limitada em J_n , o que completa a demonstração. \square

Teorema B.10. *Sejam I_1 e I_2 intervalos não-vazios, fechados e limitados. Se $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe $(m_1, m_2) \in I_1 \times I_2$ tal que $f(m_1, m_2) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in I_1 \times I_2$ (isto é, f tem um ponto de mínimo em $I_1 \times I_2$).*

Demonstração. De acordo com o Teorema B.9, $X = \{f(x, y) : (x, y) \in I_1 \times I_2\}$ é um subconjunto não-vazio de \mathbb{R} limitado inferiormente (e superiormente). Portanto, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m = \inf X$. Suponhamos, por absurdo, que não exista $(m_1, m_2) \in I_1 \times I_2$ tal que $f(m_1, m_2) = m$. Assim, $g : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = f(x, y) - m$ é tal que $g(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in I_1 \times I_2$ e, portanto, $1/g$ é contínua em $I_1 \times I_2$. Aplicando o Teorema B.9 para $1/g$, concluímos que $1/g$ é limitada, ou seja, que existe um número real $c > 0$ tal que $|1/g(x, y)| \leq c$ para todo $(x, y) \in I_1 \times I_2$. Logo, $g(x, y) \geq 1/c$ e, portanto, $f(x, y) \geq m + 1/c$ para todo $(x, y) \in I_1 \times I_2$. Contudo, isso contradiz o fato de que $m = \inf X$. Logo, existe $(m_1, m_2) \in I_1 \times I_2$ tal que $f(m_1, m_2) = m$. Consequentemente, $f(m_1, m_2) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in I_1 \times I_2$. \square

Teorema B.11 (RESULTADO B). *Seja $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, um polinômio com coeficientes complexos e seja $R > 0$ tal que $|z| > R \Rightarrow |P(z)| > |P(0)|$. Então existe $z_0 \in D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ tal que $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ para todo $z \in D(0, R)$.*

Demonstração. Sejam $I_1 = [-R, R]$ e $I_2 = [-R, R]$.

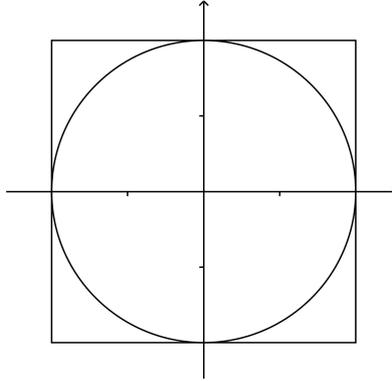


Figura 55: $I_1 \times I_2$.

Como $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(z) = |P(z)|$ é contínua, do Teorema B.10 segue que existe $(m_1, m_2) \in I_1 \times I_2$ tal que $f(m_1, m_2) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in I_1 \times I_2$. Da escolha de R decorre que $(m_1, m_2) \in D(0, R)$. Seja $z_0 = (m_1, m_2)$. Portanto, $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ para todo $z \in D(0, R)$. \square

BIBLIOGRAFIA

- [1] ÁVILA, G. **Várias Faces da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- [2] ÁVILA, G. Objetivos do Ensino da Matemática. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 27, p. 1-9, 1995.
- [3] BORTOLOSSI, H. J. **Cálculo Diferencial a Várias Variáveis: uma introdução à Teoria de Otimização**. 2. ed. São Paulo: Loyola, 2002.
- [4] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- [5] BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2006.
- [6] DANTE, L. R. **Matemática: Contexto & Aplicações, 3**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.
- [7] FERNANDEZ, C. S. **Estudo de algumas funções complexas de uma variável complexa: aspectos algébricos e geométricos**. 1º Colóquio de Matemática da Região Sudeste, Rio de Janeiro, 2011.
- [8] FERNANDEZ, C. S.; SANTOS, R. A. Uma nota sobre o Teorema Fundamental da Álgebra. **Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 45, p. 51-53, 2008.
- [9] FILHO, B. B.; SILVA, C. X. **Matemática: Aula por Aula, 3**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2003.
- [10] FINE, B., ROSENBERGER, G. **The Fundamental Theorem of Algebra**. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [11] IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar, 6**. 5. ed. São Paulo: Atual, 2005.
- [12] IEZZI, G. et al. **Matemática: Ciência e Aplicações, 3**. 2. ed. São Paulo: Atual,

2004.

- [13] LIMA, E. L. Conceituação, manipulação e aplicações: os três componentes do ensino da Matemática. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 41, p. 1-6, 1999.
- [14] LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**, 3. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [15] MILIES, F. C. P. A emergência dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 24, p. 1-8, 2009.
- [16] MILIES, F. C. P. **Breve História da Álgebra Abstrata**. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador, 2004.
- [17] OLIVEIRA, O. R. B. **Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)**. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/oliveira/TFACOLEGIAL5.pdf>>. Acesso em: 16 novembro 2016.
- [18] OLIVEIRA, O. R. B. **Argand e o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)**. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/oliveira/TFA-ARGAND.pdf>>. Acesso em: 16 novembro 2016.
- [19] PAIVA, M. **Matemática**, 3. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.
- [20] SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Caderno do Professor, vol. 1, 3ª série do Ensino Médio**. São Paulo: SE, 2014.
- [21] SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias**. 1 ed. São Paulo: SE, 2011.
- [22] EBBINGHAUS, H.-D. et al. **Numbers**. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [23] SKOVSMOSE, O. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica**. Tradução: Orlando de Andrade Figueiredo e Jonei Cerqueira Barbosa. 2. ed. São Paulo: Papiros, 2010.
- [24] SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. **Matemática: Ensino Médio**, 3. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.
- [25] SOUZA, J. **Novo Olhar: Matemática**, 3. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.
- [26] STILLWELL, J. **Mathematics and Its History**. 3rd. ed. New York: Springer-Verlag, 2010.
- [27] SUZUKI, J. Lagrange's Proof of the Fundamental Theorem of Algebra. **The**

American Mathematical Monthly, v. 113, n. 8, p. 705-714, 2006.