



THIAGO MIRANDA DA SILVA

UM PANORAMA SOBRE O π VOLTADO PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Santo André, 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

THIAGO MIRANDA DA SILVA

UM PANORAMA SOBRE O π VOLTADO PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Boero

Dissertação de mestrado apresentada ao
Centro de Matemática, Computação e Cognição
para obtenção do título de Mestre pelo Programa
de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional (PROFMAT)

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO THIAGO MIRANDA DA SILVA
E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. ANA CAROLINA BOERO.

SANTO ANDRÉ, 2017

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silva, Thiago Miranda da

Um panorama sobre o π voltado para a Educação Básica / Thiago
Miranda da Silva. — 2017.

139 fls. : il.

Orientadora: Ana Carolina Boero

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André,
2017.

1. π (pi). 2. Irracionalidade. 3. Conjuntos numéricos. 4.
Circunferência. 5. Círculo. I. Boero, Ana Carolina. II. Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2017. III.
Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 10 de maio de 2017.

Assinatura do autor: Thiago Miranda do Silva

Assinatura do orientador: Paulo



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Thiago Miranda da Silva, realizada em 31 de março de 2017:

Prof.(a) Dr.(a) **Ana Carolina Boero** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Sinue Dayan Barbero Lodovici** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Gleiciane da Silva Aragão** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Cândido Faleiros** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Robson da Silva** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Suplente

Dedico este trabalho às manhãs nas quais percebi que ainda tinha vida em meu corpo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo presente de nossa existência.

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela iniciativa de melhorar a qualidade dos professores de matemática por todo o Brasil.

Agradeço à Universidade Federal do ABC (UFABC) por ter sido um polo de difusão de conhecimento e formação para todos os alunos que participaram do PROFMAT.

Agradeço aos professores que tive no PROFMAT: André Ricardo, Jerônimo Cordoni, Maurício Firmino, Rafael Grisi e Daniel Miranda, pelas aulas ministradas. Em especial, agradeço à professora (e minha orientadora) Ana Carolina Boero por toda a atenção, solicitude e paciência que teve conosco em suas aulas e, particularmente, por seu papel como orientadora: tenho a absoluta certeza de que este trabalho estaria muito aquém do desejável se não fossem as suas valiosas intervenções, sugestões e ensinamentos sobre matemática e sobre o método científico. Muito obrigado, professora!

Um muito obrigado aos colaboradores da UFABC, em especial ao Thiago Lima, que sempre foi tão solícito e atencioso em relação às nossas demandas como alunos do PROFMAT.

Agradeço aos meus pais e ao meu irmão, por toda a vida que passamos juntos e por todos os sacrifícios que fizeram para que pudéssemos ser pessoas de bem. Muito obrigado!

Agradeço a todos aqueles que, indiretamente, me ajudaram a chegar onde estou. Sempre haverá uma dose de injustiça na hora dos agradecimentos, então quero pensar fortemente em cada pessoa que cruzou o meu caminho, deixando algo que ajudou a moldar o meu eu.

Agradeço à minha sogra e ao meu cunhado por terem me acolhido na casa deles enquanto eu frequentava as aulas do PROFMAT: esse gesto de generosidade e confiança foi fundamental para que eu pudesse estudar com muito mais conforto e economia de recursos como tempo e dinheiro. Muito obrigado, mesmo!!

Finalmente, agradeço (e ao mesmo tempo peço desculpas) à minha esposa Patricia. Agradeço pela paciência, pelo suporte, pelo incentivo nos (vários) momentos em que pensei em abrir mão de todo o mestrado. Peço desculpas pelos momentos em que não podíamos sair, assistir filmes e desenhos ou, simplesmente, ficar mais tempo juntos: você foi muito paciente durante todo esse processo! Eu peço a Deus que me dê forças para poder retribuir tudo que fez (e faz) por mim, e que eu possa utilizar os ganhos de todo esse esforço (que foi nosso) para ajudá-la a construir o nosso lar e a nossa família. Quaisquer palavras seriam insuficientes, mas espero que este muito obrigado, por hora, consiga expressar toda a gratidão que tenho por você. Te amo, meu amor!

“Mestre não é quem sempre ensina, mas quem de repente aprende.”

(João Guimarães Rosa)

RESUMO

Este trabalho acadêmico cobrirá alguns dos aspectos mais relevantes sobre o número π , desde o contexto histórico no qual está inserido até a demonstração de uma de suas características marcantes: a sua irracionalidade. O trabalho também terá como escopo aspectos teóricos da formação de professores, como a construção dos conjuntos numéricos, a obtenção de alguns métodos numéricos para a determinação de aproximações do valor numérico de π e, por último, sobre a aplicação do número π nas salas de aula da Educação Básica.

Palavras-chave: π (pi), irracionalidade, conjuntos numéricos.

ABSTRACT

This academic work will cover some of the most relevant aspects of the π number, from the historical context in which it is inserted to the demonstration of one of its defining characteristics: its irrationality. The work will also have as scope theoretical aspects of teacher training, such as the construction of numerical sets, the obtainment of some numerical methods to determine approximations of the numerical value of π and, finally, on the application of the number π in the Secondary School classrooms.

Keywords: π (pi), irrationality, number sets.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO	1
1 DEFININDO O NÚMERO π	3
2 CONTEXTO HISTÓRICO DO NÚMERO π	11
2.1 O π : antes da Era Comum	12
2.2 O π : depois da Era Comum e o foco nos métodos geométricos	18
2.3 O π : depois da Era Comum e o desenvolvimento de métodos não geométricos	21
3 CONJUNTOS NUMÉRICOS	35
3.1 Números naturais	36
3.2 Números inteiros	43
3.3 Números racionais	53
3.4 Números reais na Educação Básica	60
3.5 Números irracionais e reais	65
4 A IRRACIONALIDADE DO NÚMERO π : CONSIDERAÇÕES INICIAIS	71
4.1 Redução ao absurdo: o método e um exemplo	72
4.2 Alguns resultados preliminares	73
4.3 Definindo novas funções auxiliares	78
5 A IRRACIONALIDADE DO NÚMERO π : DEMONSTRAÇÃO	81
5.1 Incluindo o π no processo	81
5.2 A demonstração	84
5.3 Comentários sobre outras demonstrações da irracionalidade de π	86
6 ALGUNS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA APROXIMAÇÕES DO NÚMERO π	89
6.1 A ideia do método da exaustão de Arquimedes	89
6.2 A ideia do método da duplicação de lados de Liu Hui	97
6.3 Método dos polígonos isoperimétricos	103
6.4 Série de Gregory/Leibniz	108

7	O USO DO π NA EDUCAÇÃO BÁSICA	117
7.1	Medindo seções circulares e encontrando aproximações de π	118
7.2	Determinando valores de π utilizando o GeoGebra	120
7.3	A área do círculo: a ideia e as relações	122
7.4	Lúnulas de Hipócrates	125
7.5	Outra área que não depende de π	127
7.6	Um exemplo de quadrilátero curvilíneo	130
7.7	Fatos diversos sobre o número π	133
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	135
	Bibliografia	137

INTRODUÇÃO

Na Educação Básica, os professores e alunos têm contato com o número π e, seja durante os estudos de conjuntos numéricos, da Geometria (Plana e Espacial) ou da Trigonometria, uma característica importante sobre o número π é enunciada sem prova: o número π é um número irracional.

Durante as aulas, porém, um questionamento costuma surgir: “Se o número π é irracional, como ele pode ser descrito como a razão entre dois valores (no caso, o comprimento da circunferência e o seu respectivo diâmetro)?”.

Analisando o questionamento dos alunos, percebe-se que há um erro conceitual na pergunta, levando em conta que os mesmos parecem não lembrar da definição correta de número racional (e, por consequência, da definição de número irracional); além disso, os livros e materiais didáticos deste nível de ensino são obrigados a omitir a demonstração da irracionalidade do π : será visto que isso se faz necessário e compreensível nesta fase do curso, tendo em vista a série de técnicas matemáticas envolvidas para a sua prova — e que ainda não estão à disposição dos alunos.

Motivado por essa e outras questões feitas por alunos durante as aulas e pela análise de algumas obras didáticas utilizadas nas escolas — que tratam o número π de forma extremamente superficial, bem como a própria construção dos números — este trabalho fará uma revisão bibliográfica sobre o número π (e, ao mesmo tempo, sobre os principais aspectos das circunferências), com o intuito de cobrir os principais aspectos de seu estudo e fornecer subsídios teóricos para que professores tenham mais propriedade e alternativas na preparação de suas aulas.

No momento inicial, será definido o número π e explorado o seu aspecto histórico, o que poderá render planos de aula para professores que tenham interesse em utilizar a História da Matemática em suas aulas. Posteriormente, desejando alicerçar os fundamentos teóricos do trabalho, serão trabalhados os conjuntos numéricos — em especial a construção dos números (naturais, inteiros, racionais e reais), trazendo um sentido maior para o conceito de número irracional. Vale ressaltar que não é escopo do trabalho esmiuçar em detalhes as origens e definições mais profundas desses conjuntos,

e sim trabalhar os aspectos panorâmicos que permitam dar maior entendimento para os demais tópicos deste estudo. Para complementar os germes de ideias contempladas nesta parte, sugestões de bibliografias voltadas para o tema serão dadas ao longo do texto.

Após o panorama sobre os conjuntos numéricos, serão explorados os aspectos teóricos para uma das provas da irracionalidade do número π : neste ponto, tão importante quanto a demonstração em si é o entendimento da motivação inicial para o seu desenvolvimento — e serão trabalhados os conceitos teóricos envolvidos por detrás de tal motivação. Uma outra característica que é inerente ao número π , que é a sua transcendência, não será explorada neste texto, visto que o foco dele é o trabalho com o π para a Educação Básica (neste nível de ensino não se faz distinção entre números algébricos e números transcendentais).

Para a manipulação do número π , como na resolução de um exercício por exemplo, em alguns momentos são utilizadas aproximações de seu valor numérico: desta forma, é importante analisar alguns métodos numéricos para a obtenção de valores aproximados de π . O estudo destes métodos pode render momentos interessantes de discussão (e pesquisa) dentro (e fora) da sala de aula, e serão acompanhados, na medida do possível, de sugestões de encaminhamentos para que professores possam vir a aplicá-los em sala de aula.

Finalmente, como último ponto de interesse, serão abordados alguns aspectos teóricos e práticos sobre o π e suas ocorrências na Educação Básica. Este capítulo abordará duas estratégias práticas para determinar aproximações de π : um método simples e lúdico utilizando materiais de simples obtenção e, também, um método que utilizará o *software GeoGebra*, *software* este que é de fácil acesso para professores (e também alunos). Também será feita uma revisão bibliográfica e comentários acerca das relações de comprimento e área de circunferências e círculos trazendo ideias para que os professores consigam explicar para os alunos os processos de obtenção de cada uma delas. O capítulo também abordará algumas situações problema envolvendo áreas de regiões circulares: vale ressaltar que são regiões um pouco mais complexas que aquelas trabalhadas em sala, justamente visando aumentar o nível de exigência dos alunos. Findando o capítulo, seguirão algumas informações curiosas sobre o π e as suas aparições em situações diversas.

Fica aqui externado o desejo de que este trabalho possa vir a preencher lacunas, sanar algumas dúvidas e, também, que possa suscitar algumas outras: que as inquietações sirvam de gatilho para novas pesquisas e estudos sobre o assunto.

DEFININDO O NÚMERO π

Antes da realização de qualquer tipo de análise sobre o π , é importante saber defini-lo. Provavelmente, a primeira fonte de pesquisas para encontrar informações sobre o número π é o estudo da *circunferência*¹ (e de suas características tais como comprimento e diâmetro) e do *círculo*² (e do conceito de área do círculo).

Uma circunferência sempre está bem definida desde que se conheçam dois de seus elementos: o centro (um ponto) e a medida de seu raio (estritamente positiva). Para cada par do tipo centro e raio, pode ser traçada uma única circunferência (um dos Postulados de Euclides, que serão vistos posteriormente). Um conceito importante que se relaciona com a circunferência é o conceito de *comprimento* e, para o seu maior entendimento, serão verificadas agora algumas definições e resultados.

Definição 1.0.1. Dois polígonos P_1 e P_2 com o mesmo número de lados são ditos *semelhantes*, denotando-se tal condição por $P_1 \sim P_2$, quando seus ângulos internos forem respectivamente congruentes e os lados adjacentes aos ângulos congruentes forem respectivamente proporcionais.

Lema 1.0.1 (Semelhança entre dois polígonos regulares de n lados). *Dois polígonos regulares de n lados são sempre semelhantes.*

Demonstração. Sejam P_1 e P_2 polígonos regulares de n lados. De acordo com a Figura 1, no polígono P_1 , sejam traçadas $n - 3$ diagonais com vértice comum em A_1 :

1 Uma circunferência é um conjunto de pontos θ tal que $\theta = \{X : X \in \alpha \text{ e } d(X, O) = R\}$, onde α é um plano, $O \in \alpha$ é um ponto denominado *centro* e $R > 0$ é uma distância denominada *raio*.

2 Um círculo é um conjunto de pontos γ tal que $\gamma = \{X : X \in \alpha \text{ e } d(X, O) \leq R\}$, onde α é um plano, $O \in \alpha$ é um ponto denominado *centro* e $R > 0$ é uma distância denominada *raio*.

$\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}, \dots, \overline{A_1A_{n-1}}$. Desta forma, P_1 ficará dividido em $n - 2$ triângulos. Seja feito o mesmo processo no polígono P_2 .

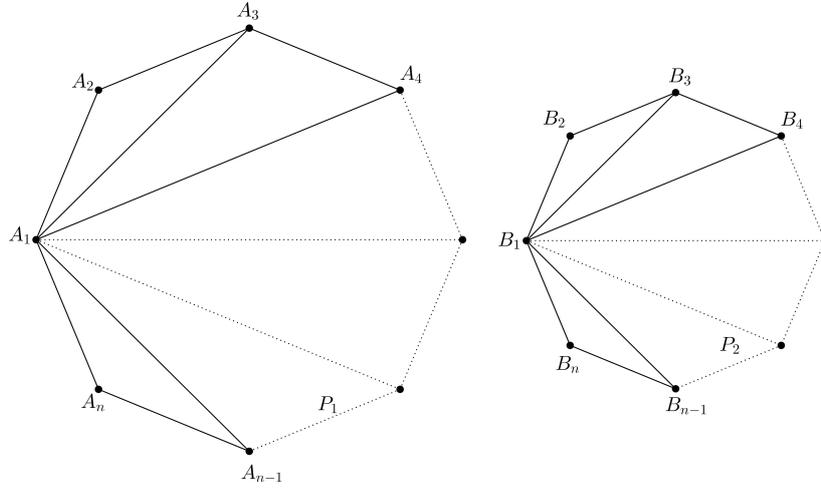


Figura 1: Polígonos regulares de n lados: sempre semelhantes dois a dois.³

Em P_1 , por hipótese, $\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3}$, isto é, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_2A_3}$ são segmentos congruentes (da mesma forma, em P_2 , tem-se que $\overline{B_1B_2} \equiv \overline{B_2B_3}$); por serem ambos polígonos regulares de n lados, $A_1\widehat{A_2}A_3 \equiv B_1\widehat{B_2}B_3$. Portanto, pelo critério LAL de semelhança de triângulos, tem-se que $A_1A_2A_3 \sim B_1B_2B_3$, donde

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = k > 0. \quad (1.1)$$

Tomando os triângulos $A_1A_3A_4$ e $B_1B_3B_4$, também verifica-se que ambos são semelhantes pelo critério LAL:

- por P_1 e P_2 serem, ambos, polígonos regulares de n lados e pela Equação 1.1:

$$\frac{A_1A_3}{B_1B_3} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = k > 0; \quad (1.2)$$

- como $A_1A_2A_3 \sim B_1B_2B_3$ e ambos são triângulos isósceles, vem que

$$m(A_2\widehat{A_1}A_3) = m(A_2\widehat{A_3}A_1) = m(B_2\widehat{B_1}B_3) = m(B_2\widehat{B_3}B_1). \quad (1.3)$$

Além disso,

$$m(A_2\widehat{A_3}A_4) = m(B_2\widehat{B_3}B_4). \quad (1.4)$$

³ Fonte: próprio autor.

Logo,

$$\begin{aligned} m(A_1\widehat{A_3A_4}) &= m(A_2\widehat{A_3A_4}) - m(A_2\widehat{A_3A_1}) \\ &= m(B_2\widehat{B_3B_4}) - m(B_2\widehat{B_3B_1}) = m(B_1\widehat{B_3B_4}), \end{aligned} \quad (1.5)$$

mostrando que $A_1\widehat{A_3A_4} \equiv B_1\widehat{B_3B_4}$.

Finalmente, repetindo os argumentos anteriores para os demais triângulos determinados pelas diagonais, vem que

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots = \frac{A_nA_1}{B_nB_1} = k > 0. \quad (1.6)$$

□

Feitas estas considerações, será demonstrado agora um importante resultado para este trabalho: a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro (dobro do raio) sempre é constante, e esta constante será denominada π . A demonstração será baseada naquela feita em [24]. Antes disso, é interessante trazer à tona, por meio da Definição 1.0.2, o significado do termo comprimento de uma circunferência.

Definição 1.0.2. Dada uma circunferência qualquer, existe um único número real que é maior que o perímetro de qualquer polígono regular a ela inscrito e menor que o perímetro de qualquer polígono regular a ela circunscrito. Este número é denominado o *comprimento* da circunferência em questão.⁴

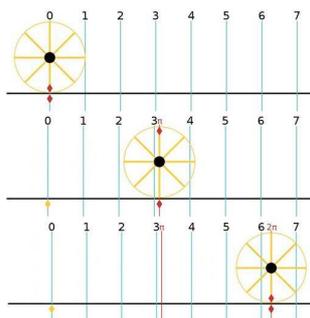


Figura 2: Um rolamento completo de uma circunferência de raio 1, perfazendo o comprimento (retificação) de 2π .⁵

⁴ Uma dedução desse resultado pode ser encontrada na Seção 5.3 de [25].

O comprimento de uma circunferência pode ser interpretado como a medida do segmento formado por um rolamento completo da circunferência — fixado um ponto na mesma — sem que haja escorregamento durante o percurso (Figura 2). A medida deste segmento é chamada de *retificação da circunferência*.

Teorema 1.0.2. *Os comprimentos de duas circunferências são proporcionais a seus diâmetros, isto é,*

$$\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}.$$

Demonstração. Seja θ_1 a circunferência de centro O_1 , raio R_1 e comprimento C_1 ; além disso, sejam p_1 e P_1 polígonos regulares de n lados (de medidas l_1 e L_1) inscrito e circunscrito, respectivamente, à θ_1 . De maneira análoga, será considerada a circunferência θ_2 (centro O_2 , raio R_2 e comprimento C_2) e os polígonos regulares de n lados p_2 (inscrito e cuja medida dos lados vale l_2) e P_2 (circunscrito e cuja a medida dos lados vale L_2) — a Figura 3 mostra a situação.

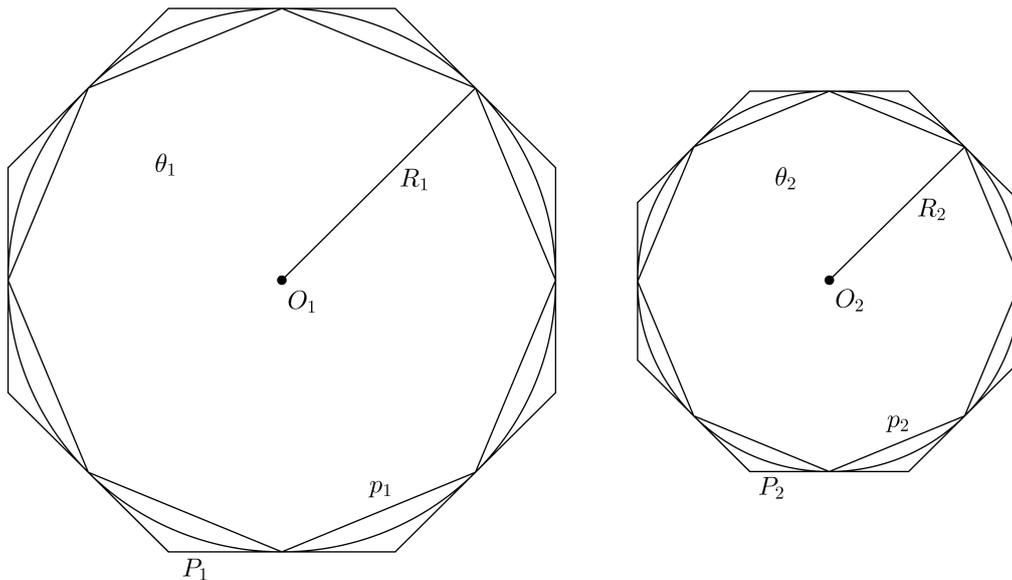


Figura 3: Representação das circunferências e dos seus respectivos polígonos inscritos e circunscritos.⁶

Seja

$$x = \frac{R_2}{R_1} \cdot C_1. \quad (1.7)$$

⁵ Fonte: disponível em: <<https://goo.gl/Iqyy6i>> Acesso em: jan. 2017.

⁶ Fonte: próprio autor.

Como os polígonos p_1 e p_2 são semelhantes e estão inscritos em θ_1 e θ_2 , respectivamente, vem que

$$\frac{n \cdot l_1}{n \cdot l_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{C_1}{x}. \quad (1.8)$$

Da Equação 1.8 é possível escrever

$$x = \frac{C_1 \cdot n \cdot l_2}{n \cdot l_1}. \quad (1.9)$$

Sabendo que p_1 está inscrito em θ_1 , necessariamente o perímetro de p_1 é inferior ao comprimento de θ_1 . Logo,

$$\frac{C_1}{n \cdot l_1} > 1. \quad (1.10)$$

Como consequência,

$$\frac{C_1 \cdot n \cdot l_2}{n \cdot l_1} > n \cdot l_2 \quad (1.11)$$

e, portanto,

$$x > n \cdot l_2. \quad (1.12)$$

Desta forma, o valor de x é sempre superior ao perímetro de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência θ_2 .

Agora, efetuando um processo análogo ao anterior, serão considerados os polígonos circunscritos às circunferências, obtendo assim os seguintes resultados:

$$\frac{n \cdot L_1}{n \cdot L_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{C_1}{x}. \quad (1.13)$$

Utilizando o resultado da Equação e 1.13 é possível escrever

$$x = \frac{C_1 \cdot n \cdot L_2}{n \cdot L_1}. \quad (1.14)$$

Sabendo que P_1 está circunscrito à θ_1 , necessariamente o perímetro de P_1 é superior ao comprimento de θ_1 e, desta forma,

$$\frac{C_1}{n \cdot L_1} < 1. \quad (1.15)$$

Como consequência,

$$\frac{C_1 \cdot n \cdot L_2}{n \cdot L_1} < n \cdot L_2 \quad (1.16)$$

o que implica

$$x < n \cdot L_2. \quad (1.17)$$

Portanto, o valor de x é sempre inferior ao perímetro de um polígono regular de n lados circunscrito à circunferência θ_2 .

Utilizando os resultados das Equações 1.12 e 1.17 é possível escrever

$$n \cdot l_2 < x < n \cdot L_2 \quad (1.18)$$

isto é, o valor de x sempre estará entre os valores dos perímetros dos polígonos regulares de n lados inscrito (p_2) e circunscrito (P_2) à circunferência θ_2 .

Aumentando tanto quanto se queira o número de lados n de ambos os polígonos regulares, obtem-se $x = C_2$, tal qual a Definição 1.0.2.

Finalmente, usando a Equação 1.7 e o fato de que $x = C_2$, escreve-se

$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2} \quad (1.19)$$

donde

$$\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}. \quad (1.20)$$

□

Como consequência do Teorema 1.0.2 segue uma definição para o número π :

Definição 1.0.3. O número π é definido como sendo a razão entre o comprimento C e o diâmetro $2R$ de uma circunferência, isto é,

$$\pi = \frac{C}{2R}.$$

Tendo sido vista uma das principais definições do número π , serão comentadas outras duas definições que, dependendo do contexto em que forem utilizadas, podem trazer mais facilidades para a dedução de outros resultados.

A segunda forma de definir o número π depende do conceito de *área do círculo*, conforme pode ser visto em [25]:

Definição 1.0.4. Define-se o número real π como a área de um círculo de raio 1.

A Definição 1.0.4 será útil mais à frente (em especial no Capítulo 7), visto que ela pode ser utilizada na dedução de uma relação que calcula a área de um círculo qualquer.

Apenas como ilustração, a terceira maneira de definir o número π necessita da função trigonométrica *seno*, isto é, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \text{sen}(x)$. Segue a definição:

Definição 1.0.5. Define-se o número real π como o menor zero positivo da função trigonométrica seno.

Para finalizar este capítulo, uma reflexão sobre o uso do símbolo π : é provável que o uso da letra grega π esteja relacionado com a inicial da palavra *perímetro* (Figura 4), sendo que os matemáticos Willian Jones e Leonard Euler (ambos do século 18 — notando que Euler gozou de prestígio e reconhecimento superiores a Jones) contribuíram com a difusão da notação. De fato, conforme visto anteriormente, a razão que determina o número π está relacionada diretamente com o comprimento (perímetro) de qualquer circunferência considerada. Outra possibilidade para o uso da letra grega π tem relação com a palavra grega *periféria* — que significa, justamente, circunferência e tem como inicial a letra π .

περίμετρος
περιφέρεια

Figura 4: As palavras “perímetro” e “circunferência”, respectivamente, grafadas em grego.⁷

⁷ Fonte: próprio autor.

CONTEXTO HISTÓRICO DO NÚMERO π

Considerando o universo da Educação Básica, efetuar uma análise do número π apenas por meio do estudo de resultados teóricos seria afastar ainda mais o interesse dos alunos pelo assunto. Desta forma, é interessante, sempre que possível, explorar expedientes que mostrem aos alunos a construção das ideias e teorias estudadas em sala de aula. Pensando nisso, usar tópicos da história da matemática — que é naturalmente ligada à própria história da humanidade — pode ser uma ótima estratégia para a atração da atenção dos alunos em sala de aula. As próximas seções (e capítulos) se ocuparão em fornecer ideias para responder às duas principais perguntas que costumam ser propostas pelos alunos, que são:

- “Quem inventou o π ?” Esta pergunta é muito direta e prática, e mostra que os alunos podem ter uma visão imediatista sobre os conceitos matemáticos, isto é, de que eles foram simplesmente “inventados” por algumas pessoas especiais ao longo da história. Este é um ótimo momento para desconstruir a ideia de “invenções” em matemática e mostrar que os conceitos foram sendo construídos, interpretados e reinterpretados de acordo com a evolução do ser humano como agente transformador do ambiente em que vive.
- “Para que serve o π ?” Mais uma pergunta prática — e a resposta depende do contexto considerado. Para matemáticos (antigos ou contemporâneos), o π foi (e é) uma fonte de trabalhos teóricos para a descoberta de várias de suas características; para os diversos tipos de engenheiros — que necessitarão de aplicações práticas para o número — o π é apenas um valor com uma determinada aproximação conveniente (de acordo com [3], de seis a nove casas decimais são suficientes para as aplicações práticas mais complexas). Ao longo dos demais capítulos, serão mostradas algumas aplicações do π , principalmente a do seu uso na matemática.

A partir de agora, serão explorados alguns pontos que mereceram destaque sobre o contexto histórico do número π . Como toda revisão bibliográfica, há um caráter de subjetividade na escolha dos tópicos que aqui serão tratados, então fica a sugestão de efetuar consultas nas obras que serviram de base para o texto deste capítulo, caso o leitor ache necessário um aprofundamento em algum dos tópicos tratados: [4], [23], [6], [29], [3].

Outro comentário digno de nota é referente à divisão deste capítulo, divisão esta que tem como referência os momentos anteriores à Era Comum (antes do ano zero) e momentos posteriores à Era Comum (a partir do ano zero). A escolha temporal foi utilizada apenas para melhor organizar o texto, não possuindo nenhum outro critério especial; a escolha poderia ter sido, também, em relação aos métodos utilizados para o cálculo de aproximações do número π — antes das séries numéricas e do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral e depois, por exemplo.

2.1 O π : ANTES DA ERA COMUM

Ao longo da história da humanidade, é possível encontrar traços de manipulação e estudo de diversos tipos de curvas e regiões circulares. A arqueologia e os materiais encontrados em grandes expedições trouxeram elementos concretos que ajudaram a conjecturar as diferentes “formas de matemática” utilizadas por cada civilização antiga.

Começando a análise pelos babilônios — uma das civilizações antigas que costuma ser estudada devido à sua estrutura social — muito do que lhes diz respeito foi encontrado em inscrições em tábulas de argila e barro (materiais que eram muito mais duráveis que os papiros egípcios, por exemplo).

De acordo com [10], em tábulas de inscitos encontradas em 1936 (conhecidas como *Tábulas de Susa* — que foram produzidas entre 1800 e 1600 antes da Era Comum) há indícios de que os babilônios utilizavam uma aproximação para o número π : o número misto $3\frac{1}{8}$ ou, de forma equivalente, a fração imprópria $\frac{25}{8}$ (cuja expansão decimal é 3,125).

A estimativa encontrada para π provinha da razão entre o perímetro de um hexágono regular inscrito em uma circunferência e o comprimento dessa circunferência

— e esta razão, nas tábulas, foi dada pelo valor¹ $0;57,36 = 0 + \frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} = \frac{24}{25}$. De fato, tomando a razão dada (e lembrando que o raio da circunferência circunscrita ao hexágono é congruente a cada lado do hexágono), tem-se que

$$\frac{C_H}{C_C} = \frac{6R}{2k \cdot R} = \frac{24}{25} \quad (2.1)$$

donde conclui-se que

$$k = \frac{25}{8} = 3,125. \quad (2.2)$$

Já no Egito Antigo, as fontes de estudo de sua história se deram pelo tradução de papiros: um dos mais citados na história da matemática é o Papiro de Rhind² (escrito pelo escriba Ahmes por volta de 1650 antes da Era Comum), que apresenta uma série de problemas geométricos e as suas respectivas soluções — lembrando que a maioria delas era contada em forma de “receita” (passos que deveriam ser seguidos em uma certa ordem).

Refletindo sobre a matemática encontrada no Papiro de Rhind com as técnicas e conhecimentos atuais, percebe-se que alguns dos resultados utilizados pelos egípcios eram totalmente satisfatórios para a finalidade a que eram destinados.

De acordo com [6], um dos problemas do Papiro de Rhind faz uma comparação entre a área de um campo circular com diâmetro de 9 unidades (em linguagem atual, $S_1 = \pi \cdot 4,5^2 = 20,25\pi$) e um quadrado de lado 8 unidades ($S_2 = 8^2 = 64$), afirmando que ambas são iguais: desta forma, em linguagem corrente, π equivaleria à fração $\frac{256}{81}$, cuja expansão decimal com 6 casas decimais é 3,160494.

Fazendo uma comparação entre o valor babilônico (3,125) e o valor encontrado pelos egípcios (3,160494), tomando como referência o valor de π com seis casas decimais (a última delas sofreu o arredondamento), tem-se que o valor babilônico é mais acurado que o valor egípcio. Com efeito:

$$|3,141593 - 3,125| = 0,016593 < 0,018901 = |3,141593 - 3,160494|. \quad (2.3)$$

Já na Grécia Antiga, a razão e os estudos começaram a florescer (para algumas classes de pessoas livres) em função da organização social existente: desta maneira, um

1 O sistema de numeração utilizado pelos povos babilônicos era sexagesimal — base 60 — daí os denominadores serem potências de 60.

2 Alexander Henry Rhind, século 19, antiquário escocês que adquiriu o papiro.

seleto grupo de pessoas pôde se dedicar a formas de pensamento até então não consideradas, o que viria a alavancar definitivamente as diversas áreas do conhecimento humano.

Notadamente a matemática, que em diversas sociedades não helênicas era apenas utilizada para fins práticos (a matemática egípcia, por exemplo), começou a ganhar ares de organização e rigorosidade e, a respeito desta temática, um nome e a sua obra acabam sempre se destacando: Euclides (século 4º antes da Era Comum) e os *Elementos*. De acordo com [3], em tradução livre:

A maior parte do conteúdo dos *Elementos* provavelmente já era conhecido antes de Euclides. Mas a relevância do trabalho de Euclides não estava nos teoremas, como dizem. A maior relevância dos *Elementos* reside em seu método.

Euclides prestou um auxílio fundamental para a consolidação da construção lógica da matemática pois, de acordo com ele, os resultados matemáticos (atualmente chamados de *teoremas* ou *proposições*) deveriam ser deduzidos de outros resultados ainda mais elementares e previamente estabelecidos.³

O diferencial no método de Euclides é a utilização de um conjunto primário de asserções, isto é, afirmações que simplesmente devem ser aceitas e que não podem ser deduzidas a partir de outras: os *postulados*⁴. De acordo com [14], eis os cinco postulados de Euclides, descritos aqui por meio de uma linguagem contemporânea (mas carregando o mesmo sentido da escrita original):

1. Por dois pontos não coincidentes passa uma e uma só reta.
2. Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta.
3. Para todo ponto C e todo ponto A não coincidente com C existe uma circunferência com centro C e raio congruente a \overline{CA} .
4. Todos os ângulos retos são congruentes entre si.
5. Por um ponto não pertencente a uma reta, passa uma e uma só paralela a tal reta.⁵

3 Tales de Mileto — século 7º antes da Era Comum — foi o precursor do método dedutivo.

4 Alguns autores utilizam o termo *axioma* como um sinônimo para *postulado*. Na obra *Elementos* há uma diferenciação entre postulados e axiomas, sendo que os últimos também são chamados de *noções comuns*.

5 Esta formulação é creditada ao matemático escocês John Playfair, século 18.

Uma analogia que pode ser feita em relação à geometria organizada por Euclides (denominada *Geometria Euclidiana*) é um castelo de cartas: as cartas superiores estão sustentadas pelas cartas inferiores, até chegar às bases do castelo — as bases, na geometria, são os postulados; se, por algum motivo, as bases forem mudadas, então outro tipo de castelo poderá ser construído — os diversos tipos de geometrias não-euclidianas.



Figura 5: Sem as bases (postulados) os resultados (teoremas) não se sustentam.⁶

É importante comentar que a matemática grega era essencialmente de cunho geométrico (talvez por não disporem de sistemas de numeração eficientes): desta forma, os problemas e as suas respectivas soluções revolviam na construção de segmentos de retas, curvas e polígonos quaisquer; ademais, os geômetras gregos tinham a predileção pela resolução de problemas geométricos utilizando apenas os instrumentos clássicos: régua não graduada e compasso — obviamente, não limitavam-se apenas à tais métodos.⁷

Por essas particularidades da matemática grega, alguns problemas ficaram conhecidos por não admitirem soluções dentro do campo de regras estabelecido pelos geômetras: eles são conhecidos como *os três problemas clássicos*⁸. Os três problemas clássicos desafiaram gerações de matemáticos e, do ponto de vista temporal, são recentes os trabalhos que mostram que não podem ser resolvidos apenas com régua não graduada e compasso. Os problemas são os seguintes:

⁶ Fonte: disponível em: <<https://goo.gl/aGFEaf>> Acesso em: jan. 2017.

⁷ [12] explica que outra forma de interpretar construções com regra não graduada e compasso é: “[...] as construções devem ser realizadas com um número finito de operações de traçado de retas e circunferências [...]”.

⁸ Informações mais detalhadas acerca de cada um desses problemas podem ser encontradas em [12].

- *Quadratura do círculo*: construção de um quadrado de área equivalente à de um círculo dado;
- *Duplicação do cubo*: construção da aresta de um cubo que tenha como volume o dobro do volume de um cubo dado;
- *Trissecção do ângulo*: divisão de um ângulo qualquer em três partes iguais.

Segundo [12]:

Somente no século 19, passados mais de 23 séculos, os matemáticos modernos resgataram a honra de seus colegas gregos, provando que as soluções não foram encontradas simplesmente porque as construções são impossíveis com régua e compasso (a rigor, a trissecção do ângulo é possível apenas em casos particulares, como 90° , 180° , etc., sendo impossível de forma geral).

Voltando para os três problemas citados, aquele que terá interesse para este trabalho é o da quadratura do círculo, visto que a tentativa de resolvê-lo fez florescer várias informações que têm relação com o π .

De todos aqueles que se debruçaram sobre a questão da quadratura do círculo, alguns nomes ficaram registrados com maior destaque na história: de acordo com [3], Anaxágoras, Antifonte, Hipócrates e Hípias foram estudiosos que contribuíram — direta ou indiretamente — para os estudos de curvas, regiões circulares e o π .

Registros históricos apontam que um dos primeiros gregos que se dispôs a resolver o problema foi Anaxágoras de Clazômenas (século 6^o antes da Era Comum) durante o período de sua vida em que ficou preso (devido às suas teorias relacionadas à astronomia que iam contra a ideia de que o Sol era uma divindade): mesmo assim, pouco (ou nada) sobre os seus trabalhos foi encontrado.

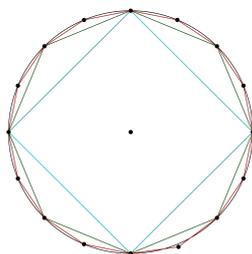


Figura 6: Ideia do processo de exaustão de Antifonte, com polígonos regulares de 4, 8 e 16 lados inscritos na circunferência.⁹

⁹ Fonte: próprio autor.

Antifonte (século 5^o antes da Era Comum), segundo [3], foi um dos primeiros a trabalhar com a ideia do “princípio da exaustão”: partindo de um quadrado inscrito em uma circunferência, outros polígonos regulares poderiam ser inscritos na mesma, com a condição de que o número de lados de cada um dos polígonos seria o dobro do número de lados do polígono anterior; fazendo tal processo até a exaustão, os lados dos polígonos ficariam cada vez menores, fazendo com que o perímetro dos polígonos se aproximasse do comprimento da circunferência (vide Figura 6).

Pensando em linguagem moderna, para um conveniente valor do raio da circunferência, o processo de Antifonte determina aproximações por falta do número π ; as aproximações por excesso de π podem ser encontradas por um processo parecido, só que circunscrevendo à circunferência polígonos regulares com um número cada vez maior de lados.

Hipócrates de Quios (século 5^o antes da Era Comum) trabalhou com figuras geométricas denominadas *lúnulas* — que são áreas limitadas por dois arcos de circunferências de raios distintos — e, para [3], foi um dos primeiros estudiosos a determinar a área exata de tais regiões. As *Lúnulas de Hipócrates* (vide Figura 7) têm características interessantes que podem ser trabalhadas no Ensino Médio — por isso serão discutidas posteriormente em detalhes na Seção 7.4.

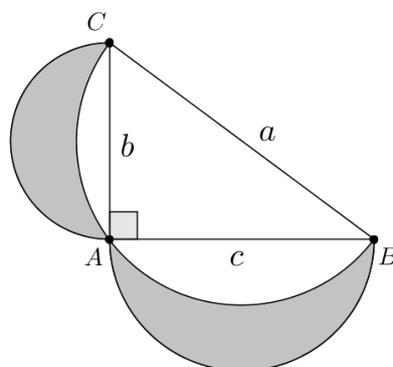


Figura 7: Lúnulas de Hipócrates: será visto que a soma das áreas das lúnulas (regiões destacadas em tom de cinza) não dependerá do valor de π .¹⁰

Em [3] é possível encontrar detalhes sobre a obra de Hípias de Élis (século 5^o antes da Era Comum), que é famoso pela curva denominada *trissetriz* (ou também *quadratriz*), visto que ela tinha a capacidade de trissectar um ângulo e, também, quadrar um círculo. O grande problema da curva de Hípias era o fato de não poder ser cons-

¹⁰ Fonte: próprio autor.

truída dentro do campo de regras imposto pelos geômetras gregos. Em [13] é possível verificar mais informações sobre a trissetriz/quadratriz de Hípias.

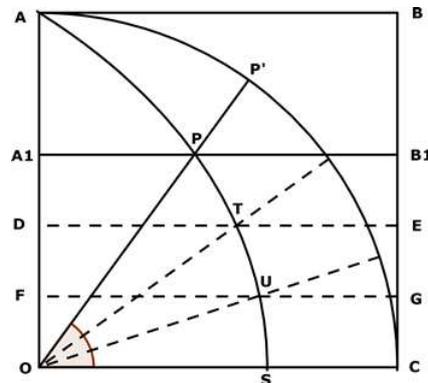


Figura 8: A curva que passa pelos pontos A, P, T, U, S é a trissetriz/quadratriz de Hípias.¹¹

Ainda na Grécia Antiga, um estudioso teve papel importante na determinação de um algoritmo que relacionava a circunferência e os polígonos inscritos e circunscritos à ela: Arquimedes de Siracusa, nascido por volta de 287 antes da Era Comum.

Arquimedes desenvolveu uma série de estudos teóricos e práticos em várias áreas do conhecimento: matemática, física, astronomia e engenharia — de acordo com [3], suas invenções bélicas (como a catapulta, por exemplo) devastaram uma grande quantidade de soldados do Império Romano durante o cerco que fizeram à Siracusa. Na Seção 6.1 será vista a ideia do modelo desenvolvido por Arquimedes para a obtenção de aproximações do valor de π — método este que foi constantemente tomado como base para a obtenção de novos valores decimais para π .

2.2 O π : DEPOIS DA ERA COMUM E O FOCO NOS MÉTODOS GEOMÉTRICOS

Os primeiros séculos da Era Comum no Ocidente pouco trouxeram de contribuição para o π (e para as ciências, de modo geral) devido à ruína do Império Romano ([3] acredita que os romanos pouco contribuíram com as ciências em geral, visto que tudo aquilo que possuíam era uma mera apropriação das culturas dos povos que foram conquistados), ao fechamento da população em feudos e ao forte e crescente misticismo que foi sendo instaurado.

¹¹ Fonte: disponível em: <<https://goo.gl/2rvoAm>> Acesso em: jan. 2017.

A configuração política e social no Ocidente, então, não era muito propícia para o fomento de cultura e conhecimento, sendo necessário procurar outras regiões do mundo para encontrar novas formas de matemática — Ásia e África.

Na China, por exemplo, o matemático Liu Hui, por volta do século 3º, desenvolveu um método iterativo¹² para determinar aproximações do valor de π , levando em conta que outros matemáticos chineses (Zhang Heng, Wan Fan) já haviam se debruçado sobre o tema, obtendo aproximações que, para Liu Hui, não eram boas o suficiente. O método de Liu Hui será visto em detalhes na Seção 6.2. De acordo com [6], Zu Chongzhi foi outro matemático que também se dedicou no que diz respeito à determinação de valores de π : o pouco que se sabe de sua obra são os valores de 3,1415927 (por excesso) e 3,1415926 (por falta), o que não deixou de ser um feito considerável para o contexto.

É interessante pensar que tanto os antigos gregos como os chineses não dispunham de sistemas de numeração ou notações que facilitassem os processos de cálculos de π , o que leva a compreender os limites computacionais existentes em seus trabalhos.

Agora, observando a matemática desenvolvida na região da Índia, alguns astrônomos acabaram por trabalhar com aproximações de π . De acordo com [6], na obra intitulada *Siddhantas*, compilada por volta dos séculos 4º e 5º — uma espécie de compêndio de astronomia — havia referência ao valor de π como a fração mista $3\frac{177}{1250}$, cuja expansão decimal é 3,1416: infelizmente, as obras não fazem referência sobre qual a metodologia adotada para a obtenção deste valor.

Outro matemático da região da Índia cuja obra também mostra traços de trabalho com o π foi Aryabhata (por volta do século 5º). Sua obra, intitulada *Aryabhatya*, apresentava uma coletânea de resultados matemáticos e astronômicos. Um resultado relacionado ao número π presente na obra de Aryabhata é o seguinte: “some 4 a 100, multiplique por 8, e some 62000. O resultado é aproximadamente a circunferência de um círculo cujo diâmetro é 20000.” Traduzindo para uma linguagem moderna, e lembrando que o termo “circunferência” refere-se ao comprimento (perímetro) da mesma, vem que:

$$(4 + 100) \cdot 8 + 62000 = 2 \cdot \pi \cdot 10000 \Rightarrow \pi = \frac{62832}{20000} = 3,1416. \quad (2.4)$$

¹² Iterações são passos que dependem, a partir de um certo ponto, do(s) passo(s) anterior(es). Em modelos numéricos de modo geral, quanto maior o número de iterações realizadas, melhores serão os resultados obtidos.

Mais uma vez, infelizmente, a obra não faz referência alguma dos processos utilizados para a obtenção de tais regras/valores. [6] acredita que, tanto no caso da obra *Siddhantas* como na obra *Aryabhatya*, os autores tiveram contato, por algum meio, com as obras gregas antigas.

Além dos hindus, os árabes tiveram papel fundamental para o fomento das ideias matemáticas durante a Idade Média europeia. Diversos autores árabes discorreram sobre assuntos tais como: resolução de equações (em especial as equações quadráticas); métodos geométricos aplicados à resolução de equações e problemas algébricos diversos. Um matemático árabe que muito se destacou foi al-Khwarizmi (século 8º) que, segundo [12]:

Acima de tudo um astrônomo, al-Khwarizmi aprendeu com os indianos a utilizar o sistema de numeração posicional de base dez e seus respectivos símbolos, adotando-os em seus trabalhos e promovendo sua difusão no mundo árabe.



Figura 9: *Allegory of Arithmetic* — Gregor Reisch (século 16). Mostra o embate entre os defensores do sistema de numeração posicional e decimal (e as ferramentas algébricas) e os calculistas que dependiam do ábaco.¹³

¹³ Fonte: disponível em: <<https://goo.gl/0rPJvk>> Acesso em: jan. 2017.

Voltando para a Europa, graças aos contatos com as diversas civilizações árabes, os europeus puderam ter contato com o sistema de numeração decimal e posicional — em especial, Leonardo Fibonacci (mais sobre ele na Seção 3.2). Aos poucos, a aderência do sistema de numeração decimal e posicional foi vencendo as duras restrições impostas pela influência religiosa — na Idade Média europeia, a maior parte do conhecimento científico era detido pela Igreja e suas diversas congregações, e a proliferação de um sistema de numeração de fácil uso quebraria o prestígio daqueles poucos que sabiam operar com os *ábacos*, instrumentos utilizados para a realização de cálculos. [23] reforça a ideia:

A introdução dos algarismos arábicos na Europa cristã encontrou, a princípio, forte resistência. Foram boicotados por muitos calculadores medievais, que os tratavam por signos diabólicos desses cúmplices de Satanás que são os árabes. Herdeira da tradição romana, a Igreja Católica não aceitava a superioridade dos elementos vindos de outra cultura.

2.3 O π : DEPOIS DA ERA COMUM E O DESENVOLVIMENTO DE MÉTODOS NÃO GEOMÉTRICOS

Estudando a Europa a partir do período conhecido como *Renascimento* — uma quebra de paradigmas que, de forma resumida, colocou o homem (e a sua razão) como o centro da atenção — haverá uma profusão de trabalhos e estudos voltados para a matemática. Uma das principais invenções deste período, a *impressão* (historicamente creditada à Johann Gutenberg, século 15), teve um papel decisivo na difusão de informações (conhecimento), o que provavelmente facilitou a transmissão de conhecimentos e tendências teóricas entre os diversos estudiosos.

A partir do Renascimento, as referências ao número π serão muito mais constantes. Um comentário interessante feito por [3], em tradução livre, é o seguinte:

A história do π durante o Renascimento se deu principalmente pela maior acurácia dos valores numéricos da constante; a teoria ainda era essencialmente baseada nos polígonos de Arquimedes [...] mas existiam agora outros dois instrumentos para cálculos numéricos à disposição daqueles que tentavam quadrar o círculo: funções trigonométricas e logaritmos.

Começando por François Viète (século 16), até hoje lembrado por ter contribuído com muitas das notações modernas utilizadas atualmente. Além de ter trabalhado com

vários tipos de relações trigonométricas, é creditado a ele um resultado que, embora não seja em nada prático, não deixa de ser engenhoso e criativo:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(x) &= 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &= 2^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &= 2^3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &= 2^4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{16}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{16}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
 \dots &= 2^n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora, lembrando do Limite Fundamental da Trigonometria:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(a)}{a} = 1 \tag{2.6}$$

e fazendo uma conveniente mudança de variáveis

$$a = \frac{x}{2^n} \tag{2.7}$$

é possível escrever

$$a \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty. \tag{2.8}$$

Portanto,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(a)}{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = 1. \tag{2.9}$$

Finalmente, utilizando os resultados das Equações 2.5 e 2.9 para valores tão grandes quanto se deseje de n :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(x) &= x \cdot \frac{2^n}{x} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &= x \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \cdot \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &= x \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Agora, tomando $x = \frac{\pi}{2}$ na Equação 2.10, obtém-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 &= \frac{\pi}{2} \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \Rightarrow \frac{2}{\pi} &= \dots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Conforme dito anteriormente, a Equação 2.11 é um exemplo da percepção aguçada de Viète, mas, para termos práticos, acaba se tornando muito trabalhosa: é necessário aplicar sucessivamente as relações de cosseno do arco metade. Além disso, em termos formais, ainda faltava a Viète ferramentas para realmente mostrar a convergência deste seu método — o que foi demonstrado séculos mais tarde por Ferdinand Rudio (século 19).



Figura 10: Reconstrução da lápide de Ludolf van Ceulen e as casas decimais de π grafadas na lápide.¹⁴

Outro nome que entrou na história pelos seus feitos com o número π foi o matemático Ludolf van Ceulen (século 16) que, apesar de ainda utilizar um método essencialmente geométrico — o método de duplicação do número de lados de um polígono regular — conseguiu calcular entre 15 a 30 casas decimais corretas de π (não há um consenso entre os diversos autores de história da matemática); curiosamente, na Alemanha (van Ceulen era alemão de nascença, mas viveu na Holanda e provavelmente se radicou por lá) o número π também é conhecido como *Ludolphsche Zahl*, algo como “número de Ludolfo”. A lápide original de seu túmulo continha as supostas casas decimais determinadas por ele.

¹⁴ Fonte: disponível em: <<https://goo.gl/ZQ9XRF>> Acesso em: jan. 2017.

Para [3], a construção, aprimoramento e uso do Cálculo Diferencial e Integral (século 17, Isaac Newton e/ou Leibniz) forneceu subsídios poderosos para a tarefa de determinar casas decimais de π — tais como as séries infinitas e frações contínuas. Considerando este panorama, inicia-se o rompimento de um paradigma, tendo em vista que a quase totalidade dos trabalhos para a determinação de valores de π até então eram emulações do método de Arquimedes (com melhorias no que diz respeito às ferramentas utilizadas para efetuar os cálculos, por exemplo). O próprio método de Viète comprova uma abordagem totalmente diferenciada ao problema.

Muitos matemáticos europeus continuaram com a tarefa de determinar mais e mais casas decimais do número π empregando as novas ferramentas — no que, para [3], era uma perda de tempo em função da pouca, ou nenhuma, aplicação prática de um alto número de casas decimais corretas. Em tradução livre:

Os dígitos além das primeiras casas decimais não possuem relevância para aplicações científicas. Quatro casas decimais são suficientes para a construção de motores da mais alta qualidade [...] e mesmo seu uso prático [de muitas casas decimais] em aplicações de informática não é muito comum.

Obviamente, algumas questões ainda estavam em aberto quando o assunto era o número π : será que realmente o número não admitia uma representação decimal periódica (finita ou não)? E o problema da quadratura do círculo admitiria alguma solução? Talvez tais questionamentos ainda permeavam os pensamentos dos estudiosos que debruçavam-se sobre os mistérios do número π .

No século 17, John Wallis e James Gregory (ambos britânicos), também em seus trabalhos como matemáticos, acabaram se deparando com métodos para a determinação de valores de π : o interessante é que ambos fizeram uso das recentes técnicas matemáticas relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral.

Digno de nota, Wallis foi um dos fundadores da *Royal Society*, instituição inglesa voltada para a promoção do conhecimento científico. Já Gregory, em seus estudos, tentou mostrar que o problema da quadratura do círculo não poderia ser resolvido por meios algébricos — sinalizando que π possuía características além da irracionalidade. Os métodos de ambos serão vistos na Seção 6.4, sendo que mais de seus trabalhos matemáticos podem ser vistos em [6].

Isaac Newton, talvez o cientista mais importante da história da humanidade — contribuiu grandemente em áreas da Física e da própria Matemática, sendo a ele creditado

o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral — também deixou um resultado que permite determinar aproximações de π .

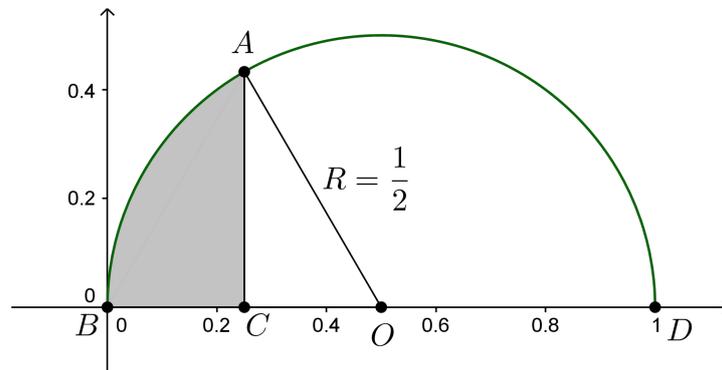


Figura 11: Construção estudada por Newton — acabou gerando um método numérico para obtenção de aproximações de π .¹⁵

Em primeiro lugar, Newton definiu a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x - x^2}$ que, no plano cartesiano, determina uma semicircunferência de centro $O = (\frac{1}{2}, 0)$ e raio $R = \frac{1}{2}$. Se \overline{AC} é um segmento perpendicular ao eixo das abscissas passando por $x = \frac{1}{4}$, a área S da região destacada em tons de cinza na Figura 11 pode ser calculada por meio da seguinte integral definida:

$$S = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x - x^2} dx. \quad (2.12)$$

Agora, calculando a área S de uma maneira alternativa, é fácil ver que a área em questão é a diferença entre o setor circular limitado pelo arco \widehat{AB} e de raio \overline{AO} e o triângulo retângulo ACO de catetos $CO = \frac{1}{4}$ e $AC = f(\frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (como consequência, $m(\widehat{AOC}) = 60^\circ$). Desta forma, a área S é dada por

$$S = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}. \quad (2.13)$$

Comparando as Equações 2.12 e 2.13, obtém-se

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x - x^2} dx = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} \quad (2.14)$$

¹⁵ Fonte: próprio autor.

isto é

$$\pi = 24 \left(\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x - x^2} dx + \frac{\sqrt{3}}{32} \right). \quad (2.15)$$

Expandindo em série de potências em torno do ponto zero a expressão $\sqrt{x - x^2}$ e calculando a integral definida de 0 até $\frac{1}{4}$, obtém-se o seguinte resultado (que pode ser visto em [3]):

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \dots \right). \quad (2.16)$$

O método de Newton possuía uma convergência superior aos métodos até então encontrados, permitindo encontrar um número maior de casas decimais corretas de π com um número menor de processos — de acordo com [3], em torno de quinze casas decimais corretas para um número de termos na série inferior a quarenta (o método de Arquimedes, em comparação, fornecia apenas duas casas decimais com a utilização de um 96-ágono, conforme poderá ser visto na Seção 6.1). O mais impressionante, contudo, foi o método que Newton utilizou para encontrar o resultado que envolvia o número π (de acordo com [3], Newton não estava necessariamente trabalhando para determinar aproximações de π , e o método acabou sendo um subproduto de outra pesquisa).

Outros matemáticos também depararam-se com o π em seus trabalhos: um dos que merecem uma maior atenção é Leonard Euler (século 18).

De acordo com [3], Euler, após trabalhar em métodos numéricos (usando séries) que possuíam um índice de convergência muito rápido para a determinação de valores de π (Euler formulou vários métodos para obtenção de aproximações de π), foi um dos primeiros a perguntar sobre a possibilidade (ou impossibilidade) de π ser a raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros. Em linguagem moderna, a pergunta que Euler propôs foi a seguinte: π é um *número algébrico* ou um *número transcendente*?¹⁶

Sobre a reflexão feita por Euler, deve-se notar que até aquele momento (século 18) não havia a fundamentação teórica dos números reais (conforme brevemente será explicitada no Capítulo 3), números algébricos e números transcendentos, mas a falta de descoberta de um período de repetição para a expansão decimal de π levava os matemáticos à crença de que este número era, de fato, irracional (recordando que a

¹⁶ Para o assunto, ler [22] — este trabalho não abordará a demonstração da transcendência do número π , visto a sua distância em relação à Educação Básica.

ideia de que um número não poderia ser escrito como a razão de dois inteiros já era conhecida desde os gregos antigos).

É interessante notar que a irracionalidade do número π não havia sido demonstrada nem mesmo por nomes como Newton, membros da família Bernoulli — família que contribuiu com muitos matemáticos por volta dos séculos 17 e 18 — e Euler, ficando a tarefa para o matemático Johann Heinrich Lambert (século 18), cuja dedução será melhor discutida na Seção 5.3. Portanto, um dos grandes mistérios sobre o número π tinha finalmente sido derrubado.

Outro matemático que também conseguiu provar a irracionalidade de π foi Adrien-Marie Legendre (século 18), e seu método consistiu em primeiro provar que o número π^2 é irracional: desta forma, como $\pi^2 = \pi \cdot \pi$, se fosse assumido que π é um número racional, então π^2 seria racional, contradizendo o resultado provado de que π^2 é irracional e chegando a um absurdo; desta forma, necessariamente π tem que ser um número não racional, isto é, irracional.

Mas e a indagação de Euler sobre o número π ser, ou não, solução de uma equação algébrica com coeficientes inteiros? E a outra pergunta que ainda continuava em aberto, mesmo depois de tanto tempo: a quadratura do círculo poderia ser realizada dentro do universo de regras estabelecido pelos antigos gregos?

No século 19, as ideias referentes à transcendência de certos valores começaram a ser exploradas e estudadas. Para fins de exemplificação, segue a definição de números algébricos e números transcendentos (que pode ser vista em detalhes em [28]).

Definição 2.3.1. Se um número complexo satisfizer alguma equação da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

onde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são inteiros, então este número real é dito *algébrico*; caso contrário, o número real em questão é dito *transcendente*.

Apesar da definição aparentemente simples, a “detecção” de números transcendentos não é trivial: [28] explana que qualquer número racional é algébrico (se $a \neq 0$, então a equação $ax + b = 0$ de coeficientes inteiros sempre terá uma solução da forma $x = -\frac{b}{a}$, solução esta que é racional); em contrapartida, o que se pode afirmar sobre os números irracionais e a sua transcendência (ou não)? Para se ter uma ideia da

complexidade da situação, o número irracional $\sqrt{11}$ é algébrico, visto que é solução da equação algébrica $x^2 - 11 = 0$. E outros números irracionais, tais como $\log 2, e, \pi$? O que é possível afirmar sobre eles?¹⁷

Joseph Liouville (século 19) conseguiu mostrar que existiam números que não eram raízes de equações algébricas com coeficientes inteiros, isto é, números transcendentos; um desses números é conhecido como *Constante de Liouville* (supostamente, o primeiro número comprovadamente transcendente):

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \dots \quad (2.17)$$

Para chegar até a prova da transcendência do número π , realizada pela primeira vez por Ferdinand Lindemann (século 19), foi necessário se basear nos trabalhos de Charles Hermite (século 19) em relação à transcendência de outro curioso número: e . Formalmente, o número e é assim definido:

Definição 2.3.2.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n .$$

Além de resultados acerca do número e , Lindemann também fez uso da *Identidade de Euler*:

Definição 2.3.3.

$$e^{\pi i} + 1 = 0 .$$

De acordo com [12], Lindemann seguiu os seguintes passos para a dedução¹⁸ da transcendência do número π :

1. Lindemann provou que o produto de dois números algébricos é um número algébrico;
2. Lindemann provou que se α é um número algébrico não nulo, então e^α é um número transcendente (dedução em [22]);

¹⁷ Para um maior entendimento sobre a teoria dos números transcendentos, recomenda-se fortemente a leitura das obras [28] e [22].

¹⁸ Para as deduções rigorosas da transcendência de e de π , recomenda-se a leitura de [22].

3. utilizando $e^{\pi i} + 1 = 0$, Lindemann verificou que $e^{\pi i} = -1$, isto é, que $e^{\pi i}$ é um número algébrico;
4. usando os itens 3 e 4, Lindemann concluiu que πi é um número transcendente;
5. como i é um número algébrico (é raiz da equação $x^2 + 1 = 0$) e πi é um número transcendente, decorre que π é um número transcendente.

Com o último mistério sobre as características do número π derrubado, uma outra questão que ainda estava em aberto — a quadratura do círculo — finalmente pôde ser solucionada: na verdade, a transcendência do número π vem comprovar, em definitivo, que a quadratura do círculo não pode ser obtida utilizando régua e compasso. Para isso, o seguinte teorema (retirado de [28]) será útil na justificativa da impossibilidade da quadratura do círculo.

Teorema 2.3.1. *Começando com um segmento de comprimento unitário, qualquer comprimento que possa ser construído com régua e compasso é um número algébrico de grau 1, ou 2, ou 4, ou 8, ..., isto é, um número algébrico de grau¹⁹ igual a uma potência de 2.*

Como exemplos de números algébricos de grau 2, 4 e 8, também retirados de [28], temos:

Exemplo 2.1. $\sqrt{2}$ é um número algébrico de grau 2 e raiz da equação algébrica $x^2 - 2 = 0$.

Exemplo 2.2. $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ é um número algébrico de grau 4 e raiz da equação algébrica $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$.

Exemplo 2.3. $\sqrt{5 - 3\sqrt{1 + \sqrt{2}}}$ é um número algébrico de grau 8 e raiz da equação algébrica $x^8 - 20x^6 + 132x^4 - 320x^2 + 94 = 0$.

¹⁹ De acordo com [28], se um número algébrico for raiz de uma equação de grau n com coeficientes inteiros, mas não for raiz de nenhuma equação de grau menor que n com coeficientes inteiros, então é dito que o número tem grau n .

Então, por qual motivo a quadratura²⁰ do círculo não é possível? Se a mesma fosse possível, tomando como referência um círculo unitário, sua área seria igual a π : desta forma, o quadrado que deveria ser construído teria área igual a π e o seu lado l teria que medir $\sqrt{\pi}$. Partindo, então, de um segmento unitário, o Teorema 2.3.1 garante que o comprimento que poderá ser construído a partir da unidade utilizando régua e compasso é necessariamente um número algébrico: ora, como π é um número transcendente, então não é possível construir um segmento cuja medida seja π (tampouco um segmento cuja medida seja $\sqrt{\pi}$, isto é, o lado do quadrado cuja área seria igual a área do círculo). Portanto, está mostrada a impossibilidade da quadratura do círculo de acordo com as regras impostas pelos antigos gregos.

Com as principais questões sobre o π resolvidas, o estudo do número π esteve ligado fundamentalmente com o encontro de algoritmos capazes de determinar aproximações mais precisas em um número cada vez menor de iterações. Desde o século 20, com o advento e a consolidação da informática, aqueles que desejavam encontrar mais e mais casas decimais de π dispunham agora de novos artifícios que poderiam aumentar a precisão de seus trabalhos de forma substancial.

Iniciando pelo computador *ENIAC* (Electronic Numerical Integrator and Computer ou, em português, computador integrador numérico eletrônico) em 1949, [3] diz que 2037 casas decimais de π foram calculadas em torno de 70 horas. Apenas como curiosidade, o ENIAC tinha um poder computacional de aproximadamente 500 *FLOPS* (operações de ponto flutuante por segundo): já um chip gráfico como o ARM Mali-T628MP6 GPU, utilizado em *smartphones* relativamente atuais, possui um poder computacional de aproximadamente 140 GFLOPS, isto é, $140 \cdot 10^9$ FLOPS (claro, a quantidade de FLOPS é apenas um parâmetro de comparação, mas é possível verificar o desenvolvimento absurdo da computação pessoal em menos de 70 anos).

A Tabela 1 mostra a evolução histórica do desempenho dos computadores no cálculo de casas decimais do número π .

Obviamente, até o tempo presente, muitos outros *benchmarks* foram realizados para a verificação do número de casas decimais de π . Alguns dos valores mais recentes são:

Talvez a pergunta mais realizada por todos aqueles que não têm familiaridade com Matemática (ou Informática): por qual motivo dispende tempo e recursos com todos esses cálculos? Há alguma utilização prática para todas essas casas decimais do nú-

²⁰ Para abordagens mais completas, ler [28] e [22].

Ano	Computador/Local	Casas decimais	Tempo
1949	ENIAC/Filadélfia	2037	70 horas
1955	NORC/Virgínia	3089	13 minutos
1957	Pegasus/Londres	7480	33 horas
1958	IBM 704/Paris	10000	1 hora e 40 minutos
1959	IBM 704/Paris	16167	4 horas e 18 minutos
1961	IBM 7090/Londres	20000	39 minutos
1961	IBM 7090/Nova Iorque	100265	8 horas e 43 minutos
1967	CDC 6600/Paris	500000	28 horas e 10 minutos

Tabela 1: Casas decimais de π calculadas no início da Era da Informática.

Ano	Computador/Local	Casas decimais	Tempo
2002	64x HITACHI SR8000/Toquio	$1,24 \cdot 10^{12}$	602 horas
2009	T2K TSUKUBA/Tsukuba	$2,5 \cdot 10^{12}$	74 horas
2010	PC com Intel Core i7 + 6 GB RAM	$2,7 \cdot 10^{12}$	116 dias
2016	2 x Intel Xeon E5-2690 + 128 GB RAM	$12,1 \cdot 10^{12}$	94 dias

Tabela 2: Casas decimais de π calculadas nos últimos anos.

mero π ? Conforme já respondido anteriormente, não há aplicabilidade prática para tamanha precisão. Dois principais aspectos podem ser considerados para tentar responder a questão levantada:

- verificação da capacidade de realização de cálculos da máquina testada: os algoritmos que determinam casas decimais de π trabalham com vários tipos de processos matemáticos, o que conseqüentemente coloca as máquinas em estado de estresse para a posterior verificação de seus desempenhos;
- otimização da lógica computacional: na informática, é possível existir um algoritmo, *software* ou processo pouco otimizado dentro de uma plataforma com excelente *hardware*: o *hardware* compensará as deficiências da programação, tornando a aplicação utilizável; em contrapartida, é possível que o *hardware* não seja exatamente o melhor: nestes momentos, uma programação extremamente otimizada economizará recursos computacionais, trazendo uma margem de folga para o equipamento mais fraco e tornando a aplicação viável para aquela plataforma.

No tocante de otimização de processos computacionais, há por detrás muito estudo e análise matemática com o intuito de desenvolver sempre um número de iterações menor (ou que se utilizem de operações matemáticas mais simples) para que os processos sejam econômicos em relação aos recursos computacionais. Sobre as fórmulas e processos²¹ utilizados para a determinação de aproximações de π , seguem alguns deles a título de conhecimento — eles foram citados nas obras [29] e [3]:

Exemplo 2.4 (Fórmula de Machin — John Machin, século 17).

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right) \text{ donde } \pi = 16 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right) \quad (2.18)$$

Exemplo 2.5 (Combinação da Fórmula de Machin com a Série de Gregory).

$$\pi = 16 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots\right) - 4 \cdot \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots\right) \quad (2.19)$$

Exemplo 2.6 (Fórmula de Størmer — Fredrik Carl M. Størmer, século 19).

$$\pi = 24 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{8}\right) + 8 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{57}\right) + 4 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right) \quad (2.20)$$

Exemplo 2.7 (Fórmula de Gauss — Carl Friedrich Gauss, século 18).

$$\pi = 48 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{18}\right) + 32 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{57}\right) - 20 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right) \quad (2.21)$$

²¹ Em cursos de graduação, sejam de licenciatura em matemática ou de áreas correlatas à informática, tais métodos podem fornecer boas ideias para o desenvolvimento de iniciações científicas diversas.

Exemplo 2.8 (Série de Ramanujan — Srinivasa Ramanujan, século 19).

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)! \cdot (1103 + 26390k)}{(k!)^4 \cdot 396^{4k}} \quad (2.22)$$

Exemplo 2.9 (Algoritmo de Chudnovsky — David V. Chudnovsky e Gregory V. Chudnovsky, século 20).

$$\frac{1}{\pi} = 12 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (6k)! \cdot (545140134k + 13591409)}{(3k)! \cdot (k!)^3 \cdot (640320)^{3k + \frac{3}{2}}} \quad (2.23)$$

A Série de Ramanujan e o Algoritmo de Chudnovsky são aqueles mais amplamente empregados nos algoritmos de cálculo de aproximações de π — inclusive, o Algoritmo de Chudnovsky foi o utilizado pela dupla²² Alexander J. Yee e Shigeru Kondo, detentores do recorde de $12,1 \cdot 10^{12}$ casas decimais do número π . Ainda sobre os métodos, é interessante notar a evolução que sofreram ao longo da história: começaram por métodos geométricos simples, encontraram a evolução com o Cálculo Diferencial e Integral e, nos dias atuais, dependem de um corpo teórico ainda mais robusto como as séries hipergeométricas (no caso do Algoritmo de Chudnovsky).

Por fim, algo interessante de se questionar como professor — e poder transmitir a ideia para os alunos — é a necessidade de busca de conhecimento em várias fontes diferentes. Esta atitude permitirá aos alunos conferir a veracidade de informações, verificar se as mesmas estão carregadas por algum tipo de pré-conceito ou vício por parte dos autores e, principalmente, mostrar aos alunos a importância do entendimento e respeito pelos diversos pontos de vista existentes.

Fazendo um paralelo com a matemática, a mesma teve a contribuição direta de incontáveis pessoas advindas de inúmeras civilizações, culturas e realidades, e o somatório de todos esses esforços culminou no que hoje é entendido por essa ciência. O senso crítico pode (e deve) ser despertado também nas aulas de matemática, fazendo com que os alunos ganhem senso investigativo e tenham sempre o interesse de descobrir além do que lhes é entregue em aula.

²² Mais sobre o trabalho deles no sítio eletrônico <https://goo.gl/BscEib>. Acesso em mar. 2017.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Ao longo de toda a formação matemática de um aluno, o mesmo é colocado em contato com uma série de números e, também, com diversas relações entre tais números que acabam por classificá-los dentro de conjuntos, os chamados *conjuntos numéricos*. De uma forma organizada e sistemática, o Ensino Básico dá conta de trabalhar os principais aspectos dos seguintes conjuntos numéricos: naturais (\mathbb{N}), inteiros (\mathbb{Z}), racionais (\mathbb{Q}), reais (\mathbb{R}) e, geralmente no último ano do Ensino Médio, os complexos (\mathbb{C}), conforme será visto nas seções seguintes. Além destes, a Educação Básica também faz menção aos números irracionais, que igualmente serão aqui explorados.

A proposta deste capítulo é levar um entendimento panorâmico da construção dos números para os professores. Nem sempre é de fácil acesso alguma literatura que forneça a construção teórica dos números e, por mais que essa construção não seja realizada na Educação Básica — apenas os principais aspectos de cada conjunto numérico e as necessidades que foram surgindo para evocar novas estruturas são geralmente citados — é importante o professor ter segurança e entendimento sobre o conteúdo em sua formação.

A linha de raciocínio seguida será uma adaptação, para os intentos deste trabalho, daquela que é trabalhada em [11], onde será possível encontrar informações muito mais detalhadas sobre a construção dos números; outras fontes interessantes de consulta são [2] pois alia as principais ideias da construção dos números junto dos diversos panoramas históricos e [19], que avalia em detalhes os racionais, irracionais, segmentos comensuráveis, segmentos incomensuráveis e, finalmente, os números reais e suas propriedades.

Ainda dentro da proposta deste trabalho, como será explorada a irracionalidade do número π (nos Capítulos 4 e 5), é importante dar a contextualização deste tipo de número e de suas principais características.

3.1 NÚMEROS NATURAIS

A ideia de mensurar quantidades, por mais rudimentar que seja, sempre esteve presente nas diversas culturas estabelecidas pelos seres humanos. Enquanto para algumas culturas há a necessidade de ter sistemas numéricos bem definidos para a contabilização de um número extremamente grande de quantidades diversas, para outras culturas a noção de “um, dois e muitos” foi (e ainda é) utilizada, dada a realidade de que não precisam lidar com coleções de objetos com muitos elementos (e, mesmo que o façam, não é necessário para eles diferenciar uma quantidade x de uma quantidade $x + 1$, por exemplo).

A obra [4] faz um estudo muito interessante sobre as diversas necessidades culturais de métodos de contagem — o que poderia ser classificado como um estudo etnomatemático; ademais, a obra [6] faz um levantamento minucioso de todo o processo de construção dos sistemas numéricos e das necessidades de seus usos.



Figura 12: Contagem utilizando pedras.¹

Fazendo então um breve paralelo com a história da própria humanidade, quando os homens deram início a uma forma de vida mais sedentária², é provável que tenham tido os primeiros contatos com o processo de domesticação de alguns animais em rebanhos, fazendo-se necessária a contagem dos mesmos. Um dos artifícios utilizados para realizar as contagens era o de relacionar cada um dos animais a um tipo de marca ou objeto (pedra, cálculo, talhos em ossos), e estas marcas eram guardadas

¹ Fonte: disponível em: <<https://goo.gl/4oGz5z>> Acesso em: jan. 2017.

² Em contraponto à maneira nômade de viver, onde exauriam temporariamente todos os recursos de uma determinada região e depois partiam em busca de novos recursos.

após o processo de comparação: desta forma, se o número de marcas ou objetos fosse maior que o número atribuído no início do processo, significava que animais haviam se perdido do rebanho.

Desta forma, para traduzir formalmente a ideia de contar elementos de uma coleção de objetos, pode ser lançado mão do *conjunto dos números naturais*.

Considerando a Educação Básica, os alunos têm contato com os números naturais já nas primeiras séries do Ensino Fundamental e utilizam esses números para efetuar as primeiras contagens (mesmo que, em um primeiro momento, não percebam a relação biunívoca existente no processo) ou ordenar objetos e pessoas dentro de pequenas sequências e, depois, para realizarem os processos aritméticos básicos. Ano a ano os alunos também vão percebendo que, com o uso de apenas dez símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), é possível representar qualquer valor, graças ao *sistema de numeração decimal e posicional*.

Dos números ordinais até o uso adequado dos números cardinais, leva-se um tempo para que o aluno perceba que “cinco balas”, “cinco anos”, “cinco reais” são representações concretas de um conjunto cujo número de elementos (*cardinalidade*) é cinco. Mais uma vez, a passagem dos anos fará com que os alunos tenham maior maturidade matemática para perceber o quão abstrata é a noção de número, bem como o funcionamento adequado do sistema de numeração decimal e posicional.

Pensando no professor, é necessário ter um entendimento mais amplo da ideia de número natural. Desta forma, segue uma definição formal do conjunto dos números naturais (cuja construção mais formal pode ser vista em [11]):

Definição 3.1.1 (Conjunto dos números naturais). O *conjunto dos números naturais*, \mathbb{N} , é um conjunto não vazio tal que:

1. existe uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$ chamado *sucessor* de n ;
2. a função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetora³;
3. existe um único elemento 1 no conjunto \mathbb{N} tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
4. se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = \mathbb{N}$.

Analisando a Definição 3.1.1, as quatro características que definem o conjunto dos números naturais podem ser interpretadas da seguinte forma:

- todo número natural possui um sucessor (este também natural);
- números naturais distintos possuem sucessores distintos;
- o único número natural que não é sucessor de nenhum outro é o número 1;
- se um conjunto de números naturais contém o 1 e, adicionalmente, contém o sucessor de cada um de seus elementos, este conjunto contém todos os números naturais, ou seja, é o próprio conjunto \mathbb{N} .

A última listagem é conhecida como *Axiomas de Peano* (Giuseppe Peano, século 19) e o último dos Axiomas de Peano serve como base para o *Princípio da Indução Finita* — *PIF* (que pode ser visto em [19]). O PIF serve para deduzir uma série de resultados relativos aos números naturais.

É interessante notar que, na definição dada, foi estipulado que 0 (o número zero) não é um número natural — esta escolha pode ocorrer quando, por exemplo, se trabalha com sequências numéricas, visto que é mais interessante ordenar objetos de uma listagem partindo do número um do que partindo do número zero, por exemplo. De modo geral, na Educação Básica o número 0 é listado como um número natural:

Definição 3.1.2 (Conjunto dos números naturais). Define-se como *número natural* todo o número pertencente ao conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Tomando elementos do conjunto dos números naturais, é possível determinar outros elementos (também naturais) por meio de processos chamados de *operações*. Segue uma definição de operação trabalhada em [11]:

Definição 3.1.3. Uma *operação* em um conjunto não vazio \mathbb{A} é uma função $*$: $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$.

³ Uma função é dita injetora quando elementos diferentes do domínio possuem imagens distintas, isto é, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$, para quaisquer x_1 e x_2 .

No conjunto dos números naturais estão definidas apenas duas operações, que são a *adição* (denotada pelo símbolo $+$) e a *multiplicação* (denotada pelo símbolo \cdot). Formalmente, tem-se as definições de cada uma dessas operações:

Definição 3.1.4. A *adição* de dois números naturais m e n é designada por $m + n$ e é definida *recursivamente* da seguinte maneira:

$$\begin{cases} m + 0 = m \\ m + s(n) = s(m + n) \end{cases} ,$$

onde $s(n)$ denota o sucessor do número natural n .

A primeira igualdade da definição já entrega uma importante característica da *adição*: o *elemento neutro* (no caso, o número zero). Agora, de maneira breve, será dado um exemplo de como é efetuada, formalmente, a operação de *adição* entre dois números naturais. Maiores detalhes podem ser encontrados tanto em [11] como em [19].

Exemplo 3.1. $3 + 2 = 3 + s(1) = s(3 + 1) = s(3 + s(0)) = s(s(3 + 0)) = s(s(3)) = s(4) = 5$.

Usualmente, tal processo não é perceptível ao se efetuar a *adição* de dois naturais, mas ele ocorre por detrás dos algoritmos habitualmente utilizados. Desta forma, é importante que os professores tenham a ciência desta definição para a *adição*.

Da mesma maneira, é possível definir a *multiplicação* de números naturais por meio de uma *recursão*:

Definição 3.1.5. A *multiplicação* de dois números naturais m e n é designada por $m \cdot n$ e é definida *recursivamente* da seguinte maneira:

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0 \\ m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \end{cases} .$$

A segunda equação da definição da *multiplicação* apresenta uma característica que a relaciona com a *adição*: esta característica é justamente a *distributividade*, que será

vista com mais detalhes posteriormente. Dando um exemplo do processo de multiplicação de dois naturais — e lembrando que este processo também não é aquele utilizado na Educação Básica:

Exemplo 3.2. $5 \cdot 3 = 5 \cdot (2 + 1) = 5 \cdot 2 + 5 = 5 \cdot (1 + 1) + 5 = 5 + 5 + 5 = 15$.

Definidas adequadamente as operações de adição e multiplicação em \mathbb{N} , é importante dizer que, neste conjunto numérico, as operações gozam de algumas propriedades (cujas demonstrações podem ser vistas em [19]), a saber:

- (A_1) *Associatividade da adição*: para quaisquer naturais m, n, p , vale $m + (n + p) = (m + n) + p$.
- (A_2) *Comutatividade da adição*: para quaisquer naturais m, n , vale $m + n = n + m$.
- (A_3) *Elemento neutro da adição*: para qualquer natural m , vale $m + 0 = 0 + m = m$.
- (M_1) *Associatividade da multiplicação* para quaisquer naturais m, n, p , vale $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$.
- (M_2) *Comutatividade da multiplicação* para quaisquer naturais m, n , vale $m \cdot n = n \cdot m$.
- (M_3) *Elemento neutro da multiplicação*: para qualquer natural m , vale $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$.
- (D) *Distributividade da multiplicação em relação à adição*: para quaisquer naturais m, n, p , vale $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$.

Além de todas essas propriedades, os números naturais podem ser comparados, dois a dois, visto que há uma *relação de ordem* em \mathbb{N} , permitindo verificar formalmente o que por meios concretos é evidente: 0 é menor do que 1, 1 é menor do que 2, e assim sucessivamente. As seguintes definições ajudarão a entender melhor como funciona a ordenação em \mathbb{N} :

Definição 3.1.6. Uma relação binária R em um conjunto A não vazio diz-se uma *relação de ordem* em A quando satisfizer as condições seguintes, para quaisquer $x, y, z \in A$:

- (i) *reflexividade*: xRx ;
- (ii) *antissimetria*: se xRy e yRx , então $x = y$;

(iii) *transitividade*: se xRy e yRz , então xRz .

Um conjunto A não vazio, munido de uma relação de ordem, diz-se um *conjunto ordenado*.

Definição 3.1.7. Sejam m, n naturais. Diz-se que $m \leq n$, e lê-se como “ m é menor ou igual a n ” se existir um natural p tal que $m + p = n$.

Por meio de exemplos:

Exemplo 3.3. $2 < 7$, pois $2 + 5 = 7$. De maneira análoga, $2 \leq 2$, pois $2 + 0 = 2$.

A *Lei da Tricotomia*⁴ sintetiza os três tipos de comparação existentes entre dois naturais:

Teorema 3.1.1 (Lei da Tricotomia). *Dados m, n, p naturais, há três possibilidades, as quais se excluem mutuamente:*

$$m = n \text{ ou } m < n \text{ ou } m > n.$$

Após essas últimas considerações, o conjunto dos naturais está adequadamente fundamentado, permitindo fazer algumas considerações que servirão como mote para as próximas seções deste capítulo.

Conforme a definição formal de “operação”, fica fácil perceber que a adição e a multiplicação são operações em \mathbb{N} . A título de ilustração:

Exemplo 3.4. $3 \in \mathbb{N}, 7 \in \mathbb{N}$ e $3 + 7 = 10 \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.5. $3 \in \mathbb{N}, 7 \in \mathbb{N}$ e $3 \cdot 7 = 21 \in \mathbb{N}$.

⁴ Em [19] é possível ver a dedução deste resultado.

Os Exemplos 3.4 e 3.5 ilustram que a adição e a multiplicação são *fechadas* em \mathbb{N} , isto é, relacionando quaisquer dois naturais por meio de qualquer uma dessas operações, o resultado continuará sendo natural. A mesma característica de fechamento não é encontrada nas “operações” de subtração e divisão:

$$3 \in \mathbb{N}, 7 \in \mathbb{N}, \text{ mas } 3 - 7 = -4 \notin \mathbb{N} \quad (3.1)$$

$$3 \in \mathbb{N}, 7 \in \mathbb{N}, \text{ mas } 3 \div 7 = \frac{3}{7} \notin \mathbb{N} \quad (3.2)$$

Aqui, vale ressaltar que a subtração e a divisão são, até certo ponto, trabalhadas no Ensino Fundamental, mas sempre respeitando algumas particularidades/restrições: na subtração, o minuendo é obrigatoriamente maior ou igual ao subtraendo; na divisão, não se fala em *expansão decimal*, devendo ser efetuada por meio do *Algoritmo de Euclides*, isto é, necessariamente será considerado um resto natural (nulo ou não). Desta forma, ambas não são caracterizadas como operações em \mathbb{N} .

Portanto, seja para fins de ordem prática ou teórica, os números naturais são insuficientes dentro de alguns contextos, surgindo assim a necessidade de outros tipos de números que não possuam tais restrições — ampliando o número de casos onde a definição de operação é respeitada: em termos escolares, faz-se a apresentação (não formal) dos números racionais (frações) e, posteriormente, a introdução aos números inteiros.

Historicamente, até certo ponto do desenvolvimento da matemática, os números negativos eram evitados pelos matemáticos europeus em soluções de equações.⁵ Por exemplo: Michael Stiefel (século 15) os chamava de “*numeri absurdi*” (números absurdos) e Girolamo Cardano (século 15) os denominava como “*numeri ficti*” (algo como números construídos, fabricados, denotando a sua condição de artificialidade); em contrapartida, chineses (sistema de dívidas e posses), hindus e árabes (métodos de resolução de equações, principalmente as quadráticas) utilizavam números negativos em seus estudos.⁶

⁵ Para mais detalhes, ver [12] e [13].

⁶ Maiores detalhes em [6].

Agora, tomando o que hoje é denominado *número racional* (frações e suas representações decimais), é perceptível que os mesmos tiveram uma motivação prática muito mais imediata na vida dos seres humanos em comparação aos números negativos — como na repartição de objetos e quantidades, divisão de porções de terra, aplicação em construções, sistemas de numeração (babilônios), etc. Na geometria grega, os racionais eram representados graficamente, e tinham o importante papel de representarem razões entre segmentos quaisquer.

A próxima seção tratará dos números inteiros — visando tornar o processo de subtração (que formalmente será interpretado como uma adição de elementos convenientemente definidos) fechado dentro deste novo conjunto numérico.

3.2 NÚMEROS INTEIROS

Considerando a formação matemática de um aluno, é possível observar que já no Ensino Fundamental 1 são iniciados os trabalhos com frações (e suas representações decimais), até pela naturalidade do conceito de repartir um objeto ou uma quantidade em partes iguais⁷; em contrapartida, o conceito de número inteiro costuma aparecer apenas no Ensino Fundamental 2, levando em conta a necessidade de um poder de abstração maior por parte dos alunos.

Historicamente, percebe-se também quanto tempo se levou para a inserção do número zero — de papel fundamental para os números inteiros — dentro de um sistema numérico formal (considerando a matemática europeia), isto é, um símbolo que representasse a ausência de uma quantidade. Um dos matemáticos que contribuiu com a difusão do zero e do sistema de numeração decimal posicional foi Leonardo Fibonacci (século 12). De acordo com [13]:

De volta à Itália, [Leonardo Fibonacci] publicou em 1202 sua primeira obra, o *Liber Abaci*, onde descreveu o sistema numérico dos árabes, deu profundo tratamento às questões aritméticas e onde, pela primeira vez, um cristão discorreu sobre Álgebra. As palavras iniciais do *Liber Abaci* são históricas:

“Estes são os nove símbolos dos hindus: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Com eles, mais o símbolo 0, que em árabe é chamado de ZÉFIRO⁸, qualquer número pode ser escrito.”

⁷ O que condiz com a própria evolução dos conceitos matemáticos na humanidade — na repartição de terras para a agricultura, pagamento de impostos, construções de obras, etc.

⁸ Do árabe, *safir* ou *sifr*: vazio.

No âmbito escolar, o Ensino Fundamental 1 trabalha de forma parecida com a apresentação do número zero: primeiro são trabalhados os algarismos de 1 até 9 (símbolos) e dados os seus sentidos (números) para, posteriormente, expor aos alunos a ideia da ausência de uma quantidade (pensando no ponto de vista do aluno e de sua pouca maturidade intelectual neste momento, talvez seja estranho existir um símbolo ou um número que represente “o nada”).

Posteriormente, inicia-se a construção de quantidades maiores que o nove, iniciando pelo dez, que é a ideia de uma dezena — dez unidades agrupadas e nenhuma unidade fora desse agrupamento (zero unidade) — mostrando definitivamente para os alunos a importância do zero no sistema utilizado para denotar as quantidades (sistema decimal e posicional).

Do ponto de vista docente, é importante conhecer (mesmo que minimamente) a construção dos números inteiros. Uma construção útil para os inteiros (e para os demais conjuntos numéricos) é aquela que consegue abarcar características e propriedades de um conjunto numérico anterior (no caso, os naturais) e agregar novas qualidades — no caso dos inteiros, o fechamento em relação à subtração — construindo um aparato teórico cada vez mais robusto.

Para a construção formal do conjunto dos números inteiros faz-se necessário a compreensão de alguns conceitos, dados pelas seguintes definições:

Definição 3.2.1. Dados dois conjuntos A e B , ambos não vazios, define-se o *produto cartesiano de A por B* como o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) , onde $x \in A$ e $y \in B$.

Exemplo 3.6. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, então o produto cartesiano $A \times B$ é dado por $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$.

Definição 3.2.2. Uma *relação binária* — ou simplesmente *relação* — de A em B é um subconjunto R de $A \times B$.

Exemplo 3.7. Se $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$, então uma relação pode ser dada por $R = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$.

No Exemplo 3.7, verifica-se que o par ordenado $(1, 4) \in R$, da mesma forma que o par ordenado $(1, 5) \notin R$.

Tomando $A = B$, é possível definir o conceito de *relação de equivalência*, conforme será visto na seguinte definição:

Definição 3.2.3. Uma relação \sim sobre um conjunto não vazio A é denominada uma *relação de equivalência* sobre A se, e somente se, \sim satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) se $x \in A$, então $(x, x) \in \sim$: propriedade reflexiva;
- (ii) se $x \in A, y \in A$ e $(x, y) \in \sim$, então $(y, x) \in \sim$: propriedade simétrica;
- (iii) se $x \in A, y \in A, z \in A, (x, y) \in \sim$ e $(y, z) \in \sim$, então $(x, z) \in \sim$: propriedade transitiva.

Observação 3.2.1. Dada uma relação \sim sobre um conjunto A , é usual escrever $x \sim y$ em detrimento de $(x, y) \in \sim$.

Exemplo 3.8. Para $A = B = \{1, 2, 3\}$, a relação

$$\sim = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$$

é uma relação de equivalência sobre A . Com efeito:

- (i) R é reflexiva, pois $1 \sim 1, 2 \sim 2, 3 \sim 3$;
 - (ii) R é simétrica, pois $1 \sim 2$ e $2 \sim 1$;
 - (iii) R é transitiva, pois $1 \sim 2, 2 \sim 2$ e $1 \sim 1$.
-

Definição 3.2.4. Seja \sim uma relação de equivalência sobre A . Tomando $a \in A$, define-se como *classe de equivalência* de a o subconjunto de \bar{a} de A composto pelos elementos x tais que $x \sim a$, isto é, $\bar{a} = \{x \in A : x \sim a\}$.

Exemplo 3.9. No Exemplo 3.8, tem-se as seguintes classes de equivalência:

(i) $\bar{1} = \{1, 2\}$;

(ii) $\bar{2} = \{1, 2\}$;

(iii) $\bar{3} = \{3\}$.

Definição 3.2.5. O conjunto das classes de equivalência em um conjunto A determinadas pela relação de equivalência \sim será indicado por A/\sim e chamado de *conjunto-quociente* de A por \sim .

Exemplo 3.10. No Exemplo 3.9, tem-se que $A/\sim = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

Colocadas essas definições (e exemplos), será possível compreender melhor a construção formal dos números inteiros.

De forma intuitiva, é possível perceber que um mesmo valor numérico pode ser descrito por diferentes métodos, isto é, existem diferentes *formas descritivas*⁹ para um mesmo valor. Aqui, suponha que esteja sendo considerado o processo intuitivo de retirar quantidades de um determinado número natural (assim como é feito no que é conhecido como “subtração” no Ensino Fundamental), o qual será indicado pelo símbolo \diamond : a ideia, agora, é tentar formalizar este processo como uma operação. Colocando em prática a ideia intuitiva de “subtração”, as duas próximas equações descreverão formas diferentes de se obter os naturais 10 e 5, respectivamente:

$$10 = 10 \diamond 0 = 11 \diamond 1 = 12 \diamond 2 = 13 \diamond 3 \quad (3.3)$$

$$5 = 5 \diamond 0 = 6 \diamond 1 = 7 \diamond 2 = 15 \diamond 10 \quad (3.4)$$

Observando 3.3 e utilizando a operação de adição (já definida) no âmbito dos números naturais, percebe-se que:

⁹ $20 - 0$, $2^4 + 4$, $10 \cdot 2$ são algumas formas descritivas do 20, por exemplo.

- $10 + 1 = 0 + 11 = 11$;
- $10 + 2 = 0 + 12 = 12$;
- $11 + 3 = 1 + 13 = 14$.

De forma análoga, em 3.4:

- $5 + 1 = 0 + 6 = 6$;
- $6 + 10 = 1 + 15 = 16$;
- $7 + 10 = 2 + 15 = 17$.

Ainda tomando como referência as Equações 3.3 e 3.4, se o primeiro e segundo termos¹⁰ de cada uma das igualdades do processo $a \diamond b$ forem componentes de um par ordenado, é possível verificar a existência da seguinte relação:

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ se } a + d = b + c, \quad (3.5)$$

sendo que tal relação é uma relação de equivalência¹¹ no universo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Agora, se for tomada a classe de equivalência $\overline{(a, b)}$ pela relação \sim , devem ser considerados todos os pares ordenados da forma (x, y) tais que $(x, y) \sim (a, b)$. Em símbolos:

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + b = y + a\}. \quad (3.6)$$

Desta forma, é razoável definir um número inteiro como classe de equivalência de um par ordenado de números naturais. Com efeito, o número 7 pode ser representado pela seguinte classe de equivalência:

$$\overline{(13, 6)} = \{(8, 1), (9, 2), (7, 0), \dots\}. \quad (3.7)$$

Finalmente:

Definição 3.2.6. O conjunto $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ de todas as classes de equivalência $\overline{(a, b)}$ dadas em 3.6 é denominado *conjunto dos números inteiros* e denotado por \mathbb{Z} . Em símbolos:

¹⁰ Na “subtração” do Ensino Fundamental, seriam usados os termos *minuendo* e *subtraendo*.

¹¹ A dedução pode ser vista em [11].

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim = \{ \overline{(a, b)} : (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \}.$$

Da mesma forma que foram definidas as operações de adição e multiplicação em \mathbb{N} , é desejável que o mesmo ocorra em \mathbb{Z} .

Definição 3.2.7. A adição de dois números inteiros $\overline{(a, b)}$ e $\overline{(c, d)}$ é dada por $\overline{(a + c, b + d)}$.

Tomando os números inteiros $\overline{(5, 3)}$ e $\overline{(4, 2)}$, a soma dos dois é dada por:

$$\overline{(5, 3)} + \overline{(4, 2)} = \overline{(5 + 4, 3 + 2)} = \overline{(9, 5)}. \quad (3.8)$$

É importante frisar que a adição de dois inteiros está bem definida e o seu resultado (a soma) é único. O próximo teorema mostra isso (a sua dedução pode ser vista em [11]):

Teorema 3.2.1. Se $\overline{(a, b)} = \overline{(a', b')}$ e $\overline{(c, d)} = \overline{(c', d')}$, então $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} + \overline{(c', d')}$, isto é, a adição de números inteiros está bem definida.

Basicamente, o Teorema 3.2.1 garante que, independentemente da representação das classes de equivalências escolhidas para definir os números inteiros participantes da adição, a soma terá sempre o mesmo resultado. Como exemplo:

Exemplo 3.11. $\overline{(3, 5)} + \overline{(4, 1)} = \overline{(7, 6)}$ e $\overline{(2, 4)} + \overline{(3, 0)} = \overline{(5, 4)}$, donde $\overline{(7, 6)} = \overline{(5, 4)}$, visto que $7 + 4 = 6 + 5$.

Além das três propriedades que a adição de dois naturais possuía (associatividade, comutatividade e elemento neutro) e que continuam valendo em \mathbb{Z} (ver [11]), a adição neste conjunto comporta uma nova propriedade: a existência de um único *elemento simétrico (oposto)* para cada inteiro existente.

Definição 3.2.8 (A_4). Dado $\alpha = \overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$, o único $\beta = \overline{(c, d)} \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha + \beta = \overline{(0, 0)}$ chama-se *simétrico de α* e é denotado por $-\alpha$, isto é, $\beta = -\alpha$, onde $\overline{(0, 0)}$ é o elemento neutro de \mathbb{Z} .

Daí, uma nova operação em \mathbb{Z} , que é a *subtração*, pode ser definida:

Definição 3.2.9. A *subtração* em \mathbb{Z} , denotada por $(-)$, é a operação dada por

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Como era de se esperar de uma construção que pretende expandir a versatilidade do conjunto dos naturais, a multiplicação em \mathbb{Z} também está bem definida — e o resultado de uma multiplicação (*produto*) sempre é único (ver [11]):

Definição 3.2.10. A *multiplicação* de dois números inteiros $\overline{(a, b)}$ e $\overline{(c, d)}$ é dada por $\overline{(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)}$ ou, simplesmente, $\overline{(ac + bd, ad + bc)}$.

É interessante notar que as três propriedades que valiam para os naturais na multiplicação (associatividade, comutatividade e elemento neutro) continuam válidas para os inteiros, além da distributividade (que relaciona a multiplicação com a divisão).

Outra informação digna de nota é: por qual motivo as operações de adição e multiplicação são definidas conforme as Definições 3.2.7 e 3.2.10? Examinando a ideia exposta na Equação 3.5, é possível, utilizando a ideia intuitiva de subtração, identificar $\overline{(a, b)}$ com “ $a - b$ ”.

Feito isso, é possível compreender melhor as definições de adição e multiplicação de inteiros — tomando a liberdade de utilizar as regras operacionais habituais e a noção intuitiva de subtração. Com efeito:

$$\begin{aligned}\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} &= (a - b) + (c - d) = a - b + c - d = a + c - b - d \\ &= (a + c) - (b + d) = \overline{(a + c, b + d)}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} &= (a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd \\ &= ac + bd - ad - bc = (ac + bd) - (ad + bc) = \overline{(ac + bd, ad + bc)}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Agora que essas três operações estão adequadamente definidas, é de se esperar, assim como no conjunto dos naturais, que os elementos do conjunto dos inteiros possam ser comparados e ordenados (dois a dois). De fato, \mathbb{Z} possui uma relação de ordem — que, para os fins do trabalho, apenas será enunciada, mas as devidas deduções podem ser vistas em [11]:

Definição 3.2.11. Dados os inteiros $\overline{(a, b)}$ e $\overline{(c, d)}$, escreve-se $\overline{(a, b)} \leq \overline{(c, d)}$ quando $a + d \leq b + c$.

A partir da Definição 3.2.11:

Teorema 3.2.2. A relação \leq é uma relação de ordem em \mathbb{Z} , sendo compatível com as operações neste conjunto, isto é, para α, β, γ inteiros, são válidas:

- $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$;
- $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \geq \overline{(0, 0)} \Rightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Teorema 3.2.3 (Lei da Tricotomia).

Se $\alpha \in \mathbb{Z}$, uma, e apenas uma, relação será verdadeira:

$$\alpha = \overline{(0, 0)} \text{ ou } \alpha < \overline{(0, 0)} \text{ ou } \alpha > \overline{(0, 0)}.$$

Neste momento, é possível entender o relacionamento existente entre o conjunto \mathbb{Z} (cujos elementos são classes de equivalências) e o conjunto \mathbb{N} (cujos elementos são números):

Teorema 3.2.4 (Imersão de \mathbb{N} em \mathbb{Z}). Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(m) = \overline{(m, 0)}$. A função f é injetora e tem as seguintes propriedades:

1. $f(m + n) = f(m) + f(n)$;
2. $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$;
3. se $m \leq n$, então $f(m) \leq f(n)$.

O Teorema 3.2.4 mostra, em definitivo, que \mathbb{Z} possui uma cópia algébrica de \mathbb{N} e, portanto, \mathbb{N} pode ser visto como um subconjunto de \mathbb{Z} .

No panorama da Educação Básica, o conjunto dos números inteiros é evocado justamente devido ao fato de \mathbb{N} não ser fechado para a subtração. A partir desta motivação matemática (e de algumas outras mais concretas, como a localização de um andar em um prédio, a temperatura de um termômetro ou o saldo de uma conta bancária), “surge” o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}, \quad (3.11)$$

onde um número $a \in \mathbb{Z}$ admite um número oposto (ou simétrico) $-a \in \mathbb{Z}$ de tal modo que

$$a + (-a) = 0.$$

Para que as ideias fiquem menos abstratas para os alunos, lança-se mão da representação da *reta suporte orientada*: um simples, porém eficiente, modelo geométrico que diz que cada valor inteiro corresponde a um ponto na reta suporte orientada. Logo em seguida, segue uma importante descrição para o entendimento deste modelo gráfico, bem como a própria representação visual (Figura 13):

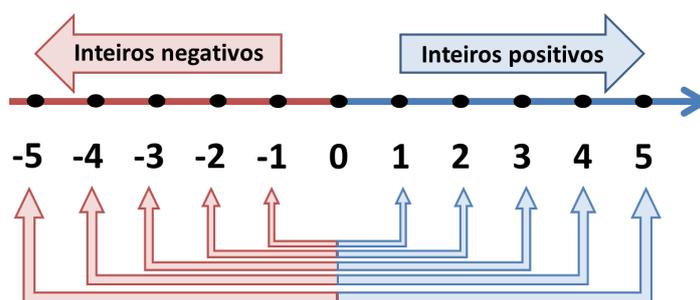


Figura 13: Reta suporte orientada que representa, por meio dos pontos, os números inteiros, além dos pares de números opostos.¹²

¹² Fonte: próprio autor.

Um número que corresponde ao ponto A na reta suporte orientada é simétrico (ou oposto) ao número que corresponde ao ponto B quando $d(A, O) = d(B, O)$, onde O representa a posição do número 0 (zero) na reta suporte e $d(X, Y)$ denota a distância do ponto X ao ponto Y .

Como consequência da descrição anterior, o único inteiro cujo oposto é igual a si próprio é o zero, visto que $d(O, O) = 0$.

Alguns pontos importantes que devem ser comentados com os alunos quando lhes é apresentada a reta suporte orientada:

- a reta suporte orientada tem a função básica de permitir a visualização dos números inteiros: os inteiros negativos, o zero, os inteiros positivos e os pares de números opostos;
- a reta suporte poderia estar em qualquer direção (horizontal, vertical, inclinada), da mesma forma que a sua orientação poderia ser diferente (da direita para a esquerda, de cima para baixo, de baixo para cima, etc.). De modo geral, a representação é feita por uma reta horizontal com orientação dos inteiros positivos da esquerda para direita¹³;
- apesar do traçado cheio da reta suporte orientada, não há valores entre dois valores inteiros (não no conjunto dos inteiros): esta informação deve ficar muito clara para os alunos.

Após a construção adequada dos números inteiros (ou, na Educação Básica, a apresentação do conjunto \mathbb{Z}), a operação $3 - 7 = -4$ que não tinha sentido em \mathbb{N} agora fica bem determinada, visto que dois inteiros subtraídos resultarão em um número inteiro. Aos alunos pode até ser mostrada a ideia de que a subtração é uma adição de um inteiro com o simétrico de um outro inteiro (vide a Definição 3.2.8): desta forma, $3 - 7 = -4$ pode ser escrito como $3 + (-7) = -4$ mas, de forma, geral, aceita-se (e usa-se com frequência) a primeira forma.

Mesmo com a construção de \mathbb{Z} , a divisão entre dois inteiros continua não sendo fechada para todos os casos, — por exemplo, $3 \div 7 = \frac{3}{7} \notin \mathbb{Z}$. Desta forma, há a necessidade (mais uma vez) de se expandir os conjuntos numéricos para que possam abarcar a questão da divisão — repetindo as premissas que foram adotadas de \mathbb{N} para \mathbb{Z} .

13 Provavelmente devido à escrita ocidental, cujo fluxo é da esquerda para a direita.

3.3 NÚMEROS RACIONAIS

Pelo ponto de vista teórico, a construção do conjunto dos números racionais partindo do conjunto dos números inteiros terá um processo parecido ao daquele que construiu o conjunto dos números inteiros partindo do conjunto dos números naturais. Para se ter uma ideia do processo inicial, será considerada a ideia básica e intuitiva conhecida primariamente como “divisão” no Ensino Fundamental 1. Serão descritos alguns valores obtidos por meio do processo de repartição intuitivo de um número em quantidades iguais — o mesmo utilizado no Ensino Fundamental 1 — indicado pelo símbolo \star .

$$10 = 10 \star 1 = 20 \star 2 = 30 \star 3 \quad (3.12)$$

$$5 = 10 \star 2 = 15 \star 3 = 50 \star 10 \quad (3.13)$$

Observando 3.12 é possível perceber que:

- $10 \cdot 2 = 1 \cdot 20 = 20$;
- $10 \cdot 3 = 1 \cdot 30 = 30$;
- $20 \cdot 3 = 2 \cdot 30 = 60$.

De forma análoga, em 3.13:

- $10 \cdot 3 = 2 \cdot 15 = 30$;
- $10 \cdot 10 = 2 \cdot 50 = 100$;
- $15 \cdot 10 = 3 \cdot 50 = 150$.

Observando ainda 3.12 e 3.13, se o dividendo e o divisor da divisão de cada membro de uma igualdade for escrito em forma de par ordenado, é possível perceber a existência da seguinte relação:

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ para } a \cdot d = b \cdot c, \quad (3.14)$$

sendo que tal relação é de equivalência¹⁴ no universo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.¹⁵

¹⁴ A dedução pode ser vista em [11].

¹⁵ $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Desta forma, é possível definir um número racional como uma classe de equivalência. Com efeito, o número 8 pode ser definido pela seguinte classe de equivalência:

$$\overline{(16, 2)} = \{(8, 1), (24, 3), (48, 6), \dots\}. \quad (3.15)$$

Tentando generalizar o que foi visto acima:

Definição 3.3.1. Dado $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denota-se por $\frac{a}{b}$ (lê-se “a sobre b”) a classe de equivalência do par (a, b) pela relação \sim (3.14). Assim:

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (x, y) \sim (a, b)\}.$$

A Definição 3.3.1 fornece um significado para o símbolo $\frac{a}{b}$, denominado *fração*: é uma classe de equivalência através da relação 3.14. Desta forma, é possível determinar o conjunto \mathbb{Q} , que é o conjunto dos números racionais:

Definição 3.3.2.

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) / \sim = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Na Educação Básica a notação é facilitada, pois não há alusão sobre o conjunto quociente e relações de equivalência:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}. \quad (3.16)$$

Conforme esperado, o conjunto \mathbb{Q} admite operações e uma ordem (que será vista posteriormente) em relação aos seus elementos:

Definição 3.3.3. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ elementos de \mathbb{Q} . A *adição* é assim definida:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Definição 3.3.4. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ elementos de \mathbb{Q} . A *multiplicação* é assim definida:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

É importante salientar que ambas operações estão bem definidas, isto é, se

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ e } \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \quad (3.17)$$

então

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} \text{ e } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}. \quad (3.18)$$

Por meio de exemplos:

Exemplo 3.12.

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5+6}{3 \cdot 5} = \frac{11}{15} \\ \frac{2}{6} + \frac{4}{10} = \frac{20+24}{6 \cdot 10} = \frac{44}{60} = \frac{11}{15} \end{cases}$$

Exemplo 3.13.

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15} \\ \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2 \cdot 4}{6 \cdot 10} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

Os resultados apresentados nos Exemplos 3.12 e 3.13 estão garantidos pela *propriedade fundamental das proporções*, que diz:

Teorema 3.3.1. Se (a, b) e (a', b') são elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, então

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = ba'.$$

Definidas as operações de adição e multiplicação em \mathbb{Q} , o próximo teorema (cuja dedução pode ser vista em [11]) garante que \mathbb{Q} tem propriedades algébricas que o conjunto \mathbb{Z} possui e, exclusivamente, uma nova propriedade (M_4):

Teorema 3.3.2. Em \mathbb{Q} :

- $\frac{0}{1}$ é o elemento neutro para a adição;
- $\frac{1}{1}$ é o elemento neutro para a multiplicação;
- (M_4) Dado um racional $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$, existe $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{1}$, onde $\frac{c}{d}$ é denominado inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$.

O inverso multiplicativo permite definir a *divisão* de números racionais, desde que o segundo elemento da divisão seja não nulo:

Definição 3.3.5. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais tais que $\frac{c}{d} \neq 0$: define-se como *divisão* (\div) de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ o seguinte produto:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Neste ponto, é importante observar que o conjunto dos números racionais admite duas operações — adição e multiplicação —, onde a primeira está munida de quatro propriedades: associatividade (A_1), comutatividade (A_2), existência de um único elemento neutro (A_3) e a existência de um elemento simétrico (A_4). Da mesma forma, a multiplicação também está munida de quatro propriedades: associatividade (M_1), comutatividade (M_2), existência de um único elemento neutro (M_3) e a existência de um elemento inverso para elementos não nulos (M_4). É importante ressaltar que \mathbb{Q} comporta a propriedade distributiva (D), propriedade esta que relaciona a adição e a multiplicação.

Além de todas as propriedades admitidas para a adição e a multiplicação, \mathbb{Q} também admite uma relação de ordem — e detalhes podem ser encontrados em [11]:

Definição 3.3.6. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais com b e d positivos. Então:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ quando } ad \leq bc.$$

Assim como em \mathbb{Z} , também são válidos os seguintes resultados:

Teorema 3.3.3. A relação \leq é uma relação de ordem em \mathbb{Q} , sendo compatível com as operações neste conjunto, isto é, para α, β, γ racionais, são válidas:

- $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$;
- $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \geq \frac{0}{1} \Rightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma$;
- $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \leq \frac{0}{1} \Rightarrow \alpha\gamma \geq \beta\gamma$;

Teorema 3.3.4 (Lei da Tricotomia). Dados r e s racionais, uma, e apenas uma, das seguintes situações ocorre:

$$r = s, \text{ ou } r < s \text{ ou } r > s.$$

Como \mathbb{Q} admite as propriedades A_1, A_2, A_3 e A_4 para adição, M_1, M_2, M_3 e M_4 para a multiplicação e D para relacionar ambas operações, além de admitir uma relação de ordem que é compatível com as operações de adição e multiplicação, \mathbb{Q} é classificado como uma estrutura algébrica¹⁶ denominada *corpo ordenado*.

Definição 3.3.7. Seja \mathbb{K} um conjunto onde estão definidas duas operações: $+$ e \cdot . O conjunto \mathbb{K} será um *corpo* quando $A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4$ e D estiverem todas satisfeitas.

Definição 3.3.8. A estrutura algébrica $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ é um *corpo ordenado* se:

- $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um *corpo*;
- \leq é uma relação de ordem compatível com as operações $+$ e \cdot .

Finalmente, da mesma forma que foi mostrado que existe uma cópia de \mathbb{N} em \mathbb{Z} , a função

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, f(n) = \frac{n}{1}, n \in \mathbb{Z} \quad (3.19)$$

¹⁶ Mais sobre corpos (e anéis) pode ser encontrado em [9].

preserva as operações e a relação de ordem existentes em \mathbb{Z} no conjunto \mathbb{Q} . Desta forma, \mathbb{Q} possui uma cópia algébrica de \mathbb{Z} , sendo esta cópia representada pelo conjunto

$$f(\mathbb{Z}) = \left\{ \frac{n}{1} : n \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (3.20)$$

Teorema 3.3.5 (Imersão de \mathbb{Z} em \mathbb{Q}). *Seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(n) = \frac{n}{1}$. A função f é injetora e tem as seguintes propriedades:*

1. $f(m + n) = f(m) + f(n)$;
2. $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$;
3. se $m \leq n$, então $f(m) \leq f(n)$.

Uma característica interessante que pode ser observada em \mathbb{Q} (mas não em \mathbb{N} e \mathbb{Z}) é a possibilidade de sempre ser possível determinar ao menos um racional entre dois racionais quaisquer. Os próximos dois teoremas ajudarão a mostrar este resultado.

Teorema 3.3.6. *Sejam p e q racionais, com $p < q$. Então:*

$$p < \frac{p+q}{2} < q.$$

Demonstração. Como $p < q$ e pelas relações de ordem existentes em \mathbb{Q} , é válido dizer que

$$p + p < q + p \quad (3.21)$$

e, portanto,

$$p < \frac{p+q}{2}. \quad (3.22)$$

Aplicando raciocínio análogo ao anterior:

$$p + q < q + q \quad (3.23)$$

donde

$$\frac{p+q}{2} < q. \quad (3.24)$$

Finalmente, como $<$ é relação de ordem, pela transitividade:

$$p < \frac{p+q}{2} < q. \quad (3.25)$$

□

Corolário 3.3.7. *Entre dois números racionais quaisquer existe pelo menos um número racional.*

Demonstração. Como p e q são racionais, a soma $p + q$ é racional e a razão $\frac{p+q}{2}$ também o é. Desta forma, utilizando o Teorema 3.3.6, obtém-se

$$p < \frac{p+q}{2} < q. \quad (3.26)$$

Assim, o número racional $\frac{p+q}{2}$ satisfaz a condição do enunciado. □

Considerando a Educação Básica, os números racionais não negativos acabam sendo estudados de forma antecipada em relação aos números inteiros negativos (e, por consequência, os racionais negativos), tendo em vista que as frações racionais podem ser largamente utilizadas para a representação da repartição de objetos e quantidades (inteiros): desta forma, uma fração da forma $\frac{a}{b}$ — onde a é chamado de *numerador* e b é chamado de *denominador* — representa um inteiro (ou quantidade) repartido em b partes e, destas partes, a partes serão consideradas/tomadas/utilizadas.

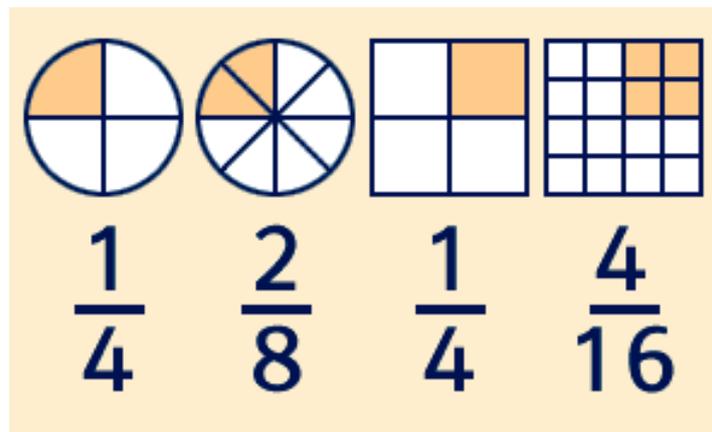


Figura 14: Representações gráficas largamente utilizadas no Ensino Fundamental 1 para o ensino de frações (em especial, vê-se frações equivalentes).¹⁷

Historicamente, os egípcios antigos realizavam operações aritméticas utilizando frações com numerador um (frações unitárias); os gregos antigos utilizavam razões entre segmentos e a divisão dos mesmos em partes — só para citar alguns exemplos que levam a acreditar que a ideia dos racionais não negativos era muito mais natural se comparada ao uso e aceitação dos inteiros negativos.

¹⁷ Fonte: disponível em: <<https://goo.gl/e50QUN>> Acesso em: jan. 2017.

Ainda no âmbito histórico, a Escola (ou Seita) Pitagórica enfrentou uma grande crise ao verificar que existia uma categoria de segmentos (lembrando que os gregos utilizavam segmentos de reta para efetuar as suas operações) que não poderia ser obtida por meio de múltiplos segmentos unitários (um padrão) — o que corresponderia aos números naturais — e, tampouco, por meio de frações de segmentos (o que corresponderia aos racionais).

Desta forma, conforme será visto nas próximas seções, por mais que seja possível encontrar infinitos números racionais (aplicando exaustivamente o Corolário 3.3.7) dentro de um intervalo numérico qualquer, existem valores que não se categorizam como racionais: portanto, se um modelo geométrico (uma reta) fosse utilizado de tal modo que cada número racional fizesse correspondência com um único ponto pertencente à reta, ainda assim existiriam “espaços vazios” na reta — isto é, não existiriam racionais aptos para serem relacionados com tais “vazios”.

Tendo como base estes últimos raciocínios, os próximos capítulos tentarão elucidar tais observações que, assim como causaram um grande impacto em uma escola/seita ligada ao estudo da matemática, também causa dúvidas entre alunos e até mesmo entre professores da Educação Básica.

3.4 NÚMEROS REAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Apesar da larga utilização dos números reais a partir de certo ponto da Educação Básica (geralmente no 8º ano do Ensino Fundamental 2), a explicação do conceito de número real para o público alvo é dificultada pelos níveis de complexidade e abstração existentes no processo formal de construção. De modo geral, são utilizados alguns argumentos para “convencer”¹⁸ os alunos da necessidade e, por consequência, da existência de números que não sejam aqueles que até então eram conhecidos (naturais, inteiros, racionais).

O roteiro que será dado a seguir cobre os principais pontos da argumentação que apresenta uma nova categoria de números: os *números irracionais*. Os passos que serão discutidos são aqueles que, em geral, são adotados em livros didáticos voltados para a Educação Básica.

18 É realmente difícil julgar o método escolhido pelos livros didáticos, visto a amplitude de teorias necessárias para a construção formal de todos os conjuntos numéricos — teorias que estão totalmente fora do escopo dos alunos.

1. Os números racionais podem ser escritos em sua forma fracionária mas, também, admitem uma *expansão decimal*. Como exemplos:

$$\frac{1}{2} = 0,5; \frac{1}{3} = 0,\bar{3}; \frac{11}{90} = 0,1\bar{2}; \frac{22}{7} = 3,\overline{142857}. \quad (3.27)$$

Nota-se que a primeira fração possui uma *representação decimal finita* e as três outras apresentam *representação decimal infinita e periódica*, também chamada de *dízima periódica*.

2. Valores que são representados por dízimas periódicas podem ser expressos por meio de frações denominadas *frações geratrizes*. Como exemplos:

$$x = 0,2\bar{2} \Leftrightarrow 10x = 2,2\bar{2} \Leftrightarrow 10x - x = 2,2\bar{2} - 0,2\bar{2} \Leftrightarrow 9x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{9}; \quad (3.28)$$

$$x = 0,1\bar{2} \Leftrightarrow 10x = 1,2\bar{2} \Leftrightarrow 100x = 12,\bar{2} \quad (3.29)$$

$$\Leftrightarrow 100x - 10x = 12,\bar{2} - 1,2\bar{2} \Leftrightarrow 90x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{90}.$$

Em 3.28 tem-se uma *dízima periódica simples* e em 3.29 uma *dízima periódica composta*.

3. É possível encontrar, porém, representações decimais infinitas e não periódicas, como ilustram os Exemplos 3.30 e 3.31 — vale notar que nos exemplos a seguir o símbolo “...” não representará um período de repetição:

$$a = 0,1101001000100001000001000000 \dots \quad (3.30)$$

$$b = 0,135791113151719212325272931 \dots \quad (3.31)$$

Apesar das “leis de formação” dos valores 3.30 e 3.31 serem relativamente fáceis de serem percebidas — as casas decimais do primeiro número são todas potências de 10 na sequência $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$ e, no segundo número, as casas decimais são os elementos das sequência dos números naturais ímpares — não é possível efetuar o processo para escrevê-los na forma de fração geratriz.

Este ponto pode ser muito delicado em sala de aula, visto que alunos mais perspicazes poderiam fazer a seguinte pergunta: “Como efetuar uma adição entre esses

dois números?”. Na verdade, é necessário ter um conhecimento sobre sequências e seus limites para ter um entendimento maior sobre a questão da adição (ou outras operações) entre os dois valores apresentados. Mais sobre essa ideia pode ser encontrado em [19].

4. Por certos meios geométricos também existe a possibilidade de encontrar números não racionais. Após os trabalhos com o Teorema de Pitágoras, por exemplo, é possível determinar a medida da diagonal de um quadrado qualquer — já que é possível, através do traçado de uma das diagonais, determinar dois triângulos retângulos congruentes. Em especial, tomando um quadrado de lado 1, sua diagonal terá medida $\sqrt{2}$: porém, ficará a dúvida para os alunos de qual é o número que, elevado ao quadrado, resulta em 2 (ver Tabela 3).

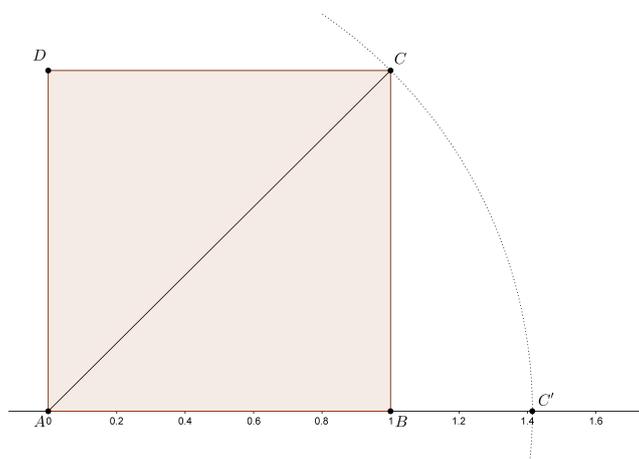


Figura 15: $\sqrt{2}$ é a medida da diagonal de um quadrado de lado 1: $AC = AC' = \sqrt{2}$. Vê-se que a sua projeção na reta real terá os pontos A (origem) e C' e que $\sqrt{2} > 1,4$.¹⁹

x	x^2
1,4	1,9881
1,41	1,999396
1,414	1,99996164
1,4142	1,9999899241
1,414213	1,999998409369
1,4142135	1,99999982358225
1,41421356	1,99999999328787

Tabela 3: Alguns valores aproximados de $\sqrt{2}$.

¹⁹ Fonte: próprio autor.

5. Os alunos começam a perceber que o conjunto dos números racionais não é suficiente para conter todos os tipos de número, como aqueles apresentados nos passos 3 e 4, por exemplo. Desta forma, é razoável considerar a existência de um novo conjunto numérico que contenha os números racionais (já conhecidos) e esta nova categoria de números que não admitem representações decimais finitas ou infinitas e periódicas. Daí, surge uma nova categoria de números, denominados *irracionais* (algumas obras denotam o conjunto por \mathbb{I} ; outros por \mathbb{Q}' , notação esta que fará mais sentido após a introdução do conjunto dos números reais, denotado por \mathbb{R}) — justamente por não admitirem uma representação²⁰ racional fracionária, isto é, com numerador inteiro e denominador inteiro não nulo.
6. Finalmente, a definição do *conjunto dos números reais*, simbolizado por \mathbb{R} , é dada: é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. A principal diferença entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números reais é que, neste último, todo e qualquer número seu corresponde a um, e apenas um, ponto da reta numérica (também chamada de *reta real*, vide Figura 16) e vice-versa. Esta característica única do conjunto dos números reais é conhecida como *completude* (ou, para alguns autores, *completudeza*).

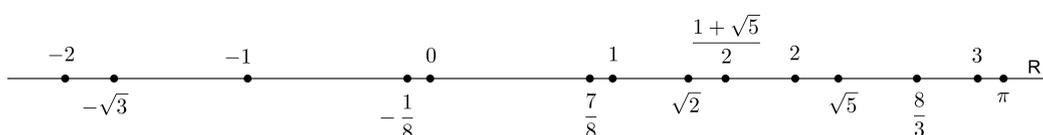


Figura 16: Representação da reta real \mathbb{R} e de alguns de seus infinitos valores.²¹

Utilizando a linguagem de conjuntos:

Definição 3.4.1. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{Q}'\}$.

²⁰ Aqui, deve-se tomar cuidado: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é um número irracional, apesar de estar escrito na forma de uma razão: porém, tal razão não possui o numerador inteiro e, sim, irracional.

²¹ Fonte: próprio autor.

É importante notar que, pela definição, não é possível existir algum número que seja racional e irracional simultaneamente. Posto isto, um diagrama que costuma ser utilizado na Educação Básica para representar as relações entre os conjuntos numéricos pode ser visto na Figura 17.

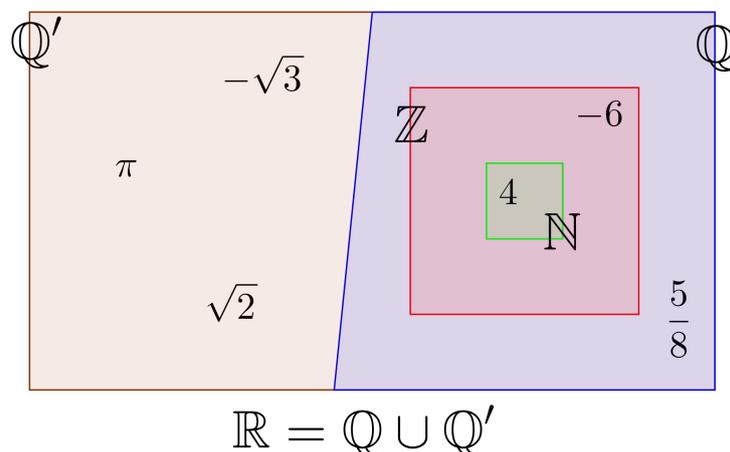


Figura 17: Representação das relações entre os conjuntos numéricos e alguns de seus representantes.²²

Desta forma, é feita a “construção” dos números reais (e irracionais) com a matemática disponível no Ensino Básico. Em [11] há um resumo interessante sobre as abordagens da reta real (associar cada número real a um ponto da reta e vice-versa) e da aceitação dos números que possuem representações decimais infinitas e não periódicas:

No Ensino Fundamental, os números reais são geralmente introduzidos de uma maneira um tanto empírica e seu estudo não costuma ir além de algumas operações algébricas elementares. [...] em ambas as abordagens, somos conduzidos a admitir a existência de números não racionais: no primeiro caso, para dotar todos pontos da reta de uma abscissa e, no segundo, para conceber qualquer desenvolvimento decimal como número (no caso, os não periódicos). Em ambos os casos, no entanto, raramente se toca na natureza desses novos números.

Ao que parece, um dos aspectos falhos das abordagens do Ensino Básico é a falta de explicação, por mais rasa que seja, das grandezas comensuráveis e grandezas incommensuráveis — que acaba sendo o ponto de partida para uma melhor distinção entre

²² Fonte: próprio autor.

os racionais e os irracionais. Esta análise será feita na próxima seção, visando trazer um melhor entendimento sobre os irracionais.

3.5 NÚMEROS IRRACIONAIS E REAIS

A ideia de grandezas incomensuráveis (e comensuráveis) está relacionada diretamente com a medição de segmentos — lembrando que medir algo é compará-lo com um padrão pré-estabelecido. Neste caso, a medição de segmentos ocorre por meio da comparação do mesmo com um segmento padrão denominado *unidade*: u . Posto isto, seguem algumas situações, onde a Figura 18 visa auxiliar o entendimento das ideias:

- seja \overline{AB} um segmento maior que a unidade: o segmento u será transportado para um de seus extremos (digamos, o ponto A) e será colocado um número n inteiro de vezes sobre \overline{AB} , um após o outro. Se \overline{AB} comportar u exatamente n vezes, será dito que $AB = n \cdot u$;
- seja \overline{AB} um segmento maior que a unidade: o segmento u será transportado para um de seus extremos (digamos, o ponto A) e será colocado um número n inteiro de vezes sobre \overline{AB} , um após o outro. Se \overline{AB} não comportar u exatamente n vezes, será considerada a medida de \overline{AB} (digamos, v) que não comportou a unidade u e, a partir desta medida, será procurado um segmento w que caiba um número n inteiro de vezes em u e, ao mesmo tempo, que caiba um número m inteiro de vezes em v . Se for possível encontrar este segmento w , será dito que \overline{AB} e u são segmentos *comensuráveis*.
- seja \overline{AB} um segmento menor que a unidade: será considerada a medida de \overline{AB} (digamos, v) que não comportou a unidade u e, a partir desta medida, será procurado um segmento w que caiba um número n inteiro de vezes em u e, ao mesmo tempo, que caiba um número m inteiro de vezes em v . Se for possível encontrar este segmento w , será dito que \overline{AB} e u são segmentos *comensuráveis*.

Nos três casos mostrados anteriormente, os segmentos estudados terão medidas inteiras ou racionais (frações) justamente por existir a relação de comensurabilidade. Agora, é possível mostrar que nem sempre dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} serão comensuráveis, isto é, não existirá segmento algum que possa caber exatamente n vezes em

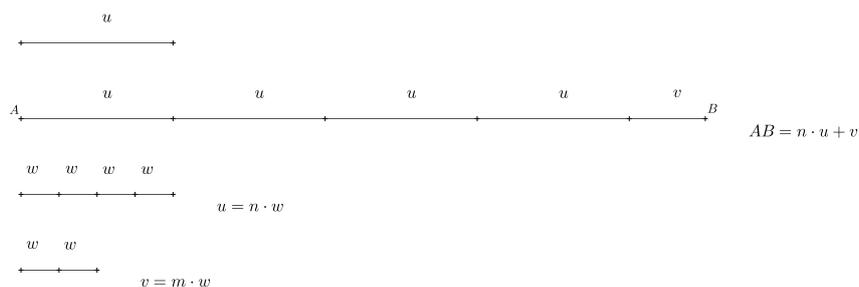


Figura 18: A ideia de comensurabilidade entre segmentos, onde u é o segmento que denota a unidade.²³

\overline{AB} e exatamente m vezes em \overline{CD} : quando isso ocorrer, será dito que \overline{AB} e \overline{CD} são segmentos *incomensuráveis*.

Historicamente, acredita-se que a escola pitagórica se deparou pela primeira vez com a possibilidade da existência dos incomensuráveis. De acordo com [19]:

A ilusão da comensurabilidade durou até o século 4º antes de Cristo. Naquela época, em Crotona, sul da Itália, havia uma seita filosófico-religiosa, liderada por Pitágoras. Um dos pontos fundamentais de sua doutrina era o lema “Os números governam o mundo”. (Lembremos que números para eles eram números naturais, admitindo-se tomar razões entre esses números, formando as frações.) Uma enorme crise, que abalou os alicerces do pitagorismo e, por algum tempo, toda a estrutura da Matemática grega, surgiu quando, entre os próprios discípulos de Pitágoras, alguém observou que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de reta incomensuráveis.

O ocorrido foi tão grave que, segundo [7], Pitágoras ordenou voto de silêncio em relação ao ocorrido, mas um de seus discípulos (Hipaso) contrariou o voto e foi assassinado.

O argumento mais provável para a obtenção deste resultado da incomensurabilidade é através do uso do Teorema de Pitágoras para a determinação da medida da diagonal do quadrado $ABCD$ (vide Figura 19) e a suposição de que um segmento u pode preencher n vezes o segmento \overline{AB} e m vezes o segmento \overline{AC} — que é justamente a diagonal do quadrado. O Teorema 3.5.1 mostrará em detalhes o resultado da incomensurabilidade.

Teorema 3.5.1. *O lado de um quadrado e a sua diagonal são segmentos incomensuráveis.*

24 Fonte: próprio autor.

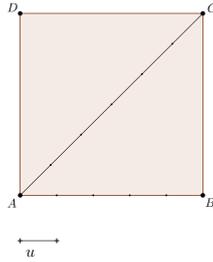


Figura 19: O lado de um quadrado e a sua diagonal são segmentos incomensuráveis.²⁴

Demonstração. Suponha que exista um segmento u tal que $AB = n \cdot u$ e $AC = m \cdot u$. Desta forma, aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (AB)^2 + (BC)^2 &= (AC)^2 \\ (n \cdot u)^2 + (n \cdot u)^2 &= (m \cdot u)^2 \\ 2 \cdot n^2 \cdot u^2 &= m^2 \cdot u^2 \\ 2 \cdot n^2 &= m^2. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Agora, pela unicidade da decomposição de um número em produto de fatores primos (Teorema Fundamental da Aritmética), a igualdade $2 \cdot n^2 = m^2$ não pode ocorrer, visto que o termo esquerdo da igualdade possui uma quantidade ímpar de fatores primos e o membro direito da igualdade possui um número par de fatores primos: portanto, não é possível encontrar o segmento unitário u proposto no início. Assim, o lado de um quadrado e a sua diagonal são segmentos incomensuráveis.²⁵ \square

Desta forma, fica clara a existência de medidas que não são racionais: estes números são, atualmente, denominados *números irracionais* e, diferente dos números racionais, os números irracionais possuem *forma decimal infinita e não-periódica*. Porém, uma pergunta pode agora ser levantada: como formalizar o conceito de número irracional, relacionando-o com todos os conjuntos numéricos construídos até agora?

Existem algumas possibilidades de abordagens para a formalização dos números irracionais e o relacionamento deste tipo de número com os demais (racionais, inteiros

²⁵ Existem outras demonstrações sobre a existência da incomensurabilidade de segmentos, algumas das quais podem ser vistas em [2].

e naturais) — no que se costuma denominar *conjunto dos números reais*, denotado pelo símbolo \mathbb{R} . Desta forma, seguem possibilidades para definir, formalmente, o conjunto dos números reais:

- como classes de números racionais ou secções (cortes) de Dedekind;
- como sucessões de intervalos encaixantes (Cantor-Dedekind);
- como um corpo ordenado completo.

Como não é o escopo do trabalho a construção dos números, os comentários acerca da teoria de Richard Dedekind — os chamadas *cortes de Dedekind* — cobrirão de forma superficial os aspectos mais relevantes: muitos livros de Análise Matemática, dentre eles [1], [20], além da obra [11], abordam os aspectos da construção dos números reais em detalhes e podem ser consultados. Inicialmente, seja vista a definição de um corte de Dedekind — definição esta que é utilizada em [11].

Definição 3.5.1 (Corte de Dedekind). Um conjunto α de números racionais diz-se um *corte* se satisfizer as seguintes condições:

- $\emptyset \neq \alpha \neq \mathbb{Q}$;
- se $r \in \alpha$ e $s < r$ (s racional), então $s \in \alpha$;
- em α não existe elemento máximo.

Existem cortes que serão caracterizados por números racionais; de forma análoga, existem cortes que serão caracterizados por números não racionais (irracionais). A Expressão 3.33 determina um corte caracterizado por um número racional (no caso, o número $\frac{1}{3}$):

$$E = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x < \frac{1}{3} \right\} \text{ e } D = \left\{ y \in \mathbb{Q} : y \geq \frac{1}{3} \right\}. \quad (3.33)$$

O corte indicado na Expressão 3.33 possui um *elemento de separação* que é o racional $\frac{1}{3}$: desta forma, o racional $\frac{1}{3}$ pode ser encarado como o *supremo* do conjunto E ou o *ínfimo* do conjunto D . Para que o raciocínio fique mais claro, seguem algumas definições (que podem ser vistas com maiores detalhes em [21]):

Definição 3.5.2 (Cota superior). Seja F um corpo ordenado e A um subconjunto de F . Diz-se que um elemento $x \in F$ é uma *cota superior de A* , se $x \geq y$, para todo $y \in A$. Neste caso, é dito que A é *limitado superiormente*.

Definição 3.5.3 (Cota inferior). Seja F um corpo ordenado e A um subconjunto de F . Diz-se que um elemento $x \in F$ é uma *cota inferior de A* , se $x \leq y$, para todo $y \in A$. Neste caso, é dito que A é *limitado inferiormente*.

Definição 3.5.4 (Supremo de um conjunto). Seja F um corpo ordenado e A um subconjunto de F limitado superiormente. O *supremo de A* , denotado por $\sup A$, é a menor das cotas superiores de A .

Definição 3.5.5 (Ínfimo de um conjunto). Seja F um corpo ordenado e A um subconjunto de F limitado inferiormente. O *ínfimo de A* , denotado por $\inf A$, é a maior das cotas inferiores de A .

Com o entendimento dos conceitos de cotas (superiores e inferiores), supremo e ínfimo de um conjunto, é possível determinar um tipo de corte que sempre é caracterizado por um número racional:

Teorema 3.5.2. Se $q \in \mathbb{Q}$ e $E = \{x \in \mathbb{Q} : x < q\}$, então E é um corte e q é a menor cota superior de E .

O que definitivamente auxilia a determinar os números irracionais são, justamente, cortes que não são determinados por números racionais. Um exemplo deste tipo de corte será dado no Teorema 3.5.3, cuja demonstração pode ser vista em [11]:

Teorema 3.5.3. Seja $E = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \text{ ou } x < 0\}$. Então E é um corte que não é racional.

O conjunto indicado no Teorema 3.5.3 e o seu conjunto complementar E' podem ser interpretados, respectivamente, como o conjunto das aproximações por falta do número $\sqrt{2}$ e como o conjunto das aproximações por excesso do número $\sqrt{2}$. De forma resumida, E não admite um supremo racional: o número que satisfaz esta necessidade é o número $\sqrt{2}$, que é um número irracional. Com estas ideias, foi possível verificar que nem todos os cortes de Dedekind podem ser caracterizados por números racionais.

Agora, para que a construção dos números reais via cortes de Dedekind seja completa, todas as principais características que foram verificadas nos conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{Q} — tais como as operações de adição e multiplicação e suas propriedades, existência de uma relação de ordem compatível com essas operações e uma função injetiva que imerge \mathbb{Q} no conjunto de todos os cortes — devem ser verificadas para o conjunto de todos os cortes de Dedekind. Agora, vale registrar a definição do conjunto dos números reais via cortes de Dedekind:

Definição 3.5.6. O conjunto de todos os cortes de Dedekind é denominado *conjunto dos números reais* e denotado por \mathbb{R} . Os números racionais serão identificados — por meio da função injetora que relaciona um racional q com o corte $E = \{x \in \mathbb{Q} : x < q\}$ — com os *cortes racionais*. Todo corte que não for racional será um *número irracional*.

A maior motivação para a expansão de \mathbb{Q} para \mathbb{R} era o “preenchimento de lacunas”: por mais que um número infinito de números racionais possa ser determinado em um intervalo numérico qualquer (basta a aplicação sucessiva do Teorema 3.3.6), foi verificado que alguns números não poderiam ser encontrados via a aplicação do mesmo teorema — aqueles cuja representação é infinita e não periódica; daí a necessidade de uma categoria de números não racional (irracionais).

Portanto, os cortes caracterizados por números irracionais servem como o complemento necessário para a insuficiência dos racionais, tornando o conjunto dos números reais um *corpo ordenado completo*. Desta forma, a *completude* (ou *completeza*) dos números reais é a característica chave que o distingue do conjunto dos números racionais.

Para finalizar este capítulo, vale ressaltar, também, que não foi explorado (e nem era o foco) neste texto as noções de conjuntos finitos e infinitos, além das características de enumerabilidade, não enumerabilidade e cardinalidade dos conjuntos. Para um tratamento adequado sobre tais características, fica a sugestão das obras que foram utilizadas como base ao longo deste capítulo.

4

A IRRACIONALIDADE DO NÚMERO π : CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para que a demonstração da irracionalidade do número π possa ser melhor compreendida, faz-se necessário o conhecimento de (ou ao menos certa familiaridade com) alguns conceitos matemáticos, bem como de estratégias de demonstrações.

Sobre a estratégia utilizada para realizar demonstrações, a que será usada para efetuar a prova desejada é a do método da *redução ao absurdo*, que será explicado em detalhes na próxima seção; como exemplo, será trabalhada uma demonstração muito conhecida que utiliza o método da redução ao absurdo: a demonstração da irracionalidade do número $\sqrt{2}$.

Após o entendimento da estratégia de demonstração, será necessário utilizar conceitos de alguns tópicos: polinômios, Binômio de Newton, noções de Cálculo Diferencial e Integral (derivadas, integrais e convergência de séries), sendo que alguns teoremas serão utilizados sem as suas devidas deduções — visando não escapar do escopo do trabalho. A maior parte dos resultados utilizados podem ser encontrados em obras de Cálculo (e/ou Análise) voltadas para os anos iniciais dos cursos de exatas do Ensino Superior, sendo que serão indicadas as obras para a consulta dos principais resultados utilizados.

Feitos os preâmbulos necessários, as próximas seções cobrirão os aspectos mais essenciais para o melhor entendimento da demonstração da irracionalidade do número π .

4.1 REDUÇÃO AO ABSURDO: O MÉTODO E UM EXEMPLO

Uma das várias técnicas para a demonstração de assertivas matemáticas é a redução ao absurdo. De acordo com [2]:

As chamadas *demonstrações por redução ao absurdo*, ou simplesmente *demonstrações por absurdo* ou, ainda *demonstrações por contradição*, seguem um roteiro parecido com o das demonstrações por contraposição. Para provar que $A \Rightarrow B$ começamos supondo A verdadeira e B falsa. Esta última é chamada “hipótese do raciocínio por absurdo”, uma suposição apenas temporária, até chegarmos a uma contradição, um absurdo. Somos então forçados a remover a hipótese do raciocínio por absurdo e concluir que B é verdadeira.

Talvez uma das demonstrações mais utilizadas para ilustrar o método da redução ao absurdo seja a prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$ — demonstração, inclusive, que costuma ser feita até mesmo no Ensino Médio devido aos vários aspectos matemáticos contidos na mesma: entendimento da definição de números inteiros e racionais, o conceito de máximo divisor comum entre dois números, números primos entre si e a paridade de valores e de seus respectivos quadrados.

Proposição 4.1.1. $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Suponha que $\sqrt{2}$ seja um número racional, isto é, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$. Sendo assim, é possível escrever:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2b^2 = a^2. \quad (4.1)$$

Analisando $2b^2 = a^2$, verifica-se que a^2 é um número par e, por consequência, a é um número par (se a fosse ímpar, necessariamente a^2 também o seria). Logo, $a = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$2b^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2. \quad (4.2)$$

Com raciocínio análogo ao utilizado para mostrar a paridade de a^2 e a , verifica-se que b^2 também é um número par e, por consequência, b também é par. Conclui-se, então, que a e b são ambos pares, isto é, no mínimo possuem um fator 2 em comum, o que contradiz a hipótese de que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Desta forma, chegado ao absurdo,

conclui-se que a hipótese inicial ($\sqrt{2}$ ser racional) era falsa, isto é, $\sqrt{2}$ é um número irracional. \square

4.2 ALGUNS RESULTADOS PRELIMINARES

A demonstração da irracionalidade do número π que será trabalhada no próximo capítulo é aquela apresentada por Ivan Niven em seu artigo [27] intitulado *A simple proof that π is irrational*. No artigo supracitado estão definidas algumas funções — que, em um primeiro momento, não parecem ter conexão com o que se deseja provar — começando por esta:

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} \quad (4.3)$$

onde a e b são números naturais não nulos e n é um número natural.

Desta forma, se faz necessário o entendimento de alguns conceitos referentes à teoria dos polinômios, visando facilitar o conseqüente entendimento desta demonstração da irracionalidade de π : para tanto, é recomendada a leitura de [17] para a recordação dos conceitos e resultados mais importantes. Em especial, uma definição e um teorema serão aqui citados devido ao uso posterior que lhes serão dados:

Definição 4.2.1. Dado o polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, define-se como a *derivada* de f o polinômio

$$f^{(1)}(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 \cdot a_2 x + a_1.$$

Tomando a Definição 4.2.1 e utilizando um raciocínio indutivo, seria possível encontrar o polinômio $f^{(2)}(x)$ — que seria a segunda derivada do polinômio $f(x)$ — ou, de maneira equivalente, seria a primeira derivada do polinômio $f^{(1)}(x)$. No caso em que $a_n = 1$, calculando as sucessivas derivadas do polinômio $f(x)$ até a sua n -ésima derivada¹, encontra-se:

¹ Lembrando que a derivada de uma constante é nula.

$$f^{(1)}(x) = 1 \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1)x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 2 \cdot x + a_1 \quad (4.4)$$

$$f^{(2)}(x) = 1 \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} + \dots + a_2 \cdot 2 \quad (4.5)$$

$$\vdots \quad (4.6)$$

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (4.7)$$

Finalmente, caso seja calculada a $(n+1)$ -ésima derivada de $f(x)$ (ou qualquer derivada de ordem superior a $n+1$), obtém-se

$$f^{(n+1)}(x) = 0, \quad (4.8)$$

visto que $n!$ obtido na n -ésima derivada é uma constante.

Teorema 4.2.1. *Se $f(x)$ é um polinômio cuja raiz θ tem multiplicidade m , $m \geq 1$, isto é, $f(x) = (x - \theta)^m \cdot Q(x)$, onde $Q(x)$ é um polinômio tal que $Q(\theta) \neq 0$, então θ será raiz de multiplicidade $m - 1$ de $f^{(1)}(x)$.*

Demonstração. Tomando $f(x)$, é possível utilizar a regra do produto² para o cálculo de sua derivada:

$$f^{(1)}(x) = m(x - \theta)^{m-1} \cdot Q(x) + (x - \theta)^m \cdot Q^{(1)}(x). \quad (4.9)$$

Colocando em evidência o fator $(x - \theta)^{m-1}$:

$$f^{(1)}(x) = (x - \theta)^{m-1} \cdot [m \cdot Q(x) + (x - \theta) \cdot Q^{(1)}(x)] \quad (4.10)$$

Agora, fazendo $x = \theta$, verifica-se que

$$m \cdot Q(\theta) + (\theta - \theta) \cdot Q^{(1)}(\theta) = m \cdot Q(\theta) \neq 0 \quad (4.11)$$

isto é, θ é uma raiz de multiplicidade $m - 1$ de $f^{(1)}(x)$. □

Agora serão analisados vários aspectos sobre a função $f(x)$ utilizada na demonstração da irracionalidade do número π feita por Niven.

² A regra do produto para o cálculo de sua derivada: $\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f^{(1)}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g^{(1)}(x)$.

Em primeiro lugar, o polinômio que define a função em questão tem grau $2n$: basta notar que ele pode ser escrito como

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} = \frac{[x(a-bx)]^n}{n!} = \frac{(ax-bx^2)^n}{n!} \quad (4.12)$$

e efetuando a expansão binomial, obtêm-se

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{0} a^n \cdot x^n - \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b \cdot x^{n+1} + \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 \cdot x^{n+2} \\ & - \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot b^3 \cdot x^{n+3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} \cdot x^{2n-1} \\ & + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{n} \cdot b^n \cdot x^{2n}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Vale notar que não seria necessário efetuar a expansão binomial para a verificação do grau do polinômio em 4.12, mas a expansão será útil para o melhor entendimento das outras características da função — como, por exemplo, a variação dos expoentes k das potências de x , que vão de n até $2n$, isto é, $n \leq k \leq 2n$.

Considerando as raízes da função e as suas respectivas multiplicidades, vem que $x = 0$ é uma de suas raízes (multiplicidade n) e $x = \frac{a}{b}$ (também de multiplicidade n) é a outra raiz.

Verificando, agora, as funções derivadas de 4.3, a sua primeira derivada terá as raízes $x = 0$ e $x = \frac{a}{b}$, ambas de multiplicidade $n - 1$. Aplicando sucessivamente o Teorema 4.2.1, a $(n - 1)$ -ésima derivada de 4.3 também terá raízes $x = 0$ e $x = \frac{a}{b}$. Desta forma, vem que

$$f^{(n-1)}(0) = f^{(n-1)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0. \quad (4.14)$$

Outra importante característica de 4.3 é dada pelo Teorema 4.2.2:

Teorema 4.2.2. Sendo $f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$, tem-se que

$$f\left(\frac{a}{b} - x\right) = f(x).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{b} - x\right) &= \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{b} - x\right)^n \cdot \left(a - b \cdot \left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{a-bx}{b}\right)^n \cdot (bx)^n \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{(a-bx)^n}{b^n} \cdot b^n x^n = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} = f(x) \end{aligned} \quad (4.15)$$

□

Mais uma característica de $f(x)$ que será utilizada na argumentação da demonstração da irracionalidade de π é a seguinte: toda derivada de ordem $k \geq n$ calculada no ponto $x = 0$ será um número inteiro.

Teorema 4.2.3. $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \forall k \geq n$.

Demonstração. Tomando 4.13 e fazendo

$$\begin{aligned} C_n &= \binom{n}{0} a^n \\ C_{n+1} &= \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b \\ &\vdots \\ C_{2n-1} &= \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} \\ C_{2n} &= \binom{n}{n} \cdot b^n \end{aligned} \tag{4.16}$$

é possível escrever

$$f(x) = \frac{C_n}{n!} \cdot x^n - \frac{C_{n+1}}{n!} \cdot x^{n+1} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{C_{2n-1}}{n!} \cdot x^{2n-1} + (-1)^n \cdot \frac{C_{2n}}{n!} \cdot x^{2n}. \tag{4.17}$$

Calculando a k -ésima derivada de $f(x)$ onde $k = n$, tem-se:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{n!} - \frac{C_{n+1} \cdot (n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot 2}{n!} \cdot x \\ &\quad + \dots + (-1)^n \cdot \frac{C_{2n} \cdot (2n) \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1)}{n!} \cdot x^n. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Fazendo $x = 0$ na Equação 4.18, restará apenas

$$f^{(k)}(0) = \frac{C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{n!} = \frac{C_n \cdot n!}{n!} = C_n \in \mathbb{Z}. \tag{4.19}$$

Efetuando o mesmo raciocínio para as demais k -ésimas derivadas de $f(x)$ tais que $n < k \leq 2n$:

$$\begin{aligned}
 f^{(k+1)}(0) &= \frac{C_{n+1} \cdot (n+1)!}{n!} = C_{n+1} \cdot (n+1) \in \mathbb{Z} \\
 f^{(k+2)}(0) &= \frac{C_{n+2} \cdot (n+2)!}{n!} = C_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \in \mathbb{Z} \\
 &\vdots \\
 f^{(2n)}(0) &= \frac{C_{2n} \cdot (2n)!}{n!} = C_{2n} \cdot n! \cdot \binom{2n}{n} \in \mathbb{Z}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Finalmente, os casos onde $k > 2n$ são imediatos, visto que quaisquer derivadas de tais ordens serão nulas. \square

Agora, conforme visto no Teorema 4.2.2, $f(x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right)$. Derivando ambos os membros desta última igualdade — e fazendo uso da derivada da função composta³, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(x) &= f^{(1)}\left(\frac{a}{b} - x\right) \cdot (0 - 1) = -f^{(1)}\left(\frac{a}{b} - x\right) \\
 f^{(2)}(x) &= -\left[f^{(2)}\left(\frac{a}{b} - x\right) \cdot (0 - 1)\right] = f^{(2)}\left(\frac{a}{b} - x\right) \\
 f^{(3)}(x) &= f^{(3)}\left(\frac{a}{b} - x\right) \cdot (0 - 1) = -f^{(3)}\left(\frac{a}{b} - x\right) \\
 f^{(4)}(x) &= -\left[f^{(4)}\left(\frac{a}{b} - x\right) \cdot (0 - 1)\right] = f^{(4)}\left(\frac{a}{b} - x\right) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Generalizando o que foi visto em 4.21:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot f^{(n)}\left(\frac{a}{b} - x\right), n \in \mathbb{N}. \tag{4.22}$$

Desta forma, por meio do Teorema 4.2.3 e da Equação 4.22, está mostrado que as k -ésimas derivadas de f calculadas nos pontos $x = 0$ e $x = \frac{a}{b}$ assumirão valores inteiros.

³ $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f^{(1)}(g(x)) \cdot g^{(1)}(x)$.

4.3 DEFININDO NOVAS FUNÇÕES AUXILIARES

Após a análise de algumas características importantes da função f — que não são explicitadas no artigo [27] — agora serão definidas mais duas funções auxiliares $g(x)$ e $h(x)$, ambas dependentes de f e de suas derivadas de ordem superior. Definindo tais funções, esta demonstração da irracionalidade do número π poderá ser feita de maneira mais compreensível. Começando pela função $g(x)$, a mesma será definida como segue:

$$g(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \dots + (-1)^n \cdot f^{(2n)}(x). \quad (4.23)$$

A primeira característica importante de 4.23 reside em sua imagem no ponto $x = 0$: $g(0)$ é necessariamente um número inteiro, visto que as derivadas de ordem superior de 4.3 calculadas em $x = 0$ assumem valores inteiros; além disso, o mesmo comportamento vale para $x = \frac{a}{b}$ (vide Equação 4.22). Sintetizando:

$$g(0) \in \mathbb{Z} \text{ e } g\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}. \quad (4.24)$$

A segunda característica útil de 4.23 depende de sua derivada segunda, isto é:

$$g^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - f^{(8)}(x) + \dots + (-1)^n \cdot f^{(2n+2)}(x). \quad (4.25)$$

Aqui é importante ressaltar o valor da $(2n + 2)$ -ésima derivada de 4.3: como é uma derivada de ordem superior a $2n$, tal derivada assumirá valor nulo.

Calculada a derivada segunda de 4.23 e organizando as informações, é possível observar que a soma de ambas resultará na já estudada Função 4.3:

$$g(x) + g^{(2)}(x) = f(x). \quad (4.26)$$

A segunda função auxiliar — $h(x)$ — que será definida agora terá como principal característica relacionar 4.3 e 4.23. A função $h(x)$ será assim definida:

$$h(x) = g^{(1)}(x) \cdot \text{sen}(x) - g(x) \cdot \text{cos}(x). \quad (4.27)$$

Observando 4.27, nota-se que ela foi definida para depender de 4.23; porém derivando⁴ a função $h(x)$ será possível verificar que a mesma passará a depender de 4.3:

$$\begin{aligned}h^{(1)}(x) &= g^{(2)}(x) \cdot \text{sen}(x) + g^{(1)}(x) \cdot \cos(x) - [g^{(1)}(x) \cdot \cos(x) - g(x) \cdot \text{sen}(x)] \\&= g^{(2)}(x) \cdot \text{sen}(x) + g^{(1)}(x) \cdot \cos(x) - g^{(1)}(x) \cdot \cos(x) + g(x) \cdot \text{sen}(x) \\&= \text{sen}(x) \cdot [g^{(2)} + g(x)] \\&= \text{sen}(x) \cdot f(x)\end{aligned}\tag{4.28}$$

Definidas as funções f (ver 4.3), g (ver 4.23) e h (ver 4.27), será possível incluir em todo o processo o número π — que até agora ainda não foi citado. Em especial, observa-se que $h(x)$ depende de funções trigonométricas ($\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$), o que facilita o trabalho com o π .

4 $\frac{d}{dx} \text{sen}(x) = \cos(x)$ e $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\text{sen}(x)$.

A IRRACIONALIDADE DO NÚMERO π : DEMONSTRAÇÃO

Utilizando todas as análises feitas no capítulo anterior, este capítulo tratará da demonstração da irracionalidade do número π . Mais uma vez, as passagens tentarão explicar melhor a demonstração feita no artigo [27].

5.1 INCLUINDO O π NO PROCESSO

Uma ótima maneira de incluir o π em toda a análise realizada é, inicialmente, verificar que a função $h(x) = g^{(1)}(x) \cdot \text{sen}(x) - g(x) \cdot \text{cos}(x)$ é uma primitiva da função $h^{(1)}(x) = \text{sen}(x) \cdot f(x)$. Portanto, por meio do processo de integração desta última, é possível obter a primeira. Nesse sentido, é interessante relembrar o Teorema Fundamental do Cálculo, cuja dedução pode ser vista em [26]:

Teorema 5.1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida no intervalo aberto I e seja $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f . Então, se $[p, q] \subset I$,*

$$\int_p^q f(x)dx = F(q) - F(p).$$

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo e escolhendo como limites de integração os valores 0 e π — valores que possuem imagens bem conhecidas nas funções $\cos(x)$ e $\sin(x)$ ¹, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \sin(x) \cdot f(x) dx \\
 &= g^{(1)}(\pi) \cdot \sin(\pi) - g(\pi) \cdot \cos(\pi) - [g^{(1)}(0) \cdot \sin(0) - g(0) \cdot \cos(0)] \\
 &= g^{(1)}(\pi) \cdot 0 - g(\pi) \cdot (-1) - [g^{(1)}(0) \cdot 0 - g(0) \cdot 1] \\
 &= g(\pi) + g(0).
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Em 4.24, foi mostrado que $g(0)$ é um número inteiro; em contrapartida, nada pode ser estipulado a priori para $g(\pi)$: para tanto, serão necessárias mais algumas análises da função $h^{(1)}(x) = \sin(x) \cdot f(x)$ e de sua integral definida no intervalo $]0, \pi[$.

Iniciando pela função $\sin(x)$, sabe-se que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$; em particular, caso o seu domínio esteja restrito ao intervalo $]0, \pi[$ vem que a sua imagem estará no intervalo $]0, 1[$, isto é:

$$0 < \sin(x) < 1. \tag{5.2}$$

Analisando agora a função $f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$ no intervalo $]0, \pi[$ é possível verificar que

$$0 < x < \pi \Rightarrow 0 < x^n < \pi^n \Rightarrow 0 < \frac{x^n}{n!} < \frac{\pi^n}{n!} \tag{5.3}$$

e

$$x > 0 \text{ e } b > 0 \Rightarrow bx > 0 \Rightarrow -bx < 0 \Rightarrow a - bx < a. \tag{5.4}$$

Agora, como a e b são naturais não nulos, vale $a - bx > 0$ para qualquer $x < \frac{a}{b}$. Desta forma:

$$0 < x < \frac{a}{b} \Rightarrow 0 < a - bx < a \Rightarrow 0 < (a - bx)^n < a^n. \tag{5.5}$$

¹ $\sin(0) = 0; \cos(0) = 1; \sin(\pi) = 0; \cos(\pi) = -1.$

Tomando $x \in]0, \frac{a}{b}[$ e multiplicando membro a membro as desigualdades descritas nas Expressões 5.2, 5.3 e 5.5:

$$0 < \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \cdot \text{sen}(x) < \frac{a^n \cdot \pi^n}{n!} \Rightarrow 0 < \text{sen}(x) \cdot f(x) < \frac{a^n \cdot \pi^n}{n!}. \quad (5.6)$$

Aqui vale comentar que logo será feita a suposição (por absurdo) de que $\frac{a}{b} = \pi$: desta forma, 5.6 será válida no intervalo $]0, \pi[$.

Analisando 5.6, é possível fazer uma breve interpretação geométrica: no intervalo $]0, \pi[$, nenhuma imagem de $\text{sen}(x) \cdot f(x)$ terá valor superior a $\frac{a^n \cdot \pi^n}{n!}$; graficamente, significa dizer que a área abaixo da curva $\text{sen}(x) \cdot f(x)$ será menor que a área determinada pelo retângulo de base $\pi - 0 = \pi$ e altura $\frac{a^n \cdot \pi^n}{n!}$. Como a área da região sob uma curva é dada pelo cálculo da integral definida da função que define a curva, é possível escrever

$$0 < \int_0^\pi \text{sen}(x) \cdot f(x) dx < \frac{a^n \cdot \pi^n}{n!} \cdot \pi \quad (5.7)$$

ou seja,

$$0 < \int_0^\pi \text{sen}(x) \cdot f(x) dx < \frac{a^n \cdot \pi^{n+1}}{n!}. \quad (5.8)$$

Usando 5.1 e 5.8 obtém-se

$$0 < g(\pi) + g(0) < \frac{a^n \cdot \pi^{n+1}}{n!}. \quad (5.9)$$

Neste ponto, é importante ressaltar a importância de n , visto que para valores tão grandes quanto se desejar de n , será possível chegar a uma contradição na Expressão 5.9.

Definindo, então, a sequência (s_n) tal que

$$s_n = \frac{a^n \cdot \pi^{n+1}}{n!} \quad (5.10)$$

é possível analisar se a mesma converge para algum valor real. Para tanto, será considerado o seguinte teorema, cuja dedução pode ser vista em [2].

Teorema 5.1.2. *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Se $x_n > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$, onde $L < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.*

Voltando para (s_n) , em primeiro lugar percebe-se que $s_n > 0$ para qualquer índice natural n , visto que a é inteiro positivo. Agora, determinando $\frac{s_{n+1}}{s_n}$, tem-se que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{a^{n+1} \cdot \pi^{n+2}}{(n+1)!} = \frac{a\pi}{n+1}. \quad (5.11)$$

Calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a\pi}{n+1} = a\pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = a\pi \cdot 0 = 0. \quad (5.12)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 0 < 1$, o Teorema 5.1.2 garante que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$, permitindo dizer que, para valores suficientemente grandes de n , é válido

$$0 < g(\pi) + g(0) < 1. \quad (5.13)$$

Finalmente, as condições agora são mais favoráveis para iniciar a demonstração da irracionalidade de π , visando também trazer um maior nível de entendimento do artigo [27].

5.2 A DEMONSTRAÇÃO

Teorema 5.2.1. π é um número irracional.

Demonstração. Suponha que $\pi = \frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais não nulos. Considere a função polinomial

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} \quad (5.14)$$

de grau $2n$ e raízes $x = 0$ e $x = \pi$; para esta função vale a igualdade $f(x) = f(\pi - x)$ (Teorema 4.2.2); além disso, suas k -ésimas derivadas assumem valores inteiros nos pontos $x = 0$ e $x = \pi$ conforme o Teorema 4.2.3 e a Equação 4.22.

Agora, considerando a função

$$g(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \dots + (-1)^n \cdot f^{(2n)}(x), \quad (5.15)$$

nota-se que $g(0)$ e $g(\pi)$ são ambos valores inteiros; além disso, $g(x) + g^{(2)}(x) = f(x)$ (Equação 4.26).

Por último, nota-se que

$$h(x) = g^{(1)}(x) \cdot \text{sen}(x) - g(x) \cdot \cos(x) \quad (5.16)$$

é uma primitiva de

$$h^{(1)}(x) = \text{sen}(x) \cdot f(x). \quad (5.17)$$

Agora, calculando² a integral de $\text{sen}(x) \cdot f(x)$ de 0 até π , tem-se que

$$\int_0^\pi \text{sen}(x) \cdot f(x) dx = g(\pi) + g(0). \quad (5.18)$$

Porém, para $x \in]0, \pi[$, tem-se que

$$0 < \text{sen}(x) \cdot f(x) < \frac{a^n \cdot \pi^n}{n!}. \quad (5.19)$$

Logo,

$$0 < \int_0^\pi \text{sen}(x) \cdot f(x) dx < \frac{a^n \cdot \pi^{n+1}}{n!} = s_n. \quad (5.20)$$

que é verdadeira independentemente do valor de n . Verifica-se, de acordo com o Teorema 5.1.2 e a Equação 5.12, que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$. Portanto, para um valor suficientemente grande de n , tem-se que

$$0 < \int_0^\pi \text{sen}(x) \cdot f(x) dx < 1 \quad (5.21)$$

ou seja

$$0 < g(\pi) + g(0) < 1. \quad (5.22)$$

o que é um absurdo, pois $g(\pi) + g(0)$ é um valor inteiro e não existem inteiros no intervalo real $]0, 1[$; logo, π não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros positivos, isto é, π é um número irracional. \square

A demonstração realizada neste trabalho é apenas uma das variadas formas de demonstração da irracionalidade do número π , e serão feitos alguns comentários breves a respeito de outras deduções na próxima seção.

² Ver 5.1.

5.3 COMENTÁRIOS SOBRE OUTRAS DEMONSTRAÇÕES DA IRRACIONALIDADE DE π

Serão vistas, agora, algumas outras formas de demonstrar a irracionalidade de π : isto se prova interessante pois ajuda a compreender novos pontos de vista e, até mesmo, semelhanças com a prova que foi realizada e comentada neste trabalho. Além disso, é importante notar como os trabalhos de estudiosos do passado (no caso, Lambert e Hermite) são estudados e reinterpretados por outros autores (como Niven).

Como não é a meta deste trabalho efetuar as deduções dos resultados que serão mostrados a seguir, serão citadas no texto as fontes que contêm as devidas provas (ou comentários sobre elas).

De acordo com [5], a dedução feita por Johann Heinrich Lambert (século 18) utiliza o conceito de frações contínuas. A ideia foi a de expandir a função $\text{tg}(x)$ como

$$\text{tg}(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots}}}} \quad (5.23)$$

Lambert conseguiu provar que se $x \in \mathbb{Q} - \{0\}$, então o valor de $\text{tg}(x)$ é irracional. Usando a contrapositiva da assertiva de Lambert, isto é, se $\text{tg}(x)$ é um valor racional então x é um valor irracional (ou zero), basta fazer a substituição de $x = \frac{\pi}{4}$ e, como $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ é racional, necessariamente $\frac{\pi}{4}$ é irracional (por consequência, π também é). Por mais que os últimos argumentos pareçam simples, a dificuldade do método de Lambert reside em mostrar a expansão da função $\text{tg}(x)$ em frações contínuas e, depois, mostrar a relação entre x racional não nulo e a imagem de $\text{tg}(x)$ irracional.

No livro [30], o autor também realiza uma demonstração “simples” da irracionalidade de π — na verdade, da irracionalidade de π^2 — e, como ele mesmo fala (em tradução livre): “Como em muitas outras provas ‘elementares’ de teoremas densos, a motivação para muitos dos passos não pode ser fornecida.”, da mesma forma com o que ocorreu na demonstração dada por Niven em [27]. De qualquer forma, a demonstração de Spivak utiliza uma versão ligeiramente modificada da Função 4.3 aqui trabalhada. Com efeito, ele utiliza a função

$$s(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \quad (5.24)$$

e, como hipótese de absurdo, diz que $\pi^2 = \frac{a}{b}$, a e b são inteiros positivos.

As funções auxiliares, que na demonstração feita na Seção 5.2 eram

$$g(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n \cdot f^{(2n)}(x) \quad (5.25)$$

e

$$h(x) = g^{(1)}(x) \cdot \text{sen}(x) - g(x) \cdot \text{cos}(x), \quad (5.26)$$

passam a ser

$$t(x) = b^n [\pi^{2n} \cdot s(x) - \pi^{2n-2} \cdot s^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} \cdot s^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n \cdot s^{(2n)}(x)] \quad (5.27)$$

e

$$u(x) = t^{(1)}(x) \cdot \text{sen}(\pi x) - \pi \cdot t(x) \cdot \text{cos}(\pi x). \quad (5.28)$$

Outra diferença é o intervalo definido por Spivak para efetuar o estudo dos sinais das funções: ao passo que Niven toma o intervalo $[0, \pi]$, Spivak toma o intervalo $[0, 1]$, e isso tem direta relação com a forma com a qual ambos construíram as funções. A partir daí, as demonstrações seguem praticamente os mesmos caminhos, com a diferença que o desenrolar da demonstração de Spivak leva à conclusão de que π^2 é um número irracional: logo, π necessariamente é irracional pois, se fosse racional, então π^2 também o seria (o produto de dois racionais é racional).

Independentemente das diferenças operacionais, tanto Niven quanto Spivak utilizam argumentos sobre as funções sem citar as motivações iniciais (que, de acordo com [32], advém dos trabalhos de Lambert e, ainda mais precisamente, Hermite). Spivak, ao final de sua exposição, comenta que um dos aspectos mais importantes para a dedução é o fato de que π se relaciona com a função $\text{sen}(x)$: π é o menor zero positivo da função, e esta informação ajuda a compreender a estratégia geométrica utilizada por [18].

ALGUNS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA APROXIMAÇÕES DO NÚMERO π

Conforme visto nos capítulos anteriores, o número π é um número irracional e, por consequência, não admite uma representação decimal periódica.

Foi visto também que matemáticos, ao longo dos tempos, utilizaram várias estratégias para determinar valores e aproximações para o número π (e como todo esse processo agregou valor ao corpo teórico da matemática).

As próximas seções mostrarão algumas estratégias¹ que visam determinar aproximações numéricas de π . Pensando em termos computacionais e considerando qualidades como facilidade, velocidade e precisão, todas as estratégias que serão mostradas perdem com facilidade para métodos computacionais mais robustos.

O que será mais proveitoso para professores e alunos neste ponto não é chegar efetivamente ao resultado (aproximações de π) mas, sim, compreender as principais ideias e argumentos matemáticos envolvidos, visando ampliar o rol de técnicas e fomentar a criatividade para enxergar soluções nas construções geométricas que serão mostradas.

6.1 A IDEIA DO MÉTODO DA EXAUSTÃO DE ARQUIMEDES

Arquimedes desenvolveu um método de exaustão que permitia encontrar aproximações acuradas (para a época e para as técnicas existentes) para o número π . Seu método, inclusive, foi o germe de vários outros métodos existentes para a determinação de aproximações de π .

¹ A estratégia que envolve séries é aquela que está mais distante da realidade dos alunos da Educação Básica.

O método consistia em trabalhar com polígonos regulares inscritos e circunscritos em circunferências e aumentar o número de lados de ambos os polígonos, até que estes aproximassem-se o quanto fosse possível da circunferência em questão: desta forma, o perímetro dos polígonos estaria, cada vez mais, aproximando-se do comprimento da circunferência — no caso dos polígonos inscritos, a aproximação se daria por falta; no caso dos polígonos circunscritos, a aproximação se daria por excesso.

De acordo com [3], Arquimedes iniciou seus trabalhos utilizando hexágonos regulares ($n = 6$) e foi sucessivamente dobrando o número de lados até alcançar os polígonos de 96 lados. Acredita-se que Arquimedes tenha chegado ao seguinte intervalo de valores para π :

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}, \text{ isto é, } 3,140845 < \pi < 3,142858. \quad (6.1)$$

Deve ser levado em consideração que os gregos não dispunham de um sistema de numeração como o decimal posicional e tampouco dispunham das notações e ferramentas matemáticas atuais (como relações trigonométricas, por exemplo): a quase totalidade dos resultados era obtida por meio de argumentos geométricos e da utilização de instrumentos clássicos como a régua não graduada e o compasso — conforme já visto nas notas históricas.

O método que será mostrado a seguir é uma emulação da ideia original de Arquimedes, apoiando-se na linguagem, nos processos e nas notações atuais (principalmente no uso da trigonometria, que é uma ferramenta relativamente acessível para os alunos do Ensino Médio). A Figura 20 auxiliará no entendimento do método.

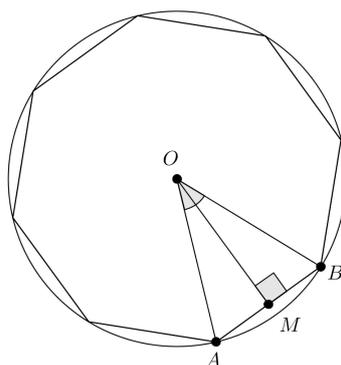


Figura 20: Polígono regular inscrito em uma circunferência. O ângulo $A\hat{O}B$ é chamado de *ângulo cêntrico* do polígono regular.²

² Fonte: próprio autor.

Lembrando que o comprimento de uma circunferência pode ser calculado através da relação $C = 2\pi R$ (vide Definição 1.0.3), é possível isolar o valor que se deseja obter (no caso, o número π) e, utilizando um valor conveniente para o raio R da circunferência — no caso, $R = \frac{1}{2}$ — chega-se a

$$\pi = \frac{C}{2R} = \frac{C}{2 \cdot \frac{1}{2}} = C. \quad (6.2)$$

Explorado este preâmbulo, deseja-se encontrar uma expressão que determine o perímetro de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de raio $\frac{1}{2}$ que dependa de duas informações: do seu número de lados e, também, da medida de um ângulo *cêntrico*³ — que também pode ser escrita em função do número de lados do polígono.

Tomando o triângulo isósceles AOB , seja traçada a altura \overline{OM} relativa ao lado AB : por ser um triângulo isósceles, vem que \overline{OM} também é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, o que dá

$$m(A\hat{O}M) = m(B\hat{O}M) = \frac{360^\circ}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{180^\circ}{n}. \quad (6.3)$$

Considerando o triângulo OAM (ou o triângulo OBM , visto que ambos são congruentes pelo critério ALA) e lembrando que $OA = R = \frac{1}{2}$, é possível utilizar a razão trigonométrica seno para obter

$$\text{sen}(A\hat{O}M) = \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{AM}{OA} = \frac{l}{\frac{1}{2}} = 2l, \quad (6.4)$$

onde $2l$ denota a medida do lado do polígono regular em questão.

Finalmente, como o perímetro $2P$ do polígono regular é igual a $n \cdot 2l$, utilizando o Resultado 6.4, vem que

$$2P = n \cdot \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right). \quad (6.5)$$

Utilizando 6.5, é possível calcular o perímetro do polígono inscrito na circunferência; além disso, como o comprimento da circunferência em questão é justamente π , é

³ Ângulo cujo vértice é o centro da circunferência e os lados são os lados do triângulo isósceles AOB , onde A e B são vértices consecutivos do polígono regular inscrito e $AO = BO = R$, onde R é o raio da circunferência. A medida de um ângulo cêntrico é dada por $m(A\hat{O}B) = \frac{360^\circ}{n}$, onde n é o número de lados do polígono regular.

possível considerar o seguinte limite para a determinação de valores aproximados de π :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{n} \right) \right) = \pi. \quad (6.6)$$

Visando verificar o poder computacional do método, o valor do número π será aproximado por falta com seis casas decimais: 3,141592. Com o auxílio da Tabela 4 para a organização dos valores e de uma calculadora científica (ou o *software Excel*) é possível estimar valores aproximados para o π :

n	$n \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$	$2P$
3	$3 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ$	2,598076
4	$4 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ$	2,828427
5	$5 \cdot \operatorname{sen} 36^\circ$	2,938926
6	$6 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$	3,000000
⋮	⋮	⋮
30	$30 \cdot \operatorname{sen} 6^\circ$	3,135854
⋮	⋮	⋮
40	$40 \cdot \operatorname{sen} 4,5^\circ$	3,138364
⋮	⋮	⋮
50	$50 \cdot \operatorname{sen} 3,6^\circ$	3,139526
⋮	⋮	⋮
60	$60 \cdot \operatorname{sen} 3^\circ$	3,140157
⋮	⋮	⋮
600	$600 \cdot \operatorname{sen} 0,3^\circ$	3,141578
⋮	⋮	⋮

Tabela 4: Tabela com valores aproximados (por falta) de π .

Observando a Tabela 4, é perceptível a aproximação dos valores dos perímetros dos polígonos regulares inscritos ao valor aproximado de π com seis casas decimais.

Agora, um processo quase análogo ao anterior será feito — com algumas diferenças a saber:

- será utilizado um polígono regular de n lados circunscrito à circunferência — vide Figura 21 — cujos lados medem $2L$;

- será considerada a razão trigonométrica tangente ao invés da razão trigonométrica seno, tendo em vista que o apótema⁴ do polígono regular será igual ao raio da circunferência inscrita ($ON = \frac{1}{2}$).

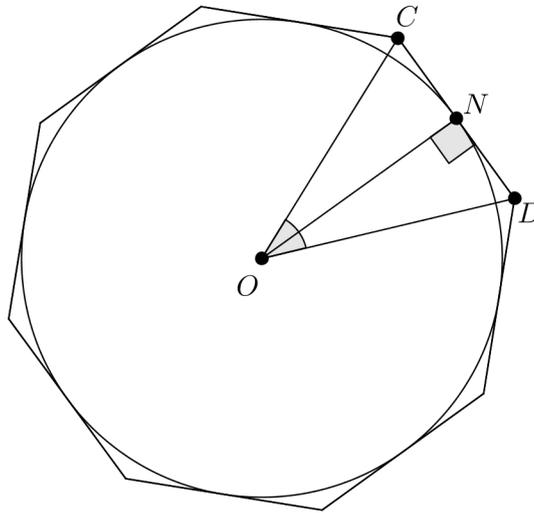


Figura 21: Polígono regular circunscrito à uma circunferência.⁵

Estabelecidas as observações iniciais e observando a Figura 21, é possível tomar o triângulo CON (ou o triângulo DON , pois ambos são congruentes pelo critério ALA) e, como o polígono é regular, a relação que envolve o ângulo interno deduzida em 6.3 continua válida, isto é:

$$m(\widehat{CÔN}) = m(\widehat{DÔN}) = \frac{360^\circ}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{180^\circ}{n}. \quad (6.7)$$

O próximo passo é utilizar a relação trigonométrica tangente no triângulo CON :

$$\operatorname{tg}(\widehat{CÔN}) = \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{CN}{ON} = \frac{L}{\frac{1}{2}} = 2L. \quad (6.8)$$

Portanto, o perímetro $2P'$ do polígono regular circunscrito à circunferência é dado pela expressão

$$2P' = n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \quad (6.9)$$

⁴ Segmento que tem extremidades no centro do polígono regular/circunferência e no ponto médio de qualquer lado do polígono: coincide com o raio da circunferência inscrita no polígono regular.

⁵ Fonte: próprio autor.

e, da mesma forma que no processo com o polígono inscrito a circunferência, pode-se chegar a um valor aproximado de π com o auxílio do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{180^\circ}{n} \right) \right) = \pi. \quad (6.10)$$

Utilizando a Tabela 5 e uma calculadora científica (ou *Excel*), é possível obter algumas aproximações para o valor de π . Aqui, vale ressaltar que a escolha de um número razoável de casas decimais (como cinco ou seis) vem a ser útil para verificar as diferenças entre os valores após a segunda casa decimal em casos onde o número de iterações é grande: porém, caso o professor deseje realizar esta tarefa com os seus alunos em sala de aula, fica ao seu critério a escolha do número de casas decimais para a aproximação do valor de π de acordo com os materiais que tiver em mãos — calculadoras ou computadores com o o *software Excel*.

n	$n \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$	$2P'$
3	$3 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$	5,196152
4	$4 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$	4,000000
5	$5 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ$	3,632713
6	$6 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$	3,464102
⋮	⋮	⋮
30	$30 \cdot \operatorname{tg} 6^\circ$	3,153127
⋮	⋮	⋮
40	$40 \cdot \operatorname{tg} 4,5^\circ$	3,148068
⋮	⋮	⋮
50	$50 \cdot \operatorname{tg} 3,6^\circ$	3,145733
⋯	⋯	⋯
60	$60 \cdot \operatorname{tg} 3^\circ$	3,144467
⋮	⋮	⋮
600	$600 \cdot \operatorname{tg} 0,3^\circ$	3,141621
⋮	⋮	⋮

Tabela 5: Tabela com valores aproximados (por excesso) de π .

Arquimedes, de acordo com [29], teria calculado a média aritmética dos valores obtidos em ambos os métodos para cada número fixado de lados. A Tabela 6 auxiliará na organização e visualização das informações:

Utilizando o 96-ágono regular (assim como Arquimedes fez) seria possível obter:

n	$2P = n \cdot \text{sen} \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$	$2P' = n \cdot \text{tg} \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$	$\frac{2P+2P'}{2}$
3	2,598076	5,196152	3,897114
4	2,828427	4,000000	3,414214
5	2,938926	3,632713	3,285819
6	3,000000	3,464102	3,232051
⋮	⋮	⋮	⋮
30	3,135854	3,153127	3,144490
⋮	⋮	⋮	⋮
40	3,138364	3,148068	3,143216
⋮	⋮	⋮	⋮
50	3,139526	3,145733	3,142630
⋮	⋮	⋮	⋮
60	3,140157	3,144467	3,142312
⋮	⋮	⋮	⋮
600	3,141578	3,141621	3,141600
⋮	⋮	⋮	⋮

Tabela 6: Tabela com valores aproximados de π — utilizando a média aritmética dos valores obtidos nos processos anteriores.

n	$2P = n \cdot \text{sen} \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$	$2P' = n \cdot \text{tg} \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$	$\frac{2P+2P'}{2}$
96	3,141032	3,142715	3,141874

Tabela 7: Estimativa de valores obtidos para π utilizando o 96-ágono regular.

Para um incremento gráfico nesta atividade, um expediente interessante que pode ser adotado em sala de aula é utilizar o *software GeoGebra* e definir as funções

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right), \quad (6.11)$$

$$g : \mathbb{R} - \left\{ x \neq 0 \wedge x \neq \frac{2}{1+2k}, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x \cdot \text{tg} \left(\frac{\pi}{x} \right), \quad (6.12)$$

e a reta $y = \pi$: os alunos poderão perceber visualmente que, conforme os valores de x aumentam, $f(x)$ tenderá ao valor de π (por falta), ao passo que $g(x)$ tenderá ao valor de π (por excesso). A Figura 22 mostra o comportamento de ambas funções.

Ademais, é possível provar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) = \pi \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \text{tg} \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) = \pi \quad (6.13)$$

utilizando tópicos de Cálculo Diferencial (em especial, limites trigonométricos e a regra de L'Hospital⁶ (Teorema 6.1.1)) .

Teorema 6.1.1 (Regra de L'Hospital). *Sejam $r > 0$ um número real e f e g funções deriváveis em todo ponto $x > r$. Nestas condições, se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ e se $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir, então $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Teorema 6.1.2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) = \pi.$$

Demonstração. Inicialmente, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right), \quad (6.14)$$

e como $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, há uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Fazendo uso da regra de L'Hospital, obtém-se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{x} \right) \cdot \left(\frac{-\pi}{x^2} \right)}{\frac{-1}{x^2}} \right) = \pi \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) = \pi \cdot 1 = \pi. \quad (6.15) \quad \square$$

Teorema 6.1.3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \text{tg} \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) = \pi.$$

Demonstração. Inicialmente, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \text{tg} \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{tg} \left(\frac{\pi}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right), \quad (6.16)$$

e como $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{tg} \left(\frac{\pi}{x} \right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, há uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Fazendo uso da regra de L'Hospital, obtém-se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{tg} \left(\frac{\pi}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sec^2 \left(\frac{\pi}{x} \right) \cdot \left(\frac{-\pi}{x^2} \right)}{\frac{-1}{x^2}} \right) = \pi \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sec^2 \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) = \pi \cdot 1 = \pi. \quad (6.17) \quad \square$$

Este modelo, caso seja trabalhado em sala de aula, poderá servir para resgatar vários aspectos importantes do tópico sobre polígonos regulares e da trigonometria. Como

⁶ A dedução e exemplos de aplicação podem ser vistos em [15], bem como dos limites trigonométricos.

sugestão para a sala de aula, seria interessante seguir de forma mais fiel os passos utilizados por Arquimedes, isto é, determinando os polígonos de 6, 12, 24, 48 e 96 lados e, com o auxílio das técnicas geométricas, trigonométricas e do uso de tabelas, verificar se é possível chegar nos limites estabelecidos por Arquimedes (vide as inequações presentes na Expressão 6.1).

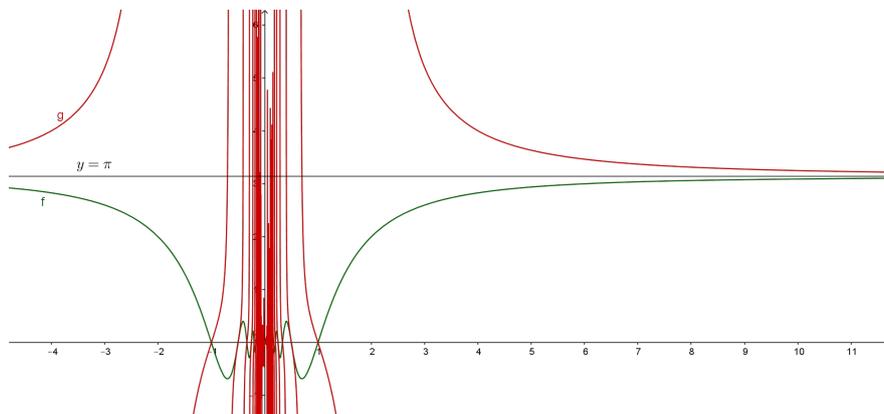


Figura 22: $f(x) = x \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right)$ e $g(x) = x \cdot \text{tg} \left(\frac{\pi}{x} \right)$: funções que têm como limite no infinito o número π .⁷

6.2 A IDEIA DO MÉTODO DA DUPLICAÇÃO DE LADOS DE LIU HUI

O método que será estudado agora é uma adaptação do método da duplicação de lados creditado ao matemático chinês Liu Hui. Este método é de destacada importância para ser trabalhado em sala de aula, visto que usará uma série de ferramentas com as quais os alunos já têm familiaridade (sendo a principal delas o Teorema de Pitágoras⁸). Um ótimo momento para sugerir este método (seja como atividade em sala de aula ou como trabalho extra classe) é durante os trabalhos com inscrição e circunscrição de polígonos regulares.

Durante a exposição da ideia do método de Liu Hui será possível deduzir duas interessantes relações: o cálculo do apótema de um polígono regular inscrito e a fórmula de duplicação, que permite determinar a medida do lado de um polígono de $2n$ lados conhecendo algumas informações referentes a um polígono de n lados, desde que ambos estejam inscritos em uma mesma circunferência.

⁷ Fonte: próprio autor.

⁸ Na China, tal teorema é conhecido como *Teorema de Gou Gu Xian*.

A ideia do método é determinar o valor das áreas de uma sequência de polígonos cujo número de lados sempre será dobrado (6, 12, 24, 48, 96, etc.). Para tanto, utilizando a Figura 23 como apoio, Liu Hui teve a ideia de determinar o lado de um polígono regular de $2n$ lados utilizando dois elementos de um polígono regular de n lados: a medida de seus lados e a medida de suas apótemas.

O processo poderia ser iniciado partindo de um polígono de quatro lados ou de cinco lados, mas o hexágono regular tem uma característica facilitadora: a medida de seu lado coincide com a medida do raio da circunferência que o circunscreve, o que torna os cálculos iniciais mais simples para valores convenientes do raio.

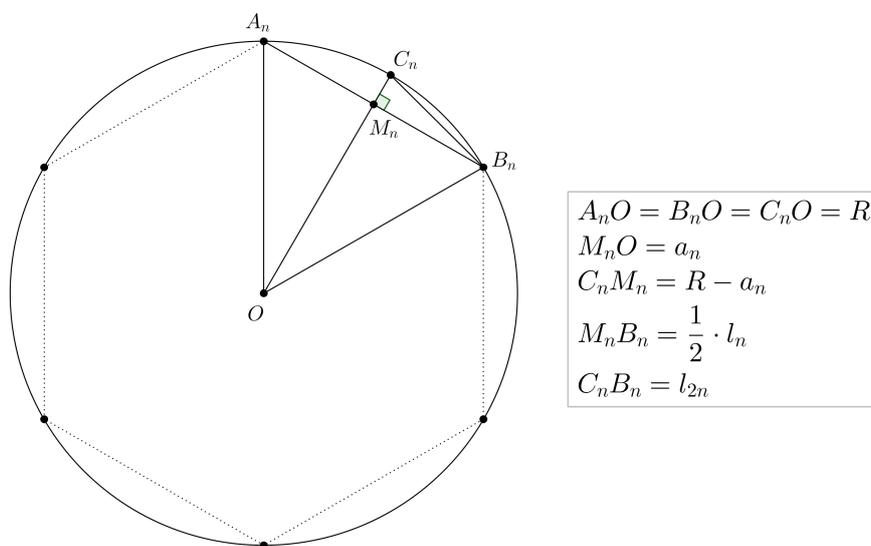


Figura 23: A construção para a dedução das relações sobre apótemas dos polígonos inscritos e a fórmula de duplicação.⁹

Seja $\overleftrightarrow{C_n M_n}$ a mediatriz de um dos lados do polígono ($\overline{A_n B_n}$, por exemplo): desta forma, M_n será o ponto médio de $\overline{A_n B_n}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $OM_n B_n$ e $C_n M_n B_n$ obtém-se, respectivamente,

$$(a_n)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot l_n\right)^2 = R^2 \quad (6.18)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4R^2 - l_n^2} \quad (6.19)$$

⁹ Fonte: próprio autor.

e

$$(R - a_n)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot l_n\right)^2 = (l_{2n})^2 \quad (6.20)$$

donde

$$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R \cdot \sqrt{4R^2 - l_n^2}}. \quad (6.21)$$

As duas relações obtidas permitem determinar as medidas do apótema do polígono regular de n lados (Equação 6.19) e do lado do polígono regular de $2n$ lados conhecida a medida do lado do polígono regular de n lados (Equação 6.21). Desta forma, é possível utilizar uma tabela para, a partir das dimensões de um polígono regular escolhido, determinar as dimensões de polígonos regulares que tenham o número duplicado de lados.

Tomando, de forma conveniente, $R = 1$, e partindo de um hexágono regular inscrito (isto é, $n = 6$, $l_6 = R = 1$ e $a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$) é possível construir a Tabela 8:

n	$a_n = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4R^2 - l_n^2}$	$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R \cdot \sqrt{4R^2 - l_n^2}}$
6	$a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$l_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$
12	$a_{12} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$	$l_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$
24	$a_{24} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	$l_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$
48	$a_{48} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$	$l_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$
96	$a_{96} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$...

Tabela 8: Tabela com as medidas do apótema e do lado de polígonos regulares.

Como o raio da circunferência que circunscreve os polígonos regulares vale 1, sua área seria correspondente ao próprio valor de π : $S = \pi \cdot 1^2 = \pi$. Desta forma, quanto maior o valor de n , os polígonos regulares tendem à circunferência — assim, seus perímetros e suas áreas tendem ao comprimento e a área da circunferência, respectivamente.

Utilizando a Tabela 8, que fornece os valores do apótema e do lado de um polígono regular, é necessário encontrar uma relação que permita calcular a área do polígono

regular utilizando as duas informações conhecidas (a_n e l_n). É fácil ver que uma relação que permite o cálculo dessa área é dada por

$$S_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot l_n \cdot a_n \quad (6.22)$$

visto que um polígono regular de n lados pode ser decomposto em n triângulos isósceles cujas bases coincidem com os próprios lados do polígono regular e suas alturas são necessariamente os apótemas do polígono regular. Desta maneira, o valor da área de um 96-ágono seria:

$$\begin{aligned} S_{96} &= 96 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \\ &= 24 \cdot \sqrt{4 - (2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}})} \\ &= 24 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Finalmente, calculando o valor numérico aproximado (com seis casas decimais) da Expressão 6.23, obtém-se

$$S_{96} = 24 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 3,139350. \quad (6.24)$$

Partindo, então, de um polígono regular de 6 lados cujo raio da circunferência a ele circunscrita vale 1 e efetuando a duplicação do número de lados, é possível perceber um padrão para o valor de S_n . Fazendo $n = 2^k \cdot 3$, para k natural maior ou igual a 3 (deve ser observado que $S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ e $S_{12} = 3$), obtém-se

$$S_n = S_{2^k \cdot 3} = \frac{2^k \cdot 3}{4} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{3}}}}}, k \in \{3, 4, 5, 6, \dots\}, \quad (6.25)$$

onde a expressão S_{24} possui dois radicais, S_{48} possui três radicais, S_{96} possui quatro radicais e assim sucessivamente.

Utilizando¹⁰, então, a Equação 6.25 e a Tabela 9, será possível verificar os valores das áreas dos polígonos de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 lados, visando comprovar que os valores dessas áreas convergem para o valor de π (lembrar que, como o raio da circunferência circunscrita aos polígonos regulares é unitário, a área da região circular será igual ao valor de π).

n	S_n
6	$S_6 = 2,598076$
12	$S_{12} = 3,000000$
24	$S_{24} = 3,105829$
48	$S_{48} = 3,132629$
96	$S_{96} = 3,139350$
192	$S_{192} = 3,141032$
384	$S_{384} = 3,141452$

Tabela 9: Tabela com as medidas das dos polígonos regulares. Valores truncados para seis casas decimais.

Continuando o método, ainda se faz necessário determinar um intervalo numérico que contenha o número π : para tanto, a estratégia de Liu Hui consistiu no estudo das diferenças entre a área do círculo e as áreas dos polígonos regulares construídos. A Figura 24 auxiliará o entendimento do raciocínio de Liu Hui.

Liu Hui construiu uma desigualdade que permitiu determinar um intervalo numérico no qual π estivesse confinado, percebendo que a área verde (região em tom de cinza um pouco mais escuro, que é a diferença entre a área do polígono de $2n$ lados e a área do polígono de n lados) é igual à área vermelha (região em tom de cinza escuro, onde $ABCD$ é um retângulo). Desta forma, se S_{2n} é a área do polígono de $2n$ lados, S_n é a área do polígono de n lados, $D = S_{2n} - S_n$ (área verde ou vermelha) e S é a área do círculo, é possível escrever:

$$S_{2n} < S < S_{2n} + D. \quad (6.26)$$

10 Caso o professor queira realizar esta atividade com os alunos em sala de aula, pode utilizar calculadoras científicas ou o *software Excel*; além disso, caso o método numérico de Arquimedes tenha sido trabalhado em sala de aula, é interessante que o professor promova discussões sobre qual dos métodos os alunos acharam mais interessante, mais complexo ou qual deles está chegando (convergindo) mais rapidamente para o valor de π estabelecido no início das atividades. As possibilidades são variadas, e os professores ficam convidados a pensar nessas diferentes estratégias.

11 Fonte: próprio autor.

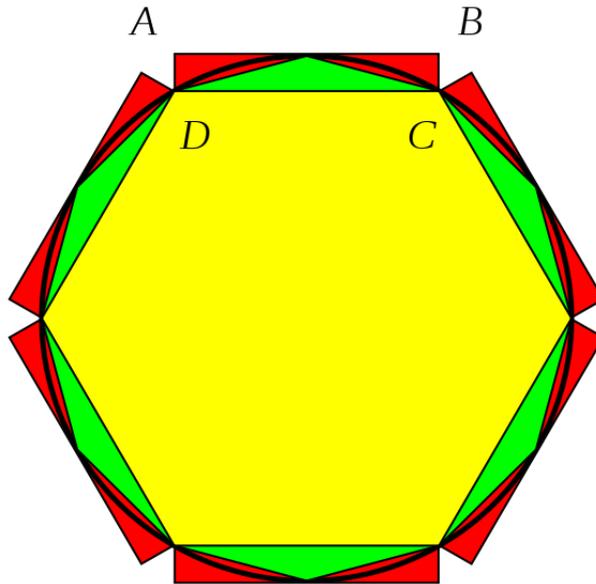


Figura 24: Construindo a Desigualdade de Liu Hui.¹¹

Com esta desigualdade, Liu Hui pôde obter um intervalo de valores ao qual π pertence. Conforme dito anteriormente, tomando um círculo unitário, o valor de π aparece como a própria área do círculo, isto é, $S = \pi \cdot 1^2 = \pi$. Assim,

$$S_{2n} < \pi < S_{2n} + D. \quad (6.27)$$

Finalmente, utilizando os valores de S_{384} e S_{192} das áreas calculadas na Tabela 9, é possível escrever

$$3,141452 < \pi < 3,141452 + (3,141452 - 3,141032) \quad (6.28)$$

donde

$$3, \underline{141452} < \pi < 3, \underline{141872} \quad (6.29)$$

isto é, uma precisão de três casas decimais para o valor de π .

Em sala de aula, é interessante fazer mais algumas iterações do método (determinação das áreas dos polígonos de 384 e 768 e as respectivas diferenças para determinar intervalos que contenham o π). É importante ressaltar para os alunos que Liu Hui dispunha de outros tipos de técnicas para extrações de raízes e realização de cálculos,

o que tornava o método não tão fácil de se realizar como é feito atualmente com os recursos disponíveis (com as calculadoras científicas, por exemplo).

6.3 MÉTODO DOS POLÍGONOS ISOPERIMÉTRICOS

De acordo com [14], o método dos polígonos isoperimétricos é creditado ao filósofo e matemático francês René Descartes. Comparando este método com o método de Liu Hui, será possível perceber a necessidade de uma visão geométrica muito mais apurada — o que o torna mais complexo de ser trabalhado em sala de aula. Uma recomendação é dividir o método em etapas menores, visando trazer um entendimento melhor para os alunos.

O método consiste em determinar uma relação entre dois polígonos regulares, um com quantidade n de lados e o outro com quantidade $2n$ de lados, de tal modo que ambos possuam o mesmo perímetro — daí o termo isoperimétrico.

Encontrada a relação que garanta a igualdade dos perímetros dos polígonos regulares de lados n e $2n$, o próximo passo consiste em determinar os principais elementos do polígono regular de $2n$ lados — apótema e raio da circunferência circunscrita — em função dos elementos do polígono regular de n lados.

Os próximos passos têm como meta construir a Figura 25.

Toma-se a circunferência λ de centro O e raio R_n , e nela será inscrito um polígono regular de n lados — sendo \overline{AB} um de seus lados — e de apótema a_n . Com estas informações, o perímetro $2P$ do polígono em questão será dado por $2P = n \cdot AB$.

Traçando a mediatriz do segmento \overline{AB} — que é a reta $O'M$, onde $O' \in \lambda$ e $M \in \overline{AB}$ — observa-se que o ponto O (centro da circunferência λ) pertence à mesma, pois $d(O, A) = R_n = d(O, B)$. O ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo central da circunferência λ que se opõe ao arco \widehat{BA} — este ângulo também é um ângulo cêntrico do polígono regular de lado \overline{AB} considerado. Como $O' \in \lambda$, o ângulo $A\hat{O}'B$ é um ângulo inscrito relativo à circunferência λ que também se opõe ao arco \widehat{BA} . Portanto,

$$m(A\hat{O}B) = 2 \cdot m(A\hat{O}'B) = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha. \quad (6.30)$$

12 Fonte: próprio autor.

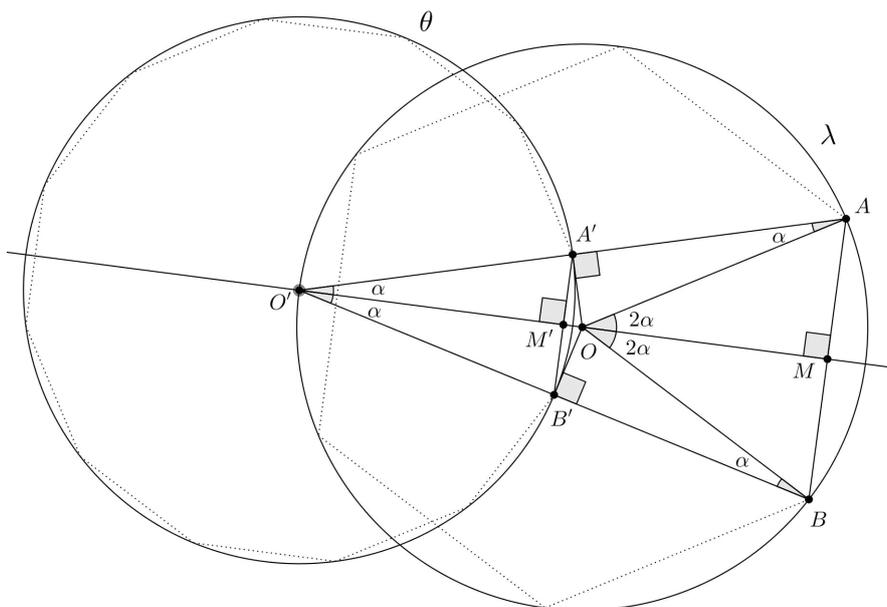


Figura 25: Construção completa para determinar polígonos regulares isoperimétricos.¹²

Agora, considerando os segmentos $\overline{AO'}$ e $\overline{BO'}$ — congruentes, pois O' pertence à mediatriz do segmento \overline{AB} — toma-se A' o ponto médio de $\overline{AO'}$ e B' o ponto médio de $\overline{BO'}$. Como $O'O = AO = R_n$ e $O'O = BO = R_n$, os triângulos $O'OA$ e $O'OB$ são congruentes e isósceles (de bases $\overline{O'A}$ e $\overline{O'B}$, respectivamente). Duas consequências úteis são:

$$A'O' = AA' \text{ e } B'O' = BB' \quad (6.31)$$

e

$$m(\widehat{AO'O}) = m(\widehat{O'O'A}) = \alpha \text{ e } m(\widehat{BO'O}) = m(\widehat{O'O'B}) = \alpha. \quad (6.32)$$

Como consequência dos pontos A' e B' serem os respectivos pontos médios de $\overline{AO'}$ e $\overline{BO'}$, traçando o segmento $\overline{A'B'}$ e comparando os triângulos ABO' e $A'B'O'$, o Teorema da Base Média do Triângulo¹³ garante que

$$\overline{AB} // \overline{A'B'}, \quad (6.33)$$

$$O'AB \sim O'A'B' \quad (6.34)$$

¹³ O teorema e a sua respectiva dedução podem ser vistos em [8].

e, mais importante,

$$A'B' = \frac{1}{2} \cdot AB. \quad (6.35)$$

Provados esses fatos, é possível construir uma circunferência θ de centro O' e raio $R_{2n} = O'A' = O'B'$ e nela inscrever um polígono regular de $2n$ lados, onde um deles é o segmento $\overline{A'B'}$ e medida do ângulo cêntrico $m(\widehat{A'O'B'}) = \frac{1}{2} \cdot m(\widehat{AOB})$; este polígono regular tem perímetro

$$2P' = 2n \cdot A'B' = 2n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AB\right) = n \cdot AB = 2P \quad (6.36)$$

isto é, o polígono regular de $2n$ lados é isoperimétrico em relação ao polígono regular de n lados.

O próximo passo é encontrar expressões do raio R_{2n} da circunferência θ e do apótema a_{2n} do polígono regular de $2n$ lados nela inscrito que dependam de R_n e a_n : para tanto, a Figura 25 auxiliará no processo.

Pelo fato dos triângulos $O'OA$ e $O'OB$ serem isósceles, vem que $\overline{A'O}$ e $\overline{B'O}$ são as suas respectivas alturas, visto que os pontos A' e B' são os pontos médios de suas respectivas bases — disto, conclui-se que

$$\overline{OA'} \perp \overline{O'A} \text{ e } \overline{OB'} \perp \overline{O'B}. \quad (6.37)$$

Como $\overline{O'M}$ é a mediatriz relativa ao lado \overline{AB} , lado este que é a base do triângulo isósceles AOB , conclui-se que $\overline{O'M}$ também é bissetriz do ângulo \widehat{AOB} : desta forma, como o triângulo $A'O'B'$ é isósceles de base $\overline{A'B'}$, necessariamente $\overline{O'M'}$ é a sua mediatriz, permitindo dizer que $\overline{O'M'}$ é o apótema do polígono de $2n$ lados. Desta argumentação,

$$\overline{O'M'} \perp \overline{A'B'}. \quad (6.38)$$

Unindo, então, as informações dadas em 6.32, 6.37 e 6.38, fica provado que

$$O'M'A' \sim AA'O \text{ e } O'M'B' \sim BB'O \quad (6.39)$$

pelo critério de semelhança AA.

Utilizando as Expressões 6.34 e 6.35 e o fato de que a altura $O'M$ do triângulo $O'AB$ pode ser escrita como $O'M = O'O + OM = R_n + a_n$, tem-se

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{O'M}{O'M'} \text{ donde } 2 = \frac{R_n + a_n}{a_{2n}}, \text{ e, portanto, } a_{2n} = \frac{R_n + a_n}{2} \quad (6.40)$$

isto é, o apótema do polígono regular de $2n$ lados depende do raio e do apótema do polígono regular de n lados.

Por 6.39 e 6.40:

$$\frac{O'M'}{AA'} = \frac{O'A'}{AO} \quad (6.41)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{a_{2n}}{O'A'} = \frac{O'A'}{R_n} \quad (6.42)$$

resultando em

$$\frac{a_{2n}}{R_{2n}} = \frac{R_{2n}}{R_n} \quad (6.43)$$

donde

$$R_{2n} = \sqrt{R_n \cdot a_{2n}}. \quad (6.44)$$

Finalmente,

$$R_{2n} = \sqrt{\frac{(R_n)^2 + R_n \cdot a_n}{2}}. \quad (6.45)$$

Encontradas as relações desejadas, a segunda parte do método assim desenvolve-se: como o comprimento de uma circunferência é dado pela relação $C = 2\pi R$, vem que $\pi = \frac{C}{2R}$; deste ponto, será escolhido um polígono inicial (neste texto o polígono escolhido será o hexágono) e determinado o seu perímetro, o seu apótema e o raio da circunferência que o circunscribe. Utilizando a Relação 6.45, é possível encontrar o raio de uma nova circunferência (R_{2n}) que circunscreverá o novo polígono regular de $2n$ lados, onde este terá o mesmo perímetro que o polígono regular de n lados.

Repetindo o processo para valores de n suficientemente grandes, a medida do apótema dos polígonos inscritos estará cada vez mais próxima da medida do raio das circunferências circunscritas, isto é, a sequência $(R_{2n} - a_{2n})$ será decrescente e os seus termos tenderão a zero. Desta forma, o comprimento das circunferências circunscritas estarão cada vez mais próximos do perímetro do polígono que iniciou o processo, ou seja, a razão $\frac{2P}{2a_n}$ se aproximará cada vez mais do valor de π em cada iteração.

Exemplificando o processo, seja considerado um hexágono ($n = 6$) de lado $l = 1$; desta forma:

$$\begin{cases} 2P = 6 \cdot 1 = 6 \\ R_6 = 1 \\ a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2P}{2a_n} = \frac{3}{a_n} \end{cases} \quad (6.46)$$

n	a_n	R_n	$\frac{3}{a_n}$
6	0,866025	1,000000	3,464103
12	0,933013	0,965926	3,215391
24	0,949469	0,957662	3,159660
48	0,953566	0,955612	3,146087
96	0,954589	0,955100	3,142715
192	0,954844	0,954972	3,141874
384	0,954908	0,954940	3,141663

Tabela 10: Valores aproximados de π — método dos polígonos isoperimétricos.

A Tabela 10 indica os valores (com precisão de seis casas decimais) para a verificação dos elementos dos demais polígonos regulares — em especial, os valores da última coluna da direita indicam o valor da razão $\frac{6}{2a_n}$ (razão que tenderá ao valor de π conforme aumenta-se o valor de n), já que o polígono inicial é um hexágono de perímetro 6. Em sala de aula, uma sugestão para a montagem da tabela é a de utilizar o *software Excel*.

Apenas como informação, em [14], o autor realiza os cálculos deste processo utilizando, inicialmente, um quadrado e, dobrando o número de lados dos polígonos nos demais passos até chegar ao polígono regular de 524288 lados (cuja medida do raio é de 0,63661977231). Como resultado, obteve a seguinte aproximação para π :

$$\pi \approx \frac{4}{2 \cdot 0,63661977231} = 3,14159265387, \quad (6.47)$$

que está correta até a nona casa decimal.

Comparando este método com o método de Liu Hui, por exemplo, verifica-se que os valores aproximam-se com maior velocidade de π : a Tabela 11 permite visualizar que,

na quarta iteração (S_{48}) de ambos os métodos, é possível verificar que o método dos polígonos isoperimétricos já fornece duas casas decimais corretas para π , ao passo que o método de Liu Hui fornece apenas uma casa decimal.

Em contrapartida, os macetes geométricos do método dos polígonos isoperimétricos são mais complexos que o do método de Liu Hui, exigindo do professor muito cuidado e preparação prévia para que possa ser trabalhado em sala de aula.

S_n	Liu Hui	Polígonos Isoperimétricos
S_6	$2,598076 < \pi < 3,897114$	3,464103
S_{12}	$3,000000 < \pi < 3,401924$	3,215391
S_{24}	$3,105829 < \pi < 3,211658$	3,159660
S_{48}	$3,132629 < \pi < 3,159429$	3,146087
S_{96}	$3,139350 < \pi < 3,146071$	3,142715
S_{192}	$3,141032 < \pi < 3,142714$	3,141874
S_{384}	$3,141452 < \pi < 3,141872$	3,141663

Tabela 11: Tabela comparativa entre as aproximações de valores de π obtidas com o método de Liu Hui e o método dos polígonos isoperimétricos.

6.4 SÉRIE DE GREGORY/LEIBNIZ

Uma atividade numérica interessante pode ser utilizada, no Ensino Médio, para que os alunos determinem aproximações do valor de π . A atividade necessita do uso de uma calculadora científica (ou do *Excel*, caso seja possível a sua utilização). Seguem os passos:

1. Pedir para os alunos calcularem o valor (com um número de casas decimais pré-estabelecido no início da atividade — 6 casas decimais, por exemplo) das seguintes somas:

$$S_1 = \frac{4}{1} = 4; \quad (6.48)$$

$$S_2 = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} \approx 2,666667; \quad (6.49)$$

$$S_3 = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} \approx 3,466667. \quad (6.50)$$

2. Talvez, na quarta soma, eles comecem a enxergar algumas técnicas para economizar tempo nos cálculos, além de terem uma percepção da “regra” que determina a formação das somas:

$$S_4 = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7}. \quad (6.51)$$

Se os alunos perceberem, é possível colocar o fator 4 em evidência (todos os numeradores valem 4):

$$S_4 = 4 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \approx 2,895238. \quad (6.52)$$

3. A quinta soma é dada por:

$$S_5 = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} = 4 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right). \quad (6.53)$$

Mais uma vez, se for perceptível, os alunos poderão usar o valor de

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{76}{105} \quad (6.54)$$

para facilitar os cálculos de S_5 . Sendo assim:

$$S_5 = 4 \cdot \left(\frac{76}{105} + \frac{1}{9} \right) \approx 3,339683. \quad (6.55)$$

4. Sejam pedidas as demais somas: é provável que os alunos já comecem a perceber a lei de formação existente no processo:

$$S_6 = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} \approx 2,976046; \quad (6.56)$$

$$S_7 = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} \approx 3,283738; \quad (6.57)$$

$$S_8 = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} \approx 3,017072; \quad (6.58)$$

$$S_9 = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} \approx 3,252366. \quad (6.59)$$

5. Neste ponto, seria interessante que os alunos percebessem que:

- a) as somas de índice ímpar ($S_1, S_3, S_5, S_7, \dots$) têm uma diminuição de seus valores;

- b) as somas de índice par ($S_2, S_4, S_6, S_8, \dots$) têm um aumento de seus valores;
- c) para cada próximo passo, deve ser adicionada (ou subtraída) uma fração com numerador quatro e denominador um número ímpar da sequência de ímpares $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

Um recurso interessante para determinar mais valores de cada uma das somas é por meio de uma planilha feita no *Excel*. A Tabela 12 exibe alguns valores obtidos para as somas de índice par e para as somas de índice ímpar (na tabela, $k \geq 1$, k inteiro):

k	$2k - 1$	S_{2k-1}	$2k$	S_{2k}
1	S_1	4	S_2	2,666667
2	S_3	3,466667	S_4	2,895238
3	S_5	3,339683	S_6	2,976046
4	S_7	3,283738	S_8	3,017072
5	S_9	3,252366	S_{10}	3,041840
6	S_{11}	3,232316	S_{12}	3,058403
7	S_{13}	3,218403	S_{14}	3,070255
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
25	S_{49}	3,161999	S_{50}	3,121595
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabela 12: Algumas somas da atividade numérica.

Com a tabela em mãos, é possível perceber que as somas de índice ímpar diminuem, ao passo que as somas de índice par aumentam — dando a ideia de que, em algum momento, os valores tenderão a algum valor limite. Na verdade, se o número de somas calculados fosse maior, seria possível perceber que as somas de índice ímpar são aproximações por excesso do número π , ao passo que as somas de índice par são aproximações por falta do número π — se for pedido para os alunos a continuidade dos cálculos, a percepção destes padrões será maior.

Formalmente, a atividade numérica que foi proposta no início desta seção é um caso particular da *Série de Gregory* (James Gregory, século 17). A Série de Gregory é dada pela seguinte definição:

Definição 6.4.1 (Série de Gregory).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \dots$$

Tomando $x = 1$, deriva-se a chamada *Série de Leibniz* (Gottfried Wilhelm Leibniz, século 17):

Definição 6.4.2 (Série de Leibniz).

$$4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots$$

Será mostrado que

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad (6.60)$$

para $x \in [-1, 1]$ e, conseqüentemente,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \quad (6.61)$$

o que implica

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots \quad (6.62)$$

As deduções desses resultados serão feitas a seguir e o aporte teórico para maior entendimento de todos os processos realizados pode ser encontrado em obras de Cálculo Diferencial e Integral (como em [31], [15] e [16]) e, de forma ainda mais completa, em obras de Análise Matemática (como [20], por exemplo). Os resultados que serão utilizados (alguns deles sem a demonstração) também podem ser consultados nas obras já citadas.

Lema 6.4.1. A seqüência (a_n) , onde $a_n = x^n$, é convergente se $-1 < x \leq 1$ e divergente para todos os outros valores de x . Desta forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Lema 6.4.2. Se $-1 < x < 1$, a série $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ é convergente e a sua soma é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Demonstração.

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} \quad (6.63)$$

$$x \cdot S_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{n-1} + x^n \quad (6.64)$$

Subtraindo membro a membro as Equações 6.64 e 6.63, vem que

$$S_n \cdot (1-x) = 1 - x^n \text{ e, portanto, } S_n = \frac{1-x^n}{1-x}. \quad (6.65)$$

Pelo Lema 6.4.1, verifica-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-x}. \quad (6.66)$$

□

O resultado 6.66 é muito conhecido no Ensino Médio, visto que é o limite da soma dos infinitos termos de uma *progressão geométrica* cuja razão x está no intervalo $-1 < x < 1$ — e esta é exatamente a mesma dedução que pode ser feita para os alunos neste nível de ensino, devendo apenas ser dada uma breve noção de limites.

Agora, outros resultados serão necessários para o correto desenvolvimento da série de Gregory/Leibniz. Começando por:

Lema 6.4.3. Se $-1 < x < 1$, a série $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ é convergente e a sua soma é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (x^2)^{n-1} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Demonstração. Basta fazer a substituição de x por $-x^2$ no Lema 6.4.2. Com efeito:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (x^2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^{n-1} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}. \quad (6.67)$$

□

Lema 6.4.4.

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Demonstração. Se $\operatorname{arctg}(x) = y$, então $\operatorname{tg}(y) = x$. Diferenciando ambos os membros desta igualdade, obtém-se

$$\sec^2(y) \cdot y' = 1, \text{ donde } y' = \frac{1}{\sec^2(y)}. \quad (6.68)$$

Lembrando que $\operatorname{tg}^2(y) + 1 = \sec^2(y)$, vem que

$$y' = \frac{1}{\sec^2(y)} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(y) + 1} = \frac{1}{1+x^2}. \quad (6.69)$$

□

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [16].

Lema 6.4.5. *Dada uma série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, existem apenas três possibilidades acerca de sua convergência:*

- (i) a série converge apenas para $x = 0$;
- (ii) a série converge (absolutamente) para todo x real;
- (iii) existe um $r > 0$, chamado de raio de convergência, tal que a série converge (absolutamente) para todo x no intervalo $] -r, r[$ e diverge para todo x tal que $|x| > r$. Nos extremos $-r$ e r , a série poderá convergir ou não.

Lema 6.4.6 (Integração termo a termo.] *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Se $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$, então*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

Lema 6.4.7 (Teorema de Abel.] *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é r . Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ converge, então $\lim_{x \rightarrow r^-} (\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$.*

Finalmente, utilizando os Lemas 6.4.3, 6.4.4, 6.4.5, 6.4.6 e 6.4.7, será possível deduzir que:

14 Mais sobre este resultado pode ser encontrado em [16] e [20].

15 Consultar [20].

Teorema 6.4.8 (Série de Gregory).

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\end{aligned}$$

para $x \in [-1, 1]$.

Demonstração. Pelo Lema 6.4.4, tem-se que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (6.70)$$

Além disso, pelo Lema 6.4.3, tem-se que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (6.71)$$

Desta forma, para $|x| < 1$,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (6.72)$$

Agora, por meio do Lema 6.4.6, é possível integrar termo a termo a última equação escrita, obtendo

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots \quad (6.73)$$

Analisando $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, verifica-se que tal soma converge para $|x| < 1$, para $x = 1$ e, também, para $x = -1$, divergindo para $|x| > 1$. Desta forma, o seu raio de convergência vale 1.

Aplicando o Teorema de Abel (Lema 6.4.7), verifica-se que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}. \quad (6.74)$$

Como a função $\operatorname{arctg}(x)$ é contínua em $[-1, 1]$, vem que

$$\operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}. \quad (6.75)$$

Um raciocínio análogo pode ser usado para tratar $x = -1$. □

Agora, como consequência imediata do Teorema 6.4.8:

Corolário 6.4.9 (Série de Leibniz).

$$\begin{aligned}\pi &= 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots \\ &= 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}.\end{aligned}$$

Demonstração. Na igualdade estabelecida no Teorema 6.4.8, basta efetuar a substituição $x = 1$. □

O poder computacional desta série é pequeno (a Tabela 12 consegue dar uma ideia de que a convergência para π será demorada). O interesse dela para o Ensino Médio reside no fato de aguçar a curiosidade dos alunos para uma sequência de valores que tendem ao valor de π , além de ser possível — caso haja o material necessário — fazer com que os alunos manipulem uma planilha de cálculos como o *Excel* e possam construir numericamente a sequência, o que é uma atividade que foge da rotina escolar (e atividades assim são sempre benéficas).

Como curiosidade, a Figura 26 fornece uma ideia gráfica da convergência da sequência de Gregory/Leibniz para o valor de π — imagem que dialoga muito bem com a Tabela 12:

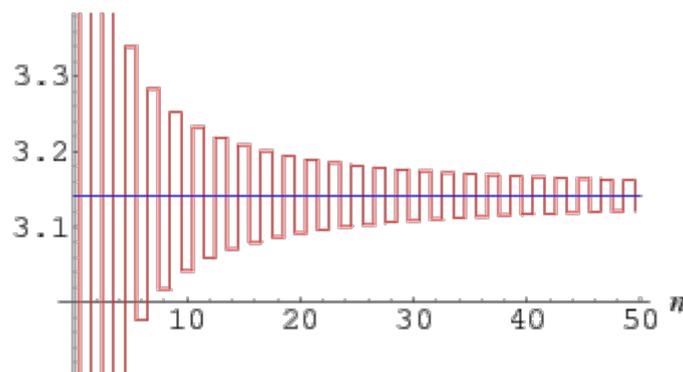


Figura 26: Representação gráfica da convergência da série de Gregory/Leibniz.¹⁶

Existem muitos outros modelos numéricos interessantes voltados para a determinação de aproximações do número π e os mesmos podem ser pesquisados de acordo com as metas de suas utilizações — seja para estudos teóricos, algoritmos computacionais, etc.

¹⁶ Fonte: disponível em: <<https://goo.gl/1Nb4p3>> Acesso em: jan. 2017.

O USO DO π NA EDUCAÇÃO BÁSICA

No Ensino Básico, mais notadamente no Ensino Fundamental 2 e no Ensino Médio, os alunos têm os primeiros contatos com o número π . Este contato pode ocorrer durante a apresentação dos números reais (racionais, irracionais e as suas principais características) e, principalmente, nos estudos de geometria — em especial, quando estiverem trabalhando com circunferências e círculos.

A ideia das próximas seções é fornecer subsídios (teóricos e práticos) para suplantar as eventuais lacunas teóricas existentes nas literaturas consultadas, fornecendo aos professores formas de apresentar e trabalhar o número π e a circunferência/círculo em suas aulas.

Iniciando este capítulo, será exibido um método simples e lúdico que ajudará os alunos a verificarem a definição mais utilizada do número π , isto é, que $\pi = \frac{C}{2R}$. A atividade permitirá obter valores que se aproximam dos valores de π (lembrando que os professores podem adaptar os métodos numéricos da Seção 6 caso queiram mostrar, de forma teórica, aproximações de π). Boa parte dos livros didáticos apenas menciona que π é a razão $\frac{C}{2R}$ sem ao menos apresentar algum método que permita aos alunos a conferência da ideia.

Após esta atividade, será explorada a ideia da área do círculo, visando fornecer subsídios teóricos e práticos para que os professores possam discutir o assunto de maneira assertiva em sala de aula.

Finalmente, as últimas seções trazem propostas de exercícios referentes aos diversos tipos de regiões circulares: porém, tais exercícios podem vir a ser um pouco mais exigentes em níveis de conteúdo e visão geométrica, daí a necessidade de se preparar adequadamente as estratégias para que possam ser trabalhadas com os alunos em sala de aula. Por mais que demandem tempo para serem resolvidos, vale o investimento

por parte do professor, levando em conta que os exercícios trabalhados permearão vários outros tópicos da matemática, servindo assim como ótimas formas de revisão de conteúdos.

7.1 MEDINDO SEÇÕES CIRCULARES E ENCONTRANDO APROXIMAÇÕES DE π

No Ensino Fundamental 2 e, também, no Ensino Médio, a forma como o π é apresentado é aquela que relaciona o comprimento C de uma circunferência de raio R e a medida de seu diâmetro ($2R$) — e sabe-se que esta relação é a fração $\frac{C}{2R}$. Seguindo esta ideia, é possível que os professores desenvolvam, de acordo com a série na qual estão trabalhando, uma atividade lúdica para mostrar que a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é sempre constante — independente da circunferência tomada.

O tempo que o professor destinará para fazer esta proposta lúdica dependerá da realidade de seu currículo e alunos (em geral, o tempo no Ensino Médio é mais restrito): desta forma, seguem duas sugestões de planos para cada um dos níveis de ensino e, em seguida, o roteiro da atividade em si.

- No Ensino Fundamental 2 (geralmente nos anos 8 e 9), a atividade pode ser desenvolvida ao longo de uma aula completa: desta forma, os alunos poderão medir diferentes secções circulares para determinar as aproximações de π . Durante a aula, vale pedir que os alunos compartilhem seus resultados com os colegas, além de fazerem adequadamente os registros dos valores obtidos. Fica a critério do professor a organização do espaço físico de sua sala de aula, da distribuição dos materiais e da forma como os alunos efetuarão as medições (individualmente ou em grupos);
- No Ensino Médio (geralmente nos anos 1 e 2), é de conhecimento que o tempo é muito mais restrito (devido ao maior número de conteúdos a serem trabalhados): desta forma, a sugestão que fica é a do próprio professor efetuar as medições (pelo menos em dois objetos diferentes, para efeitos de comparação) e, depois, comentar um dos métodos numéricos trabalhados na Seção 6. Ficarà a critério do professor qual método numérico explorar para mostrar aproximações de π .

Agora, seguem os materiais necessários para esta estratégia, sendo relativamente fáceis de serem encontrados:

- objetos que tenham seções circulares: pode ser um CD, DVD, uma lata;
- um barbante — grande o suficiente para dar a volta no objeto escolhido;
- uma régua;
- uma tesoura;
- uma calculadora (opcional, podendo ser utilizada ou não de acordo com o critério do professor).

Os passos (sintetizados na Figura 27) para realizar a atividade são:

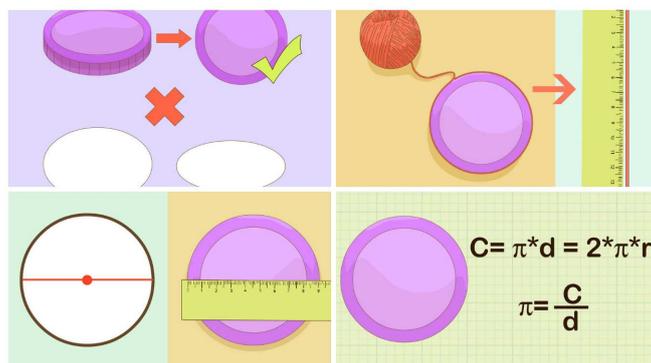


Figura 27: Esquema para determinar valores π na prática.¹

1. tomar o objeto escolhido e, utilizando o barbante, fazer com que o mesmo dê uma volta completa em torno do objeto: quando isso acontecer, cortar as sobras do barbante e esticar aquele que circundou o objeto;
2. com a régua, efetuar a medição do pedaço de barbante e guardar o valor: este é comprimento da seção circular;
3. este passo é relativamente mais complicado e impreciso: é necessário determinar o diâmetro do objeto escolhido. Neste ponto, deve-se lembrar que o diâmetro de uma circunferência necessariamente contém o centro² da mesma, ou seja, a medição tem que ser feita passando pelo centro da seção — daí o nível de dificuldade. Registrar o valor obtido e guardar;
4. efetuar a divisão do valor obtido no passo 2 pelo valor obtido no passo 3: este valor será uma aproximação do número π .

¹ Fonte: disponível em: <<https://goo.gl/rf0PCG>> Acesso em: jan. 2017.

² De acordo com o tempo e nível de rigor da aula, o professor pode questionar os alunos qual é o processo que deve ser feito para, dada uma circunferência, determinar o centro da mesma. Neste caso, deve-se determinar um triângulo inscrito na circunferência e determinar o *circuncentro* do triângulo, que é o ponto de encontro das mediatrizes relativas aos lados do mesmo.

Há dois ganhos imediatos ao realizar esta atividade com os alunos: eles poderão ver que a ideia do π é relativamente palpável, o que aproxima os alunos do conteúdo que está sendo estudado; o outro ganho é o aprendizado em relação aos processos de medição. Em todo processo de medição há algumas imprecisões que ocorrem: a qualidade dos instrumentos de medição e a perícia da pessoa que faz a medição. É importante citar isso pois, caso cada aluno efetue a sua própria medição, diferenças ocorrerão (o que é saudável para a atividade).

É claro, de acordo com a condução de cada professor, a atividade poderá agregar muito mais ao aprendizado dos alunos: desta forma, a experiência de cada professor contará muito para o aprimoramento desta dinâmica.

A próxima seção trará um passo a passo para trabalhar com aproximações de π utilizando o *GeoGebra*.

7.2 DETERMINANDO VALORES DE π UTILIZANDO O GEOGEBRA

Apesar de não ser uma ferramenta disponível para a totalidade das escolas e alunos, o *GeoGebra* tem sido usado (quando possível) com bastante êxito para trabalhos dinâmicos com os alunos em sala de aula, e não necessariamente apenas com trabalhos de Geometria. Aqui será sugerido um modelo, passo a passo, de uma construção que permitirá aos alunos verificarem aproximações cada vez mais precisas para o valor de π . Os professores poderão alterar este modelo de acordo com as suas necessidades e com o conhecimento da ferramenta.

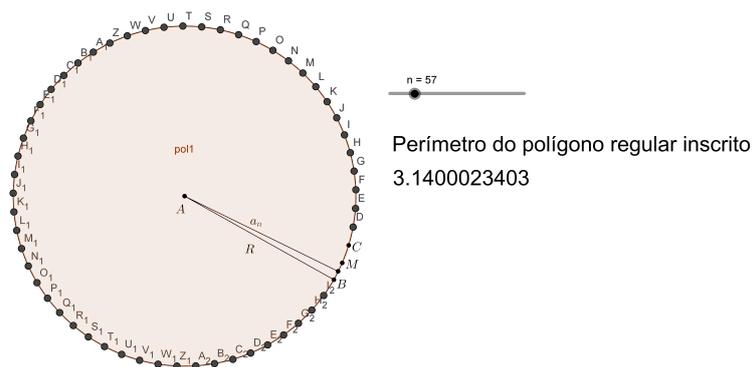


Figura 28: Perímetro de um 57-ângono — duas casas decimais corretas em relação ao valor de π .³

³ Fonte: próprio autor.

1. Sabendo que $C = 2\pi R$, determine uma circunferência cujo raio valha $\frac{1}{2}$: para tanto, utilize a ferramenta **Círculo dados Centro e Raio**. Fazendo isso, o comprimento da circunferência construída será justamente o valor π .
2. Marque um ponto B na circunferência.
3. Use a ferramenta **Controle Deslizante** e crie um **controle** n que seja **inteiro** (isto fará com que o incremento automaticamente seja 1), com valor mínimo 3 e valor máximo 100 (na verdade, o valor máximo fica a critério do professor).
4. Use a ferramenta **Ângulo com amplitude fixa**, selecione os pontos B e A (centro da circunferência) nesta ordem e determine o ângulo $\frac{360^\circ}{n}$. Após esse processo, será determinado um ponto C na circunferência.
5. Use a ferramenta **Polígono Regular**, selecione os pontos B e C (nesta ordem) e determine o número de lados como n . Aqui é importante que o polígono regular fique inscrito na circunferência e, caso isso não aconteça, basta inverter a ordem da escolha dos pontos.
6. Use a ferramenta **Distância, Comprimento ou Perímetro** e selecione o polígono regular: será calculado o perímetro do polígono (chamado de *perímetro $pol1$*).
7. Use a ferramenta **Texto** e, no botão **Objetos**, procure e selecione *perímetro $pol1$* : isto fará com que seja criada uma caixa de texto com o valor do perímetro do polígono regular.
8. Anime o controle deslizante: clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e marque a opção **Animar**. Será possível ver que, para valores grandes de n , o valor do perímetro do polígono regular tenderá ao valor de π . Se achar necessário, é possível ir na guia **Opções**, clicar em **Arredondamento** e selecionar o número de casas decimais que for mais conveniente.

Uma possível variação deste modelo é, ao invés de determinar o raio da circunferência como $\frac{1}{2}$, determinar como 1: desta forma, a área do círculo será igual a π e, para valores de n suficientemente grandes, as áreas dos polígonos regulares inscritos tenderão para o valor de π .

Além desta atividade proporcionar aos alunos a oportunidade de ver um modelo computacional simples gerando valores próximos de π , será de grande proveito poderem observar o formato dos polígonos regulares inscritos na circunferência e o que ocorre com os seus principais elementos (medida do lado e medida do apótema)

quando o número n de lados aumenta consideravelmente: essas observações serão muito importantes para a próxima seção.

A próxima seção abordará a definição formal de área de um círculo, bem como explorará a demonstração da relação que denota a área de um círculo: $S = \pi R^2$. Em seguida, algumas sugestões de como abordar a ideia de área em sala de aula serão apresentadas.

7.3 A ÁREA DO CÍRCULO: A IDEIA E AS RELAÇÕES

No Capítulo 1, o número π foi definido como a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, e comentou-se que também poderia ser definido como a área de um círculo de raio 1. Em primeiro lugar, é pertinente compreender a noção de área de um círculo:

Definição 7.3.1. Dado um círculo qualquer, existe um único número real que é maior que a área de qualquer polígono regular inscrito a ela e menor que a área de qualquer polígono regular circunscrito à circunferência desse círculo.⁴ Este número real é denominado a *área* do círculo em questão.

Agora, é possível verificar que a definição dada no Capítulo 1 sobre o número π e área de um círculo unitário é válida; antes, será enunciado um resultado preliminar:

Lema 7.3.1. A área S_n de um polígono regular de n lados é dada por $S_n = P_n \cdot a_n$, onde P_n é o seu semiperímetro e a_n é a medida de seu apótema.

Demonstração. De acordo com a Figura 29, é possível determinar o triângulo AOB tal que $AB = l_n$ é uma de suas bases e $h = a_n$ é a sua altura relativa. Como em um polígono regular de n lados é possível determinar n triângulos congruentes a AOB , vem que

$$S_n = n \cdot S_{AOB} = n \cdot \left(\frac{l_n \cdot a_n}{2} \right) = \left(\frac{n \cdot l_n}{2} \right) \cdot a_n. \quad (7.1)$$

⁴ Uma dedução desse resultado pode ser encontrada na Seção 5.3 de [25].

⁵ Fonte: próprio autor.

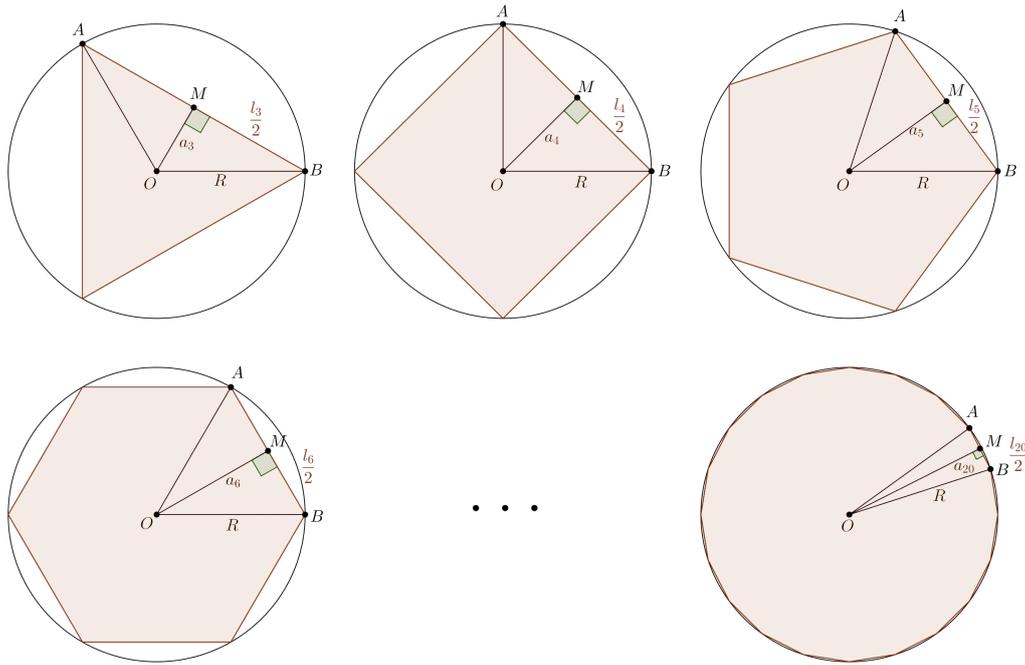


Figura 29: Polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, ..., 20 lados, inscritos em uma circunferência de raio R .⁵

Finalmente, lembrando que $n \cdot l_n$ é o perímetro $2P_n$ do polígono em questão:

$$S_n = \left(\frac{n \cdot l_n}{2} \right) \cdot a_n = P_n \cdot a_n. \quad (7.2)$$

□

Teorema 7.3.2. A área de um círculo de raio 1 é π .

Demonstração. A área de um círculo de raio 1 é o supremo do conjunto formado pelas áreas dos polígonos regulares inscritos na circunferência unitária. Como:

1. a área de um polígono regular de n lados é dada por $S_n = P_n \cdot a_n$;
2. os semiperímetros de quaisquer dois polígonos regulares de n lados inscritos numa mesma circunferência coincidem;
3. os apótemas de quaisquer dois polígonos regulares de n lados inscritos numa mesma circunferência coincidem,

segue que a área do círculo de raio 1 é dada por

$$S = \sup\{S_n : n \geq 3\} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \cdot a_n = \frac{2\pi \cdot 1}{2} \cdot 1 = \pi. \quad (7.3)$$

□

Corolário 7.3.3. A área⁶ de um círculo de raio R é πR^2 .

Demonstração. Na argumentação da prova do Teorema 7.3.2, basta trocar 1 por R . \square

É claro que, dependendo da realidade de cada professor, o tempo ou até mesmo o nível de conhecimento dos alunos podem ser parâmetros impeditivos para a realização da dedução aqui realizada. Pensando nisso, serão sugeridas duas formas mais lúdicas para auxiliar os alunos a compreenderem que a área de um círculo é dada por πR^2 .

A primeira forma é dividir o círculo em vários setores circulares, conforme a Figura 30.

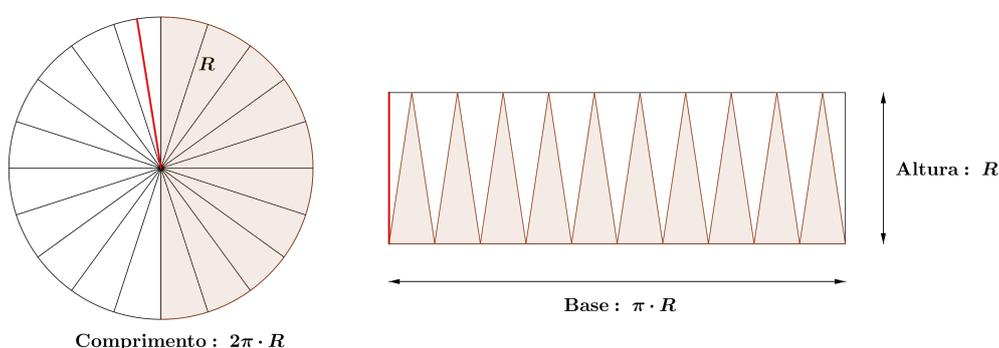


Figura 30: Reagrupando os setores circulares: forma-se um retângulo.⁷

A ideia deste primeiro método é a seguinte: quanto maior o número de setores circulares, os arcos que os definem se aproximam cada vez mais de segmentos de reta; desta forma, os setores circulares se aproximam do formato de triângulos isósceles onde a altura relativa ao segmento (arco de tamanho muito pequeno) coincidiria com o raio do círculo. Agrupando adequadamente tais triângulos, seria possível formar um retângulo de base πR (metade do comprimento da circunferência) e altura R (justamente a altura dos triângulos). Calculando a área deste retângulo, obtém-se

$$S = (\pi R) \cdot R = \pi R^2, \tag{7.4}$$

que é justamente a área do círculo.

O segundo método consiste em dividir o círculo em faixas (coroas), conforme mostra a Figura 31.

⁶ Em [25], é possível encontrar nos Exercícios 3.1 e 3.3 da Seção 5.3 outros argumentos para esta dedução

⁷ Fonte: próprio autor.

⁸ Fonte: próprio autor.

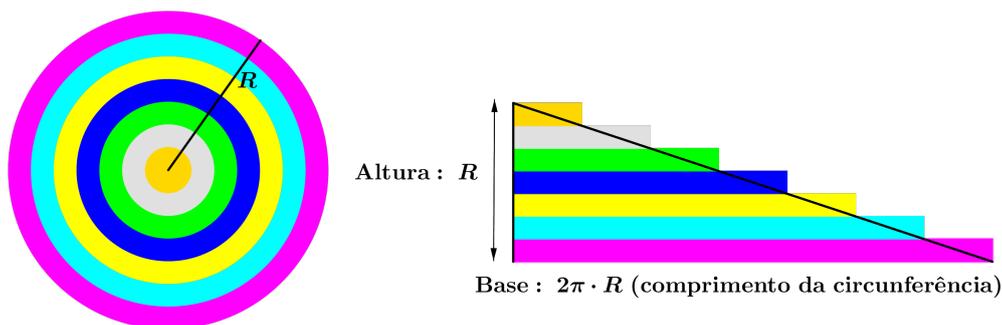


Figura 31: Divindo o círculo em “fatias”.⁸

Se um “corte” for efetuado no círculo, todas as faixas também serão cortadas — se tais faixas forem esticadas, retângulos serão obtidos. Empilhando as faixas de forma adequada, é possível construir um triângulo retângulo cuja base é a maior faixa possível (como consequência, esta faixa terá como medida da base a medida do comprimento da circunferência relativa à região circular) e a sua altura é o somatório das alturas de todas as faixas, isto é, o próprio raio do círculo. Calculando a área do triângulo, obtém-se

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2, \quad (7.5)$$

que é justamente a área do círculo.

É claro que os dois métodos aqui apresentados são apenas formas mais lúdicas de mostrar aos alunos que é possível “deduzir” a fórmula πR^2 de maneira intuitiva, utilizando conceitos previamente estudados.

7.4 LÚNULAS DE HIPÓCRATES

Contradizendo o senso de que o valor de áreas de regiões circulares dependem necessariamente de π , existem situações nas quais a constante não está presente: uma situação onde este fato ocorre é na construção chamada de *lúnula*⁹ que é, por definição, uma região limitada por dois arcos circulares de raios distintos.

⁹ Do latim, significa “pequena lua”.

¹⁰ Fonte: próprio autor.

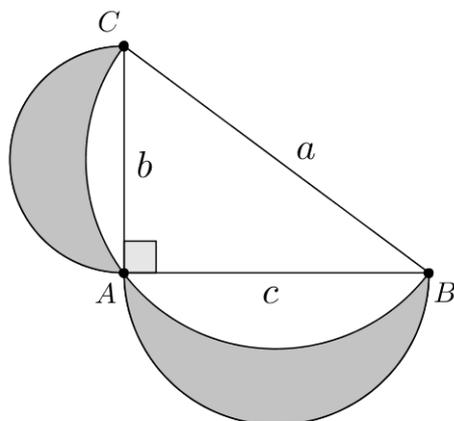


Figura 32: Lúnulas de Hipócrates: regiões destacadas em tons de cinza.¹⁰

Uma construção muito conhecida que envolve lúnulas é a que está representada na Figura 32: *Lúnulas de Hipócrates*. O mais interessante sobre toda a construção é o fato de que a soma das áreas das lúnulas — regiões destacadas em tons de cinza — tem a mesma área que o triângulo retângulo ABC , isto é, o valor da área não dependerá da constante π . Segue a demonstração do fato.

Teorema 7.4.1. *A soma S da área das lúnulas (Figura 32) é igual a $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c$, onde o semicírculo maior tem diâmetro a , o semicírculo intermediário tem diâmetro c , o semicírculo menor tem diâmetro b e o triângulo ABC é um triângulo retângulo em \hat{A} .*

Demonstração. O semicírculo maior, determinado pelo diâmetro a e arco \widehat{CB} tem área

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2. \quad (7.6)$$

Com raciocínio análogo, seguem as áreas dos semicírculos de diâmetros b e c , respectivamente:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad (7.7)$$

e

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2. \quad (7.8)$$

Pela construção, observa-se que a soma S das áreas das duas lúnulas pode ser obtida através da relação

$$S = S_2 + S_3 - (S_1 - S_{ABC}), \quad (7.9)$$

donde

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c. \quad (7.10)$$

Substituindo 7.6, 7.7, 7.8 e 7.10 em 7.9, obtém-se

$$S = \frac{\pi}{8} \cdot (b^2 + c^2) - \left(\frac{\pi}{8} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \right) = \frac{1}{8} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c. \quad (7.11)$$

Agora, lembrando que ABC é um triângulo retângulo em \hat{A} , vem que

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (7.12)$$

Finalmente, substituindo 7.12 em 7.11, obtém-se

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = S_{ABC}. \quad (7.13)$$

□

Esta construção poder ser trabalhada com os alunos após terem estudado a área do círculo e de suas partes. O maior desafio para eles será enxergar os diferentes setores circulares (na situação particular, semicírculos) e seus respectivos raios. O exercício pode ser feito pelo professor em sala de aula ou, dependendo do nível das avaliações, ser cobrado como desafio — como sugestão, dar um valor para a área do triângulo retângulo e pedir para que calculem a soma das áreas das lúnulas.

7.5 OUTRA ÁREA QUE NÃO DEPENDE DE π

A construção que será trabalhada nesta seção também tem a particularidade de não depender do valor de π . Ela foi retirada de um exercício vestibular da Universidade Presbiteriana Mackenzie — mas o tratamento dado aqui será para valores genéricos do lado do quadrado, diferente da questão original que apresenta um valor particular para o lado.

Teorema 7.5.1. O lado do quadrado $ABCD$ da Figura 33 mede l unidades de medida e os arcos \widehat{DB} e \widehat{EC} foram obtidos com centro no vértice A : desta forma, a soma das áreas destacadas em tons de cinza vale $\frac{l^2}{2}$, isto é, metade da área do quadrado $ABCD$.

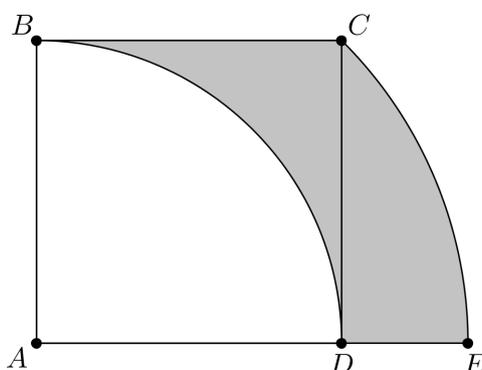


Figura 33: Será provado que a área destacada em tons de cinza equivale à metade da área do quadrado $ABCD$.¹¹

Demonstração. Seja considerada a construção da Figura 34, onde \overline{AC} é a diagonal do quadrado $ABCD$.

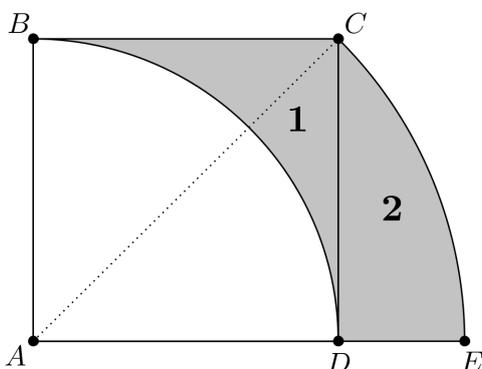


Figura 34: Construção auxiliar para a dedução do Teorema 7.5.1.¹²

A área da região 1, limitada pelos lados \overline{BC} , \overline{CD} e pelo arco \widehat{DB} pode ser calculada através da seguinte relação:

$$S_1 = S_{ABCD} - S_{90^\circ}, \quad (7.14)$$

¹¹ Fonte: próprio autor.

¹² Fonte: próprio autor.

onde S_{90° denota a área do setor circular delimitado pelos raios \overline{AD} , \overline{AB} e o arco \widehat{BD} . Desta forma:

$$S_1 = l^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot l^2 = l^2 \cdot \left(\frac{4 - \pi}{4} \right). \quad (7.15)$$

A área da região 2, limitada pelos segmentos \overline{CD} , \overline{DE} e o arco \widehat{EC} pode ser calculada através da seguinte relação:

$$S_2 = S_{45^\circ} - S_{ADC}, \quad (7.16)$$

onde S_{45° denota a área do setor circular delimitado pelos raios \overline{AE} , \overline{AC} e o arco \widehat{EC} . Como $AC = l \cdot \sqrt{2}$ (pois é diagonal do quadrado $ABCD$), vem que

$$S_2 = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot (l \cdot \sqrt{2})^2 - \frac{l \cdot l}{2} = \frac{l^2 \cdot \pi}{4} - \frac{l^2}{2}. \quad (7.17)$$

Finalmente, a área destacada em tons de cinza é dada pela soma de S_1 e S_2 , isto é,

$$S = S_1 + S_2 = l^2 \cdot \left(\frac{4 - \pi}{4} \right) + \frac{l^2 \cdot \pi}{4} - \frac{l^2}{2} = l^2 - \frac{l^2}{2} = \frac{l^2}{2}. \quad (7.18)$$

□

Esta é uma construção bem interessante pois, assim como as lúnulas, o valor da soma das áreas das regiões circulares não dependeu de π . Mas por qual motivo isso acontece? Considerando a Figura 35, será fácil mostrar que as áreas das regiões 2 e 3 são iguais: desta forma, “retirando” a área da região 2 e preenchendo a área da região 3, o quadrado estará preenchido pela metade — daí a área desejada ser $\frac{l^2}{2}$. Que seja verificada a validade deste resultado por meio do Teorema 7.5.2 :

Teorema 7.5.2. Na Figura 35,

$$S_2 = \frac{l^2 \cdot \pi}{4} - \frac{l^2}{2} = S_3.$$

Demonstração. A área S_3 é um segmento circular limitado pelo segmento \overline{BD} e pelo arco \widehat{DB} . Como a área do segmento circular é dada pela diferença entre o setor circular

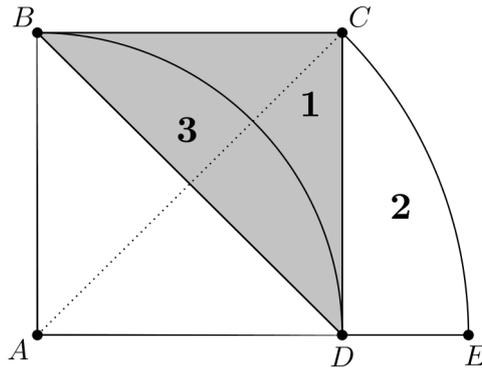


Figura 35: As áreas S_2 e S_3 são iguais.¹³

cujos arcos são o mesmo arco que define o segmento circular e o triângulo isósceles de base \overline{BD} , vem que

$$S_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot l^2 - \frac{1}{2} \cdot l \cdot l = \frac{l^2 \cdot \pi}{4} - \frac{l^2}{2} = S_2. \quad (7.19)$$

□

Esta situação pode ser trabalhada com os alunos após o estudo das áreas de partes do círculo. De modo geral, os alunos não terão dificuldades para calcular a área S_1 , visto que é apenas a diferença entre a área do quadrado $ABCD$ e o setor circular cujo ângulo central mede 90° ; porém, a área S_2 pode vir a ser um problema, visto que ela não se enquadra em nenhuma categoria de partes do círculo (setor circular, segmento circular).

Outro problema no cálculo de S_2 é o de encontrar o valor do ângulo central referente ao setor circular delimitado pelos raios \overline{AE} , \overline{AC} e o arco \widehat{EC} : os alunos têm que lembrar que se \overline{AC} é diagonal do quadrado, então também é bissetriz do ângulo reto \widehat{BAD} , ou seja, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DAC}) = 45^\circ$.

7.6 UM EXEMPLO DE QUADRILÁTERO CURVILÍNEO

Quadriláteros curvilíneos são regiões do plano delimitadas por quatro arcos de circunferência/setor circular. A Figura 36 mostra dois quadriláteros curvilíneos: $PQRS$ está contido no quadrado $ABCD$ e seus pontos são determinados pelas interseções dos arcos \widehat{CA} , \widehat{DB} , \widehat{BD} , \widehat{AC} de centros D, A, C, B , respectivamente; já o quadrilátero curvilí-

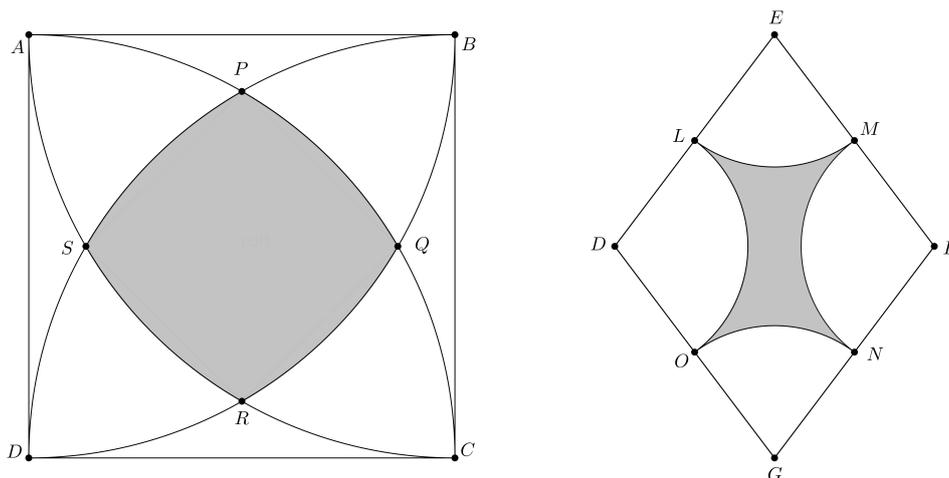


Figura 36: $PQRS$ e $LMNO$ são quadriláteros curvilíneos contidos no quadrado $ABCD$ e no losango $DEFG$, respectivamente.¹⁴

neo $LMNO$ está contido no losango $DEFG$ e é determinado pelos arcos \widehat{LM} , \widehat{MN} , \widehat{NO} , \widehat{OL} de centros E, F, G, D , respectivamente (L, M, N, O , são pontos médios dos lados do losango).

A grande dificuldade em se determinar a área de um quadrilátero curvilíneo é que o mesmo não se encaixa em classificações de áreas simples, tais como setores e segmentos circulares. De modo geral, o cálculo da área de um quadrilátero curvilíneo deve ser feito pela soma de áreas de regiões conhecidas ou, até mesmo, pela desconstrução da figura — retirando áreas conhecidas de uma área base até sobrar a área da figura desejada.

Para efeitos de exemplificação, será calculada a área do quadrilátero curvilíneo $PQRS$ — que está contido no quadrado $ABCD$ de lado l .

Teorema 7.6.1. *A área S do quadrilátero curvilíneo $PQRS$ (vide Figura 36) é dada por*

$$S = l^2 \cdot \left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3} \right).$$

Demonstração. O quadrilátero curvilíneo pode ser decomposto em cinco figuras convenientes: quatro segmentos circulares congruentes (devido à simetria da construção) e o quadrilátero $PQRS$ (que devido à simetria da construção é um quadrado ou um losango não-quadrado, visto que $PQ = QR = RS = SP$).

¹⁴ Fonte: próprio autor.

Começando pelos quatro segmentos circulares congruentes — S_1 , delimitado pelo segmento \overline{PQ} e pelo arco \widehat{QP} ; S_2 , delimitado pelo segmento \overline{QR} e pelo arco \widehat{RQ} ; S_3 , delimitado pelo segmento \overline{RS} e pelo arco \widehat{SR} ; S_4 , delimitado pelo segmento \overline{SP} e pelo arco \widehat{PS} — seja tomado o primeiro deles. O cálculo de sua área é dado pela relação

$$S_1 = \frac{m(P\hat{D}Q)}{360^\circ} \cdot \pi \cdot l^2 - S_{PDQ}. \quad (7.20)$$

O triângulo PDQ é um triângulo isósceles cujas medidas dos lados medem $PD = QD = l$ e PQ , e uma forma para encontrar a sua área é determinando o seno do ângulo $P\hat{D}Q$ (ou, uma informação ainda melhor, a medida do ângulo $P\hat{D}Q$ — medida esta que seria usada para calcular o valor do setor circular presente em 7.20).

Como os setores circulares estão centrados nos vértices do quadrado, tem-se que seus raios são congruentes e, por consequência, os triângulos DPC e AQD são equiláteros de lado l (e, portanto, congruentes). Sabendo que a medida do ângulo interno de um triângulo equilátero vale 60° , fica fácil verificar que

$$m(A\hat{D}P) + m(P\hat{D}C) = m(A\hat{D}Q) + m(Q\hat{D}C) = 90^\circ. \quad (7.21)$$

Assim,

$$m(A\hat{D}P) + 60^\circ = 60^\circ + m(Q\hat{D}C) = 90^\circ \quad (7.22)$$

e, portanto,

$$m(A\hat{D}P) = m(Q\hat{D}C) = 30^\circ. \quad (7.23)$$

Desta forma, $m(P\hat{D}Q) = 90^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$, o que possibilita o cálculo de S_1 :

$$S_1 = \frac{m(P\hat{D}Q)}{360^\circ} \cdot \pi \cdot l^2 - S_{PDQ} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot l^2 - \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \text{sen}(30^\circ) \quad (7.24)$$

donde

$$S_1 = \frac{\pi \cdot l^2}{12} - \frac{l^2}{4}. \quad (7.25)$$

Determinado o valor de S_1 , é necessário calcular a área do quadrilátero $PQRS$: pela simetria da construção, vem que $\overline{PR} \equiv \overline{SQ}$. Portanto, como $PQRS$ é um quadrilátero cujos lados são congruentes dois a dois e, ainda, as duas diagonais são congruentes entre si, vem que $PQRS$ é um quadrado de lado PQ e área $S_{PQRS} = (PQ)^2$. Tomando

o triângulo PDQ e sabendo que $m(\widehat{PDQ}) = 30^\circ$, é possível aplicar a Lei dos Cossenos para determinar $(PQ)^2$:

$$(PQ)^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos(30^\circ) = l^2 \cdot (2 - \sqrt{3}) = S_{PQRS}. \quad (7.26)$$

Finalmente, a área S do quadrilátero curvilíneo $PQRS$ é dada por:

$$S = 4 \cdot S_1 + S_{PQRS} = 4 \cdot \left(\frac{\pi \cdot l^2}{12} - \frac{l^2}{4} \right) + l^2 \cdot (2 - \sqrt{3}) \quad (7.27)$$

implicando em

$$S = l^2 \cdot \left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3} \right). \quad (7.28)$$

□

O trabalho com o quadrilátero curvilíneo aqui explorado pode ser feito em sala de aula com muita cautela por parte do professor, vista a série de técnicas envolvidas no processo: setor circular, segmento circular, propriedades de quadriláteros, ângulos no triângulo equilátero e no quadrado, área de um triângulo conhecidos dois lados e o seno do ângulo formado por eles, Lei dos Cossenos. É uma situação que agrega muitos conteúdos, podendo ser utilizada para realizar uma robusta revisão dos conteúdos citados.

7.7 FATOS DIVERSOS SOBRE O NÚMERO π

Aqui serão listados alguns fatos diversos sobre o número π , que podem ser utilizados em sala de aula a título de curiosidade ou descontração: de modo geral, os alunos se interessam por informações paralelas às disciplinas estudadas, o que pode ajudar a baixar o estresse e a ansiedade deles em aulas muito densas. Muitos destes fatos podem ser vistos em detalhes em [4], [29] e [3].

1. O sítio eletrônico <https://www.angio.net/pi/piquery.html> possui ferramentas que determinam quais são os valores que estão em uma determinada casa decimal de π , sequências de valores presentes nas casas decimais de π , arquivos contendo o número escrito com um milhão de casas decimais, além de vender produtos com a temática do número (canecas, camisetas, etc.).

2. A cantora inglesa Kate Bush possui uma música chamada “*Pi*”. Na música, a cantora cita alguém que vive inclinado a procurar os valores de π (talvez Arquimedes), além de declamar mais de cem casas decimais do número. Na quinquagésima quarta casa decimal há o primeiro erro, sendo que alguns outros erros ocorrem até o final da música: fica o debate se o erro é apenas uma liberdade poética ou ele realmente foi cometido por desconhecimento do valor (o que realmente não parece ser o caso).
3. A casa francesa de perfumes e moda *Givenchy* possui um perfume masculino em seu catálogo chamado “*Pi*”. De acordo com a marca, a fragrância incita os homens a explorarem territórios e aventuras inéditas — talvez fazendo uma alusão aos matemáticos que exploraram diferentes teorias e técnicas para tentarem entender melhor o número π .
4. O número π possui uma data de aniversário: dia 14 de março. Esta data deve-se ao sistema “MDY¹⁵” (month, day, year — ou mês, dia, ano): de fato, neste sistema a data 14 de março é escrita como 3/14, levando em conta os três números mais conhecidos de π .
5. Em [29] é possível encontrar algumas interessantes expressões que servem como aproximações para o valor de π : os dígitos sublinhados são aqueles que realmente estão de acordo com o valor 3, 14159265359.... Algumas delas são:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx \underline{3,14626436994} \quad (7.29)$$

$$1, 1 \cdot 1, 2 \cdot 1, 4 \cdot 1, 7 = \underline{3,1416} \quad (7.30)$$

$$\left(\frac{296}{167}\right)^2 \approx \underline{3,14159704543} \quad (7.31)$$

$$\sqrt[3]{31 + \frac{25}{3983}} \approx \underline{3,1415926534\dots} \quad (7.32)$$

Fica a discussão sobre como tais resultados foram obtidos: acidentalmente, “engenharia reversa” ou motivações geométricas?

15 Sistema largamente utilizado pela população dos Estados Unidos da América.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho com o número π pode ser considerado realmente enriquecedor em vários aspectos intelectuais/cognitivos, tanto para o aprimoramento da formação dos professores — e a conseqüente melhora de suas aulas — como para os alunos, que poderão tomar contato com o assunto sob diferentes pontos de vista.

Ao fazer uso da história da matemática para a pesquisa sobre o π , é possível perceber como a matemática está atrelada à realidade/necessidade dos grupos sociais pesquisados — puramente prática no Antigo Egito; voltada para a formalização, dedução e prova para alguns gregos antigos, que tinham o tempo necessário para ponderar sobre a razão humana; o avanço extremamente tímido, no Ocidente, durante toda a Idade Média — até o resgate que é feito pelo homem durante o Renascimento, momento em que a razão passa a ser o centro das atenções.

Finalmente, das revoluções industriais e tecnológicas passadas até as atuais, vê-se a necessidade da Matemática para dar subsídios às mesmas, ao ponto de tornar-se uma ciência que dispõe de corpos teóricos que sequer (ainda) podem ser aplicados em utilizações práticas. Poder mostrar este panorama para os alunos é uma forma de tentar motivá-los e, também, levá-los a compreender que a Matemática não foi “inventada”, e sim construída de acordo com as necessidades, e esta construção continua enquanto estas palavras vão sendo escritas e professores ao longo do país vão lecionando em escolas e universidades.

Estudar uma demonstração da irracionalidade do número π é enriquecedor do ponto de vista teórico: por mais que a maioria dos resultados utilizados na demonstração não possa ser levada para a sala de aula da Educação Básica, a compreensão dos diversos tópicos torna o professor muito mais capacitado em termos de domínio do conteúdo matemático, resultando em maior segurança na sala de aula e uma conseqüente fluidez em suas aulas.

Os métodos numéricos para a obtenção de aproximações de π , se considerados com atenção pelos professores, podem ser utilizados em sala de aula como interessantes projetos/trabalhos paralelos. O nível de complexidade existente neles é adequado o

suficiente para que, com algum esforço, os alunos sejam capazes de compreendê-los e de ampliar seus repertórios matemáticos com todas as técnicas envolvidas; além disso, para professores que trabalham com Olimpíadas de Matemática, podem ser ótimos exercícios para aprimorar a linguagem escrita de seus alunos.

As ideias de exercícios e situações problema voltadas para o Ensino Básico podem servir de catalisadores para o aperfeiçoamento (e até mesmo motivação) dos alunos. Trazer situações que sejam um pouco mais complexas, mostrar um pouco da realidade de alguns exames vestibulares e Olimpíadas de Matemática (mesmo alguns professores, infelizmente, têm receio de tentar resolver questões de vestibulares consagrados como FUVEST, UNICAMP, VUNESP, ITA) pode ser um gatilho para despertar o interesse de alguns alunos.

É muito evidente a miríade de realidades educacionais/culturais/sociais existentes no país; das diferenças dos níveis de formação dos professores e gestores educacionais; da organização burocrática e pedagógica das escolas; das diferenças sociais e culturais dos alunos: são muitas variáveis que fogem do domínio dos professores e que impactam a qualidade dos trabalhos realizados. Porém, o preparo e o estudo do professor são parâmetros que dependem apenas dele, e ele tem que ter gana e disposição para ter pleno controle de tais parâmetros.

Espera-se genuinamente que o somatório de todos os esforços, estudos e trabalhos realizados nos cursos do PROFMAT espalhados pelos diversos polos de todo o país seja apenas o início de uma mudança de paradigma no ensino da Matemática. Que os professores envolvidos tenham ainda maior disposição para continuar os seus estudos e aprimoramentos, e aqueles que ainda não tiveram a oportunidade de adentrar no curso, que tenham a possibilidade de tomar a iniciativa e possam também fazer parte desta mudança.

Os alunos necessitam urgentemente de bons professores, e aqui (e em todos os diversos trabalhos de conclusão de curso efetuados) fica a constatação de que o PROFMAT pode contribuir decisivamente para a formação e o amadurecimento intelectual deles: esta é a grande consideração final deste e, muito provavelmente, de todos os outros trabalhos de conclusão de curso.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ávila, G. S. d. S.: *Introdução à análise matemática*. Blucher, São Paulo, 2^a ed., 1999.
- [2] Ávila, G. S. d. S.: *Análise matemática para a licenciatura*. Blucher, São Paulo, 3^a ed., 2006.
- [3] Beckmann, P.: *A History of Pi*. The Golem Press, New York, 1971.
- [4] Bellos, A.: *Alex no país dos números*. Companhia das Letras, São Paulo, 2011.
- [5] Borwein, J. M.: *Pi: A source book*. Springer Science & Business Media, New York, 2013.
- [6] Boyer, C. B. e U. C. Merzbach: *História da Matemática*. Blucher, São Paulo, 2012.
- [7] Dante, L. R.: *Matemática: contexto e aplicações*, vol. 1. Ática, São Paulo, 2010.
- [8] Dolce, O. e J. N. Pompeo: *Fundamentos de matemática elementar*, vol. 9. Atual, São Paulo, 8^a ed., 2005.
- [9] Domingues, H. H. e G. Iezzi: *Álgebra moderna*. Atual, São Paulo, 4^a ed., 2003.
- [10] Eves, H.: *Introdução à história da matemática*. Editora da UNICAMP, Campinas, 2004.
- [11] Ferreira, J.: *A construção dos números*. Textos Universitários. SBM, Rio de Janeiro, 3^a ed., 2013.
- [12] Garbi, G. G.: *A rainha das ciências*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 1^a ed., 2006.
- [13] Garbi, G. G.: *O romance das equações algébricas*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2^a ed., 2009.
- [14] Garbi, G. G.: *CQD: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas da geometria*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010.
- [15] Guidorizzi, H. L.: *Um curso de cálculo*, vol. 1. Grupo Gen-LTC, Rio de Janeiro, 5^a ed., 2014.

- [16] Guidorizzi, H.L.: *Um curso de cálculo*, vol. 4. Grupo Gen-LTC, Rio de Janeiro, 5ª ed., 2015.
- [17] Iezzi, G.: *Fundamentos de matemática elementar*, vol. 6. Atual Editora LTDA, São Paulo, 6ª ed., 1997.
- [18] Jones, T. W.: *Discovering and Proving that π Is Irrational*. American Mathematical Monthly, 117(6):553–557, 2010.
- [19] Lima, E. L.: *Números e funções reais*. Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, 1ª ed., 2013.
- [20] Lima, E. L.: *Curso de análise*, vol. 1 de *Projeto Euclides*. IMPA, Rio de Janeiro, 14ª ed., 2016.
- [21] Lima, P. C. d.: *Fundamentos de análise*, vol. 1. CAED - UFMG, Belo Horizonte, 2013.
- [22] Marques, D.: *Teoria dos Números Transcendentes*. Textos Universitários. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [23] Mol, R. S.: *Introdução à História da Matemática*. CAED-UFMG, Belo Horizonte, 2013.
- [24] Morgado, A. C., E. Wagner e M. Jorge: *Geometria II*. VestSeller, Fortaleza, 4ª ed., 2008.
- [25] Neto, A. C. M.: *Geometria*, vol. volume de *Coleção PROFMAT*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [26] Neto, A. C. M.: *Fundamentos de cálculo*. Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, 1ª ed., 2015.
- [27] Niven, I.: *A simple proof that π is irrational*. Bulletin of the American Mathematical Society, 53(6):509, jun. 1947. <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183510788>.
- [28] Niven, I.: *Números: Racionais e Irracionais*. Coleção Iniciação Científica. SBM, Rio de Janeiro, 1990.
- [29] Posamentier, A. S. e I. Lehmann: *Pi: a biography of the world's most mysterious number*. Prometheus Books, New York, 2004.
- [30] Spivak, M.: *Calculus*. Benjamin, London, 1967.
- [31] Stewart, J.: *Cálculo*, vol. 2. Thomson, São Paulo, 5ª ed., 2006.

[32] Zhou, L.: *Irrationality proofs à la Hermite*. arXiv preprint arXiv:0911.1929, 2009.