Universidade Federal do ABC

PROFMAT

Henri Flávio da Silva

Triângulos Heronianos

Santo André, 2017

Universidade Federal do ABC

Programa de Pós Graduação em Matemática Profissional

Henri Flávio da Silva

Triângulos Heronianos

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa
de Pós Graduação em Matemática Profissional
para obtenção do título de Mestre

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação
defendida pelo aluno Henri Flávio da Silva,
e orientada pelo Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva.

Santo André, 2017

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silva, Henri
Triângulos Heronianos / Henri Silva. — 2017.

64 fls. : il.

Orientador: Márcio Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2017.

1. Triângulos Heronianos. 2. Fórmula de Heron. 3. Área do Triângulo. 4. Propriedades dos triângulos Heronianos. I. Silva, Márcio. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2017. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 11 de Maio de 2017.

Assinatura do autor: Henri Flavio

Assinatura do orientador: Márcio Fabiano da Silva

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Henri Flávio da Silva, realizada em 16 de fevereiro de 2017:

Márcio Fabiano da Silva

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (UFABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Sinue Dayan Barbero Lodovici** (UFABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **David Pires Dias** (USP) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Igor Leite Freire** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Alexandre Lymberopoulos** (USP) – Membro Suplente

Dedico este trabalho à minha mãe, por todo amor e empenho em garantir minha educação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela experiência maravilhosa de existir e viver.

À Sociedade Brasileira de Matemática e à Universidade Federal do ABC por viabilizarem o PROFMAT na Grande São Paulo, garantindo chances reais aos professores desta região de conquistarem o título de mestre.

Agradeço muito aos meus professores de todas as etapas de minha formação, em especial, ao coordenador do programa na Ufabc, Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi por todo apoio durante o meu retorno ao mestrado, e ao meu orientador, Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva, pela ajuda nos momentos mais difíceis.

Não posso deixar de agradecer à minha família pelo apoio e incentivo aos meus estudos em todas as suas etapas. À minha mãe, Conceição da Silva, a qual dedico esta obra e a minha esposa e filhos, Raquel V. Franz, Karen Narayana e Joshua Narayan, pela confiança depositada em mim.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas que não pouparam em palavras de força e perseverança para que este trabalho fosse, finalmente, concluído.

Muito obrigado a você que dedicou o seu momento presente a ler este trabalho.

"A melhor maneira que o homem dispõe para se aperfeiçoar, é aproximar-se de Deus."

(Pitágoras)

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre os triângulos que possuem lados e área de medidas inteiras, doravante chamados de *Triângulos Heronianos*, muito estudados na teoria dos números a partir da fórmula de Heron, que relaciona a área de um triângulo aos seus três lados. Este tema traz o desafio de se encontrar triplas de inteiros que satisfaçam as condições da fórmula de Heron, problema este já resolvido desde o século VI pelo matemático indiano Brahmagupta por meio de parametrizações. Outro fator enriquecedor deste estudo é que esta classe de triângulos apresenta diversas propriedades que, apesar de não serem óbvias, podem ser demonstradas com conceitos de matemática básica, viabilizando o seu ensino nas aulas regulares de matemática.

Palavras-chave: Heron. Fórmula de Heron. Triângulos Heronianos

ABSTRACT

In this work, we present a study on the triangles that have sides and area that are all integers, hance called *Heronian Triangles*, well studied in number theory based on Heron's formula, which relates the area of a triangle to its three sides. This theme brings the challenge of finding triples of integers that satisfy the conditions of Heron's formula, a problem that has been solved since the sixth century by the Indian mathematician Brahmagupta by means of parametrizations. Another enriching factor of this study is that this class of triangles presents several properties that, although not obvious, can be demonstrated with concepts of basic mathematics, facilitating their teaching in regular math classes.

Keywords: Heron. Heron Formula. Heronian Triangle

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Atualmente, o ensino de áreas de figuras planas na Matemática inicia-se com o estudo de regiões quadradas e retangulares e, normalmente, são trabalhados inicialmente lados de medida natural, o que sempre implicará em uma área de medida natural. Contudo, quando o aluno avança para o estudo das áreas de regiões triangulares, ele perceberá que, para essas figuras, ter lados de medida natural nem sempre implicará em uma área de medida natural. Este fato fica ainda mais evidente com a fórmula de Heron para o cálculo da área de um triângulo, onde as medidas dos três lados estão relacionadas em uma uma raiz quadrada.

Os triângulos que possuem lados e área de medidas naturais são especiais e levam o nome *Triângulos Heronianos*. A partir de revisões bibliográficas, foram selecionados e organizados diversos resultados sobre esta classe de triângulos de forma que o leitor seja capaz de responder às seguintes perguntas: O que são triângulos Heronianos? Quais as suas propriedades? Como geramos tais triângulos?

O objetivo deste trabalho é difundir o estudo dos triângulos Heronianos na sala de aula, dado que este é um tema que traz muitas perguntas interessantes que podem cativar as mentes mais curiosas, além de ser uma fonte de elementos que articulam a geometria com a teoria dos números, o que amplia o conceito de Matemática como ciência. Além disso, a matemática utilizada nos resultados acerca dos triângulos Heronianos não foge dos conteúdos previstos para a educação básica, em geral, grande parte desses resultados podem ser obtidos ao final do nono ano do Ensino Fundamental II, e nada impede de se abordar este tema no início do estudo de áreas de regiões triangulares de maneira investigativa.

Para tanto, vamos trazer no capítulo I um pouco da história do matemático Heron de Alexandria e diferentes demonstrações para sua fórmula que relaciona a área de um triângulo aos seus três lados. Na sequência, no capítulo II, demonstraremos inúmeras propriedades dos triângulos Heronianos, como por exemplo, o fato da área de um triângulo Heroniano ser sempre um múltiplo de seis. O capítulo III será dedicado à procura de triplas de inteiros que constituam um triângulo Heroniano, para isso, desenvolveremos uma série de parâmetros para tais inteiros. Finalmente, no capítulo IV, discorreremos sobre a possibilidade de introduzir este tema no ensino básico.

1

A FÓRMULA DE HERON

Neste capítulo, traremos um pouco da história do matemático Heron de Alexandria e apresentaremos algumas demonstrações para a *Fórmula de Heron*, dentre elas, a que o próprio Heron teria feito em seu livro *A Métrica*.

1.1 HERON DE ALEXANDRIA

Segundo Howard Eves [7], Heron (ou Herão) de Alexandria foi, provavelmente, um matemático egípcio com formação grega que viveu na segunda metade do século I. Seus inúmeros escritos vão além da Matemática, adentrando no campo da Física, da Engenharia e da Agrimensura, podendo ser divididos em duas classes: a dos geométricos e a dos mecânicos.

Dos trabalhos geométricos de Heron, *A Métrica*, descoberta em 1896 em Constantinopla por R. Schöne, é um dos mais importantes. Composta por três livros, esta obra apresenta trabalhos para o cálculo de áreas, volumes e problemas envolvendo tais grandezas e é nela que encontramos a demonstração mais antiga que se tem registro para o cálculo da área de um triângulo em função de seus lados.

A demonstração encontrada no Livro I de *A Métrica* é essencialmente geométrica, como a maioria das demonstrações gregas, contudo, Heron apresenta em seus trabalhos uma forte influência babilônica, destacada pela resolução de problemas geométricos de forma prática, atribuindo e verificando valores possíveis, dando pouca atenção à unicidade da resposta e às dimensões das grandezas. Além disso, encontramos uma enorme quantidade de exemplos numéricos de mensuração de comprimentos, áreas e volumes, fazendo de suas obras verdadeiros manuais [1].

Em *A Métrica*, também encontramos um método para o cálculo de aproximações para a raiz quadrada de um inteiro que não seja quadrado perfeito, ainda muito utilizado na computação. Esse processo consiste em aproximações sucessivas para $\sqrt{r}$ a partir de termos da sequência $a_n = \frac{a_{n-1}+\frac{r}{a_{n-1}}}{2}$ onde $r = ab$ e $a_1 = \frac{a+b}{2}$. Geometricamente, o problema consiste em determinar o lado de um quadrado cuja área seja igual a $r = ab$, que é a área de um retângulo de lados de medida a e b. Segundo Boyer [1], este interesse por aproximações demonstrava que Heron, assim como os matemáticos pré-helênicos, não fazia distinção entre resultados que são exatos e os que são apenas aproximações.

Dos trabalhos mecânicos, destacam-se a *Pneumática* e a *Catóptrica*. No primeiro é possível encontrar projetos de um tipo primitivo de máquina a vapor, um precursor do termômetro, um carro de bombeiro, brinquedos e um órgão de sopro, e o segundo traz estudos sobre a reflexão da luz, o princípio da mínima distância e a construção de espelhos.

1.2 A DEMONSTRAÇÃO DE HERON

Existem inúmeras maneiras de demonstrar a fórmula de Heron, a mais usual atualmente parte de relações trigonométricas, mas também é possível demonstrá-la por desenvolvimento algébrico de relações métricas ou de deduções geométricas.

Nesta seção, reproduziremos a demonstração geométrica feita por Heron no Livro I de *A Métrica*, esquematizada por Howard Eves no problema 6.11 em seu livro *Introdução à História da Matemática* (2004) [7] e descrita com mais detalhes em [10]. Esta demonstração é a mais antiga de que se tem registro, contudo, segundo Boyer [1], os árabes apontam que Arquimedes já conhecia a "*A Fórmula de Heron*" duzentos anos antes de Cristo.

Teorema 1.1. *Dado o triângulo $\triangle ABC$ com lados de medidas $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ e semiperímetro s, então sua área Δ é dada por:*

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Demonstração. Considere as seguintes construções auxiliares sobre o triângulo $\triangle ABC$, ilustradas na Figura 1:

1. A circunferência inscrita Γ com centro em G, tangente aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ nos pontos D, E e F, respectivamente, e de raio $r (= GE = GD = GF)$;

2. O ponto H no prolongamento da semirreta $\overrightarrow{BC}$ tal que $CH = AF$;
3. A semirreta $\overrightarrow{GI}$ perpendicular ao segmento $\overline{BG}$ intersectando $\overline{BC}$ em I;
4. A semirreta $\overrightarrow{CJ}$ perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ intersectando $\overrightarrow{GI}$ em J.

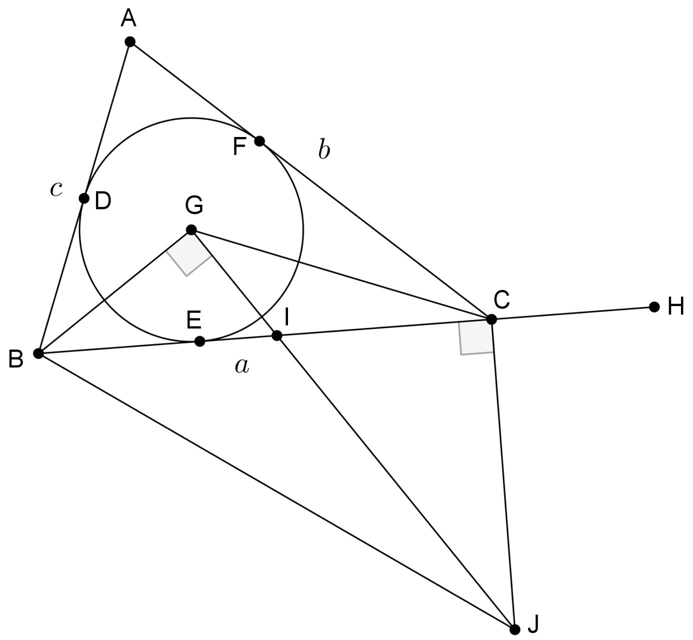

Figura 1: Demonstração de Heron

Observamos que como $\triangle BGE$ é retângulo no vértice E, então $\angle BGE$ é agudo. Assim, na construção do item (3) anterior, garantimos que $B - E - I$. Além disso, como

$$m(\angle GBC) + m(\angle BCG) < \frac{\pi}{2}$$

(esse argumento é uma consequência da relação (1.9)), temos que $m(\angle BGC) > \frac{\pi}{2}$, donde concluímos que $C - I - E - B$.

Pelo Teorema da Potência de Ponto, temos que $AD = AF$, $BD = BE$ e $CE = CF$, dessa forma, segue:

$2s = AD + DB + BE + EC + CF + AF = 2(AF + BE + EC)$ implicando em $AF + BE + EC = s$ obtendo as seguintes relações:

$$\begin{cases} AF = AD = s - (BE + EC) = s - a \\ BE = BD = s - (AF + CF) = s - b \\ CE = CF = s - (AD + DB) = s - c \end{cases} \tag{1.1}$$

A partir dos triângulos retângulos $\triangle AGD$, $\triangle AGF$, $\triangle BGD$, $\triangle BGE$, $\triangle CGE$, $\triangle CGF$, podemos calcular a área Δ fazendo $\Delta = 2(\frac{AFr}{2} + \frac{BEr}{2} + \frac{CEr}{2}) = r(AF + CE + BE)$, obtendo

$$\Delta = sr. \tag{1.2}$$

Por construção, os pontos G e C enxergam o segmento $\overline{BJ}$ sob um ângulo cuja medida é, em radianos, $\frac{\pi}{2}$, logo, o quadrilátero $\square BGCJ$ está inscrito numa circunferência de diâmetro BJ. Pelo Teorema do Quadrilátero Inscritível, seus ângulos opostos são suplementares, assim

$$m(\angle BGC) + m(\angle BJC) = \pi. \tag{1.3}$$

Por outro lado, temos as seguintes congruências:

$$\triangle BGD \cong \triangle BGE; \triangle AGD \cong \triangle AGF; \triangle CGE \cong \triangle CGF,$$

donde seguem as relações

$$2m(\angle BGD) + 2m(\angle AGF) + 2m(\angle CGF) = 2\pi$$

assim,

$$m(\angle BGD) + m(\angle AGF) + m(\angle CGF) = \pi$$

e, consequentemente

$$m(\angle BGC) + m(\angle AGF) = \pi$$

e de (1.3) segue

$$m(\angle AGF) = m(\angle BJC).$$

Com isso, temos que $\triangle BCJ \sim \triangle AFG$, o que implica em

$$\frac{BC}{CJ} = \frac{AF}{r} = \frac{CH}{r}\text{(por construção).} \tag{1.4}$$

Perceba que $\angle EIG$ e $\angle CIJ$ são opostos pelo vértice, logo, $\triangle GEI \sim \triangle JCI$ implicando em:

$$\frac{CJ}{CI} = \frac{r}{EI}. \tag{1.5}$$

Como $\overline{EG}$ é altura relativa à base $\overline{BI}$ do triângulo retângulo $\triangle BGI$, podemos escrever:

$$r^2 = BEEI. \tag{1.6}$$

Agora, de (1.4) e (1.5), chegamos em $\frac{BC}{CH} = \frac{CI}{EI}$, e das propriedades da proporcionalidade, segue:

$$\frac{\overbrace{BC + CH}^{BH}}{CH} = \frac{\overbrace{CI + EI}^{CE}}{EI}.$$

Assim

$$\frac{BH}{CH}\frac{BH}{BH} = \frac{CE}{EI}\frac{BE}{BE}.$$

Consequentemente,

$$BH^2BEEI = \underbrace{CH}_{AF}BHCEBE.$$

Por (1.6), temos assim que $BH^2r^2 = BHAFBECE$ e por (1.1), $s^2r^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Por (1.2), concluímos que

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$\square$

1.3 UMA DEMONSTRAÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Existem inúmeras demonstrações para a fórmula de Heron que partem de conceitos de trigonometria, talvez, uma das mais belas seja a que Carlos A. Gomes apresentou na RPM 57 em seu artigo intitulado *"Uma bela demonstração para a fórmula de Heron"* [9] baseada no trabalho *"Heron's Formula via Proofs Without Words"* de Roger B. Nelsen [12], demonstrada a seguir com algumas adaptações.

Considere o triângulo $\triangle ABC$ de lados de medida $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ e sua circunferência inscrita de centro O e raio r. Por construção, os segmentos $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ e $\overline{CO}$ estão nas bissetrizes dos ângulos internos de $\triangle ABC$, e os segmentos $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$, de medida r, são perpendiculares aos lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, conforme ilustra a Figura 2.

Pelo teorema da potência de ponto, os seguimentos $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ possuem mesma medida x, analogamente, temos $BE = BF = y$ e $CF = CD = z$. Desta forma, verificamos as seguintes congruências por LLL: $\triangle AOE \cong \triangle AOD$; $\triangle BOE \cong \triangle BOF$; $\triangle COF \cong \triangle COD$.

Logo, a área Δ do triângulo $\triangle ABC$ pode ser calculada por

$$\Delta = 2\left(\frac{xr}{2} + \frac{yr}{2} + \frac{zr}{2}\right)$$

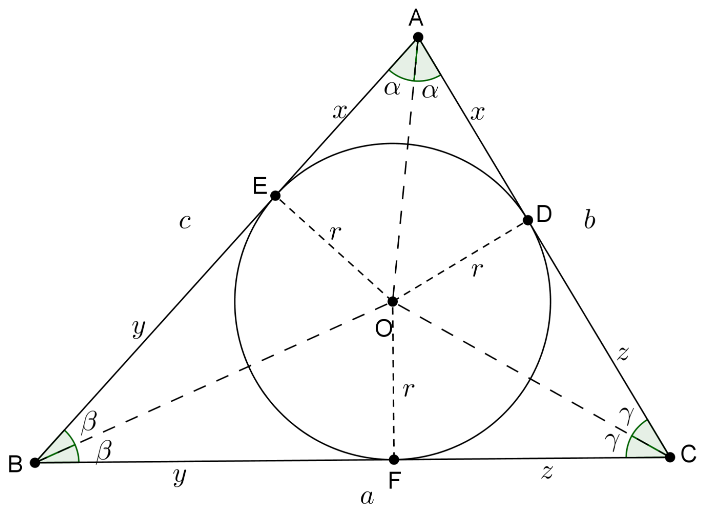

Figura 2: Uma outra demonstração de Heron

o que é equivalente a

$$\Delta = r(x + y + z)$$

Por outo lado, temos que $2x + 2y + 2z$ é a medida do perímetro do triângulo $\triangle ABC$, assim, $x + y + z$ será o seu semiperímetro, s. Portanto, a área Δ pode ser expressa por:

$$\Delta = rs \tag{1.7}$$

Como $y + z = a$, $x + y = c$ e $x + z = b$, podemos escrever

$$s = x + y + z = x + a = z + c = y + b$$

obtendo as seguintes relações:

$$\begin{cases} x = s - a \\ y = s - b \\ z = s - c \end{cases} \tag{1.8}$$

Dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$, temos

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$$

e, portanto,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \tag{1.9}$$

Com isso, podemos fazer o seguinte desenvolvimento:

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \cot\gamma = \frac{1}{\tan\gamma}.$$

Como $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, temos:

$$\frac{1}{\tan\gamma} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

que resulta em

$$\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\alpha\tan\gamma = 1 \tag{1.10}$$

Do triângulo retângulo $\triangle AOE$, podemos calcular $\tan\alpha = \frac{r}{x}$, analogamente, temos $\tan\beta = \frac{r}{y}$ e $\tan\gamma = \frac{r}{z}$, que substituindo em (1.10), resulta em:

$$\frac{r}{x}\frac{r}{y} + \frac{r}{y}\frac{r}{z} + \frac{r}{x}\frac{r}{z} = 1,$$

donde obtém-se

$$\frac{r^2(x+y+z)}{xyz} = \frac{r^2 s}{xyz} = 1.$$

Multiplicando e dividindo por s, chegaremos em

$$\frac{r^2 s^2}{sxyz} = 1,$$

logo, de (1.7) obtemos

$$\Delta^2 = sxyz.$$

Concluindo, de (1.8), teremos a expressão

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

que corresponde à fórmula esperada

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

1.4 UMA DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA

Nesta seção, vamos apresentar uma demonstração para o teorema 1.1 onde predomina o desenvolvimento algébrico das expressões. Este resultado é um prelúdio da estreita relação entre os triângulos Heronianos e a teoria dos números que veremos no próximo capítulo.

Demonstração. Considere o triângulo $\triangle ABC$, com $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$ sendo $\angle ACB$ um maior ângulo. Seja M a projeção ortogonal do vétice C sobre o lado $\overline{AB}$ com $AM = m$ e $BM = n$, ilustrado na Figura 3.

Perceba que obrigatoriamente $A - M - B$, pois se $A - B - M$, então $\angle ABC$ será ângulo externo ao triângulo $\triangle BCM$, retângulo em M, logo, $m(\angle ABC) = \pi + m(\angle BCM)$, contrariando a hipótese de que $\angle ACB$ é o maior ângulo. Caso $M = B$, então $\triangle ABC$ é retângulo em B, o que também contraria a hipótese de que $\angle ACB$ é o maior ângulo. Analogamente, não poderemos ter $M - A - B$ ou $M = A$.

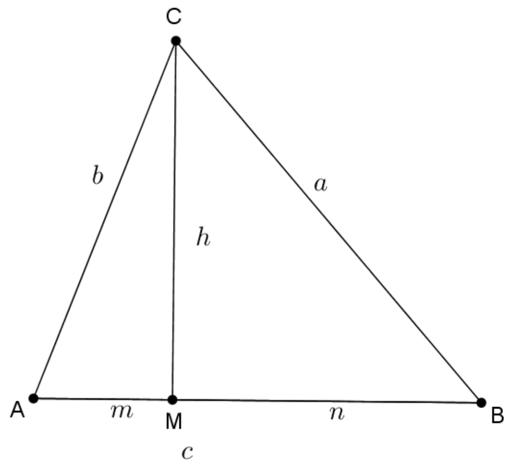

Figura 3: Uma outra demonstração de Heron

Pelo teorema de Pitágoras 2.11, nos triângulos retângulos $\triangle CMA$ e $\triangle CMB$ temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + n^2 \\ b^2 = h^2 + m^2 \end{cases}$$

Subtraindo ambas as equações, chegamos em

$$a^2 - b^2 = n^2 - m^2$$

podendo ser escrito como

$$a^2 - b^2 = (n + m)(n - m) \tag{1.11}$$

Como $c = m + n$ e $n = c - m$, segue de (1.11)

$$a^2 - b^2 = c(c - 2m)$$

levando a

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2mc.$$

Isolando a variável m, obtemos

$$m = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c} \tag{1.12}$$

Substituindo (1.12) em $h^2 = b^2 - m^2$, teremos

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right)^2,$$

ou seja,

$$h^2 = \left(b - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right)\left(b + \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right).$$

Fazendo seu desenvolvimento, vamos obter

$$h^2 = \left(\frac{2bc - c^2 - b^2 + a^2}{2c}\right)\left(\frac{2bc + c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right),$$

donde podemos completar os quadrados

$$h^2 = \left(\frac{-(b-c)^2 + a^2}{2c}\right)\left(\frac{(b+c)^2 - a^2}{2c}\right),$$

e novamente a diferença de quadrados

$$h^2 = \left(\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2c}\right)\left(\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2c}\right).$$

Como $a + b + c$ é igual ao perímetro p do triângulo, podemos fazer as seguintes manipulações algébricas

$$h^2 = \left(\frac{(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{2c}\right)\left(\frac{(b+c+a)(b+c+a-2a)}{2c}\right)$$

implicando em

$$h^2 = \left(\frac{(p-2c)(p-2b)}{2c}\right)\left(\frac{p(p-2a)}{2c}\right). \tag{1.13}$$

Se s for o semiperímetro do triângulo, podemos escrever $p = 2s$ e deixar o fator comum 2 em evidência na equação (1.13), obtendo

$$h^2 = \left(\frac{4(s-c)(s-b)}{2c}\right)\left(\frac{4s(s-a)}{2c}\right).$$

Como a área Δ do triângulo pode ser calculada por $\Delta = \frac{ch}{2}$, podemos escrever

$$\Delta^2 = \frac{c^2h^2}{4} = (s-c)(s-b)s(s-a).$$

Por fim, agrupando os fatores de forma conveniente e extraindo a raíz quadrada de ambos os lados, chegaremos na fórmula esperada

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$\square$

2

TRIÂNGULOS HERONIANOS

Os triângulos são os polígonos mais estudados na educação básica, desde sua classificação pelos lados e pelos ângulos, até as relações trigonométricas para resolução de triângulos quaisquer. Contudo, ao revisar os PCNs [2] [3] de Matemática, não encontramos nenhuma ênfase para o estudo dos triângulos cujos lados possuam medidas naturais. Nesta seção, portanto, faremos um estudo desta classe de triângulos, mais precisamente daqueles que também possuem área de medida natural, ou seja, os *Triângulos Heronianos*.

2.1 DEFINIÇÃO

Definição 2.1 (Triângulos Heronianos)**.** Um triângulo é dito Heroniano se possui a medida de cada um de seus lados e de sua área dadas por números naturais.

Esta classe de triângulos leva o nome do matemático Heron pois, é a partir da exploração da relação (fórmula de Heron) $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ que podemos perceber com mais clareza que a existência de lados de medida natural não garante que a medida da área também seja natural. Na verdade, encontrar uma tripla de inteiros (a, b, c) tal que Δ seja um número natural se torna um trabalho desafiador e repleto de belas descobertas, como veremos nas próximas seções. Nesta obra, ao tratar das medidas dos lados dos triângulos e de sua área como sendo naturais, não estaremos levando em consideração o caso do triângulo degenerado de lados e área de medida zero.

2.2 SOBRE O PERÍMETRO DOS TRIÂNGULOS HERONIANOS

Nesta seção, demonstraremos um curioso resultado sobre os Triângulos Heronianos, também demonstrado por Fricke [8] e Pereira [11], enunciado no teorema a seguir:

Teorema 2.2 (O Perímetro de um Triângulo Heroniano). *O perímetro de um triângulo Heroniano $\triangle ABC$ é sempre um número* ***par***.

Demonstração. Considere o triângulo Heroniano $\triangle ABC$ de lados de medida a, b e c e suponha, por absurdo, que seu perímetro p seja ímpar. Então, da fórmula de Heron, temos

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{p}{2}(\frac{p-2a}{2})(\frac{p-2b}{2})(\frac{p-2c}{2})} \tag{2.1}$$

o que implica em

$$4\Delta = \sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)} \tag{2.2}$$

onde Δ é um número natural por definição.

Como $2a, 2b, 2c$ são números pares e p é ímpar pela hipótese de contradição, as diferenças $p-2a, p-2b, p-2c$ serão números ímpares, e o produto $p(p-2a)(p-2b)(p-2c)$ será igualmente ímpar. Portanto, temos que o lado esquerdo da equação (2.2) é par, donde $16\Delta^2$ é par. Mas, $16\Delta^2 = p(p-2a)(p-2b)(p-2c)$, sendo este um número ímpar, o que nos leva a uma contradição. Logo, por absurdo, concluímos que p é par. □

Podemos verficar facilmente por meio de contra-exemplos que a recíproca deste teorema é falsa, por exemplo, o triângulo equilátero $(2, 2, 2)$ não é Heroniano (teorema 2.15), bem como os triângulos $(3, 2, 1)$ (teorema 2.14) e $(6, 5, 3)$ (teorema 2.9). A análise mais cuidadosa de tais exemplos nos levam ao seguinte resultado:

Teorema 2.3. *O semiperímetro de um triângulo Heroniano não pode ser um número primo.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo com $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ e semiperímetro s. Com efeito, a expressão $s(s-a)(s-b)(s-c)$ deve ser um quadrado perfeito, logo, se s é primo, então $(s-a)(s-b)(s-c)$ deve ser um múltiplo de s, o que é um absurdo visto que as diferenças $(s-a)$, $(s-b)$ e $(s-c)$ são números menores que s. □

Em outras palavras, este resultado garante que se o semiperímetro s de triângulo com lados de medidas naturais for um número primo então o triângulo não é heroniano, isto é, sua área não é um número natural.

2.3 SOBRE TRIÂNGULOS HERONIANOS SEMELHANTES

Lema 2.4. *Todo quadrado perfeito ímpar é da forma* $4k+1$*, para algum* k *natural.*

Demonstração. De fato, um número ímpar p pode ser escrito na forma $p = 2w+1$, assim, $p^2 = (2w+1)^2$ o que leva em

$$p^2 = \underbrace{4w^2 + 4w}_{4k} + 1.$$

Portanto, $p^2 = 4k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}$. □

Dado um triângulo Heroniano qualquer, podemos encontrar uma infinidade de triângulos Heronianos semelhantes a ele multiplicando as medidas de seus lados por um número natural qualquer. Assim, um importante resultado apresentado por Fricke [8] sobre triângulos Heronianos semelhantes é o teorema 2.5, enunciado na sequência.

Teorema 2.5. *Um triângulo* $\triangle ABC$ *de lados de medidas naturais* a, b *e* c *é Heroniano se, e somente se, seu triângulo semelhante* $\triangle A'B'C'$ *de lados de medidas* na, nb *e* nc*, onde* n *é um natural, também for Heroniano.*

Demonstração. Dado o triângulo Heroniano $\triangle ABC$ de lados de medidas a, b e c, semiperímetro s e área Δ, então a área Δ' do triângulo $\triangle A'B'C'$ de lados de medidas naturais na, nb e nc será:

$$\Delta' = \sqrt{sn(sn-an)(sn-bn)(sn-cn)} = n^2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

resultando na equação

$$\Delta' = n^2\Delta. \tag{2.3}$$

Dessa forma, como n^2 e Δ são números naturais, então Δ' também será, logo, o triângulo $\triangle A'B'C'$ é Heroniano.

Reciprocamente, dado o triângulo Heroniano $\triangle A'B'C'$ de lados de medidas na, nb e nc e área Δ', queremos provar que a área Δ do triângulo ΔABC de lados de medidas naturais a, b e c, é um número natural. Para tanto, basta verificar em (2.3) para

n primo e estender o resultado para qualquer natural pelo *Teorema Fundamental da Aritmética*.

Suponha que Δ seja racional e n um primo ímpar, então, da equação (2.1) podemos concluir que o denominador de Δ é 4, mas como n é primo ímpar, logo, n^2 e 4 são primos entre si, então, obrigatoriamente $4 \mid \sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}$, levando à conclusão de que Δ é natural. Se $n = 2$, podemos supor, por absurdo, que $4 \nmid \sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}$, o que implica em p ímpar, assim, o produto $p(p-2a)(p-2b)(p-2c)$ deverá ser um quadrado perfeito ímpar e, de acordo com o lema 2.4, um número congruente a 1 módulo 4, isto é, tem resto 1 na divisão inteira por 4. Na Tabela 1, em cada coluna foram atribuídas as possíveis congruências módulo 4 que a, b e c podem assumir de modo que $a + b + c(= p)$ seja ímpar e, em cada caso, calculados os resultados módulo 4 das expressões $(p-2a)$, $(p-2b)$ e $(p-2c)$ para, então, calcular o valor de $p(p-2a)(p-2b)(p-2c)$ módulo 4. Perceba que, como a, b e c têm um papel simétrico no produto $p(p-2a)(p-2b)(p-2c)$, são análogas as análises das outras permutações das possíveis congruências módulo 4 de a, b e c de modo que p seja ímpar.

Tabela 1: Análise dos fatores módulo 4

Termos	Resto da divisão inteira por 4									
a	1	1	1	3	3	3	1	3	1	3
b	0	2	0	0	2	0	1	3	3	1
c	0	2	2	0	2	2	1	3	1	3
p	1	1	3	3	3	1	3	1	1	3
(p-2a)	3	3	1	1	1	3	1	3	3	1
(p-2b)	1	1	3	3	3	1	1	3	3	1
(p-2c)	1	1	3	3	3	1	1	3	3	1
p(p-2a)(p-2b)(p-2c)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Assim, verificamos na Tabela 1 que todos os casos resultam em um produto congruente a 3 módulo 4, dessa forma, concluímos que, para Δ' ser natural, p não pode ser ímpar, logo, Δ sempre será um número natural para qualquer n primo e, portanto, $\triangle ABC$ é Heroniano. $\square$

A partir do teorema 2.5, podemos obter a partir de um triângulo Heroniano cujas medidas dos lados tenha um fator comum (diferente de 1) um representante importante de uma classe infinita de triângulos dessa natureza.

Definição 2.6. Um triângulo *primitivo* é aquele cujo maior divisor comum entre as medidas de seus lados é 1.

Esta definição será muito utilizada para os próximos resultados, como o seguinte corolário do teorema (2.2).

Corolário 2.7. *Todo triângulo Heroniano primitivo possui dois lados de medida ímpar e um de medida par.*

Demonstração. Analisando as possíveis paridades dos lados, podemos chegar às seguintes conclusões:

- se os três lados tiverem medida par, contrariaríamos a hipótese do triângulo ser primitivo;
- se os três lados tiverem medida ímpar, contrariaríamos o teorema 2.2;
- se apenas dois lados possuem medida par, contrariaríamos o teorema 2.2.

Portanto, nos resta apenas a combinação onde dois lados possuem medida ímpar e o terceiro medida par. □

2.4 SOBRE A ÁREA DOS TRIÂNGULOS HERONIANOS

Teorema 2.8. *A área de um triângulo Heroniano é sempre um múltiplo de 6.*

Demonstração. Vamos demonstrar este resultado provando inicialmente que a área Δ é par e, na sequência, que ela também é um múltiplo de 3. Mas antes, partiremos do pressuposto de que o triângulo é primitivo, apoiando-nos no teorema 2.5.

Considere o triângulo Heroniano primitivo $\triangle ABC$ com $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ e semiperímetro s. Segue do corolário 2.7 que dois de seus lados são ímpares e o outro é par. Sendo s par ou ímpar, o produto $s(s-a)(s-b)(s-c)$ é um número par, implicando que Δ é um número par.

Para mostrar a multiplicidade por 3, vamos supor que Δ não seja múltiplo de 3, assim, ou Δ é congruente a 1 módulo 3, ou Δ será congruente a 2 módulo 3. Em ambos os casos, temos que $\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ é congruente a 1 módulo 3, portnato, devemos agora analisar os valores das congruências de $s(s-a)(s-b)(s-c)$ módulo 3. Analogamente à análise feita na Tabela 1, em cada coluna da Tabela 2 atribuímos as possíveis congruências módulo 3 que a, b e c podem assumir e, em cada combinação, analisamos as congruências módulo 3 de p, s, $(s-a)$, $(s-b)$, $(s-c)$ e finalmente do produto $s(s-a)(s-b)(s-c)$ resultantes dos valores atribuídos. As congruências de s foram deduzidas das congruências de p obtidas com $a+b+c$ módulo 3, por exemplo, se p é da forma $3k+1$, como $p = 2s$, então s só pode ser da forma $3w+2$, pois do contrário, se s é da forma $3w+1$, então $2s$ será da forma $3z+2$ que é diferente de p e se s é da forma $3w+0$ então p seria um múltiplo de 3 e, portanto, seria da forma $3k+0$. Perceba que, como a, b e c têm um papel simétrico no produto $s(s-a)(s-b)(s-c)$, são análogas as análises das outras permutações das possíveis congruências módulo 3 de a, b e c

Tabela 2: Análise dos fatores módulo 3

Termos	Resto da divisão inteira por 3								
a	0	0	0	0	0	1	2	1	1
b	0	0	1	1	2	1	2	1	2
c	1	2	1	2	2	1	2	2	2
p	1	2	2	0	1	0	0	1	2
s	2	1	1	0	2	0	0	2	1
(s-a)	2	1	1	0	2	2	1	1	0
(s-b)	2	1	0	2	0	2	1	1	2
(s-c)	1	2	0	1	0	2	1	0	2
s(s-a)(s-b)(s-c)	2	2	0	0	0	0	0	0	0

Como em nenhum caso obtemos $s(s-a)(s-b)(s-c)$ congruente a 1 módulo 3, concluímos que $s(s-a)(s-b)(s-c)$ só pode ser múltiplo de 3, donde Δ é múltiplo de 3.

Portanto, como $2 \mid \Delta$ e $3 \mid \Delta$, então, $6 \mid \Delta$. $\square$

Perceba que o resultado anterior nos diz que $s(s-a)(s-b)(s-c)$ deve ser um múltiplo de 3. Contudo, a análise das congruências módulo 3 para $s(s-a)(s-b)(s-c)$

nos revela dois casos onde o resultado é congruente a 2 módulo 3, ou seja, são dois casos de triângulos **não** Heronianos. Esta observação pode ser enunciada no seguinte corolário:

Corolário 2.9. *Nenhum triângulo Heroniano primitivo tem dois lados múltiplos de três.*

2.5 SOBRE OS TRIÂNGULOS HERONIANOS RETÂNGULOS

Ao estudar os triângulos na educaçao básica, as primeiras relações métricas são obtidas a partir de triângulos retângulos e esses, por sua vez, são ferramentas essenciais para o estudo de qualquer triângulo. Nosso objetivo nessa seção será estudar quais triângulos retângulos são Heronianos.

Definição 2.10. Um triângulo retângulo de lados de medidas naturais é chamado de *Triângulo Pitagórico*.

Essa classe de triângulos leva o nome do matemático pré-socrático Pitágoras (570 - 495 a.C.), eternizado pelo famoso teorema que relaciona a hipotenusa de um triângulo retângulo com seus catetos, enunciado a seguir, que inclusive já fora utilizado num dos resultados anteriores nesta dissertação:

Teorema 2.11 (Teorema de Pitágoras)**.** *Seja $\triangle ABC$ um triângulo com $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. O $\triangle ABC$ é retângulo no vértice C se e somente se vale a relação*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Demonstração. Deixaremos esta demonstração a cargo do leitor interessado que, com certeza, não terá dificuldades em encontrar uma dentre as centenas que existem. □

Utilizaremos este importante teorema para provar o seguinte resultado:

Teorema 2.12. *Todo triângulo Pitagórico é Heroniano.*

Demonstração. Com base no teorema 2.5, considere o triângulo Pitagórico primitivo $\triangle ABC$ de hipotenusa de medida c e catetos de medidas a e b, queremos mostrar que a área Δ do triângulo $\triangle ABC$ é natural. De fato, pelo teorema de Pitágoras, a e b

não podem ser simultaneamente pares, pois assim, c seria par e o triângulo não seria primitivo. Por outro lado, a e b não podem ser simultaneamente ímpares, pois se $a = 2k+1$ e $b = 2l+1$ então

$$a^2 + b^2 = 2(2k^2 + 2l^2 + 2K + 2l + 1)$$

e como $c^2 = a^2 + b^2$, então teríamos que c^2 é um número par, donde segue que c é par, isto é, $c = 2n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo, $c^2 = 4n^2$ e $c^2 = 4(k^2 + l^2 + k + l) + 2$, o que é uma contradição, pois teríamos $n^2 - k^2 - l^2 - k - l$, que é um número natural, seria igual a $\frac{1}{2}$.

Desta forma, concluímos que a e b sempre possuem paridades diferentes, ab é divisível por 2 e assim $\Delta = \frac{ab}{2}$ é um número inteiro positivo.

$\square$

2.6 SOBRE OS TRIÂNGULOS HERONIANOS ISÓSCELES

Em Fricke [8], encontramos um resultado interessante acerca dessa classe de triângulos Heronianos, que é:

Teorema 2.13. *Todo triângulo Heroniano isósceles possui base par e pode ser decomposto em dois triângulos Pitagóricos congruentes.*

Demonstração. Considere, sem perda de generalidade e a luz do teorema 2.5, o triângulo Heroniano isósceles (não equilátero) primitivo $\triangle ABC$. Temos que dois de seus lados possuem mesma medida e, portanto, mesma paridade, logo, podemos concluir que esses lados só podem ter medida ímpar pois, do contrário, contrariaríamos o teorema 2.2. Assim, o lado de medida diferente (base do triângulo isósceles) só pode ser par.

Sejam $AC = BC = a$ e M o ponto médio do lado $\overline{AB}$. Seja $AM = MB = b$ e $CM = h$, como ilustrado na Figura4. Os triângulos retângulos $\triangle AMC$ e $\triangle BMC$ são congruentes pelo caso ALA. Perceba que suas hipotenusas (a) são naturais pelo fato de $\triangle ABC$ ser Heroniano e que b é natural, dado que é a metade de AB, que é par (base do $\triangle ABC$). Dessa forma, resta demonstrar que sua altura h é natural.

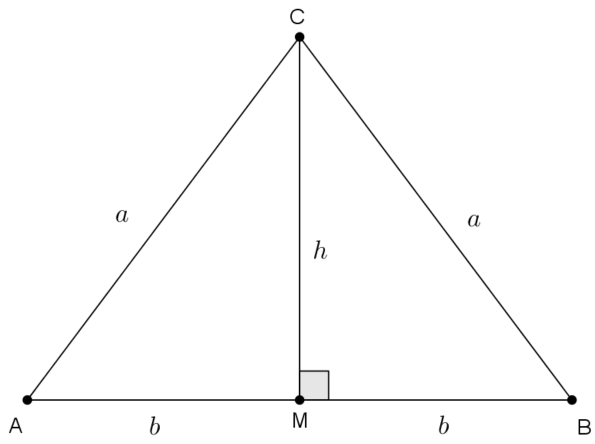

Figura 4: Triângulo Heroniano Isósceles

Pela fórmula de Heron (1.1) temos que a área do $\triangle ABC$ é $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-a)(s-2b)}$, e $s = (2a+2b)/2 = a+b$, donde segue:

$$\Delta = \sqrt{(a+b)(a-b)b^2}$$

$$\Delta = \sqrt{(a^2-b^2)b^2} \tag{2.4}$$

Da equação(2.4), para Δ ser inteiro, (a^2-b^2) deve ser um quadrado perfeito, mas, pelo teorema de Pitágoras (2.11) $a^2-b^2=h^2$, o que implica em h natural.

$\square$

2.7 SOBRE OS LADOS DOS TRIÂNGULOS HERONIANOS

A *Desigualdade Triangular* é uma condição de existência fundamental dos triângulos. Ela diz que a soma das medidas de dois lados quaisquer de um triângulo deve ser estritamente maior que a medida do terceiro. Com isso, podemos demonstrar o seguinte resultado apresentado por Carlson [4] e Pereira [11]:

Teorema 2.14. *Não existe triângulo Heroniano de lados com medida 1 ou 2.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, a existência de um triângulo Heroniano $\triangle ABC$ de lados medindo $1, a$ e b. Perceba que este triângulo só pode ser primitivo, dado que $mdc(1, a, b) = 1$. Como $p = 1 + a + b$ é par (corolário 2.2), então temos que $a \neq b$, logo, sem perda de generalidade, podemos admitir que $a < b$. Nestas condições, como ambos são inteiros, $a + 1 \leq b$, contrariando a desigualdade triangular.

Suponha agora, também por absurdo, a existência um triângulo Heroniano $\triangle ABC$ de lados medindo $2, a$ e b. Caso este triângulo não seja primitivo, temos que $mdc(2, a, b) = 2$, e seu semelhante primitivo terá lado de medida 1, recaindo no cado anterior.Logo, podemos considerar que $\triangle ABC$ seja primitivo. Pelo colorário 2.2, a e b devem ter a mesma paridade, mas como $\triangle ABC$ é primitivo, a e b devem ser ímpares. Se admitirmos, sem perda de generalidade, que $a < b$, então, como ambos são inteiros, teremos $a + 2 \leq b$, o que contraria a desigualdade triangular. Por outro lado, se $a = b$, segue que $\triangle ABC$ é isósceles e, pelo teorema 2.13, pode ser decomposto em dois triângulos Pitagóricos. Contudo, tais triângulos possuirão um lado de medida 1, o que é um absurdo, de acordo com o teorema 2.12 e a primeira parte da demonstração do teorema 2.14.

□

2.8 SOBRE TRIÂNGULOS HERONIANOS EQUILÁTEROS

No próximo capítulo, desenvolveremos resultados para encontrar triângulos Heronianos, contudo, já saberemos de antemão que nunca iremos encontrar triângulos equiláteros dentre eles.

Teorema 2.15. *Não existe triângulo Heroniano Equilátero.*

Demonstração. Pelo teorema 2.5, sabemos que todo triângulo Heroniano pode ser reduzido a um triângulo semelhante onde o máximo divisor comum entre a medida de seus lados é 1; logo, qualquer triângulo que possua todos os lados de mesma medida pode ser reduzido ao triângulo equilátero $(1, 1, 1)$. Mas, de acordo com o colorário 2.7, este triângulo não pode ser Heroniano. □

3

CONSTRUINDO TRIÂNGULOS HERONIANOS

No ensino fundamental, umas das primeiras construções geométricas com régua e compasso ensinadas é construção de triângulos a partir de seus lados. Neste capítulo, estudaremos diferentes formas de encontrar os lados inteiros de um triângulo de modo que sua área seja inteira. Veremos que esta tarefa será mais algébrica do que geométrica, evidenciando a beleza deste estudo, que estabelece uma ponte entre a geometria e a teoria dos números.

3.1 TRIPLAS PITAGÓRICAS

Vimos no capítulo anterior que todo triângulo Pitagórico é Heroniano (teorema 2.12), e sabemos que o estudo desta classe de triângulos é fundamental para o entendimento de diversas relações geométricas. Assim, nesta seção, estudaremos uma forma de encontrar todos os triângulos Pitagóricos desenvolvendo as chamadas *Triplas Pitagóricas*.

Definição 3.1. Uma tripla de naturais (c, b, a) é uma Tripla Pitagórica se, e somente se, vale a relação $c^2 = b^2 + a^2$.

Pela recíproca do Teorema de Pitágoras (teorema 2.11), todo triângulo de lados a, b e c, onde (c, b, a) é uma Tripla Pitagórica, será um triângulo retângulo. O próximo resultado nos dá um método para encontrarmos todos os triângulos Pitagóricos.

Teorema 3.2 (Determinação das Triplas Pitagóricas). *Dado o triângulo Pitagórico primitivo $\triangle ABC$, de hipotenusa medindo c e catetos de medidas a e b, então, existem inteiros* *positivos p e q, onde $p > q$, $mdc(p, q) = 1$ e de paridades diferentes, tais que $c = p^2 + q^2$, $b = p^2 - q^2$ e $a = 2pq$.*

Demonstração. Considere que o triângulo Pitagórico $\triangle ABC$ seja primitivo. De acordo com a demonstração do teorema 2.12, a e b têm paridades diferentes, vamos supor, sem perda de generalidade, que a seja par. Logo, b é ímpar e c é ímpar, de acordo com o corolário 2.7. Segue do teorema 2.11 que

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b). \tag{3.1}$$

Perceba que $(c + b)$ e $(c - b)$ são números pares, assim, considere os naturais u, v e w, tais que:

$$\begin{cases} a = 2u \\ c + b = 2v \\ c - b = 2w \end{cases} \tag{3.2}$$

De (3.2), temos que $2c = 2v + 2w$, o que implica em

$$c = v + w. \tag{3.3}$$

Analogamente,

$$b = v - w. \tag{3.4}$$

Com isso, podemos concluir que v e w são primos entre si, pois, do contrário, existiria um número natural $d = \text{mdc}(v, w) \neq 1$ tal que $d \mid (v + w)$ e $d \mid (v - w)$, assim, por (3.3) e (3.4), $d \mid c$ e $d \mid b$ e, consequentemente, pelo teorema de Pitágoras, $d \mid a$, o que contrariaria a hipótese de que $\triangle ABC$ é primitivo.

Por outro lado, de (3.1) e (3.2), temos

(2u)^2=4vw

o que nos leva em

$$u^2 = vw. \tag{3.5}$$

Assim, temos que o produto dos números v e w, primos entre si, resulta em um quadrado perfeito (u^2); contudo, pelo *Teorema Fundamental da Aritmética*, v e w só podem ser, eles mesmos, quadrados perfeitos. Desta forma, admita naturais primos entre si, p e q, tais que:

$$\begin{cases} v = p^2 \\ w = q^2 \end{cases} \tag{3.6}$$

Seguem de (3.3), (3.4) e (3.6) as seguintes relações:

$$c = p^2 + q^2. \tag{3.7}$$

$$b = p^2 - q^2. \tag{3.8}$$

Note que, de (3.7) e (3.8), $p > q$ e de paridades diferentes. Consequentemente, de (3.1), temos o seguinte desenvolvimento:

$$a^2 = (p^2 + q^2)^2 - (p^2 - q^2)^2 = 4p^2q^2$$

obtendo a relação abaixo:

$$a = 2pq. \tag{3.9}$$

□

Concluímos assim, que o triângulo $\triangle ABC$ tem seus lados dados pelos parâmetros p e q apartir das equações (3.7), (3.8) e (3.9). Perceba que p e q são primos entre si e de paridades diferentes e assim, é possível obter todos os triângulos Pitagóricos **primitivos**. Contudo, caso p e q não atendam a estas exigências, ainda obteremos um triângulo Pitagórico, mas, não primitivo e não conseguiremos todos, como por exemplo o triângulo $(15, 9, 12)$ [13].

A tabela 3 possui algumas triplas e foi construída com base no resultado anterior. Perceba que as linhas com $\star$ indicam triplas que verificam $p > q$, primos entre si e de paridades diferentes e, portanto, constituem triângulos primitivos.

3.2 CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS HERONIANOS ISÓSCELES

Nesta seção, vamos retomar o resultado 2.13 e obter parâmetros para construção de um triângulo Heroniano isósceles. Para tanto, sabemos que basta escolher um

Tabela 3: Triplas Pitagóricas

	p	q	c	b	a	Δ
$\star$	2	1	5	3	4	6
	3	1	10	8	6	24
$\star$	3	2	13	5	12	30
$\star$	4	1	17	15	8	60
	4	2	20	12	16	96
$\star$	4	3	25	7	24	84
	5	1	26	24	10	120
$\star$	5	2	29	21	20	210
	5	3	34	16	30	240
$\star$	5	4	41	9	40	180
$\star$	6	1	37	35	12	210
	6	2	40	32	24	384
	6	3	45	27	36	486
	6	4	52	20	48	480
$\star$	6	5	61	11	60	330
	7	1	50	48	14	336
$\star$	7	2	53	45	28	630
	7	3	58	40	42	840
$\star$	7	4	65	33	56	924
	7	5	74	24	70	840
$\star$	7	6	85	13	84	546
$\star$	8	1	65	63	16	504
	8	2	68	60	32	960
$\star$	8	3	73	55	48	1320
	8	4	80	48	64	1536
$\star$	8	5	89	39	80	1560
	8	6	100	28	96	1344
$\star$	8	7	113	15	112	840

triângulo Pitagórico qualquer, por exemplo o $(5,4,3)$, e fazer as seguintes combinações com seus catetos congruentes, como ilustrado na figura 5:

Obteremos assim, dois triângulos Heronianos isósceles, $(5,5,6)$ e o $(5,5,8)$, ambos primitivos e de mesma área.

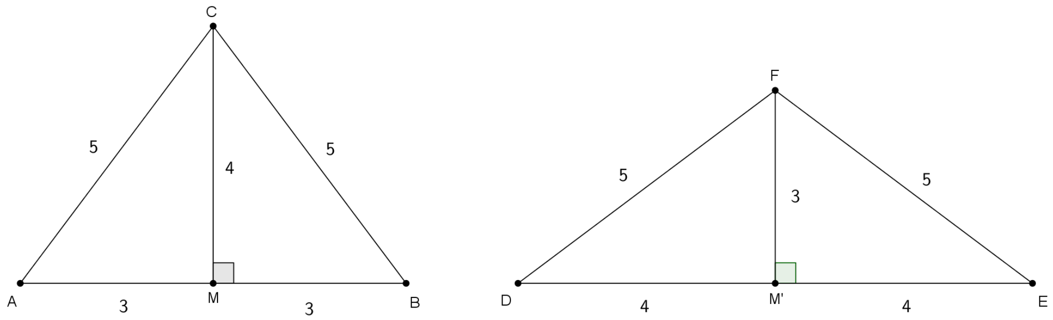

Figura 5: Triângulos Heronianos isósceles como composição de Triângulos Pitagóricos

Teorema 3.3. *Todo triângulo Heroniano isósceles primitivo é, ou da forma* $(p^2+q^2, p^2+q^2, 4pq)$ *ou da forma* $(p^2+q^2, p^2+q^2, 2(p^2-q^2))$, *onde* p *e* q *são inteiros positivos tais que* $p > q$, $mdc(p,q) = 1$ *e de paridades diferentes.*

Demonstração. Com efeito, ao observar a Figura 5 e firmados no teorema 2.13, percebemos que os lados congruentes do triângulo isósceles sempre serão formados pelas hipotenusas dos triângulos Pitagóricos que irão compô-lo (3.7); assim, a base do triângulo pode ser formada tanto pela junção de dois catetos a, ou de dois catetos b, o que implica em $2a = 4pq$ (3.9) ou $2b = 2(p^2-q^2)$ (3.8), respectivamente.

Note que a composição de triângulos Pitagóricos primitivos sempre resultará em triângulos Heronianos isósceles primitivos. Isso se deve ao fato de que $\text{mdc}(p^2+q^2, p^2-q^2, 2pq) = 1$ e $c = p^2+q^2$ é ímpar. Consequentemente, $\text{mdc}(p^2+q^2, p^2+q^2, 2(p^2-q^2)) = 1$ e $\text{mdc}(p^2+q^2, p^2+q^2, 4pq) = 1$. □

3.3 CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS ESCALENOS

A partir do teorema 3.2, John R. Carlson [4] apresentou argumentos na direção de que todos os triângulos Heronianos seriam determinados pela composição de dois triângulos Pitagóricos, como ilustra a Figura 6.

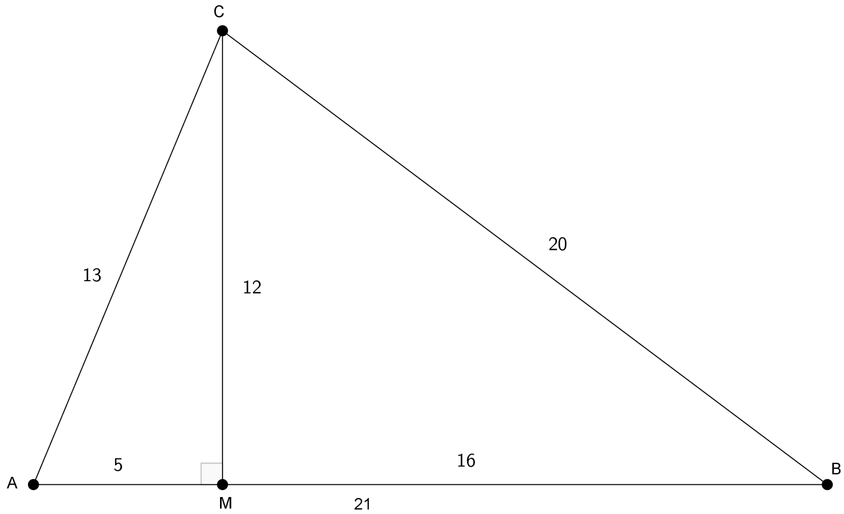

Figura 6: Triângulo (21,20,13), obtido pela composição do triângulo (13,12,5) com o triângulo (20,12,16).

Carlson enunciou que "Um triângulo é Heroniano se, e somente se, este for a composição entre dois triângulos Pitagóricos ao longo de um cateto comum, ou uma redução (ou contração) de tal composição.", concluindo assim que os lados de qualquer triângulo Heroniano seriam obtidos por meio de naturais u, v, r e s nas condições do teorema 3.2, e seriam calculados pelas expressões: u^2+v^2, r^2+s^2, e $u^2-v^2+r^2-s^2$, onde $rs=uv$; ou por u^2+v^2, r^2+s^2, e $2(uv+rs)$, onde $r^2-s^2=u^2-v^2$; ou por uma redução de um dos casos anteriores por algum fator comum entre eles. Porém, David Singmaster [13] apontou alguns equívocos nos trabalhos de Carlson, o primeiro ao não considerar os triângulos Pitagóricos que não são obtidos diretamente pelas triplas pitagóricas, como o $(15,9,12)$ que é semelhante ao primitivo $(5,3,4)$ e o segundo ao ter negligenciado os casos onde ocorre $u^2-v^2=2rs$.

Feitas as devidas correções, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.4 (Determinação dos Triângulos Heronianos)**.** *Um triângulo é Heroniano se, e somente se, este for a composição entre dois triângulos Pitagóricos por meio de um cateto comum, ou por uma redução de tal composição, e seus lados serão dados pelas seguintes expressões:*

$$\bullet k(r_1^2+s_1^2), w(r_2^2+s_2^2), k(r_1^2-s_1^2) \pm w(r_2^2-s_2^2), \tag{3.10}$$

onde os pares (r_1, s_1) *e* (r_2, s_2) *são naturais nas condições do teorema 3.2 e* k *e* w *são racionais positivos tais que* $kr_1s_1 = wr_2s_2$*;*

$$\bullet k(r_1^2 + s_1^2), w(r_2^2 + s_2^2), k(r_1^2 - s_1^2) \pm 2wr_2s_2, \tag{3.11}$$

onde os pares (r_1, s_1) *e* (r_2, s_2) *são naturais nas condições do teorema 3.2 e* k *e* w *são racionais positivos tais que* $2kuv = w(r^2 - s^2)$*;*

$$\bullet k(r_1^2 + s_1^2), w(r_2^2 + s_2^2), 2kr_1s_1 \pm 2wr_2s_2, \tag{3.12}$$

onde os pares (r_1, s_1) *e* (r_2, s_2) *são naturais nas condições do teorema 3.2 e* k *e* w *são racionais positivos tais que* $k(u^2 - v^2) = w(r^2 - s^2)$*;*

• *ou por uma redução de um fator comum de um dos triângulos obtidos em (3.10), (3.11) ou (3.12).*

Demonstração. Em vista dos teoremas 2.12 e 2.5, a composição de dois triângulos Pitagóricos que possuam um cateto em comum, ou sua redução, resulta em um triângulo Heroniano, uma vez que as medidas de seus lados são números naturais e sua área é igual à soma das áreas dos triângulos Pitagóricos.

Reciprocamente, dado o triângulo Heroniano $\triangle ABC$ de área Δ e lados de medida $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, queremos provar que este é a composição de dois triângulos Pitagóricos ou é a redução de uma composição destes triângulos. Se uma das alturas do triângulo $\triangle ABC$ for um número natural e dividir um lado do triângulo em dois segmentos de medidas naturais, isso significa que o triângulo $\triangle ABC$ pode ser decomposto em dois triângulos Pitagóricos. Sejam h_a, h_b e h_c as medidas das alturas do triângulo $\triangle ABC$ relativas aos vértices A, B e C, respectivamente. Assim:

$$h_a = \frac{2\Delta}{a}; h_b = \frac{2\Delta}{b}; h_c = \frac{2\Delta}{c}. \tag{3.13}$$

Sem perda de generalidade, suponha que h_c incide sobre o segmento $\overline{AB}$ no ponto M e o divide em dois segmentos $\overline{BM}$ e $\overline{AM}$ de medidas c_1 e c_2, respectivamente. Por (3.13), h_c é um número racional $\frac{m}{n}$, com m e n primos entre si. Se $n = 1$, seguimos para o próximo passo e analisaremos os segmentos c_1 e c_2; caso $n \neq 1$, ampliamos o triângulo $\triangle ABC$ pelo fator n, obtendo assim o triângulo $\triangle A'B'C'$ de lados na, nb e nc e altura m (inteira), veja Figura 7.

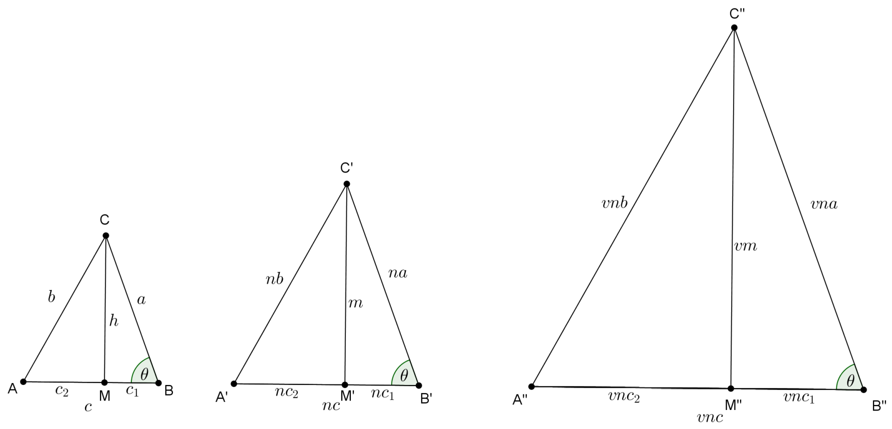

Figura 7: Triângulo Heroniano como redução de uma composição de Triângulos Pitagóricos.

Sendo θ a medida do ângulo $\angle A'B'C'$, pela lei dos cossenos, temos $(nb)^2 = (na)^2 + (nc)^2 - 2(na)(nc)\cos\theta$, implicando em

$$\cos\theta = \frac{(na)^2 + (nc)^2 - (nb)^2}{2(na)(nc)}.$$

Nestas condições, $\cos\theta$ é um número racional, logo, no triângulo retângulo $\triangle C'M'B'$, temos $\cos\theta = \frac{nc_1}{na}$, e portanto, nc_1 é um número racional $\frac{u}{v}$; consequentemente, $nc_2 = n(c - c_1) = n(\frac{cv-au}{v})$ será racional também. Se $v = 1$, então teremos $\triangle A'B'C'$ composto pela união de dois triângulos Pitagóricos, do contrário, ampliaremos o triângulo $\triangle A'B'C'$ em um fator v, obtendo assim o triângulo Heroniano $\triangle A''B''C''$ composto pelos triângulos Pitagóricos $\triangle C''M''B''$ e $\triangle C''M''A''$. Logo, concluímos que $\triangle ABC$ é uma redução do triângulo $\triangle C''M''B''$ por um fator nv, demonstrando a recíproca.

As expressões (3.10), (3.11) e (3.12) são obtidas a partir da escolha dos parâmetros r_1, s_1, r_2 e s_2 nas condições do teorema 3.2 para formação dos triângulos Pitagóricos. Contudo, deve-se empregar fatores k e w para garantir a igualdade dos catetos, necessária para a composição que se deseja.

□

Veja uma aplicação do teorema acima: com os parâmetros $r_1 = 4$, $s_1 = 3$ obtemos o triângulo Pitagórico primitivo $(25, 7, 24)$; com os parâmetros $r_2 = 12$ e $s_2 = 1$, obtemos o triângulo Pitagórico primitivo $(145, 143, 24)$ (perceba que $2r_1s_1 = 2r_2s_2$); a composição dos dois, nos dá o triângulo Heroniano $(150, 145, 25)$ que pode ser reduzido para o Heroniano primitivo $(30, 29, 5)$. Veja Figura 8.

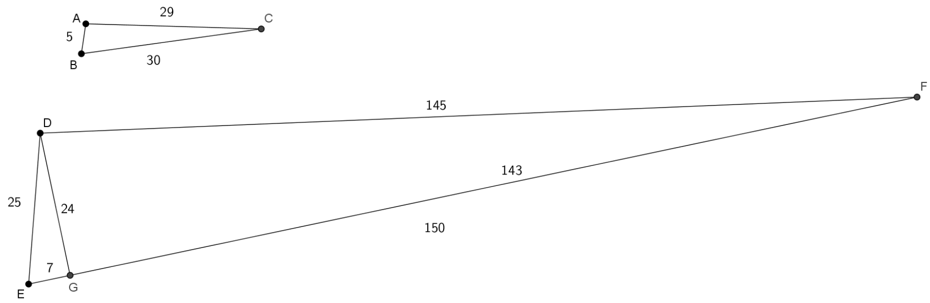

Figura 8: Triângulo $(150, 145, 25)$ e seu primitivo $(30, 29, 5)$.

Uma outra associação, apresentada por Paul Yiu [14], leva em consideração a "diferença" entre dois triângulos Pitagóricos; por exemplo, os triângulos $(20, 16, 12)$ e $(13, 5, 12)$ podem formar o triângulo $(20, 13, 11)$, conforme mostra a Figura 9.

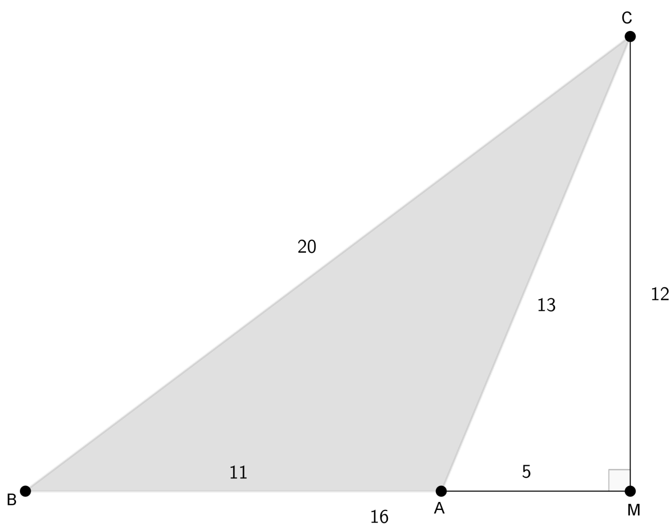

Figura 9: Triângulo $(13, 20, 11)$ obtido pela "diferença" entre os triângulos $(20, 12, 16)$ e $(13, 5, 12)$.

Por outro lado, o triângulo $(20, 13, 11)$ também pode ser considerado como uma redução de fator 5 do triângulo $(65, 100, 55)$, que por sua vez pode ser obtido pela composição dos triângulos $(65, 33, 46)$ e $(55, 33, 44)$. Note que o triângulo $(55, 33, 44)$ não é primitivo, ele é uma ampliação em 11 vezes do triângulo primitivo $(5, 3, 4)$, este dado pelos parâmetros $u = 2, v = 1$.

Portanto, existem duas formas de expressar os lados do triângulo $(20, 13, 11)$:

$$4(2^2+1^2), 1(3^2+2^2), 4\cdot 2\cdot 2\cdot 1-(3^2-2^2), \text{onde } 4(2^2-1^2)=2\cdot 3\cdot 2$$

ou

$$\frac{11}{5}(2^2+1^2), \frac{1}{5}(7^2+4^2), \frac{1}{5}(11\cdot 2\cdot 2\cdot 1+1\cdot 2\cdot 7\cdot 4) \text{ onde } 11(2^2-1^2)=7^2-4^2.$$

3.4 UMA DETERMINAÇÃO COM MENOS PARÂMETROS

No desenvolvimento do teorema 3.4, percebemos que todos os triângulos Heronianos são compostos pela união de dois triângulos retângulos cujas medidas de lados são racionais, assim, sempre será possível ampliá-los até conseguirmos um semelhante que possua catetos inteiros. Este dado é fundamental para o próximo teorema, onde é possível encontrar uma parametrização mais simples para os triângulos Heronianos, resultado este que, segundo Dickson [6], já era conhecido pelo matemático e astrônomo indiano Brahmagupta (século 598) para a determinação de *Triângulos Racionais*, a saber:

Definição 3.5 (Triângulos Racionais). Um triângulo é dito *racional* se este possui as medidas de seus lados e de sua área expressas por números racionais positivos.

Note que os triângulos Heronianos formam um subconjunto dos triângulos racionais, assim, grande parte dos resultados obtidos nos estudos dos triângulos racionais valem para os Heronianos, como o apresentado por Robert D. Carmichael [5], enunciado abaixo para os números naturais.

Teorema 3.6. *Uma condição necessária e suficiente para que os números naturais x, y e z representem as medidas dos lados de um triângulo Heroniano é que estes sejam proporcionais aos números $n(m^2+h^2)$, $m(n^2+h^2)$ e $(n+m)(nm-h^2)$, onde m, n e h são números inteiros positivos tais que $mn > h^2$ e $h > 0$.*

Demonstração. Considere o triângulo Heroniano $\triangle ABC$ de lados de medidas x, y, z e altura $h = CM$, tal que $AM = z_1$ e $MB = z_2$, como ilustrado na Figura 10.

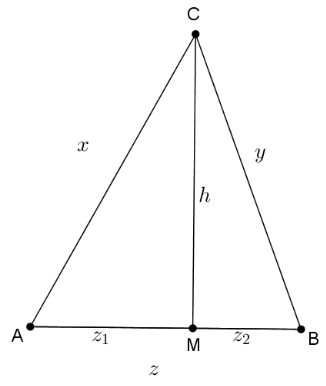

Figura 10: Determinação dos Triângulos Heronianos.

Queremos determinar todos os triângulos Heronianos a partir dele, o que é equivalente a encontrar todos os naturais que fatisfaçam as equações (3.14):

$$h^2 = x^2 - z_1^2 = y^2 - z_2^2. \tag{3.14}$$

Seja $m = x + z_1$, então, de $h^2 = (x - z_1)(x + z_1)$, temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} x - z_1 & = & \frac{h^2}{m} \\ x + z_1 & = & m \end{cases} \tag{3.15}$$

A partir das duas equações do sistema (3.15), obtemos:

$$x = \frac{1}{2}\left(m + \frac{h^2}{m}\right) \tag{3.16}$$

Analogamente, seja $n = y + z_2$, obteremos a equação:

$$y = \frac{1}{2}\left(n + \frac{h^2}{n}\right) \tag{3.17}$$

Como $z = z_1 + z_2$, a soma das equações

$$\begin{cases} x & = & z_1 + \frac{h^2}{m} \\ y & = & z_2 + \frac{h^2}{n} \end{cases}$$

implicará em

$$x + y = z + \frac{h^2}{m} + \frac{h^2}{n}$$

e pelas equações (3.16) e (3.17), chegaremos em

$$z = \frac{1}{2}\left(m + n - \frac{h^2}{m} - \frac{h^2}{n}\right). \tag{3.18}$$

Como os triângulos podem ser semelhantes, podemos multiplicar as equações (3.16), (3.17) e (3.18) pelo número $2mn$, a fim de transformar o denominador em 1. Dessa forma, as soluções para a equação (3.14) são **proporcionais** aos números obtidos pelas relações (3.19):

$$\begin{cases} x &=& n(m^2+h^2) \\ y &=& m(n^2+h^2) \\ z &=& (m+n)(mn-h^2) \end{cases} \tag{3.19}$$

Note que é condição de existência que $mn > h^2$ e $h > 0$. $\square$

De fato, o teorema 3.6, em relação aos resultados de Carlson no teorema 3.4, simplifica ainda mais o trabalho de se obter todos triângulos Heronianos, pois utiliza apenas três parâmetros. Vejamos um exemplo de sua aplicação:

1. Escolhemos três naturais m, n e h de modo que $mn > h^2$, por exemplo, os números $m = 3$, $n = 2$ e $h = 1$;
2. Aplicamos os valores escolhidos em (3.19), obtendo $x = 20$, $y = 15$, $z = 25$;
3. Dividimos os resultados pelo seu *mdc* para encontrar o triângulo primitivo $x' = 4$, $y' = 3$ e $z' = 5$;
4. A partir deste, multiplicamos seus lados por qualquer fator inteiro positivo para obtermos todos os seus semelhantes.

Assim, variando as ternas (m, n, h), conseguimos obter todos os triângulos de lados naturais que possuem área de medida natural. A tabela 4, encontrada em Pereira [11], apresenta todos os triângulos Heronianos primitivos com lados menores que 100.

Tabela 4: Triângulos Heronianos primitivos com lados de medida inferior a 100

(a,b,c)	(a,b,c)	(a,b,c)	(a,b,c)	(a,b,c)
$(3,4,5)$	$(5,5,6)$	$(5,5,8)$	$(5,12,13)$	$(10,13,13)$
$(4,13,15)$	$(13,14,15)$	$(9,10,17)$	$(8,15,17)$	$(16,17,17)$
$(11,13,20)$	$(7,15,20)$	$(10,17,21)$	$(13,20,21)$	$(13,13,24)$
$(12,17,20)$	$(7,24,25)$	$(14,25,25)$	$(3,25,26)$	$(17,25,26)$
$(17,25,28)$	$(20,21,29)$	$(6,25,29)$	$(17,17,30)$	$(11,25,30)$
$(5,29,30)$	$(8,29,35)$	$(15,34,35)$	$(25,29,36)$	$(19,20,37)$
$(15,26,37)$	$(13,30,37)$	$(12,35,37)$	$(24,37,37)$	$(16,25,39)$
$(17,28,39)$	$(25,34,39)$	$(10,35,39)$	$(29,29,40)$	$(13,37,40)$
$(25,39,40)$	$(15,28,41)$	$(9,40,41)$	$(17,40,41)$	$(18,41,41)$
$(29,29,42)$	$(15,37,44)$	$(17,39,44)$	$(13,40,45)$	$(25,25,48)$
$(29,35,48)$	$(21,41,50)$	$(39,41,50)$	$(26,35,51)$	$(20,37,51)$
$(25,38,51)$	$(13,40,51)$	$(27,29,52)$	$(25,33,52)$	$(37,39,52)$
$(15,41,52)$	$(5,51,52)$	$(25,51,52)$	$(24,35,53)$	$(28,45,53)$
$(4,51,53)$	$(51,52,53)$	$(26,51,55)$	$(20,53,55)$	$(25,39,56)$
$(53,53,56)$	$(33,41,58)$	$(41,51,58)$	$(17,55,60)$	$(15,52,61)$
$(11,60,61)$	$(22,61,61)$	$(25,52,63)$	$(33,34,65)$	$(20,51,65)$
$(12,55,65)$	$(33,56,65)$	$(14,61,65)$	$(36,61,65)$	$(16,63,65)$
$(32,65,65)$	$(35,53,66)$	$(65,65,66)$	$(21,61,68)$	$(43,61,68)$
$(7,65,68)$	$(29,65,68)$	$(57,65,68)$	$(29,52,69)$	$(37,37,70)$
$(9,65,70)$	$(41,50,73)$	$(26,51,73)$	$(35,52,73)$	$(48,55,73)$
$(19,60,73)$	$(50,69,73)$	$(25,51,74)$	$(25,63,74)$	$(35,44,75)$
$(29,52,75)$	$(32,53,75)$	$(34,61,75)$	$(56,61,75)$	$(13,68,75)$
$(52,73,75)$	$(40,51,77)$	$(25,74,77)$	$(68,75,77)$	$(41,41,80)$
$(17,65,80)$	$(9,73,80)$	$(39,55,82)$	$(35,65,82)$	$(33,58,85)$
$(29,60,85)$	$(39,62,65)$	$(41,66,85)$	$(36,77,85)$	$(13,84,85)$
$(41,84,85)$	$(26,85,85)$	$(72,85,85)$	$(34,55,87)$	$(52,61,87)$
$(38,65,87)$	$(44,65,87)$	$(31,68,87)$	$(61,74,87)$	$(65,76,87)$
$(53,75,88)$	$(65,87,88)$	$(41,50,89)$	$(28,65,89)$	$(39,80,89)$
$(21,82,89)$	$(57,82,89)$	$(78,89,89)$	$(53,53,90)$	$(17,89,90)$
$(37,72,91)$	$(60,73,91)$	$(26,75,91)$	$(22,85,91)$	$(48,85,91)$
$(29,75,92)$	$(39,85,92)$	$(34,65,93)$	$(39,58,95)$	$(41,60,95)$
$(68,87,95)$	$(73,73,96)$	$(37,91,96)$	$(51,52,97)$	$(65,72,97)$
$(26,73,97)$	$(44,75,97)$	$(35,78,97)$	$(75,86,97)$	$(11,90,97)$
$(78,95,97)$				

4

TRIÂNGULOS HERONIANOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo, discutiremos uma possível abordagem sobre o tema desta dissertação no Ensino Fundamental e Médio. Embasados nos PCNs de Matemática, vamos analisar a relevância do tema no processo de ensino e aprendizagem, abordando os seus pré-requisitos, bem como o momento ideal para introdução do assunto.

Vamos considerar também a possibilidade de atuação do professor em momentos diferenciados, como a OBMEP na Escola, ou algum projeto de ensino de Matemática que a instituição de ensino possa ter favorecido, como por exemplo, a criação de grupos de estudos com o fim de complementar e aprofundar os conteúdos de Matemática, ou programas de iniciação científica que aproximem o aluno das atividades do meio acadêmico.

4.1 POR QUE ENSINAR TRIÂNGULOS HERONIANOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA?

Vimos nos capítulos anteriores que o estudo dos triângulos Heronianos depende de uma matemática elementar, ao alcance de alunos do 4º ciclo do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Contudo, este fato não justifica a abordagem deste tema em sala de aula. O professor que desejar trabalhar este tema em suas aulas deverá consultar os PCNs de Matemática, buscando orientações gerais para esta disciplina, como por exemplo, a atribuição de um caráter investigativo às suas aulas, o que contribui para o entendimento de que a Matemática *"...não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência...(PCNEM, s/d, p.41)"*.

Os PCNs também indicam que *"...o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema... (PCN, 1997, p.32)"*, dessa forma, o professor pode optar em trabalhar com a resolução de problemas, devendo formular uma questão, ou uma tarefa, que motive os alunos a pensarem sobre o tema e, sob sua orientação, acabem desenvolvendo alguns dos resultados estudados nesta dissertação.

Outro tópico que se deve destacar no trabalho com triângulos Heronianos é a importância histórica do estudo de áreas de regiões planas na Matemática, que pode ser trabalhada pelo professor, visto que *"Ao revelar a Matemática como uma criação humana, [...], o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático (PCN, 1997, p34)"*. O professor também poderá se aprofundar no tema e evidenciar historicamente a relação entre a Geometria e a Teoria dos Números, trazendo à tona grandes nomes como Gauss e Euler, além de demonstrar a Matemática como conhecimento *"... historicamente construído e em permanente evolução (PCN, 1997, p.19)"*.

Assim, o ensino de triângulos Heronianos é uma promissora fonte de ampliação de conceitos matemáticos, que une diferentes ramos da matemática em um contexto histórico e desafiador. Contudo, o trabalho deste tema no Ensino Médio pode não ser tão impactante quanto seria no Ensino Fundamental, visto que os alunos desta etapa da escolarização anseiam por uma Matemática mais próxima ao seu contexto real, exigindo desta disciplina aplicações significativas e interdisciplinares.

4.2 CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Para se desenvolver o estudo dos triângulos Heronianos na educação básica, o professor deve verificar a proficiência de seus alunos nos tópicos abaixo. Porém não é necessário o desenvolvimento de todos os resultados em uma só etapa. O tema pode ser abordado em diferentes etapas da formação matemática caracterizando um currículo espiral:

- conjuntos numéricos;
- área de regiões planas;
- múltiplos e divisores;
- fórmulas algébricas;
- produtos notáveis

- semelhança de triângulos;
- teorema de Pitágoras;
- resolução de equações;
- sistemas de equações.

O professor, a fim de garantir o caráter investigativo de suas atividades, pode propor aos seus alunos que encontrem triângulos que possuem lados e área de medida inteira sem mencionar a expressão *"Triângulos Heronianos"*, permitindo o método de tentativa e erro. O ideal é que os alunos já tenham conhecimento da fórmula de Heron, mas é possível que se investigue o problema com a ajuda de *softwares* de geometria dinâmica, como o *GeoGebra*, podendo variar a medida dos lados dos triângulos e calcular a sua área automaticamente. Outra possibilidade de investigação é explorar o caso especial dos triângulos Pitagóricos, possível de se fazer logo no início do ensino de áreas de figuras planas.

Após a tentativa dos alunos de encontrarem tais triângulos, o professor poderá intervir orientando-os a investigarem algebricamente a fórmula de Heron e o teorema de Pitágoras, levantando hipóteses que ajudem a encontrar os triângulos Heronianos. Nesta etapa, sugerimos que sejam abordados os teoremas 2.5, 2.12 e 2.13 para criação de vários triângulos Heronianos, ampliando a compreensão de conceitos básicos como o de área, semelhança e composição de figuras.

As demonstrações que envolvem o conceito de congruência módulo n podem, e devem, ser trabalhadas com o resto da divisão inteira por n. A análise da paridade dos números em equações algébricas é um grande diferencial quando se trabalha apenas com números inteiros, o que reforça a importância deste tema na construção da ideia de número.

4.3 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Nesta seção são propostos exercícios que podem ser trabalhados com alunos do 9º ano do EF II e EM com os seguintes objetivos:

- Perceber que nem todos triângulos que possuem lados de medida natural também possuem área de medida natural;
- Perceber que os Triângulos Heronianos formam uma classe peculiar e curiosa;

- Analisar a fórmula de Heron no conjunto dos números naturais;
- Entender a relação entre as áreas de triângulos semelhantes;
- Entender e explorar a definição de Triângulos Pitagóricos e relacioná-la com os Triângulos Heronianos;
- Obter Triplas Pitagóricas por meio de parâmetros;
- Obter triplas de naturais que representem as medidas dos lados de Triângulos Heronianos por meio dos parâmetros de Brahmagupta.

1. *Utilize a **desigualdade triangular** para identificar as triplas que podem representar as medidas dos lados de um triângulo.*

$$\begin{array}{cccc} (2,5,1) & (6,7,8) & (1,9,4) & (12,8,6) \\ (23,32,16) & (89,53,35) & (102,180,180) & (402,201,201) \end{array}$$

2. *Utilize o **teorema de Pitágoras** para identificar as triplas que podem representar as medidas dos lados de um triângulo retângulo.*

$$\begin{array}{cccc} (3,4,5) & (6,7,8) & (6,8,10) & (17,15,8) \\ (20,32,11) & (25,7,23) & (45,27,36) & (113,15,112) \end{array}$$

3. *Um **triângulo Heroniano** é aquele cujas medidas dos lados e da área são naturais. Com o auxílio de uma calculadora, utilize a **fórmula de Heron** para identificar as triplas que podem representar as medidas dos lados de um triângulo Heroniano.*

$$\begin{array}{cccc} (2,6,5) & (13,5,12) & (4,13,15) & (3,3,5) \\ (10,13,13) & (12,8,6) & (1,3,3) & (52,61,87) \end{array}$$

4. *Existe triângulo Heroniano com lado de medida 1? E de medida 2? Se sim, dê um exemplo, do contrário, justifique.*

5. *Dado o triângulo $\triangle ABC$ de lados de medida 36, 48 e 60 respectivamente, faça o que se pede:*

   a. *Verifique se $\triangle ABC$ é Heroniano;*

   b. *Encontre todos os triângulos de lados de medida inteira semelhantes ao $\triangle ABC$ e que possuam área estritamente menor. Verifique se esses triângulos tam-*

bém são Heronianos;

c. *Discuta com os seus colegas se este resultado pode ser generalizado.*

6. *Os **triângulos Pitagóricos** são todos os triângulos retângulos que possuem lados de medida natural. Mostre que eles também possuem área natural, ou seja, que são todos Heronianos.*

7. *Dados dois inteiros positivos,* p *e* q*, com* $p > q$*, mostre que é possível gerar triângulos Pitagóricos de lados* c*,* b *e* a *com as seguintes fórmulas:*

$$c = p^2 + q^2;$$
$$b = p^2 - q^2;$$
$$a = 2pq.$$

Sabendo disso, varie os valores de p *e* q *de modo a criar 5 triângulos Pitagóricos e calcule as suas respectivas áreas.*

8. *Triângulos retângulos que possuem catetos de mesma medida podem ser combinados de modo a formarem novos triângulos. Combine os triângulos criados no item anterior de modo a encontrar o maior número de triângulos possível. Verifique se os triângulos assim formados são Heronianos.*

9. *Dados três inteiros* m*,* n *e* h*, tais que* $mn > h^2$ *e* $h > 0$*, é possível gerar triângulos Heronianos de lados* c*,* b *e* a *com as seguintes fórmulas:*

$$c = n(m^2 + h^2)$$
$$b = m(n^2 + h^2)$$
$$a = (m + n)(mn - h^2)$$

Sabendo disso, varie os valores de m*,* n *e* h *de modo a obter 3 triângulos Heronianos e calcule as suas respectivas áreas.*

10. *Um triângulo é dito **primitivo** se o máximo divisor comum entre seus lados é 1. Assim, verifique se os triângulos criados no item anterior são primitivos, se não forem, encontre seus respectivos primitivos.*

11. *Mostre que todo triângulo Heroniano tem perímetro e área par.*

12. *Mostre que a área de um triângulo Heroniano é sempre um múltiplo de 6.*

13. *Existe triângulo Heroniano equilátero?*

4.4 OUTROS MOMENTOS E CONCLUSÃO

Após uma rápida introdução histórica da fórmula de Heron e de seu idealizador, fizemos uma análise cuidadosa sobre as suas implicações para os triângulos de lados e área naturais, compondo um leque de propriedades dos chamados *Triângulos Heronianos*. Na sequência, concentramos nossos esforços na busca por elementos dessa classe tão peculiar de figuras, encontrando parâmetros para os seus lados e recorrendo a importantes resultados para obtenção de toda a família. Por fim, destacamos as características desse estudo que enriqueceriam a formação matemática de alunos do ensino fundamental e médio, tendo como base de análise os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Esperamos que este conhecimento seja útil na formação de professores em todo o país e, de preferência, útil aos alunos destes professores. Acreditamos que o investimento no professor seja fundamental para mudarmos a realidade escolar, ainda mais neste período onde a sociedade contemporânea exige um novo modelo de educação e sofre com graves falhas na administração escolar em todas as suas esferas, inclusive na sala de aula, onde o professor muitas vezes não consegue corresponder aos anseios de uma nova juventude. Esta realidade nos faz pensar em novas formas de interação com os alunos, como por exemplo, a criação de grupos de estudos formados pelos próprios alunos nos períodos contrários ao turno escolar. Esta iniciativa, que inspirou projetos como o *OBMEP nas Escolas*, oferece ao professor a oportunidade de trabalhar com um número reduzido de alunos que, em geral, estão dispostos a aprender Matemática. Algumas escolas também podem oferecer programas de iniciação científica, incentivando os alunos a se aprofundarem em suas áreas de interesse, deixando-os mais preparados para escolha de suas carreiras.

Portanto, se o professor, por motivos diversos, não conseguir trabalhar os triângulos Heronianos em suas aulas regulares, poderá investir em projetos institucionais dedicados a este e a tantos outros temas igualmente interessantes e enriquecedores.

Atualmente, o banco de teses do Profmat oferece centenas de propostas de trabalho diferenciadas sobre diferentes temas, a saber, em Pereira [11], encontra-se uma curiosa atividade lúdica para obtenção de triângulos Heronianos denominda *Pescando Triângulos de Heron*.

Ademais, esperamos que esta obra tenha cumprido com o seu papel de apresentar-lhe os triângulos Heronianos e suas principais propriedades, bem como tenha o ajudado a perceber no decorrer das demonstrações a profundidade do tema e sua relação com a Teoria dos Números, e mais do que isso, tenha lhe incentivado à buscar meios de aplicar este tema com seus alunos, trazendo mais uma possibilidade de aprofundamento do estudo de triângulos nas escolas.

A

APÊNDICE A

A.1 SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

1. Devemos comparar a soma de dois lados com o terceiro. Se a soma for menor ou igual, os números da tripla não poderão ser as medidas dos lados de um triângulo.
   Por exemplo: para a tripla $(2, 5, 1)$, temos que $1 + 2 < 5$. Desse modo, não existe um triângulo cujas medidas são $(2, 5, 1)$.
   As triplas cujos números satisfazem à desigualdade triangular são:
   $$(6, 7, 8) \quad (12, 8, 6) \quad (23, 32, 16) \quad (102, 180, 180)$$

2. Temos que $3^2 + 4^2 = 5^2$, $6^2 + 8^2 = 10^2$, $15^2 + 8^2 = 17^2$, $36^2 + 27^2 = 45^2$ e $112^2 + 15^2 = 113^2$, de modo que as triplas $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$, $(15, 8, 17)$, $(36, 27, 45)$ e $(112, 15, 113)$ formam triângulos retângulos. No entanto, em nenhuma combinação, as triplas $(6, 7, 8)$, $(20, 11, 32)$ e $(23, 7, 25)$ satisfazem a relação pitagórica.

3. A fórmula $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ deve ser aplicada para cada uma das triplas:
   $a = 2; b = 6; c = 5; s = \frac{2+6+5}{2} = 6,5; \Delta = \sqrt{6,5(6,5-2)(6,5-6)(6,5-5)} \simeq 4,7$
   Analogamente:
   $a = 13; b = 5; c = 12; s = 15; \Delta = 30$
   $a = 4; b = 13; c = 15; s = 16; \Delta = 24$
   $a = 3; b = 3; c = 5; s = 5,5; \Delta \simeq 4,15$
   $a = 10; b = 13; c = 13; s = 18; \Delta = 60$
   $a = 12; b = 8; c = 6; s = 13; \Delta \simeq 21,33$

$a = 1; b = 3; c = 3; s = 3,5; \Delta \simeq 1,5$
$a = 52; b = 61; c = 87; s = 100; \Delta = 1560$

4. Não, ver teorema 2.14.

5. a. O triângulo é Heroniano e tem área 864.

   b. Os números 36, 48 e 60 têm como divisores comuns os números 2, 3, 4, 6 e 12, logo, os triângulos semelhantes serão reduções de $\triangle ABC$ nesses fatores: $(18, 24, 30)$; $(12, 16, 20)$; $(9, 12, 15)$; $(6, 8, 10)$ e $(3, 4, 5)$.

   c. Resposta pessoal dos alunos, mas espera-se que os alunos sejam conduzidos ao resultado 2.5.

6. Ver 2.12.

7. Basta mostrar que $c^2 = b^2 + a^2$. Partindo de $c = p^2 + q^2$, temos o seguinte desenvolvimento de c^2:

   $$c^2 = (p^2 + q^2)^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^2$$

   donde segue que

   $$p^4 + 2p^2q^2 + q^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^2 + 2p^2q^2 - 2p^2q^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^2 + 4p^2q^2.$$

   Mas

   $$p^4 - 2p^2q^2 + q^2 + 4p^2q^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = b^2 + a^2$$

   demonstrando a validade do resultado.

   Os triângulos obtidos dependem dos valores adotados pelos alunos.

8. Resultado dependerá dos triângulos criados no item anterior. Pelo resultado 2.13, todos serão Heronianos.

9. Resposta dependerá dos valores adotados.

10. Resultado dependerá dos triângulos criados no item anterior.

11. Ver teorema 2.2.

12. Ver teorema 2.8.

13. Ver teorema 2.15.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.*História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012. p. 130-131.

[2] BRASIL, Secretaria de EducaçãoFundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

[3] BRASIL, Secretaria de EducaçãoFundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias/ Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília: MEC/SEF, s/d.

[4] CARLSON, J. R.. *Determination of heronian triangles*. Fibonacci Quarterly, v. 8, 1970, p. 499–506.

[5] CARMICHAEL, Robert D.. *Diophantine Analysis*. John Welley Sons, Inc. New York, 1915. p. 11-13.

[6] DICKSON, Leonard E..*History of the theory of numbers*. Washington Carnegie Institution. Washington, 1919, p 191.

[7] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora Unicamp, 2004. p. 205-206.

[8] FRICKE, Jan. *On Hero simples and integer Embedding*. Institut für Mathematik und Informatik Ernst-Moritz-Arndt Universität Greifswald, 2008. p 1-2. Disponível em:<https://arxiv.org/pdf/math/0112239.pdf> Acesso em: 29 Out 2016.

[9] GOMES, Carlos A.. *Uma bela demonstração da fórmula de Heron*. In: Revista do Professor de Matemática, 57. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[10] HELLMEISTER, Ana Catarina; et al. *Explorando o Ensino de Matemática: Artigos, vol. 1*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004, p 138-139.

[11] PEREIRA, Marivaldo B. *Triângulos de Heron*. Dissertação de mestrado - PROF-

MAT. Bahia: Universidade Federal da Bahia, 2015.

[12] NELSEN, R. B. *Heron's Formula via Proof Without Words*. College Mathematics Journal. Portland, 2001.

[13] SINGMASTER, David. *Some corrections to Carlson's "Determination of heronian triangles"*. Fibonacci Quarterly, 1973. Disponível em: <https://www.fq.math.ca/Scanned/11-2/singmaster.pdf>. Acesso em: 29 Out 2016.

[14] YIU, Paul. *Heron triangles which cannot be decomposed into two integer right triangles*. Florida: 41st Meeting of Florida Section of Mathematical Association of America, 2008.