Universidade Federal do ABC

PROFMAT

Horacio Emidio de Lucca Junior

Logaritmos: Uma proposta de abordagem no Ensino Médio utilizando a história, o contexto com as demais ciências e o Cálculo Diferencial e Integral

Santo André, 2017

Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Horacio Emidio de Lucca Junior

Logaritmos: Uma proposta de abordagem no Ensino Médio utilizando a história, o contexto com as demais ciências e o Cálculo Diferencial e Integral

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de mestre.

Orientador: prof. Dr. Welington Vieira Assunção

Santo André, 2017

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Lucca Junior, Horacio Emidio de
Logaritmos : Uma proposta de abordagem no Ensino Médio utilizando a história, o contexto com as demais ciências e o Cálculo Diferencial e Integral / Horacio Emidio de Lucca Junior. — 2017.

85 fls. : il.

Orientador: Welington Vieira Assunção

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2017.

1. Logaritmos. 2. Cálculo Diferencial e Integral. 3. Ensino Médio. I. Vieira Assunção, Welington. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2017. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 10 de Março de 2017.

Assinatura do autor: ____________________

Assinatura do orientador: Welington V. Assunção

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Horacio Emidio de Lucca Junior, realizada em 24 de fevereiro de 2017:

Welington V. Assunção
Prof.(a) Dr.(a) **Welington Vieira Assunção** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Cândido Faleiros** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Thiago Castilho de Mello
Prof.(a) Dr.(a) **Thiago Castilho de Mello** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Angelo Calil Bianchi** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Suplente

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador, professor Dr. Welington Vieira Assunção, por sua contribuição, confiança e afinco com que me conduziu para a realização deste trabalho, bem como aos demais professores que ministraram as disciplinas do curso, por me proporcionar o conhecimento necessário, não somente para tal produção, mas sobretudo por minha evolução intelectual e técnica em matemática.

Aos meus filhos por me trazerem tamanha felicidade e motivação. E por fim, um agradecimento mais do que especial e merecido à minha amada esposa, que soube compreender minhas necessidades e me apoiar, quando oscilei, a me manter firme no propósito de concluir o curso.

Dos meus filhos eu sinto saudade, eu tenho medo que eles achem que eu não sinto a falta deles como eu acho que eles sentem de mim. (Nando Reis)

Sumário

Lista de Tabelas

Resumo

LUCCA JUNIOR, Horacio Emidio de, M.Sc., Universidade Federal do ABC. **Logaritmos: Uma proposta de abordagem no Ensino Médio utilizando a história, o contexto com as demais ciências e o Cálculo Diferencial e Integral** Orientador: Welington Vieira Assunção.

Este trabalho ressalta a importância de um estudo qualitativo de logaritmos, tratando desde as dificuldades em ensinar o conteúdo até as limitações dos alunos para compreendê–los.

Após uma breve citação sobre o comportamento dos alunos do Ensino Médio, foi feita uma proposta acerca da preparação das aulas contemplando a história do assunto abordado para contribuir com esta preparação.

Para que o aluno possa ter um conhecimento sólido sobre os logaritmos, foi pedido uma busca sobre o tema, que continha uma apresentação de um histórico sobre o surgimento dos logaritmos e de suas tabelas.

Relacionar os logaritmos com equações exponenciais, progressões aritméticas e geométricas é primordial e este trabalho apresenta o envolvimento de alguns alunos para demonstrar tais relações.

Para um grupo de estudos específico, foi iniciado o estudo de cálculo diferencial e integral e feita a apresentação e demonstração dos logaritmos utilizando o conceito de cálculo.

Partindo das aplicações dos logaritmos e com base nos exercícios resolvidos e nos questionários respondidos pelos alunos, foi elaborada uma proposta metodológica para minimizar as dificuldades de alunos e professores no ensino de logaritmos.

Em geral, o aluno do Ensino Médio, além dos conhecimentos adquiridos ao término do curso, têm uma nova meta, o vestibular. Entretanto, mesmo que o aluno não pretenda continuar seus estudos na área de exatas, caberá ao professor conduzir estes conhecimentos novos, não só para o vestibular, mas, sobretudo, para que o mesmo compreenda a essência do estudo de logaritmos. Para isso, foi imprescindível relacionar o estudo de logaritmos com demais áreas do conhecimento como a Física, a Biologia e a Química, demonstrando sua aplicabilidade.

Palavras-chave: Logaritmo, Cálculo Diferencial e Integral, Ensino Médio.

Abstract

LUCCA JUNIOR, Horacio Emidio de, M.Sc., Universidade Federal do ABC. **Logaritmos: Uma proposta de abordagem no Ensino Médio utilizando a história, o contexto com as demais ciências e o Cálculo Diferencial e Integral** Orientador: Welington Vieira Assunção.

This research excels the importance of a quality study about logarithms, treating since the teachers teaching difficulties to the students comprehension limitations.

After a short quotation about the high school students behavoier, the teacher had proposed a concerning through the classes plans and in what the history about the subject in study can contribute with this plannings preparation.

So, for a student to have a solid knowledge about logarithm, it had asked a researching about the theme in which have to have an apresentation of the historical logarithm appearance and its index.

Its primordial to relate the logarithms with the exponencial equations, the arithmatics an geometrics maths progressions and this research shows some studentsinvolvement to demonstrate these relations.

For a group of specific studies, the study of differential and integral calculus was started, and a presentation and a demonstration of logarithms were made, using the differential and integral calculus concept.

Starting from the aplications of logarithms and with the exercises that have been

made and with the answered students questionaires, a methodologic proposal had made to minimize the students and teachers difficulties in teaching logarithms.

In general, the high school student, beyond the knowledge acquired at the end of the course, he/she has a new goal, the vestibular exam. However, if the student doesnt want to continue his/her study in the area, the teachers duty is to conduct this new knowledges not only for whom will do the vestibular exam, but also, to compreend the essence of the logarithms. For this, it was essential to relate the study of logarithms with the others knowedge area, such as physics, biology and chemistry, showing its applicability.

Keywords: Logarithms, Differential and Integral Calculus, High School.

Introdução

A cada dia que passa, os alunos ficam mais participativos e questionam muito em sala de aula, especialmente no Ensino Médio, fase em que os alunos necessitam dos porquês de cada assunto abordado.

O professor deve dominar o conteúdo trabalhado, desde sua origem histórica até suas aplicações para tornar a aula estimulante e eficaz, utilizando uma metodologia adequada ao planejamento escolar.

Certamente o estudo de logaritmos é um dos pontos falhos no ensino da matemática. Isto ocorre principalmente pelo desconhecimento do assunto por parte dos professores e pela falta de estímulos que estes passam aos alunos. É notável a pequena parcela de alunos que, ao término do Ensino Médio, sabem o que é e compreendem os logaritmos.

Deve–se ressaltar que este trabalho é uma proposta de como se introduzir o tema *logaritmos*, tratando dos tópicos históricos como demonstração de seu surgimento, suas propriedades, utilidades e aplicações. Os professores deverão dar continuidade à matéria, trabalhando ítens mais avançados, pricipalmente os cobrados em vestibulares.

Sendo assim, este trabalho tem como objetivo facilitar a atividade docente na hora de ensinar logaritmos e aprensentar as diversas maneiras de como este conteúdo pode ser abordado. No primeiro capítulo será descrito o perfil dos alunos do Ensino Médio, bem como apresentada uma pesquisa realizada por eles sobre o matemático

John Napier e também apresentado como surgiram os logaritmos e suas tabelas, para que o estudo deste assunto seja significativo ao aluno.

Já o segundo capítulo versará sobre um modelo de determinação dos logaritmos utilizando o conceito de médias aritméticas e geométricas, tanto em base decimal como em outra base qualquer, além da apresentação de algumas aplicações práticas.

O terceiro capítulo mostrará como de fato é ou deveria ser ensinado logaritmos aos alunos do Ensino Médio, fazendo estudo de propriedades, construções gráficas e trabalhando as dificuldades desses educandos na compreensão do assunto.

E o quarto capítulo tratará do estudo mais avançado de logaritmos, de como este pode ser trabalhado interdisciplinarmente com Química, Física e Biologia, além de apresentar uma forma mais elaborada de se abordar o tema, utilizando conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

Capítulo 1

O ENSINO MÉDIO E A HISTÓRIA DOS LOGARITMOS

Deve–se levar em consideração os distintos níveis de aprendizagem dos alunos do Ensino Médio. O estudo dos logaritmos é mais adequado para alunos das primeiras e segundas séries do Ensino Médio, pois nesta fase, normalmente, os alunos já estudaram as propriedades das potências, as propriedades dos radicais, as progressões aritméticas e geométricas, as funções e seus respectivos gráficos, que formam a base necessária para um bom aprendizado de logaritmos.

Os alunos do Ensino Médio, em geral, têm mais facilidade em aprender quando há uma dinâmica na aula, para isso deve–se expor, de maneira clara, cada assunto trabalhado, incluindo a aplicação e o porquê de se estudar tal matéria.

Em geral, os professores introduzem o tema logaritmo na forma $log_b a = c$, fazendo com que haja um rompimento de quaisquer conexões entre o tema abordado e o prazer de se estudar tal assunto. *'...talvez a forma como é apresentado o tema assuste os alunos, eles acabam pensando que é uma matéria difícil'* (Marcos D.)

A maior preocupação surge quando se nota que os alunos mal sabem o que são equações exponenciais ou o próprio significado das potências, e mesmo assim já estão trabalhando com logaritmos. É por isso que se deve retomar os assuntos, utilizando inclusive os conceitos históricos para expor o assunto com clareza.

1.1 Preparando as aulas

Na hora de preparar um conteúdo novo a ser ensinado aos alunos, pode–se fazer um trabalho diferenciado com o grupo, sem comprometer os temas abordados. Trabalhos estes que, além de conter os conteúdos necessários, estimulem o interesse dos alunos pela matéria.

Conhecer a história do assunto trabalhado é importante para que o professor saiba o que é relevante e o que estimularia o aluno no aprendizado. Sendo assim, o aluno participará da aula levantando questões e hipóteses que serão trabalhadas pelo professor.

CARDOSO (1999), ressalta que *'um perigo ou tentação a evitar é a escolha de técnicas em 'moda' (o uso da computação, por exemplo) por pura sofisticação, e não por se adaptarem realmente ao tema escolhido'*

Assim sendo, o uso de programas computacionais tem papel fundamental na explicação de exponenciais e logaritmos, mas o educador deve dominar a ferramenta para que tenha a certeza da qualidade com que esta explicando aos seus alunos.

1.1.1 A História é essencial

A História é sempre de grande importância para um povo, pois por meio dela ele torna–se consciente do caminho de desenvolvimento tomado por seu espírito, que se expressa em leis, modos, costumes e fatos. Estudar a História de um determinado assunto é aprender o sentido das transformações. Não há como ensinar um conteúdo seja ele qual for, sem uma visão histórica, ainda que sucinta, de seu desenvolvimento.

É na História que se percebe as razões de existência do assunto. O aluno deve ter uma idéia da disciplina como um todo e só assim terá motivação para estudá–la.*'Pode–se dizer então que em relação ao conteúdo, a matemática é a mais conservadora das disciplinas, mas algumas mudanças históricas na sua forma só podem ser descritas como revolucionárias'* BYERS (1982)

1.1.2 Sobre a busca dos alunos

A introdução ao assunto pode ser feita de diversas maneiras, pode–se partir das aplicações, do desenvolvimento dos logaritmos, da história, de contextualizações, de questões de vestibulares entre outros.

Entretanto, pensando principalmente em despertar o interesse do aluno, o aprendizado dos logaritmos, neste trabalho, iniciou–se com um pedido de busca em *sites* da *internet* sobre a biografia de John Napier.

Ainda não tinha sido mencionado o tema Logaritmos, o objetivo era somente o de comentar sobre este matemático. As buscas foram efetuadas por uma turma da primeira série do Ensino Médio de um determinado colégio, sendo assim, o trabalho por eles realizado foi o de comentar a vida e as atividades de Napier.

Acerca de seus comentários podem–se observar suas expectativas e curiosidades:

'...e também, o que é esse tal logaritmo' (Rodrigo C.).

'Quando a gente vai aprender logaritmo?' (Marcos D.).

'...foi meio complicado de entender, mas a média de uns números dá outro que chama logaritmos... (Marina S.).

'...ele era realmente muito inteligente. Eu já escrevi sobre outras pessoas, mas o John Napier revolucionou a matemática com os logaritmos.' (Carlos N. P.).

'a vida dele foi complicada e depois ele criou os logaritmos para facilitar cálculos grandes, o Briggs ajudou' (Caio F.).

Após um breve debate sobre os resultados obtidos, a facilidade de se iniciar um tema, normalmente tão recusado por alunos, ficou evidente.

1.2 A História dos Logaritmos

Os logaritmos foram inventados por volta de 1615, quando já havia grande desenvolvimento da navegação, do comércio e da astronomia, entre outros setores do conhecimento. Existiam bancos onde se faziam cálculo de juros. Todo esse avanço levou à necessidade de realizar cálculos enormes e trabalhosos. E nisso estava uma das dificuldades da época.

Napier criou a palavra LOGARITMO. A princípio ele chamou seus índices de potências 'números artificiais', mas mais tarde ele fez a composição de duas palavras gregas, LOGOS (ou razão) e ARITHMOS (ou número).

São poucas as coisas conhecidas a respeito deste gênio da matemática. Uma carta, considerada relíquia, de seu tio Adam, enviada para Archibald quando John tinha onze anos, dizia: *'Eu rezo senhor, para que seu filho seja educado na França ou em Flanders, porque não se pode aprender bem em casa nem adquirir proveito nesse mundo extremamente perigoso, ele pode ser preservado, honrado, como também, eu não duvido que ele vai...'*

(learn-math.info).

1.2.1 O surgimento dos logaritmos

Os logaritmos, como instrumento de cálculo, surgiram para que fosse possível simplificar grandes operações de multiplicação e divisão em simples somas e subtrações. John Napier foi quem deu a maior contribuição para o desenvolvimento dos logaritmos, no inicio do sculo XVII.

Napier nasceu em uma família importante de Edimburgo, Escócia, em 1550. Com 13 anos de idade entrou na Universidade de St Andrews, onde mostrou grande interesse por Teologia. Cursou a universidade de Paris. Em 1571 voltou à Escócia onde se dedicou à construção de um castelo onde iria morar com a esposa após 1574. *'Seu estudo dos logaritmos apareceu em 'Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio', de 1614.'* (www.academia.edu/5690016/John/Napier/e/a/criação/dos/logaritmos)

John Napier (1550-1617)

(imagem retirada de https://www.thinglink.com/scene/629746429962747906)

É importante aos alunos saberem qual foi o trabalho de Nepier: associar os termos de uma progressão geométrica: $b, b^2, b^3, ..., b^n$, aos termos de uma progressão aritmética: 1, 2, 3,...,n, o que deve ser demonstrado para que os alunos possam visualizar o fato, o que fazemos à seguir:

Então, ao produto de dois termos da primeira progressão, $b^m.b^p$, esta associada a soma $m + p$ dos termos correspondente na segunda progressão. Observe:

PA 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

PG 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024.

Para efetuar, por exemplo, 16 x 64, basta observar que:

- 16 na segunda linha corresponde a 4 na primeira;

- 64 na segunda linha corresponde a 6 na primeira;

- como 4 + 6 = 10 e 10 na primeira linha corresponde a 1024 na segunda, o resultado será 1024.

Note que o resultado foi encontrado através de uma soma.

Adiante, os logaritmos serão apresentados com esta abordagem.

1.2.2 Tabelas Logarítmicas

Burgi, um grande matemático da época, também lidava com o problema dos logaritmos. Ele empregou uma razão um pouco maior do que 1 (para a PG) e desenvolveu uma tabela com 23027 termos.

Nos 25 anos que se seguiram, Nepier se empenhou em construir tabelas que permitiam representar qualquer número positivo sob a forma de potência de uma determinada base. Posteriormente, Nepier, juntamente com Briggs, elaboraram tábuas de logaritmos mais úteis de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns.

> *'Quando enfim, em 1614, as tabelas se tornam públicas, atraíram de imediato, a atenção de Briggs e de Kepler. A partir de então, Briggs ficou amigo de Nepier e começaram a desenvolver tábuas logarítmicas e*

discutir como seria a base desse logaritmo. A primeira visita de Briggs aconteceu em 1615 e a segunda em Londres no ano seguinte'(CHARLES, 1971).

Capítulo 2

DETERMINANDO OS LOGARITMOS

2.1 Determinação de logaritmos na base 10

Para Nepier e Briggs, bastava saber escrever os números como potência de 10 para que se pudessem resolver alguns problemas de porcentagem, normalmente atribuídos a equações exponenciais.

O método se baseava em ter os números primos escritos como potência de 10, pois assim, todos os outros números poderiam ser escritos também.

Por exemplo: sabendo que $2 \simeq 10^{0,301}$ e que $3 \simeq 10^{0,477}$, pode-se escrever o número 18 como uma potência de base 10, pois 2x3x3 = 18 então $10^{0,301}.10^{0,477}.10^{0,477} \simeq 18$. Mas como saber que $2 \simeq 10^{0,301}$ e que $3 \simeq 10^{0,477}$? O primeiro passo é verificar o que é média geométrica:

Alguns exemplos:

– a média geométrica de 4 e 9 é igual a 6, pois $\sqrt{4 \times 9} = 6$

– a média geométrica de 2 e 8 é igual a 4, pois$\sqrt{2 \times 8} = 4$

Vamos agora verificar como se obter $3 \simeq 10^{0,477}$. O método que veremos a seguir foi utilizado por Henry Briggs para que pudesse ser construída a primeira tábua de logaritmos. O primeiro passo é descobrir o número de potência de 10 inferior a 3 e outro superior a 3. Começaremos com $10^0 = 1$ e $10^1 = 10$

Assim, $1 = 10^0$ —— $3 = 10^?$ —— $10 = 10^1$,

Observe que queremos o x para que $10^x = 3$

A média geométrica pode ser obtida pelos resultados das potências e pelas próprias potências. Assim:

$$\sqrt{1 \times 10} = \sqrt{10} \simeq 3,1623$$

$$\sqrt{10^0 \times 10^1} = \sqrt{10^{0+1}} = \sqrt{10^1} = 10^{1/2} = 10^{0,5}$$

Agora, o número a ser determinado está num menor intervalo, entre 0 e 0,5:

$10^0 = 1$ —— $10^? = 3$ —— $10^{0,5} \simeq 3,1623$

Repetindo o processo tem–se:

$$\sqrt{1 \times 3,1623} = \sqrt{3,1623} \simeq 1,7783$$

$$\sqrt{10^0 \times 10^{0,5}} = \sqrt{10^{0+0,5}} = \sqrt{10^{0,5}} = 10^{0,5/2} = 10^{0,25}$$

Delimitando mais o nosso resultado:

$10^{0,25} \simeq 1,77831$ —— $10^? = 3$ —— $10^{0,5} \simeq 3,1623$

A cada repetição do processo, verifica-se uma redução no intervalo, aproximando–se da solução:

$\sqrt{1,7783 \times 3,1623} \simeq 2,3714$

$\sqrt{10^{0,25} \times 10^{0,5}} = \sqrt{10^{0,25+0,5}} = \sqrt{10^{0,75}} = 10^{0,75/2} = 10^{0,375}$

Então:

$10^{0,375} \simeq 2,3714$ ——— $10^{?} = 3$ ——— $10^{0,5} \simeq 3,1623$

Vamos acelerar:

$10^{0,4375} \simeq 2,7384$ ——— $10^{?} = 3$ ——— $10^{0,5} \simeq 3,1623$

$10^{0,4688} \simeq 2,9456$ ——— $10^{?} = 3$ ——— $10^{0,5} \simeq 3,1623$

$10^{0,4688} \simeq 2,9456$ ——— $10^{?} = 3$ ——— $10^{0,4844} \simeq 3,0520$

$10^{0,4766} \simeq 2,9983$ ——— $10^{?} = 3$ ——— $10^{0,4844} \simeq 3,0520$

$10^{0,4766} \simeq 2,9983$ ——— $10^{?} = 3$ ——— $10^{0,4805} \simeq 3,0250$

$10^{0,4766} \simeq 2,9983$ ——— $10^{?} = 3$ ——— $10^{0,4786} \simeq 3,0116$

No último esquema, os dois expoentes são 0,4766 e 0,4786: as duas primeiras casas decimais são iguais - 0,47. Portanto, se quisermos apresentar o expoente com duas casas decimais, podemos interromper o processo dos cálculos de médias geométricas.

Nesse caso, teremos: $3 \simeq 10^{0,477}$.

Para uma maior aproximação, ou seja, com mais casas decimais, é só aumentar o número de interações geométricas. Assim, de acordo com Briggs, todos os números podem ser escritos em potências de 10, bastando para isso utilizar potências cada vez mais próximas dos números desejados.

2.2 Determinação de logaritmos em qualquer base

Após ter sido passada a demonstração de Briggs para os alunos da primeira série e também da segunda série do Ensino Médio, dois alunos resolveram construir números como potências de bases diferentes de 10.

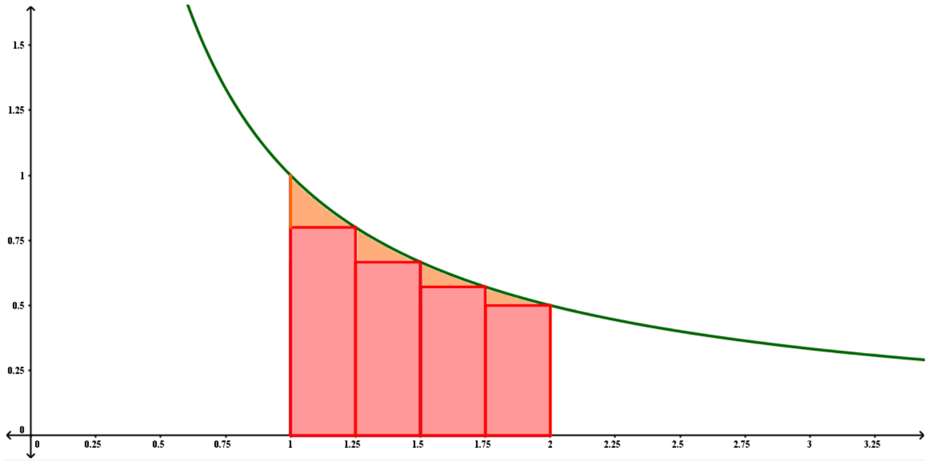
O aluno M. S. decidiu escrever o número 8 como uma potência de base 3 e o aluno M. R., escrever o número 5 como potência de base 7 (ver apêndice C). Estes alunos demonstraram grande vontade em trabalhar nesta problemática. É interessante frisar que o aluno M. S. cursa a segunda série do Ensino Médio e, portanto, estudou logaritmos no ano anterior. Já o aluno M. R. está cursando a primeira série do Ensino Médio e ainda não estudou os logaritmos. Tais especificidades não alteraram os resultados desejados e obtidos: a comprovação que podemos utilizar bases diferentes de 10 na determinação de logaritmos.

O mais importante desta atividade foi verificar o compromisso e empenho dos alunos participantes, pois, segundo (FURLANETTO, 1998) *'O fato de viver uma experiência prazerosa de mudança tornam as pessoas disponíveis para viver outra'.*

Os alunos estavam totalmente empenhados em resolver estas atividades, querendo compreender cada etapa do processo. Após esta experiência, passaram a se dedicar mais em compreender a existência de todos os assuntos abordados.

Usando o software Geogebra para a construção de gráficos, foi pedido aos alunos que realizassem a seguinte atividade:

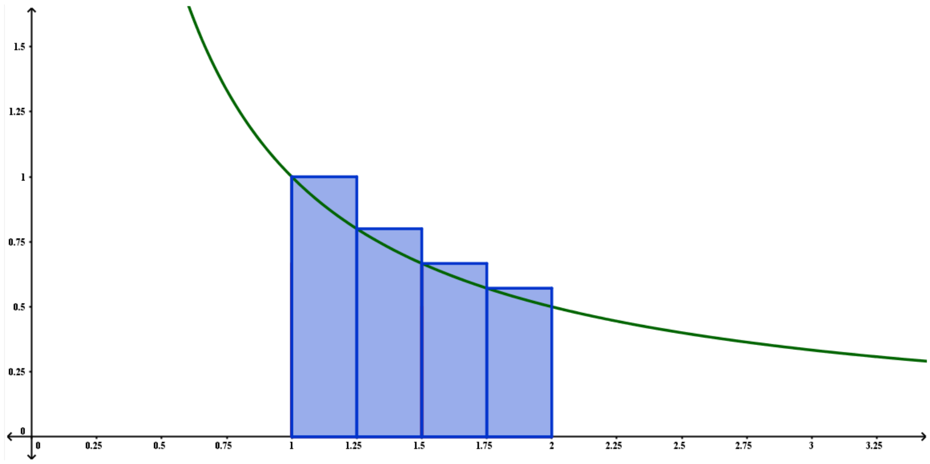
Dada a função $f(x) = \frac{1}{x}$, vamos calcular a área do retângulo formado pelos pontos: $(1;0),(1,25;0),(1,25;f(1,25)),(1;f(1,25))$, a área do retângulo formado pelos pontos $(1,25;0),(1,5;0),(1,25;f(1,5)),(1,5;f(1,5))$, a área do retângulo formado pelos pontos $(1,5;0),(1,75;0),(1,5;f(1,75)),(1,75;f(1,75))$ e a área do retângulo formado pelos pontos $(1,75;0),(2;0),(1,75;f(2)),(2;f(2))$ e somá-las.



$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1{,}25}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1{,}75}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{533}{840}$

Temos então a área total formada pelos retângulos *abaixo* da curva em $[1,2]$

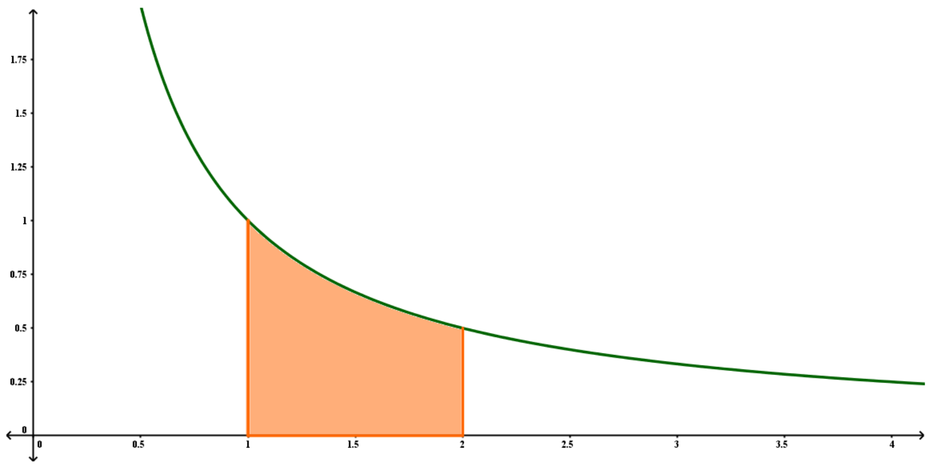
Agora, da mesma função $f(x)=\frac{1}{x}$, vamos calcular a área do retângulo formado pelos pontos: $(1;0),(1,25;0),(1,25;f(1)),(1;f(1))$, a área do retângulo formado pelos pontos $(1,25;0),(1,5;0),(1,25;f(1,25)),(1,5;f(1,25))$, a área do retângulo formado pelos pontos $(1,5;0),(1,75;0),(1,5;f(1,5)),(1,75;f(1,5))$ e também a área do retângulo formado pelos pontos $(1,75;0),(2;0),(1,75;f(1,75)),(2;f(1,75))$ e somá-las.



$\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1{,}25}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1{,}75}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{319}{420}$

Temos então a área total formada pelos retângulos *acima* da curva em $[1, 2]$

Pode–se agora fazer uma aproximação para a área abaixo da curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em $[1, 2]$, calculando a média aritmética entre as duas áreas das somas dos retângulos, assim:



$\frac{\frac{319}{420}+\frac{533}{840}}{2}$ é aproximadamente $0,697$

Após a realização deste problema, foi então comentado com os alunos que existia relação entre o valor obtido e o logaritmo de 2 na base **e**, que será devidamente explicitado no capítulo 4.

2.3 Aplicação dos logaritmos

Veja a seguir algumas aplicações dos logaritmos:

1. Para medir o nível sonoro utilizamos uma escala logarítmica. A unidade utilizada é o bel, que tem por símbolo B, e que homenageia Graham Bell (1847-1922), o inventor do telefone. Na prática, no entanto, utilizamos o decibel (simbolizado por db), que equivale à décima parte do bel;

2. Os logaritmos são utilizados na medida da intensidade de um terremoto. Uma idéia da intensidade de alguns terremotos: se libertássemos um cubo de granito, com 2 km de aresta, de uma altitude de 280 km em relação à terra, a energia liberada durante o impacto, seria de 20 trilhões de kWh. O terremoto que destruiu Lisboa, em 1755, liberou uma energia equivalente a 350 trilhões de kWh;

3. Meia-vida é o tempo necessário para que metade do número de átomos radioativo de um elemento se desintegre. O tório, por exemplo, apresenta meia-vida de 24,5 dias, ou seja, a cada 24,5 dias a quantidade de átomos radioativos de uma amostra se reduz á metade. Sendo assim, o número de átomos que resta na amostra pode ser calculado pela fórmula: $n = \frac{n_o}{2^x}$;

4. No século passado foi descoberto que a velocidade mxima C_{max} - em bits por segundo com que sinais de potência S watts podem passar por um canal de comunicação, que permite a passagem, sem distorção, dos sinais de frequência até B hertz, produzindo um ruído de potência máxima N watts, é dada por: $C_{max} = B.log_2(\frac{S}{N})$

Dessa forma, os logaritmos claramente assumem um papel fundamental, pois constituem uma ferramenta essencial no contexto da moderna tecnologia.

Os logaritmos têm relação com dados estatísticos também.

Suponha que uma determinada cidade tenha 20.000 habitantes e sua população apresenta, em média, crescimento de 3% ao ano. Após quantos anos esta cidade terá 50.000 habitantes? Tal questão está sempre presente em pesquisas sobre população, como podemos verificar no texto a seguir:

No próximo capítulo será tratado com mais especificidade a questão que relaciona o estudo dos logaritmos com outras áreas do conhecimento.

2.3.1 O uso das calculadoras e programas computacionais

De acordo com (BOYER, 1996), *'Hoje não precisamos mais das tabelas de logaritmos, que eram na forma de livro. As calculadoras científicas trazem os logaritmos decimais apenas apertando 2 botões. Deve–se mostrar para o aluno como decodificar esses números e onde usá–los.'*. Podemos observar que trata–se de um comentário com mais de 20 anos.

Com a chegada das calculadoras e computadores, os logaritmos perderam muito de sua utilidade inicial. No entanto, muitas de suas aplicações foram desenvolvidas com base na teoria dos logaritmos.

As calculadoras científicas, calculam logaritmos na base 10 ao premer–se a tecla *log*. Para utilizar a calculadora, basta digitar um número qualquer e premer a tecla *log*.

Por exemplo, ao digitar 1,4 e a tecla *log*, aparecerá o número 0,14612..., isto significa que $10^{0,14612...} = 1,4$. Generalizando, tem–se: log b = c se, e somente se, $10^c = b$ (ver apêndice D propriedades gerais).

2.4 Sobre o questionário aplicado aos alunos

Com o intuito de compreender as angústias e dificuldades dos estudantes durante o aprendizado de logaritmos, foi passado um questionário aos alunos da primeira série do Ensino Médio que já estudaram logaritmos (Ver apêndice E). A seguir é apresentada uma análise das respostas dos alunos.

Na primeira questão foi notável a diversidade de respostas, os alunos relacionam os temas que mais gostam com a facilidade que encontram em aprender tal tema.

Foram raros os casos de alunos que diziam gostar de matérias que encontraram dificuldades em aprender, mas em algumas citações, os alunos diziam que tais dificuldades desenvolviam mais o raciocínio e era de importante aplicabilidade e por isso gostavam mais. Alguns disseram que gostam de interpretar problemas.

Sobre a segunda questão, a maioria respondeu que sim, entretanto houve muitas menções sobre o contexto que determinados temas estão inseridos. Embora alguns tenham dito que depende de como o professor conduz a matéria, pois se o professor ensinar bem o aluno aprenderá e ao aprender poderá gostar da matéria.

Sobre a terceira questão, muitos alunos disseram que não gostavam, mas foi notável a distinção entre os alunos que gostavam e os que não gostavam, pois enquanto uns achavam que era uma matéria inútil (só serve para decorar regras), outros alunos citaram o fato de desenvolver o raciocínio, além de rever tópicos já estudados, mas que o tempo de ensino foi curto.

Foram raros os alunos que conseguiram relacionar os logaritmos a outros temas matemáticos, mas alguns mencionaram as equações exponenciais, outros, potências e apenas dois falaram sobre a relação com progressões aritméticas e geométricas.

Os alunos foram quase que unânimes ao considerar importante o uso da história no ensino de qualquer tema abordado, pois os situa nos acontecimentos da época e acham importante a biografia de quem desenvolveu cada tema. Ressaltaram ser importante que o professor demonstre a evolução até chegar em uma teoria, desde que não tome muito tempo.

Sobre a sexta questão, muitos não conseguiram dizer qual a dificuldade que sentiam. Aqueles que não apresentavam dificuldades até deduziam algumas coisas. Por exemplo, teve um aluno que achava que os colegas tinham dificuldades pela apresentação do assunto: $log_b a = c$. Houve citação de que é difícil entender sua aplicação.

Muitos não conseguiram definir logaritmos, mas os que conseguiram, relacionaramno às exponenciais e também às progressões, demonstrando que qualquer número real pode ser escrito como uma exponencial.

Para muitos um bom professor tem que ter boa didática, ter um bom relacionamento com os alunos, não se considere superior mas que inspire respeito, prepare as aulas que resultem em atividades descontraídas.

Falaram da importância de se estudar matemática para desenvolver o raciocínio lógico, para resolver problemas, para aplicações cotidianas e para o aprimoramento da concepção do nível de conhecimento do indivíduo.

Muitos não conseguiram relacionar a importância da matemática com o ensino dos logaritmos, mas os que conseguiram falaram sobre o raciocínio lógico, facilidade em resolver grandes cálculos e, novamente, sobre a resolução de problemas.

Capítulo 3

O ENSINO DOS LOGARITMOS

A próxima parte do trabalho é a verificação da eficácia do método adotado. Quais foram os efeitos das demonstrações e explicações? Os alunos compreenderam o tema? Dominam as propriedades? Conseguem utilizá–las na resolução de problemas?

3.1 Sobre os exercícios

Para a efetiva verificação do aprendizado, foram trabalhados alguns exercícios com os alunos. Exercícios estes que foram registrados para posterior análise. Esta é a hora da mediação. Identificar a zona de desenvolvimento real (Z.D.R.)[1] de cada aluno, para trabalhar uma zona de desenvolvimento proximal (Z.D.P.)[2] comum, já que se tratam de aulas coletivas.

Os exercícios variaram de acordo com o grau de dificuldade ou complexidade (ver apêndice A). A tabela 1 evidencia em quais exercícios os alunos tiveram mais dificuldades:

[1]ZDR-zona de desenvolvimento real - conceito elaborado por Vigotsky que define o conhecimento atual do educando.

[2]ZDP-zona de desenvolvimento proximal - conceito elaborado por Vigotsky que define a distância entre o nível de desenvolvimento real e o potencial, determinado através da solução de problemas.

Exercício, número	Acertos	Erros
1	23	17
2	30	10
3	4	36
4	29	11
5	31	9
6	11	29
7	34	6
8	21	19
9	25	15
10	39	1

Tabela 3.1: Quantidade de erros e acertos nos exercícios.

A atividade foi aplicada para 40 alunos e, de acordo com a tabela 3.1, observa-se que a maior dificuldade estava na resolução dos exercícios 3 e 6.

No exercício 3, o problema ocorreu na hora de transformar $(\frac{1}{2})^x$ em 2^{-x} e também na hora de aplicar uma das propriedades dos radicais na parte $\sqrt[5]{2^{-x}} = 2^{-\frac{x}{5}}$

Já no exerccio 6, a maior dificuldade dos alunos foi em transformar 0,000064 em 64×10^{-6} .

Nota-se que conteúdos vistos no ano anterior pelos alunos, tornam-se estranhos quando exigidos em um novo conteúdo.

Tais exercícios foram solicitados a fim de haver uma institucionalização do cálculo e propriedades dos logaritmos.

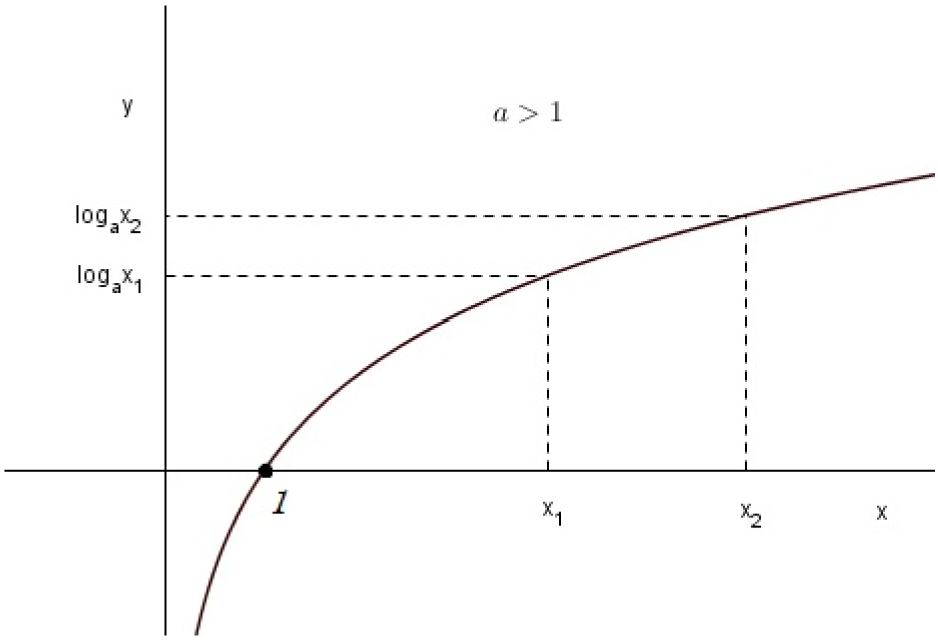
3.2 Estudo dos gráficos de logaritmos

Para se estudar os gráficos das funções logarítmicas, houve primeiro uma revisão do estudo de função e a devida aplicação aos logaritmos. Assim, após a constatação do significado de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, a notação foi atribuída aos logaritmos , chegando a: *Função logarítmica é toda função* $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *que associa a cada x o logaritmo na base b de x :* $f(x) = log_b x$.

A representação gráfica de uma função logarítmica é feita no plano cartesiano, atribuindo valores positivos (Apêndice D) para x. Analisemos dois casos:

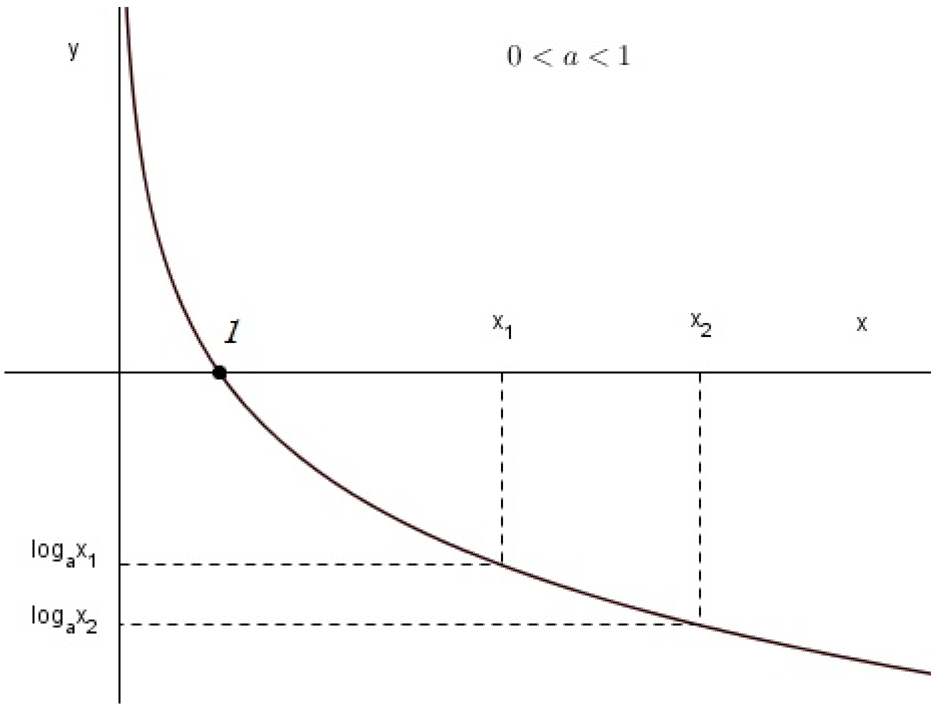
A partir do gráfico da função $f(x) = log_a x$, veremos duas propriedades importantes que são úteis na construção dos gráficos.

1. Quando a > 1, temos:



$x_2 > x_1 \longleftrightarrow log_a x_2 > log_a x_1$.

2. Quando $0 < a < 1$, temos:



$x_2 > x_1 \longleftrightarrow log_a x_2 < log_a x_1$

Para os alunos, foi pedido que construíssem os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = log_3 x,\ f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

b) $f(x) = log_2(x - 1),\ f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

Os esboços estão registrados em apêndice B.

Exercício	Compreendeu e acertou	Compreendeu, mas errou	Não compreendeu
A	40%	50%	10%
B	30%	50%	20%

Tabela 3.2: Quanto aos resultados obtidos.

Conclui–se então que a institucionalização dependerá também da quantidade de exercícios aplicados, pois só assim os alunos compreenderão e utilizarão com coerência os gráficos.

3.3 Tratando as dificuldades

3.3.1 Metodologia adotada para minimizar as dificuldades

A tarefa dos profissionais da educação é fazer com que seus alunos aprendam a aprender. Estimulá–los criando mecanismos que os auxiliem no processo de construção do conhecimento.

O conhecimento surge das ações e descobertas feitas pelos adolescentes no decorrer de seu desenvolvimento social e cultural. Saber conduzir esse desenvolvimento é essencial para uma efetiva aprendizagem de qualquer assunto que se esteja trabalhando.

Sendo assim, este trabalho deverá auxiliar esses profissionais na condução do processo de aprendizagem, criando ambientes e situações que envolvam o aluno.

Saber como apresentar um novo conteúdo e, principalmente, avaliar o que foi assimilado pelo aluno, é fundamental para uma boa continuidade no trabalho. Para tal deve–se aplicar um procedimento diferenciado analisando o desempenho do aluno em cada fase do processo.*'O papel do professor consiste, principalmente, em introduzir no ambiente dos alunos, os elementos, os acontecimentos, as fases e os símbolos'*.(SOUZA, 2002).

3.3.2 Retomando o processo

Um dos temas mais complexos da aprendizagem é a avaliação. Normalmente se avalia um aluno pelo que ele faz de *certo* ou *errado* . Se os erros cometidos forem superiores aos acertos, o aluno não estará apto a dar continuidade aos estudos.

O erro é tratado como o grande vilão do aprendizado, se um aluno não erra ele será o *'máximo'*, se um aluno erra demais, ele será o *'coitadinho'* ou o *'burrinho'* da turma. Para Macedo (2002), *'no plano do fazer, 'errado' é o que frustra um resultado em função de um objetivo. Daí a importância desse erro. Se objetivo e resultado forem claros para o aluno, um erro de procedimento ou estratégia, em uma dada situação, pode se tornar um problema, algo a ser alterado, corrigido ou aperfeiçoado'.*

Na hora de retomar o processo de ensino deve–se tratar o erro como um mecanismo que auxilia o aprendizado, um criador de problemas que estimulem o aluno a pensar em meios de solucioná–los. São esses erros que trabalharemos, como o caso das potências de 10 ou das transformações de radicais em potências, tópicos que os alunos apresentaram grandes dificuldades. Se for necessário, o ideal é rever alguns conteúdos.

Capítulo 4

APROFUNDANDO O CONHECIMENTO

4.1 Estudo dos logaritmos para futuras aplicações e para o vestibular

Embora conceituar o estudo dos logaritmos para uma aprendizagem de qualidade seja primordial, não se deve descartar a questão das fórmulas, ou melhor, a institucionalização das propriedades, já que isto é muito cobrado em exercícios de alguns vestibulares.

Pode–se chegar a tal conclusão após a realização de um questionário sobre qual o curso pretendido pelos alunos no Ensino Superior.

Cursos desejados	quantidade de alunos	Taxa percentual
Ciências exatas	5	25%
Demais áreas	12	60%
Ainda não sabem	3	15%

Tabela 4.1: Tipo de curso desejado pelo aluno no Ensino Superior.

Devido a tais resultados, fica claro que, para o aluno, a questão vestibular, na maioria dos casos, é o que interessa e por isso não se pode falar sobre logaritmos sem mencionar as propriedades e sem aplicar uma grande quantidade de exercícios para que os alunos tenham um bom preparo.

É claro que não podemos descartar aqueles alunos que tiveram um gosto especial no estudo dos logaritmos, pelo contrário, podemos trabalhar com esses alunos de forma individualizada.

4.2 Relacionando os logaritmos com as demais ciências no Ensino Médio

Trabalhar conceitos de forma interdisciplinar, além de dar significado ao que se está estudando, estimula educandos para compreender a importância do uso de ferramental matemático no desenvolvimento e interpretação de situações problemas de outras áreas do conhecimento.

Embora os logaritmos possam ser aplicados nas mais diversas áreas do conhecimento como economia, saúde, geografia, com análise de crescimento populacional, crescimento econômico ou a eficiência e durabilidade de medicamentos, o foco aqui é a abordagem dos logaritmos no Ensino Médio, neste contexto, é de grande importância verificar o modo em que eles são apresentados e como é desenvolvido pelos educadores das Cências da Natureza.

4.2.1 Relacionando os logaritmos com a Química

Em Química, um dos conteúdos que os alunos do Ensino Médio tem muita dificuldade de compreensão é o estudo de Equilíbrio Iônico. Contudo é aqui importante um breve comentário sobre o assunto para contextualização da aplicação de logaritmos.

No equilíbrio iônico, o sistema é uma solução aquosa que contém íons em contato com moléculas ou compostos iônicos pouco solúveis. Dependendo da quantidade de íons livres, a solução pode ser classificada em eletrólito forte ou fraco. Existem vários tipos de equilíbrio iônico.

O primeiro caso é o estudo da constante de ionização dos ácidos e das bases K_a e K_b

> *Quando um ácido ou uma base fracos são adicionados à água, ocorre equilíbrio entre íons e moléculas não ionizadas (ácidos) ou entre íons e aglomerados iônicos não dissociados (bases). Nesse caso, a constante de equilíbrio é representada, respectivamente, por K_a e K_b.*
>
> *O valor numérico destas constantes permite avaliar o tamanho da dissociação de um ácido ou de uma base: valores altos indicam grande dissociação e valores baixos, pequena dissociação. Ácidos ou bases que apresentam valores de K altos são chamados ácidos ou bases fortes; os que apresentam K baixo são chamados ácidos ou bases fracos.* (TITO e CANTO, 2006)

Especificamente, trataremos aqui, para resumir o assunto, do equilíbrio iônico da água K_w

A água é um eletrólito fraco. Em um litro de água existem aproximadamente 55,5 mols de moléculas a 25 graus Célsius. Dessas, apenas 10^{-7} moléculas se ionizam, produzindo 10^{-7} de H^+ e 10^{-7} de OH^-. A presença dos íons H^+ e OH^- se dá pela autoionização da água, que pode ser representada, de modo simplificado, pelo equilíbrio:

$$H_2O \text{ se relaciona com } H^+ + OH^-$$

Aplicando a expressão da constante, tem-se:

$K = \frac{[H^+].[OH^-]}{H_2 0}$

Como a concentração da água é constante, é possível inseri–la no valor de K, obtendo uma nova constante, que será representada por K_w, chamado produto iônico da água:

$K[H_2O] = [H^+][OH^-]$ será $K_w = [H^+][OH^-]$

Experiências já mostraram que o produto iônico $[H^+][OH^-]$, a 25 graus célsius tem o valor de $1,0 \times 10^{-14}$, apresenta o mesmo valor numérico tanto em água pura como em soluções ácidas, básicas ou neutras, quando comparados à mesma temperatura.

Quando se adiciona um ácido à água, o equilíbrio iônico dela é afetado, pois a concentração de H^+ aumenta. Quando esse valor passa a ser maior que 10^{-7}, a concentração de OH^- diminui (menor que 10^{-7}), e o valor de $K_w = 10^{-14}$ não muda.

Soluções ácidas: $[H^+] > 10^{-7}$ e $[OH] < 10^{-7}$ a 25 graus célsius.

Soluções básicas: $[OH^-] > 10^{-7}$ e $[H^+] < 10^{-7}$ a 25 graus célsius.

Observação: A constante de ionização (K_w) só muda quando a temperatura é alterada.

Enfim o tópico que requer a aplicação dos logaritmos para a área de Química que é extensão do que estava sendo relatado, o **pH e pOH**

A acidez ou a basicidade de uma solução é determinada pela concentração de H^+ ou de OH^-. No entanto, pela dificuldade de trabalhar com potências de 10 e com números negativos, introduziram–se os conceitos de pH e pOH.

pH = $-log[H^+]$

pOH = $-log[OH^-]$ e $pH + pOH = 14$

Para calcular o pH é necessário conhecer a concentração molar dos íons H^+ e aplicar os conceitos de logaritmo.

solução aquosa	[H+](mol/L)	Cálculo de pH	pH
1	10^{-8}	$-log10^{-8} = -(-8) = +8$	8
2	10^{-2}	$-log10^{-2} = -(-2) = +2$	2
3	1	$-log1 = -(0) = 0$	0
4	10	$-log10 = -(+1) = -1$	-1
5	2×10^{-2}	$-(log2 + log10^{-2}) = -(0,3 - 2) = 1,7$	1,7

Tabela 4.2: Exemplo de tabela de pH

Utilizando o conceito de pH, tem-se:

- água pura ou soluções neutras a 25 graus célsius apresentam $[H^+] = [OH^-]$; portanto, pH = 7;
- soluçõs ácidas a 25 graus célsius apresentam $[H^+] > [OH^-]$; portanto, $pH < 7$;
- soluções básicas a 25 graus célsius apresentam $[H^+] < [OH^-]$; portanto, $pH > 7$.

A determinação precisa do pH pode ser feita por meio de um aparelho conhecido como peagâmetro (medidor de pH). Esse aparelho é constituído de um eletrodo acoplado a um potenciômetro (medidor da diferença de potencial), e a leitura se dá em função da condutibilidade elétrica da solução. Ao ser imerso na solução, o eletrodo gera milivolts que, por intermédio de um voltímetro, permitem a medição do pH. O aparelho é calibrado para converter os valores medidos em milivolts para a escala usual de pH (de 0 a 14).

A seguir, veremos como os alunos aplicam propriedades operatórias na reso-solução de problemas, que teve a contribuição nas explicações do professor do Ensino Médio, Edson Camarini.

Questão 1 – (FGV–SP) A constante de ionização do ácido ascórbico, também conhecido como vitamina C, é igual a $8,0.10^{-5}$. A dissolução de um comprimido de ácido ascórbico em um copo de água resulta em uma solução contendo $0,0125 mol/L^{-1}$ desse ácido. O pH dessa solução será igual a:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

resolução: *É possível obter o grau de ionização, α, substituindo os valores fornecidos no enunciado na seguinte resolução:*

$K_a = \alpha^2.M$

$8,0 \times 10^{-5} = \alpha^2.0,0125$

$\alpha = 0,08$

A concentração de íons H^+, por sua vez, pode ser obtida pela reação:

$[H^+] = \alpha.M = 0,08 \times 0,0125 = 1,0 \times 10^{-3} mol/L$

O pH, portanto, é igual a:

$pH = -log[H^+] = -log(1,0 \times 10^{-3}) = 3$

Vejamos uma outra situação problema:

Questão 2 – (UFR-RJ) Em 1909, Soren P. T. Sorensen (1868-1939), bioquímico dinamarquês, estabeleceu uma maneira conveniente de expressar a acidez, utilizando o logaritmo negativo da concentração de íon hidrogênio: pH = $-log[H^+]$. Ele chamou de expoente do íon hidrogênio, representado pelo símbolo pH –*pondus hydrogenii*, do latim, ou *potenz* H (conforme denominação dada por Sorensen)–potencial de hidrogênio. Devido ao uso do artifício matemático $-log[H^+]$, os valores dessa escala são positivos na faixa de concentração abaixo de 1 mol/L. Com base na expressão de Sorensen, determine: (Dado: $log8,0 = 0,9$)

a) A equação de equilíbrio iônico da dissociação do ácido acético (CH_3COOH) em água, sabendo que esse ácido é fraco;

resolução: $CH_3COOH(aq) \rightleftharpoons CH_3COO^-(aq) + H^+(aq)$

b) o pH de uma solução contendo 240g de água acético em um volume de 500 mL, sabendo que apenas 1% do ácido é ionizado.

resolução: A proporção estequiométrica desse equilibrio de ionização é 1:1:1. A massa de ácido acético ionizado em solução que corresponde a 1% é: $x = \frac{240g.1\%}{100\%} = 2,4g$

A massa de $2,4g$ corresponde às moléculas de ácido acético que ionizaram em solução. Para determinar o pH é preciso saber a concentração de íons H^+ presentes em solução. Para volume de 500 mL, a massa de ácido acético é de $2,4g$. Assim, para 1000 mL, tem–se: $y = \frac{2,4g.1000mL}{500mL} = 4,8g$ Com a massa de $4,8g$ é possível determinar a concentração de ácido acético ionizado. $[CH_3COOH] = \frac{4,8g}{60g/mol} = 8,0 \times 10^{-2}mol/L = [H^+]$ $pH = -log[H^+] = -log(8,0) \times 10^{-2} = -(log8,0 + log10^{-2}) = -(0,9 + (-2) \times 1) = 1,1$

Uma aula interdisciplinar experimental foi realizada envolvendo as disciplinas de matemática e química com o intuito justamente de verificar a viabilidade de um trabalho dessa natureza em um colégio e, sobretudo, se o resultado seria satisfatório, ou seja, se haveria de fato maior compreensão por parte dos educandos, caso o tema logaritmos fosse abordado de modo contextualizado. A questão anterior, foi explicada, como exemplo, pelo professor de química. Em seguida, pediu–se aos alunos que resolvessem a próxima questão:

Questão 3 – Calcule o pH de uma solução de 0,10 mol/L de benzoato de potássio ($KC_6H_5CO_2$), sabendo que o ácido conjugado do íon benzoato é o ácido benzoico (C_6H_5COOH), que tem $K_a = 6,3.10^{-5}$.

resolução:

Dissociação: $KC_6H_5CO_2(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons K^+(aq) + C_6H_5COO^-(aq)$

Hidrólise: $C_6H_5COO^-(aq) + H^2O(l) \rightleftharpoons C_6H_5COOH(aq) + OH^-(aq)$

$C_6H_5COO^-(aq)$ inicio: 0,10 mol/L, variação: $-x$ mol/L e equilíbrio: $(0,10 - x)$ mol/L

$+H^2O(l)$ inicio: -, variação: - e equilíbrio: -

$C_6H_5COOH(aq)$ inicio: 0, variação: $+x$ mol/L e equilíbrio: x mol/L

$OH^-(aq)$ inicio: 0, variação: $+x$ mol/L e equilíbrio: x mol/L

$K_b = \frac{K_w}{K_a} = \frac{1,0 \times 10^{-14}}{6,5 \times 10^{-5}} = 1,54 \times 10^{-10}$

$K_b = \frac{[C_6H_5COOH][OH_-]}{[C_6H_5COO^-]} = 1,54 \times 10^{-10}$

$\frac{x.x}{(0,10-x)} = 1,54 \times 10^{-10}$

Normalmente,a variação da concentração é muito pequena quando comparada à concentração inicial do reagente. Logo, pode–se considerar $(0,10 - x) \simeq 0,10$

$x^2 = 0,10 \times (1,54 \times 10^{-10})$

$x^2 = 1,54 \times 10^{-11}$

$x = \sqrt{1,54 \times 10^{-11}} = 3,92 \times 10^{-6}$

Portanto, pode–se afirmar que

$x = [OH^-] = 3,92 \times 10^{-6}$ mol/L

$pOH = -log[OH^-] = -log(3,92 \times 10^{-6}) = -(-5,4)$

$pOH = 5,4$

$pH = 14 - pOH = 8,6$

Ficou claro, após a aula, que era grande a dificuldade de alguns alunos em resolver a passagem $pOH = -log[OH^-] = -log(3,92 \times 10^{-6}) = -(-5,4)$, por causa de algumas simples propriedades operatórias dos logaritmos. Assim, esta prática mostrou o quanto fica produtivo e eficiente o trabalho realizado com os educandos, quando as área realizam de forma contextualizada e dinâmica as explicações.

Ainda no campo da Química, o estudo de **datação por carbono–14** também conta com os logaritmos como ferramenta de cálculo. O radiocarbono ou simplesmente carbono–14, é um isótopo radioativo natural do elemento carbono. Ele é usado na datação em especial de fósseis por apresentar a meia–vida de aproximadamente 5.730 anos.

Quando um animal ou vegetal morre, inicia–se o processo de decaimento do carbono–14 em sua estrutura, estudos concluiram que nesse decaimento a radioatividade cairá para a metade após 5.730 anos, tal fato é abordado pelas ciências como *meia–vida.*

A técnica é aplicada a todo material que conteve carbono–14 em alguma de suas formas, como ossos, sedimentos orgânicos, madeiras entre outros. Porém existem limitações nessa técnica, pois um objeto com até 100 anos de idade não poderia ser datado, pois nesse período a radiação emitida terá diminuido muito pouco.

> *Além disso, objetos com mais de 40.000 anos (ou seja, aproximadamente sete 'meia–vidas'), também não podem ser datados com grande segurança, uma vez que após esse lapso de tempo, a radiação emitida terá sido reduzida a praticamente zero. Logo a técnica aplica–se com boa margem de segurança para objetos que tenham entre 100 e 40.000 anos de idade* (FARIAS, 2002)

Uma aplicação muito utilizada e importante para a ciência é a datação de fósseis. Um organismo para de absorver novos átomos de carbono quando morre e a relação de carbono 12 por carbono 14, neste momento, é a mesma que nos organismos vivos, mas o carbono 14 continua a cair e não é reposto, portanto numa amostra qualquer a meia-vida do carbono 14 é de 5.700 anos, aproximadamente, enquanto a quantidade de carbono 12 permanece constante e observando a relação entre carbono 12 e carbono 14 na amostra, se comparado à de um ser vivo, é possível determinar a idade de algo que viveu em tempos passados de forma bastante precisa.

Agora, observemos a parte que nos cabe ao trabalho realizado, a aplicação dos logaritmos na datação de um fóssil. O tempo de uma amostra de um organismo morto pode ser calculado utilizando a fórmula: $t = t_{(\frac{1}{2})}.ln\left[\frac{N_f}{N_0}\right] \times \left(\frac{1}{-0{,}693}\right)$, onde ln é o logaritmo neperiano, $\frac{N_f}{N_0}$ é a porcentagem de carbono-14 na amostra quando comparada com a quantidade em organismos vivos e $t_{(\frac{1}{2})}$ é a meia vida do carbono-14 (considerando 5.700 anos).

Vejamos um exemplo:

Um fóssil com dez por cento de carbono-14 em comparação a uma amostra viva, teria:

$t = 5700.ln(0,10) \times \left(\frac{1}{-0{,}693}\right) = 5700 \times \left[\frac{(-2{,}303)}{(-0{,}693)}\right] = 5700 \times [3,323] = 18.940$ anos de idade.

4.2.2 Relacionando os logaritmos com a Física

Física é uma disciplina que trabalha muitos conceitos matemáticos, pricipalmente no que se refere às funções e, muito embora existam mais tópicos que envolvem os logaritmos, como por exemplos escalas de terremotos, no Ensino Médio o que vemos são aplicações na área de ondulatória, em especial acústica e MHs.

A intensidade com que o ouvido humano percebe o som não é a mesma com que ele foi emitido. A produção do som pelos instrumentos musicais, as propriedades e os fenômenos associados às ondas sonoras e o estudo de osciladores em MHS aparecem no estudo de ondulatória.

Primeiramente podemos verificar que **ondas sonoras** são ondas tridimensionais mecânicas, ou seja, que necessitam de um meio para se propagar. Por causa da natureza longitudinal dessas ondas, a vibração produz zonas alternadas de compressão e de rarefação das moléculas do meio. O número de compressões originadas por segundo é a frequência **f** da onda sonora, que é igual à frequência de oscilação da fonte. A distância entre duas regiões de compressão ou de rarefação consecutivas é o comprimento de onda λ. Sendo v a velocidade de propagação da onda sonora no meio, é válida a equação fundamental da ondulatória:

$$v = \lambda f$$

Pode–se dizer que as ondas sonoras se propagam em outros meios materiais além do ar, como sólidos, líquidos e gases. A velocidade do som depende apenas do meio no qual ele se propaga. Dessa maneira, a temperatura e a pressão do meio determinam a velocidade das ondas sonoras, principalmente quando se trata de meios gasosos.

Das propriedades físicas do som, destacamos a **altura** do som, que é a qualidade que nos leva a considerá–lo grave ou agudo. A propriedade física que possibilita essa qualificação é a frequência de vibração da fonte sonora.

O tipo de som pode ser: Agudo ou Grave.

A frequência pode ser: Alta ou Baixa.

Os limites de frequência audíveis para o ouvido humano normal, situam-se entre 20 Hz, para os graves, e 20.000 Hz, para os agudos. Esses limites de audibilidade não são fixos, variando de pessoa para pessoa. Sons mais graves são denominados infrassons, e sons mais agudos são conhecidos como ultrassons. A altura do som também caracteriza as notas musicais. Uma escala musical é uma sequência crescente de frequências e a mais conhecida é a chamada natural, nela as frequências dos sons são classificadas em apenas sete notas:

Dó, frequência $261,7Hz$, Ré, frequência $293,7Hz$, Mi, frequência $329,7Hz$, Fá, frequência $349,2Hz$, Sol, frequência $392,0Hz$, Lá, frequência $440,0Hz$, Si, frequência $493,9Hz$ e Dó, frequência de $523,3Hz$.

A intensidade do som está relacionada com a energia da onda sonora. É a característica que distingue os sons fortes dos sons fracos. Um mesmo som é mais fraco ou mais forte dependendo das amplitudes das oscilações da onda sonora. Para amplitudes menores, o som é fraco e, portanto, a onda carrega menos energia. A intensidade I é definida pela razão entre a potência P da fonte emissora da onda sonora e a área A atravessada pela onda:

Assim, temos: $I = \frac{P}{A}$

No SI, a unidade da intensidade sonora é W/m^2. A menor intensidade captada por um ouvido humano normal é conhecida como limiar de audibilidade e vale $I_o = 1.10^{-12} W/m^2$. A intensidade máxima suportável, chamada limiar de dor, vale $I = 1 W/m^2$. O logaritmo (β) da razão entre duas intensidades I e I_o é conhecido como nível sonoro. Na escala mais comum, o decibel (dB), tem-se:

$\beta = 10 log \frac{I}{I_o}$

Vamos agora analisar uma questão de um dos vestibulares mais concorridos do país.

Questão(Unicamp-SP) É usual medirmos o nível de uma fonte sonora em decibéis (dB). O nível de dB é relacionado à intensidade I da fonte pela fórmula: Nível sonoro $(dB) = 10.log_{10} \frac{I}{I_o}$, em que $I_o = 10^{-12} W/m^2$ é um valor padrão de intensidade muito próximo do limite da audibilidade humana. Os níveis sonoros necessários para uma pessoa ouvir variam de indivíduo para indivíduo. O nível sonoro acima do qual um ser humano começa a sentir dor é aproximadamente 120 dB, independentemente da frequência.

a) Qual a intensidade I mínima de um som (em W/m^2) que causa dor em um ser humano?

Resolução De acordo com o enunciado, $N = 10.log_{10} \frac{I}{I_o}$. Então: $120 = 10.log \frac{l}{10^{-12}}$, portanto $I = 1 W/m^2$.

b) Um beija–flor bate as asas 100 vezes por segundo, emitindo um ruído que atinge o ouvinte com um nível de 10 dB. Quanto a intensidade I desse ruído precisa ser amplificada para ser audível por um indivíduo que, na frequência de 100 Hz, tem intensidade mínima (I_{min}) de 30 dB?

Resolução Tendo como base a relação $\beta = 10.log\frac{I}{I_o}$, calcula–se a intensidade do som (I) emitido pelo bater das asas do beija-flor: $10 = 10.log\frac{I}{10^{-12}}$, portanto $I = 10^{-11}W/m^2$. No entanto, dado que a frequência do som é de $100Hz$, a intensidade mínima (I_{min}) do som que este indivíduo deveria receber para conseguir detectá–lo é: $30 = 10.log\frac{I_{min}}{10^{-12}}$, portanto $I_{min} = 10^{-9}W/m^2$. Logo: $\frac{I_{min}}{I} = \frac{10^{-9}}{10^{-11}}$, portanto $I_{min} = 100I$. Ou seja, a intensidade I deve ser amplificada 100 vezes.

É possível verificar, sobretudo que, o que o aluno necessita saber acerca dos logaritmos para resolver situações problemas envolvendo níveis sonoros são apenas conceitos básicos, contuto vale ressaltar mais uma vez o quão sisnificativa se torna a aprendizagem quando ela se dá de forma contextualizada, quando o educando percebe a aplicabilidade do conteúdo que se está trabalhando.

4.2.3 Relacionando os logaritmos com a Biologia

Embora, por vezes, verificar–se–ão questões envolvendo a área de biologia em vestibulares, os conceitos de logaritmos são deveras mais observados no Ensino Superior, mas ainda assim, esse tipo de questão que envolve a interdisciplinaridade, aflora no educando motivações para um empenho ainda maior na aprendizagem de logaritmos. Observando a questão:

De acordo com a Sociedade Brasileira de Medicina Nuclear, a maioria dos exames de cintilografia da tireóide é realizado com o tecnécio-99m, em substituição ao iodo-131, pois o primeiro possui uma meia vida menor e gera uma imagem com maior qualidade. Considere que uma massa inicial m_0 de tecnécio-99m se desintegra de acordo com a função $m(t) = m_0.2^{-\frac{t}{6}}$, com t medido em horas. Dado que $log_{10}(2) = 0,3$, o tempo, em horas, necessário para que a massa restante seja de um por cento da massa inicial é:

a 10

b 20

c 30

d 40

e 50

É possível ratificar a idéia de que o trabalho inter e transdisciplinar agrega em muito no desenvolvimento cognitivo dos educandos.

4.3 Logaritmos bem definidos

Após compreender o significado dos logaritmos, incluindo suas aplicações nas diversas ciências e o seu contexto histórico, deve–se recorrer ao rigor matemático para deixá–los bem definidos.

Tomando como base o conhecimento das funções exponenciais e, se para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f : R \to R^+, f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre R e R^+, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade que transforma soma em produto $f(x+y) = f(x).f(y)$

É apresentado ao aluno então que a função f possui inversa e sendo ela de base a é justamente a função logaritmica $log_a : R^+ \rightarrow R$, que relaciona a cada real positivo o número real $log_a x$, chamado **logaritmo de x na base a**

A retomada sobre conceitos de funções inversas deve ser feita neste momento, inclusive demonstrando graficamente.

Então, por definição de função inversa, demonstra–se que

$a^{log_a x} = x$ e $log_a(a^x) = x$

Concluindo portanto que $log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base **a** para obter o número **x**,

$y = log_a x \leftrightarrow a^y = x$

Tem–se imediatamente da relação $x^u.x^v = x^{u+v}$ que

$log_a(xy) = log_a x + log_a y$ para quaisquer x e y positivos.

Vale ressaltar que esta propriedade foi a motivação original, conforme mencionado anteriormente, da criação dos logaritmos.

Pela definição já apresentada, log_a:$R^+ \rightarrow R$, correspondência biunívoca e sobrejetiva, observa-se que a função logaritmica é limitada:

Observa–se que para $a > 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = +\infty \tag{4.1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} log_a x = -\infty \tag{4.2}$$

Neste momento deve–se dar a idéia intuitiva de limite aos alunos, haja visto já terem conhecimento intuitivo de funções, contudo, no próximo capítulo, há uma abordagem mais detalhada sobre o ensino de limites à alunos do Ensino Médio

Destaca–se aqui a importância da demonstração da propriedade de transformar produtos em somas pelo teorema que segue:

Teorema 4.3.1 *Caracterização das funções logarítmicas. Seja* $f : R^+ \to R$ *uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que* $f(xy) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in R^+$. *Então existe* $a > 0$ *tal que* $f(x) = log_a x$ *para todo* $x \in R^+$

Demonstração 4.3.1

Para fixar as idéias, admitamos f crescente. O outro caso é tratado igualmente. Temos $f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1)$, *logo* $f(1) = 0$. *Provemos o teorema inicialmente supondo que exista* $a \in R$ *tal que* $f(a) = 1$. *Depois mostraremos que isto sempre acontece, logo não é uma hipótese adicional. Como f é crescente e* $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, *tem-se* $a > 1$. *Para todo* $m \in N$ *vale*

$$f(a^m) = f(a.a...a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = 1 + 1 + \cdots + 1 = m, \tag{4.3}$$

$$0 = f(1) = f(a^m.a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}), \tag{4.4}$$

logo $f(a^{-m}) = -m$. *Se* $r = m/n$ *com* $m \in Z$ *e* $n \in N$ *então* $rn = m$, *portanto* $m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = nf(a^r)$ *e daí* $f(a^r) = m/n = r$. *Se* $x \in R$ *é irracional então, para r,s racionais tem-se:*

$$r < x < s \rightarrow a^r < a^x < a^s \rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \rightarrow r < f(a^x) < s. \qquad (4.5)$$

Assim todo número racional r, menor do que x, é também menor do que $f(a^x)$ e todo número racional s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$. Segue-se que $f(a^x) = x$ para todo $x \in R$. Portanto $f(y) = log_a y$ para todo $y > 0$.

Consideremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g : R^+ \rightarrow R$, tal que

$$g(xy) = g(x) + g(y), \qquad (4.6)$$

sem mais nenhuma hipótese. Então $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f : R^+ \rightarrow R$, definida por $f(x) = g(x)/b$, é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$, vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = (2^{1/b})^{g(x)} = a^{g(x)}, \qquad (4.7)$$

com $a = 2^{1/b}$.

Tomando log_a de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ vem, finalmente: $g(x) = log_a x$.

4.4 Cálculo Diferencial

Ensinar cálculo a alunos do Ensino Médio ainda é um tabu dentre as escolas brasileiras. Muito por causa das diretrizes do MEC (Ministério da Educação e Cultura do Brasil) por causa de seus PCN's (Parâmetros Curriculares Nacional) que não contempla tal abordagem na educação básica, mas também pela falta de preparo dos educadores da atualidade que pouco se esforçam para melhorar suas técnicas com novas práticas de ensino. Deve–se salientar que este conteúdo era contemplado no início do século passado no Brasil.

Pode–se perceber que alguns livros didáticos do Ensino Médio contemplam tópicos de cálculo, como estudo de limite de funções e aplicação de algumas derivadas, embora sem a ênfase significativa de seu estudo, tampouco contextualizada.

O estudo de cálculo no Ensino Médio, além de desenvolver conceitos de aritmética, álgebra, geometria, trigonometria e geometria analítica de forma interligada com os alunos, e não da forma fragmentada como são abordados nas escolas, prepararia melhor estes educandos para estudos no Ensino Superior, onde há grande número de alunos retidos nesta disciplina, justamente pela falta de base e preparo dos alunos ingressantes.

É importante ressaltar contudo, que com a grande veiculação pelas midias audio–visuais sobre o sucesso obtidos por escolas com os resultados do ENEM (Exame Nacional do Ensnino Médio), onde técnicas de cálculos não são tão necessárias, fica ainda mais difícil convencer coordenadores e diretores que o ensino de Cálculo no Ensino Médio é de grande necessidade para os educandos.

Acerca dos conhecimentos prévios dos alunos, é fato que o ensino de cálculo requer a aprendizagem consolidada de alguns conteúdos que seriam primordiais, no entanto alunos das segundas e terceiras séries, em grande parte, conseguem compreender e acompanhar bem as aulas por já terem institucionalizado tais conteúdos.

4.4.1 Explicando cálculo para um grupo de alunos do Ensino Médio

Muitos alunos do Ensino Médio gostariam de ir além dos estudos ofertados em matemática na Educação Básica, já que de fato gostam de estudar esta disciplina, outros educandos, muito embora não sejam tão interessados pela matemática, apresentam muita facilidade em compreender temas mais complexos.

Justamente pensando no perfil destes alunos, foi desenvolvido um trabalho, que teve o apoio da coordenação de um colégio particular na cidade de São Bernardo do Campo, estado de São Paulo, onde um grupo de 30 estudantes ficavam na escola no contra turno (o horário das aulas da grade curricular comum é das 7h às 13h, o contra turno é o horário após às 14h) duas vezes por semana, durante dois meses, um período de três aulas (cada aula com duração de cinquenta minutos) por dia.

Neste curso que teve um total de cinquenta e quatro aulas, foi desenvolvido tópicos de Cálculo Diferencial e Integral. O material utilizado, foi o livro base usado nas aulas do curso de Cálculo do Profmat (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), contudo a abordagem foi deveras simplificada para atender adequadamente o público em questão.

O objetivo deste curso foi corroborar com a idéia de que é possível ensinar fundamentos do cálculo à alunos do Ensino Médio, mesmo com as recomendações atuais dos PCNs (parâmetros curriculares nacionais), que definem e direcionam os conteúdos básicos a serem abordados pelas escolas nacionais, mas vale ressaltar que podemos e devemos ir além para que nossos estudantes possam ter acesso ao máximo às informações e aprendizagens de seus educadores.

Inicialmente foi apresentada a proposta aos alunos das segundas e terceiras séries (foi considerado que alunos das primeiras séries ainda não tinham estudados conceitos fundamentais de funções e por isso teriam mais dificuldades em assimilar o tema), houve grande interesse por parte dos alunos. Em um grupo de 210 alunos, 35 por turma, 3 de terceira série e 3 de segunda série, por volta de 60 alunos se interessaram, entretanto houve uma aula de apresentação, onde foi discutido o que se estudaria e quais conhecimentos prévios deveriam ter os alunos para que pudessem acompanhar sem maiores prejuizos.

A principio, pelo grau de dificuldade do conteúdo estudado, esperava–se que o número de aluno fosse diminuindo ao longo do curso, contudo, desde as primeiras abordagens sobre gráficos e limites, era notório a participação e envolvimento dos alunos com o curso.

Ao estudar algumas regras de derivadas, os alunos construiram gráficos de funções apontando concavidades, pontos de inflexão e raizes usando tais regras. Por fim, chegou–se ao estudo de integrais, onde aprenderam algumas técnicas de integração.

4.5 Compreender logaritmos a partir do Cálculo Diferencial e Integral

Todos os alunos já haviam estudado logaritmos, tanto os das terceiras séries como os das segundas séries, alguns deles também já haviam estudado logaritmos nas disciplinas de Física e de Química (como já apresentado anteriormente no capítulo 10) porém ainda não conseguiam relacionar o estudo de cálculo com os de logaritmos.

Sabendo das propriedades aplicadas à potências de expoente racional e que $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[p]{a^q}$, extrapola–se o estudo para a definição de potências com expoente real, ou seja, define–se a existência de um determinado x real tal que $f(x) = a^x$, para todo $f(x)$ positivo, com a também positivo e diferente de 1.

Logo após perceber que os alunos compreenderam a idéia de limite de funções, uma nova etapa do programa foi desenvolvido, a apresentação dos logaritmos à partir do cálculo.

Teorema 4.5.1 *Sejam $a > 0$, $a \neq 1$ e $\beta > 0$ dois reais quaisquer, Então existe um γ tal que $a^\gamma = \beta$.*

Demonstração 4.5.1 *Suponhamos, primeiro, $a > 1$. Como $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ segue que existem **u** e **v**, com $u < v$, tais que $a^u < \beta < a^v$. Como $f(x) = a^x$ é contínua no intervalo fechado [u,v], segue do teorema do valor intermediário que existe γ em [u,v] tal que $f(\gamma) = \beta$ ou $a^\gamma = \beta$.*

A unicidade de γ segue do fato de f ser estritamente crescente.

Foi então pedido aos alunos nesse momento que fizessem a demonstração segunda, para o caso $0 < a < 1$, como sugerido no livro, e concluiu–se então que

> Para a e $\beta \in R$, se $a > 0$, $a \neq 1$ e $\beta > 0$, o único real γ tal que $a^\gamma = \beta$ é denominado logaritmo de β na base a, indicado por $\gamma = log_a \beta$, se $a^\gamma = \beta \leftrightarrow \gamma = log_a \beta$, o logaritmo de β na base a é o expoente que se deve atribuir à base a para reproduzir β, assim $a^{log_a \beta} = \beta$. (GUIDORIZZI, 2014). (ver demais propriedades em anexo D)

Contudo cabe aqui uma importante informação que pouco é considerada nos livros didáticos e materiais apostilados do Ensino Médio, mas que além de extremamente importante, é necessária para a realização de testes vestibulares é o fato de que logaritmo na base **e** (número de Euler que vale, aproximadamente, 2,718) é indicado por ln, assim $ln = log_e$

4.5.1 O limite da função: $f(x) = (1 + \frac{1}{n})^n$

No estudo de sequências, logo na apresentação do estudo de cálculo aos alunos, foi provado, para n naturais, que $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ converge para **e**. Extrapolando agora para os **x** reais, provemos que

Teorema 4.5.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$

Demonstração 4.5.2 *Sejam $n > 0$ um natural qualquer e $x > 0$ um real qualquer. $n \le x < n+1 \to \frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \to 1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}$, então $n \le x < n+1 \to (1+\frac{1}{n})^{n+1} > (1+\frac{1}{x})^x > (1+\frac{1}{n+1})^n$, assim $n \le x < n+1 \to (1+\frac{1}{n})^n.\frac{n+1}{n} > (1+\frac{1}{x})^x > (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}.\frac{n+1}{n+2}$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n.\dfrac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1}.\dfrac{n+1}{n+2} = e$, segue que $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$*

Ademais à prova do teorema anterior, sugere–se a explicação aos alunos de um exercício de limite usando logaritmos, como o exemplo que segue:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} log_a x$

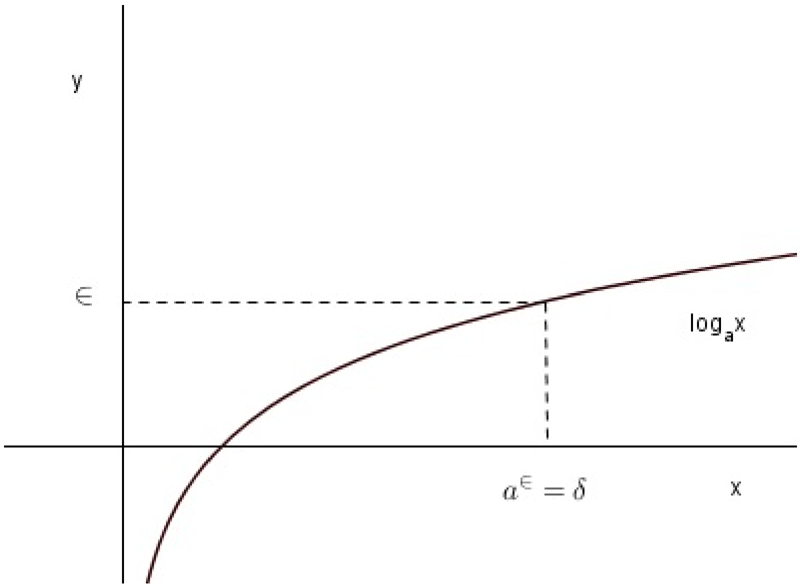
x	a	a^2	a^3	...	$\to +\infty$
$log_a x$	1	2	3	...	$\to +\infty$

Se o limite existe deverá ser igual a $+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} log_a x = +\infty$, justificação (por ϵ e δ)

Dado $\epsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que $x > \delta \to log_a x > \epsilon$

Tomando–se $\delta = a^\epsilon$



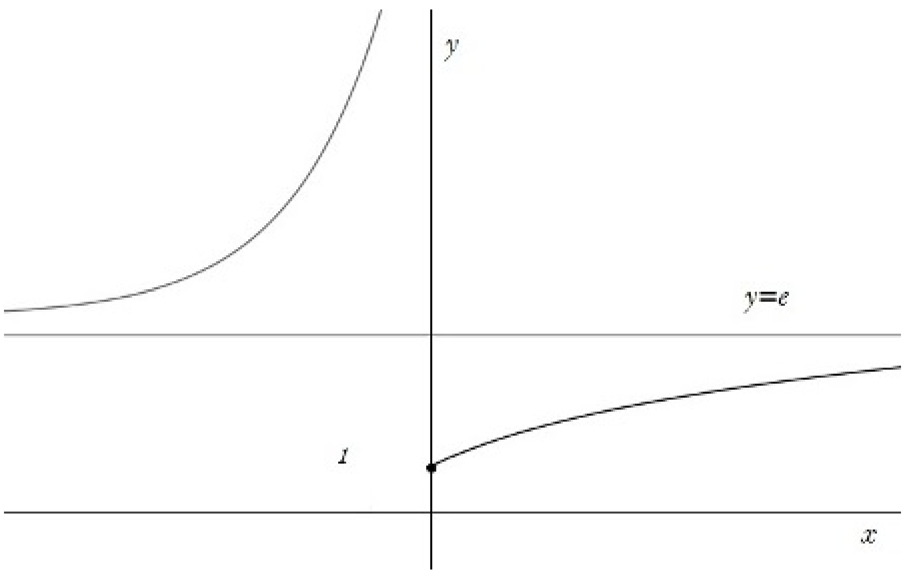
$x > \delta \rightarrow x > a^{\delta} \rightarrow log_a x > \delta$

portanto $\lim_{n \to +\infty} log_a x = +\infty$ $(a > 1)$

(GUIDORIZZI, 2014).

Contudo, verifica–se que ao educando, ainda não faz muito sentido trabalhar com logaritmos em base e. Vale então ressaltar o porquê do uso mais efetivo no Ensino Superior de logaritmos naturais se comparado com os logaritmos das demais bases, mesmo a comumente mais utilizada, base decimal.

Vejamos o gráfico:



Observe que $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$. A reta $y = e$ é assíntota vertical de f no positivo e no negativo.

Vamos considerar agora, as derivadas das funções logarítmicas, considerando que $f(x) = lnx$ é diferenciável para $x > 0$. Para calcular o limite resultante, utiliza–se o fato de que lnx é contínua em $x > 0$.

> Para $\lim\limits_{x\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}} = e$, basta verificar que $v = \frac{1}{x}$ e usar o fato que $v \to 0^+$ quando $x \to +\infty$ e $v \to 0^-$ quando $x \to -\infty$, o que produz dois limites laterais.
> $\frac{d}{dx}[lnx] = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{ln(x+h)-ln(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}ln(\dfrac{x+h}{x})$(aplicando quociente de logaritmos) $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}ln(1+\dfrac{h}{x}) = \lim\limits_{v\to 0}\dfrac{1}{vx}ln(1+v)$ se $v = \frac{h}{x}$, e se $v \to 0$ quando $h \to 0 = \frac{1}{x}\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{1}{v}ln(1+v) = \dfrac{1}{x}\lim\limits_{v\to 0}ln(1+v)^{\frac{1}{v}}$ (por potência de logaritmos) $= \frac{1}{x}ln[\lim\limits_{v\to 0}ln(1+v)^{\frac{1}{v}}] = \dfrac{1}{x}lne = \dfrac{1}{x}$ E por demonstrações em derivadas, sabe–se que $\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x}, x > 0$, portanto $\frac{d}{dx}[log_b x] = \frac{d}{dx}[\frac{lnx}{lnb}] = \frac{1}{lnb}.\frac{d}{dx}ln[x]$ então $\frac{d}{dx}[log_e x] = \frac{1}{xlnb}, x > 0$ observe que, dentre todas as possíveis bases, a base $b = e$ é a que produz a fórmula mais simples para a derivada de $log_b x$, uma das razões pelas quais o logaritmo natural é preferido aos outros em cálculo. (ANTON, 2007)

4.5.2 Integral - Estudo da área sob a curva do gráfico da função

É possível finalizar o curso de *Introdução ao estudo de Cálculo* , apresentando as funções logarítmicas no contexto da integral. Assim, aborda–se o fato de que lnx pode ser definida como uma certa integral. Neste momento, é possível apresentar a função $ln : (0, +\infty) \to R$ como a primitiva da função $f : (0, +\infty) \to R$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, tal que $ln1 = 0$, utilizando conceitos de integral, já estudados. Tem–se então que:

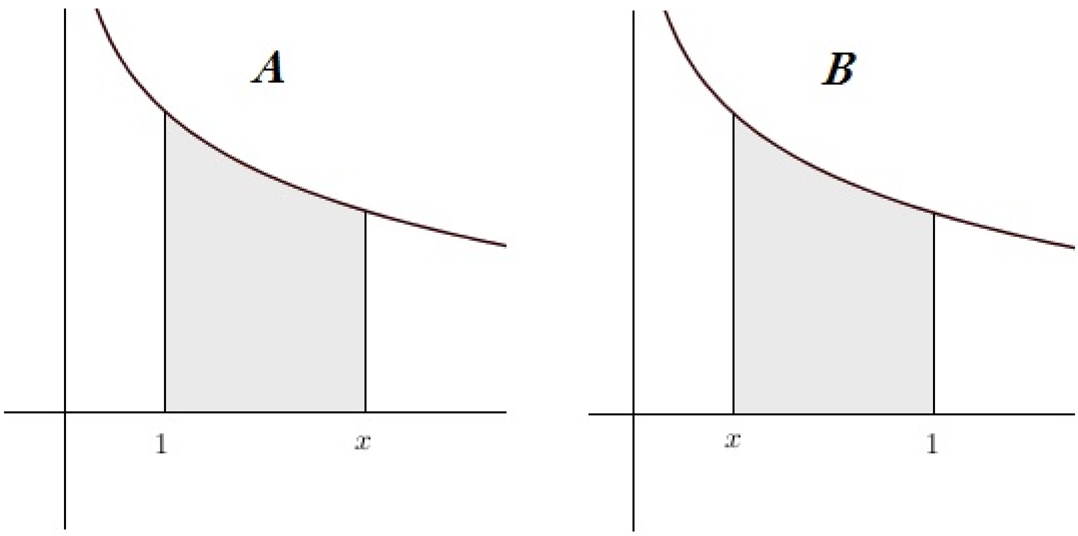
$$lnx = \int_1^x \left(\frac{1}{t}\right) dt$$

e

$$lnx\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}$$

Aos alunos foi apresentado o que ocorre geometricamente na função lnx.

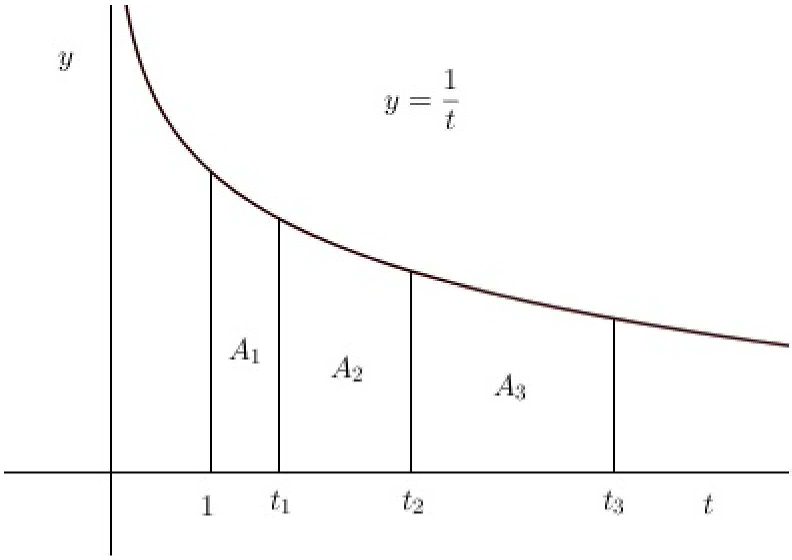
No intervalo $(0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ é estritamente positiva, assim lnx é positivo, se $x > 1$ e é negativo, se $0 < x < 1$.



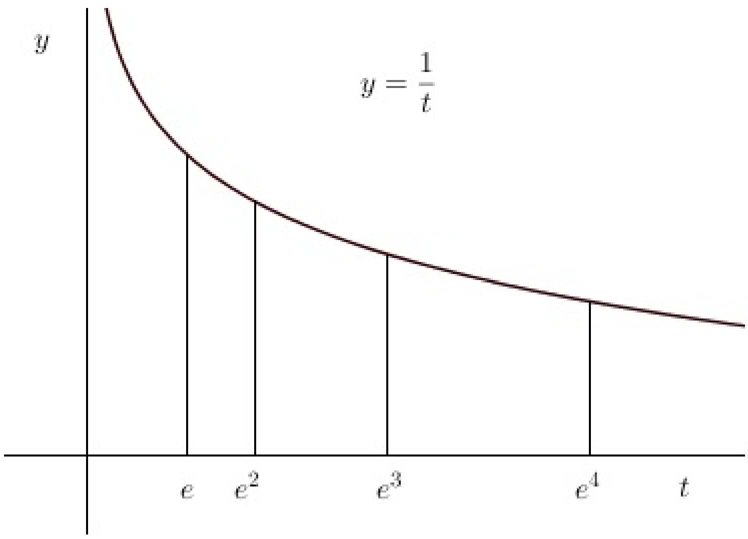
Se $x > 1$, $lnx = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ será a área considerada da figura A, mas se $0 < x < 1$, $lnx = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ será o negativo da área considerada da figura B.

No estudo e pesquisas sobre a curva de $y = \frac{1}{t}$ e sobre a área da região sob essa curva, no século XVII, pode–se concluir a relação entre os logaritmos naturais e as integrais.

Considerando intervalos **t** distintos, tais que as áreas $A_1, A_2, ..., A_n$ sejam iguais, tem–se no gráfico



e se $t_1 = e$, $t_2 = e^2$, $t_3 = e^3$,..., $t_n = e^n$, pode–se verificar que



$$\int_1^{e^n} \frac{1}{t} dt = n$$

assim

$$\int_1^{e^n} \frac{1}{t} dt = ln(e^n)$$

já que $ln(e^n) = n$, se $e^n = x$, tem–se ainda que

$$\int_1^{x} \frac{1}{t} dt = lnx$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo lnx é diferenciável e

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{d}{dx}[\int_1^{x} \frac{1}{t} dt] = \frac{1}{x}, (x > 0)$$

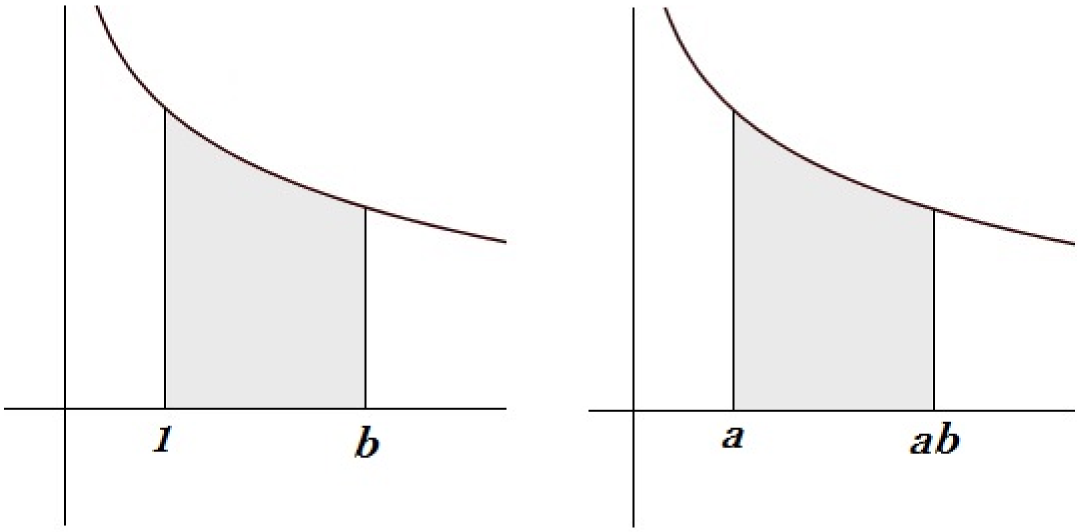
Mas vale lembrar, até pela definição de logaritmos que a propriedade que a caracteriza é que *sejam* **a** *e* **b** *números reais positivos, então* $\mathbf{ln(ab) = lna + lnb}$

Vejamos o lema a seguir:

Lema 4.5.1 *Se* **a** *e* **b** *são números positivos, então*

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x}dx = \int_1^b \frac{1}{x}dx$$

Observe a representação geométrica dessa afirmação, nas figuras à seguir, no caso em que $a > 1$ e $b > 1$.



O lema afirma que as áreas dessas duas regiões são iguais. Essencialmente, a expansão provocada na base, pela multiplicação de [1, b] por a, é compensada por uma compressão na altura da figura, devido à forma da curva $y = \frac{1}{x}$. Veja a demonstração.

Demonstração 4.5.3 *Usaremos partições adequadas para calcular os limites*

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x}dx$$

e

$$\int_1^a \frac{1}{x}dx$$

e verificaremos que são iguais.

Realmente dada uma partição ω *de [1,b], digamos* $1 = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$*, e feitas as escolhas do* $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$*,* $i = 1, 2, ..., n$*, tomamos a partição* $a\omega$ *de [a,ab], dada por* $a = y_0 = ax_0 < y_1 = ax_1 < ... < y_n = ax_n = ab$*, com as escolhas de* $d_i = ac_i \in [y_{i-1}, y_i]$*,* $i = 1, 2, ..., n$*. Assim,*

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{\|\omega\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

e

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x}dx = \lim_{\|a\omega\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta y_i$$

Mas

$$f(d_i) = \frac{1}{d_i} = \frac{1}{ac_i} = \frac{1}{a}f(c_i)$$

e

$$\Delta y_1 = y_i - y_{i-1} = ax_i - ax_{i-1} = a\Delta x$$

Portanto

$$\lim_{\|a\omega\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta y_i = \lim_{\|a\omega\| \to 0} \frac{1}{a}f(c_i)a\Delta x_i = \lim_{\|a\omega\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Como $\|a\omega\| \to 0$ *se, e somente se,* $\|\omega\| \to 0$*, temos*

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x}dx = \int_1^a \frac{1}{x}dx$$

Vamos então demonstrar que: $lnab = lna + lnb$ *realmente,*

$$lnab = \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_1^b \frac{1}{t}dt = lna + lnb$$

(BOULOS, 2006)

Foi pedido então aos alunos que fizessem a demonstração para a seguinte situação: se **a** e **b** são números positivos, então $ln\frac{a}{b} = lna - lnb$.

Após tentativas e muitos acertos, foi apresentada a seguinte solução baseada na propriedade aqui já demonstrada, que $lnab = lna + lnb$. Basta mostrar que $lna = ln(\frac{a}{b}.b) = ln(\frac{a}{b}) + lnb$ e portanto $ln(\frac{a}{b}) = lna - lnb$

Agora utilizando ferramentas do cálculo, especialmente no que se refere às derivadas, pode–se provar que, se $a > 0$ e $r \in Q$, então $lna^r = rlna$.

Propriedade 4.5.1 *Sejam $a > 0$ e $r \in Q$. Então, $lna^r = r.lna$*

Demonstração 4.5.4 *Considerando as funções f, g: $(0, +\infty) \to R$ definidas por $f(x) = lnx^r$ e $g(x) = r.lnx$. Usando as regras de derivação, especialmente a Regra da Cadeia, temos:*

$$f'(x) = \frac{1}{x^r}r.x^{r-1} = r.\frac{1}{x}$$

e

$$g'(x) = r.\frac{1}{x}$$

Logo, para todo $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = g'(x)$. Isto é, existe $C \in R$ tal que $f(x) = g(x) + c$. Como $f(1) = g(1) = 0$, concluimos que as duas funções coincidem.

(BOULOS, 2006)

Neste momento pode–se perceber a excitação dos alunos, que puderam enfim associar prorpiedades operatórias dos logaritmos com regras de derivadas.

Este grupo de alunos teve ainda maior interesse pelo aprendizado de logaritmos, pois estavam frequentemente associando este tema a outros dentro da própria matemática e de outras disciplinas e, aproveitando o grande interesse por eles demonstrado, foi dado sequência aos estudos, analisando o gráfico de $f(x) = ln(x)$, é conveniente resgatar o fato de que a construção de gráficos logaritmos em outras bases já tinham sido desenvolvidos pelos educandos.

Analisando inicialmente o domínio da função $f(0,+\infty) \to R$, sabe–se que se $a > b > 0$, $lna > lnb$, que pode ser obtida da derivada, bem como já trabalhado com os alunos em gráficos de outras funções, a resultante da segunda derivada definirá a concavidade:

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

e

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

, com $x \in (0,+\infty)$

Agora observa-se o comportamento da função, quando x tende a zero e quando x tende a infinito positivo (domínio da função)

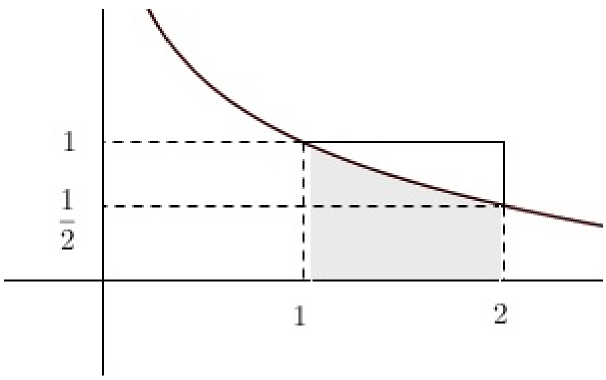
Lema 4.5.2

$$\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$$

Demonstração 4.5.5 *O fato que nos dará essas informações,* $\frac{1}{2} < ln2 < 1$ *é geometricamente evidente:*



Analiticamente, observe que, se $1 < x < 2$, *então* $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$. *Portanto*

$$\frac{1}{2} = \int_1^2 \frac{1}{2}dx < \int_1^2 \frac{1}{x}dx < \int_1^2 dx = 1$$

Vamos mostrar que $\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$. *Dado* $N > 0$, *escolha* $n_0 > 2^{2N}$.
Então, se $x > n_0$,

$$lnx > ln2^{2N} = 2N$$

$$ln2 > 2N\frac{1}{2} = N$$

(BOULOS, 2006)

Os alunos calcularam o limite quando x tende a zero pela direita e concluiram a afirmação $\lim_{x\to0^+} ln(x) = -\infty$ e enfim esboçaram o gráfico da função. Por fim puderam também concluir a importância de ensinar logaritmo natural no Ensino Médio, o que, como já abordado aqui, não é feito pela maioria dos colégios no pais.

4.6 Vamos provar que $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln(2)$ de duas formas

4.6.1 Utilizando derivada

Vamos primeiramente calcular o valor da derivada de $ln(x)$ e mostrar que esta é igual a $\frac{1}{x}$. Da definição de derivada:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \lim_{h\to0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \lim_{h\to0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \lim_{h\to0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Utilizando a substituição $k = dx^{-1}$, temos:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \lim_{k\to0}\ln(1+k)^{\frac{1}{kx}} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\lim_{k\to0}\left((1+k)^{\frac{1}{k}}\right)\right)$$

Fazendo $\ell = \frac{1}{k}$:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\lim_{\ell\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\ell}\right)^{\ell}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}\ln(e) \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

Daí,

$$\int\limits_1^2 \left(\frac{d}{dx}\ln(x)\right) dx = \int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx \Rightarrow$$

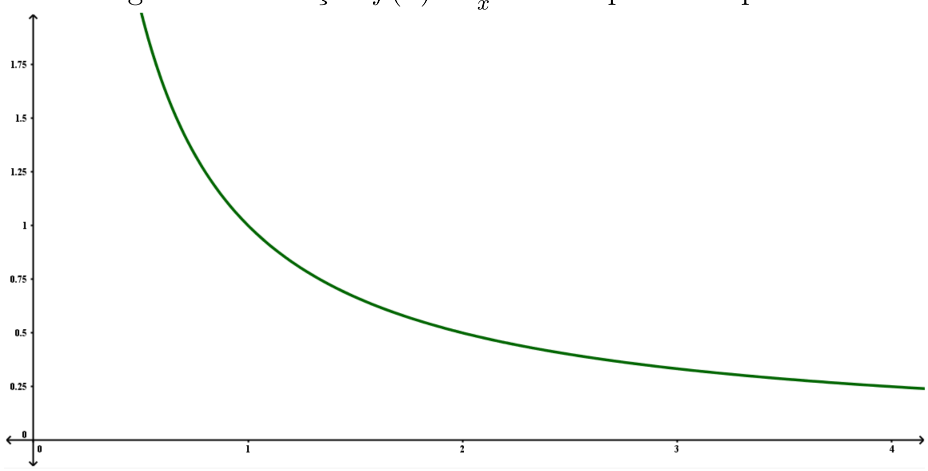
$$\ln(x)\Big|_1^2 = \int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx \Rightarrow$$

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln(2) - \ln(1) \Rightarrow$$

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln(2)$$

4.6.2 Utilizando aproximações por áreas de retângulos

Considere o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em seu primeiro quadrante:

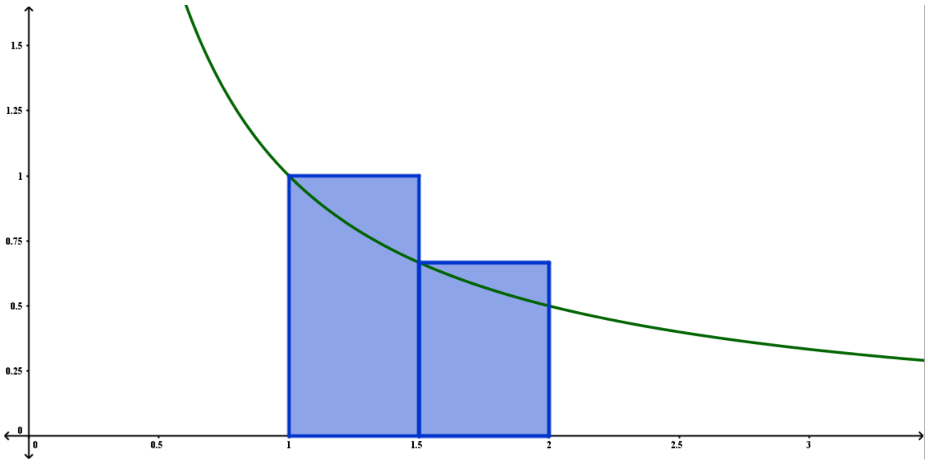


Calcular $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx$ equivale a determinar a área $\mathcal{A}$ compreendida entre o gráfico de f e o eixo Ox no intervalo $[1, 2]$, como mostrado:

Vamos primeiramente dividir essa área em dois retângulos, com bases de medidas iguais, e determinar a área total da figura pela soma das áreas dos retângulos. Denotaremos como $\underline{S}$ a soma inferior das áreas dos retângulos, em que obteremos uma aproximação que será menor que a área real da figura, e $\overline{S}$ a soma superior dos retângulos, em que teremos uma aproximação maior do que a área real.

Decomposição em 2 retângulos para calcular $\underline{S}$

Decomposição em 2 retângulos para calcular $\overline{S}$



Dessa forma, temos: $\underline{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{S} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{S} = \frac{7}{12}$

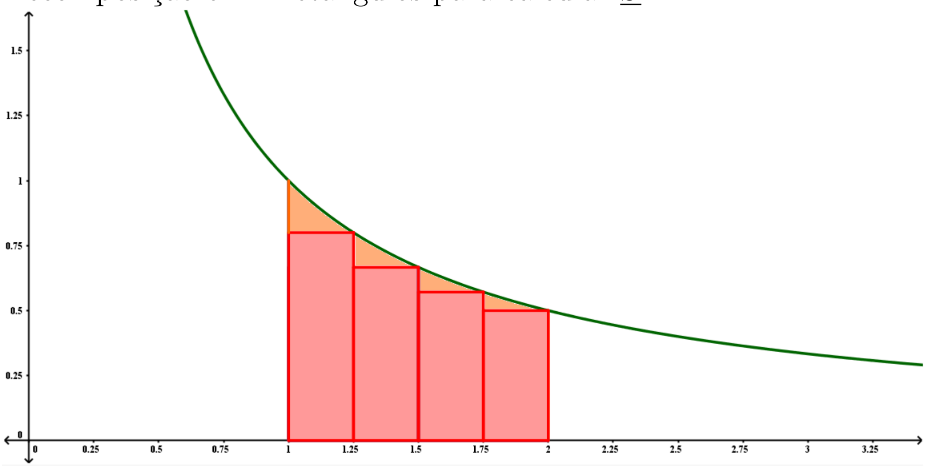
E de forma análoga: $\overline{S} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1{,}5} \Rightarrow \overline{S} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow \overline{S} = \frac{7}{6}$

Assim, conclui–se que:

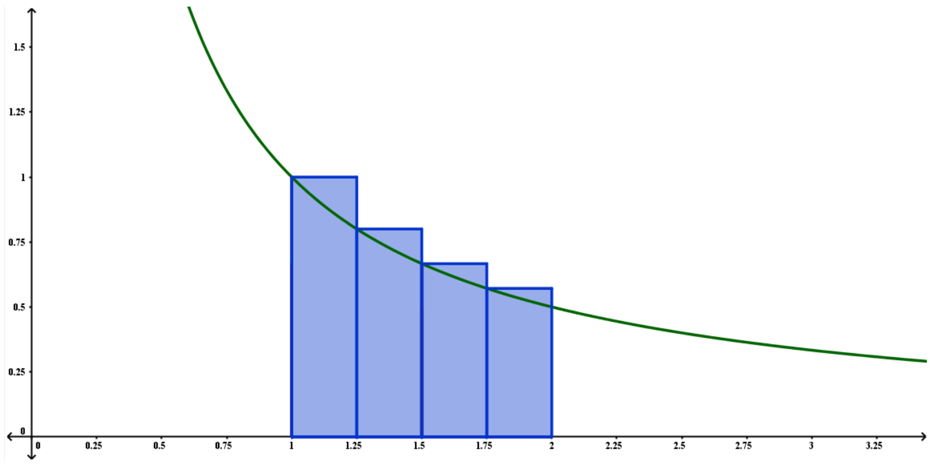
$$\underline{S} < \mathcal{A} < \overline{S} \Rightarrow \frac{7}{12} < \mathcal{A} < \frac{7}{6} \tag{4.8}$$

Vamos agora realizar um procedimento análogo, mas dividindo a área em 4 retângulos de mesma base.

Decomposição em 4 retângulos para calcular $\underline{S}$



Decomposição em 4 retângulos para calcular $\overline{S}$



Então:

$\underline{S} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1{,}25} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1{,}75} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{S} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \Rightarrow \underline{S} = \frac{533}{840}$

E de forma análoga:

$\overline{S} = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1{,}25} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1{,}75} \Rightarrow \overline{S} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \Rightarrow \overline{S} = \frac{319}{420}$

Dessa forma, conclui–se que:

$$\underline{S} < \mathcal{A} < \overline{S} \Rightarrow \frac{533}{840} < \mathcal{A} < \frac{319}{420} \tag{4.9}$$

Vê-se que 4.9 é uma melhor aproximação do que 4.8. Se continuarmos realizando o mesmo procedimento, obteremos uma estimativa cada vez melhor. Baseado nos exemplos, é de se esperar que, para uma divisão em 2^n retângulos:

$$\underline{S} = \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i}$$

$$\overline{S} = \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} = \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{i}$$

Que podem ser provadas por indução.

Se a área sob o gráfico de $f(x)$ converge, então devemos ter $\lim_{n\to\infty} \overline{S} - \underline{S} = 0$. Com efeito:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S} - \underline{S} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S} - \underline{S} = \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} - \left(\frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S} - \underline{S} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S} - \underline{S} = 0$$

Podemos então dizer que a área pedida é:

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \Rightarrow$$

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} \Rightarrow$$
$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Sabemos pela Série de Mercator[1] que $\forall x \in \,]-1, 1]$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \tag{4.10}$$

Utilizando o caso específico de 4.10 para $x = 1$, vem:

$$\mathcal{A} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell} \Rightarrow$$

$$\mathcal{A} = \ln(2)$$

Daí, concluímos que a área é $\mathcal{A} = \ln(2)$, e como $\mathcal{A} = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$, segue que $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2)$.

Uma aproximação para o valor de $ln(2)$ foi trabalhado com os alunos no capítulo 2, que é $0,697$.

[1]Equivalente à Série de Taylor para o logaritmo neperiano.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após realizar este trabalho, pude concluir que, ao tratar dos fatos históricos de um conteúdo, o professor passa a ter um controle maior da matéria. Ele tem a possibilidade de dinamizar a aula, fazendo com que o aluno participe, questione e contribua com o desenvolvimento do assunto trabalhado.

Passar um conteúdo qualquer para um aluno sem inseri–lo em algum contexto, deixa a aula com um 'vazio', sem consistência. No caso dos logaritmos, normalmente, uma matéria tão temida pelos alunos e professores, fica evidente a simplicidade de seu cálculo e uso.

A aprendizagem só se consolida se formos eficientes no processo de ensino, alterando a metodologia sempre que necessário e, a História da Matemática é um dos pilares de sustentação desse processo.

Quando os alunos participam, pesquisando e levantando hipóteses sobre o assunto, eles passam a ter vontade de estudar o conteúdo.

Com este trabalho em mãos, os professores, certamente, terão uma nova visão do ensino de logaritmos, pois como citado pelos próprios alunos, a apresentação do tema já começa equivocada, levando–os à falta de interesse em aprender tal conteúdo.

Os alunos, após obter a real compreensão do significado dos logaritmos, se dedicarão em aplicá–los em problemas práticos, passando este a ser um dos temas que despertará o prazer de se estudar matemática.

Apêndice A

Atividade sobre Logaritmos.

Lista de exercícios passados para os alunos da primeira série do Ensino Médio de um determinado colégio. (com respostas).

Atividade sobre Logaritmos

1) Encontre o valor de B aplicando a definição de logaritmos

$B = log10^{-3} + log_2 1024.$

R: $log10^{-3} = -3$ e $log_2 1024 = 10$, pois $2^{10} = 1024$. Então, $B = -3 + 10 = 7$

2) Determine o valor de $log_2(log_3 81)$.

R:$log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$. e $log_2 4 = 2$, pois $2^2 = 4$. Então a resposta é 2.

3) (FESP) Calcule o logaritmo de 32 na base $\sqrt[5]{0,5}$.

R: $log_{\sqrt[5]{0,5}}32$=x, então$(\sqrt[5]{0,5})^x$=32, $\sqrt[5]{(\frac{1}{2})^x}$= 2^5, $\sqrt[5]{2^{-x}}$ = 2^5,$2^{\frac{-x}{5}}$ = 2^5, então: $x = -25$.

4) Digitando o número 85 numa calculadora e depois a tecla *log*, aparece, no visor, 1,9294189. Como se relacionam e o que significa esse número, quando consideramos

uma potência de base 10?

R: $10^{1,9294189} \simeq 85$; Esse valor é o logaritmo de 85 na base 10.

5) Calcule $log_{16}32$:

R: $16^x = 32$, então: $(2^4)^x = 2^5$, assim: 4x = 5 e, portanto, $x = \frac{5}{4}$.

6) Calcule $log_2 0,000064$:

R: $2^x = 64^{-6}$, ento: $2^x = (2^6)^{-6}$, assim: $2^x = 2^{-36}$. Resultado x = -36.

7) Calcule $log_2 256$: R: $2^x = 2^8$.

Resultado: x = 8.

8) (PUC-RS) Se $log2 = x$ e $log3 = y$, então calcule o valor de $log375$.

R: $375 = 3.5^3$, então $log375 = log3.5^3 = log3+3.log5 = log3+3.(log10-log2) = y + 3 - 3x$.

9) Determine o valor de x sabendo que: $x = log25 + log2 + log8 - log4$.

R: $x = log(25.2.8)-log4 = log(\frac{400}{4}) = log100$, então $10^x = 100$, portanto, $x = 2$.

10) Calcule, aplicando as propriedades operatórias, $log(\frac{10\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10}})$:

R: $log10 + \frac{1}{2}log10 - \frac{1}{3}log10 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$

Apêndice B

Gráficos

Gráfico da função log_3x :

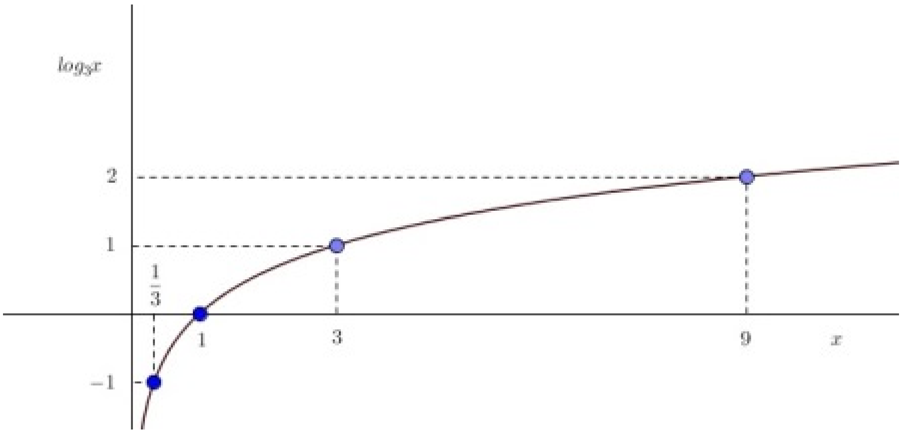
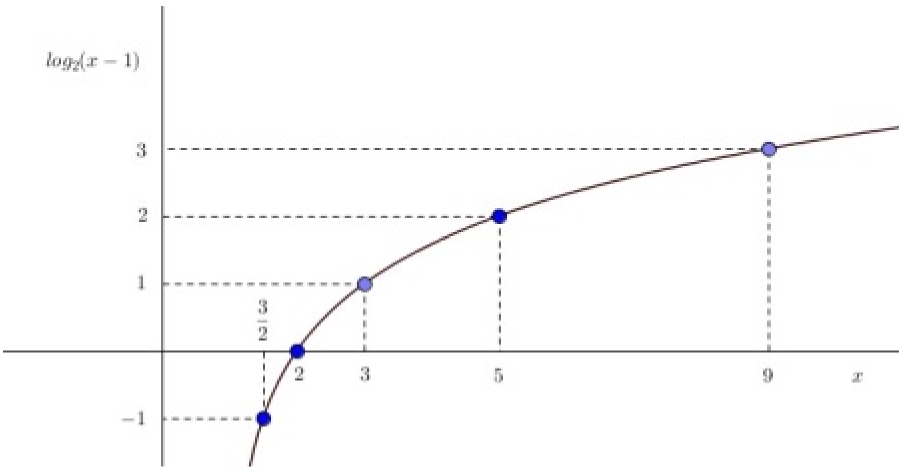


Gráfico da função $log_2(x-1)$:



Apêndice C

Desenvolvimento dos alunos

Desenvolvimento do aluno M. S. para a obtenção do número 8 como uma potência de base 3.

Atividade: Calcular x para que $3^x = 8$, com erro aproximado de 0,05.

Resposta:

$3^1 = 3$ e $3^2 = 9$

$\frac{1+2}{2} = 1,5$ e $\sqrt{3.9} = 5,19615$

$3^{1,5} = 5,19615$ e $3^2 = 9$

$\frac{1,5+2}{2} = 1,75$ e $\sqrt{5,19615.9} = 6,8385$

$3^{1,75} = 6,8385$ e $3^2 = 9$

$\frac{1,75+2}{2} = 1,875$ e $\sqrt{6,8385.9} = 7,84515$

$3^{1,875} = 7,84515$ e $3^2 = 9$

$\frac{1,875+2}{2} = 1,9375$ e $\sqrt{7,84515.9} = 8,40277$

$3^{1,875} = 7,84515$ e $3^{1,9375} = 8,40277$

$\frac{1,875+1,9375}{2} = 1,90625$ e $\sqrt{7,84515.8,40277} = 8,11917$

$3^{1,875} = 7,84515$ e $3^{1,90625} = 8,11917$

$\frac{1,875+1,90625}{2} = 1,890635$ e $\sqrt{7,84515.8,11917} = 7,9809$

Como 7,9809 tem erro, em relação a 8, menor que $0,05$, então:

$3^{1,890635} \simeq 8$. Assim, temos $log_3 8 \simeq 1,890635$

Desenvolvimento do aluno M. R. para a obtenção do número 5 como uma potência de base 7.

Atividade: Calcular x para que $7^x = 5$, com erro aproximado de 0,05.

Resposta:
$7^0 = 1$ ——— $7^? = 5$ ——— $7^1 = 7$

$7^x = 5$

$7^0 = 1$ e $7^1 = 7$, como $\frac{0+1}{2} = 0,5$ e $\sqrt{1.7} = \sqrt{7} = 2,645$

Podemos continuar com $7^{0,5} = 2,645$ e $7^1 = 7$, utilizando o mesmo esquema, multiplicar os resultados e tirar a raiz, somar os expoentes e dividir por dois, fica: $7^{0,75} = 4,3029$.

Depois: $7^{0,75} = 4,3029$ e $7^1 = 7$, fica: $7^{0,875} = 5,4882$.

Como passou de 5, vamos usar $7^{0,875}$.

Assim: $7^{0,75} = 4,3029$ e $7^{0,875} = 5,4882$, fica: $7^{0,8125} = 4,8595$.

Depois: $7^{0,8125} = 4,8595$ e $7^{0,875} = 5,4882$, fica: $7^{0,84375} = 5,1643$.

Finalmente, teremos: $7^{0,84375} = 5,1643$ e $7^{0,8125} = 4,8595$ que fica: $7^{0,828125} = 5,0096$.

Então: $log_7 5 = 0,828125$.

Apêndice D

Propriedades dos Logaritmos

Uma definição geral para os logaritmos é: Sejam **a** e **b** números reais positivos e **b** diferente de zero, chama-se logaritmo de **a** na base **b** o expoente **x** tal que: $b^x = a$, isto é, $log_b a = x$ (logaritmo de a na base b igual a x) $\longleftrightarrow b^x = a$ (b elevado a x igual a a).

Vamos analisar alguns exemplos:

a) $log_5 25 = x \longleftrightarrow 5^x = 25$.

Resolução: como $25 = 5^2$, então: $5^x = 5^2$ e portanto, x = 2.

b) $log_3 81 = x \longleftrightarrow 3^x = 81$.

Resolução: como $81 = 3^4$, então: $3^x = 3^4$ e portanto, x = 4.

PROPRIEDADES GERAIS.

Para explicar as propriedades dos logaritmos, faremos uso da álgebra para representações gerais. Então, utilizando os termos **a**, **b** e **c** para representar os números reais positivos com **b** diferente de 0, temos:

a) $log_b 1 = 0$, pois $b^0 = 1$;

b) $log_b b = 1$, pois $b^1 = b$;

c) $log_b b^a = a$;

d) $b^{log_b a} = a$;

e) $log_b a = log_b c \longleftrightarrow a = b$.

Pela definição de logaritmos pode-se dar *'condições de existência'* ou *'consequências da definição'* que será:

- Base positiva;

Contraexemplo: $log_{-3} 9 = x \longleftrightarrow (-3)^x = 9$. Não existe.

- Base diferente de um;

Contraexemplo: $log_1 2 = x \longleftrightarrow 1^x = 2$. Não tem significado

- Logaritmando positivo.

Contraexemplo: $log_2(-4) = x \longleftrightarrow 2^x = -4$. Não existe.

Utilizando a simbologia matemática: $\exists \ log_b a \longleftrightarrow \{b > 0,\ b \neq 0 \text{ e } a > 0\}$

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS.

As propriedades operatórias são interessantes, pois o aluno visualizará qual a vantagem de se empregar logaritmos nos cálculos.

- Logaritmo de um produto:

Vamos analisar uma situação:

$log_3(9.27) = log_3(3^2.3^3) = log_3 3^{2+3} = 5.$

$log_3 9 + log_3 27 = log_3 3^2 + log_3 3^3 = 2 + 3 = 5.$

Então, $log_3(9.27) = log_3 9 + log_3 27$. Assim:

Com qualquer base real positiva e diferente de 1, o logaritmo da multiplicação de dois valores reais positivos é igual a soma dos logaritmos dos fatores.

- Logaritmo de um quociente:

Vejamos outra situação:

$log_5(\frac{125}{25}) = log_5(\frac{5^3}{5^2}) = log_5(5^{3-2}) = 3 - 2 = 1$

$log_5 125 - log_5 25 = log_5 5^3 - log_5 5^2 = 3 - 2 = 1.$

Com qualquer base real positiva e diferente de 1, o logaritmo da divisão de dois valores reais positivos é igual a diferença entre o logaritmos do dividendo e o logaritmo do divisor.

- Logaritmo de uma potência:

Observe:

$log_2 5^4 = log_2 5 + log_2 5 + log_2 5 + log_2 5 = 4.log_2 5.$

Assim: $log_2 5^4 = 4.log_2 5.$

Com qualquer base real positiva e diferente de 1, o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

Apêndice E

Questionário aplicado aos alunos

Questionário aplicado a alunos da primeira série do Ensino Médio que já estudaram logaritmos.

1) Qual o conteúdo de matemática que você mais gosta?

R:

2) Você acha que aprender determinado conteúdo está relacionado a gostar deste conteúdo?

R:

3) Você gosta de estudar logaritmos? Por quê?

R:

4) Você consegue relacionar os logaritmos a um outro tema da matemática? Se sim, diga qual:

R:

5) Acredita ser importante o uso da história no ensino de logaritmos? Explique:

R:

6) Qual o maior problema no aprendizado de logaritmos?

R:

7) Você pode definir logaritmo?

R:

8) Como você definiria um bom professor?

R:

9) Qual a importância do estudo da matemática?

R:

10) Qual a relação dos logaritmos com a importância do estudo da matemática?

R:

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, H., et al. (2007). **Cálculo** - oitava edição, Porto Alegre, Bookman - volume 1.

[2] ANDRADE, L. N.(2000). **Breve introdução ao LATEX 2ε** Universidade Federal da Paraíba - Departamento de Matemática, Paraíba, Brasil.

[3] BOLEMA. (1992). **Sobre a História da Matemática**. Especial n2, So Paulo, pp. 7 25.

[4] BOULOS, P. (2006) **Cálculo Diferencial e Integral**. Editora Makron. São Paulo.

[5] BOYER, C. (1996). **História da matemática**. Editora Edgard Blucher Ltda.

[6] BRASIL (2002). Ministério da Educação **Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+**: Ensino Médio. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica - Brasília: MEC; SEMTEC.

[7] BYERS, V. (1982). **Porque estudar a História da Matemática?**. In: *International Journal Mathematics, Education, Science and Technologie.*Universidade de Concórdia, Montreal, vol. 13, n. 1, pp. 59 66.

[8] CARDOSO, C. (1999) **Os métodos da História**. In: *Como organizar e realizar uma pesquisa histórica.* Editora Atual, São Paulo.

[9] CHARLES, N. (1971) **Histoire dês logarithmes de Neper à Euler**.2e part. A. Blanchard, Paris, 232 p.

[10] COLL, C. (1994). **Estrutura grupal, interação entre alunos e aprendizagem escolar**. In: *Aprendizagem escolar e construção do conhecimento.* Trad. Emília de Oliveira Dihel, Artes Médicas, Porto Alegre, pp. 77 99.

[11] FARIAS, R. F. (2002). **A química do tempo: Carbono–14**. QNESC, v.16, Santa Catarina.

[12] FURLANETTO, E. (2002) **A formação de professores** in: *aspectos simbólicos de uma pesquisa interdisciplinar.* Papirus, Campinas.

[13] GIOVANNI, J. R., et al (2002) **Matemática Fundamental** In: *Função logarítmica* Editora FTD, São Paulo.

[14] GRABINER, J. (1975). **O Matemático, o Historiador e a História da Matemática**. In: *Historia Mathematica 2.* California State College, Califórnia, pp. 439 447.

[15] GUIDORIZZI, H. L. (2014). **Cálculo**. Editora LTC, Rio de Janeiro, volume 1.

[16] LIMA, E. L. (2013). **Números e funções reais**. SBM, Rio de Janeiro, coleção PROFMAT.

[17] LINTZ, R. G. (1999). **História da matemática**. Editora da FURB, Blumenau, vol 1.

[18] MACEDO, L. de. (2002). **O construtivismo e sua função educacional**. In: *Ensaios construtivistas*. Casa do Psicólogo, São Paulo, pp. 13 26.

[19] MÜLLER, M. (2007). **Normas e padrões para teses, dissertações e monografias**. Editora UEL, Londrina.

[20] ROCHA, V. G. (2014). **A imporância dos logaritmos ontem e hoje no desenvolvimento da matemática e das ciências - uma abordagem didática**. Dissertação de mestrado, Minas Gerais, Brasil.

[21] SOUSA, C. P. de. (2002). **Avaliação do rendimento escolar**.Papirus Editora, Campinas.

[22] SPINELLI, W. e REIS, H. C. (2016). **Conexões com a Física**. Ed. Moderna, São Paulo.

[23] TITO, M. P. e CANTO, E. L. (2006). **Química na abordagem do cotidiano**. Ed. Moderna, São Paulo.

[24] earn-math.info - acesso em 05.7.2016

[25] ww.academia.edu/5690016/John/Napier/e/a/criação/dos/logaritmos - acesso em 11.7.2016