UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

MARCOS ANTONIO ROSA

A importância das *Relações de Recorrência* para melhoria do Ensino-Aprendizagem da Matemática Discreta

Campinas

2017

Marcos Antonio Rosa

A importância das *Relações de Recorrência* para melhoria do Ensino-Aprendizagem da Matemática Discreta

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Marcos Antonio Rosa e orientada pelo Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno.

Campinas

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

R71i

Rosa, Marcos Antonio, 1958-
A importância das relações de recorrência para melhoria do ensino-aprendizagem da matemática discreta / Marcos Antonio Rosa. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Pedro Jose Catuogno.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Fibonacci, Números de. 2. Relações de recorrência. 3. Sequências recorrentes (Matemática). 4. Séries aritméticas. 5. Séries geométricas. 6. Análise combinatória. I. Catuogno, Pedro Jose,1959-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The importance of recurrence relationships for the improvement of teaching-learning discrete mathematics
Palavras-chave em inglês:
Fibonacci numbers
Recurrence relations
Recurrent sequences (Mathematics)
Arithmetic series
Geometric series
Combinatorial analysis
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Pedro Jose Catuogno [Orientador]
Roberto Andreani
Daniel Miranda Machado
Data de defesa: 30-06-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 30 de junho de 2017 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSE CATUOGNO

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). DANIEL MIRANDA MACHADO

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Dedico a minha família, a meus alunos e mestres. De modo especial, ao meu querido Pai - José Benedito da Rosa; sempre presente.

Agradecimentos

Agradeço a minha esposa Véra Regina, pela importante colaboração nesta jornada.

Ao meu filho Marcos, pelo suporte e incentivo dados ao longo do curso.

Ao meu orientador, Professor Doutor Pedro Jose Catuogno, pelo profissionalismo e dedicação.

Aos meus colegas de classe do PROFMAT, principalmente ao amigo José Maria Rodrigues.

Ao aluno do Imecc, Charles Henrique Martins Sobrinho, por todo apoio na formatação do texto.

A CAPES pelo incentivo financeiro, estímulo relevante para melhoria do ensino no país.

Aos meus alunos e ex-alunos, pois aprendi muito com eles.

A Deus, pelas oportunidades que tive e a superação de todas as dificuldades.

"A matemática, vista corretamente,
possui não apenas verdade,
mas também suprema beleza
- uma beleza fria e austera, como a da escultura".
(Bertand Russel)

Resumo

O objetivo desta dissertação é a realização de um estudo sobre sequências numéricas, aplicadas em exercícios da OBMEP, não comumente estudadas no ensino médio, e que tem suas soluções com uso de recorrências numéricas. Abordamos o assunto utilizando recorrências matemáticas, apresentando o resultado com o uso das mesmas.

Palavras-chave: Série de Fibonacci, relações de recorrências, séries numéricas; progressão aritmética e geométrica, análise combinatória.

Abstract

The purpose of this dissertation is to perform a study on numerical sequences, applied in OBMEP exercises, not commonly studied in high school, and that has its solutions with the use of numerical recurrences. We approach the subject using mathematical recurrences, presenting the result with the use of them.

Keywords: Fibonacci series, recurrence relations, numerical series; Arithmetic and geometric progression, combinatorial analysis.

Resumen

El objetivo de este trabajo es llevar a cabo un estudio de las secuencias numéricas, aplican ejercicios no Obmep comúnmente estudiados en la escuela secundaria, y tiene sus soluciones con el uso de las recurrencias numéricos. Nos acercamos al sujeto usando las recurrencias matemáticos, con el resultado con el uso de ellos.

Palabras clave: Fibonacci series, repeticiones de relaciones, series numéricas; la aritmética y progresión geométrica, la combinatoria.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional de Matemática.
PA	Progressão Aritmética.
PG	Progressão Geométrica.

Sumário

Introdução

Ao assistir a uma videoaula sobre - *Matemática Discreta* - do Professor Augusto César Morgado, disponibilizada no *site* do IMPA, uma frase despertou minha atenção:

"No meu tempo de aluno do Ensino Básico, fazia parte do conteúdo programático de matemática, o assunto Relações de Recorrência, através deste fato era possível deduzir várias fórmulas, como as de Progressão Aritmética e Geométrica."

Refletindo sobre este assunto, conclui que o professor tinha razão. Assim, decidi que no próximo ano letivo, ao ministrar as aulas para o Ensino Médio, e nos cursos de Graduação, que iria introduzir o assunto Recorrência Matemática.

Neste trabalho, apresento um relato desta experiência e dos resultados alcançados. Ao longo dessa construção, ao consultar livros didáticos para o ensino médio e graduação, fiquei surpreso: quase nada era citado sobre relações de recorrência.

Durante o curso de Mestrado, foi possível identificar os conceitos matemáticos mais importantes que o professor Ensino Básico deve dominar. Como sabemos, o ideal é que o professor construa junto com os seus alunos os conceitos da matemática. E não apenas demonstre e deixe que os alunos decorem as fórmulas e outras demonstrações. Considero de extrema importância que o aluno desenvolva o conhecimento e o raciocínio, e isto, só pode ser conseguido, quando o professor trabalha com essas construções e assim o aluno aprenda o porquê e pense, que é necessário este conhecimento.

Hoje, com toda a tecnologia e a internet, é possível, que o aluno possa continuar esta construção do conhecimento, através de vídeos, por isso, também é importante, o professor compartilhar estes meios de conhecimento.

Ao final desta dissertação, mostraremos um plano de aula com a finalidade de trabalhar o tema Recorrência em sala de aula, principal propósito deste trabalho. O professor que consultá-lo terá o suporte de um roteiro, para planejar sua aula, acompanhado de atividades, livre para adaptá-las conforme seus propósitos.

0.1 Preparação da pesquisa

Este trabalho foi dividido em dois momentos. O primeiro referia-se a utilização de recorrências matemáticas em cursos do ensino básico, mais precisamente no ensino médio. Portanto ele foi aplicado em duas séries do ensino médio. A primeira aplicação ocorreu em turmas do 1ª série do ensino médio, antes da apresentação das sequências numéricas. A outra aplicação ocorreu nas turmas do 3ª série do ensino médio, por ser um ano de revisão do conteúdo e preparação para vestibulares e ENEM.

O segundo momento surgiu na disciplina "*Introdução ao Cálculo*", ministrada para as turmas dos cursos de Engenharia e Administração de Empresas.

A importância destas aplicações serão relatadas durante a apresentação dos resultados.

1 Referenciais Teóricos

1.1 Recorrências

Recorrência ou relação de recorrência é uma técnica matemática que permite definir sequências e conjuntos, operações ou até mesmo algoritmos partindo de problemas genéricos. Para calcular um termo, utiliza-se uma regra que calcula através de termos anteriores.

As relações de recorrência são compostas de duas partes importantes as condições iniciais, que devem ser conhecidas, e a relação de recorrência, na forma de uma equação, que será a regra que permitirá calcular os próximos termos em função dos antecessores.

Exemplo 1.1. *Sequência dos números naturais ímpares:*
$1, 3, 5, 7, \ldots$
$x_{n+1} = x_n + 2,\ (n \geqslant 1)$ *com* $x_n = 1$

Exemplo 1.2. *Uma progressão aritmética* (x_n) *de razão* r *e primeiro termo* a.
$x_{n+1} = x_n + r,\ (n \geqslant 1),$ *com* $x_1 = a$

Exemplo 1.3. *Uma progressão geométrica* (x_n) *de razão* q *e primeiro termo* a
$x_{n+1} = x_n \cdot q(n \geqslant 1)$ *com* $x_1 = a$

Exemplo 1.4. *Considerando a de sequência de Fibonacci:* $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$. *Temos:*
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, (n \geqslant 0)$ *com* $F_0 = F_1 = 1$

Podemos ver que uma recorrência, por si só, não é suficiente para definir uma sequência. No exemplo 1.1, a relação não defini a sequência dos números ímpares, mas todas as progressões aritméticas de razão 2. Com este fato, concluímos que é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s).

Nos exemplos 1.1, 1.2 e 1.3 temos recorrências de primeira ordem, ou seja, dependem do termo anterior, já no exemplo 1.4, temos uma recorrência de segunda ordem, ou seja, depende de dois termos anteriores.

Exercício 1.1. *Quantas são as sequências de 10 termos, pertencentes ao conjunto {0,1,2}, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero?*

Para melhor entendimento do enunciado, apresento as possibilidades abaixo:

(i) A sequência que se segue está de acordo com o enunciado: 2101122101.

(ii) A sequência que se segue não está de acordo com o enunciado, pois tem dois zeros consecutivos: 2001110121.

- o número de sequências de $n+2$ *termos que começam por 1 e não possuem 2 zeros consecutivos.*

Mas isso é precisamente igual x_{n+2}*, pois se o primeiro termo é 1, para formar a sequência basta determinar os termos a partir do primeiro, que pode ser feito de* x_{n+1} *modos.*

- o número de sequências de $n+2$ *termos que começam com 2, também é* x_{n+1}

-o número de sequências de $n+2$*, temos que começar por zero. Temos que o segundo termo pode ser (1, 2), então termos* $2x$ *modos.*

Logo, $x_{n+2} = 2 \cdot x_{n+1} + 2 \cdot x_n$

$x_1 = 2$ *e* $x_2 = 8$ *e* $x_{10} = 24690$

Recorrências Lineares de $1^{\underline{a}}$ ***Ordem***

Uma recorrência de $1^{\underline{a}}$ *ordem, expressa por* x_{n+1} *em função de* x_n *é dita linear se, e somente se, essa função polinomial do* $1^{\underline{o}}$ *grau.*

Exemplo 1.5.

1. $x_{n+1} = 2 \cdot x_n - n^2$

2. $x_{n+1} = n \cdot x_n$

   Todas as duas são de primeira ordem, pois são lineares.

   Já $x_{n+1} = x_n^2$*, não é de primeiro ordem, pois não é linear.*

Exercício 1.2. *Resolva* $x_{n+1} = n \cdot x_n$*, com* $x_1 = 1$*.*
Solução: *Temos*

$$x_2 = 1 \cdot x_1$$
$$x_3 = 2 \cdot x_2$$
$$x_4 = 3 \cdot x_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = (n-1) \cdot x_{n-1}$$
$$x_n = (n-1)!$$

Como $x_1 = 1$*, temos:*

$$x_n = (n-1)!$$

Exercício 1.3. *Resolva* $x_{n+1} = 2 \cdot x_n$.
Solução: *Temos*

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 2 \cdot x_1 \\
x_3 &= 2 \cdot x_2 \\
x_4 &= 2 \cdot x_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= 2 \cdot x_{n-1} \\
x_n &= 2^{n-1} \cdot x_1
\end{aligned}
$$

Como não foi atribuido valor para x_1, *há uma infinidade de soluções para a recorrência,* $x_n = C \cdot 2^{n-1}$, *onde* C *é uma constante arbitrária.*
Apresento a seguir o Teorema 1.1 e a Observação 1.1; são informações necessárias para o entendimento do próximo exercício.

Teorema 1.1. *Se* a_n *é uma solução não-nula de* $x_{n+1} = g(n)x_n$, *então a substituição* $x_n = a_n y_n$ *transforma a recorrência*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \quad em \quad y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}$$

Demonstração. *A substituição* $x_n = a_n y_n$ *transforma*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \quad em \quad a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Mas $a_{n+1} = g(n)a_n$, *pois* a_n *é solução de* $x_{n+1} = g(n)x_n$. *Portanto a equação se transforma em*

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n),$$

ou seja, $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}$.

Observação 1.1. *As recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem que mais facilmente se resolvem são as da forma:* $x_{n+1} = x_n + f(n)$.
Com efeito temos

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + f(1) \\
x_3 &= x_2 + f(2) \\
x_4 &= x_3 + f(3) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= x_{n-1} + f(n-1)
\end{aligned}
$$

Somando, obtemos

$$x_n = x_1 + \sum_{K=1}^{n-1} f(K)$$

Exercício 1.4. *Resolva* $x_{n+1} = 2 \cdot x_n + 1$, $x_1 = 2$.
Solução: *Conforme exercício 1.3, uma solução não nula de* $x_{n+1} = 2 \cdot x_n$ *é:*

$$x_n = 2^{n-1}$$

Fazendo a substituição $x_n = 2^{n-1} \cdot y_n$

$$2^n \cdot y_{n+1} = 2^n \cdot y_n + 1$$
$$y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$$

Daí se tem

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + 2^{-1}\\
y_3 &= y_2 + 2^{-2}\\
y_4 &= y_3 + 2^{-3}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)}\\
y_n &= y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-(n-1)}
\end{aligned}$$

Temos a soma de uma PG finita de (n-1) termos e

$$a_1 = 2^{-1} \;\; e \; q = 2^{-1}$$
$$\sum_{1}^{n-1} y_n = -2^{1-n} + 1$$
$$y_n = y_1 - 2^{1-n} + 1$$

Como $x_n = 2^{n-1} \cdot y_n$ *e* $x_1 = 2$, *temos*

$$y_1 = 2 \quad e \quad y_n = 3 - 2^{1-n}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
x_n &= 2^{n-1} \cdot y_n\\
x_n &= 2^{n-1} \cdot (3 - 2^{1-n})\\
x_n &= 3 \cdot 2^{n-1} - 1
\end{aligned}$$

Recorrências Lineares de Segunda Ordem.

Recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes, são recorrências da forma:

$$x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$$

Estamos considerando que $q \neq 0$, no caso de $q = 0$ a recorrência seria de primeira ordem.

A cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$, associamos uma equação do segundo grau, $r^2 + p \cdot r + q = 0$, chamada de equação característica.

Como $q \neq 0$, a raiz da equação característica não será nula.

Exemplo 1.6. *A recorrência $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ tem equação característica:*

$$r^2 - r - 1 = 0$$

As raízes da equação característica são

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Observação 1.2. *O teorema apresentado a seguir mostra que, se as raízes da equação característica são r_1 e r_2, então qualquer sequência da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Teorema 1.2. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração. *Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$, obtemos:*

$$C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = C_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^n 0 = 0$$

Exemplo 1.7. *A equação $x_{n+2} + 3 \cdot x_{n+1} - 4 \cdot x_n = 0$ tem $r^2 + 3r - 4 = 0$, como equação característica.*

As raízes da equação característica são $r_1 = 1$ e $r_2 = -4$.

De acordo com o Teorema 1.2 temos

$$a_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot (-4)^n$$

são soluções da recorrência.

Observação 1.3. *O teorema a seguir mostra que, se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma apontada pelo Teorema 1.2.*

Teorema 1.3. *Sejam $r_1 \neq r_2$, as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então todas as soluções de recorrência $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração.

$$x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$$

Assumimos que,

$$a_1 = C_1 \cdot r_1 + C_2 \cdot r_2 = T_1$$

$$a_2 = C_1 \cdot r_1^2 + C_2 \cdot r_2^2 = T_2$$

Então,

$$C_1 = \frac{r_2^2 \cdot y_1 - r_2 \cdot y_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot (r_2 - r_1)}$$

$$C_2 = \frac{r_1 \cdot y_2 - r_1^2 \cdot y_1}{r_1 \cdot r_2 \cdot (r_2 - r_1)}$$

$$r_1 \neq r_2 \;\; e \; r_1 \neq 0 \;\; e \; r_2 \neq 0$$

Provemos que,

$$y_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n = a_n \text{ para todo } n \text{ natural}$$

Seja $z_n = y_n - C_1 \cdot r_1^n - C_2 \cdot r_2^n$

estão

$$z_{n+2} = p \cdot z_{n+1} + q \cdot z_n = (y_{n+2} + p \cdot y_{n+1} q \cdot y_n) - C_1 \cdot r_1^n \cdot (r_1^2 + p \cdot r_1 + q) - C_2 \cdot r_2^n \cdot (r_2^2 + p \cdot r_2 + q)$$

Observemos que o primeiro parênteses

$$y_{n+2} + p \cdot y_{n+1} + q \cdot y_n = 0$$

porque T *é solução e os outros dois também são zeros porque,* r_1 *e* r_2*, são raízes.*

Como $z_1 = z_2 = 0$.

$$z_{n+2} + p \cdot z_{n+1} + q \cdot z_n = 0$$

Concluímos que $z_n = 0$ *para todo* n.

Exemplo 1.8. *Determinar o número de Fibonacci* F_n.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$F_0 = F_1 = 1$$

A equação $r^2 = r + 1$ *ou* $r^2 - r - 1 = 0$.

As raízes são:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\cdot\sqrt{5}}$$
$$C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\cdot\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\cdot\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\cdot\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Proposição 1.1. *Caso as raízes da equação característica forem complexas, para simplificar os cálculos, poderemos utiliza-las em sua forma trigonométrica. A solução será:*

$$r_1 = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$$
$$r_2 = \rho(\cos\theta - i\text{sen}\theta)$$
$$r_1^n = \rho^n(\cos n \cdot \theta + i\text{sen} n \cdot \theta)$$
$$r_2^n = \rho^n(\cos n \cdot \theta - i\text{sen} n \cdot \theta)$$
$$C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = \rho^n[(C_1 + C_2)\cos n\theta + i(C_1 - C_2)\text{sen} n\theta]$$

$C_1 + C_2$ *e* $i \cdot (C_1 - C_2)$ *são novas constantes arbitrárias e a solução pode ser escrita:*

$$a_n = \rho^n \cdot (C_1' \cdot \cos n \cdot \theta + C_2' \cdot \text{sen} n \cdot \theta)$$

Exemplo 1.9.

$$x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$$

tem equação característica, $r^2 + r + 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

$$r = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Temos como módulo:

$$\rho^2 = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\rho = 1$$

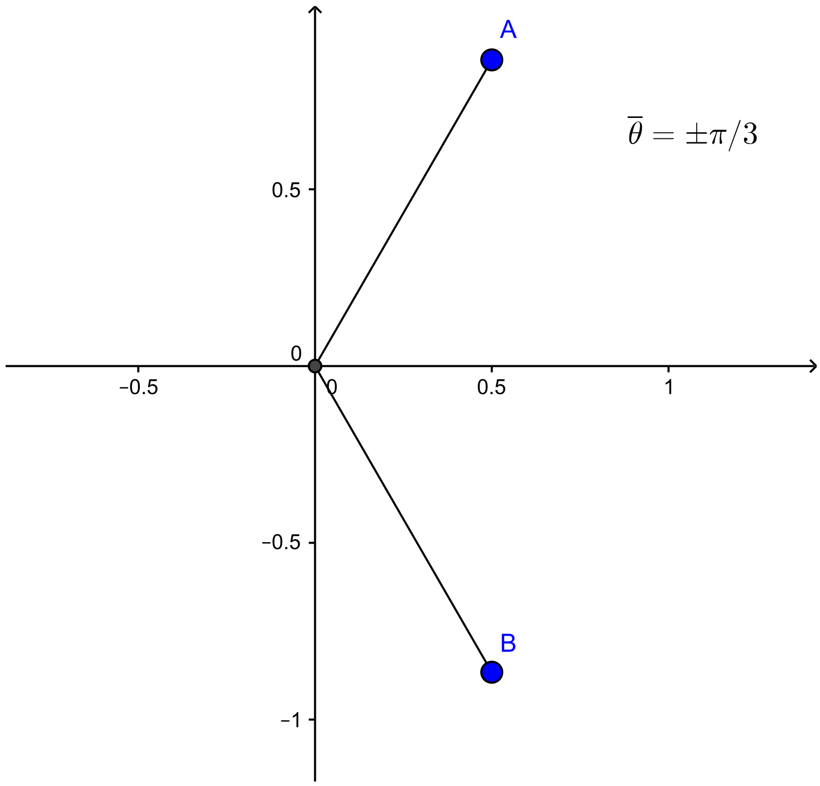


Figura 1 – Gráfico do número ρ

$$x_n = \rho^n[C_1 \cos n \cdot \theta + C_2 \operatorname{sen} n \cdot \theta]$$

$$x_n = C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$$

Observação 1.4. *Que aconteceria se as raízes da equação característica fossem iguais? Os Teoremas 1.4, 1.5, respondem essa pergunta.*

Teorema 1.4. *Se as raízes de $r^2 + p \cdot r + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então $a_n = C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot n \cdot r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração. *Se as raízes são iguais então $r = \dfrac{-p}{2}$*

Substituindo $a_n = C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot n \cdot r^n$, por:

$$x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$$

Obtemos que

$$C_1 \cdot r^n \cdot (r^2 + pr + q) + C_2 \cdot n \cdot r^n \cdot (r^2 + pr + q) + C_2 \cdot r^n \cdot r \cdot (2r + p) = 0$$

Então:

$$C_1 \cdot r^n \cdot 0 + C_2 \cdot n \cdot r^n \cdot 0 + C_2 \cdot r^n \cdot r \cdot 0 = 0$$

.

Teorema 1.5. *Sejam $r_1, = r_2 = r$ as raízes de $r^2 + p \cdot r + q = 0$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot n \cdot r^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração.

Assumimos que,

$$a_1 = C_1 \cdot r + C_2 \cdot r = y_1$$

$$a_2 = C_1 \cdot r^2 + C_2 \cdot r^2 = y_2$$

Então,

$$C_1 = 2 \cdot \frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2}$$

$$C_2 = \frac{y_2 - r \cdot y_1}{r^2}$$

isto é possível pois $r \neq 0$.

Afirmamos que

$$y_n = C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot n \cdot r^n$$

para todo n natural.

$$z_n = y_n - C_1 \cdot r^n - C_2 \cdot n \cdot r^n$$

$$\begin{aligned} z_{n+2} + p \cdot z_{n+1} - C_2 \cdot n \cdot r^n = & \left(y_{n+2} + p \cdot y_{n+1} + q \cdot y_n\right) \\ & - C_1 \cdot r^n(r^2 + p \cdot p \cdot r + q) \\ & - C_2 \cdot nr^n(r^2 + p \cdot p \cdot r + q) \\ & - C_2 \cdot r^n \cdot r(2r + p) \end{aligned}$$

O primeiro parênteses é zero e os outros também.

$$z_{n+2} + p \cdot z_{n+1} + q \cdot z_n = 0$$

Sendo $z_1 = z_2 = 0$, *então* $z_n = 0$ *para todo* n.

Exemplo 1.10. $x_{n+2} - 4 \cdot x_{n+1} + 4 \cdot x_n = 0$,

tem equação $r^2 - 4 \cdot r + 4 = 0$

As raízes são $r_1 = r_2 = 2$,

portanto a solução é $x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n$

1.2 Relações de Recorrências e Funções Geradoras de Arranjos Simples, em Análise Combinatória.

Numa expressão para cálculos de arranjos simples, em análise combinatória, temos $A_{m,p}$, o número de arranjos de m objetos p a p, parte-se da relação:

$$A_{m,p} = A_{m,p-1} \cdot (m - p + 1)$$

, com $p = 1, 2, \ldots, m$, onde $A_{m,p}$, para cada, $m \in \mathbb{N}$, fixado, se expressa à custa do termo anterior, então a fórmula e um exemplo de uma relação de recorrência.

Outra relação recursiva, semelhante a sequência dos números de Fibonacci, é:

$$a_0 = 2, \text{ e } a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

obtêm-se a sucessão:

$$(2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots),$$

cujos elementos são conhecidos por números de Lucas.

Teorema 1.6. *Para $n \geqslant 0$ o número de Fibonacci, satisfaz a seguinte relação:*

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-k}{k}$$

$$\text{onde } k = \left[\frac{n}{2}\right] \left(\text{ é o maior inteiro contido } \frac{n}{2}\right).$$

Demonstração: Para $n \geqslant 0$, seja,

$$g(n) = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k+1} + \cdots + \binom{0}{n}$$

Para complementar a demonstração terá de verificar que $f_0 = g(0)$ e $f_1 = g(1)$ e ainda que $g(n)$ é uma solução da relação de recorrência de Fibonacci, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

$$g(0) = \binom{0}{0} = 1 = f_0$$
$$g(1) = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 = f_1$$

Para $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} g(n-1) + (n-2) &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \\ &+ \binom{0}{n-1} + \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \cdots + \binom{0}{n-2} \\ &= \binom{n-1}{0} + \left[\binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{0}\right] \\ &+ \left[\binom{n-3}{2} + \binom{n-3}{1}\right] + \cdots + \left[\binom{0}{n-1} + \binom{0}{n-2}\right]. \end{aligned}$$

Tudo em conta a relação entre os coeficientes binomiais:

$$\binom{r}{p} = \binom{r-1}{p} + \binom{r-1}{p-1}$$

e aplicando-se adequadamente à expressão, visto que:

$$\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0} \text{ e } \binom{n}{0} = 0, \text{ vem}$$

$$\begin{aligned} g(n-1) + g(n-2) &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{1}{n-1} \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{1}{n-1} + \binom{0}{n} \end{aligned}$$

Então $g(n-1)+g(n+2) = g(n)$ e que significa que g(n) é a solução da relação de recorrência de Fibonacci para $n \geqslant 2$. Consequentemente, $f_n = g(n)$, para todo o $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

1.3 Relações de Recorrências e Equações de Diferenças

Seja $(a_n)_n$ uma sucessão dada. A diferença desta sucessão, que denotamos por Δa_n é dado por:

A primeira diferença desta sucessão:

$$\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$.

A segunda diferença:

$(\Delta^2 a_n)_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$$\begin{aligned}(\Delta^2 a_n)_n &= \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_n - \Delta a_{n-1} \\ &= a_n - a_{n-1} - (a_{n-1} - a_{n-2}) = a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}.\end{aligned}$$

Generalizando, para $k \in \mathbb{N}$, qualquer, temos:

$$\Delta^k a_n = \Delta(\Delta^{k-1} a_{n-1})$$

com $n = k, k + 1, \ldots$.

Equação de diferença, é uma equação que envolve o termo a_n e as suas diferenças.

Exemplo 1.11. $3 \cdot \Delta^2(a_n) + 2\Delta(a_n) + 7(a_n) = 0$,

Temos que:

$$\begin{aligned}a_{n-1} &= a_n - \Delta(a_n) \\ a_{n-2} &= a_{n-1} - \Delta(a_{n-1})\end{aligned}$$

Com isto transformamos a equação em:

$$3(a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}) + 2(a_n - a_{n-1}) + 7a_n = 0$$

$$3a_n - 6a_{n-1} + 3a_{n-2} + 2a_n - 2a_{n-1} + 7a_n = 0$$

$$12a_n = 8a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

1.4 Funções Geradoras

As funções geradoras aparecem muitas vezes na resolução de problemas de contagem.

Em matemática, uma função geradora ou função geratriz é uma série formal cujos coeficientes codificam informações sobre uma sucessão a_n cujo índice percorre os números naturais.

Cada sucessão tem uma função geradora de certo tipo. Este tipo de função geradora que é apropriada num contexto dado depende da natureza da sucessão e dos detalhes do problema analisado.

As funções geradoras são expressões fechadas num argumento formal x. Às vezes, uma função geradora é avaliada num valor específico $x = a$ pelo que se deve ter em conta que as funções geradoras são series formais, que não se considera nem se analisa o problema da convergência para todos os valores de x.

Por isto mesmo é importante observar que as funções geradoras não são realmente funções no sentido usual de ser uma relação entre dois conjuntos, ou seja, entre um domínio e um contradomínio. O nome é unicamente o resultado do desenvolvimento histórico de seu estudo.

Uma função geradora é uma corda de estender em que penduramos uma sucessão de números para mostrá-los.

Exemplo 1.12. *Determinar o número de soluções inteiras da equação $a + b + c = 10$, onde cada variável só pode tomar valores inteiros entre 2 e 4.*

a	*b*	*c*
2	*4*	*4*
3	*4*	*3*
3	*3*	*4*
4	*2*	*4*
4	*4*	*2*
4	*3*	*3*

Portanto 6 soluções.

Exercício 1.5. *Encontre uma solução em forma fechada para a relação de recorrência*

$$F(n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 1; \\ F(n-1) + 6n - 6, & se\ n > 1. \end{cases}$$

Solução: Calculando os primeiros termos

$$
\begin{aligned}
F(1) &= 1 \\
F(2) &= 1 + 12 - 6 = 7 \\
F(3) &= 7 + 18 - 6 = 19 \\
F(4) &= 19 + 24 - 6 = 37 \\
F(5) &= 37 + 30 - 6 = 61 \\
F(6) &= 61 + 36 - 6 = 91
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
8 & & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & 81 \\
& \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & \\
& 6 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & \\
& & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \\
& & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & &
\end{array}
$$

A segunda sequência de diferenças é constante. Isso sugere que sequência deve ter uma fórmula de Prime.

$$F(n) = An^2 + Bn + C$$

então precisamos encontrar A, B e C.

Usando $F(1) = 1$, $F(2) = 7$ e $F(3) = 19$

$$
\begin{cases}
A + B + C = 1 \\
4A + 2B + C = 7 \\
9A + 3B + C = 19
\end{cases}
$$

Escalonando temos

$$
\begin{aligned}
-4A - 4B - 4C &= -4 \\
4A + 2B + C &= 7 \\
-2B - 3C &= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-9A - 9B - 9C &= -9 \\
9A + 3B + C &= 19 \\
-6B - 8C &= 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A + B + C &= 1 \\
-2B + 3C &= 3 \\
-6B - 8C &= 10 \\
+6B + 9C &= -9 \\
-6B - 8C &= 10 \\
C &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A + B + C &= 1 \\
-2B - 3C &= 3 \\
C &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2B - 3 &= 3 \\
-2B &= 6 \\
&\boxed{B=-3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A - 3 + 1 &= 1 \\
A - 2 &= 1 \\
A &= 1 + 2 \\
&\boxed{A=3}
\end{aligned}
$$

Então temos

$$F(n) = 3n^2 - 3n + 1$$

A técnica de usar sequências é mais uma abordagem de "força bruta" do que pura adivinhação; existem certos procedimentos mecânicos que efetuamos a fim de chegar a uma fórmula. Mas o resultado desses procedimentos ainda é um palpite. Para termos certeza de que nosso palpite está certo precisamos provar que a fórmula correspondente à relação de recorrência para todo n.

Prova por indução matemática

caso base: Se $n = 1$ a relação de recorrência diz que $F(1) = 1$, e a fórmula diz que $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1$, portanto eles coincidem.

Hipótese Indutiva: Supondo como hipótese indutiva que

$$F(k-1) = 3(k-1)^2 - 3(k-1) + 1$$

para algum $k > 1$.

Passo indutivo: Usando a relação de recorrência.

$F(k) = F(k-1) + 6k - 6$, pela segunda parte da relação de recorrência.
$= 3(k-1)^2 - 3(k-1) + 6k - 6$, por hipótese de indução.
$= 3k^2 - 6k + 3 - 3k + 3 + 1 + 6k - 6$.
$F(k) = 3k^2 - 3k + 1$
Então por indução, $F(n) = 3n^2 - 3n + 1$ para todo $n \geqslant 1$.

Este caso foi possível resolver, pois existiam poucas soluções. Mas se as dimensões do problema for maior, como resolver?

Vejamos um outro método de aplicação mais geral. Associamos um polinômio p_a, p_b, p_c, assim definido: como cada variável só pode tomar valores 2,3 ou 4, então, neste caso, cada um dos polinômios é dado por:

$$x^2 + x^3 + x^4$$

Multiplicando os 3 polinômios temos:

$$p(x) = p_a(x) \cdot p_b(x) \cdot p_c(x) = (x^2 + x^3 + x^4)^3$$

Visto que $a + b + c = 10$,então o coeficiente de x^{10} em p(x) dá o número de soluções da equação original nas condições especificadas.

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2 + x^3 + x^4) \cdot (x^2 + x^3 + x^4) \cdot (x^2 + x^3 + x^4) \\ p(x) &= x^6 + x^7 + x^8 + 2x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 3x^8 + 3x^9 \\ &\quad + 3^{10} + 2x^9 + 2^{10} + 2x^{11} + x^{10} + x^{11} + x^{12} \\ p(x) &= \cdots + (3 + 2 + 1)x^{10} + \cdots \end{aligned}$$

Portanto 6 soluções.

Exemplo 1.13. *Determinar a função geradora na qual o coeficiente de x^r seja o número de soluções inteiras não negativas da equação, $2a + 3b + 5c = r$.*

Escrevendo $x = 2a$, $y = 3b$ e $z = 5c$, temos $x + y + z = r$.

onde, $x \in \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $y \in \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$ e $z \in \{0, 5, 10, 15, \ldots\}$. Então, associando ás variáveis x, y, z as séries de potências:

$$\begin{aligned} g_x(t) &= 1 + t^2 + t^4 + t^6 + \cdots \\ g_y(t) &= 1 + t^3 + t^6 + t^9 + \cdots \\ g_z(t) &= 1 + t^5 + t^{10} + t^{15} + \cdots \\ g(t) &= (1 + t^2 + t^4 + \cdots)(1 + t^3 + t^6 + \cdots) \\ &\quad \cdot (1 + t^5 + t^{10} + \cdots) \end{aligned}$$

$$g(t) = \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1-t^3} \cdot \frac{1}{1-t^5}$$

Teorema 1.7.

1. *Seja a_r, o coeficiente de x^r na função geradora ordinária.*

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^n$$

Então $a_r = \binom{r}{r+n-1}$

2.
$$(1 - x^m)^n = 1 - \binom{1}{n}x^m + \binom{2}{n}x^{2m} + \cdots + (-1)^n x^{nm}$$

3.
$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{m-1})^n = (1 - x^m)^n \cdot (1 + x + x^2 + \cdots)^n$$

Demonstração:

1. *Tendo em conta o teorema binomial de Newton, tem-se o seguinte:*

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r}(-1)^r x^r \\
\binom{-n}{r} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!} \\
&= (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!} \\
&= (-1)^r \frac{(n+r-1)\cdots(n+1)n(n-1)!}{r!(n-1)!} \\
&= (-1)^r \cdot \binom{n+r-1}{r} = (-1)^r \cdot \binom{n+r-1}{n-1}
\end{aligned}$$

Logo

$$g(x) = (-1 + x + x^2 + \cdots)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \cdot \binom{n+r-1}{n-1} \cdot x^r$$

e portanto

$$a^r = \binom{n+r-1}{n-1} \equiv \binom{n+r-1}{r}$$

2. *Fazendo $t = -x^m$ no desenvolvimento binomial de $(1+t)^n$, obtêm-se o resultado pretendido.*

3.
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1} = (1 - x^m) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

Corolário 1.1. *A função $g(x)$ é a função geradora associada ao problema da determinação do número de soluções inteiras da equação $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_x = r$ que é assim igual a:*

$$\binom{r+n-1}{n-1}$$

Exemplo 1.14. *Determinar o número de soluções inteiras da equação $a + b + c + d = 27$, onde cada variável toma valores de 3 a 8.*

Solução:

$$g(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^4$$
$$g(x) = x^{12} \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4$$

O número de soluções pretendidas é igual ao coeficiente de x^{15} na função.

$$h(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4$$
$$h(x) = (1 - x^6)^4 \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + ...)^4$$
$$(1 - x^6)^4 = 1 - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} + ... + x^{24}$$
$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^4 = 1 + \binom{4}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{6}{3}x^3 + \cdots$$

Então o coeficiente de x^{15} no produto é igual a:

$$\begin{aligned}\sum_{i+j=15} a_i \cdot b_j &= a_0 \cdot b_{15} + a_6 \cdot b_9 + a_{12} \cdot b_3 \\ &= 1 \cdot \binom{18}{15} - \binom{4}{1} \cdot \binom{12}{9} + \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} \\ &= \frac{18!}{15! \cdot 3!} - \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{12!}{9! \cdot 3!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} \\ &= 3 \cdot 17 \cdot 16 - 4 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 10 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 56\end{aligned}$$

Teorema 1.8. *Se $g(x)$ for a função geradora ordinária associada à sucessão (a_n) com $n = 0, 1, 2, \ldots$ e, $h(x)$ for a função geradora associada à sucessão (b_n) com $n = 0, 1, 2, \ldots$. Então:*

1. $\alpha \cdot g(x) + \beta \cdot h(x)$ *é a função geradora ordinária associada à sucessão* $(\alpha a_n + \beta b_n)$ *com* $n = 0, 1, 2, \ldots$

2. $(1-x) \cdot g(x)$ *é a função geradora associada à sucessão* $(a_n - a_{n-1})$ *com* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ *onde se faz* $a_{-1} = 0$.

3. $(1 + x + x^2 + \ldots) \cdot g(x)$ *é a função geradora da sucessão* $(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$ *com* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

4. *$g(x) \cdot h(x)$ é a função geradora da sucessão $(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$com $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

5. *$x \cdot g'_n$ é a função geradora da sucessão (na_n) com $n = 0, 1, 2, \ldots$ onde $g'(x)$ é a derivada de g relativamente a x.*

Demonstração: Sejam

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\text{inf}} a_j \cdot x^j$$
$$h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \cdot x^j$$

então:

1.
$$\alpha \cdot g(x) + \beta \cdot h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha a_j + \beta b_j) \cdot x^j$$

2.
$$(1 - x) g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+1}$$

$$= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})x^n + \cdots$$

3.
$$(1 + x + x^2 + \cdots) \cdot g(x) = (1 + x + x^2 + \cdots) \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

$$= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2)x^2 + \cdots$$

4.
$$g(x) \cdot h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{n} a_j b_{nj}) x^n$$

5. *Sendo* $g'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$, *vem,*

$$x g'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^j$$

Os resultados obtidos provam cada uma das alíneas do teorema. Verificamos que,

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1$$

e portanto

$$g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

1.5 Sequência

Sequência é todo conjunto ou grupo no qual os seus elementos estão escritos em uma determinada ordem.

Em análise matemática defini-se uma sequência como uma função $...x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2....,$ $f : A \subset N \longrightarrow B$, definida sobre um subconjunto A dos números naturais que toma elementos no conjunto B.

Usualmente para as sequências, denotamos o valor de f em n por f_n, em vez de f(n). Este termo f_n é dito ser o n-ésimo termo da sequência. A notação $(f_n)_{n \subset A}$ é usada para denotar a sequência. A notação $f(n)_n \in A$ é usada para denotar a sequência f cujos índices são tomadas do conjunto A. Quando o conjunto dos índices A estão subentendidas normalmente escrevemos $f(n)_n$ ou simplesmente (f_n). Quando por extenso escrevemos $(f_n) = (f_1, f_2, f_3, ...)$.

No estudo da matemática estudamos um tipo de sequência: a sequência numérica. Essa sequência que estudamos em matemática é composta por números que estão dispostos em uma determinada ordem preestabelecida.

Ao representarmos uma sequência numérica, devemos colocar seus elementos entre parênteses. Veja alguns exemplos de sequências numéricas:

- $f_n = (2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots)$ é uma sequência de números pares positivos.
- $f_n = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots)$ é uma sequência de números naturais.
- $f_n = (10, 20, 30, 40, 50, \ldots)$ é uma sequência de números múltiplos de 10.
- $f_n = (10, 15, 20, 30)$ é uma sequência de números múltiplos de 5, maiores que cinco e menores que 35.

Essas sequências são separadas em dois tipos:

- Sequência finita é uma sequência numérica na qual os elementos têm fim, como, por exemplo, a sequência dos números múltiplos de 5 maiores que 5 e menores que 35.
- Sequência infinita é uma sequência que não possui fim, ou seja, seus elementos seguem ao infinito, por exemplo: a sequência dos números naturais.

Em uma sequência numérica qualquer, o primeiro termo é representado por a_1, o segundo termo é a_2, o terceiro a_3 e assim por diante. Em uma sequência numérica desconhecida, o último elemento é representado por a_n. A letra n determina o número de elementos da sequência.

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$ sequência infinita.

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$ sequência finita.

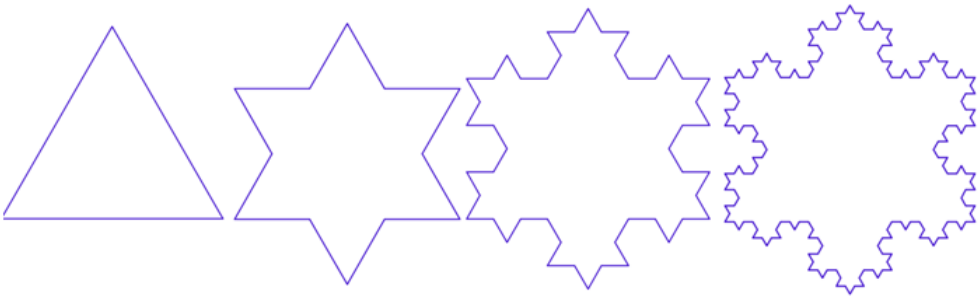


Figura 2 – Flocos de neve de Koch

A figura acima é conhecida como a curva do floco de neve de Koch. Ela recebe esse nome, porque seu contorno lembra um floco de gelo e, porque foi criada pelo matemático Helge Von Koch, em 1904.

Você consegue descobrir como a segunda e a terceira figuras foram obtidas a partir da primeira? Acompanhe a explicação: Consideremos um triângulo equilátero de lado 1. Dividimos cada um de seus lados em três partes iguais. No terço médio de cada lado, construímos novos triângulos equiláteros. O resultado é uma linha poligonal fechada de 12 lados. 3, 12, 48,... veja que temos uma sequência de linhas poligonais. (5, 5, 4, 8, 6, 9, 1, 2) é uma sequência finita de algarismos que compõe o número de um telefone e não possui lei de formação. $(4, 16, 64, \ldots)$ é uma sequência infinita de números naturais não nulos que são potências de 4. Essa sequência tem uma lei de formação bem simples. Uma sequência numérica é uma função cujo domínio é o conjunto dos números nas naturais não nulos.

Considere a sequência $f(n) = 2n$, onde $n \in (1, 2, 3, 4, \ldots)$. Temos

$$f_1 = 2, f_2 = 4, f_3 = 6, f_4 = 8$$

Essa função nos dá a sequência dos números pares positivos que representamos po $(2, 4, 6, 8, \ldots)$. Geralmente indicamos po na a imagem de n pela função $f : f_n = a_n$ Note que $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8, \ldots$

Lei de formação ou expressão geral

0,3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,

1º termo 0

2º termo 3

3º termo 6

$\vdots$

10º termo 27

$\vdots$

Nº termo $(n-1)\cdot 3$

A expressão geral pode ser representada por $3(n-1)$ ou $3n-3$.

Exemplo: Dada a sequência $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots, 625)$.

$$N_1 = 1x_1 = 1 + 4 \cdot 1 = 5$$
$$N_2 = 2x_2 = 1 = 4.2 = 9$$
$$N_3 = 3x_3 = 1 + 4 \cdot 3 = 13$$
$$N_4 = 4x_4 = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$
$$N_{100} = 100x_{100} = 1 + 4 \cdot 100 = 401.$$

Fórmula de Recorrência

$$A_1 = 3,\ n_a = n_{a-1} + 4$$
$$n = 2,\ a_2 = a_1 + 4 = 7$$
$$n = 3,\ a_3 = a_2 + 4 = 11$$
$$n = 4,\ a_4 = a_3 + 4 = 15$$

1.6 Números Poligonais

Na Grécia antiga, mais precisamente junto à Escola Pitagórica, os chamados números figurados, são exemplos de progressões aritméticas de várias ordens e, por consequência, são também de sequências que podem ser representadas por relações de recorrência.

A partir da terceira "figura", cada polígono cresce, "aproveitando" alguns pontos da figura antecedente. Em particular, todos os pontos de dois lados adjacentes de uma dada figura pertencem.

Definição: Chama-se número poligonal, a quantidade de pontos usadas para construir uma figura formada pela sobreposição sucessiva de polígonos regulares de mesmo número de lados e com quantidades de pontos em cada lado, aumentada de uma unidade em razão do polígono imediatamente anterior e de modo que cada polígono sobreposto tenha dois lados coincidentes com todos os antecessores e os pontos sobre estes lados

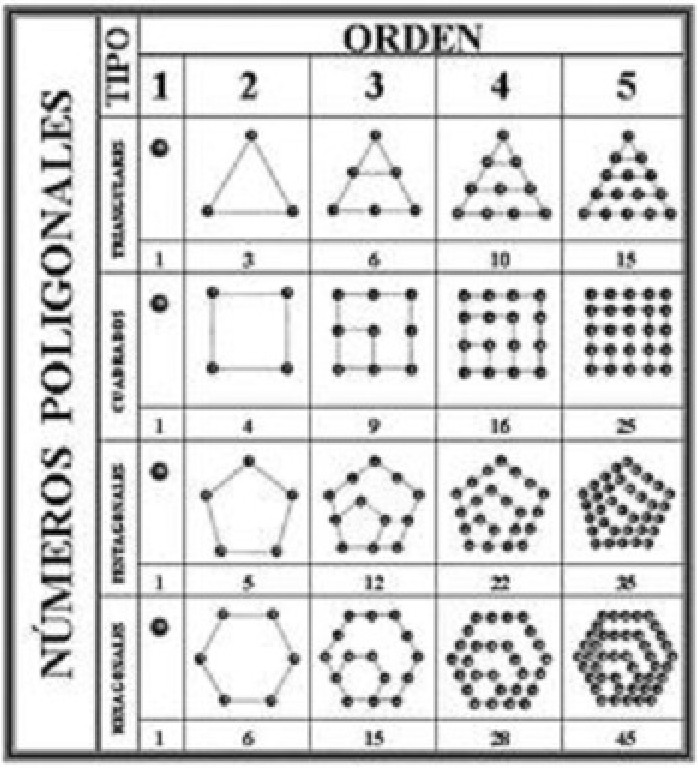


Figura 3 – Números Pitagóricos

também coincidam. Cada sequência de números poligonais é classificada de acordo com o observações, vamos mostrar que a sequência de polígono do qual.r se originou Observando as imagens, notamos que, em cada sequência:

- A primeira "figura", é formada por um único ponto. Portanto, o número 1 é, ao mesmo tempo, triangular, quadrado, pentagonal e assim sucessivamente.
- A segunda "figura", é formada pelo número de pontos correspondentes à quantidade de vértices do polígono que nomeia a sequência.
- A quantidade de pontos é sempre a mesma em todos os lados de cada figura à figura subsequente. Partindo destas observações, vamos mostrar que a sequência de números poligonais, podem ser expressas por meio das relações de recorrência. Primeiramente, observe que, em cada sequência, ao passar de uma figura à seguinte, acrescentamos $(b-2)$ lados, onde b e n é o número de vértices do polígono que nomeia a sequência. Isto posto, se estamos construindo a mesma figura, serão acrescidos $(b-2)\cdot n$ pontos. Entretanto, é preciso subtrair deste número, as vértices comuns aos lados, acrescidas para não serem contadas em duplicadas. Estes, são em número de $(b-3)$ vértices $n+b+5$. Assim, um úmero real de pontos a uma figura para formar a seguinte é de

$(b-2).n-(b-3)$. Podemos escrever:

$$a_n = a_{n-1} + (b-2)\cdot n - (b-3)$$
$$a_n = a_{n-1} + (b-2)n - b + 3$$
$$\Delta a_{n-1} = a_n - a_{n-1} = (b-2)\cdot n + b + 3$$

Ou seja, como b é uma constante, as diferenças entre os termos consecutivos formam uma P. A. então:

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$$

.

A Fórmula de Binet

Vimos que a sequência de Fibonacci é definida pela recorrência linear homogênea de segunda ordem: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ Resolvendo-a, podemos encontrar uma fórmula fechada para cada termo da sequência A equação característica:

$$t^2 - t - 1 = 0$$

raízes:

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

As soluções são da forma:

$$F_n = C_1 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + C_2 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Com as expressões de f_1 e f_2, montamos o sistema:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot C_2 = 1$$
$$C_1 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + C_2 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = 1$$

que fornece os coeficientes $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = \frac{-1}{5}$

Portanto a solução da recorrência é dada por:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Este resultado é conhecido como a fórmula de Binet.

1.7 Progressões Aritméticas

Muitas grandezas sofrem variações iguais em intervalo de tempo iguais. Denominamos á este tipo de sequência numérica, Progressões Aritméticas (PA). A diferença entre uma grandeza e outra, é constante e chamamos de razão e representamos por letra r. Exemplo 1: Em uma progressão aritmética, o quinto termo, vale 30 e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o oitavo termo dessa progressão? Vamos utilizar de recorrência para escrevermos os termos. Termo geral a_n

$$a_n = a_{n-1} + r$$

para $n \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r \\
a_4 &= a_3 + r \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + r \\
a_n &= a_1 + r + r + r + \cdots + r \\
a_n &= a_1 + (n-1)r
\end{aligned}$$

portanto por recorrência, foi obtida a fórmula do termo geral de uma P.A.

Exemplo 1.15. *Para uma progressão aritmética com quinto termo igual a 30 e vigésimo termo 90, determine o seu oitavo termo.*

$$\begin{aligned}
a_5 &= 30 \\
a_{20} &= 90 \\
a_{20} &= a_1 + 19 \cdot r \\
a_5 &= a_1 + 4 \cdot r \\
90 &= a_1 + 19 \cdot r \\
30 &= a_1 + 4 \cdot r \\
90 - 30 &= 15 \cdot r \\
60 &= 15 \cdot r \\
\frac{60}{15} &= r \\
r &= 4 \\
a_8 &= a_1 + 7 \cdot r \\
a_8 &= 14 + 7 \cdot 4 \\
a_8 &= 14 + 28 = 42
\end{aligned}$$

Exemplo 1.16. *Determine 4 números em 27 progressão aritmética crescente, conhecendo que sua soma é 8 e a soma dos seus quadrados é 36.*

Vamos utilizar que os termos do meio são $x - y$ e $x + y$. Como cada termo é igual ao anterior mais a razão, por recorrência, então temos:

$$x + y = x - y + r$$

, então teremos

$$x + y - x + y = r$$

, portanto $r = 2y$. Assim teremos que:

$$x - y - 2y, x - y, x + y, x + y + 2yx - 3y, x - y, x + y, x + 3y$$

$$x - 3y + x - y + x + y + x + 3y = 8$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

$$(x - 3y)^2 + (x - y)^2 + (x + y)^2 + (x + 3y)^2 = 36$$

$$(2 - 3y)^2 + (2 - y)^2 + (2 + y)^2 + (2 + 3y)^2 = 36$$

$$4 - 12y + 9y^2 + 4 - 4y + y^2 + 4 + 4y + y^2 + 4 + 12y + 9y^2 = 36$$

$$16 + 20y^2 = 36$$

$$20y^2 = 20$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

, mas como a PA é crescente, então

$$y = 1$$

Logo, os números são: - 1, 1, 3, 5.

Soma dos n, primeiros termos de uma Progressão Geométrica.

Temos

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Mas todo termo de uma PA, é a média geométrica dos termos equidistantes. Então

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

$$+$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

$$
\begin{aligned}
2.S_n &= (a_1 + a_n) \cdot n \\
S_n &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}
\end{aligned}
$$

Esta fórmula é conhecida como fórmula de Gauss para a soma de n termos de uma P.A..

Exemplo 1.17. *A soma dos n primeiros números inteiros positivos. que é um polinômio do 2º grau, sem termo independente.*

$$
\begin{aligned}
\sum_{K=1}^{n} K = 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \frac{(1+n) \cdot n}{2} \\
&= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.18. *A soma dos n primeiros números ímpares:*

$$
\begin{aligned}
1 + 3 + 5 + \cdots + (2n = 1) &= \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} \\
\textit{então} \longrightarrow S_n &= \frac{2n^2}{n} = n^2
\end{aligned}
$$

que é um polinômio do 2º grau, sem termo independente portanto:

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \\
S_n &= \frac{[a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r] \cdot n}{2} \\
S_n &= \frac{r}{2} \cdot n^2 + (a_1 - \frac{r}{2}) \cdot n
\end{aligned}
$$

É um polinômio do 2º grau sem termo independente e $r \neq 0$.

Exemplo 1.19. *A soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros e positivos.*

$$
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{K=1}^{n} K^2
$$

Podemos utilizar:

$$\sum_{K=1}^{n}(K+1)^3 = \sum_{K=1}^{n}K^3 + 3\sum_{K=1}^{n}k^2 + 3\sum_{K=1}^{n}K + \sum_{K=1}^{n}1$$

$$\sum_{K=1}^{n}(K+1)^3 = 2^3 + 3^3 + \cdots + (n+1)^3$$

$$\sum_{K=1}^{n} = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{K=1}^{n} = 1+1+1+.....+1 = n$$

$$Logo (n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{K=1}^{n}K^2 + 3\sum_{K=1}^{n}K = \sum_{K=1}^{n}1$$

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{K=1}^{n}K^2 + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n$$

Resolvendo temos:

$$\sum_{K=1}^{n}K^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

Colocando n *em evidência temos:*

$$\sum_{K=1}^{n}K^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

Fatorando:

$$\sum_{K=1}^{n}K^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.8 Progressões Geométricas

Progressão Geométrica é uma sucessão de números tais que, cada um, a partir do segundo é, igual ao precedente multiplicado por um número relativo constante, diferente de zero e da unidade. Representa-se o fato de que os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Exemplo 1.20. $:: a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$

Exemplo 1.21. $:: 5, 10, 20, \ldots, 320$

Exemplo 1.22. $:: 243, 81, 27, \ldots, 1$

Os números que formam a progressão, chamam-se termos. Indica-se o número de termos com a letra n. O número relativo pelo qual se multiplica cada termo para obter o seguinte chama-se razão. Representa-se com a letra q.

A progressão geométrica diz-se, crescente ou decrescente conforme a razão seja maior do que um ou menor do que um (positivo). A progressão geométrica diz-se limitada ou ilimitada conforme possua um número finito ou infinito de termos.

Dois termos de uma progressão geométrica limitada chamam-se equidistantes dos extremos, quando o número de termos que precedem um deles é igual ao número de termos que seguem o outro.

Interpolar ou inserir m meios geométricos entre dois números a e b, é formar uma progressão geométrica de $m + 2$ termos, cujos extremos sejam a e b.

Propriedades das Progressões Geométricas

1ª propriedade: Em uma progressão geométrica, a divisão de um termo qualquer pelo seu precedente é constante e igual a razão. Essa propriedade é uma consequência da definição 1.

2ª propriedade: Cada termo de uma progressão geométrica, excetuando os termos extremos, é a média geométrica entre um termo precedente e o seguinte. Seja a_i, um termo genérico de uma progressão geométrica. Temos que a_{i-1} é o termo que precede a_i e a_{i-1}, o termo que o segue.

Sabemos pela propriedade 1 que

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_{i+1}}{i}$$

$$a_i^2 = a_{i-1} \cdot a_{i+1}$$

3ª propriedade: Cada termo de uma progressão geométrica, a partir do segundo, é igual ao primeiro termo multiplicado pela razão, elevado a um expoente igual ao número de termos que o precede.

Executando um produto telescópico, temos:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 \cdot q \\
a_3 &= a_2 \cdot q \\
&\vdots \\
a_{n-1} &= a_{n-2} \cdot q \\
a_n &= a_{n-1} \cdot q \\
a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\
a_1 &= \frac{a_n}{q^{n-1}} \\
q &= \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}
\end{aligned}
$$

4ª propriedade: Em uma progressão geométrica limitada, o produto de dois termos equidistantes dos extremos, é igual ao produto dos extremos.

Sejam a_{k+1} e a_{n-k}, dois termos equidistantes dos extremos da progressão:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

com n termos e razão q.

Considerando-se a_{k+1}, como último termo da progressão cujo primeiro termo é a_1 e $a_{n=k}$ como primeiro termo da progressão cujo último termo é a_n temos:

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_1 \cdot q^k \\
a_{n-k} &= \frac{a_n}{q^k} \\
a_{k+1} \cdot a_{n-k} &= a_1 \cdot a_n
\end{aligned}
$$

5ª propriedade: Em uma progressão geométrica limitada de número ímpar de termos, o termo do meio é a média geométrica dos extremos a de dois termos quaisquer equidistantes dos extremos.

6ª propriedade: A soma dos termos de uma progressão geométrica limitada.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \tag{1.1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \tag{1.2}$$

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} \tag{1.3}$$

Vamos chamar a equação (1.2).

Multiplicando todos os termos de (1.2), por q, temos:

$$qS_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^n$$

Vamos chamar esta equação (1.3).

Fazendo (1.3) - (1.2) temos:

$$\begin{aligned} q \cdot S_n - S_n &= a_1 \cdot q^n - a_1 \\ S_n \cdot (q-1) &= a_1 \cdot q^n - a_1 \\ S_n &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \end{aligned}$$

7ª propriedade: Em uma progressão geométrica ilimitada, a soma de n termos da progressão, quando este número cresce ilimitadamente, tende para um valor definido chamado limite da soma ou soma de progressão. Esta propriedade é válida para $0 < q < 1$.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n = \frac{a_1(0-1)}{q-1}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

1.9 Utilização de Recorrências em Matemática Financeira, através do uso de Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Uma operação fundamental da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém dispões de um capital, empresta a outro por um certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital, acrescido de uma remuneração, que chamamos de juros, pelo empréstimo. Vamos denominar:

$C \longrightarrow Capital$, $J \longrightarrow juros$,$n \longrightarrow tempo$,$i \longrightarrow taxa$, $M \longrightarrow Montante$.

Temos que $M = C + J$ e $i = \dfrac{J}{C}$.

Os sistemas de capitalização dos juros, podem ser: simples ou compostos.

Sistema de Capitalização Simples

Este sistema, veremos que está ligado a uma progressão aritmética (PA), pois a cada intervalo de tempo, acrescentamos juros porém, este não é incorporado ao capital.

Vamos desenvolver o raciocínio:

$$M = C + J$$

A cada mês, acrescentamos os juros que são calculados como:

$$J = C \cdot i \cdot 1,$$

pois $n = 1$, então temos:

$$M = C + J_1 + J_2 + \cdots + J_n,$$

portanto, todo mês acrescentamos uma parcela de mesmo valor numérico, assim segue fórmula para o Montante no Regime de Capitalização Simples:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot n)$$

.

Exercício 1.6. *Você tem que pagar um empréstimo de R\$ 1000,00 em 5 parcelas. Sabe-se que os valores das parcelas são: R\$ 300,00, R\$ 280,00, R\$ 260,00, R\$ 240,00, R\$ 220,00. Quanto será pago por este empréstimo?*

Para melhorar o entendimento do problema, desenhamos o ***diagrama de fluxo de caixa*** *para a operação. Este diagrama é uma ferramenta muito útil na resolução de questões financeiras.*

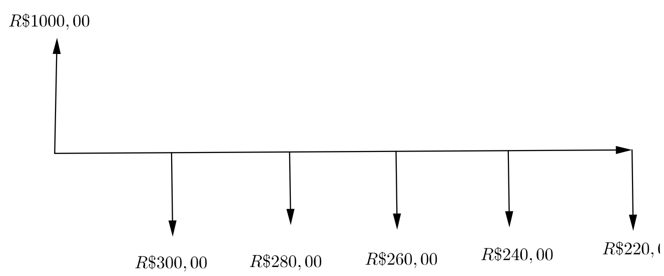


Figura 4 – Planilha de Custos

Note que o valor das parcelas diminui R\$ 20,00 todo mês. Essa série é uma PA de diferença "d" entre os termos no valor de R\$ 20,00.

A fórmula para determinar a soma dos termos de um PA finita, é a seguinte:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

então o montante será:

$$M_5 = \frac{(300 + 220) \cdot 5}{2} = \frac{2600}{2} = 1300$$

Portanto, vocês pagou R\$ 1300,00, pelo empréstimo de R\$ 1000,00. Em um financiamento de imóvel, no qual a amortização é constante, essa relação é aplicada.

Tabela da Aplicação de Amortização

N	SD	A	J	PMT
0	1000	-	-	-
1	800	200	100	300
2	600	200	80	280
3	400	200	60	260
4	200	200	40	240
5	200	200	20	220
Total	-	1000	300	1300

Tabela 1 – Tabela de Aplicação de Amortização

Trata-se de um Sistema de Amortização Constante com taxa de 10% ao mês.

Sistema de Capitalização Composto

Determinaremos agora a fórmula do Montante para um Regime de Capitalização Composta.

Para facilitar o entendimento, iremos aplicar esse conceito em um exemplo prático, ou seja, vamos determinar o montante produzido por um capital de $R\$100,00$, aplicado a juros compostos de 10% ao mês, capitalizado mensalmente, durante três meses. Portanto, temos: $C = 100$,

$M = C \cdot (1 + i)$, $n = 1$ período.

Após o 1º mês, temos:

$$M = 100(1 + 0,1) = 110$$

Após o 2º período, teremos:

$$M = 110(1 + 0,1) = 121$$

Após o 3º período, teremos:

$$M = 121(1 + 0,1) = 133,10$$

Como o fator $(1+i)$ varia de acordo com a quantidade de períodos de capitalização, fica fácil definirmos a fórmula do termo geral da capitalização composta.

$$M = C(1+i)^n$$

.

Lembrando a fórmula do termo geral de uma PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n+1},$$

concluímos que:$M = a_{n+1}$, $C = a_1$ e $(1+i)^n = q^n$

Veja que, através da recorrência de termos, conseguimos obter a fórmula de capitalização em juros compostos.

Exemplo 1.23. *Qual o capital que, aplicado a uma taxa de juros compostos de* $1,5\%$ *ao mês, capitalizado mensalmente, produz o montante de* $R\$2816,23$*, após oito meses?*

$$\begin{aligned} i &= 0,015 \\ (1+i) &= 1,015 \\ M &= C(1,015)^8 \\ C &= \frac{2816,23}{(1,015)^8} = 2500 \end{aligned}$$

Também utilizamos o conceito de PG, para modelo de renda para calcular o valor atual PV. Chamamos de PV o valor atual de um capital, PMT o valor das parcelas a serem pagas em regime de juros compostos.

Temos que:

$$PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}\right]$$

1.10 Funções

Diz-se que uma variável y é uma função de uma variável x, quando a cada valor de x corresponda, mediante uma certa lei, um valor de y. Indica-se $y = f(x)$.

Sucessões
Denomina-se sucessão a uma função cujo campo de definição é o conjunto dos números naturais

Termo Geral: É uma fórmula que permite calcular um termo de ordem n qualquer da sucessão, indicado por $f(n)$ ou a_n .

Exemplo 1.24.

$f(n) = 2n - 1$	$1, 3, 5, \ldots$
$f(n) = 2n$	$2, 4, 6, \ldots$
$f(n) = \dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}$
$f(n) = (-1)^{n+1} \cdot n^2$	$-4, 9, -16, \ldots$
$f(n) = 2 \cdot 3^{n-1}$	$2, 6, 18, 54, \ldots$
$f(n) = \dfrac{1}{[\log(n+1)]^n}$	$\dfrac{1}{\log 2}, \dfrac{1}{(\log 3)^2}, \ldots$

Tabela 2 – Tabela de Funções

Uma equação tem caráter recursivo, quando é definida em termos dela própria, ou seja, quando encontrar a solução de um determinado valor de n significa ter que calcular as soluções de todos os valores anteriores a esse n. É importante saber como lidar com essas relações de recorrência, já que, são muito comuns. Na matemática, por exemplo, podemos encontrar a ideia de recursividade em algo simples com o cálculo fatorial.

$$0! = 1$$

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

para todo $n \geqslant 0$

Ou em assuntos mais sofisticados, com a construção de números naturais a partir dos axiomas de plano. Outro exemplo clássico da relação de recorrência é o algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum:

$$mdc(0, n) = n$$

$$mdc(m, n) \equiv n \pmod{m},\ m > 0.$$

Muitos algoritmos são baseados em relações recorrentes e problemas combinatórios considerados difíceis. A primeira vista podem ser resolvidos mais facilmente, se esses problemas forem apresentados na forma de elações de recorrências. Estas, geralmente são dadas por um conjunto e equações contendo um valor inicial e outra equação para o valor geral em termos dos anteriores. Isso significa, se quisermos saber o n-ésimo termo de uma sequência dada por uma relação recorrente, teremos que calcular os $n-1$ termos anteriores, o que, na prática, não é nada interessante, especialmente para n grande. Então, o mais natural é que encontramos uma forma fechada para a relação de recorrência, ou seja, uma solução que não dependa dos termos anteriores, mas somente do valor de n .

2 Resultados do estudo

2.1 Resultados

Proposta de atividades para sala de aula

Após explorar os assuntos de Recorrência, Progressões Aritméticas, Progressões Geométricas e Análises Combinatórias, chegamos ao principal motivo desta dissertação, o plano de aula. A seguir, darei orientações, as quais apliquei para meus alunos do Ensino Médio, na preparação dos mesmos para a Olimpíada Brasileira de Matemática de 2015. e assim, o professor pode utilizar em sala de aula, acompanhado de atividades para um melhor aprofundamento

Solução via Recorrência para problemas da OBMEP.

Observando as provas aplicadas no ensino fundamental e médio da OBMEP, percebemos que algumas questões propostas nas provas dos três níveis da Olimpíada requerem um raciocínio recursivo para serem desenvolvidas. O estudo desta ferramenta, torna-se fundamental porque o professor pode efetuarem conjunto com seus alunos a construção de modelos e soluções gerais para diversos problemas. Não quero propor que toda a formalidade sobre recorrência matemática apresentada neste estudo, seja utilizada em sala de aula, e sim, incentivar a utilização de um método criativo de solucionar questões matemáticas.

Questão 2.1. *(Questão 09 – OBMEP 2012, nível 2).*

Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo seguindo o padrão indicado na figura 6. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?

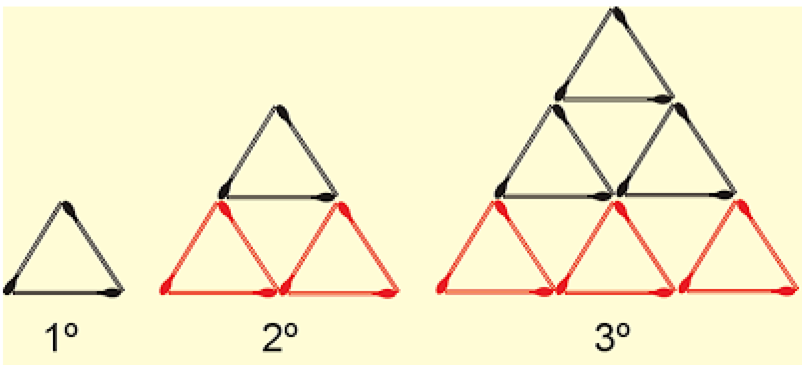


Figura 5 – Sequência de Triângulos

Solução*: Na figura 5, consideremos* $a_1 = 3$ *o número de palitos utilizados para* *construir o primeiro triângulo. Desta forma* $a_2 = a_1+6$, $a_3 = a_2+9$ *e assim sucessivamente, somando os palitos dos triângulos da figura. Assim, podemos formar a seguinte relação de recorrência.*

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 3$$
$$a_3 = a_2 + 3 \cdot 3$$
$$a_4 = a_3 + 4 \cdot 3$$
$$a_n = a_{n-1} + n \cdot 3$$

Executando-se uma soma dos membros, a qual chamamos de soma telescópica, obteremos:

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\ & = 3 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ & = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) \end{aligned}$$

$(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)$, *é a soma de uma PA de* $(n-1)$ *termos, então temos:*

$$S_n = \frac{(1+n) \cdot n}{2}$$

Então temos:

$$\frac{3n(n+1)}{2} = 135$$

$$3n^2 + 3n = 270$$

$$n^2 + n - 90 = 0$$

As soluções serão $n_1 = -10$ *e* $n_2 = 9$, *mas como são palitos não podemos ter número negativo, portanto o triângulo terá 9 palitos de lado.*

Questão 2.2. *(Questão 219 do banco de questões da O.B.M.E.P., página 33)*

Colando 6 triângulos – Construa uma figura com seis triângulos equiláteros adjacentes, o primeiro com lado de comprimento 1 cm e os triângulos seguintes com o lado igual a metade do lado do triângulo anterior, como indicado na figura.Qual é o perímetro dessa figura?

Solução:

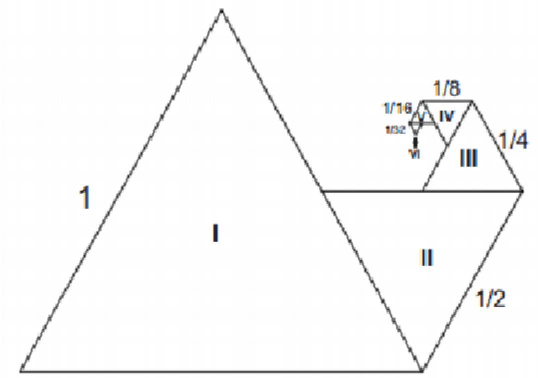


Figura 6 – Desenho dos triângulos

Quando a figura possui apenas um triângulo, seu perímetro é $P = 3cm$.

Após incluir, o segundo triângulo da figura aumenta em $\frac{1}{2}cm$, *ou seja,* $P_2 = P_1 + \frac{1}{2}$. *Com a colocação do terceiro triângulo a medida do contorno da figura aumenta em* $\frac{1}{4}cm$, *isto é,* $P_3 = P_2 + \frac{1}{4}$, *e assim sucessivamente.*

Portanto podemos escrever:

$$\begin{aligned} P_1 &= 3 \\ P_2 &= P_1 + \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ P_n &= P_{n-1} + \frac{1}{2^{(n-1)}} \end{aligned}$$

Questão 2.3. *(Questão 9 – OBMEP 2012, nível 1, 2 e 3). Um quadrado de lado 1 cm cm, roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na Figura 3, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.*

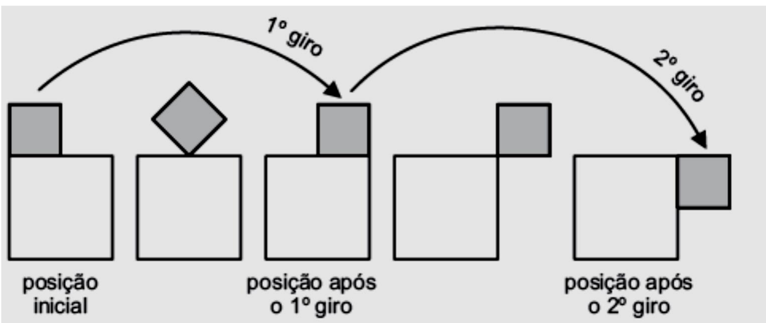
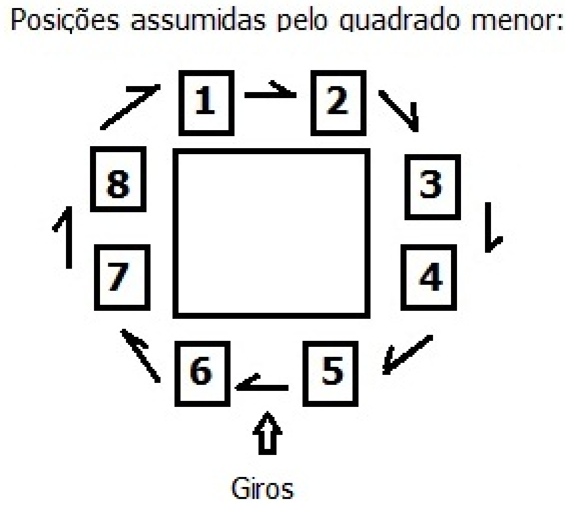


Figura 7 – Giro do Quadrado

Qual a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?



Solução:

Sendo assim, 8 giros corresponde a uma volta completa. Vamos então, dividir 2012 por 8 e considerar o resto da divisão, ele indicará o local onde o quadrado menor se posicionará no final dos giros.

2012 / 8 = 251 (resto 4), portanto, á posição de número 4 será a parada do quadrado menor.

Exercício 2.1. *(Grahn, Knuth e Patashnik, p. 306) De quantas maneiras diferentes podemos organizar n dominós* $2 \cdot 1$ *em uma caixa* $2 \cdot n$ *(sem contar as possíveis permutações entre peças)? Esse é um exercício cuja solução é mais facilmente encontrada quando utilizamos um raciocínio recursivo. Pensando nas possibilidades temos: Utilizando o raciocínio,*

n	números de soluções
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5

Tabela 3 – Número de Soluções

verificamos que trata-se de uma sequência de Fibonacci.
Portanto, temos:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

sendo $n \geqslant 2$.

Exercício 2.2. *Considere a relação Homogênea de recorrência.*

$$x_n = (n-1) \cdot x_{n-1}$$

com $x_1 = 2$

Queremos calcular o $100^{\underline{o}}$ *termo. Será que é necessário calcular os termos um a um? Isto levaria muito tempo, somente um computador faria rápido. Vejamos:*

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 \cdot x_1 \\ x_3 &= 2 \cdot x_2 \\ x_4 &= 3 \cdot x_3 \\ x_5 &= 4 \cdot x_4 \\ &\vdots \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (n-1) \cdot x_{n-1} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n &= 2 \cdot 2x_2 \cdot 3x_3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot x_{n-1} \end{aligned}$$

multiplicando tudo por $\dfrac{1}{x_i}$ *com* $i = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, *obtemos:*

$$x_n = 2[(n = 1)!]$$

Aplicando o Princípio da Indução Matemática

$n = 1$ *temos* $x_1 = 2[(1-1)!] = 2 \cdot 0! = 2$

Supondo que para n=k seja verdadeiro, então, vamos provar que vale para n=k+1

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 2[(k+1-1)!] = 2 \cdot k! \\ x_{k+1} &= k.2[(k-1)!] = 2 \cdot [k(k-1)!] = 2 \cdot k! \end{aligned}$$

c.q.d.

Exercício 2.3. *Problema do papiro egípcio de Rind.*

Foram repartidas cem medidas de trigo entre cinco pessoas de modo que, a segunda mais que a primeira, tanto quanto a primeira recebeu a mais que a segunda, a quarta recebeu mais que a terceira e a quinta mais que a quarta. Além disso, as duas primeiras juntas receberam sete vezes menos que as três últimas juntas. Quanto recebeu cada pessoa?

Solução: As quantidades de medidas de trigo recebidas pelas pessoas formam uma progressão aritmética de 5 termos, na qual a soma das 3 últimas é igual a sete vezes a soma dos 2 primeiros. Seja, $a-2r, a-r, a, a+r, a+2r$*, as medidas do trigo.*

Soma $5a = 100$*, portanto uma das pessoas recebe 20 medidas de trigo.*

$$a+a+r+a+2r = 7[(a-r)+(a-2r)]$$

$$60+3r = 7[2a-3r]$$

$$60+3r = 280-21r$$

$$24r = 220n$$

Assim, as medidas são

$$\frac{5}{3}, \frac{65}{6}, 20, \frac{175}{6}, \frac{115}{3}$$

Exercício 2.4. *Uma pessoa sai às compras e gasta na primeira loja que entra, metade do que tem no bolso e mais um real. Na segunda loja, gasta metade do que sobrou mais um real. Na loja seguinte, ocorre o mesmo. Entretanto, ao sair da terceira e última loja, a pessoa percebe que não tem dinheiro algum. Quantos reais ela possuía ao sair de casa?*

Solução: Seja a_n *a sequência que fornece a quantidade, em reais, que restou em cada compra. Após cada compra temos:*

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - 1$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} - 1$$

Resolvendo esta recorrência temos:

$$a_{n+1} = \frac{a_1+2}{2^n} - 2$$

Temos que $a_4 = 0$.

$$\frac{a_1+2}{2^3} - 2 = 0$$

$$\frac{a_1 + 2 - 16}{8} = 0$$

$$a_1 = 14$$

Portanto, ele tinha R\$14,00 ao sair de casa.

Exercício 2.5. *(32^{nd} British Mathematical Olympical, 1996) Uma função f é definida para todos os inteiros positivos e satisfaz as condições:*

$$f(1) = 1996$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = n^2 \cdot f(n)$$

Calcule o exato valor de $f(1996)$.

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + = n^2 \cdot f(n) - f(n)$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + = f(n) \cdot (n^2 - 1)$$

$$f(n) = \frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)}{n^2 - 1}$$

$$f(2) = \frac{f(1)}{3}$$

$$f(3) = \frac{f(1) + f(2)}{8} = \frac{f(1)}{6}$$

$$f(4) = \frac{f(1) + f(2) + f(3)}{15} = \frac{f(1)}{10}$$

A solução de recorrência é

$$f(n) = \frac{f(1)}{\binom{n+1}{2}}$$

Vamos provar por indução matemática

para n=1 temos $f(1) = \dfrac{f(1)}{\binom{2}{2}} = f(1)$

Supondo que a expressão é válida para um certo n, vamos provar que vale para n+1.

$$(n^2 - 1) \cdot f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

e

$$[(n+1)^2 - 1] \cdot f(n+1) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Subtraindo uma igualdade de outra, temos:

$$\begin{aligned}
&[(n+1)^2 - 1] \cdot f(n+1) - (n^2 - 1) \cdot f(n) = f(n) \\
&(n^2 + 2n + 1 - 1) \cdot f(n+1) - (n^2 - 1) \cdot f(n) = f(n) \\
&(n^2 + 2n) \cdot f(n+1) = f(n) + n^2 \cdot f(n) - f(n) \\
&(n^2 + 2n) \cdot f(n+1) = n^2 \cdot f(n) \\
&f(n+1) = \frac{n^2 \cdot f(n)}{n \cdot (n+2)} \\
&f(n+1) = \frac{n \cdot f(n)}{n+2}
\end{aligned}$$

Mas, por hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned}
f(n) &= \frac{f(1)}{\binom{n+1}{2}} \\
f(n+1) &= \frac{n}{n+2} \cdot \frac{f(1)}{\binom{n+1}{2}} \\
\binom{n+1}{2} &= \frac{(n+1)!}{2! \cdot (n+1-2)!} = \frac{(n+1)!}{2! \cdot (n-1)!} \\
f(n+1) &= \frac{f(1)}{\frac{n+2}{n} \cdot \frac{(n+1)!}{2! \cdot \cdot (n-1)!}} \\
\frac{(n+2)!}{2!n!} &= \frac{(n+2)!}{2! \cdot (n+2-2)!} = \binom{n+2}{2}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$f(n+1) = \frac{f(1)}{\binom{n+2}{2}}$$

c.q.d.

Então:

$$f(1996) = \frac{f(1)}{\binom{1995+2}{2}} = \frac{f(1)}{\binom{1997}{2}}$$

$$f(1996) = \frac{1996}{\frac{1997 \cdot 1996}{2}} = \frac{2}{1997}$$

Exercício 2.6. *Considere os números 24 e 48. Note que, além de o último ser o dobro do primeiro, ambos são antecessores de quadrados perfeitos. Ou seja,*

$$24 + 1 = 25 = 5^2$$
$$2 \cdot 24 + 1 = 48 + 1 = 49 = 7^2$$

Existirão outras duplas de inteiros positivos com a mesma propriedade? Quantos? Quais?

Solução:

$$\begin{aligned} &k + 1 = x^2 \\ &2 \cdot k + 1 = y^2 \\ &2 \cdot (x^2 - 1) + 1 = y^2 \\ &2x^2 - 2 + 1 = y^2 \\ &2x^2 - y^2 = 1 \end{aligned}$$

Solução trivial é o par (1,1)

$$2 \cdot 1^2 - 1^2 = 1$$

A solução seguinte, é para o par $(5, 7)$.

$$k = 5^2 - 1 = 24$$

Para uma solução (a_n, b_n), *temos pela variante da Equação de Pell.*

$$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$$

$$b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2}$$

Assim, o problema apresentado, tem infinitas soluções, a próxima (29,41)

$$K = 29^2 - 1 = 840$$

$$2 \cdot K = 1680$$

Exercício 2.7. *Torre de Hanoi.*

Problema: Obtenha os discos a partir da base 1 e transfira todos para a base 3, utilizando a base 2 como auxiliar.

Mova apenas 1 disco de cada vez.

Nunca colocar um disco maior sobre um menor.

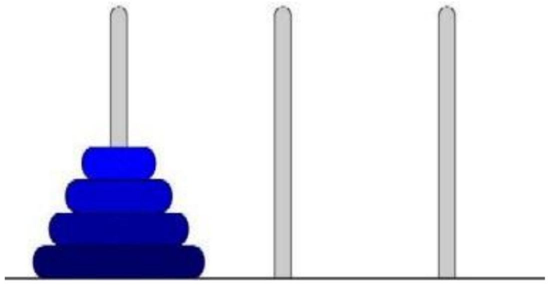


Figura 8 – Torre de Hanoi

Iremos dividir as soluções de acordo com o número de discos presentes.

Para $n = 0$ *não há o que fazer, pois não há discos; Para* $n = 1$ *basta fazer* 1 *movimento; Para* $n = 2$ *procedemos da seguinte forma, seja A e B os discos, movimentamos o disco A para o pino auxiliar, depois B para o outro pino, após isso trazemos o disco A para cima do disco B, resolvemos o problema com* 3 *movimentos.*

Para $n = 3$ *procedemos da seguinte forma: Resolvemos o problema para dois discos (3 movimentos), depois deslocamos o maior disco para o pino restante (1 movimento), por fim movemos os dois discos do outro pino para cima do disco maior (3 movimentos), totalizando* 7 *movimentos.*

Para $n = 4$*, Resolvemos o problema para três discos(7 movimentos), depois movemos o maior disco (1 movimento), após isso trazemos os três discos que já estão no outro pino para cima do maior disco (7 movimentos), totalizamos* 15 *movimentos.*

De forma análoga procedemos para um número qualquer. Note que o número necessário de movimentos para a solução forma uma sequência, dada por $1, 3, 7, 15, \ldots;$. *Percebemos que a sequência se trata das potências de* 2 *menos* 1*, veja:*

$$1 = 2^1 - 1$$

$$3 = 2^2 - 1$$

$$7 = 2^3 - 1$$

$$15 = 2^4 - 1$$

Deste modo, para n discos teremos que realizar $2^n - 1$ *movimentos. A fórmula geral encontrada não foi deduzida, é intuitiva, é uma previsão, apesar de estar correta, como veremos adiante, se baseia na observação, portanto estamos "chutando"o resultado.Portanto, realizaremos uma dedução mais rigorosa que esta, para tal fim utilizaremos relações de recorrência.*

Primeiramente temos que encontrar tal relação. Ora, observamos que para resolver a torre com n discos basta resolver o problema para $n-1$ *discos, depois mover o maior disco e após isso mover os* $n-1$ *discos para cima do maior disco, assim o problema está resolvido. Mas para resolver o problema para* $n-1$ *discos temos que olhar para* $n-2$ *discos, e para resolver o anterior temos que olhar para* $n-3$ *discos, e assim sucessivamente até termos 1 disco.*

Seja $T(n)$ *o número de movimentos necessários para resolver o problema para n discos, assim olhamos para* $n-1$ *discos, isso gasta* $T(n-1)$ *movimentos, deslocamos o maior disco para o pino restante, isso gasta mais 1 movimento, após isso movemos os* $n-1$ *discos para cima do maior disco, isso gasta* $T(n-1)$ *novamente, temos que o total de movimentos foram:* $T(n) = 2T(n-1) + 1$

E isso vale para os demais discos, temos aqui nossa relação de recorrência. Para encontrar o termo geral reordenamos a equação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&T(n) - 2T(n-1) = 1\\
&T(n-1) - 2T(n-2) = 1\\
&T(n-2) - 2T(n-3) = 1\\
&T(2) - 2T(1) = 1\\
&T(1) - 2T(0) = 1
\end{aligned}$$

Por definição $T(0) = 0$, *pois representa o número de movimentos necessários para mover* 0 *discos, ou seja, não é necessário fazer nada. Veja que, ao contrário da P.A., não podemos simplesmente somar cada equação, pois cada termo a partir de* $[;T(n);]$ *aparece 3 vezes, 1 vez positivo e 2 vezes negativo, assim teríamos o primeiro termo seguido da subtração dos termos restantes até* $2T(0)$, *confira você este fato. Para obter progresso é necessário que multipliquemos a segunda equação por 2, a terceira por 4, a quarta por 8,..., e a última por* 2^{n-1}*:*

$$\begin{aligned}
&T(n) - 2T(n-1) = 1\\
&2T(n-1) - 4T(n-2) = 2\\
&4T(n-2) - 8T(n-3) = 4\\
&2^{n-1}T(1) - 2^nT(0) = 2^n - 1
\end{aligned}$$

Ao somarmos cada equação vemos que os termos

$$2T(n-1), 4T(n-2), 8T(n-3), \ldots, 2^{n-1}T(1)$$

irão se cancelar, restando apenas

$$T(n) - 2^n T(0) = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}$$

Por definição $T(0) = 0$ *e as parcelas à direita da equação formam uma P.G. de razão* 2, *e sua soma é igual a* $2^n - 1$, *assim a equação se reduz à:*

$$T(n) = 2^n - 1$$

Esta é a fórmula do número mínimo de movimentos necessários para movermos n discos na torre de Hanói e resolver o problema.

Exercício 2.8. *Duas sequências de número reais* x_n *e* y_n, *estão relacionadas pelas recorrências.*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2 \cdot x_n + y_n \\ y_{n+1} &= 5 \cdot x_n - 2 \cdot y_n \end{aligned}$$

1. *Mostre que a sequência satisfaz a recorrência* $x_{n+2} = 9 \cdot x_n$.

$$\begin{aligned} x_{(n+1)+1} &= 2x_{n+1} + y_{n+1} \\ x_{n+2} &= 2x_{n+1} + 5x_n - 2y_n \\ x_{n+1} - 2x_n &= y_n \\ x_{n+2} &= 2x_{n+1} + 5x_n - 2_{n+1} + 4x_n \\ x_{n+2} &= 9x_n. \end{aligned}$$

2. *Suponha* $x_0 = y_0 = 1$. *Encontre as fórmulas gerais para as sequências* $x_n + y_n$, *em função de* n.

$$\begin{aligned} x_n &= 9x_n \\ x_{n+2} - 9x_n &= 0 \end{aligned}$$

A equação a resolver é $k^2 - 9 = 0$.

Então temos $K = 3$ *ou* $K = -3$.

$$x_n = C_1 3^n + C_2(-3)^n$$
$$x_0 = C_1 3^0 + C_2(-3)^0$$
$$C_1 + C_2 = 1$$
$$x_{0+1} = 2x_0 + y_0 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
$$x_1 = C_1 3^1 + C_2(-3)^1$$
$$3C_1 - 3C_2 = 3$$
$$C_1 - C_2 = 1$$

Utilizando as duas equações obtidas temos:

$$2C_1 = 2$$
$$C_1 = 1$$
$$C_2 = 0$$
$$x_n = 3^n$$
$$y_n = x_{n+1} - 2x_n = 3^{n+1} - 2 \cdot 3^n$$
$$y_n = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^n = (3-2)3^n = 3^n$$

Então temos:

$$x_n = y_n = 3^n$$

3 Conclusão

Recorrências no ensino da Matemática Financeira.

Nas aulas de Matemática Financeira, nos cursos de Ciências Contábeis e Administração de Empresas, utilizei o uso de recorrências ao explicar a obtenção de fórmulas de juros e montantes, que utilizam progressões aritméticas e geométricas, principalmente nos exercícios de série de pagamentos uniformes e não uniformes, tentando dar um foco que os alunos ao resolverem um problema deste tipo, utilizassem o raciocínio das recorrências para equacionarem os problemas, para depois utilizar a calculadora financeira ou as planilhas do Excel. Percebi ao final do curso e os próprios alunos opinaram que este método ajuda muito no raciocínio. Por este motivo, passei a adotar no programa do curso, o aprendizado do método de recorrências de 1ª e 2ª ordem, e gostaria de deixar registrado, para que outros professores possam também utilizar.

Recorrências no ensino da Matemática Básica.

Também neste trabalho, salientei por meio de perspectiva de diferentes métodos a presença de equações recursivas em áreas diferentes, bem como o uso de recorrências para facilitar a resolução de problemas de Progressões Geométricas, Progressões Aritméticas, Álgebra Linear e Análise Combinatória. Acredito, que é necessário utilizar uma metodologia diferenciada para abordar e resolver questões matemáticas, sempre priorizando o uso da criatividade, na construção de modelos e deixando de lado a aplicação sistemática de fórmulas prontas. A ferramenta - recorrências matemáticas - deve ser utilizada para para o desenvolvimento do raciocínio do aluno; isto é, os alunos reconhecem padrões, tiram conclusões e com isso, aprendem a organizar ideias e construir seus próprios modelos. Sendo que, ao professor caberá o papel de coadjuvante na criação destas, tornando-se um agente mediador entre o aluno e a matemática. Os problemas, deveriam ser propostos na escola, para a construção de novos conceitos e novos conteúdos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal. Entretanto, alguns professores tem visão restrita dos problemas, pois o hábito tradicional de desenvolver um conceito, consiste em exposição oral, apresentação de exemplos ou problemas. Mas, é preciso diferenciar problema de exercício:

—Exercício é uma atividade de adestramento do uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido, como a aplicação de algum algorítimo ou fórmula já conhecida e, envolve mera aplicação de resultados teóricos.

—Problemas, necessariamente envolve invenção e/ou criação significativa.

Referências

AXLER, S. *Pré-cálculo: uma preparação para o cálculo manual de soluções para o estudante*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 5ª. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

HEFEZ, A. *Elementos de aritmética*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

HUNTER, D. J. *Fundamentos da matemática discreta*. [S.l.]: LTC, 2011.

LAL, A. K. Lecture notes on discrete mathematics. 2016.

LOPES, A. V. *Atividades matemáticas na sala de aula*. [S.l.: s.n.], 1996.

NETO, A. A. *Matemática financeira e suas aplicações*. 13. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2016.

PINTO, J. d. S. Tópicos de matemática discreta. *Tópicos de matemática discreta*, Universidade do Aveiro, 2006.

SCINCE, A. C. T. C. weyi of C. Discrete mahematics. Spring, Chiao Tung, 2009.

TAHAN, M. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2006.