



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Tópicos de Geometria Analítica: Elipse

Cesar Pereira Martins

Goiânia

2013

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Cesar Pereira Martins.		
E-mail:	cesarpereiramat@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Secretaria Municipal de Educação – Goiânia - GO		
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO
		CNPJ:	00889834/0001-08
Título:	Tópicos de Geometria Analítica: Elipse		
Palavras-chave:	Geometria Analítica; Cônicas; Elipse; Propriedades; Aplicações.		
Título em outra língua:	Topics of Analytical Geometry: Ellipse		
Palavras-chave em outra língua:	Analytical Geometry; Conics; Ellipse; Properties; Application.		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico.		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	15/03/2013		
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT		
Orientador (a):	Prof. Dr. Durval José Tonon		
E-mail:	djtonon@gmail.com		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.



Assinatura do (a) autor (a)

Data: 25 / 03 / 2013

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Cesar Pereira Martins

Tópicos de Geometria Analítica: Elipse

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.

Goiânia

2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG**

M386t Martins, Cesar Pereira.
Tópicos de geometria analítica [manuscrito] : elipse
[manuscrito] / Cesar Pereira Martins. - 2013.
63 f. : figs.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2013.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1. Geometria analítica. 2. Cônicas. 3. Elipse. I. Título.

CDU: 514.135

=

César Pereira Martins

Tópicos de Geometria Analítica: Elipse

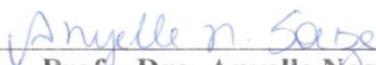
Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 15 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues
Membro/UnB



Profa. Dra. Anyelle Nogueira de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Membro/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Cesar Pereira Martins graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás. É professor há dezenove anos, sendo que neste período já atuou como professor do Ensino Fundamental, Médio e Superior.

Dedico este Trabalho aos meus pais Pedro Pereira Martins(em memoria) e Maria Onofra Martins.

Agradecimentos

A História do indivíduo se faz na interação com a sua espécie, sendo assim me sinto impelido a agradecer todos que foram fundamentais para a construção de quem sou.

Assim agradeço:

meus pais, irmãos e irmãs, sobrinhos e sobrinhas, aos grandes amigos e a todos os professores que contribuíram para a minha formação, em especial ao professor Dr. Durval José Tonon pela orientação e a todos os professores que estão envolvidos na idealização e execução do PROFMAT.

Estes conjuntos que me ensinaram com suas vidas conceitos que a mente humana não consegue entender bem, mas que todos sabemos reconhecer quando vemos a sua manifestação: amor, perseverança, fé, abnegação, altruísmo, etc.

Àquelas que são a união de todos os conjuntos anteriores:

Kelen Darky Menezes Martins, Lara Menezes Martins e Amanda Menezes Martins.

Ao Deus criador dos Céus e da Terra.

Resumo

Tópicos de Geometria Analítica: Elipse inicia-se com o contexto histórico sobre o qual se originou o estudo das cônicas, mostrando que este tema foi socialmente construído em aproximadamente 2500 anos. Retoma alguns conceitos básicos de Geometria Analítica que são importantes para a compreensão do estudo das cônicas e suas propriedades. Centraliza a discussão no estudo da elipse, explorando a sua definição, equações na forma canônica e com os eixos transladados, como é feito no ensino médio. É mostrado como aplicação, destes conhecimentos, a Primeira lei de Kepler e as aplicações da propriedade refletora da elipse. Neste contexto retomamos parte do trajeto percorrido por Kepler até a obtenção de sua lei e provamos a propriedade refletora da elipse. Nos capítulos finais apresentamos alguns resultados importantes de Álgebra Linear e Geometria Analítica e usamos estes para classificar as cônicas a partir de sua equação geral. E por fim apresentamos a definição geral de cônicas a partir de sua excentricidade e suas equações em coordenadas polares.

Palavras Chave: Geometria Analítica; Cônicas; Elipse; Propriedades; Aplicações.

Abstract

Topics in Analytical Geometry: Ellipse begins with the historical context over which the study of conics had its origin , showing that this topic was socially constructed in approximately 2500 years. It resumes some basic concepts of Analytical Geometry which are important for the understanding of the study of conics and their properties. It centers the discussion in the study of the ellipse, exploring its definition, equations in canonical form with translated axes, as it is done in high school. It is shown as application, of its knowledge, the first law of Kepler and applications of the reflective property of the ellipse. In this context we resumed the part of the route taken by Kepler until the achievement of his law and we proved the reflective property of the ellipse. In the final chapters we present some important results from Linear Algebra and Analytical Geometry and use them to classify the conic from its general equation. And at last, we present a general definition of conics from their eccentricity and their equations in polar coordinates.

Keywords: Analytical Geometry, conics, ellipse, properties, application.

Lista de Figuras

1	Interpretação geométrica da solução de um sistema.	12
2	Terceira proporcional	15
3	Parábola de Menaecmus	16
4	Secções cônicas.	19
5	Hipérbole com dois ramos.	19
6	Correspondência biunívoca entre o plano e \mathbb{R}^2	21
7	Distância entre dois pontos.	22
8	Triângulo $\triangle ABC$ retângulo em A	22
9	Reta definida por dois pontos.	23
10	Círculo de centro C e raio r	24
11	Mediatriz do segmento \overline{AB}	25
12	Solução do Exemplo 2.3.	26
13	Elipse com régua e compasso	28
14	Elipse com material concreto	28
15	Elipse de Focos F_1, F_2	30
16	O gráfico de $f(x)$	30
17	Translação dos eixos coordenados	31
18	1ª lei de Kepler	36
19	Reta tangente a elipse	37
20	Dispositivo odontológico	38
21	Coliseu, retirado de [12].	39
22	Coliseu, retirado de [12].	39
23	Bilhar Elíptico, retirada de [13].	40
24	Bilhar Elíptico, retirada de [13].	40
25	Rotação dos eixos coordenados.	42
26	Hipérbole representada pela equação $x^2 - 4xy + y^2 + 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0$	48
27	Elipse representada pela equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$	49
28	Parábola representada pela equação $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3 = 0$	50
29	Demonstração do Teorema 6.1.	52
30	Ponto P em coordenadas polares.	53

31	Círculo em coordenadas polares.	54
32	Reta passando pelo pólo.	54
33	Sistema polar associado ao sistema cartesiano.	55
34	Elipse.	56
35	Hipérbole.	57
36	Parábola.	58

Sumário

Resumo	7
Abstract	8
Lista de Figuras	10
Introdução	12
1 Notas históricas	14
1.1 A origem das cônicas	14
1.2 As cônicas de Apolônio de Perga	18
2 Noções básicas para o estudo das cônicas	21
2.1 Coordenadas no plano	21
2.2 Ponto em \mathbb{R}^2 e distância entre dois pontos	21
2.3 Lugares geométricos em \mathbb{R}^2	23
3 Elipse	27
3.1 Definição de elipse no plano	27
3.2 Equação canônica da elipse	29
3.3 Equação da elipse com centro qualquer	31
4 Aplicações	34
4.1 A primeira lei de Kepler	34
4.2 Propriedade Refletora da Elipse	36
4.2.1 Aplicações em Ópticas	37
4.2.2 Aplicações na Arquitetura, Design e Engenharia	38
5 Classificação das cônicas	41
5.1 Rotação dos eixos coordenados	41
5.2 Autovalor e autovetor	43
5.3 Resultados importantes	43
5.4 Redução à forma canônica	45

6	Cônicas e Coordenadas polares	51
6.1	Definição geral de uma cônica	51
6.2	Coordenadas polares	52
6.3	Equação polar das cônicas	55
6.3.1	Elipse	55
6.3.2	Hipérbole	56
6.3.3	Parábola	58
	Conclusão	60
	Referências	61

Introdução

Ao estudarmos a disciplina MA23 (Geometria Analítica) deparamos com várias situações (problemas matemáticos) que sem o uso de ferramentas da Geometria Analítica apresentariam certa dificuldade para serem solucionadas e que resolvidas analiticamente se tornam muito fáceis. Um exemplo que ilustra bem isto é a demonstração de que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo tem comprimento igual à metade do comprimento da hipotenusa. Veja essa demonstração no Capítulo 2 deste trabalho. Diante destas situações e, levando em conta que a Geometria Analítica é um conteúdo também desenvolvido no Ensino Médio, decidimos então escrever este Trabalho de Conclusão de Curso abordando alguns tópicos relevantes apresentados em MA23.

Acreditamos que Geometria Analítica pode ser introduzida no Ensino Fundamental de modo que nesta etapa o aluno já consiga associar a solução de um sistema de equações do tipo
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$$
 que é o par ordenado $(3, -1)$ ao ponto $P(3, -1)$ de interseção das retas r e s de equações $r : x + y - 2 = 0$ e $s : 2x - 3y - 9 = 0$ no sistema de coordenadas cartesianas (\mathbb{R}^2) conforme ilustra a figura abaixo.

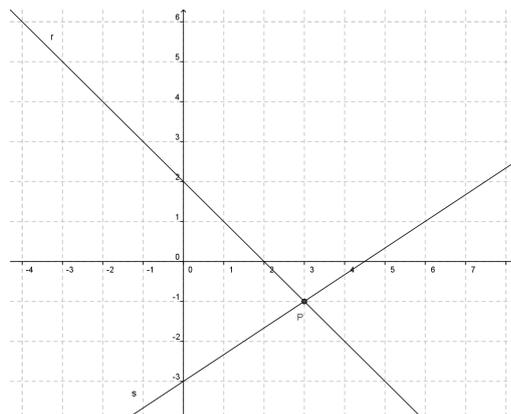


Figura 1: Interpretação geométrica da solução de um sistema.

A falta dessa associação entre álgebra e geometria nesta etapa e até mesmo nos primeiros anos do Ensino Médio faz com que muitos alunos concluam (de forma equivocada) que o sistema citado anteriormente admite duas soluções: $x = 3$ e $y = -1$,

enquanto que ao visualizar geometricamente a solução, fica claro que trata-se apenas de uma solução.

Imagine o quanto seria mais simples para uma pessoa que reside no Condomínio Jardim, bloco Hortências, apartamento 1104 se ela escrevesse seu endereço assim: Condomínio Jardim, $(H, 11, 4)$ e todos entendessem que a primeira coordenada do terno ordenado identifica o bloco Hortências, a segunda o 11º andar e a terceira o apartamento 4 deste andar. Veja que isto faria mais sentido, uma vez que 1104 não significa que há 1104 apartamentos naquele bloco. O zero utilizado em 1104 tem a função de separar o andar e o número do apartamento, ou seja, há aí um par ordenado, pois nesta situação 1104 não é um número, mas um símbolo que poderia facilmente ser substituído por $(11, 4)$.

Este trabalho trata apenas do estudo analítico da Geometria Plana com ênfase em Elipse, sua propriedade refletora e aplicações. Ao definir esta cônica, iremos abordá-la apenas nos casos em que esta ocupe posição específica em relação aos eixos coordenados conforme é tratado no Ensino Médio, no entanto, nos capítulos finais apresentarei a definição geral de cônicas, suas equações em coordenadas polares e critérios para classificá-las a partir da equação geral do 2º grau em \mathbb{R}^2 ,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

1 Notas históricas

1.1 A origem das cônicas

A civilização grega trouxe várias contribuições para o avanço da Matemática. Uma destas, foi o desenvolvimento do pensamento abstrato, ao contrário de civilizações anteriores como os egípcios e babilônicos que praticaram uma matemática utilitária. Platão, por exemplo, distinguia claramente uma matemática a ser utilizada pelos comerciantes e outra pelos intelectuais, aqueles que iriam governar, conforme é apresentado em [10]. Esta abordagem filosófica da matemática levou o mundo grego a atacar problemas de matemática pura, sem uma aplicação imediata. Dentre estes podemos destacar os clássicos problemas da quadratura do círculo, o problema de Delos ou duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. O primeiro provavelmente proposto por Anaxágoras, que de acordo com [3], viveu durante o quinto século antes de Cristo. Ele foi preso por afirmar que o Sol não era uma divindade mas uma grande pedra encandeceste, e no período em que esteve preso se dedicou a resolver o problema da quadratura do círculo. O qual fascinou os matemáticos por mais de 2000 anos. As tentativas de resolver este problema foi de fundamental importância, pois estimularam a pesquisa matemática de épocas posteriores e por não estarem ligados a nenhum problema prático, tornaram-se assim uma das sementes da matemática pura.

Neste momento é importante lembrar que resolver um problema para os gregos significava resolvê-lo através de construções com régua e compasso. Portanto encontrar a medida do lado de um quadrado que tivesse a mesma área de um círculo dado (quadratura do círculo) significava encontrar este através de construção com régua e compasso. Para melhor entendimento tomemos um retângulo de lados 12 cm e 3 cm, qual o lado do quadrado que possui a mesma área deste retângulo (quadratura do retângulo)?

Uma possível solução para este problema no período grego consistia em encontrar um segmento de medida x tal que

$$\frac{12}{x} = \frac{x}{3}.$$

O que facilmente poderia ser feito através da seguinte construção:

- a) Trace uma reta r ;
- b) Sobre r marque o segmento \overline{AB} de medida 12 cm e o segmento \overline{BC} de medida 3 cm;
- c) Trace a mediatriz do segmento \overline{AC} , determinando o ponto médio M deste segmento;
- d) M é o centro da circunferência cujo diâmetro é \overline{AC} ;
- e) Trace a circunferência de diâmetro \overline{AC} ;
- f) Trace a perpendicular a r passando por B , intersectando a circunferência em D ;
- g) Pelas relações métricas no triângulo retângulo, segue que $BD = x$. Veja Figura 2.

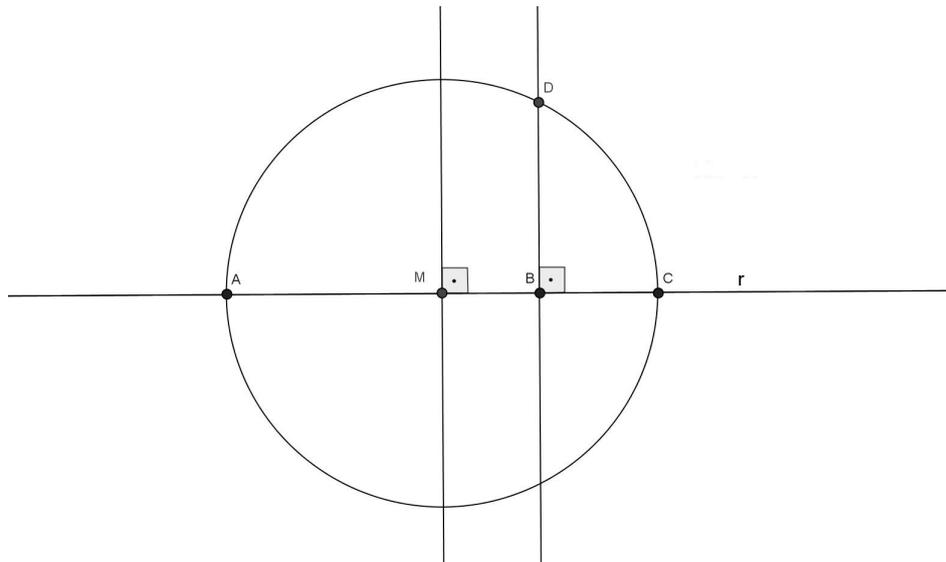


Figura 2: Terceira proporcional

Este tipo de solução inspirou os matemáticos da época a tentarem generalizar este procedimento, ou seja, dados os segmentos de medidas a e b encontrar dois segmentos de medidas x e y tais que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \quad (1)$$

Em [3] encontramos referências a Hipócrates de Chios, que viveu em Atenas por volta de 430 a.C., ele percebeu que este último problema continha a solução do problema da duplicação do cubo, pois se tomarmos $b = 2a$ na equação (1) e eliminarmos y teremos $x^3 = 2a^3$. Veja que no processo de eliminação de y temos as seguintes equações: $x^2 = ay$, $y^2 = xb$ e $xy = 2a^2$ que, em notação moderna, as duas primeiras representam parábolas e a terceira uma hipérbole.

Neste contexto os matemáticos gregos começaram a procurar curvas que satisfizessem (1). É importante ressaltar que para os gregos encontrar uma curva significava exprimi-la através de propriedades cinemáticas, como a trissetriz de Hípias citada em [3] ou como secção de um sólido. Na busca por tais curvas, o discípulo de Eudoxo, Menaecmus (380 a 320 a.C.), sabendo que uma curva que satisfizesse (1) resolveria o problema da duplicação do cubo e usando a perspectiva de determinação de curvas adotado pelos gregos, observou que havia uma família de curvas adequadas às soluções do problema seccionando um cone circular reto por um plano perpendicular à sua geratriz. E nos casos em que o ângulo do vértice do cone fosse agudo, obtuso ou reto geraria curvas diferentes, respectivamente, elipse, hipérbole e parábola. No caso do ângulo do vértice ser reto a curva obtida, em notação atual, seria da forma $y^2 = lx$, onde l é dito o *latus rectum* da curva e depende da distância em que o plano se encontra do vértice do cone. Vejamos isto:

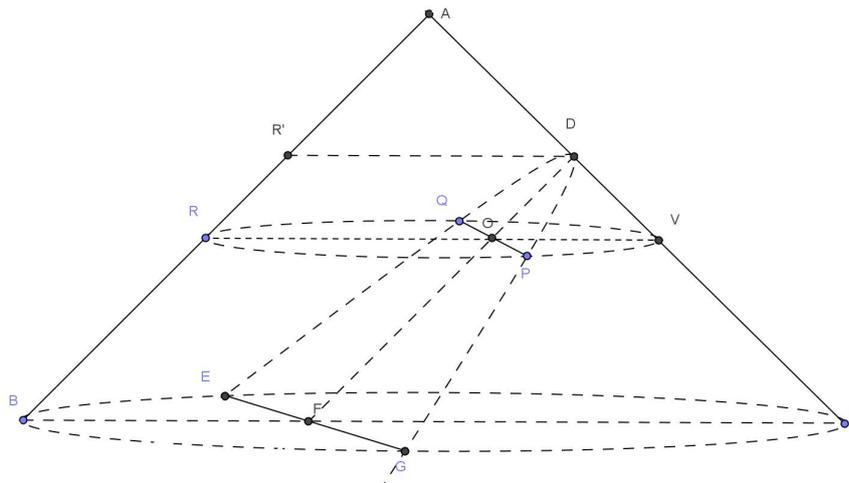


Figura 3: Parábola de Menaecmus

Seja ABC um cone cujo ângulo do vértice mede 90° , conforme a Figura 3. Neste caso a secção determinada pelo plano perpendicular à geratriz do cone é a curva EDG . Seja P um ponto pertencente a esta curva. Seccionando o cone por um plano paralelo à base que contém P , iremos determinar um círculo PVR , onde R e V são as intersecções das geratrizes do cone e o círculo. Sendo Q o outro ponto da curva que intersecta o círculo temos que

a') $\overline{PQ} \perp \overline{RV}$, pois \overline{RV} é um diâmetro que secciona \overline{PQ} em seu ponto médio O ;

b') $(OP)^2 = OR.OV$;

c') Os triângulos $\triangle ODV$ e $\triangle BCA$ são semelhantes, pois $\overline{OD} \perp \overline{AC}$ e \overline{OV} é paralelo a \overline{BC} . Daí,

$$\frac{OV}{OD} = \frac{BC}{AB};$$

d') Passando uma paralela a \overline{BC} por D , a intersecção desta com a geratriz perpendicular a \overline{AC} , denominamos R' . Logo, os triângulos $\triangle R'DA$ e $\triangle ABC$ são semelhantes. Daí,

$$\frac{R'D}{AR'} = \frac{BC}{AB};$$

e') Tomando $OP = y$ e $OD = x$, observe que equivale a tomar o plano cartesiano com origem em D , e os eixos OX e OY contendo \overline{OD} e \overline{AC} respectivamente. Daí, dos itens b'), c') e d') temos $y^2 = OR.OV$. Como $R'DOR$ é um paralelogramo, $R'D = OR$. Logo,

$$y^2 = AR'.\frac{BC}{AB}.OD.\frac{BC}{AB} = \frac{AR'.BC^2}{AB^2}.x.$$

Como AR' , BC e AB são os mesmos para todo P , tomemos $l = \frac{AR'.BC^2}{AB^2}$.

Sendo assim,

$$y^2 = lx$$

como queríamos mostrar. Para os casos em que o ângulo do vértice é agudo ou obtuso os cálculos são análogos.

Após estas conclusões, para Menaecmus determinar as curvas que são soluções de (1) basta determinar uma parábola de *latus rectum* a e outra de *latus rectum* $2a$.

E assim, através destes problemas e da busca por soluções dos mesmos, são introduzidas em matemática as curvas que mais tarde ficaram conhecidas por parábola, hipérbole e elipse. Após os trabalhos de Menaecmus vários matemáticos gregos produziram trabalhos explorando estas curvas e suas propriedades, entre eles, Euclides e Arquimedes. Todavia, a obra grega sobre cônicas que se destacou foi aquela produzida por Apolônio de Perga.

1.2 As cônicas de Apolônio de Perga

De acordo com [3], Apolônio nasceu em Perga na Panfília, possivelmente entre os anos de 262 a 192 a.C.. Este parece ter sido educado em Alexandria e passado algum tempo lecionando na universidade local. Juntamente com Euclides e Arquimedes, Apolônio está contado entre os três maiores matemáticos do período grego e isto se deve em grande parte por sua obra produzida sobre as cônicas. A obra de Apolônio sobre as secções cônicas foi escrita em oito livros, sendo que os quatro primeiros tratam de problemas elementares que possivelmente já haviam sido abordados por outros matemáticos anteriores a este. Os quatro últimos trazem uma abordagem diferente das demais obras existentes, bem como novos resultados. Segundo [3] e [9], os méritos da obra de Apolônio em relação às demais são os seguintes:

- Ele mostrou que a elipse, hipérbole e a parábola podem ser obtidas de um mesmo cone, bastando variar a inclinação do plano de secção, conforme a Figura 4, obtida em [15]. Para definir as três curvas Apolônio tomou uma secção meridiana VAB do cone, onde \overline{AB} é o diâmetro da base do cone e V é o vértice do mesmo. As cônicas foram então definidas como intersecções deste cone com determinados planos que cortam o segmento \overline{AB} ou seu prolongamento. Para isto, define-se:
 - r a reta que contém a intersecção do plano que secciona o cone e o triângulo $\triangle VAB$.

Daí,

- * Se r for paralela ao lado \overline{AV} ou ao lado \overline{BV} do triângulo $\triangle VAB$ obtém-se uma parábola;
- * Se r intersectar os dois lados \overline{AV} e \overline{BV} do triângulo $\triangle VAB$ obtém-se uma elipse (note que o círculo é um caso particular de elipse);
- * Se r intersectar um dos lados, respectivamente, \overline{AV} (ou \overline{BV}) do triângulo $\triangle VAB$ e o prolongamento do outro lado no sentido, respectivamente, de B para V (ou de A para V), obtém-se uma hipérbole.

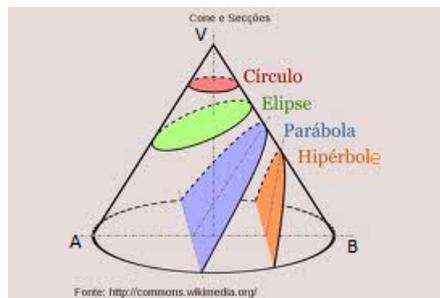


Figura 4: Secções cônicas.

- O cone para obtenção das cônicas não precisa ser reto. E este fato não altera as propriedades das curvas;
- Substituiu o cone de uma só folha pelo cone de duas folhas. Assim, passando a hipérbole a ter dois ramos; Veja a Figura 5 obtida em [15].



Figura 5: Hipérbole com dois ramos.

- Atribuiu os nomes atuais a estas curvas, provavelmente adotados de usos anteriores pelos pitagóricos na solução de equações quadráticas por aplicação de

áreas;

- Retirou estas curvas do cone e as trouxe para o plano. Desta forma, deduziu a relação básica entre o que chamaríamos hoje de coordenadas de um ponto da curva. A partir das equações das curvas deduziu diversas propriedades sem fazer referência ao cone. O processo de obtenção das equações das curvas apresentado por Apolônio segue caminhos muito semelhantes aos utilizados por Menaecmus;
- Apolônio definiu reta tangente e normal a cada ponto das cônicas. No texto original estas definições são feitas a partir das Proposições 8, 13 e 27 de seu livro V e das Proposições 33 e 34 de seu livro I.

A obra de Apolônio de Perga sobre secções cônicas foi tão completa que até os dias atuais os avanços feitos na teoria introdutória sobre este tema apenas sofreram atualização de notação depois do advento da Geometria Analítica. Sendo assim, nas próximas Seções iremos desenvolver a teoria sobre as cônicas a partir das notações modernas, porém muito próximo do que foi feito por este grande geômetra.

2 Noções básicas para o estudo das cônicas

2.1 Coordenadas no plano

Para o estudo das cônicas, suas propriedades, aplicações e equações é necessário adotar um sistema de coordenadas no plano. Neste trabalho adotaremos o sistema de coordenadas cartesianas, de acordo com a abordagem deste assunto no Ensino Médio. Utilizaremos também ao final deste Trabalho o sistema de coordenadas polares.

2.2 Ponto em \mathbb{R}^2 e distância entre dois pontos

Um ponto no plano cartesiano \mathbb{R}^2 é denotado por um par ordenado (x, y) sendo x a abscissa e y a ordenada. Desta forma, há uma correspondência biunívoca entre o plano e \mathbb{R}^2 que associa cada ponto do plano a um par ordenado (x, y) em \mathbb{R}^2 . Veja a Figura 6.

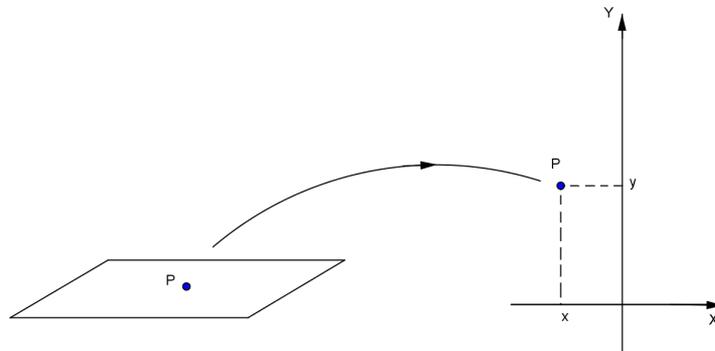


Figura 6: Correspondência biunívoca entre o plano e \mathbb{R}^2 .

Sendo assim, podemos obter uma fórmula para calcular a distância entre dois pontos no plano utilizando suas coordenadas cartesianas. Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos distintos representados no plano cartesiano conforme a Figura 7. Daí, pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$d(A, B)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

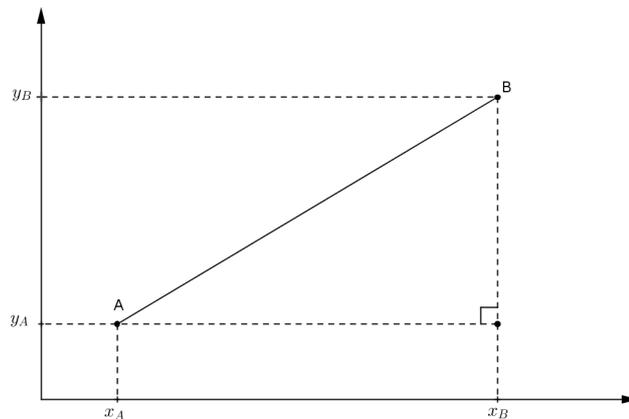


Figura 7: Distância entre dois pontos.

O exemplo 2.1, retirado de [5], aplica a fórmula de distância entre dois pontos para provar uma propriedade interessante dos triângulos retângulos.

Exemplo 2.1. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo de hipotenusa \overline{BC} . Calculando distâncias em coordenadas mostre que o comprimento da mediana relativa ao lado \overline{BC} é a metade do comprimento do lado \overline{BC} .*

Solução. Escolhendo de forma conveniente o sistema de coordenadas, na Figura 8 tome $A(0, 0)$, $B(0, 2y)$ e $C(2x, 0)$. Como M é ponto médio de \overline{BC} , então $M = (x, y)$.

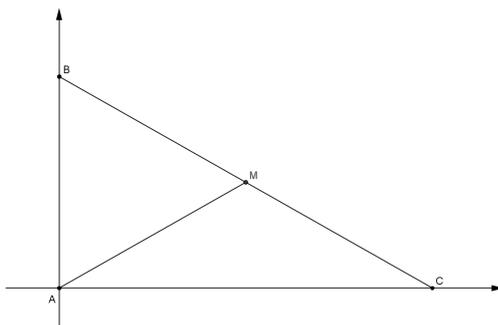


Figura 8: Triângulo $\triangle ABC$ retângulo em A .

Calculando a distância de B a C temos:

$$d(B, C) = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

Calculando a distância de A a M temos:

$$d(A, M) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

De (2) e (3) temos:

$$d(A, M) = \frac{d(B, C)}{2}$$

2.3 Lugares geométricos em \mathbb{R}^2

A partir desse processo de mapeamento do plano em coordenadas cartesianas, torna-se possível obter expressões (equações ou inequações) que representam lugares geométricos em \mathbb{R}^2 . Veja a seguir os lugares geométricos mais comuns e suas expressões:

- Reta \overleftrightarrow{AB} , veja Figura 9.

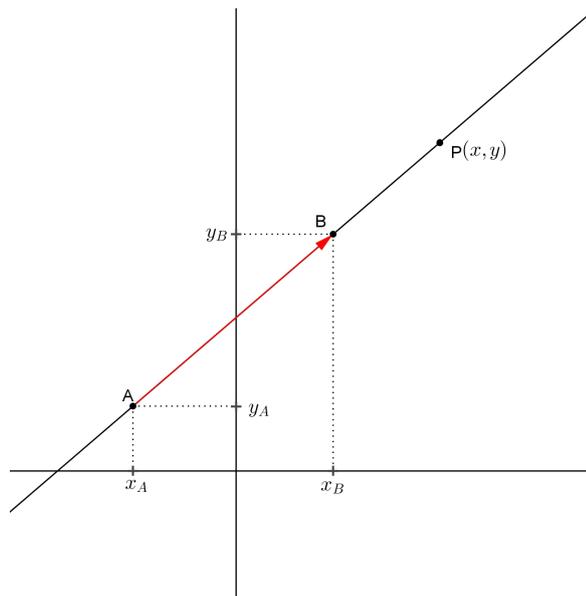


Figura 9: Reta definida por dois pontos.

Sejam $P(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ um vetor direção da reta \overleftrightarrow{AB} , então P pode ser representado da seguinte forma:

$$P = A + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \quad (4)$$

A expressão (4) torna-se muito interessante, pois para valores distintos de t ela representa lugares geométricos distintos em \mathbb{R}^2 .

- para $t = 0$, temos o ponto A ;
- para $t = 1$, temos o ponto B ;
- para $t \in [0, 1]$, temos o segmento de reta \overline{AB} ;
- para $t \geq 0$, temos a semirreta com origem em A contendo o ponto B ;
- para $t = \frac{1}{2}$, temos o ponto médio do segmento \overline{AB} .

- Círculo de centro $C = (x_C, y_C)$ e raio r .

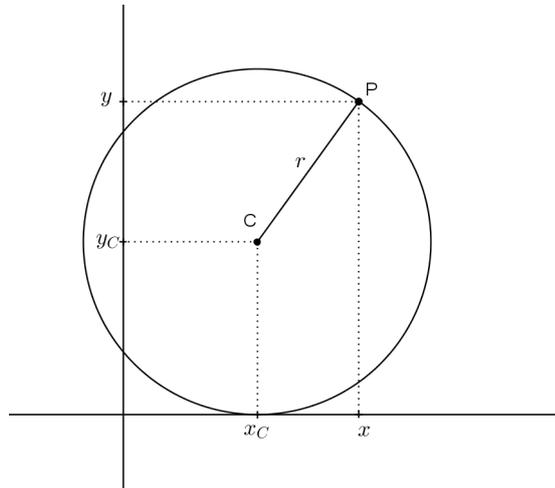


Figura 10: Círculo de centro C e raio r

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer do círculo da Figura 10, daí

$$d(P, C) = r \Rightarrow (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \quad (5)$$

e (5) é a equação do círculo. Sendo assim, note que (6) é a *região interior ao círculo* e (7) é a *região exterior ao círculo*, onde:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 < r^2 \quad (6)$$

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 > r^2 \quad (7)$$

Observação 2.1. Um conjunto vazio também é interpretado como um lugar geométrico e uma expressão que o representa pode ser $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = k$, para qualquer k real negativo, pois não existem pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaçam esta equação. Além dos lugares geométricos já citados, existem vários outros e obter a expressão que representa cada um deles é um dos principais objetos de estudo da Geometria Analítica.

Exemplo 2.2. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de $A(1, 2)$ e $B(3, 5)$? Determine a expressão que representa este lugar geométrico.

Solução. O lugar geométrico procurado é a reta m mediatriz do segmento \overline{AB} . Veja a Figura 11.

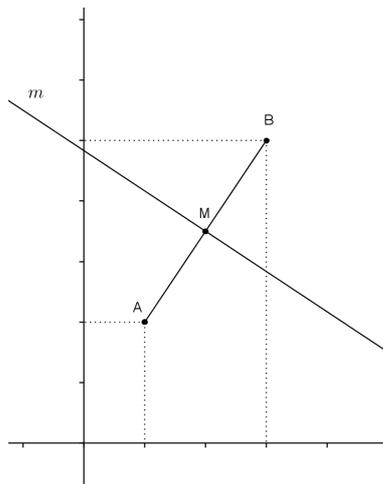


Figura 11: Mediatriz do segmento \overline{AB} .

Seja $P(x, y) \in m$, então $d(P, A) = d(P, B)$. Assim, $d(P, A)^2 = d(P, B)^2$, isto é

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 &= (x - 3)^2 + (y - 5)^2 \Rightarrow \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 \Rightarrow \\ 4x + 6y - 29 &= 0. \end{aligned}$$

Logo, a expressão que representa o lugar geométrico é a equação cartesiana da reta $m : 4x + 6y - 29 = 0$.

Exemplo 2.3. Faça o esboço da região do plano representada pelo sistema de inequações

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} .$$

Solução. A primeira inequação é a região formada pelo círculo de centro $C_1(1, 2)$ e raio $r = 3$ com o seu interior, enquanto a segunda inequação é a região formada pelo círculo de centro $C_2(0, 0)$ e raio $r = 2$ com a região exterior a ele. A região procurada é a intersecção destas duas regiões, conforme a Figura 12.

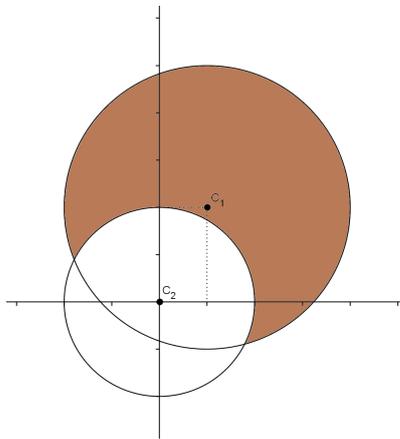


Figura 12: Solução do Exemplo 2.3.

3 Elipse

Esta seção apresenta o tema central deste trabalho, a *elipse*. Vamos discutir a definição desta curva e suas equações para que possamos na próxima Seção apresentar as aplicações.

3.1 Definição de elipse no plano

Nesta seção iremos abordar o estudo analítico da elipse, definir os seus principais elementos e suas propriedades. Para isto iremos partir da definição clássica, obtida em [5]

“ Ao conjunto de pontos do plano cujas distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2 focos, tem soma constante denominamos *ELIPSE*.”

Esta definição nos permite a construção de uma elipse através de régua e compasso ou via materiais concretos. Vejamos cada uma das situações:

i) Construção com régua e compasso

- Trace uma reta r e sobre esta os focos F_1 e F_2 .
- Com a ponta seca em F_1 trace um círculo de raio r_1 e com a ponta seca em F_2 trace um círculo de raio r_2 , de modo a intersectar o primeiro círculo. Tomemos $r_1 + r_2 = 2a$.
- Repita o mesmo processo variando r_1 e r_2 de modo que a soma dos raios permaneça constante igual a $2a$. Deste modo os pontos de intersecção dos círculos determinam uma elipse, conforme Figura 13.

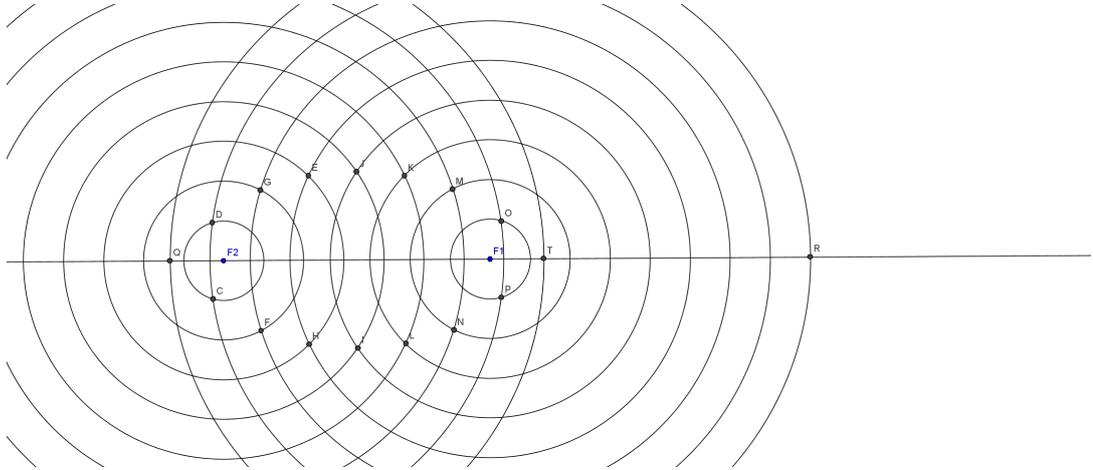


Figura 13: Elipse com régua e compasso

ii) Construção com material concreto.

Materiais necessários: Uma placa de isopor, dois alfinetes grandes, um barbante e um pincel atômico.

- Fixe os dois alfinetes na placa de isopor, estes serão os focos da elipse.
- Corte um pedaço de barbante, com tamanho maior que a distância de F_1 a F_2 .
- Amarre as pontas do barbante e o envolva nos alfinetes.
- Use o pincel atômico para girar o barbante em torno dos focos. Veja que a ponta do pincel descreve uma elipse, veja Figura 14.

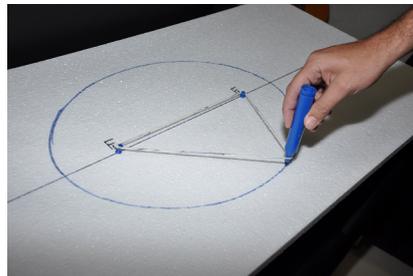


Figura 14: Elipse com material concreto

3.2 Equação canônica da elipse

Vamos agora encontrar uma equação cartesiana para a elipse. Para isto, vamos introduzir um sistema de coordenadas ortogonal. Tomemos os focos da elipse sobre o eixo OX de modo que $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, a medida $F_1F_2 = 2c$ é definida como a *distância focal*. Seja $M(x,y)$ um ponto sobre a elipse e $a \in \mathbb{R}_+^*$, logo:

$$\begin{aligned} F_1M + F_2M &= 2a \Rightarrow \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Vamos eliminar as raízes presentes na equação anterior.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\ (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\ a^2 - cx &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado membro a membro:

$$\begin{aligned} a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx &= a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2y^2 \Rightarrow \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Como a e c são números reais positivos e $a > c$, resulta que $a^2 - c^2 > 0$. Tomemos $b^2 = a^2 - c^2$, daí:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Desta última equação temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (8)$$

Sendo (8) a equação da elipse de centro na origem do plano cartesiano e focos sobre o eixo OX . Note que se os focos tivessem sobre o eixo OY teríamos a equação:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Procuremos os pontos de intersecção da elipse com os eixos coordenados, doravante denominados *vértices da elipse*.

Tomando $y = 0$ em (8) temos: $x^2 = a^2$ o que implica $x = \pm a$. Logo os vértices situados sobre o eixo OX são $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$

De modo análogo, tomando $x = 0$, temos que os vértices situados sobre o eixo OY são: $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$.

Os segmentos $A_1A_2 = 2a$ e $B_1B_2 = 2b$ são definidos, respectivamente, como *eixo maior* e *eixo menor* da elipse e o quociente $e = \frac{c}{a}$ é dito excentricidade da elipse.

Deste modo, na Figura 15, temos a representação da elipse definida pela (8).

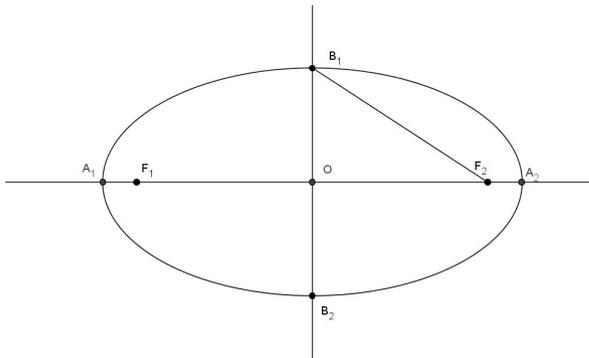


Figura 15: Elipse de Focos F_1, F_2

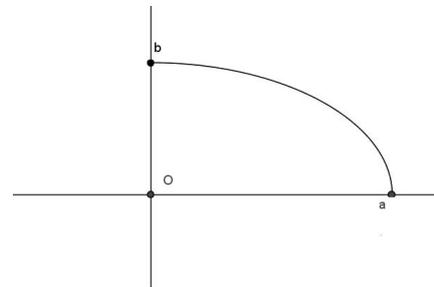


Figura 16: O gráfico de $f(x)$

Note que $B_1F_2 + B_1F_1 = 2a$, como $B_1F_2 = B_1F_1$ temos que $B_1F_2 = a$. Logo pelo teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo OB_1F_2 , temos que $a^2 = b^2 + c^2$.

Para justificarmos a construção anterior, observe que isolando y na equação (8) temos,

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

A partir desta equação definimos a função $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ de domínio real tal que $a^2 - x^2 \geq 0$, isto implica, $-a \leq x \leq a$. Note que tomando x tal que $0 \leq x \leq a$, quando aumentamos o valor de x o valor de $f(x)$ diminui, sendo esta decrescente no 1º quadrante assumindo valor máximo em $x = 0$ e mínimo em $x = a$. Temos também que o gráfico de f é côncavo para baixo no 1º quadrante pois: $f''(x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}} \leq 0$, para todo x tal que $0 \leq x \leq a$. O que nos permite esboçar o gráfico de f no 1º quadrante, conforme figura 16.

Examinemos a equação da elipse. Veja que as variáveis x e y só aparecem elevadas ao quadrado. Portanto, se (x, y) é um ponto da curva, também pertencem à curva os pontos $(x, -y)$, $(-x, y)$ e $(-x, -y)$. Significa isto que a elipse considerada admite

como eixo de simetria os dois eixos coordenados, e como centro de simetria a origem do plano cartesiano. Estes fatos justificam o esboço da elipse representado na figura 15

3.3 Equação da elipse com centro qualquer

Sendo o plano $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ tal que $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e os eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY , respectivamente. Temos que $P(x, y)$ pode ser escrito do seguinte modo, de acordo com a Figura 17.

$$P(x, y) = (x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}). \quad (9)$$

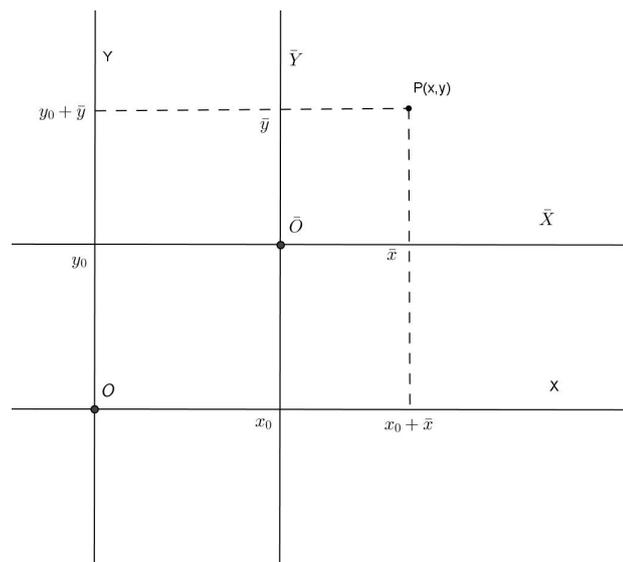


Figura 17: Translação dos eixos coordenados

Temos que a equação da elipse no plano $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ é dada por:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1.$$

Isolando \bar{x} e \bar{y} , em função de x e y , em (9), e substituindo na equação anterior

temos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Sendo esta a equação da elipse quando o eixo focal é paralelo ao eixo OX e o seu centro é (x_0, y_0) . Se o eixo focal for paralelo ao eixo OY teremos a seguinte equação;

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

O caso em que o eixo focal não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados trataremos no Seção 5 deste material. Todavia mesmo neste caso é fácil obter a equação da elipse, a partir da definição, veja o exemplo 3.1.

Exemplo 3.1. *Seja a elipse cujos os focos são $F_1(1, 2)$, $F_2(4, 1)$ e o eixo maior medindo 12. Encontre a equação da elipse.*

Solução Seja $M(x, y)$ um ponto pertencente a elipse, logo:

$$F_1M + F_2M = 12 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2} = 12.$$

Eliminando as raízes na equação encontramos:

$$135x^2 + 6xy + 143y^2 - 648x - 444y - 3636 = 0.$$

Sendo esta a equação da elipse.

É importante observarmos que equações do tipo $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ com a e b de mesmo sinal determinam uma elipse. Para verificar a afirmação, basta completarmos quadrados no primeiro membro da equação, como se segue:

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0 \Rightarrow \tag{10}$$

$$ax^2 + cx + by^2 + dy = -e \Rightarrow$$

$$ax^2 + cx + \left(\frac{c}{2\sqrt{a}}\right)^2 + by^2 + dy + \left(\frac{d}{2\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\frac{d}{2\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{c}{2\sqrt{a}}\right)^2 - e.$$

Tomando $m = \left(\frac{d}{2\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{c}{2\sqrt{a}}\right)^2 - e$ e $a, b > 0$, sem perda de generalidade, temos:

$$\left(\sqrt{a}x + \frac{c}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{b}y + \frac{d}{2\sqrt{b}}\right)^2 = m \Rightarrow$$

$$a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 + b\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2 = m \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{d}{2b}\right)^2 = \frac{m}{ab}.$$

Se $m \neq 0$, temos:

$$\frac{\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2}{\frac{m}{ab}} + \frac{\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2}{\frac{m}{ab}} = 1. \quad (11)$$

Se $m = 0$ a curva representada pela equação (10) reduziria a um ponto.

Se $m < 0$ a equação (11) representa o conjunto vazio.

Se $m > 0$ a equação (11) representa a elipse de centro $\left(-\frac{c}{2a}, -\frac{d}{2b}\right)$.

Os casos em que a equação (10) representa um ponto ou o conjunto vazio são denominados casos degenerados da elipse.

4 Aplicações

Nesta Seção iremos tratar de algumas aplicações importante relacionadas a elipse e sua propriedades.

4.1 A primeira lei de Kepler

O século XVI inicia sob forte influência das teorias clássicas, sendo algumas destas um entrave para o progresso da Astronomia. De acordo com [7] as teorias clássicas relacionadas com este tema que podemos destacar são:

- i) A concepção Platônica, herdada de Pitágoras, que propunha que os movimentos celestes eram circulares com velocidades constantes.
- ii) A teoria Geocêntrica de Ptolomeu, que propunha ser a Terra o centro do Sistema Solar e estática .

No início do Século XVI, Nicolau Copérnico (1473 - 1543) propõe o sistema Heliocêntrico, isto é, o sol como centro do sistema solar. Porém as teorias de Copérnico apresentavam duas dificuldades básicas, ele não venceu o paradigma Platônico (que propunha que os movimentos celestes eram circulares e uniformes) e não dispunha de novas observações astronômicas, sendo as suas as mesmas de Ptolomeu. As novas observações surgiram somente com Tycho Brahe (1546 -1601)[7]. Segundo [2], as observações de Tycho, e mais tarde de seu discípulo Johannes Kepler (1571-1630) consistiam no seguinte: considerando um ponto particular da trajetória de Marte, o planeta voltará ao mesmo ponto 687 dias mais tarde, ou seja, um ano de Marte. Quando Marte se encontra nesta mesma posição, a Terra está em um ponto diferente de sua própria órbita. Se em cada momento que Marte retornar a sua posição original também tomarmos a posição do Sol em relação a Terra, por triângulação podemos calcular a posição de nosso planeta como se o observássemos a partir de Marte. E assim ponto a ponto reconstruirmos a sua órbita.

Após a morte de Tycho Brahe, Kepler continua tentando determinar a órbita terrestre a partir de dez observações deixadas por este e de duas obtidas por ele mesmo. Antes de determinar a trajetória terrestre, Kepler percebe que a velocidade de um

planeta em torno do Sol não é constante, aqui ele já havia adotado o Sistema Copérnico porém continuava pensando ser a trajetória terrestre circular. Daí, origina-se a *Segunda Lei de Kepler*, que de acordo com [4], pode assim ser enunciada:

“Uma linha unindo um planeta ao Sol varre áreas iguais em períodos de tempo iguais.”

A partir da obtenção desta lei e dos dados empíricos que estavam em seu poder, Kepler começou a procurar uma curva que passasse pelos pontos determinados pelas observações e ao mesmo tempo satisfizessem a referida lei. Em várias tentativas ele procurou uma órbita circular excêntrica que modelasse o problema. Todavia ele percebe que a curva procurada não era um círculo, pois se assim fosse, bastariam três pontos para determiná-la. Considerando a posição de Marte em três datas diferentes obteve o círculo determinado pelos três pontos, porém o resultado era inconsistente com a lei por ele obtida. A partir de então Kepler começou a procurar um formato oval para a órbita de Marte, novamente sem obter sucesso. Em [2] nos é relatado que em certo momento ele escreve a seu amigo Fabricius:

“Se a órbita fosse somente uma elipse, o problema estaria resolvido por Arquimedes e Apolônio.”

Porém, só após 18 meses desta carta, em seu livro *Astronomia nova*, Kepler descreve a descoberta da órbita elíptica de Marte. Ele descreve este momento afirmando “é como se tivesse acordado de um sonho”. Assim ele enunciou a sua lei das trajetórias, hoje conhecida como a *Primeira lei de Kepler*, que de acordo com [4], pode assim ser enunciada:

“Todos os planetas se movem em orbitas elípticas tendo o Sol como um dos focos.”

Esta lei pode ser representada na Figura 18, retirada de [11].

Onde:

- R_p : representa a distância mínima do planeta ao Sol. Esta é a distância do periélio, ou seja, no caso da Terra, cuja massa é representada por m , a distância em que ela está mais próxima do Sol, cuja massa aqui é representada por M .

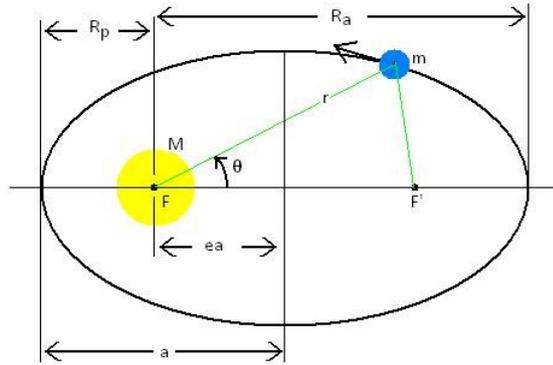


Figura 18: 1ª lei de Kepler

- R_a : representa o raio maior, ou seja, do apogeu, como exemplo do que ocorre no planeta Terra, que é a distância máxima possível de ser alcançada por estes corpos.
- F : é um dos focos da elipse e nele se encontra o sol.
- O foco F' é um ponto localizado simetricamente ao foco F , no lado oposto da elipse.
- e : é a excentricidade da elipse, é muito pequena, para a maioria dos planetas. Este fato justifica os vários anos de insistência nas órbitas elípticas.

4.2 Propriedade Refletora da Elipse

Para justificar as aplicações desta seção iremos recorrer ao Teorema 4.1 enunciado em [6] e [9].

Teorema 4.1 (Propriedade Bissetora da Elipse). *Seja uma elipse \mathcal{E} de focos F_1 e F_2 e seja T um ponto de \mathcal{E} . Então a reta tangente a \mathcal{E} em T , forma ângulos iguais com os raios focais F_1T e F_2T .*

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{E}$ e s a reta determinada por T e F_1 . Tomemos $D \in s$, de modo que $\overline{TD} = \overline{TF_2}$. Seja t a mediatriz do segmento F_2D relativa ao vértice T do triângulo $\triangle TDF_2$. Vamos mostrar que t é tangente a elipse

\mathcal{E} no ponto T . Para isto seja $Q \in t$, como t é mediatriz do segmento F_2D temos: $\overline{QD} = \overline{QF_2}$. Logo, $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{QF_1} + \overline{QD} > \overline{DF_1}$, pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo $\triangle DQF_1$. Por construção temos que $\overline{DF_1} = 2a$, logo $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} > 2a$, sendo assim $Q \notin \mathcal{E}$, $\forall Q \in t$ e $Q \neq T$. Portanto a reta t é tangente a \mathcal{E} . Como o triângulo $\triangle TDF_2$ é isósceles de base DF_2 temos que t é bissetriz do ângulo DTF_2 . Sendo α , β e θ os ângulos representados na Figura 19 temos $\beta = \theta$, pois t é bissetriz do ângulo DTF_2 . Como α e β são opostos pelo vértice segue que $\alpha = \theta$.

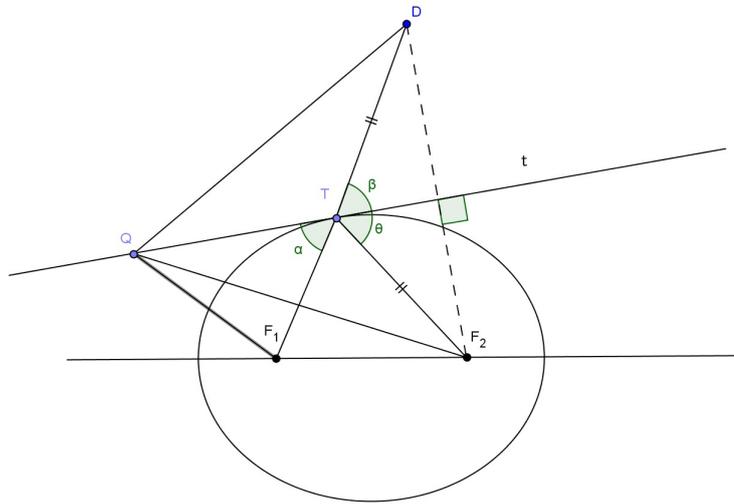


Figura 19: Reta tangente a elipse

□

4.2.1 Aplicações em Ópticas

Uma aplicação direta da Propriedade Refletora da Elipse diz respeito a reflexão da luz, que pode ser expressa por:

“ Se uma fonte de luz estiver situada em um dos focos de um espelho elíptico todos os raios refletidos por este espelho se concentrarão no outro foco.”

Isto se aplica, por exemplo, na odontologia. O espelho utilizado pelos dentistas tem a forma de um arco de elipse, onde uma lâmpada é colocada no foco mais próximo. Ao ligar o dispositivo os raios luminosos irão incidir sobre o arco de elipse e estes serão concentrados no outro foco, ajustando-se o dispositivo de forma a iluminar o ponto desejado [6]. Veja Figura 20, retirada de [14]. De forma muito semelhante aos espelhos odontológicos, a propriedade refletora da elipse é utilizada nos aparelhos de emissão de raios usados na medicina, como por exemplo os de radioterapia. Estes raios devem destruir os tecidos doentes sem afetar os tecidos saudáveis que se encontram ao redor, isto se faz possível devido aos raios estarem concentrados no 2º foco da elipse e assim serem direcionados ao ponto alvo de tratamento.

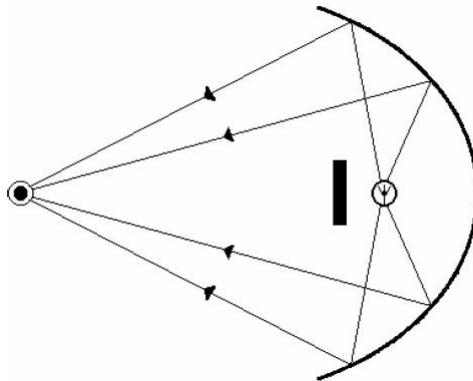


Figura 20: Dispositivo odontológico

4.2.2 Aplicações na Arquitetura, Design e Engenharia

A elipse é frequentemente usada na Arquitetura, no Design e na Engenharia. Devido a Propriedade Refletora da elipse as superfícies geradas pela revolução desta, chamadas de elipsóides, têm propriedades que se usam para criar condições acústicas especiais em auditórios, teatros e igrejas. Exemplo desta aplicação são

as salas de sussurro muito usadas na antiguidade. Estas são construções de forma oval, onde estão marcados dois pontos no chão, focos da elipse. Duas pessoas em pé, uma em cada foco, podem se comunicar em voz sussurrada, inaudível no restante da sala. Outro exemplo importante é o Coliseu, símbolo do poder do Império Romano, foi construído no formato elíptico, veja Figuras 21 e 22.



Figura 21: Coliseu, retirado de [12].

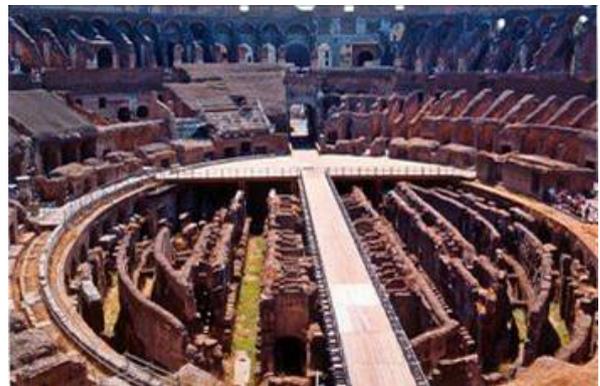


Figura 22: Coliseu, retirado de [12].

Uma curiosa aplicação da Propriedade Refletora da Elipse foi dada pelo escritor Lewis Carroll, autor de “Alice no País das Maravilhas”, que imaginou uma mesa de bilhar cuja parede lateral fosse elíptica, e não retangular. Na mesa de Carroll, colocando uma bola em um dos focos da elipse e atirando-a para uma direção qualquer com força suficiente, ela sempre irá acertar uma bola colocada no outro foco da mesa. Veja nas Figuras 23 e 24 uma representação do *bilhar elíptico*



Figura 23: Bilhar Elíptico, retirada de [13].



Figura 24: Bilhar Elíptico, retirada de [13].

5 Classificação das cônicas

Nesta Seção o nosso objetivo é fazer o reconhecimento das cônicas a partir da equação geral do 2º grau, ou seja, dada a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (12)$$

determinar se esta é uma elipse, hipérbole, parábola ou um dos casos degenerados dessas cônicas. Para isto iremos usar como referencial teórico [5] e [1]. No caso em que $b = 0$, o reconhecimento pode ser feito completando quadrados. Para o caso em que $b \neq 0$, iremos fazer uma rotação dos eixos coordenados seguida de uma translação, ou seja, vamos passar do plano OXY para o plano $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ de modo que:

- Os eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ coincidam com os eixos da cônica;
- \bar{O} coincida com o centro da cônica.

Para isto, precisamos determinar uma base $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ortonormal para o plano $O\bar{X}\bar{Y}$. Com este objetivo iremos desenvolver as Subseções a seguir.

5.1 Rotação dos eixos coordenados

Para fazermos a rotação dos eixos coordenados utilizaremos o resultado a seguir.

Proposição 5.1. *Se os eixos coordenados giram um ângulo θ em torno de sua origem e as coordenadas de um ponto P qualquer antes e depois da rotação são (x, y) e (\bar{x}, \bar{y}) , respectivamente, então*

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \operatorname{sen} \theta \\ y = \bar{x} \operatorname{sen} \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases}.$$

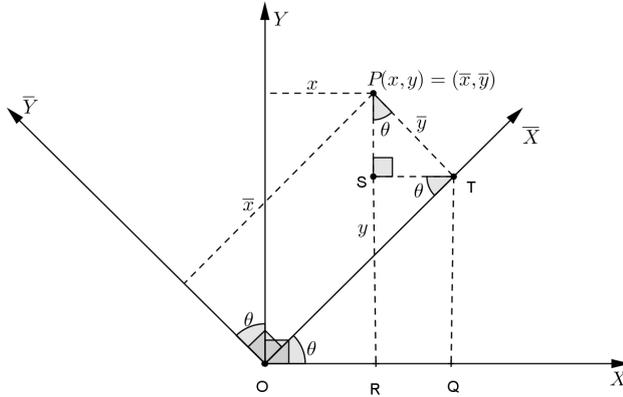


Figura 25: Rotação dos eixos coordenados.

Demonstração. De acordo com a Figura 25, temos: $OR = x$, $OT = \bar{x}$, $PR = y$ e $PT = \bar{y}$.

Do $\triangle OQT$ segue que: $\text{sen}\theta = \frac{QT}{\bar{x}}$ e $\text{cos}\theta = \frac{OQ}{\bar{x}}$. De onde obtemos $QT = \bar{x}\text{sen}\theta$ e $OQ = \bar{x}\text{cos}\theta$.

Do $\triangle PST$ temos: $\text{sen}\theta = \frac{ST}{\bar{y}} \Rightarrow ST = \bar{y}\text{sen}\theta = RQ$ e $\text{cos}\theta = \frac{SP}{\bar{y}} \Rightarrow SP = \bar{y}\text{cos}\theta$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned} x &= OR = OQ - RQ &&= \bar{x}\text{cos}\theta - \bar{y}\text{sen}\theta \\ y &= PR = RS + SP = QT + SP &&= \bar{x}\text{sen}\theta + \bar{y}\text{cos}\theta. \end{aligned}$$

□

O sistema anterior pode ser escrito em linguagem matricial da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \text{cos}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \text{cos}\theta \end{pmatrix}$ é dita matriz de rotação.

5.2 Autovalor e autovetor

Sejam $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ uma matriz real do tipo 2×2 e $\vec{u} = (x, y)$ um vetor em \mathbb{R}^2 .

Denotamos $A\vec{u}$ como sendo o vetor $(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$.

Definição 5.1. Um número real λ é um autovalor da matriz A se existir um vetor \vec{u} não nulo tal que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Neste caso \vec{u} é dito autovetor da matriz A .

Note que para existir λ devemos ter $\det(A - \lambda I) = 0$, pois neste caso o sistema gerado por $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ tem solução além da trivial. O que motiva a seguinte

Definição 5.2. Sejam a matriz $A_{n \times n}$ e I a matriz identidade de ordem n . O polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é dito o polinômio característico de A .

Daí, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.1. Seja λ_1 um número real. Dizemos que λ_1 é autovalor da matriz A se, e somente se, λ_1 é raiz do polinômio característico de A .

5.3 Resultados importantes

Os resultados enunciados a seguir justificam a técnica que utilizamos para classificar as cônicas. Os mesmos não serão demonstrados, por fugir aos objetivos deste Trabalho. Todavia o leitor que deseja aprofundar neste tema pode recorrer a [1].

Teorema 5.2. Um operador linear $T : V \rightarrow V$ admite uma base β na qual a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal se, e somente se, essa base for formada por autovetores de T .

Teorema 5.3 (Teorema Espectral). Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} . Se $T : V \rightarrow V$ é um operador simétrico, então existe uma base ortonormal β de V tal que $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal.

Para aplicarmos os resultados anteriores, note que a equação (12) pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} = 0. \quad (13)$$

Acerca da matriz $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$, temos o seguinte

Teorema 5.4. (a) As raízes, λ_1 e λ_2 , do polinômio característico de \mathcal{A} são reais;
 (b) Existe um par \vec{u}_1 e \vec{u}_2 de autovetores ortonormais relativos aos autovalores λ_1 e λ_2 ;

(c) Se $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ é uma matriz cujas primeira e segunda colunas são formadas pelas coordenadas dos vetores \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , respectivamente, então

$$\mathcal{B}^T \mathcal{A} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Observação 5.1. Note que \vec{u}_1 e \vec{u}_2 formam uma base ortonormal para \mathbb{R}^2 . E considerando estes como vetores direcionais para os eixos $O\bar{X}$ e $O\bar{Y}$ teremos \mathcal{B} como a matriz de rotação que associa os pontos do plano OXY aos pontos do plano $O\bar{X}\bar{Y}$.

Demonstração. (a) O polinômio característico da matriz \mathcal{A} é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - a)(\lambda - c) - \frac{b^2}{4} \Rightarrow \\ p(\lambda) &= \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - \frac{b^2}{4}. \end{aligned}$$

O discriminante da equação $p(\lambda) = 0$ é dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= (a + c)^2 - 4 \left(ac - \frac{b^2}{4} \right) \Rightarrow \\ \Delta &= a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + b^2 \Rightarrow \\ \Delta &= (a - c)^2 + b^2, \end{aligned}$$

o qual é não negativo. Sendo assim, as suas raízes λ_1 e λ_2 são reais.

(b) Tome $T_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como \mathcal{A} é simétrica, pelo Teorema 5.3, existe uma base $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ortonormal que diagonaliza $[T_{\mathcal{A}}]_{\beta}^{\beta}$. Logo, pelo Teorema 5.2, β é uma base de autovetores de \mathcal{A} .

(c) Sendo \mathcal{B}^T a matriz transposta de \mathcal{B} , temos que

$$\mathcal{B}^T \mathcal{A} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cdot a_1 + \frac{b}{2} b_1 & a \cdot a_2 + \frac{b}{2} b_2 \\ \frac{b}{2} a_1 + c \cdot b_1 & \frac{b}{2} a_2 + c \cdot b_2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A} \vec{u}_1 = (a \cdot a_1 + \frac{b}{2} b_1, \frac{b}{2} a_1 + c \cdot b_1) = (\lambda_1 \cdot a_1, \lambda_1 \cdot b_1)$, pois \vec{u}_1 é autovetor de \mathcal{A} . De modo análogo, $\mathcal{A} \vec{u}_2 = (a \cdot a_2 + \frac{b}{2} b_2, \frac{b}{2} a_2 + c \cdot b_2) = (\lambda_2 \cdot a_2, \lambda_2 \cdot b_2)$. Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^T \mathcal{A} \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{B}^T \mathcal{A} \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} \lambda_1(a_1^2 + b_1^2) & \lambda_2(a_1 a_2 + b_1 b_2) \\ \lambda_1(a_1 a_2 + b_1 b_2) & \lambda_2(a_2^2 + b_2^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como os vetores são ortonormais temos:

$$\mathcal{B}^T \mathcal{A} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

□

5.4 Redução à forma canônica

A matriz \mathcal{B} é ortogonal, isto é, $\mathcal{B}^T = \mathcal{B}^{-1}$. Daí, tomando $\mathcal{D} = \mathcal{B}^T \mathcal{A} \mathcal{B}$ e multiplicando esta igualdade pela esquerda por \mathcal{B} e pela direita por \mathcal{B}^T temos, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \mathcal{D} \mathcal{B}^T$. Substituindo $\mathcal{A} = \mathcal{B} \mathcal{D} \mathcal{B}^T$ na equação (13) iremos obter:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathcal{B} \mathcal{D} \mathcal{B}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} = 0. \quad (14)$$

Da Observação 5.1 temos que \mathcal{B} é a matriz de rotação que associa os pontos do plano OXY aos pontos do plano $O\bar{X}\bar{Y}$. Sendo assim,

$$\mathcal{B}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Daí, substituindo esta igualdade na equação (14) obtemos

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathcal{B} \mathcal{D} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

Da propriedade da transposta do produto de matrizes, temos que

$$\left[\mathcal{B}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]^T = \left[\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right]^T \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Substituindo na equação (15) segue que

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \mathcal{D} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} = 0. \quad (16)$$

Como

$$\mathcal{D} = \mathcal{B}^T \mathcal{A} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{B} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \mathcal{B} \left[\mathcal{B}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Substituindo as expressões acima na equação (16) esta se reduz a:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} = 0.$$

Resolvendo os produtos de matrizes nesta última equação temos que

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{d}\bar{x} + \bar{e}\bar{y} + f = 0, \quad (17)$$

onde $\bar{d} = \langle (d, e), (a_1, b_1) \rangle$ e $\bar{e} = \langle (d, e), (a_2, b_2) \rangle$, onde $\langle \cdot \rangle$ é o produto interno usual de \mathbb{R}^2 . Agora é só completar quadrados na equação (17) para classificarmos a cônica.

Exemplo 5.1. Identifique a cônica que a equação $x^2 - 4xy + y^2 + 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0$ representa.

Solução. Para identificar a cônica em questão precisamos encontrar os autovalores e autovetores da matriz \mathcal{A} .

Sendo $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 1) - 4 = 0$. Encontramos as raízes desta equação $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$.

Para encontrarmos o autovetor $\vec{u}_1 = (x, y)$ associado a $\lambda_1 = -1$ devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Note que uma solução para o sistema é $y = x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, $\vec{u}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\vec{u}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Daí, $\bar{d} = \langle (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rangle = 6$ e $\bar{e} = \langle (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rangle = 0$.

Sendo assim, de (17) temos que a equação da cônica pode ser escrita na forma

$$-1\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 + 6\bar{x} = 0 \Rightarrow \frac{(\bar{x} - 3)^2}{9} - \frac{\bar{y}^2}{3} = 1.$$

Concluimos então que a equação representa uma hipérbole. A Figura 26 mostra o gráfico desta hipérbole.

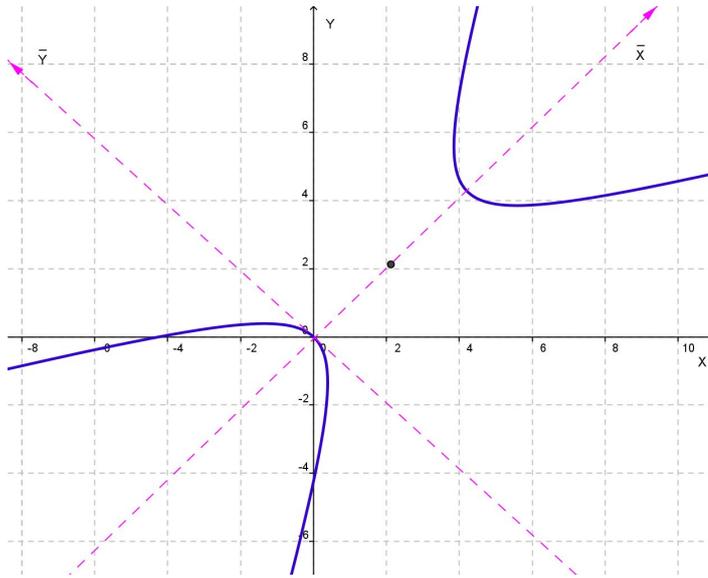


Figura 26: Hipérbole representada pela equação $x^2 - 4xy + y^2 + 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0$.

Exemplo 5.2. Identifique a cônica que a equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$ representa.

Solução. Temos que $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Sendo assim $p(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 2) - 4 = 0$. Logo, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$.

Note que neste caso $\bar{d} = \langle (0, 0), (a_1, b_1) \rangle = 0$ e $\bar{e} = \langle (0, 0), (a_2, b_2) \rangle = 0$. Logo, de (17) temos que a equação da cônica pode ser escrita na forma

$$\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 - 12 = 0 \Rightarrow \frac{\bar{x}^2}{12} + \frac{\bar{y}^2}{2} = 1.$$

Concluimos então que a equação representa uma elipse. A Figura 27 mostra o gráfico desta elipse.

Exemplo 5.3. Qual é a cônica que a equação $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3 = 0$ representa?

Solução. Para identificar a cônica em questão precisamos encontrar os autovalores e autovetores da matriz \mathcal{A} .

Sendo $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 2 = 0$. Encontramos as raízes desta equação $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 0$.

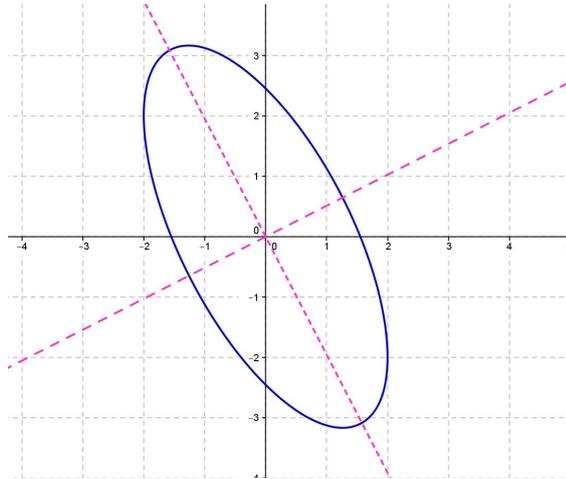


Figura 27: Elipse representada pela equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$.

Para encontrarmos o autovetor $\vec{u}_1 = (x, y)$ associado a $\lambda_1 = 3$ devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Note que uma solução para o sistema é $(1, \sqrt{2})$. Logo, $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ e $\vec{u}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Daí, $\vec{d} = \langle (6\sqrt{3}, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \rangle = 6$ e $\vec{e} = \langle (6\sqrt{3}, 0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rangle = -6\sqrt{2}$.

Sendo assim, de (17) temos que a equação da cônica pode ser escrita na forma

$$3\bar{x}^2 + 0\bar{y}^2 + 6\bar{x} - 6\sqrt{2}\bar{y} + 3 = 0 \Rightarrow (\bar{x} + 1)^2 = 2\sqrt{2}\bar{y}.$$

Concluimos então que a equação representa uma parábola. A Figura 28 mostra o gráfico desta parábola.

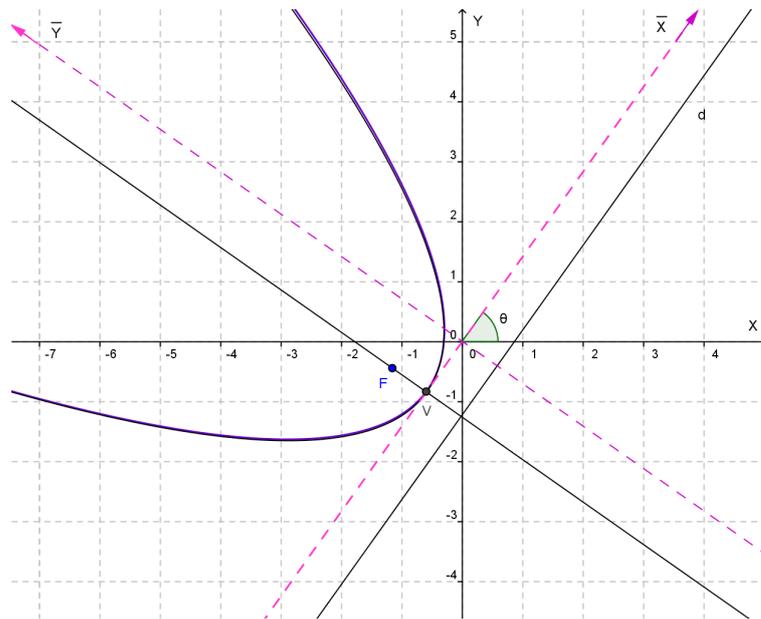


Figura 28: Parábola representada pela equação $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3 = 0$.

6 Cônicas e Coordenadas polares

Nesta Seção apresentaremos a definição geral das cônicas e suas equações em coordenadas polares.

6.1 Definição geral de uma cônica

O Teorema 6.1, obtido em [5], apresenta uma definição geral que engloba os três tipos de cônicas em termos de um foco e da diretriz correspondente a esse foco.

Teorema 6.1. *Sejam F um ponto do plano, d uma reta do plano tal que $F \notin d$ e e um número real positivo. Então, o conjunto $\mathcal{C} = \{P; d(P, F) = e \cdot d(P, d)\}$ é uma elipse se $e < 1$, uma parábola se $e = 1$ ou uma hipérbole se $e > 1$, de foco no ponto F e excentricidade e .*

Demonstração. Se $e = 1$, então $\mathcal{C} = \{P; d(P, F) = d(P, d)\}$ é uma parábola de foco F e diretriz d , de acordo com a definição de parábola.

Agora tome $0 < e \neq 1$ e no sistema de eixos ortogonais OXY considere $F(0, 0)$ e $d: x = m$, com $m > 0$.

Daí, $P(x, y) \in \mathcal{C}$, então:

$$\begin{aligned}d(P, F) &= e \cdot d(P, d) \Leftrightarrow \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= e \cdot |x - m| \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 &= e^2(x - m)^2 \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 &= e^2x^2 - 2me^2x + m^2e^2 \Leftrightarrow \\ (1 - e^2) \left(x^2 + \frac{2me^2}{1 - e^2}x \right) + y^2 &= m^2e^2 \Leftrightarrow \\ (1 - e^2) \left(x + \frac{me^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= m^2e^2 + \frac{m^2e^4}{1 - e^2} \Leftrightarrow \\ (1 - e^2) \left(x + \frac{me^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= \frac{m^2e^2}{1 - e^2} \tag{18}\end{aligned}$$

Utilizando uma translação horizontal e fazendo $a = 1 - e^2$ e $k = \frac{m^2e^2}{1 - e^2}$ a equação (18) é equivalente a

$$ax'^2 + y'^2 = k. \tag{19}$$

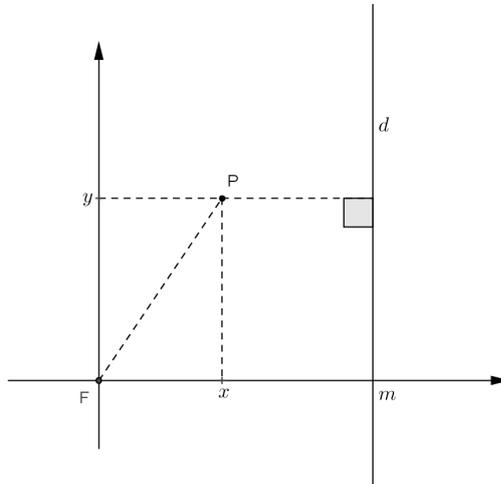


Figura 29: Demonstração do Teorema 6.1.

Logo, se $e > 1$ temos $a < 0$ e $k < 0$, segue então que a equação (19) é uma hipérbole e se $e < 1$, temos $a > 0$ e $k > 0$ e a equação (19) é uma elipse.

□

6.2 Coordenadas polares

A ideia fundamental da geometria analítica plana consiste como visto até agora, em substituir cada ponto do plano por um par de números reais, que são as suas coordenadas. O sistema cartesiano, adotado até este momento, é o mais importante e o mais simples dos sistemas de coordenadas, mas não é o único. Depois do sistema cartesiano, o mais útil é o sistema de coordenadas polares.

Definição 6.1. *Um sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$ no plano consiste de um ponto O , denominado pólo ou origem, de uma semirreta \overrightarrow{OA} , com origem em O , denominada eixo polar, e de uma unidade de comprimento utilizada para medir a distância de O a um ponto qualquer do plano. Dado um ponto P do plano, suas coordenadas nesse sistema são ρ e θ , onde ρ é a distância de P a O e θ é a medida do ângulo do eixo polar para a semirreta \overrightarrow{OP} . Escreve-se $P(\rho, \theta)$. Veja a Figura 30.*

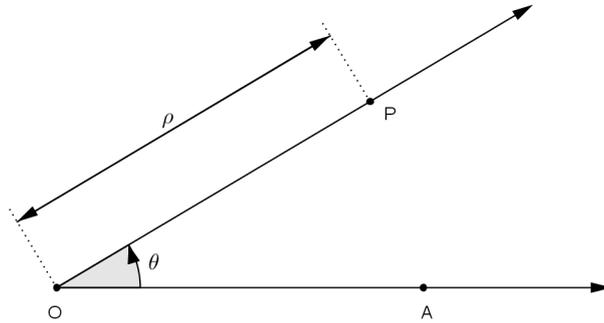


Figura 30: Ponto P em coordenadas polares.

Convencionam-se que a medida do ângulo tomada de \overrightarrow{OA} para \overrightarrow{OP} no sentido anti-horário é positiva, e negativa no sentido horário.

Se a primeira coordenada polar de um ponto é zero, então esse ponto é o pólo. O ângulo do pólo não está definido. Convencionamos que $(0, \theta)$ são as coordenadas polares do pólo, para todo ângulo θ . Percebe-se aqui que não há uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e sua representação em coordenadas polares, pois o par (ρ, θ) determina, de maneira única, um ponto no plano. No entanto, um ponto do plano pode ser representado por várias coordenadas polares distintas. Note que as medidas de θ e $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, estão associadas ao mesmo ângulo e, portanto, (ρ, θ) e $(\rho, \theta + 2k\pi)$ representam o mesmo ponto do plano. Todavia, se o ponto P não for a origem e se restringirmos θ ao intervalo $[0, 2\pi)$, existirá apenas um par de coordenadas polares (ρ, θ) para P .

A limitação dos valores do argumento θ ao intervalo $[0, 2\pi)$ pode ser inconveniente em muitos problemas. Existem também questões que em seu estudo pode ser útil considerar valores negativos para o raio vetor ρ . Neste caso, a convenção que se faz é identificar o ponto $(-\rho, \theta)$ com o ponto $(\rho, \theta + \pi)$.

Exemplo 6.1. O conjunto \mathcal{C} dos pontos $P(\rho, \theta)$ que satisfazem a equação $\rho = 3$ é o conjunto dos pontos cuja distância ao pólo O é igual a 3, isto é, $\mathcal{C} = \{(\rho, \theta); \rho = 3 \text{ e } \theta \in \mathbb{R}\}$ é o círculo de centro O e raio 3, conforme a Figura 31.

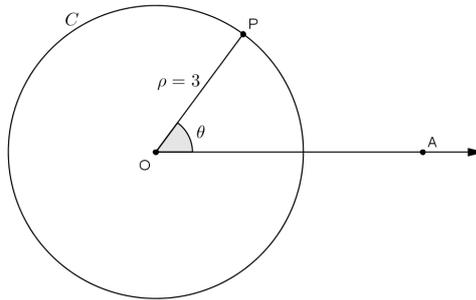


Figura 31: Círculo em coordenadas polares.

Exemplo 6.2. Seja r o conjunto dos pontos $P(\rho, \theta)$ do plano que satisfazem a equação polar $\theta = \frac{\pi}{4}$, ou seja, $r = \left\{ (\rho, \theta); \rho \in \mathbb{R} \text{ e } \theta = \frac{\pi}{4} \right\}$.

Então, r é a reta que passa pelo pólo O e tem inclinação $\theta = \frac{\pi}{4}$ em relação ao eixo polar. Veja a Figura 32.

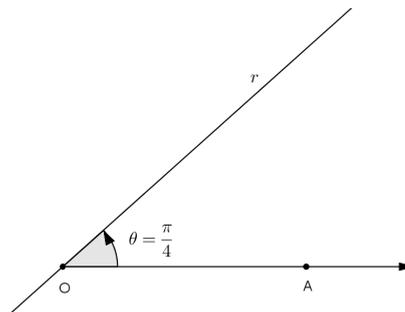


Figura 32: Reta passando pelo pólo.

A definição ?? estabelece a relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas.

Definição 6.2. O sistema polar associado a um sistema cartesiano OXY é o sistema cujo pólo é a origem O do sistema cartesiano, e cujo eixo polar é a semirreta positiva do eixo OX .

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer do plano, referido ao sistema cartesiano. Sejam (ρ, θ) as coordenadas de P no sistema polar associado (veja a Figura 33). Estamos supondo $\rho > 0$.

$$\text{Daí, } x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \text{sen} \theta \quad \text{e} \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

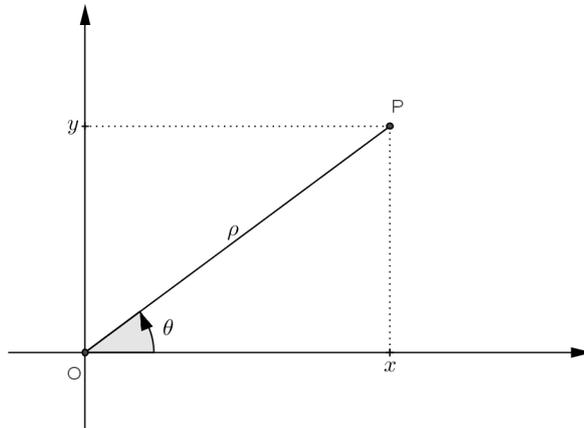


Figura 33: Sistema polar associado ao sistema cartesiano.

6.3 Equação polar das cônicas

Vamos deduzir a equação das cônicas em coordenadas polares.

6.3.1 Elipse

Considere uma elipse de eixo maior horizontal $A_1A_2 = 2a$, eixo menor $B_1B_2 = 2b$, distância focal $F_1F_2 = 2c$ e centro $C(m, n)$ como na Figura 34.

Seja $P(\rho, \theta)$ um ponto qualquer da elipse, na qual fazemos coincidir o pólo O com o foco F_1 e o eixo polar com o eixo maior da elipse.

Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo $\triangle F_1F_2P$ temos

$$\delta^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta. \quad (20)$$

Da definição de elipse

$$F_1P + F_2P = 2a \Rightarrow \delta + \rho = 2a \Rightarrow \delta = 2a - \rho.$$

Substituindo δ na expressão (20) temos que

$$(2a - \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta \Rightarrow 4a^2 - 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta.$$

Da relação notável da elipse segue que

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2.$$

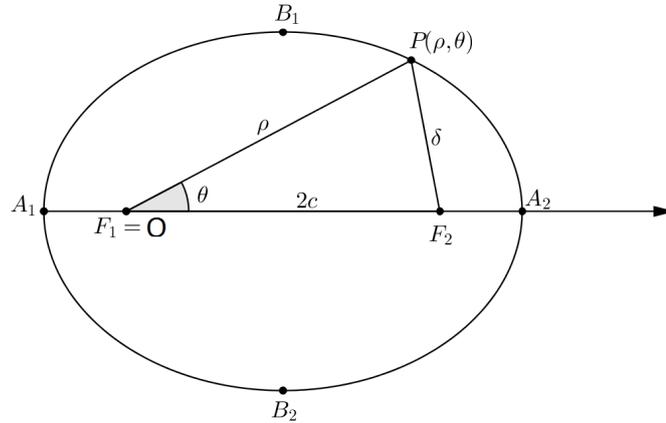


Figura 34: Elipse.

Sendo assim,

$$a^2 - c^2 = \rho(a - c \cos \theta) \Rightarrow b^2 = \rho(a - c \cos \theta) \Rightarrow \rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}.$$

Logo, a equação polar da elipse é

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}. \quad (21)$$

Na equação polar da elipse (21), dividindo o numerador e o denominador do segundo membro da expressão pela constante a , vem que $\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{a}{a} - \frac{c}{a} \cos \theta}$. Fazendo $p = \frac{b^2}{a}$, chamado de parâmetro da elipse e $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade. Assim, a equação polar da elipse é mais comumente dada por

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

6.3.2 Hipérbole

Considere uma hipérbole de eixo real horizontal $A_1A_2 = 2a$, eixo menor $B_1B_2 = 2b$, distância focal $F_1F_2 = 2c$ e centro $C(m, n)$. Façamos coincidir o pólo O com o foco F_2 e o eixo polar com o eixo real da hipérbole. Seja $P(\rho, \theta)$ um ponto qualquer da hipérbole conforme a Figura 35.

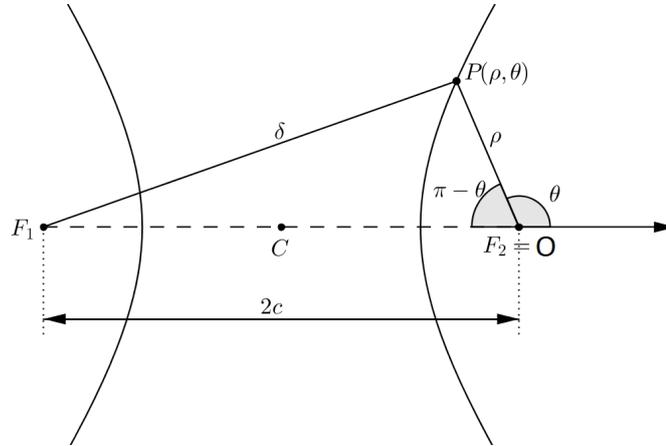


Figura 35: Hipérbole.

Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo $\triangle F_1F_2P$ temos

$$\delta^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho(\pi - \theta). \quad (22)$$

Da definição de hipérbole

$$|F_1P - F_2P| = 2a \Rightarrow \delta - \rho = 2a \Rightarrow \delta = 2a + \rho.$$

Substituindo δ na expressão (22), segue que

$$(2a + \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 + 4c\rho \cos \theta \Rightarrow 4a^2 + 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4c^2 + 4c\rho \cos \theta \Rightarrow a^2 - c^2 = \rho(-a + c \cos \theta).$$

Da relação notável da hipérbole, temos

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = -b^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = \rho(-a + c \cos \theta).$$

Sendo assim, a equação polar da hipérbole é

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}. \quad (23)$$

Na equação polar da hipérbole (23), dividindo o numerador e o denominador do segundo membro da expressão pela constante a , temos $\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{a}{a} - \frac{c}{a} \cos \theta}$. Fazendo

$p = \frac{b^2}{a}$, chamado de parâmetro da hipérbole e $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade. Deste modo, a equação polar da hipérbole é mais comumente dada por

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

6.3.3 Parábola

Considere uma parábola de eixo de simetria horizontal com vértice V , foco F e $RF = p$. Seja $P(\rho, \theta)$ um ponto qualquer da parábola. Fazemos coincidir o pólo O com o foco F e o eixo polar com o eixo de simetria da parábola de acordo com a Figura 36.

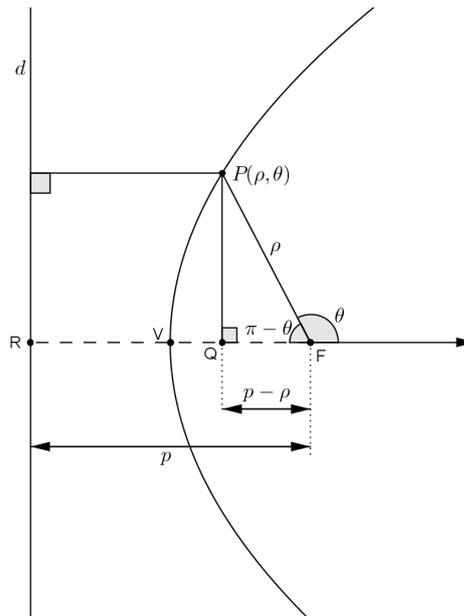


Figura 36: Parábola.

No triângulo $\triangle PQF$ temos que

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = \frac{p - \rho}{\rho}.$$

Daí, $\rho = \frac{p}{1 - \cos \theta}$, onde p é o parâmetro da parábola. Portanto, a equação polar da parábola é

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \theta}.$$

Observação 6.1. Note que a elipse, a hipérbole e a parábola têm as equações polares semelhantes a menos da excentricidade $e = \frac{c}{a}$ que para a elipse ($0 < e < 1$), para a hipérbole ($e > 1$) e para a parábola ($e = 1$). Outro fato importante é que, apesar de

adotarmos os mesmos símbolos $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$ e $F_1F_2 = 2c$ para a elipse e para a hipérbole, eles tem significados geométricos diferentes na definição de cada cônica, mesmo porque a relação notável da elipse é $a^2 = b^2 + c^2$ e da hipérbole é $c^2 = a^2 + b^2$. Assim, o parâmetro $p = \frac{b^2}{a}$ adotado na equação polar da elipse e da hipérbole é diferente e não tem nada em comum com o parâmetro p da definição de parábola.

Exemplo 6.3. Determine a equação polar da hipérbole de equação $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

Solução. Sabemos que a equação polar da hipérbole é do tipo $\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$, onde $e = \frac{c}{a}$ e $p = \frac{b^2}{a}$.

Passando a equação da hipérbole para a forma reduzida:

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Daí, temos $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$, ou seja, $a = 4$ e $b = 3$. Substituindo os valores de a e b na relação notável da hipérbole: $c^2 = a^2 + b^2$, segue que $c = 5$. Então, $p = \frac{9}{4}$, $e = \frac{5}{4}$ e $\rho = \frac{9}{4(1 - \frac{5}{4} \cos \theta)}$. Logo, a equação polar da hipérbole é

$$\rho = \frac{9}{4 - 5 \cos \theta}.$$

Conclusão

Neste trabalho caminhamos por anos de História da Matemática. Começando com o filósofo grego Anaxágoras, que tinha por objetivo resolver um problema de matemática pura. Milênios depois vimos que o problema proposto pelo mesmo, e as pesquisas desenvolvidas após ele, nos levaram a entender a órbita de um corpo celeste. Isto foi a base teórica para a produção de equipamentos de alta tecnologia nas áreas médicas, entre tantas outras aplicações. Daí percebemos a importância da pesquisa em Matemática, sendo ela capaz de produzir novos conhecimentos e influenciar o desenvolvimento tecnológico.

Percebemos em toda a exposição dos temas abordados neste trabalho, a força da Geometria Analítica como ferramenta para resolver problemas matemáticos. A beleza contida em cada equação que expressa um objeto geométrico, mostrando a interação entre Álgebra e Geometria, em especial a aplicação dos teoremas de Álgebra Linear na classificação das cônicas.

É relevante perceber que ao definir as cônicas usando a excentricidade e a diretriz conseguimos unificar todas estas em uma só expressão. Contrariando aqui o paradigma, existente no ensino básico, que as definições são prontas e acabadas. Com a mudança da definição a equação geral das cônicas adquire uma singular simplicidade ao mudarmos o referencial cartesiano para coordenadas polares. Fato este que não é abordado no Ensino Médio, que se limita ao Plano Cartesiano, e assim perde-se a oportunidade de aplicar os conhecimentos de trigonometria ao omitir a discussão da representação do plano em coordenadas polares.

Referências

- [1] A. Hefez e C. S. Fernandez. *Introdução à Álgebra Linear*, Coleção PROFMAT, SBM.
- [2] A. M. Lombardi, et al. Gênios da Ciência, *Kepler a Harmonia dos Astros*, Scientific American, 2005.
- [3] C. B. Boyer. *História da Matemática*. São Paulo, Editora Edgard Blucher, 2003.
- [4] D. Halliday e R. Resnick *Fundamentos de Física 2*, 4ª edição, Editora LTC, 1996.
- [5] E. L. Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2010.
- [6] E. W. Souza. *Cônicas e Aplicações* [Monografia]. Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.
- [7] F. Damásio. *O Início da Revolução Científica: Questões Acerca de Copérnico e os Epísclos, Kepler e as Órbitas Elípticas* [Revista Brasileira de Ensino de Física], nº 33, SBF, 2011.
- [8] G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar 7: Geometria Analítica*, 5ª edição, Atual Editora, 2005.
- [9] J. F. Lopes. *Cônicas e Aplicações* [Dissertação]. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual de São Paulo, 2011.
- [10] U. D'Ambrosio. *Educação Matemática: da Teoria à Prática*. Campinas, Editora Papirus, 1996.
- [11] <http://www.infoescola.com/fisica/primeira-lei-de-kepler/>, acessado em 15/02/2013.
- [12] <http://ixamostradepesquisa.pbworks.com/w/page/5197916/COLISEU>, acessado em 15/02/2013.
- [13] http://www.dma.uem.br/matematica/conteudo/exposicao/curvas/conicas/6_bilhar_eliptico/bilhar_eliptico.htm, acessado em 15/02/2013.
- [14] <http://www.mat.uc.pt/jfqueiro/aplicacoes.pdf>, acessado em 15/02/2013.
- [15] <http://www.google.com.br>. Acessado em 16 de fevereiro de 2013.