



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES POR POLINÔMIOS ORTOGONAIS

BENÍCIO FAGUNDES DE BRITO JÚNIOR

Cruz das Almas-Bahia

Março de 2017

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES POR POLINÔMIOS ORTOGONAIS

BENÍCIO FAGUNDES DE BRITO JÚNIOR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. MSc. Adson Mota Rocha

Cruz das Almas-Bahia

Março 2017

B862a Brito Júnior, Benício Fagundes.

Aproximação de funções por Polinômios Ortogonais / Benício Fagundes de Brito Júnior. – Cruz das Almas, 2017.

57 f. : il.

Orientador: Prof. MSc. Adson Mota Rocha.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

Referências bibliográficas.

1. Matemática - Polinômios Ortogonais. 2. Matemática- Funções Contínuas. 3. Quadrados Mínimos- Avaliação. Título.

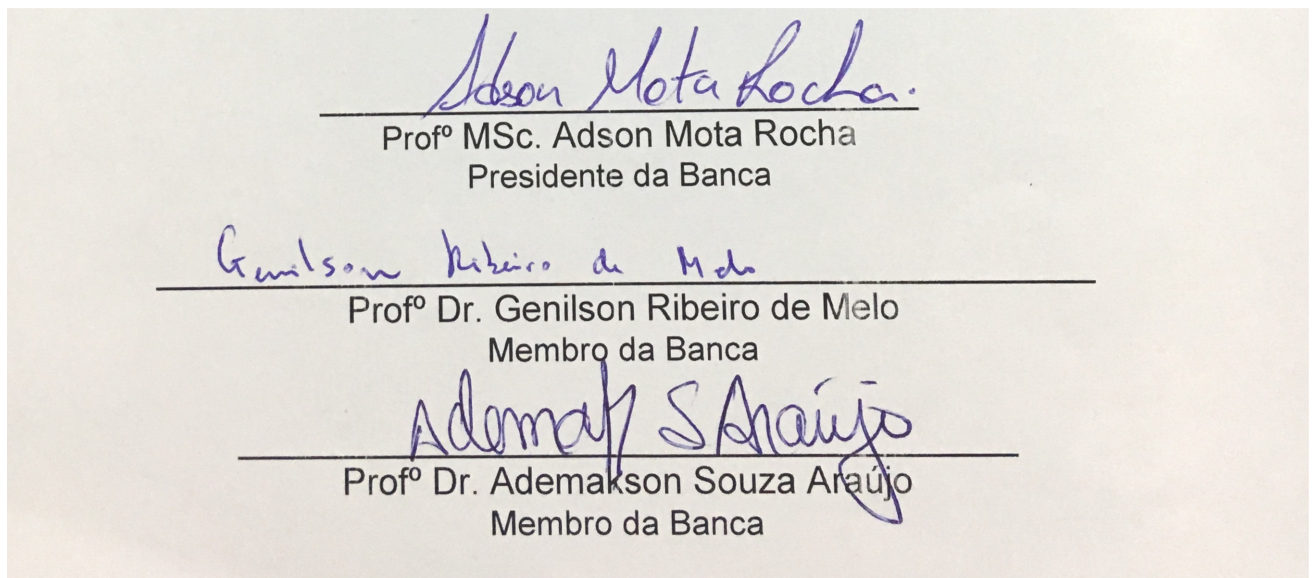
CDU : 512.55

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES POR POLINÔMIOS ORTOGONAIS

BENÍCIO FAGUNDES DE BRITO JÚNIOR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 31 de Março de 2017.

Banca examinadora:



A minha Espatódea!

Agradecimentos

Primeiramente à Deus pelo dom da vida e por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

Aos meus pais, Benício e Vera, pelo incentivo, dedicação e amor incondicional.

A minha esposa Ana Paula, pelo companheirismo, amor, compreensão e exemplo de luta para alcançar os objetivos através dos estudos.

Aos meus tios e todos os familiares que me apoiaram e vibraram a cada conquista realizada.

Aos meus colegas, Bruno Oliveira, Carlos Azevedo, Cléber Borges, Janio Paim, José Carlos Júnior, Patrícia Cerqueira e Valdemir Batista, que foram imprescindíveis durante todo o processo, mostrando que juntos sempre superaríamos todos os obstáculos.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT-UFRB, por me proporcionar não apenas o conhecimento racional mas a afetividade no processo de formação profissional, em especial ao meu orientador, professor MSc. Adson Mota Rocha, pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho. A UFRB, seu corpo docente, direção e administração, que oportunizaram a porta onde vislumbro um caminho promissor.

A todos os meus amigos que acompanharam essa caminhada e que por vezes tive que abdicá-los para estudar.

Por fim, a todos que por quaisquer meios fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“A aproximação é sempre mais bela que a chegada”

Henri Alain-Fournier

Resumo

Apresentamos neste trabalho um método de aproximação de funções contínuas utilizando uma sequência ortonormal total de polinômios. Utilizamos a classe dos polinômios ortogonais e apresentamos suas principais características. Este método é baseado na ortogonalização de Gram-Schmidt e para minimizar os erros foi aplicado o método dos Mínimos Quadrados. O trabalho é finalizado mostrando algumas classes de Polinômios Ortogonais aplicados na aproximação de funções.

Palavras-chave: Aproximações Polinomiais; Problema dos Mínimos Quadrados; Polinômios Ortogonais.

Abstract

We present in this work a method of approximation of continuous functions using a total orthonormal sequence of polynomials. This method is based on Gram-Schmidt orthogonalization and to minimize errors the least squares method was applied. The work is finalized showing some classes of Orthogonal Polynomials applied in the approximation of functions.

Keywords: Polynomial Approximations; Least Squares Problem; Orthogonal Polynomials.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Espaços Vetoriais	3
1.1.1 Dependência e Independência Linear	5
1.1.2 Espaços Vetoriais Finitos e Infinitos	5
1.2 Espaço normado (Espaço de Banach)	7
1.3 Espaços de Produto Interno e de Hilbert	9
1.3.1 Outras propriedades do Espaço de Produto Interno	13
1.4 Conjuntos e Sequências Ortonormais	14
1.4.1 Conjuntos e Sequências Ortonormais Totais	19
2 Aproximações Polinomiais	23
2.1 Teorema de Weierstrass	23
2.2 Teorema de Taylor	24
2.3 Problema dos Mínimos Quadrados	26
2.3.1 Generalização do Problema dos Mínimos Quadrados	29
3 Polinômios Ortogonais - Teoria Geral	31
3.1 Ortogonalização - Processo de Gram-Schmidt	32
3.2 Propriedades Gerais	35
3.3 Problema dos Mínimos Quadrados com utilização dos Polinômios Ortogonais	40
4 Polinômios Ortogonais Clássicos	42
4.1 Polinômios de Legendre	42
4.2 Polinômios de Chebyshev	46
4.3 Polinômios de Hermite	51
4.4 Comentários	55
5 Conclusão	56

Lista de Figuras

1.1	Conjunto Ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ no \mathbb{R}^3 e representação do $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$	15
1.2	Vetores Ortogonais da Relação Pitagórica	16
3.1	Gráfico dos Polinômios Ortogonais construídos através do Processo Gram-Schmidt	35
3.2	Entrelaçamento das raízes de $P_3(x)$ e $P_4(x)$	40
4.1	Gráfico dos seis primeiros Polinômios de Legendre	43
4.2	Aproximação de $f(x) = e^x$ por $r_n^*(x)$ utilizando os Polinômios Ortogonais de Legendre	46
4.3	Aproximação por $r_n(x)$ no intervalo $[-1, 1]$. (a) $n = 1$, (b) $n = 2$ e (c) $n = 3$	46
4.4	Gráfico com os seis primeiros Polinômios de Chebyshev	48
4.5	Aproximação de $f(x) = e^x$ por $r_n^*(x)$ utilizando os Polinômios Ortogonais de Chebyshev	51
4.6	Aproximação por $r_n(x)$ no intervalo $[-1, 1]$. (a) $n = 1$, (b) $n = 2$ e (c) $n = 3$	51
4.7	Gráfico dos seis primeiros Polinômios de Hermite	52
4.8	Aproximação de $f(x) = e^x$ por $r_n^*(x)$ utilizando os Polinômios Ortogonais de Hermite	54
4.9	Aproximação por $r_n(x)$ no intervalo $[-1, 1]$. (a) $n = 1$, (b) $n = 2$ e (c) $n = 3$	54

Introdução

Em diversas áreas da Matemática Aplicada e também nas Ciências Aplicadas, estamos muitas vezes interessados em resolver problemas cuja solução não pode ser obtida exatamente. No caso das equações diferenciais, por exemplo, são muito raras as situações nos quais uma solução pode ser expressa por funções clássicas, tais como polinômios. Na grande maioria dos casos, apresentam-se métodos de solução em termos de aproximações, que sob hipóteses adequadas, podem estar tão próximas quanto se queira da solução correta. Contudo, é importante desenvolver métodos de aproximar funções com certas propriedades que garantam esta aproximação.

Os polinômios ortogonais têm origem de um tipo de frações contínuas, que carrega o nome de Stieljes. Apesar da proximidade do conceito, a propriedade da ortogonalidade, tomada como básica (Szego, 1939), fez com que as frações contínuas e os problema dos momentos, fossem gradualmente abandonados.

Uma das vertentes da Teoria de Aproximação é: dada uma função explicitamente, desejamos encontrar um tipo mais simples de função para representá-la com propriedades que facilitem sua utilização. O objetivo deste trabalho é desenvolver um estudo sobre a aproximação de funções por polinômios ortogonais. Dentre as principais características dos polinômios ortogonais destacamos que estes formam uma base ortonormal dos espaços de funções contínuas e sua construção pode ser obtida facilmente através de fórmulas de recorrência e conseqüentemente de fácil programação.

Segundo os PCN's(Brasil), um dos objetivos do ensino é saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimento. Entendemos que o estudo da Teoria de Aproximação de Funções por Polinômios Ortogonais é importante para professores do ensino médio que, para além de uma maior compreensão, possa estimular seus alunos a ingressar na iniciação científica envolvido com a pesquisa de tais assuntos afim de fortalecer o processo de disseminação de informações, conhecimentos científicos, bem como atitudes, habilidades e valores necessários à educação científica. Um dos exemplos dessa disseminação é o PIBIC-EM (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - Ensino Médio) do CNPq.

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1, faremos um estudo

dos Espaços Vetoriais Finitos e Infinitos, dependência e independência linear, espaços normados (Banach), Espaços de produto interno, conjuntos e sequências ortonormais totais (Kreyszig,1989), dando ênfase ao Espaço de funções contínuas, objeto fundamental em nosso estudo.

No Capítulo 2, trataremos das aproximações polinomiais, demonstrando o Teorema de Weierstrass (Atkinson,1979), que é importante na teoria de aproximações, em seguida temos o Teorema de Taylor, comum nos cursos de Cálculo e também o problema dos Mínimos Quadrados. Por fim, falaremos da função peso e suas propriedades que serão utilizadas no Capítulo 3.

No Capítulo 3, estudaremos os Polinômios Ortogonais, mostrando inicialmente o processo de ortogonalização Gram-Schmidt. Faremos um resumo das principais propriedades dos Polinômios Ortogonais, entre elas: Conjunto de funções L.I., existência, unicidade, raízes distintas e relação de recorrência de três termos. E voltamos ao Problema dos Mínimos Quadrados afim de minimizar o erro agora com o auxílio dos Polinômios Ortogonais.

No quarto e último capítulo, trabalharemos três classes de Polinômios Ortogonais Clássicos: Legendre, Chebyshev e Hermite, aplicando as técnicas de aproximação de uma função clássica.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo desenvolveremos toda a teoria inicial acerca dos Espaços Vetoriais com propriedades que são de suma importância no decorrer deste trabalho embasados em [2].

1.1 Espaços Vetoriais

Espaços Vetoriais desempenham um papel em muitos ramos da matemática e suas aplicações. Em vários problemas práticos e teóricos temos um conjunto X cujos elementos podem ser vetores em espaços tridimensionais, sequencias numéricas ou funções e esses elementos podem ser adicionados ou multiplicados por constantes (números) de maneira natural, o resultado ainda sendo um elemento de X . Tais situações concretas sugerem o conceito de espaço vetorial que será definido abaixo. A definição envolverá em geral um corpo K dentro da análise funcional, com K subconjunto de \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Os elementos de K , serão chamados *escalares*, conseqüentemente em nosso casos serão reais ou complexos.

Definição 1.1.1 (Espaço Vetorial). *Um espaço vetorial (ou espaço linear) sobre um corpo K é um espaço não vazio de um conjunto X de elementos x, y, \dots (chamados vetores) munido de duas operações algébricas. Essas operações são chamadas de adição vetorial e multiplicação de vetores por escalares, isto é, por elementos de K .*

A Adição vetorial associada a cada par ordenado (x, y) de vetores, um vetor $x+y$, chamado de soma de x com y de tal forma que asseguram as seguintes propriedades: A comutatividade e associatividade, isto é, para todos os vetores, temos

$$x + y = y + x$$

$$x(y + z) = (x + y) + z$$

além disso, existe um vetor 0 chamado de *vetor nulo* e para cada vetor x existe um vetor $-x$ tal que para todos os vetores teremos

$$x + 0 = x$$

$$x + (-x) = 0.$$

Multiplicação por escalares associa cada vetor x um escalar α um vetor αx (podendo ser escrito $x\alpha$), chamado de produto de α por x de tal forma que para todos os vetores x, y e escalares α, β teremos

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$1x = x$$

e as leis da distributiva ,

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

Da definição, vimos que a adição vetorial é uma estrutura $X \times X \longrightarrow X$, e a multiplicação por escalares é uma estrutura $K \times X \longrightarrow X$.

K é chamado de *campo escalar* do espaço vetorial X e X é chamado de *espaço vetorial real* se $K = \mathbb{R}$, e *espaço vetorial complexo* se $K = \mathbb{C}$

O uso do 0 para o escalar 0 bem como para o vetor nulo não deveria causar confusão em, em geral. Para clarear, podemos denotar o vetor nulo por θ .

Podemos provar que para todos os vetores e escalares,

$$0x = \theta$$

$$\alpha\theta = \theta$$

e

$$(-1)x = -x$$

Exemplo 1.1.2 (Espaço \mathbb{R}^n). *Este é um espaço euclidiano, sendo o conjunto subjacente ao conjunto de todas as n -ésimos números reais, escrito $x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, etc., e agora vemos que este é um espaço vetorial real com duas operações algébricas definidos de forma usual*

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n)$$

$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \dots, \alpha\xi_n) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exemplo 1.1.3 (Espaço $C[a, b]$). Cada ponto deste espaço é uma função contínua de valor real em $[a, b]$. O conjunto de todas estas funções forma um espaço vetorial real com as operações algébricas definidas de maneira usual:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t), \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

De fato, $x + y$ e αx são funções contínuas de valores reais definidos em $[a, b]$ se x e y são tais funções e α é real. Outros espaços vetoriais importantes de funções são o Espaço Vetorial $B(A)$ de funções limitadas, o espaço vetorial de funções diferenciáveis em \mathbb{R} , e o espaço vetorial de funções contínuas de valores reais em $[a, b]$ que são integráveis em algum sentido.

1.1.1 Dependência e Independência Linear

Dependência e independência linear de um dado conjunto M de vetores x_1, \dots, x_r ($r \geq 1$) em um espaço vetorial X são definidos através da equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r = 0 \tag{1.1}$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ são escalares. Na equação acima, teremos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$. Se isto acontecer, dizemos que o conjunto M é *linearmente independente*. Caso exista algum $\alpha_r \neq 0$, o conjunto M é dito *linearmente dependente*.

Eventualmente um subconjunto M de X é chamado de *linearmente independente* se cada subconjunto não vazio de M é linearmente independente. M é chamado *linearmente dependente* se M não for linearmente independente.

Uma motivação para esta terminologia resulta do fato de $M = x_1, \dots, x_r$ é linearmente dependente se pelo menos um vetor de M puder ser escrito como uma combinação linear dos outros; por exemplo, se (1.1) se mantém com $\alpha_r \neq 0$, então M é linearmente dependente e nós podemos resolver x_r da equação (1.1) para obter

$$x_r = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{r-1} x_{r-1}, \quad (\beta_j = -\alpha_j / \alpha_r).$$

Nós podemos usar os conceito de dependência e independência linear para definir a dimensão de um espaço vetorial, como veremos a seguir.

1.1.2 Espaços Vetoriais Finitos e Infinitos

Um espaço vetorial X é dito de *dimensão finita* se existe um inteiro positivo n tal que X contenha um conjunto de vetores linearmente independente enquanto que qualquer

conjunto de $n + 1$ ou mais vetores de X é linearmente dependente, n é dita a *dimensão* de X , escrevemos $n = \dim X$. Convencionamos que se $X = \{0\}$ é dimensão finita, então $\dim X = 0$. Se X não é de dimensão finita é dito *dimensão infinita*.

Em análise, os espaços vetoriais de dimensão infinita são de maior interesse que os de dimensão finita. Por exemplo, $C[a, b]$ e l^2 são de dimensão infinita, enquanto \mathbb{R}^n e C^n são n -dimensionais.

Se $\dim X = n$, então qualquer conjunto com n vetores linearmente independentes de X é chamado de **base** para X . Se e_1, \dots, e_n é uma base para X , cada $x \in X$ tem um único representante como uma combinação linear de bases vetoriais:

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Por exemplo, uma base para \mathbb{R}^n é

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Esta é chamada de *base canônica* para \mathbb{R}^n .

Mais geralmente, se X é algum espaço vetorial, não necessariamente de dimensão finita, e B um subconjunto linearmente independente de X cujo subespaço gerado X , então B é chamado uma **base** para X . Consequentemente, se B é uma base para X , então todo $x \in X; x \neq 0$ possui única representação como uma combinação linear de elementos de B com escalares não nulos bem como coeficientes.

Todo espaço vetorial não nulo possui uma base.

No caso dimensional finito isso é claro. Para espaços vetoriais arbitrários de dimensão infinita, uma prova da existência é dada pelo uso do Lema de Zorn. Este lema envolve vários conceitos cuja explicação não será objeto de nosso estudo.

Teorema 1.1.4 (Dimensão de um subespaço). *Seja X um espaço vetorial n -dimensional. Então qualquer subespaço Y de X tem dimensão menor que n .*

Prova. Se $n = 0$, então $X = 0$ e não tem subespaço adequado. Se $Y = 0$, então $\dim Y = 0$, e $X \neq Y$ implica $\dim X \geq 1$. Claramente $\dim Y \leq \dim X = n$. Se $\dim Y = n$ então Y teria uma base de n elementos, que também seria base para X desde $\dim X = n$, de modo que $X = Y$. Isto mostra que qualquer conjunto de vetores linearmente independente em Y deve ter menos de n elementos, assim, $\dim Y < n$. \square

1.2 Espaço normado (Espaço de Banach)

Um espaço vetorial X em muitos casos pode ser ao mesmo tempo um espaço métrico, se sua métrica d , for definida em X . Uma métrica em um conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$. No entanto, se não houver relação entre a estrutura algébrica e a métrica, não podemos esperar uma teoria útil que combine conceitos algébricos e métricos.

Para garantir tal relação entre propriedades algébricas e geométricas de X , em uma métrica d de maneira especial, introduziremos um conceito, a *norma*, que utiliza as operações algébricas do espaço vetorial. Em seguida, empregamos a norma para obter uma métrica d desejada. Essa ideia leva ao conceito de *espaço normado*.

Espaços normados são especiais o suficiente para fornecer uma base para uma teoria rica e interessante.

Definição 1.2.1 (Espaço Normado e Espaço de Banach). . Um espaço normado X é um espaço vetorial com a norma definida nele. Um *Espaço de Banach* é um *Espaço Normado*. *Espaço de Banach* é um espaço normado completo (completo na métrica definida pela norma, veremos(1) abaixo). Aqui uma **norma** em um (real ou complexo) espaço vetorial X é uma função de valor real em X cujo valor em $x \in X$ é denotado por

$$\|x\|$$

(lê-se "norma de x ")

possuindo as seguintes propriedades:

(N1)

$$\|x\| \geq 0$$

(N2)

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

(N3)

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

(N4)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Desigualdade triangular})$$

Aqui x e y são vetores arbitrários em X e α é qualquer escalar. Uma norma em X define uma métrica d em X que é dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad (x, y \in X) \quad (1.2)$$

e é chamado de *métrica induzida pela norma*. O espaço normado acabado de ser definido, é denotado por $(X, \|\cdot\|)$ ou simplesmente por X . \square

As propriedades (N1) e (N4) de uma norma, são sugeridas e motivadas pelo comprimento $|x|$ de um vetor x na álgebra vetorial elementar, de modo que nesse caso podemos escrever $\|x\| = |x|$. De fato, (N1) e (N2) afirmam que todos os vetores tem comprimento positivo exceto o vetor nulo que tem comprimento zero. (N3) significa que quando um vetor é multiplicado por um escalar, o comprimento é multiplicado pelo valor absoluto do escalar.

Não é difícil concluir que de (N1) até (N4) a expressão $d(x, y) = \|x - y\|$ define uma métrica. Consequentemente, espaços normados e espaços de Banach são espaços métricos. Espaços de Banach são importantes porque desfrutam de certas propriedades que não são compartilhadas por espaços normados incompletos.

Para uso posterior teremos que (N4) implica

$$|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|, \quad (1.3)$$

esta fórmula acima, implica em uma propriedade importante da norma:

A norma é contínua, ou seja, $x \mapsto \|x\|$ é uma aplicação contínua de $(X, \|\cdot\|)$ em \mathbb{R} .

Exemplos de espaços normados são os espaços familiares de todos os vetores no plano e no espaço tridimensional. Alguns espaços métricos podem ser normados de forma natural. No entanto, nem todas as métricas de um espaço vetorial podem ser obtidas através de uma norma.

Por exemplo:

Exemplo 1.2.2 (Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n e Espaço Unitário \mathbf{C}^n). *Esses espaços são Espaços de Banach com norma definida por*

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2} \quad (1.4)$$

De fato, \mathbb{R}^n e \mathbf{C}^n são completos e produzem a métrica

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \dots + |\xi_n - \eta_n|^2}.$$

Note que em particular em \mathbb{R}^3 nós teremos

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}.$$

Isso confirma que nossa observação anterior generaliza a noção elementar do comprimento $|x|$ de um vetor.

Exemplo 1.2.3 (Espaço $C[a,b]$). *Esse espaço também é um Espaço de Banach com norma*

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \quad (1.5)$$

1.3 Espaços de Produto Interno e de Hilbert

Em um espaço normado podemos adicionar vetores e multiplicar por escalares como na álgebra linear. Já sabemos que a norma de um tal espaço generaliza o conceito do comprimento de um vetor. No entanto, o que buscamos é um espaço normalizado dotado de um produto interno familiar

$$a \cdot b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

onde $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Com fórmulas resultantes que garantam

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

e a condição para a ortogonalidade

$$a \cdot b = 0,$$

as quais são ferramentas importantes em muitas aplicações. O produto e a ortogonalidade podem ser generalizadas para espaços vetoriais arbitrários?

De fato, isso pode ser feito através de *Espaços de Produto Interno* chamados de Espaços de *Hilbert*, que iniciou a sua teoria em (1942) sobre equações integrais.

Esses espaços são muito ricos e possuem muitas características do espaço euclidiano, sendo o conceito central a ortogonalidade. A notação e a terminologia geométrica usados atualmente, são análogos a geometria euclidiana inventados por G. Schimidt (1908).

Definição 1.3.1. *Um Espaço de Produto Interno X é um espaço vetorial com um produto interno $\langle x, y \rangle$ definido nele. A generalização do produto de vetores no espaço tridimensional é usado e definido como*

(I) *uma norma $\|\cdot\|$ de $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$,*

(II) *ortogonalidade de $\langle x, y \rangle = 0$*

Um *Espaço de Hilbert* é um espaço de produto interno completo.

Definição 1.3.2 (Espaço de Produto Interno e de Hilbert). *Um Espaço de Produto Interno é um espaço vetorial X com um produto interno definido em X . Um Espaço de Hilbert é um Espaço de Produto Interno completo (completo na métrica definida pelo produto interno). O produto interno em X é uma aplicação de $X \times X$ no corpo escalar K ; isto é, cada par ordenado de vetores x e y está associado a um escalar que é escrito*

$$\langle x, y \rangle$$

e é chamado de produto interno de x e y tal que para todos os vetores x, y, z e escalares α nós temos

(PI1)

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

(PI2)

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

(PI3)

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

(PI4)

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Um produto interno em X define uma norma em x dada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad (\geq 0) \tag{1.6}$$

e uma métrica em X dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}. \tag{1.7}$$

Assim, Espaços de Produto Interno, são espaços normados e espaços de Hilbert são espaços de Banach. Em **(PI3)**, a barra denota o conjugado complexo. Consequentemente, se X é um espaço vetorial real, nós simplesmente teremos

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

Das propriedades do produto interno, teremos

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \tag{1.8}$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle \quad (1.9)$$

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle \quad (1.10)$$

que usaremos muito frequentemente. A propriedade (1.8) mostra que o produto interno é linear no primeiro fator. Como em (1.10) temos conjugados complexos α e β à direita, dizemos que o produto interno é *conjugado linear* do segundo fator. Expressando ambas as propriedades juntas, dizemos que o produto interno é *sesquilinear*.

Pode-se mostrar que uma norma sobre um espaço de produto interno satisfaz a **lei do paralelogramo**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (1.11)$$

Este nome provém da geometria elementar e também se lembrarmos que a norma generaliza o conceito de comprimento de um vetor (visto anteriormente). Se uma norma não satisfaz (1.11), não pode ser obtida a partir de um produto interno pelo uso de (1.6). Essas normas devem existir. Veremos dois exemplos no \mathbb{R}^n e $\mathbf{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. *Nem todos espaços normados são Espaços de Produto Interno*.

Antes de considerarmos exemplos, vamos definir o conceito de ortogonalidade, que é base para toda a teoria. Sabemos que se o produto interno de dois vetores no espaço tridimensional é zero, os vetores são ortogonais, ou seja, são perpendiculares, ou pelo menos um deles é o vetor nulo.

Definição 1.3.3 (Ortogonalidade). *Um elemento x de um Espaço de Produto Interno X é chamado ortogonal para um elemento $y \in X$ se*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Também dizemos que x e y são ortogonais, e escrevemos $x \perp y$. Da mesma forma para os subconjuntos $A, B \subset X$, nós escrevemos $x \perp A$ se $x \perp a$ para todo $a \in A$, e $A \perp B$ se $a \perp b$ para todo $a \in A$ e todo $b \in B$.

Exemplo 1.3.4 (Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n). *O espaço \mathbb{R}^n é um espaço de Hilbert com produto interno definido por*

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n \quad (1.12)$$

onde $x = (\xi_j) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ e $y = (\eta_j) = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. De fato, de (1.12) nós obtemos

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$$

e da métrica euclidiana definida por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2} = [(\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2]^{1/2};$$

Se $n = 3$ o produto ponto usual é

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3,$$

onde $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ e $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ e a ortogonalidade

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = 0,$$

estão de acordo com o conceito elementar de perpendicularidade.

Exemplo 1.3.5 (Espaço $\mathbf{C[a, b]}$). O espaço $C[a, b]$ não é um Espaço de Produto Interno, portanto não é um Espaço de Hilbert

De fato, nós veremos que a norma definida por

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|$$

$$J = [a, b]$$

não pode ser obtida de um produto interno pois a a norma não satisfaz a lei do paralelogramo (1.11). Se tomarmos $x(t) = 1$ e $y(t) = (t - a)/(t - b)$, nós teremos $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ e

$$\begin{aligned} x(t) + y(t) &= 1 + \frac{t - a}{b - a} \\ x(t) - y(t) &= 1 + \frac{t - a}{b - a}. \end{aligned}$$

Portanto $\|x + y\| = 2$, $\|x - y\| = 1$ e $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 5$ mas $2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$.

□

Finalmente mencionaremos o seguinte fato interessante. Sabemos que um produto interno corresponde a uma norma que é dada por (1.6). É notável que inversamente podemos “redescobrir” o produto interno da norma correspondente. De fato, podemos verificar, por meio de um cálculo direto, que para um espaço de produto interno real, temos

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (1.13)$$

e para um Espaço de Produto Interno complexo temos

$$\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (1.14)$$

$$\operatorname{Im}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$$

1.3.1 Outras propriedades do Espaço de Produto Interno

Primeiramente, verificamos que (1.6) define uma norma: (N1) e (N2) seguem de (PI4). Além disso (N3) é obtido da utilização de (PI2) e (PI3); de fato,

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2$$

Finalmente, N(4) está incluído na **Desigualdade de Cauchy Schwarz e desigualdade triangular** que veremos a seguir.

Um produto interno e as normas correspondentes satisfazem a *desigualdade de Cauchy* e a *desigualdade triangular* a seguir.

Teorema 1.3.6. *Seja X um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $x, y \in X$ então:*

(a)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{Desigualdade de Cauchy} \quad (1.15)$$

(b) *Essa norma também satisfaz*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{Desigualdade triangular} \quad (1.16)$$

onde o sinal da igualdade é válido se e somente se $y = 0$ ou $x = cy$ (c real, ≥ 0).

Prova. (a) Se $y = 0$ então (1.15) é válido desde $\langle x, 0 \rangle = 0$. Seja $y \neq 0$, para todo escalar α nós temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \alpha y\|^2 &= \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \bar{\alpha} \langle x, y \rangle - \alpha [\langle y, x \rangle - \bar{\alpha} \langle y, y \rangle]. \end{aligned}$$

□

Vemos que a expressão nos colchetes é zero se escolhermos $\bar{\alpha} = \langle y, x \rangle / \langle y, y \rangle$. A desigualdade restante é

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2};$$

aqui usamos $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$. Multiplicando por $\|y\|^2$, transferindo o último termo para a esquerda e extraindo raízes quadradas, obtemos (1.15). A igualdade ocorre se e somente se $y = 0$ ou $\|x - \alpha y\| = 0$ portanto, $x - \alpha y = 0$ de modo que $x = \alpha y$ mostrando a dependência linear.

Prova. (b) Com a prova de (1.16), nós temos

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2$$

da inequação de Schwarz,

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle y, x \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Pela desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Extraindo raízes quadradas em ambos os membros teremos (1.16). A igualdade se dar se e somente se

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = 2\|x\| \|y\|.$$

O segundo membro é $2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle$, onde Re denota a parte real. Desta afirmação e de (1.15), temos que

$$\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \geq |\langle x, y \rangle|.$$

Uma vez que a parte real de um número complexo não pode exceder o valor absoluto, devemos ter igualdade, o que implica em dependência linear por (1.8), dizemos que $y = 0$ ou $x = cy$. mostramos que c é real não negativo. De (1.8) com o sinal de igualdade, temos $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$. Mas se a parte real de um número complexo é igual ao valor absoluto, então a parte imaginária deve ser zero. Portanto $\langle x, y \rangle = \operatorname{Re}\langle x, y \rangle \geq 0$ de (1.8)(1.9)(1.10), e $c \geq 0$ segue de

$$0 \leq \langle x, y \rangle = \langle cy, y \rangle = c\|y\|^2.$$

□

1.4 Conjuntos e Sequências Ortonormais

A ortogonalidade dos elementos, definida anteriormente, desempenha um papel fundamental no produto interno e nos Espaços de Hilbert. De interesse particular, os conjuntos cujos elementos são ortogonais em pares. Lembramos de uma situação nos espaços euclidianos \mathbb{R}^3 . No espaço \mathbb{R}^3 , um conjunto desse tipo é o conjunto dos três vetores unitários nas direções positivas dos eixos de um sistema de coordenadas retangulares. Chamamos esses vetores de e_1, e_2, e_3 . Estes vetores formam uma base para \mathbb{R}^3 (base canônica) de modo que cada $x \in \mathbb{R}^3$ tem uma representação única

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

(Ver Figura 1.1).

Na Figura 1.1 apresentamos os vetores e_1, e_2 e e_3 no espaço \mathbb{R}^3 .

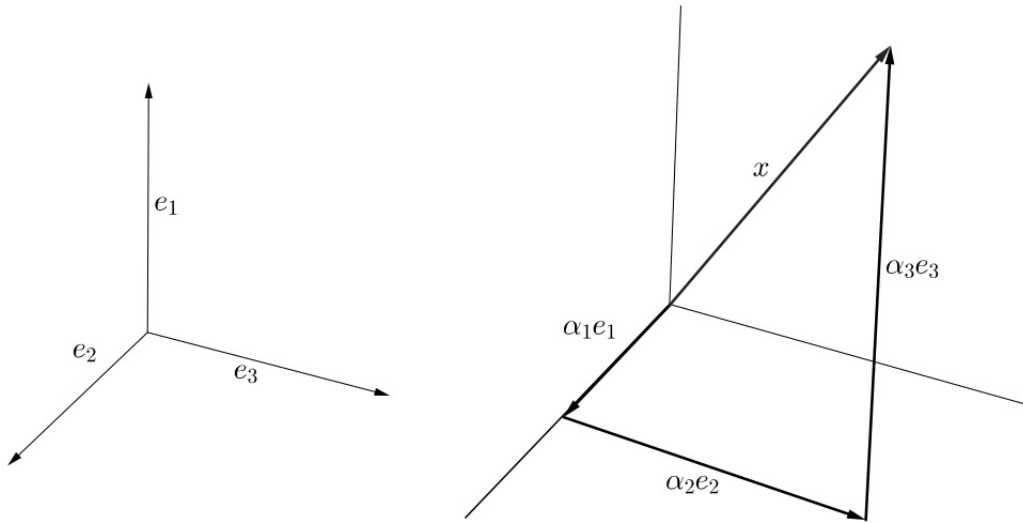


Figura 1.1: Conjunto Ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ no \mathbb{R}^3 e representação do $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$

Agora vemos uma grande vantagem da ortogonalidade. Dado um x , podemos facilmente determinar os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aplicando produtos internos. De fato, para obter α_1 , devemos multiplicar essa representação de x por e_1 , isto é

$$\langle x, e_1 \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_1 \rangle + \alpha_3 \langle e_3, e_1 \rangle = \alpha_1,$$

e assim por diante.

Em espaços mais gerais do produto interno, existem possibilidades semelhantes para o uso de sequências ortogonais e ortonormais. A aplicação de tais conjuntos e sequências faz parte de toda a teoria do produto interno e dos Espaços de Hilbert.

Definição 1.4.1 (Conjuntos e Sequências Ortonormais). *Um conjunto ortogonal M num espaço de produto interno X é um subconjunto $M \subset X$ tal que seus elementos são ortogonais em pares. Um conjunto ortonormal $M \subset X$ é um conjunto ortogonal em X cujos elementos possuem norma 1, isto é para todo $x, y \in M$,*

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq y \\ 1, & \text{se } x = y \end{cases} \quad (1.17)$$

Se um conjunto ortogonal ou ortonormal M é contável, podemos organizá-lo numa sequência (x_n) e chamá-lo *sequência ortogonal ou ortonormal* respectivamente.

De modo geral, um conjunto indexado, ou uma família $(x_\alpha), \alpha \in I$ é chamado de ortogonal se $x_\alpha \perp x_\beta$, e para todo $\alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta$. A família é chamada ortonormal se é ortogonal e se todo (x_n) possuir norma 1, para todo $\alpha, \beta \in I$, isto é,

$$\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{se } \alpha = \beta \end{cases} \quad (1.18)$$

$\delta_{\alpha\beta}$ é o delta de Kronecker. Em qualquer subconjunto M de X podemos sempre encontrar uma família de elementos de X em que o conjuntos dos elementos da família seja M . Em particular, podemos tomar a família definida pela injetividade natural de M em X , isto é, a restrição de M para aplicações definidas $x \rightarrow x$ em X .

Vamos considerar agora alguns exemplos e propriedades simples de conjuntos ortogonais e ortonormais. Para os elementos ortogonais x, y temos $\langle x, y \rangle = 0$ de modo que obtemos prontamente a **relação pitagórica**. (Ver Figura 1.2).

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (1.19)$$

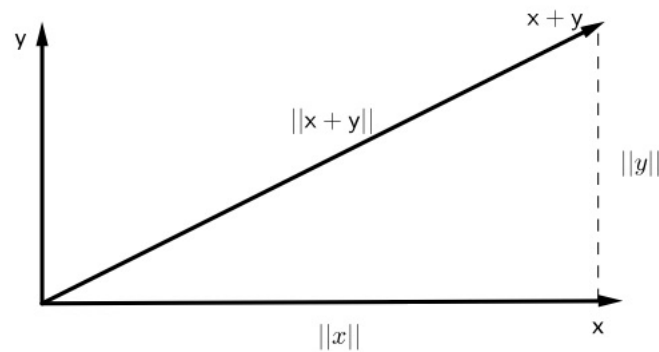


Figura 1.2: Vetores Ortogonais da Relação Pitagórica

A Figura 1.2 mostra um exemplo familiar. Mais generalizado, se x_1, \dots, x_n é um conjunto ortogonal, então,

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2. \quad (1.20)$$

De fato, $\langle x_j, x_k \rangle = 0$ se $j \neq k$; conseqüentemente

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j, \sum_{k=1}^n x_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle x_j, x_k \rangle = \sum_{j=1}^n \langle x_j, x_j \rangle = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2$$

Lema 1.4.2 (Independência Linear). *Um conjunto ortonormal é linearmente independente.*

Prova. Tomando e_1, \dots, e_n ortogonais e considerando a equação

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0.$$

Multiplicando por um e_j fixo, temos

$$\left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = \alpha_j = 0$$

onde prova a independência linear para qualquer conjunto ortonormal finito. Isso também implica independência linear se o conjunto ortonormal dado for infinito, pela definição de independência linear. \square

Em $C([a, b])$ podemos definir um produto interno associado a uma função peso $\omega(x)$, da seguinte forma:

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x) dx, \quad (1.21)$$

onde $\omega(x)$ é uma função não negativa. Pode-se verificar que (1.21) é um produto interno sobre $C([a, b])$, além disso, $(C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle_\omega)$ é um espaço de Hilbert.

Exemplo 1.4.3 (Espaço euclidiano \mathbb{R}^3). *No espaço \mathbb{R}^3 , os três vetores unitários*

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1),$$

com direções dos três eixos de um sistema de coordenadas retangulares formam um conjunto ortonormal. (Figura 1.1)

Exemplo 1.4.4 (Funções Contínuas). *Dado X , um espaço de produto interno de todas as funções contínuas de valor real em $[0, 2\pi]$ com produto interno definido por*

$$\langle x, y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt. \quad (1.22)$$

Uma sequência ortonormal em X é (u_n) , onde

$$u_n(t) = \cos nt$$

$$n = 0, 1, \dots$$

Outra sequência ortogonal em X é (v_n) , onde

$$v_n(t) = \sin nt$$

$$n = 1, 2, \dots$$

De fato, da integração nós obteremos

$$\langle u_m, u_n \rangle = \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n = 1, 2, \dots \\ 2\pi & \text{se } m = n = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

análogo para (v_n) . Consequentemente uma sequência ortonormal é (e_n) , quando

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_n(t) = \frac{u_n(t)}{\|u_n\|} = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

De (v_n) nós obtemos a sequência ortonormal (\bar{e}_n) , onde

$$\bar{e}_n(t) = \frac{v_n(t)}{\|v_n\|} = \frac{\text{sen } nt}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Note que temos mesmo $u_m \perp v_n$ para todo m e n . Estas sequências aparecem na *Séries de Fourier*. Outras sequências ortonormais de importância prática serão vistas posteriormente. Uma grande vantagem das sequências ortonormais sobre sequências linearmente independentes arbitrárias é a seguinte: Sabe-se que um dado x pode ser representado como uma combinação linear de alguns elementos de uma sequência ortonormal, em seguida, a ortogonalidade faz a determinação dos coeficientes reais. De fato, se (e_1, e_2, \dots) é uma sequência ortonormal de um espaço de produto interno X e temos que $x \in \text{span} \{e_1, \dots, e_n\}$ onde n é fixo, então

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k,$$

e se tomarmos um produto interno de um e_j fixo, obteremos

$$\langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j. \quad (1.24)$$

Com esses coeficientes torna-se

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \quad (1.25)$$

Outra vantagem da ortogonalidade aparece, se em (1.24) e (1.25) adicionarmos outro termo $\alpha_{n+1}e_{n+1}$, para tratar de

$$\bar{x} = x + \alpha_{n+1}e_{n+1} \in \text{span} \{e_1, \dots, e_n\};$$

então precisamos calcular apenas mais um coeficiente, já que os outros permanecem inalterados. De forma mais geral, se considerarmos qualquer $x \in X$, não necessariamente em $y = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ podemos definir $y \in Y$ por

$$y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, \quad (1.26)$$

onde n é fixo, como antes, e z definido por

$$x = y + z$$

isto é, $z = x - y$. queremos mostrar que $z \perp y$. Observe que todo $Y_n \in Y$ é uma combinação linear

$$y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$

Aqui $\alpha_k = \langle y, e_k \rangle$, queremos escolher um particular $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle, k = 1, \dots, n$ obteremos um y tal que $z = x - y \perp y$. Para provar isso, notemos primeiramente pela ortogonalidade

$$\|y\|^2 = \left\langle \sum \langle x, e_k \rangle e_k, \sum \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle = \sum |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad (1.27)$$

Usando isto, nós podemos mostrar agora que $z \perp y$:

$$\begin{aligned} \langle z, y \rangle &= \langle x - y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= \left\langle x, \sum \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle - \|y\|^2 \\ &= \sum \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} - \sum |\langle x, e_k \rangle|^2 = 0 \end{aligned}$$

Daí, a Relação Pitagórica (1.19) temos

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2. \quad (1.28)$$

De (1.27) segue que

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \sum |\langle x, e_k \rangle|^2. \quad (1.29)$$

Dado $\|z\| \geq 0$ temos para cada $n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad (1.30)$$

Estas somas não possuem termos negativos, de modo que formam uma sequência monótona crescente. Esta sequência converge por que é limitada por $\|x\|^2$. esta ee a sequência de somas parciais de uma série infinita, que assim converge.

1.4.1 Conjuntos e Sequências Ortonormais Totais

Uma família ortonormal total em X pode ser chamada de base ortonormal para X . É importante lembrar que esta não é uma base no sentido da álgebra, a menos que X seja um espaço vetorial de dimensão finita.

Em todo Espaço de Hilbert $H \neq \{0\}$ existe um conjunto ortonormal total. Para um H de dimensão finita isto é claro como foi dito anteriormente. Para um H separável de dimensão infinita, segue o processo de Grand-Schimidt por indução. Para um H não separável de dimensão infinita, usa-se o Lema de Zorn. Este lema e o conceito de separável, pode ser encontrado em [2] p.210 e p. 21, respectivamente. Todos os conjuntos ortonormais totais num dado Espaço de Hilbert $H \neq \{0\}$ tem a mesma cardinalidade , que é dito como dimensão de Hilbert ou dimensão ortogonal de H . (se $H = 0$ a dimensão é definida como 0). Se H é de dimensão finita, a dimensão de Hilbert é a dimensão no sentido da álgebra. Para um H de dimensão infinita separável, seria dito como Espaço de Hilbert Separável cujo teorema se encontra em [2]p.171 cuja prova não demonstraremos aqui.

Definição 1.4.5. *Um conjunto total (ou conjunto fundamental) em um espaço normado X , é um subconjunto $M \subset X$ cujo $span$ é denso em X . Esta definição de conjunto denso pode ser encontrada em [2]p. 21. Da mesma forma que um conjunto ortonormal (ou família de seqüências) em um espaço de Produto Interno X que é total em X , é chamado de conjunto ortonormal total.*

M é total em X se e somente se

$$\overline{span M} = X.$$

Teorema 1.4.6 (Totalidade). *Dado M um subconjunto de um Espaço de Produto Interno X , temos:*

(a) *Se M é total em X , então existe $x \in X$ não nulo que seja ortogonal a cada elemento de M . Assim,*

$$x \perp M \implies x = 0 \tag{1.31}$$

(b) *Se X é completo, implica que M é total em X .*

Prova. (a) Dado um H , completo de X . Então X é denso em H pois é subespaço de H . Por hipótese, M é total em X de modo que $span M$ é denso em X , portanto, denso em H . O lema da densidade pode ser encontrado em [2]p. 149, isto implica que o complemento ortogonal de M em H é $\{0\}$. Portanto, se $x \in X$ e $x \perp M$, então $x = 0$.

(b) Se X é um Espaço de Hilbert e M satisfaz essa condição de modo que $M^\perp = \{0\}$, então pelo lema da densidade de um conjunto, implica que M é total em X .

□

A completude de **(b)** é essencial. Se X não for completo, não pode existir um conjunto ortonormal $M \subset X$ tal que M seja total em X . Esse exemplos podem ser encontrados em (Dixmier 1959) em também em (N. Bourbaki 1955 p. 155) Outro critério importante para a totalidade pode ser obtido pela desigualdade de Bessel. Para isso, consideraremos qualquer conjunto ortonormal M em um Espaço de Hilbert H . Pelo lema dos coeficientes de Fourier, [2]p.165, sabemos que cada $x \in H$ fixo, possuem muitos coeficientes de Fourier não nulos, de modo que podemos organizá-los em uma sequência denotada por $\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots$

$$\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{(Desigualdade de Bessel)} \quad (1.32)$$

com o primeiro membro sendo uma série infinita ou uma soma finita. No caso de igualdade, tem-se a **Relação de Parseval**

$$\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad (1.33)$$

e produz outros critérios para a totalidade que veremos a seguir.

Teorema 1.4.7 (Totalidade). *Um conjunto ortonormal M em um Espaço de Hilbert H é total em H se e somente se para todo $x \in H$ a Relação de Parseval é válida.*

Prova. **(a)** Suponha por absurdo, que M não é total, pelo teorema anterior da totalidade, existe um $x \neq 0, x \perp M$ em H . Dado que $x \perp M$, em (1.33) (Relação de Parseval), temos que $\langle x, e_k \rangle = 0$ para todo k e o primeiro membro dessa relação é zero, enquanto que $\|x\|^2 \neq 0$. Isso mostra que a relação de Parseval não se mantém. Portanto, se a relação de Parseval para todo $x \in H$ é válido, então M é total em H .

(b) Agora suponha que M seja total em H . Considere qualquer $x \in H$ e seus coeficientes de Fourier não-nulos dispostos em uma sequência $\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots$, ou escritos em alguma ordem, desde que haja uma grande quantidade finita. Definimos y por

$$y = \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k, \quad (1.34)$$

Observando que no caso de uma série infinita, a convergência resulta do teorema da convergência que pode ser encontrada em [2] p.164. Vamos mostrar que $x - y \perp M$. Para cada e_j em (1.34), e usando a ortogonalidade, temos

$$\langle x - y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_k \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0$$

E para cada $v \in M$ não contido em (1.34) temos que $\langle x, v \rangle = 0$ de modo que

$$\langle x - y, v \rangle = \langle x, v \rangle - \sum_k \langle x, e_k \rangle \langle e_k, v \rangle = 0 - 0 = 0.$$

Para todo $x - y \perp M$, isto é $x - y \perp M^\perp$. Como M é total em H , temos $M^\perp = \{0\}$ de [2]p.149. Juntos $x - y = 0$ ou seja, $x = y$. Usando (1.34) e a ortogonalidade novamente, obteremos (1.33) de

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_m \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle = \sum_k \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle}.$$

e isto completa a prova.

□

Capítulo 2

Aproximações Polinomiais

2.1 Teorema de Weierstrass

Para justificar o uso de polinômios para aproximação de funções contínuas, apresentaremos o seguinte teorema segundo [1].

Teorema 2.1.1 (Weierstrass). *Sejam $f(x)$ uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$ e um número positivo $\epsilon > 0$. Então existe um polinômio $p(x)$ tal que*

$$|f(x) - p(x)| \leq \epsilon, \quad a \leq x \leq b. \quad (2.1)$$

Existem muitas provas desse resultado e de suas generalizações. Aqui apresentaremos apenas uma prova construtiva.

Prova. Suponha $[a, b] = [0, 1]$ Definiremos

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Dado um $f(x)$ limitado em $[a, b]$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$$

em qualquer ponto x onde f é contínua. Se $f(x)$ for contínua para cada x em $[a, b]$, então p_n converge uniformemente para f nesse intervalo, isto é

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - p(x)| \rightarrow 0, \quad \text{com } n \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Isso mostra uma maneira explícita de encontrar um polinômio que satisfaça a conclusão do teorema. A prova desse resultado pode ser encontrada em [3] juntamente com propriedades adicionais dos polinômios de Bernstein. Eles imitam muito bem o comportamento da função f . Se $f(x)$ é r vezes continuamente diferenciável em $[0, 1]$, então

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(r)}(x) - p^{(r)}(x)| \rightarrow 0, \quad \text{com } n \rightarrow \infty.$$

Entretanto, neste caso a convergência em (2.2) é geralmente muito lenta. Por exemplo, se $f(x) = x^2$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[p_n(x) - f(x)] = x(1 - x)$$

e assim

$$p_n(x) - x^2 \approx \frac{1}{n}x(1 - x)$$

para grande valores de n . O erro não diminui rapidamente mesmo para aproximar um caso trivial como $f(x) = x^2$ \square

2.2 Teorema de Taylor

Muito utilizado na Análise Numérica, o Teorema de Taylor apresenta um método relativamente simples para aproximar funções $f(x)$ por polinômios conforme [1].

Teorema 2.2.1 (Teorema de Taylor). *Dados $f(x)$ com $n + 1$ derivadas contínuas em $[a, b]$ para algum $n \geq 0$ e $x, x_0 \in [a, b]$, então*

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x) \quad (2.3)$$

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) \quad (2.4)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2.5)$$

para algum ξ entre x_0 e x .

Prova. A derivação de (2.3) é dada na maioria dos textos de cálculo. Usando a integração por partes em

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

repetindo n vezes para obter as equações (2.3) a (2.5) com a integral de $R_{n+1}(x)$. A segunda forma de $R_{n+1}(x)$ é obtida usando o teorema da integral do valor médio ([1]p.4), com $w(x) = (x - t)^n$. \square

Usando o Teorema de Taylor, obtemos as seguintes fórmulas:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} e^{\xi_x} \quad (2.6)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n + 2)!} \cos(\xi_x) \quad (2.7)$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n - 1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} \cos(\xi_x) \quad (2.8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1-\alpha}}, \quad (2.9)$$

com

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

para qualquer α real. Para todos os casos, o ponto desconhecido ξ_x está localizado entre x e 0. Um caso importante de (2.9) é

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad x \neq 1. \quad (2.10)$$

No caso de $\alpha = -1$, substituiremos x por $-x$. O restante pode ser provado multiplicando ambos os membros de (2.10) por $(1-x)$ e simplificando em seguida. Reorganizando, encontraremos a fórmula par uma série geométrica finita

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad x \neq 1. \quad (2.11)$$

As representações em séries infinitas para as funções do primeiro membro das fórmulas de (2.6) a (2.10) serão obtidas quando $n \rightarrow \infty$. As séries infinitas de (2.6) a (2.8) convergem para todo x , e as (2.9) e (2.10) convergem para $|x| < 1$.

A fórmula (2.11) leva a série geométrica infinita

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1. \quad (2.12)$$

O Teorema de Taylor é o primeiro meio para a aproximação de uma função, e é frequentemente usado como aproximação preliminar para calcular alguma aproximação mais eficiente. Veremos com um exemplo, porque a aproximação de Taylor não é particularmente eficiente.

Exemplo 2.2.2. *Encontre o erro de aproximação de e^x usando o polinômio de Taylor de terceiro grau $p_3(x)$ no intervalo $[0, 1]$ expandindo sobre $x = 0$. Note que,*

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \\ e^x - p_3(x) &= R_4(x) = \frac{1}{24}x^4 e^\xi \end{aligned} \quad (2.13)$$

com ξ entre x e 0. Para examinar cuidadosamente o erro, faremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{24}x^4 &\leq e^x - p_3(x) \leq \frac{e}{24}x^4, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{e^{-1}}{24}x^4 &\leq e^x - p_3(x) \leq \frac{1}{24}x^4, & -1 \leq x \leq 0 \end{aligned}$$

O erro aumenta se aumentarmos $|x|$, e calculando diretamente temos,

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |e^x - p_3| \approx 0.516 \quad (2.14)$$

O erro não é distribuído uniformemente no intervalo $[-1, 1]$, como podemos observar na figura abaixo. É muito menor perto da origem do que nos extremos -1 e 1 . Essa distribuição desigual do erro é típico do Resto de Taylor. Significa que a melhor aproximação ocorre com polinômios de mesmo grau.

2.3 Problema dos Mínimos Quadrados

A aproximação por Mínimos Quadrados é uma melhor alternativa em relação aos polinômios de Taylor. Denotemos

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}, \quad g \in C[a, b]. \quad (2.15)$$

Esta é uma norma que satisfaz as mesmas propriedades definidas no Cap. 1 e é uma generalização da norma Euclidiana para \mathbb{R}^n .

Seja uma função $f \in C[a, b]$ e $n \geq 0$, definiremos

$$M_n(f) = \inf_{\partial r \leq n} \|f - r\|_2. \quad (2.16)$$

Existe um polinômio r_n^* (com grau menor ou igual a n) que minimize a expressão

$$M_n(f) = \|f - r_n^*\|_2 \quad (2.17)$$

Consideremos calcular o erro médio na aproximação de $f(x)$ por $r(x)$. Para um inteiro $m \geq 1$, definiremos x_j por

$$x_j = a + \left(j - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{b-a}{m}\right) \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Estes são os pontos médios de m , subintervalos uniformemente espaçados de $[a, b]$. Então um erro médio de aproximação de $f(x)$ por $r(x)$ em $[a, b]$ é

$$\begin{aligned} E &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [f(x_j) - r(x_j)]^2 \right\}^{1/2} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^m [f(x_j) - r(x_j)]^2 \left(\frac{b-a}{m}\right) \right\}^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{b-a}} \sqrt{\int_a^b |f(x) - r(x)|^2 dx} \\ E &= \frac{\|f - r\|_2}{\sqrt{b-a}} \end{aligned}$$

Assim a aproximação por Mínimos Quadrados terá um pequeno erro em $[a, b]$. E é chamada de erro da raiz quadrada média na aproximação de $f(x)$ por $r(x)$.

Exemplo 2.3.1. *Sejam $f(x) = e^x$, $-1 \leq x \leq 1$, e $r(x) = b_0 + b_1x$, minimizar*

$$\|f - r_1\|_2^2 = \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x]^2 dx \equiv F(b_0, b_1) \quad (2.18)$$

Se desenvolvermos a integral, então $F(b_0, b_1)$ é um polinômio quadrático em b_0 e b_1 .

$$F(b_0, b_1) = \int_{-1}^1 \{e^{2x} + b_0^2 + b_1x^2 - 2b_0e^x - 2e^xb_1x + 2b_0b_1x\} dx \quad (2.19)$$

Para encontrar o mínimo, faremos derivadas parciais

$$\frac{\partial F}{\partial b_0} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial b_1} = 0$$

que é uma condição necessária em um ponto mínimo. Em vez de diferenciar na integral dada anteriormente, diferenciaremos a integral em

(r_1^*)

$$0 = \frac{\partial F}{\partial b_0} = \int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial b_0} [e^x - b_0 - b_1x]^2 dx = 2 \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x](-1) dx$$

$$-2 \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x] dx = 0 \Rightarrow b_0 = \sinh(1) \approx 1,1752$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial b_1} = \int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial b_1} [e^x - b_0 - b_1x]^2 dx = 2 \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x](-x) dx$$

$$-2 \int_{-1}^1 [xe^x - b_0x - b_1x^2] dx = 0 \Rightarrow b_1 = 3e^{-1} \approx 1,1036$$

$$r_1^*(x) = 1,1752 + 1,1036x \quad (2.20)$$

Com

$$E_1 = \frac{\|f - r_1^*\|_2}{\sqrt{b-a}} \approx 0,162$$

(r_2^*)

$$0 = \frac{\partial F}{\partial b_0} = \int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial b_0} [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2]^2 dx = 2 \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2](-1) dx =$$

$$= -2 \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2] dx = 0 \Rightarrow 3b_0 + b_2 = \frac{3e^2 - 3}{2e}$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial b_1} = \int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial b_1} [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2]^2 dx = 2 \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2](-x) dx =$$

$$= -2 \int_{-1}^1 [xe^x - b_0x - b_1x^2 - b_2x^3] dx = 0 \Rightarrow -2 \left[xe^x - e^x - \frac{b_0x^2}{2} - \frac{b_1x^3}{3} - \frac{b_2x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0$$

$$\Rightarrow b_1 = 3e^{-1} \approx 1,1036$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial b_2} = \int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial b_2} [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2]^2 dx = 2 \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2](-x^2) dx = \\ &= -2 \int_{-1}^1 [x^2e^x - b_0x^2 - b_1x^3 - b_2x^4] dx = 0 \Rightarrow -2 \left[e^x(x^2 - 2x + 2) - \frac{b_0x^3}{3} - \frac{b_1x^4}{4} - \frac{b_2x^5}{5} \right]_{-1}^1 = 0 \\ &\Rightarrow 10b_0 + 6b_2 = 15(e - 5e^{-1}) \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} 3b_0 + b_2 = 3,5256 \\ 10b_0 + 6b_2 = 13,18327 \end{cases}$$

temos,

$$b_0 = 0,997416, b_1 = 1,1036, \text{ e } b_2 = 0,536726$$

por fim,

$$r_2^*(x) = 0,997416 + 1,1036x + 0,536726x^2 \quad (2.21)$$

Com

$$E = \frac{\|f - r_2^*\|_2}{\sqrt{b-a}} \approx 0,026$$

(r_3^*)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial b_0} = \int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial b_0} [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2 - b_3x^3]^2 dx = 2 \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2 - b_3x^3](-1) dx = \\ &= -2 \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2 - b_3x^3] dx = \\ &= -2 \left[e^x - b_0x - \frac{b_1x^2}{2} - \frac{b_2x^3}{3} - \frac{b_3x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0 \\ &\Rightarrow 3b_0 + b_2 = \frac{3e^2 - 3}{2e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial b_1} = \int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial b_1} [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2 - b_3x^3]^2 dx = 2 \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2 - b_3x^3](-x) dx = \\ &= -2 \int_{-1}^1 [xe^x - b_0x - b_1x^2 - b_2x^3 - b_3x^4] dx = \\ &= -2 \left[xe^x - e^x - \frac{b_0x^2}{2} - \frac{b_1x^3}{3} - \frac{b_2x^4}{4} - \frac{b_3x^5}{5} \right]_{-1}^1 = 0 \\ &\Rightarrow 5b_1 + 3b_3 = 15e^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial F}{\partial b_2} &= \int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial b_2} [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2 - b_3x^3]^2 dx = 2 \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2 - b_3x^3](-x^2) dx = \\
&= -2 \int_{-1}^1 [x^2 e^x - b_0x^2 - b_1x^3 - b_2x^4 - b_3x^5] dx = \\
&= -2 \left[e^x(x^2 - 2x + 2) - \frac{b_0x^3}{3} - \frac{b_1x^4}{4} - \frac{b_2x^5}{5} - \frac{b_3x^6}{6} \right]_{-1}^1 = 0 \\
&\Rightarrow 10b_0 + 6b_2 = 15(e - 5e^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial F}{\partial b_3} &= \int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial b_3} [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2 - b_3x^3]^2 dx = 2 \int_{-1}^1 [e^x - b_0 - b_1x - b_2x^2 - b_3x^3](-x^3) dx = \\
&= -2 \int_{-1}^1 [x^3 e^x - b_0x^3 - b_1x^4 - b_2x^5 - b_3x^6] dx = \\
&= -2 \left[x^3 e^x - 3e^x(x^2 - 2x + 2) - \frac{b_0x^4}{4} - \frac{b_1x^5}{5} - \frac{b_2x^6}{6} - \frac{b_3x^7}{7} \right]_{-1}^1 = 0 \\
&\Rightarrow 7b_1 + 3b_3 = 35(8e^{-1} - e)
\end{aligned}$$

Resolvendo os sistemas,

$$\begin{cases} 3b_0 + b_2 = 3,5256 \\ 10b_0 + 6b_2 = 13,18327 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 5b_1 + 3b_3 = 5,51819 \\ 7b_1 + 5b_3 = 7,86638 \end{cases}$$

temos,

$$b_0 = 0,99629, b_1 = 0,997955, b_2 = 0,536722 \text{ e } b_3 = 0,17614$$

por fim,

$$r_3^*(x) = 0,99629 + 0,997955x + 0,536722x^2 + 0,17614x^3 \quad (2.22)$$

Com

$$E = \frac{\|f - r_3^*\|_2}{\sqrt{b-a}} \approx 0,003$$

2.3.1 Generalização do Problema dos Mínimos Quadrados

A teoria da existência, unicidade e construção de aproximações por mínimos quadrados, será dado no Capítulo 3, usando a teoria dos polinômios ortogonais. Seja $\omega(x)$ uma função peso não negativa no intervalo (a, b) que pode ser fechado, assumindo as seguintes propriedades:

1.

$$\int_a^b |x|^n \omega(x) dx \quad (2.23)$$

é integrável e finita para todo $n \geq 0$.

2. Suponha que

$$\int_a^b \omega(x)g(x) dx = 0 \quad (2.24)$$

para alguma função contínua não negativa $g(x)$. Então, $g(x) \equiv 0$ em (a, b) .

A seguir, estão as funções peso de maior interesse para nós neste trabalho

$$\begin{aligned} \omega(x) &= 1 & a \leq x \leq b \\ \omega(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & -1 \leq x \leq 1 \\ \omega(x) &= e^{-x} & 0 \leq x < \infty \\ \omega(x) &= e^{-x^2} & -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

Para um intervalo finito $[a, b]$ dizemos que:

Dado $g \in [a, b]$, existe um polinômio $r_n^*(x)$ de grau $\leq n$ que minimiza

$$\int_a^b \omega(x)[f(x) - r(x)]^2 dx \quad (2.25)$$

A prova para tal situação será apresentada no Capítulo 3, seção 3.3.

Capítulo 3

Polinômios Ortogonais - Teoria Geral

Os polinômios ortogonais fazem parte de uma família de funções ortogonais muito usadas na matemática. Funções ortogonais são caracterizadas pelo produto interno nulo, análogo a definição de vetores ortogonais, onde podemos estabelecer o conceito de ortogonalidade num conjunto de funções. Os polinômios ortogonais têm aplicabilidade em muitos problemas matemáticos como na teoria dos códigos, frações contínuas entre outros. Neste trabalho, nos ateremos na área de aproximação de funções.

Consideremos $X = C[a, b]$ um espaço vetorial de dimensão infinita, dotado de produto interno (1.21) visto no Capítulo 1,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x) dx \quad (3.1)$$

onde $\omega(x)$ é a função peso. E, assim, a norma induzida é

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx \right]^{1/2}.$$

Seja $Y = P[a, b] := \{ \text{conjunto de todos os polinômios} \} \in X$. Conforme o Teorema de Weierstrass 2.1.1, temos que Y é denso em X , isto é, para toda função contínua definida sobre $[a, b]$, existe uma sequência de polinômio que convergem uniformemente para f .

Denotemos $Y_n = P_n[a, b] := \{ \text{conjunto dos polinômios com grau} \leq n \}$, é fácil verificar que

$$Y = \bigcup_{i=0}^{\infty} Y_n.$$

Definição 3.0.1. Dado um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em Y , uma sequência de polinômios ortogonais é uma sequência de polinômios $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$ com cada $P_n(x)$ de grau exatamente n , que satisfaz

$$\langle P_n, P_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \rho_n > 0, & \text{se } n = m \end{cases}$$

3.1 Ortogonalização - Processo de Gram-Schmidt

Inicialmente, podemos obter uma sequência de polinômios ortogonais através do método de ortogonalização *Gram-Schmidt* que será apresentado no teorema a seguir conforme [1]. A demonstração desse teorema, nos dá o processo de construção de uma sequência ortonormal total de polinômios.

Teorema 3.1.1 (Gram-Schmidt). *Dado o produto interno (3.1), existe uma sequência de polinômios $P_n(x) | n \geq 0$ com grau $(P_n) = n$, para todo n e*

$$\langle P_n, P_m \rangle = 0, \quad \forall n \neq m \quad n, m \geq 0. \quad (3.2)$$

Além disso, podemos construir a sequência com as propriedades:

- (1) $\langle P_n, P_n \rangle = 1$ para todo n ;
- (2) o coeficiente x^n em P_n é positivo.

Com essas propriedades adicionais, a sequência P_n é única.

Prova. Mostraremos aqui um método construtivo e recursivo para a obtenção dos elementos da sequência, conhecido como *processo Gram-Schmidt*.

Dado $P_0(x) = c$ uma constante. Tome $\|P_0\| = 1$ e $c > 0$. Então,

$$\langle P_0, P_0 \rangle = c^2 \int_a^b \omega(x) d(x) = 1$$

$$c = \left[\int_a^b \omega(x) d(x) \right]^{-1/2}$$

Para a construção de $P_1(x)$, começaremos por

$$Q_1(x) = x + a_{1,0}P_0(x)$$

então $\langle Q_1, P_0 \rangle = 0$ implica $0 = \langle x, P_0 \rangle + a_{1,0}\langle P_0, P_0 \rangle$

$$a_{1,0} = -\langle x, P_0 \rangle = \frac{-\int_a^b x\omega(x) dx}{\left[\int_a^b \omega(x) dx \right]^{1/2}}$$

assim $P_1(x) = \frac{Q_1(x)}{\|Q_1(x)\|}$ e note que

$$\|P_1\|_2 = 1 \quad \langle P_1, P_0 \rangle = 0$$

e que o coeficiente de x é positivo. Para construir $P_n(x)$, definiremos previamente

$$Q_n(x) = x^n + a_{n,n-1}P_{n-1}(x) + \dots + a_{n,0}P_0(x) \quad (3.3)$$

e escolher as constantes para fazer Q_n ortogonal com P_j para $j = 0, \dots, n-1$. Então,

$$\langle Q_n, P_j \rangle = 0 \Rightarrow a_{n,j} = \langle x^n, P_j \rangle \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.4)$$

Dessa forma o $P_n(x)$ será

$$P_n(x) = \frac{Q_n(x)}{\|Q_n\|_2} \quad (3.5)$$

□

Exemplo 3.1.2. Dado $\omega(x) = \frac{1}{2}$ em $[-1, 1]$ encontrar uma seqüência de polinômios ortogonais usando o processo de Gram-Schmidt.

$P_0(x)$

$$c = \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \right]^{-1/2} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow P_0(x) = 1$$

$P_1(x)$

$$a_{1,0} = -\langle x, P_0 \rangle = \frac{-\int_{-1}^1 x\omega(x) dx}{\left[\int_{-1}^1 \omega(x) dx \right]^{1/2}} = \frac{-\int_{-1}^1 x \frac{1}{2} dx}{\left[\int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx \right]^{1/2}} = \frac{-1}{2} \int_{-1}^1 x dx = 0$$

$$Q_1(x) = x + 0 \cdot 1 \Rightarrow Q_1(x) = x$$

$$P_1(x) = \frac{Q_1(x)}{\|Q_1\|_2} = \frac{x}{\left[\int_{-1}^1 \frac{1}{2}|x|^2 dx \right]^{1/2}} = \sqrt{3}x$$

$P_2(x)$

$$a_{2,0} = -\langle x^2, P_0 \rangle = -\int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^2 dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = -\frac{1}{3}$$

$$a_{2,1} = -\langle x^2, P_1 \rangle = -\int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^2\sqrt{3}x dx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

$$Q_2(x) = x^2 + a_{2,1}P_1(x) + a_{2,0}P_0(x)$$

$$Q_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \frac{Q_2(x)}{\|Q_2\|_2} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\left[\int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left| x^2 - \frac{1}{3} \right|^2 dx \right]^{1/2}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2x^2}{3} + \frac{1}{9} \right) dx \right]^{1/2}} = \\
&= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2} (3x^2 - 1)
\end{aligned}$$

$P_3(x)$

$$a_{3,0} = -\langle x^3, P_0 \rangle = -\int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^3 dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

$$a_{3,1} = -\langle x^3, P_1 \rangle = -\int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^3 \sqrt{3} x dx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 x^4 dx = -\frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\begin{aligned}
a_{3,2} = -\langle x^3, P_2 \rangle &= -\int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^3 \frac{\sqrt{5}}{2} (3x^2 - 1) dx = -\frac{\sqrt{5}}{4} \int_{-1}^1 x^3 (3x^2 - 1) dx = \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{4} \int_{-1}^1 (3x^5 - x^3) dx = 0
\end{aligned}$$

$$Q_3(x) = x^3 + a_{3,2}P_2(x) + a_{3,1}P_1(x) + a_{3,0}P_0(x)$$

$$Q_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= \frac{Q_3(x)}{\|Q_3\|_2} = \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\left[\int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left| x^3 - \frac{3}{5}x \right|^2 dx \right]^{1/2}} = \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(x^6 - \frac{6x^4}{5} + \frac{9x^2}{25} \right) dx \right]^{1/2}} = \\
&= \frac{x^3 - \frac{3x}{5}}{\frac{5\sqrt{7}}{2}} = \left(x^3 - \frac{3x}{5} \right) \frac{2}{5\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

A sequência $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ formam uma sequência de polinômios ortogonais.

Observe que a figura 3.1, nos mostra o gráfico dos Polinômios Ortogonais do exemplo 3.1.2, construídos através do Processo de ortogonalização Gram-Schmidt.

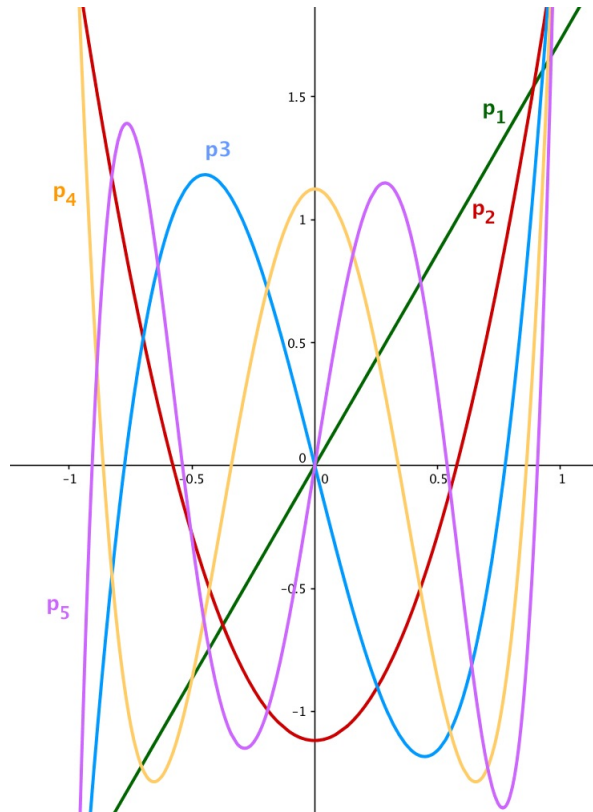


Figura 3.1: Gráfico dos Polinômios Ortogonais construídos através do Processo Gram-Schmidt

3.2 Propriedades Gerais

Vejamos algumas propriedades de polinômios ortogonais que usaremos no Capítulo 4, para desenvolver os polinômios ortogonais mais utilizados nas literaturas.

Teorema 3.2.1. *Toda subsequência $P_{i_1}(x), P_{i_2}(x), \dots$ de uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x) | n \geq 0\}$ forma um conjunto de funções linearmente independentes.*

Prova. Suponhamos por absurdo, que existe uma subsequência $P_{i_1}(x), P_{i_2}(x), \dots, P_{i_m}(x)$ e coeficientes a_1, a_2, \dots, a_m com pelo menos um deles diferente de zero, tais que o polinômio

$$p(x) = a_1 P_{i_1}(x) + a_2 P_{i_2}(x) + \dots + a_m P_{i_m}(x)$$

é identicamente nulo. Logo,

$$\langle p(x), P_j(x) \rangle = 0 \quad \forall j \quad (3.6)$$

Suponhamos também um k , $1 \leq k \leq m$ tal que $a_k \neq 0$. Então,

$$\langle p(x), P_{i_k} \rangle = \sum_{j=1}^m a_j \langle P_{i_j}(x), P_{i_k}(x) \rangle = a_k \langle P_{i_k}(x), P_{i_k}(x) \rangle. \quad (3.7)$$

Como $\langle P_{i_k}(x), P_{i_k}(x) \rangle \neq 0$, por (3.5) e (3.6) temos um absurdo, concluindo assim a nossa prova. \square

Corolário 3.2.2. *Se o polinômio $p(x)$ é de grau menor ou igual a m , então p pode ser unicamente representado por*

$$p(x) = a_0P_0(x) + \dots + a_mP_m(x)$$

com coeficientes reais a_0, \dots, a_m dados por

$$a_k = \frac{\langle p(x), P_k(x) \rangle}{\langle P_k(x), P_k(x) \rangle}, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Prova. Isso é uma consequência do teorema 3.2.1. Como Y_m é um espaço linear de dimensão $m + 1$ e P_0, \dots, P_m é um conjunto de $m + 1$ elementos linearmente independentes de Y_m , eles formam uma base de Y_m . Então, cada um elemento de Y_m pode ser unicamente representado como combinação linear dos outros. De fato, temos

$$\begin{aligned} \langle p(x), P_k(x) \rangle &= a_0 \langle P_0(x), P_k(x) \rangle + \dots + a_k \langle P_k(x), P_k(x) \rangle + \dots + a_m \langle P_m(x), P_k(x) \rangle \\ &= a_k \langle P_k(x), P_k(x) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, pela definição de polinômios ortogonais,

$$a_k = \frac{\langle p(x), P_k(x) \rangle}{\langle P_k(x), P_k(x) \rangle}$$

\square

Teorema 3.2.3. *Seja $\{P_n(x) | n \geq 0\}$ uma família de polinômios em (a, b) com a função peso $\omega(x) \geq 0$. O polinômio $P_n(x)$ possui exatamente n raízes reais e distintas no intervalo (a, b) .*

Prova. Dados x_1, x_2, \dots, x_m todos os zeros de $P_n(x)$ de modo que

1. $a < x < b$
2. $P_n(x)$ muda o sinal de x_i

Como o grau de $P_n(x) = n$, trivialmente temos $m \leq n$. Suponhamos por absurdo que $m < n$. Definiremos

$$B(x) = (x - x_1) \dots (x - x_m)$$

Pela definição dos pontos x_1, x_2, \dots, x_m , o polinômio

$$P_n(x)B(x) = (x - x_1) \dots (x - x_m)P_n(x)$$

não altera o sinal em (a, b) . Para isso, as suposições sobre x_1, x_2, \dots, x_m , implicam

$$P_n(x) = h(x)(x - x_1)^{r_1} \dots (x - x_m)^{r_m}$$

com cada r_i ímpar e com $h(x)$ não mudando o sinal em (a, b) . Então,

$$P_n(x)B(x) = (x - x_1)^{r_1+1} \dots (x - x_m)^{r_m+1} h(x)$$

consequentemente dessa conclusão segue que,

$$\int_a^b \omega(x)B(x)P_n(x) dx \neq 0$$

desde que $B(x)P_n(x) \neq 0$. Mas como o grau de $(B) = m < n$ o corolário do teorema 4.3 de [1]p.212, temos que

$$\int_a^b \omega(x)B(x)P_n(x) dx = \langle B, P_n \rangle = 0$$

mostrando assim o absurdo. \square

Teorema 3.2.4 (Relação de Recorrência de Três Termos). *Seja $\{P_n\}$ uma seqüência de polinômios ortogonais em (a, b) com a função peso $\omega(x) \geq 0$. Então,*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x + \beta_n)P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x) \quad (3.8)$$

com condições iniciais $P_{-1}(x) := 0, P_0(x) = 1, \alpha_{n+1}, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}, n \geq 1$ e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{P_{n-1}, P_{n-1}}. \quad (3.9)$$

Prova. Seja $P_n(x) = a_{n,n}x^n + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}$. Como $xP_n(x)$ é um polinômio de grau $n + 1$, então podemos escrever

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x)$$

Igualando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima, temos $a_{n,n} = b_{n+1}a_{n+1,n+1}$. Então,

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Porém, das relações de ortogonalidade,

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \int_a^b P_n(x)xP_j(x)\omega(x) dx = 0, j \leq n - 2.$$

Assim,

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = b_j \langle P_j, P_j \rangle = 0, j \leq n - 2.$$

Logo, $b_j = 0$ se $j \leq n - 2$ e temos a expressão

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_{n+1}}xP_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}}P_n(x),$$

com

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}.$$

Agora calculemos os valores de γ_{n+1} , β_{n+1} e α_{n+1} . Como $b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}$, temos $\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}$.

De (3.8), obtemos

$$0 = \langle P_{n+1}, P_n \rangle = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_n \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_n \rangle,$$

Então,

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

Analogamente,

$$0 = \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_{n-1} \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_{n-1} \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle.$$

Logo,

$$\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Mas, como

$$P_n(x) = (\gamma_n x + \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x),$$

obtemos,

$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{\gamma_n}P_n(x) + \frac{\beta_n}{\gamma_n}P_{n-1}(x) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n}P_{n-2}(x).$$

Por outro lado, temos

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \int_a^b xP_n(x)P_{n-1}(x)\omega(x) dx = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle.$$

Então,

$$\langle P_n, xP_{n-1} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-1} \rangle + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-2} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle.$$

Portanto,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}$$

□

Exemplo 3.2.5. Consideremos o Exemplo (3.1.2) onde $\omega(x) = \frac{1}{2}$, com intervalo de integração $[-1, 1]$ a relação de recorrência de três termos para os polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}$ é dada por

$$P_{n+1}(x) = \frac{\sqrt{2n+3}\sqrt{2n+1}}{n+1}xP_n(x) - \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n-1}}\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

para $n \geq 1$ e tomando $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = \sqrt{3}x$. Utilizando esta relação, podemos obter a sequência de polinômios $P_0(x) = 1, P_1(x) = \sqrt{3}x, P_2(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{5\sqrt{7}}{2}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right), P_4(x) = \frac{3}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ e $P_5(x) = \frac{\sqrt{11}}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$.

Teorema 3.2.6 (Identidade de Christoffel-Darboux). Seja $\{P_n^*(x)|n \geq 0\}$ uma sequência de polinômios ortonormais com a função peso $\omega(x) \geq 0$. Então, eles satisfazem à seguinte identidade

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\gamma_k} = \frac{P_{n+1}(x)P_{n+1}(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{\gamma_{n+1}(x-y)} \quad (3.10)$$

A demonstração da Identidade de Christoffel-Darboux pode ser encontrada em [5]p.42.

Teorema 3.2.7. Seja $\{P_n^*(x)|n \geq 0\}$ uma sequência de polinômios ortonormais. Os zeros de $P_n^*(x)$ se entrelaçam com os zeros de $P_{n+1}^*(x), n \neq 1$. Se

$$x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$$

são os zeros de $P_n^*(x)$ e

$$x_{n+1,1}, x_{n+1,2}, \dots, x_{n+1,n+1}$$

os zeros de $P_{n+1}^*(x)$ em ordem decrescente, então

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} \dots < x_{n,n} < x_{n+1,n+1}$$

Prova. Aplicando a identidade de Christoffel-Darboux aos zeros de $P_{n+1}^*(x)$, obtemos

$$\frac{1}{\gamma_n^*} P_{n+1}^{*'}(x_{n+1,j}) P_n^*(x_{n+1,j}) > 0, \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (3.11)$$

Como os zeros de $P_{n+1}^*(x)$, são reais e distintos, então, pelo Teorema de Rolle, a derivada de $P_{n+1}^*(x)$ tem um zero em cada intervalo $(x_{n+1,j})P_n^*(x_{n+1,j}), j = 2, \dots, n+1$ assim, $P_{n+1}^{*'}(x_{n+1,j})$ e $P_{n+1}^{*'}(x_{n+1,j-1})$ têm sinais opostos.

Por (3.11), $P_{n+1}^*(x_{n+1,j})$ e $P_{n+1}^*(x_{n+1,j-1})$ também devem ter sinais opostos pois têm os mesmos sinais de P_{n+1}^* nesses pontos. Então pelo Teorema do Valor Intermediário, $P_n^*(x)$ tem um zero em cada intervalo $(x_{n+1,j-1}, x_{n+1,j}) \quad j = 2, \dots, n+1$.

□

Exemplo 3.2.8. Vamos analisar as raízes de P_3 e P_4 do exemplo (3.1.2). Notamos que

$$x_{4,1} < x_{3,1} < x_{4,2} < x_{3,2} < x_{4,3} < x_{3,3} < x_{4,4},$$

se entrelaçam e são distintos confirmando o teorema.

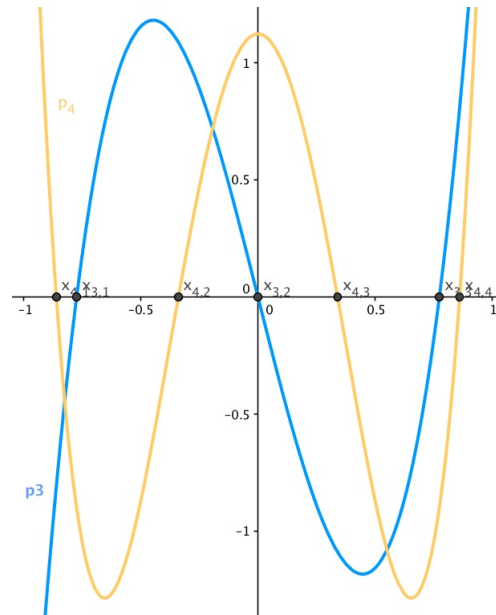


Figura 3.2: Entrelaçamento das raízes de $P_3(x)$ e $P_4(x)$

3.3 Problema dos Mínimos Quadrados com utilização dos Polinômios Ortogonais

Voltamos agora ao problema dos mínimos quadrados gerais, de minimizar $\int_a^b \omega(x)[f(x) - r(x)]^2 dx$ entre todos os polinômios de grau $\leq n$. Suponha que $\{P_k(x) | k \geq 0\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com função peso $\omega(x) \geq 0$, tal que

$$\langle P_n, P_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Então um polinômio arbitrário $f(x)$, de grau $\leq n$ pode ser escrito como

$$r(x) = b_0 P_0(x) + \dots + b_n P_n(x). \quad (3.12)$$

Para $f \in \mathbf{C}[a, b]$,

$$\|f - r\|_2^2 = \int_a^b \omega(x) \left[f(x) - \sum_{j=0}^n b_j P_j(x) \right]^2 dx \equiv G(b_0, \dots, b_n) \quad (3.13)$$

Resolvemos o problema dos mínimos quadrados minimizando G . Como fizemos anteriormente em 2.3.1, podemos definir

$$\frac{\partial G}{\partial b_i} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Mas, para obter um resultado mais completo, prosseguiremos de outra forma. Para cada escolha de qualquer b_0, \dots, b_n

$$0 \leq G(b_0, \dots, b_n) = \left\langle f - \sum_{j=0}^n b_j P_j, f - \sum_{i=0}^n b_i P_i \right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \langle f, f \rangle - 2 \sum_{j=0}^n b_j \langle f, P_j \rangle + \sum_i \sum_j b_i b_j \langle P_i, P_j \rangle \\
&= \|f\|_2^2 - 2 \sum_{j=0}^n b_j \langle f, P_j \rangle + \sum_{j=0}^n b_j^2 \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^n \langle f, P_j \rangle^2 + \sum_{j=0}^n [\langle f, P_j \rangle - b_j]^2
\end{aligned} \tag{3.14}$$

que pode ser verificado desenvolvendo o último termo. Assim, G é um mínimo, se e somente se

$$b_j = \langle f, P_j \rangle \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Então a aproximação por mínimos quadrados existe, é única e dada por

$$r_n^*(x) = \sum_{j=0}^n \langle f, P_j \rangle P_j(x) \tag{3.15}$$

Além disso, de (3.13) e (3.14) temos,

$$\begin{aligned}
\|f - r_n^*\|_2 &= \left[\|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^n \langle f, P_j \rangle^2 \right]^{1/2} \\
&= \sqrt{\|f\|_2^2 - \|r_n^*\|_2^2}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\|f\|_2^2 = \|r_n^*\|_2^2 + \|f - r_n^*\|_2^2 \tag{3.17}$$

Para a obtenção de $r_{n+1}^*(x)$, use

$$r_{n+1}^*(x) = r_n^*(x) + \langle f, P_{n+1} \rangle P_{n+1}(x). \tag{3.18}$$

Teorema 3.3.1. *Tomando $[a, b]$ finito, temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - r_n^*\|_2 = 0 \tag{3.19}$$

Prova. Da definição de r_n^* como um polinômio que minimiza $\|f - r_n^*\|_2$, temos

$$\|f - r_1^*\|_2 \geq \|f - r_2^*\|_2 \geq \dots \geq \|f - r_n^*\|_2 \geq \dots \tag{3.20}$$

Dado um $\epsilon > 0$ arbitrário, então pelo Teorema de Weierstrass, existe um polinômio $Q(x)$ de algum grau, dito m , para o qual

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - Q(x)| < \frac{\epsilon}{c} \quad c = \sqrt{\int_a^b \omega(x) dx}.$$

Da definição de $r_n^*(x)$,

$$\|f - r_n^*\|_2 \leq \|f - Q\|_2 = \left[\int_a^b \omega(x) [f(x) - Q(x)]^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[\int_a^b \omega(x) \frac{\epsilon^2}{c^2} dx \right]^{1/2} = \epsilon$$

usando em (3.20),

$$\|f - r_n^*\|_2 \leq \epsilon$$

para todo $n \geq m$ desde que ϵ seja arbitrário. \square

Capítulo 4

Polinômios Ortogonais Clássicos

Visto um pouco da Teoria Geral no Capítulo 3, apresentaremos neste capítulo três classes de polinômios ortogonais clássicos, a saber os polinômios de Legendre, de Chebyshev e de Hermite. A construção destes polinômios ortogonais se diferenciam pelo intervalo de integração $[a, b]$ e a função peso $\omega(x)$ da definição do produto interno (1.21), de acordo com a Tabela 4.1. Em todos os casos determinaremos a fórmula de recorrência de três termos (3.8) do Teorema (3.2.4) e determinaremos a aproximação da função contínua $f(x) = e^x$. Calcularemos os seis primeiros polinômios de cada classe de polinômios e analisaremos o erro utilizando ao problema dos mínimos quadrados.

Intervalo[a,b]	Função Peso $\omega(x)$	Polinômios Ortogonais
$[-1,1]$	$\omega(x) = 1$	Legendre
$[-1,1]$	$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Chebyshev
$(-\infty, \infty)$	$\omega(x) = e^{-x^2}$	Hermite

Tabela 4.1: Tabela dos Polinômios Ortogonais com seus respectivos intervalos de integração e função peso.

4.1 Polinômios de Legendre

Conforme a Tabela 4.1, quando a função peso $\omega(x) = 1$ e intervalo de integração $[-1, 1]$, os polinômios ortogonais são chamados de *Polinômios de Legendre*. Primeiramente, vamos usar a relação de recorrência de três termos dada em 3.2.4.

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x) \quad (4.1)$$

Utilizando 4.1 os seis Polinômios de Legendre, onde por definição da fórmula de recorrência de três termos 3.2.4 temos que $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$, são:

- Fazendo $n = 0$ na fórmula (4.1) temos, $P_1(x) = 1xP_0(x) - 0P_{-1}(x) = x$
- Fazendo $n = 1$ temos, $P_2(x) = \frac{3}{2}xP_1(x) - \frac{1}{2}P_0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
- Fazendo $n = 2$ temos, $P_3(x) = \frac{5}{3}xP_2(x) - \frac{2}{3}P_1(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
- Fazendo $n = 3$ temos, $P_4(x) = \frac{7}{4}xP_3(x) - \frac{3}{4}P_2(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
- Fazendo $n = 4$ temos, $P_5(x) = \frac{9}{5}xP_4(x) - \frac{4}{5}P_3(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Como $\|P_n(x)\|_2 = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$, ver em [1]pag.211, podemos ortonormalizar os Polinômios de Legendre

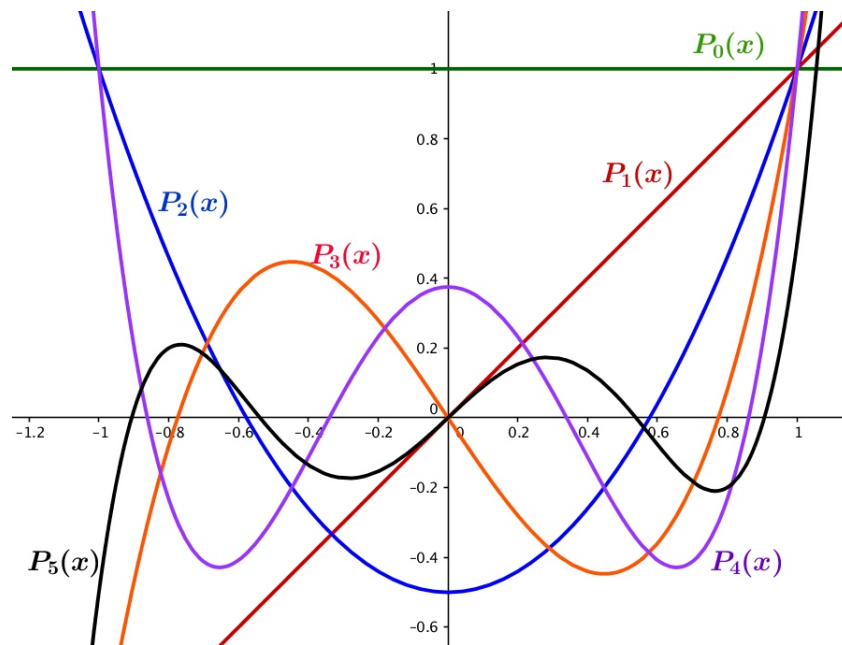


Figura 4.1: Gráfico dos seis primeiros Polinômios de Legendre

Dada uma função $f(x)$, a aproximação por mínimos quadrados utilizando os Polinômios de Legendre ortonormalizados, os quais denotaremos por $\{\bar{P}_n(x)\}$, conforme (3.15) será dada por:

$$r_n^*(x) = \sum_{j=0}^n \langle f, \bar{P}_j \rangle \bar{P}_j(x) \quad (4.2)$$

onde os coeficientes são:

$$\langle f, P_j \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \bar{P}_j(x) dx \quad (4.3)$$

Vejam os um exemplo desta aproximação. Utilizaremos a mesma função $f(x)$ do exemplo (2.3.1) do Capítulo 2 agora utilizando a teoria dos Polinômios Ortogonais.

Exemplo 4.1.1. Dada $f(x) = e^x$, calcularemos os coeficientes da fórmula (4.3).

- $j = 0$

$$\langle f, \bar{P}_0 \rangle = \int_{-1}^1 e^x \bar{P}_0(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} e^x dx = \frac{e - e^{-1}}{\sqrt{2}} = 1,661985$$

- $j = 1$

$$\langle f, \bar{P}_1 \rangle = \int_{-1}^1 e^x \bar{P}_1(x) dx = \int_{-1}^1 e^x \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = 0,901117$$

- $j = 2$

$$\langle f, \bar{P}_2 \rangle = \int_{-1}^1 e^x \bar{P}_2(x) dx = \int_{-1}^1 e^x \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right) dx = 0,226302$$

- $j = 3$

$$\langle f, \bar{P}_3 \rangle = \int_{-1}^1 e^x \bar{P}_3(x) dx = \int_{-1}^1 e^x \sqrt{\frac{7}{2}} \left(\frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \right) dx = 0,037660$$

- $j = 4$

$$\langle f, \bar{P}_4 \rangle = \int_{-1}^1 e^x \bar{P}_4(x) dx = \int_{-1}^1 e^x \sqrt{\frac{9}{2}} \left(\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \right) dx = 0,004698$$

- $j = 5$

$$\langle f, \bar{P}_5 \rangle = \int_{-1}^1 e^x \bar{P}_5(x) dx = \int_{-1}^1 e^x \sqrt{\frac{11}{2}} \left(\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \right) dx = 0,000469$$

Resumidamente, na tabela (4.2) constam os coeficientes da aproximação por mínimos quadrados, conforme (4.3).

j	$\langle f, P_j \rangle$
0	1,661985
1	0,901117
2	0,226302
3	0,037660
4	0,004698
5	0,000469

Tabela 4.2: Tabela com os coeficientes de Legendre da aproximação por mínimos quadrados para e^x por $r_n^*(x)$

Em (??) o erro da aproximação de f por r_n^* é dada por

$$E = \frac{\|f - r\|_2}{\sqrt{b - a}}$$

Por exemplo, para $n = 3$,

$$\begin{aligned} r_3^*(x) &= \langle f, \bar{P}_0 \rangle \bar{P}_0 + \langle f, \bar{P}_1 \rangle \bar{P}_1 + \langle f, \bar{P}_2 \rangle \bar{P}_2 + \langle f, \bar{P}_3 \rangle \bar{P}_3 = \\ &= 1,661985 \bar{P}_0(x) + 0,901117 \bar{P}_1(x) + 0,226302 \bar{P}_2(x) + 0,037660 \bar{P}_3(x) = \\ &= 0,996294 + 0,997955x + 0,536722x^2 + 0,176139x^3. \end{aligned}$$

com erro aproximado,

$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \|e^x - r_3^*(x)\|_2 \approx 0,003317$$

Observemos na tabela 4.3 os erros da aproximação e^x por $r_n^*(x)$ utilizando os Polinômios de Legendre no intervalo $[-1, 1]$.

n	Erro
1	0,162253
2	0,026833
3	0,003317
4	0,000333
5	0,000027

Tabela 4.3: Erros da aproximação de e^x por $r_n^*(x)$ utilizando os Polinômios de Legendre

Concluimos que o erro diminui drasticamente quando aumentamos o n , isto é, $E_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Vejam na figura 4.2 a aproximação da função $f(x) = e^x$ por $r_n^*(x)$ utilizando os Polinômios de Legendre e também, para uma melhor visualização do comportamento das aproximações $r_n^*(x)$ na Figura 4.3 apresentamos de forma individual ($n = 1, 2, 3$) no intervalo $[-1, 1]$.

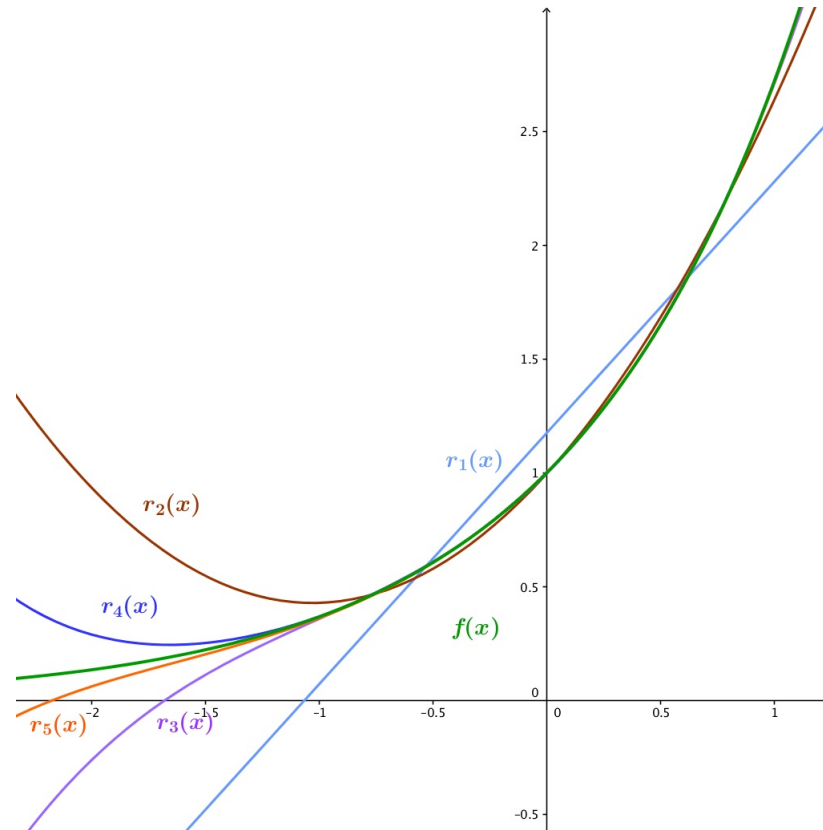


Figura 4.2: Aproximação de $f(x) = e^x$ por $r_n^*(x)$ utilizando os Polinômios Ortogonais de Legendre

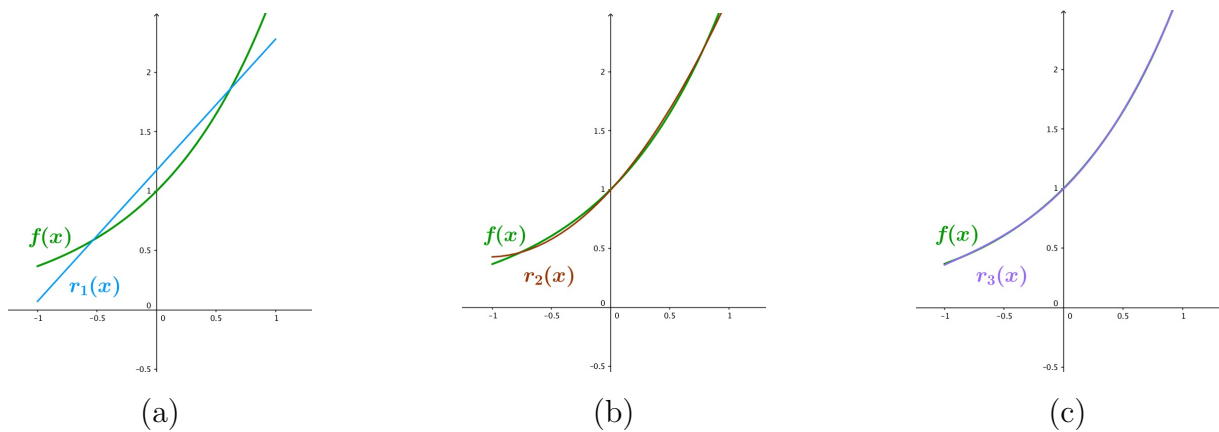


Figura 4.3: Aproximação por $r_n(x)$ no intervalo $[-1, 1]$. (a) $n = 1$, (b) $n = 2$ e (c) $n = 3$.

4.2 Polinômios de Chebyshev

Quando a função peso $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, em $[-1, 1]$ conforme a tabela 4.1, encontramos os *Polinômios de Chebyshev* denotados por $T_n(x)$. Segundo Atkinson, em [1] pag. 211, encontramos a seguinte fórmula:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad n \geq 0 \quad (4.4)$$

De posse dessa fórmula, podemos definir $T_0(x)$ e $T_1(x)$. Note que,

$$T_0(x) = \cos 0 = 1$$

e

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

Uma outra relação de recorrência é dada substituindo $\arccos x = \theta$ e usando $T_n(\theta(x)) = T_n(\theta) = \cos n\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Assim, teremos:

$$T_{n+1}(x) = \cos(n+1)\theta = \cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta = \cos(n\theta - \theta) = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta$$

Somando membro a membro,

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos(n\theta)\cos\theta = 2T_n(x)x$$

onde chegamos a,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n \geq 1 \quad (4.5)$$

Utilizando esta relação de recorrência encontramos os outros termos.

- Fazendo $n = 1$ temos, $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$
- Fazendo $n = 2$ temos, $T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$
- Fazendo $n = 3$ temos, $T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
- Fazendo $n = 4$ temos, $T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

Observemos na figura 4.4 os gráficos dos seis primeiros Polinômios Ortogonais de Chebyshev.

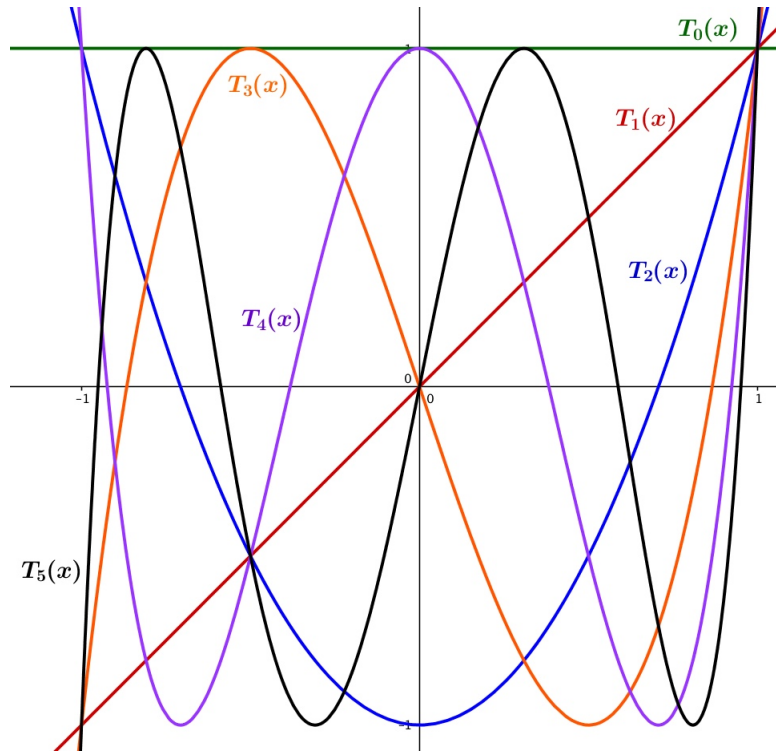


Figura 4.4: Gráfico com os seis primeiros Polinômios de Chebyshev

Podemos verificar que

$$\|T_n(x)\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad n > 0$$

e

$$\|T_0(x)\|_2 = \sqrt{\pi}$$

Dada uma função $f(x)$, a aproximação por mínimos quadrados utilizando os Polinômios de Chebyshev ortonormalizados, os quais denotaremos por $\{\bar{T}_n(x)\}$, será dada por,

$$r_n^*(x) = \sum_{j=0}^n \langle f, \bar{T}_j \rangle \bar{T}_j(x) \quad (4.6)$$

onde os coeficientes serão dados por,

$$\langle f, \bar{T}_j \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x) \bar{T}_j(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (4.7)$$

Exemplo 4.2.1. Dada $f(x) = e^x$ em $[-1, 1]$, calcularemos os coeficientes da fórmula (4.7).

- $j = 0$

$$\langle f, \bar{T}_0 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{e^x \bar{T}_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2,244043$$

- $j = 1$

$$\langle f, \bar{T}_1 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{e^x \bar{T}_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1,416644$$

- $j = 2$

$$\langle f, \bar{T}_2 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{e^x \bar{T}_2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x (2x^2 - 1)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0,340269$$

- $j = 3$

$$\langle f, \bar{T}_3 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{e^x \bar{T}_3(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x (4x^3 - 3x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0,055568$$

- $j = 4$

$$\langle f, \bar{T}_4 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{e^x \bar{T}_4(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x (8x^4 - 8x^2 + 1)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0,006861$$

- $j = 5$

$$\langle f, \bar{T}_5 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{e^x \bar{T}_5(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x (16x^5 - 20x^3 + 5x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0,000680$$

Resumidamente, a tabela (4.4) nos mostra os coeficientes da aproximação por mínimos quadrados.

j	$\langle f, \bar{T}_j \rangle$
0	2,244043
1	1,416644
2	0,340269
3	0,055568
4	0,006861
5	0,000680

Tabela 4.4: Coeficientes de Chebyshev para aproximação por mínimos quadrados de e^x por $r_n^*(x)$.

O erro da aproximação de f por r_n^* é dada por

$$E_n = \|f - r_n\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - r_n^*(x)|$$

Por exemplo, para $n = 1$, temos,

$$\begin{aligned} r_n^*(x) &= \sum_{j=0}^n \langle f, \bar{T}_j \rangle \bar{T}_j(x) = \langle f, \bar{T}_0 \rangle \bar{T}_0(x) + \langle f, \bar{T}_1 \rangle \bar{T}_1(x) = \\ &= 2,244043 \bar{T}_0(x) + 1,416644 \bar{T}_1(x) = \\ &= r_1^*(x) = 1,26607 + 1,133032x, \end{aligned}$$

com erro,

$$E_1 = \|f - r_1\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - r_1^*(x)| \approx 0,322282$$

Para $n = 3$, temos,

$$\begin{aligned} r_n^*(x) &= \sum_{j=0}^n \langle f, \bar{T}_j \rangle \bar{T}_j(x) = \langle f, \bar{T}_0 \rangle \bar{T}_0(x) + \langle f, \bar{T}_1 \rangle \bar{T}_1(x) + \langle f, \bar{T}_2 \rangle \bar{T}_2(x) + \langle f, \bar{T}_3 \rangle \bar{T}_3(x) = \\ &= 2,244043 \bar{T}_0(x) + 1,416644 \bar{T}_1(x) + 0,340269 \bar{T}_2(x) + 0,055568 \bar{T}_3(x) = \\ r_3(x) &= 0,994874 + 0,997308x + 0,542991x^2 + 0,177347x^3 \end{aligned}$$

Com erro,

$$E_3 = \|f - r_3\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - r_3^*(x)| \approx 0,006065$$

Vejamos a tabela 4.5 com os erros da aproximação por mínimos quadrados utilizando os Polinômios de Chebyshev.

n	Erro
1	0,322282
2	0,050401
3	0,006065
4	0,005763

Tabela 4.5: Erros da aproximação de e^x por $r_n^*(x)$ utilizando so Polinômios de Chebyshev.

Vejamos agora na figura 4.5 a aproximação da função $f(x) = e^x$ por $r_n^*(x)$ utilizando os Polinômios de Chebyshev e também , para uma melhor visualização do comportamento das aproximações $r_n^*(x)$ na Figura 4.6 apresentamos de forma individual ($n = 1, 2, 3$) no intervalo $[-1, 1]$.

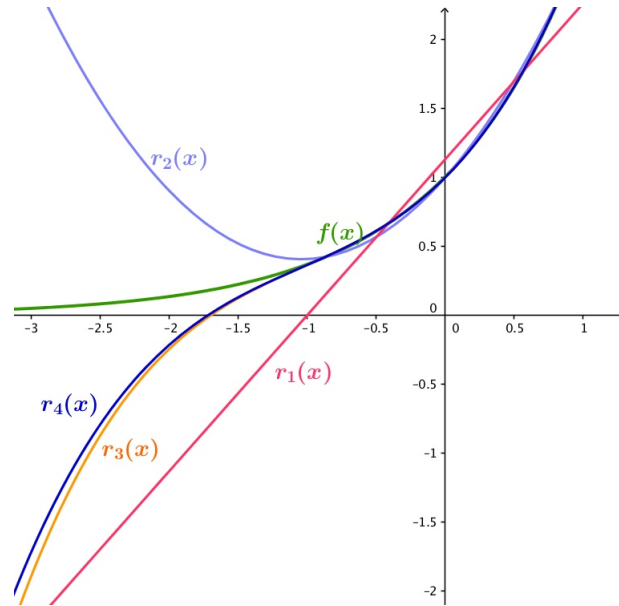


Figura 4.5: Aproximação de $f(x) = e^x$ por $r_n^*(x)$ utilizando os Polinômios Ortogonais de Chebyshev

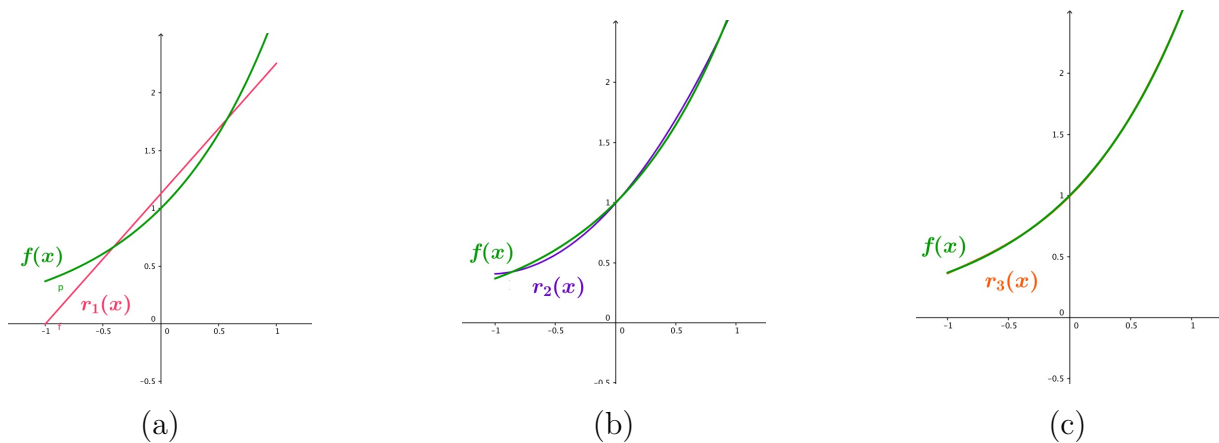


Figura 4.6: Aproximação por $r_n(x)$ no intervalo $[-1, 1]$. (a) $n = 1$, (b) $n = 2$ e (c) $n = 3$.

4.3 Polinômios de Hermite

Quando a função peso $\omega(x) = e^{-x^2}$, com intervalo de integração $(-\infty, \infty)$, os polinômios ortogonais são chamados de *Polinômios de Hermite*, denotados por $H_n(x)$. Estes polinômios podem ser gerados pela seguinte fórmula de recorrência de três termos encontrada em [6], dada por:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.8)$$

onde $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = 2x$. Utilizando a relação de recorrência (4.8), encontramos os outros termos. Por exemplo:

- Fazendo $n = 1$ temos, $H_2(x) = 2xH_1(x) - 2nH_0(x) = 4x^2 - 2$

- Fazendo $n = 2$ temos, $H_3(x) = 2xH_2(x) - 2nH_1(x) = 8x^3 - 12x$
- Fazendo $n = 3$ temos, $H_4(x) = 2xH_3(x) - 2nH_2(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$
- Fazendo $n = 4$ temos, $H_5(x) = 2xH_4(x) - 2nH_3(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$

Vemos na figura 4.7 os Polinômios de Hermite.

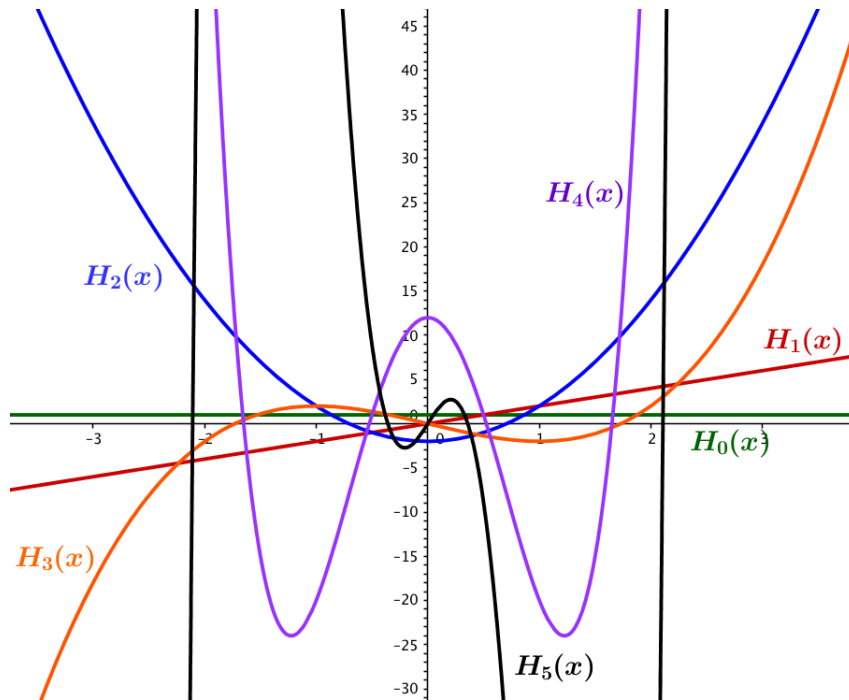


Figura 4.7: Gráfico dos seis primeiros Polinômios de Hermite

Podemos ortonormalizar os Polinômios de Hermite que denotamos por $\{\bar{H}_n(x)\}$ com se seguinte fórmula:

$$\bar{H}_n(x) = \frac{\pi^{-1/4} H_n(x)}{\sqrt{2^n n!}} \quad (4.9)$$

encontrada em [4].

Dada uma função $f(x)$, a aproximação por mínimos quadrados utilizando os Polinômios de Hermite ortonormalizados será dada por:

$$r_n^*(x) = \sum_{j=0}^n \langle f, \bar{H}_j \rangle \bar{H}_j(x) \quad (4.10)$$

onde os coeficientes serão dados por

$$\langle f, \bar{H}_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{H}_j(x) e^{-x^2} dx \quad (4.11)$$

Veamos um exemplo desta aproximação utilizando a mesma função $f(x)$ do exemplo (2.3.1)

Exemplo 4.3.1. Dada $f(x) = e^x$ em $(-\infty, \infty)$, calcularemos os coeficientes da fórmula (4.11).

- $j = 0$

$$\langle f, \overline{H}_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \overline{H}_0(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \pi^{-1/4} e^{-x^2} dx = 1,709468$$

- $j = 1$

$$\langle f, \overline{H}_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \overline{H}_1(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{(2x)\pi^{-1/4}}{\sqrt{2}} e^{-x^2} dx = 1,208777$$

- $j = 2$

$$\langle f, \overline{H}_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \overline{H}_2(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{(2x^2 - 1)\pi^{-1/4}}{\sqrt{2}} e^{-x^2} dx = 0,604388$$

- $j = 3$

$$\langle f, \overline{H}_3 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \overline{H}_3(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{(2x^3 - 3x)\pi^{-1/4}}{\sqrt{3}} e^{-x^2} dx = 0,246741$$

- $j = 4$

$$\langle f, \overline{H}_4 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \overline{H}_4(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{(4x^4 - 12x^2 + 3)\pi^{-1/4}}{2\sqrt{6}} e^{-x^2} dx = 0,087236$$

- $j = 5$

$$\langle f, \overline{H}_5 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \overline{H}_5(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{(4x^5 - 20x^3 + 15x)\pi^{-1/4}}{2\sqrt{15}} e^{-x^2} dx = 0,027586$$

Resumidamente, a tabela (4.6) nos mostra os coeficientes da aproximação por mínimos quadrados utilizando os Polinômios de Hermite.

j	$\langle f, \overline{H}_j \rangle$
0	1,709468
1	1,208777
2	0,604388
3	0,246741
4	0,087236
5	0,027586

Tabela 4.6: Coeficientes da aproximação por mínimos quadrados utilizando os Polinômios de Hermite para e^x

Por fim, vejamos na Figura 4.8 a aproximação da função $f(x) = e^x$ por $r_n^*(x)$ utilizando os Polinômios de Hermite. Para melhor visualização do comportamento das

aproximações $r_n^*(x)$ na Figura 4.9 apresentamos de forma individual ($n = 1, 2, 3$) no intervalo $[-1, 1]$, embora o intervalo de integração seja $(-\infty, \infty)$, para podermos comparar com as aproximações obtidas utilizando os polinômios de Legendre (Figura 4.2) e Chebyshev (Figura 4.5).

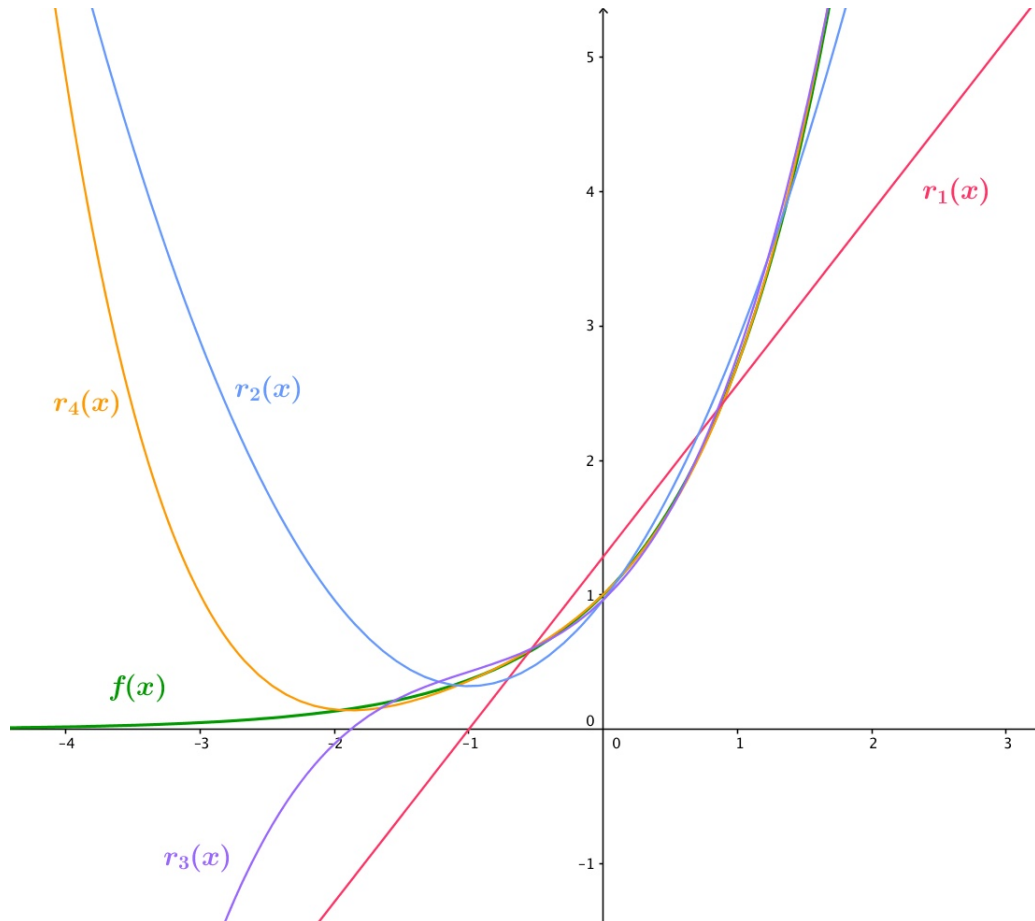


Figura 4.8: Aproximação de $f(x) = e^x$ por $r_n^*(x)$ utilizando os Polinômios Ortogonais de Hermite

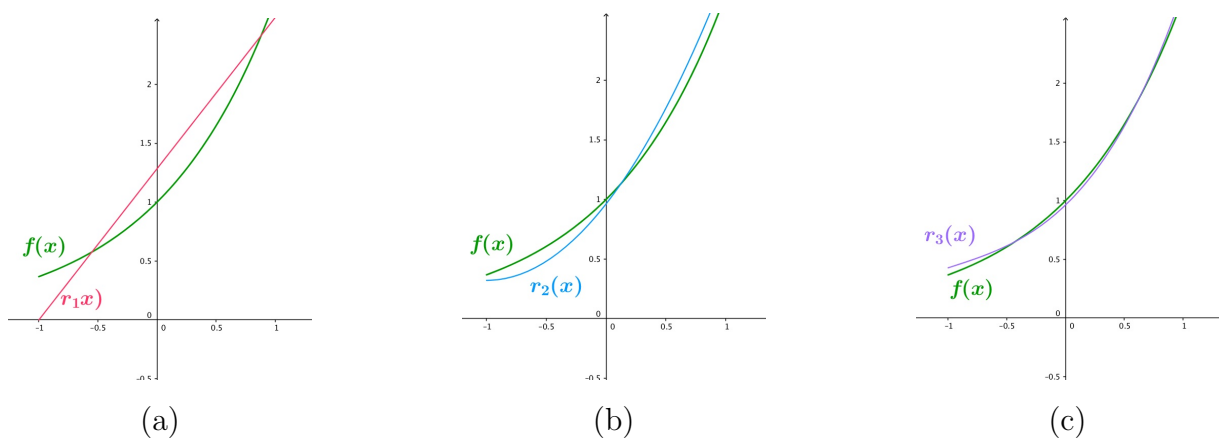


Figura 4.9: Aproximação por $r_n(x)$ no intervalo $[-1, 1]$. (a) $n = 1$, (b) $n = 2$ e (c) $n = 3$.

4.4 Comentários

- 1 Todos os gráficos apresentados neste trabalho, foram elaborados no software GeoGebra. Ressaltamos que utilizamos esta ferramenta pela sua simplicidade e eficácia para o objetivo que queríamos. Para melhores informações sobre o GeoGebra ver [8]
- 2 Para a realização dos cálculos das integrais dos coeficientes $\langle f, P_j \rangle, j = 1, 2, 3, \dots$ das aproximações r_n^* e dos E_n desenvolvidos nesta seção, assim como na seção 2.3 e 3.1 utilizamos o site Wolfram. Para melhores informações veja [7]

Capítulo 5

Conclusão

Os polinômios ortogonais trazem um resultado notável na aproximação de funções contínuas, visto que facilita o cálculo da solução ótima no problema dos mínimos quadrados. Para tanto, foi feito um estudo preliminar. Por exemplo, os espaços vetoriais de dimensão infinita, da Análise Funcional.

Vimos que podemos encontrar um tipo mais simples de função, com propriedades que facilitem sua utilização, de uma função dada explicitamente. Para embasar tal situação, foi estudado o Teorema de Weierstrass, o qual recomendamos pela importância e aplicabilidade na teoria de aproximações polinomiais. Os polinômios ortogonais têm aplicabilidade em muitos problemas da matemática. Na aproximação de funções, são importantes na praticidade de seu uso junto ao método dos mínimos quadrados que busca minimizar o erro e, em todas as vezes que se necessitar de uma base ortogonal em casos particulares podemos utilizá-los.

Segundo os PCN's, saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos é um dos objetivos do ensino. O uso da tecnologia se faz necessário atualmente pela rapidez e eficácia em cálculos. Afim de ganhar tempo, utilizamos o Wolfram para a realização dos cálculos dos sistemas lineares e das integrais e também o GeoGebra na plotagem dos gráficos que davam ideia das características de cada polinômio, bem como a aproximação no intervalo desejado.

Ao final deste trabalho, concluímos a importância da aproximação de funções por polinômios ortogonais para professores do ensino médio que desejam se familiarizar com o assunto e no estímulo de seus alunos com o intuito de incentivá-los na vida acadêmica.

Referências

- [1] ATKINSON, Kendall E. *An Introduction to Numerical Analysis* . Second Edition. Wiley, 1978.
- [2] KREYSZIG , Erwin; *Introductory Functional Analysis With Applications*. Wiley, 1989. Wiley Classics Library Edition
- [3] DE AMORIM, Vitor; Gustavo; Aproximação de Funções Contínuas por Polinômios, *UFABC-PROFMAT*, p. 23-27, 2011.
- [4] DE LIMA, Lourenço; PEIXOTO. Quadratura de Gauss Iterativa com base nos Polinômios Ortogonais Clássicos, *CEFET-MG*, p. 34-37, 2008.
- [5] SZEGO, G;. *Orthogonal Polynomials*. Fourth Edition. Rhode Island, American Mathematical Society, 1975. Colloquium Publications, **XXIII**
- [6] CHI, Yen; LUN. O Teorema de Comparação de Sturm e Aplicações, *UNICAMP*, p. 19-30, 2013.
- [7] WOLFRAM, Mathworld;Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com>>. Acesso em: 16 mar. 2017.
- [8] GEOGEBRA;Disponível em:<<https://www.geogebra.org>>. Acesso em: 20 mar. 2017.

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das
Almas - BA

CEP: 44380-000

Telefone: (75) 3621-2350

<<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>>