Universidade Federal do ABC

PROFMAT

Deivid Cezario Teixeira

O papel da taxa média de juros na matemática financeira

Santo André, 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MESTRADO EM MATEMÁTICA PROFISSIONAL

DEIVID CEZARIO TEIXEIRA

O PAPEL DA TAXA MÉDIA DE JUROS NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Mestrado em Matemática Profissional para obtenção do título de Mestre .

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO DEIVID CEZARIO TEIXEIRA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

SANTO ANDRÉ, 2017

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Cezario Teixeira, Deivid
O papel da taxa média de juros na matemática financeira / Deivid Cezario Teixeira. — 2017.

76 fls.

Orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2017.

1. matemática financeira. 2. taxa média de juros. 3. sistemas de capitalização. I. Fabiano da Silva, Márcio. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2017. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 05 **de** Maio **de 20**17**.**

Assinatura do autor: ______________

Assinatura do orientador: Márcio Fabiano da Silva

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Deivid Cezario Teixeira, realizada em 16 de fevereiro de 2017:

Márcio Fabiano da Silva

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (UFABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Sinue Dayan Barbero Lodovici** (UFABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **David Pires Dias** (USP) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Igor Leite Freire** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Alexandre Lymberopoulos** (USP) – Membro Suplente

Dedico este trabalho a uma pessoa muito especial com a qual divido os meus dias, minhas angústias e minhas alegrias. Em todas as linhas que se seguem é possível encontrar um pouquinho de você.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que não me abandonou nos momentos mais escuros dessa longa jornada. Aos meus pais e familiares que souberam entender meus longos períodos de ausência e dedicação ao mestrado. Agradeço à todos os professores que puderam contribuir com a minha formação, em especial àqueles com os quais tive o privilégio de estudar. Agradeço aos amigos que me apoiaram durante toda este jornada e que fizeram de todos os momentos, uma oportunidade para aprender. Agradeço aos professores Doutores David Pires Dias e Sinue Dayan Barbero Lodovici pelas valiosas contribuições para esta dissertação. Por fim, agradeço ao professor Doutor Márcio Fabiano da Silva pela parceria e confiança depositada neste projeto para que tudo pudesse se desenrolar da melhor maneira possível. Foi por meio do seu apoio e dedicação que as páginas desta dissertação puderam ser escritas. O meu muito obrigado a todos!

"A matemática é a honra do espírito humano."

(G.W. Leibniz)

RESUMO

Esta dissertação busca aprofundar os estudos sobre a taxa média de juro nos sistemas de capitalização simples e composta, bem como apropriar-se de sua importância no mundo financeiro e escolar, buscando aplicações práticas e fundamentadas no mercado, aplicando-as no contexto educacional, seja ele básico ou de nível superior, buscando atender às expectativas dos alunos em relação às suas dúvidas e em como tornar-se um cidadão consciente da sua relação com o dinheiro e da gestão responsável das suas finanças.

Palavras-chave: Taxa Média, Matemática Financeira, Sistemas de Capitalização

ABSTRACT

This dissertation seeks to deepen the studies on the average interest rate in simple and compound capitalization systems, as well as appropriating its importance in the financial and school world, seeking practical and market-based applications, applying them in the educational context, whether it is basic or higher level, seeking to meet the expectations of students regarding their doubts and how to become a citizen aware of their relationship with money and a responsible manager of their finances.

Keywords: Average rate, Financial Mathematics, Capitalization Systems

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação pretende abordar o tema taxa média de juro nos sistemas de capitalização simples e composta, em conversa com a educação básica e superior. Para isso, todo o corpo deste trabalho está dividido para melhor entendimento e compreensão do que se vem discutindo em suas páginas da seguinte forma:

No primeiro capítulo há uma discussão sobre os motivos que nos levaram a debruçar sobre este tema e como ele é pouco abordado em literaturas da área. Ainda neste capítulo, procuramos fornecer ao leitor uma breve ideia do que se busca ensinar, e por consequência, aprender durante a formação básica dos estudantes, bem como durante o nível superior, relacionando o cotidiano e a vivência dos idealizadores com o tema proposto.

No segundo capítulo trataremos de alguns temas da matemática, como o princípio da indução matemática e as progressões aritmética e geométrica. Ainda abordamos alguns dos termos mais comuns e importantes da matemática financeira para que o seguir do trabalho pudesse se tornar mais orgânico na medida em que se aprofunda a leitura. Neste capítulo, nossa preocupação é que o leitor possa acompanhar a matemática que será disposta a seguir da maneira mais natural possível, sem que precise recorrer a livros ou buscas na internet. Nesse capítulo também destinamos espaço aos sistemas de capitalização simples e composta, analisando-os e explicando cada detalhe de sua formação.

No terceiro capítulo, trataremos do nosso objeto de estudo que é a taxa média de juro. Para abordá-la, usamos exemplos e fazemos uso das demonstrações por meio do princípio da indução. Para que o leitor tome posse do conhecimento que se pretende transmitir, utilizamos situações com dados possíveis de serem encontrados no mercado financeiro ou no nosso cotidiano e, facilmente consultados nas referências bibliográficas, mais ao final. Definimos o que é a taxa média e qual a sua intencionalidade na vida das pessoas, sem se importar, em um primeiro momento, em como ela poderia se encaixar no cotidiano escolar.

No quarto capítulo, levamos ao leitor uma aproximação maior da realidade escolar e de como podemos aplicar o tema, que é o nosso objeto de trabalho, nas aulas de matemática, não como aplicação de uma outra temática e que, por ventura é possível trazer a matemática financeira como exemplo, mas como protagonista da própria existência. Buscamos dividir este capítulo em duas partes: uma mais destinada à educação básica, a qual ainda pode ser subdividida em ensino fundamental e ensino médio, com características e especificidades distintas, cada qual com suas linguagens e problemas de aplicações práticas; e uma outra mais voltada ao ensino superior, nos curso de graduação ou tecnológicos que tem em sua grade curricular disciplinas relacionadas à matemática financeira. Ao estudar separadamente estas ramificações do ensino é possível comparar as linguagens, o quão profundo é a abordagem e entender um pouco mais os motivos pelos quais este tema é relevante na formação do cidadão.

Reservamos alguns comentários mais ao final deste trabalho para que o leitor possa compará-los aos elaborados por você durante a leitura e que, na reflexão que temos ao ler um trabalho acadêmico, possamos interferir positivamente na educação financeira do país, a fim de que nossas crianças, jovens e adultos não sejam tão dependentes da terceirização dos serviços de orçamento e planejamento financeiro familiar e, com isso, passem a assumir o controle da saúde financeira de toda a sua família, como de fato esperamos que seja.

1

A MATEMÁTICA FINANCEIRA E O CONTEXTO EDUCACIONAL

1.1 MOTIVAÇÕES PARA REALIZAR ESTE TRABALHO E O PORQUÊ DE ESTUDAR MATEMÁTICA FINANCEIRA

Quando esta dissertação começou a ser escrita, tínhamos como motivador a nossa observação como docentes acerca dos nossos alunos e como os mesmos usavam os diversos elementos da matemática financeira. Enquanto docentes, o que nos preocupava era a falta de conhecimento, por parte dos discentes, nos mais diversos segmentos financeiros que os circulavam: os empréstimos, o cartão de crédito, juro composto, sistemas de descontos. É uma infinidade de situações que lidamos diariamente e que, por muitas vezes, nos sentimos despreparados para compreender tais operações financeiras. Em uma aula de matemática financeira, para os alunos do 5° semestre do curso de licenciatura em matemática, lembro-me de um aluno perguntando sobre como funcionavam os sistemas de pagamentos em um financiamento imobiliário. Lembro-me também de dúvidas sobre os sistemas de capitalização simples e composta. Dúvidas sobre descontos e taxa de juro efetiva. Na maior parte das vezes, a taxa de juro era o grande mistério: Qual a melhor taxa?; Qual o melhor investimento?; Quais investimentos retornam o melhor montante aplicado em capitais diferentes à taxas e períodos diferentes?...

Outra percepção que tínhamos, também por observação da prática, era a de que a matemática aplicada nos anos finais do ensino fundamental não tratava o tema matemática financeira como deveria ser tratada. Logo nas séries iniciais do Ensino Fundamental, os alunos têm contato com o sistema monetário brasileiro, sem sequer saber que outros sistemas monetários existem. Neste momento, o objetivo dos professores não passa da mera concepção da existência de um modelo monetário. Logo, todas as atividades são baseadas no reconhecimento do dinheiro, cédulas, moedas e algumas operações fundamentais - adição, subtração, multiplicação e divisão. Já nas séries finais do ensino fundamental, os alunos voltam a ter contato com a matemática financeira no sétimo ano, onde eles aprendem a calcular porcentagem de quantidade, e consequentemente, alguns problemas com juro simples surgem. Mas perceba que a ideia financeira não é a protagonista e sim uma aplicação das razões e proporções.

No oitavo e nono ano, dependendo da escola, os alunos aprendem um pouco sobre expressões algébricas e, para exemplificar aplicações das equações algébricas, é possível utilizar equações de juro compostos, por exemplo, para que os alunos possam tomar propriedade da importância de utilizar modelos matemáticos a fim de resolver problemas. Mais uma vez a matemática financeira não é a razão de se ensinar e sim uma coadjuvante na tentativa de fazer o aluno entender as expressões e equações algébricas. E isso se repete no segundo ano do Ensino Médio, quando o professor explica progressões geométricas ou aritméticas, entre outros temas. Se você acompanhar a evolução da matemática durante o ciclo básico da educação é possível perceber que não há uma preocupação formal em discutir temas sobre matemática financeira como motivadores de estudo, ou seja, aulas que se preocupem em tratar temas como, *o que é um financiamento?*, *como posso fazer o dinheiro render?*, *o que é poupança?*, *o que são sistemas de financiamento?*, entre outros temas que, não só são importantes, como também permeiam nossas vidas ao nos tornarmos adultos e que, se bem compreendidos, podem nos auxiliar na tomada de decisão acerca de empréstimos imobiliários, financiamento de veículos, parcelamento de dívidas, entre tantos outros problemas enfrentados no decorrer da vida das pessoas.

Não distante desta nova preocupação, outra dúvida também surge conforme as pesquisas foram acontecendo. Uma delas é sobre o excesso de referências bibliográficas sobre saúde financeira nas estantes das livrarias. Em uma visita rápida a uma delas, é possível encontrar dezenas de livros que tem por objetivo, auxiliar nos gastos da família, com os mais diversos títulos: *Casais inteligentes enriquecem juntos*, do autor Gustavo Cerbasi; *Gestão Financeira Familiar: Como As Empresas Fazem*, de Érico Veras e Jocildo Figueiredo; *Finanças Pessoais: Conhecer Para Enriquecer!*, das organizadoras Ana Paula Mussi Szabo Cherobim e Marcia Maria dos Santos Bortolocci Espejo e tantos outros títulos tão cobiçados por aqueles que estão à beira do caos financeiro ou perdidos em relação ao orçamento familiar; ou ainda, as dívidas de cartão de crédito, que segundo o site de notícias da revista *Exame* [5], a dívida dos brasileiros cresceu 21,2%

de 2015 para 2016, atingindo o patamar de R$ 34,5 bilhões. Seria este um nicho de mercado que tem por objetivo dar conta de uma lacuna que não tem sido preenchida durante os anos em que frequentamos os bancos do colégio?

E como uma coisa está intimamente ligada à outra, fomos visitar os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) para saber o que este discursa sobre o o que se aprende e se ensina nas escolas em relação à matemática financeira.

Os PCN's apresentam propostas de temas e conteúdos específicos das diversas áreas do conhecimento, institucionalmente abordadas nas escolas brasileiras, a fim de atingir as competências e habilidades que se esperam de um aluno durante sua formação no ciclo básico de ensino. Mais especificamente no ensino médio, os PCN's são subdivididos em três áreas, a saber: Área 01: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Área 02: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; Área 03: Ciências Humanas e suas Tecnologias. Em concordância com a LDB/96 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), os PCN's dialogam sobre o modo como o Ensino Médio deve abordar os temas ligados à matemática, mais especificamente, como devem ser trabalhados a fim de aprofundar e aprimorar os saberes específicos, além de direcionar a necessidade da interdisciplinaridade dos temas.

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico.(MEC,1998) [1]

Segundo os PCN's [10], a finalidade da matemática enquanto parte do currículo básico é a de desenvolver no aluno, a capacidade de:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral; aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Perceba que, de maneira não direta, cada um dos itens acima converge para a formação do cidadão capaz de interferir no mundo ao seu redor de maneira positiva e transformadora. Logo, há de se reservar um momento durante a formação deste aluno para que o mesmo seja capaz de compreender conceitos básicos e também intermediários sobre a matemática financeira, com vista no desenvolvimento social e humano deste aluno, afinal, suas decisões financeiras formam o indivíduo que está em desenvolvimento e portanto, poderá afetar positiva ou negativamente sua vida.

Com toda esta observação, pensamos que seria pertinente pesquisar um pouco mais sobre esta temática e verificar como poderíamos intervir de forma significativa na formação dos professores, alunos e porque não, da sociedade de uma maneira geral. Para isso, fomos atrás das bibliografias que abordavam este tema para encontrarmos olhares diferentes e assim poder compor um trabalho que pudesse, de alguma maneira, motivar mudanças positivas na educação.

Durante a fase de pesquisa bibliográfica, nos deparamos com muitos livros interessantes e com conteúdos e explicações bastante satisfatórias. Porém, um desses livros nos chamou a atenção. Entitulado *Matemática Financeira*, do autor e também professor em cursos de pós graduação, José Dutra Vieira Sobrinho, o livro trouxe à luz o nosso objeto de pesquisa. Em um trecho, encontramos uma curiosa afirmação do autor sobre o tema taxa média. Mais precisamente no capítulo sete, o autor inicia com uma discussão sobre a importância e relevância dos temas *taxa média* e *prazo médio* no mundo atual. Segundo Vieira Sobrinho,

> Os assuntos *taxa média* e *prazo médio* não têm merecido a atenção dos diversos autores e estudiosos da matéria, no tocante à profundidade com que deveriam ser tratados. A importância do conhecimento desses dois conceitos tem crescido substancialmente nos últimos anos, à medida que se desenvolvem o mercado financeiro, as operações se tornam mais complexas, exigindo controles mais sofisticados e mais seguros. [12]

A partir desta afirmação, nos perguntamos o porquê da taxa média ser algo tão importante. Pergunta esta que esperamos que você possa responder com a leitura desta dissertação, além é claro, de também apropriar-se de suas relações matemáticas.

Por fim, reunindo todos estes pontos de vista, decidimos então utilizar a matemática financeira como temática para nosso trabalho de pesquisa e, dentre as mais diversas possibilidades de trabalho, nos concentrarmos em discutir como a taxa média de juro pode influenciar na tomada de decisão sobre investimentos ou até mesmo como ela surge no cotidiano das pessoas, a fim de trazer à luz, uma nova possibilidade de trabalho e despretenciosamente, viabilizar um caminho para que os professores que nos leem, possam se fazer valer do que escrevemos aqui, para fomentar seus trabalhos com os mais diversos públicos, qualquer que seja o segmento de ensino, qualquer que seja a faixa etária, com o objetivo de fornecer aos seus discentes uma ferramenta a mais na sua formação, para que este possa tomar decisões financeiras coerentes e com mais responsabilidade no presente e no futuro.

2

ALGUNS CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

No decorrer desta dissertação, diversos conceitos matemáticos serão de extrema importância para o entendimento deste trabalho. Neste capítulo, discutimos alguns conceitos importantes da linguagem financeira e também da matemática, como é o caso do P.I.F. (Princípio da Indução Finita) ou Princípio da Indução Matemática, usado para fazer demonstrações que envolvem os números naturais. Discutiremos alguns conceitos das progressões aritméticas e geométricas que serão úteis na abordagem das séries de pagamentos sucessivos e uniformes e, por motivos didáticos, falaremos mais ao final do capítulo, sobre sistemas de capitalização simples e composta e as séries de pagamentos, já nos fazendo valer dos conhecimentos discutidos nos primeiros momentos deste capítulo.

2.1 TERMOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Muitos são os nomes que trataremos neste trabalho e, para que possamos situar o leitor de tudo o que está por vir, vamos esclarecer alguns destes termos previamente.

- **Capital (C)**

  É o valor inicial empregado. Em alguns momentos pode ser traduzido como *valor principal*, ou até mesmo *valor presente*. Quando pensamos em capital, devemos ter em mente que se trata de um valor que queremos aplicar em algum tipo de situação financeira e observar seu comportamento no decorrer do tempo. Pode ser um valor que temos ou o valor de um bem que desejamos adquirir. De maneira bem ampla pode ser traduzido como todo aquele valor monetário que dispomos, ao dar início a uma transação financeira.

Exemplos:

- O valor de venda de um veículo que desejamos adquirir por meio de um financiamento;
- Um certo dinheiro que gostaríamos de aplicar em uma caderneta de poupança;
- Uma certa quantia em dinheiro, que tomamos por empréstimo e que devemos devolver corrigida após um período de tempo.

- **Período (t)**

  É o tempo que durará a transação financeira. Em outras palavras, trata-se do tempo em que o capital estará relacionado à transação financeira em questão. Os períodos mais comuns encontrados no mercado financeiro são: o *mês* (ou mensal) e *ano* (ou anual), mas podemos encontrar outros tipos de períodos, como por exemplo: dia (ou diário), bimestre (ou bimestral), trimestre (ou trimestral), semestre (ou semestral), ou qualquer outro sistema de contagem de tempo que regularize o prazo que deve ser dado, para que o capital possa sofrer a devida atualização.

  Exemplos:

  - Os 2 anos em que um empréstimo será pago mensalmente;
  - Os 12 meses consecutivos em que um capital estará aplicado na poupança;
  - Os 24 meses em que um bem será pago em parcelas mensais e iguais.

- **Juro (J)**

  Na maior parte das literaturas, o juro é definido como sendo o *aluguel pago pelo dinheiro*. É possível defini-lo desta forma desde que, quando pensarmos em aluguel, não tenhamos em mente de que se trata, exclusivamente de um valor a ser pago de maneira onerosa, mas que, dependendo da situação, pode tratar de valores a serem restituídos. Quando dizemos que uma certa quantia será cobrada com juro, estamos querendo dizer que o capital que está sendo tratado ali deverá ser devolvido após um período pré-estabelecido, acrescido de um novo valor, relativo ao capital, que compensa aquele que tenha disposto do capital na transação financeira, por não manter posse da quantia durante o período contratado entre as partes.

Exemplos:

- O juro de R$2,65 por dia de atraso sobre um boleto de R$100,00;
- O juro de R$54,80 sobre o valor à vista de um produto que será pago em parcelas;

- **Taxa (i)**

  Taxa é a razão em que se deve calcular o quanto de juro um dado capital formou após determinado período, ou seja, trata-se de um fator de atualização aplicado ao capital a fim de formar o valor que deverá ser pago pelo aluguel do dinheiro em um determinado período de tempo. Comumente é apresentado em termos percentuais. É importante frisar que, para que os calculos sejam feitos de maneira correta, tanto a taxa de juro, quanto o período devem ser exibidos na mesma unidade, ou seja, caso a taxa seja apresentada em termos mensais (ao mês) o período deve ser contabilizado mensalmente; caso seja uma taxa anual (ao ano) o período também deve ser apresentado nesta mesma ordem.

  Exemplos:

  - Deseja-se aplicar um capital durante 3 meses a uma taxa de 0,015 ou $1,5\%$ ao mês;
  - O valor total de um veículo zero quilômetro será financiado em 0,5 ano com uma taxa de juro anual no valor de $13,768\%$;
  - Uma duplicata será paga com um atraso de 72 dias, acrescida de um valor correspondente à taxa de juro de $0,03\%$ ao dia.

- **Montante (M)**

  Também conhecido como *valor final*, o montante nada mais é que o valor do capital empregado em uma operação financeira, acrescido dos juros que esta operação gerou. Matematicamente, o montante pode ser determinado como sendo a soma aritmética do capital com o juro.

  $$M = C + J$$

  Exemplos:

  - Um capital de R$200,00 rendeu um juro de R$22,50 formando assim, um montante de R$222,50 ao final da transação financeira;
  - Comprei um carro no valor de R$ 22.000,00 em 48 parcelas iguais. Ao final dos 48 pagamentos percebi que o montante pago pelo veículo foi de R$48.000,00 referente ao valor do veículo mais os juros calculados para o período de 48 meses.

2.2 A OPERAÇÃO FINANCEIRA DENOMINADA DESCONTO

Tudo aquilo que mencionamos acima está intimamente ligado à idéia de acrescer ao valor principal uma determinada quantia em dinheiro, chamada de juro e que gerará um montante. Mas é possível também que ao valor principal seja descontado um novo valor e que gerará não um montante, mas um *saldo*, sendo este menor que o valor que tínhamos inicialmente. A esta modalidade financeira damos o nome de *desconto* e os termos relacionados a ela são:

- **Capital (C)**

  Assim como no cálculo do juro, o capital é o valor inicial empregado em uma determinada operação financeira. Pode se tratar do preço de uma peça de roupa que, ao ser paga à vista, sofrerá um desconto pelo tipo de operação de crédito envolvida na transação; pode ser o valor nominal de uma duplicata que deveria ser paga daqui a alguns dias, mas que será quitada na data de hoje, sofrendo assim um desconto no seu valor como benefício pelo adiantamento do pagamento.

- **Desconto (D)**

  Trata-se do valor em espécie que será subtraído do capital. É análogo ao juro, porém não acrescenta ao capital e sim é retirado deste.

- **Taxa de desconto (d)**

  Também se trata de um fator de atualização aplicado ao capital a fim de gerar um desconto para uma determinada situação financeira.

- **Saldo (S)**

O saldo é análogo ao montante, porém nesta operação deve-se diminuir o valor do desconto do valor do capital, gerando o saldo que, necessariamente, é menor que o valor presente aplicado na transação financeira.

$$S = C - D.$$

Por uma questão didática, trataremos um número maior de problemas relacionados ao juro, não por diminuir a importância dos descontos, mas por acreditar que é no primeiro que a maior parte das dúvidas dos alunos e das aplicações que queremos demonstrar aqui estão inseridas. Em momentos oportunos, trataremos de alguns problemas sobre descontos.

A seguir apresentamos alguns temas de matemática, como o *Princípio da Indução Finita - PIF*, as progressões aritméticas e geométricas, que servirão de base para tratarmos as séries de pagamentos.

2.3 O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

O Princípio da Indução Matemática, também conhecido como Princípio da Indução Finita, abreviado como P.I.F., é uma importante técnica da teoria dos números ([11]), muito útil na tentativa de provar que uma sentença é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$, sendo este, um inteiro não negativo. Este princípio está apoiado no seguinte axioma matemático:

Princípio da boa ordenação: Todo subconjunto não vazio de A de inteiros não negativos possui um elemento mínimo (isto é, existe n_0 pertencente a A tal que $n_0 \leq n$, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$).

A partir deste axioma, podemos apresentar o Princípio da Indução Matemática citado anteriormente:

Proposição 2.1. *Seja $N = \{n_0, n_1, n_2, ...\}$ um conjunto de inteiros não negativos, onde $n_0 < n_1 < n_2 < ...$ e seja $P(n)$ uma proposição que depende de $n \in N$, tal que:*

- *$P(n_0)$ é verdadeira;*
- *Se $m \in N$ e $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in N$ tal que $n < m$, então $P(m)$ é verdadeira.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. A demonstração será feita por contradição. Seja F=$\{l \in N : P(l)$ não é verdadeira$\}$ e suponha por absurdo que $F \neq \emptyset$. Pelo *princípio da boa ordenação* existe $l_0 \in F$, $l_0 > n_0$ (já que $P(n_0)$ é verdadeira) e tal que $l_0 < l$, para todo $l \in F$ (isto é, l_0 é um elemento mínimo de F). Isto nos diz que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in N$ tal que $n < l_0$ (a não validade desta afirmação comprometeria a minimalidade de l_0). Por hipótese, temos que $P(l_0)$ é verdadeira, uma contradição. Assim devemos ter $F = \emptyset$ e $P(n)$ verdadeira para todo $n \in N$. □

A seguir enunciamos uma variação do PIF que será usada em alguns resultados desta dissertação:

Princípio da Indução Finita (um outro enunciado, ([8])): Seja $N = \{n_0, n_1, n_2, ...\}$ um conjunto de inteiros não negativos, onde $n_0 < n_1 < n_2 < ...$ e seja $P(n)$ uma proposição que depende de $n \in N$, tal que:

- $P(n_0)$ é verdadeira;
- Para cada $n \in N$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também será verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.4 A PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Existem grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos também iguais. Por exemplo, na situação seguinte:

Exemplo 2.1. No primeiro dia, como você ainda não começou a poupança, você deve guardar R$1,50 e, em cada um dos dias que se seguem, você deve somar R$1,50 ao dinheiro que você poupou no dia imediatamente anterior, ou seja, você deve poupar R$1,50 a mais todos os dias. Vamos esquematizar a situação para uma semana:

Repare que, a quantidade acrescentada a cada dia é sempre a mesma, R$1,50, ou seja, o valor a ser poupado de um dia para o outro sofre a mesma variação nos mesmos intervalos de tempo. A este valor damos o nome de razão, ou seja, nesta progressão, a razão corresponde ao 1,50. Como este valor constante é sempre somado ao valor

Dia	Quanto poupei ontem	Acréscimo	Valor a poupar
1	R$0,00	R$1,50	R$1,50
2	R$1,50	R$1,50	R$3,00
3	R$3,00	R$1,50	R$4,50
4	R$4,50	R$1,50	R$6,00
5	R$6,00	R$1,50	R$7,50
6	R$7,50	R$1,50	R$9,00
7	R$9,00	R$1,50	R$10,50

Tabela 1: Valores poupados nos primeiros dias.

imediatamente anterior, dizemos que esta progressão é uma progressão aritmética. De acordo com Luiz Roberto Dante, em seu volume único entitulado Matemática (para Ensino Médio) [4], encontramos a seguinte definição:

Definição 2.2. Progressão Aritmética (*PA*) é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada razão da progressão e é representada pela letra r.

Denotaremos por a_i, com $i \in \mathbb{N}^*$, o termo da progressão que está na posição i. Assim, os n primeiros termos da PA são $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$.

É possível desta forma estabelecer uma equação que relacione o termo de posição n com o primeiro termo a_1 e a razão r, conforme a seguinte proposição.

Proposição 2.3. *Dada uma PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$ de razão r, temos*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r. \tag{2.1}$$

Demonstração. A prova se dará pelo PIF com a proposição $P(n) : a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, com $n \in N = \mathbb{N}^*$. Verifiquemos que $P(n)$ é válida para $n = 1$. De fato

$$P(1) : a_1 = a_1 + (1-1) \cdot r.$$

Agora, suponha que $P(n)$ seja válida para um natural $n > 1$ (hipótese de indução). Provemos que é verdadeira a sentença $P(n+1)$ (passo de indução):

$$P(n+1) : a_{n+1} = a_n + r.$$

Pela hipótese de indução, $P(n) : a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, donde

$$P(n+1) : a_{n+1} = a_1 + (n-1) \cdot r + r = a_1 + n \cdot r.$$

□

Voltando ao exemplo 2.1, se quiséssemos, por exemplo, saber qual a quantia que deve ser poupada no 30° dia, poderíamos calcular

$$a_{30} = 1,5 + (30 - 1) \cdot 1,5 = 45.$$

Portanto, a quantia que deverá ser poupada no 30° dia é de $R\$45,00$.

2.5 A PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

A Progressão Geométrica (PG) é análoga à Aritmética, já que se trata também de uma sequência de números que seguem a uma determinada ordem. A diferença é que na progressão geométrica a razão entre um termo e o anterior (não-nulo) é uma constante, chamada de razão da PG e denotada por q. Existem inúmeras situações em que podemos aplicar as progressões geométricas. Vamos apresentar uma delas.

Exemplo 2.2. Suponha que uma quantia de R$100,00 será depositada em uma conta a título de resgate futuro, devendo render 1% a cada mês que ficar nesta conta, sendo que cada rendimento é calculado sobre o saldo anterior. Veja uma tabela que ilustra os três primeiros valores obtidos:

Mês	Valor Inicial	Rendimento	Valor Final
1	R$100,00	1% de R$100,00: R$1,00	R$101,00
2	R$101,00	1% de R$101,00: R$1,01	R$102,01
3	R$102,01	1% de R$102,01: R$1,02	R$103,03

Tabela 2: Resumo dos cálculos nos três primeiros meses.

Portanto os três primeiros valores encontrados para esta operação são: R$101,00, R$102,01 e R$103,03, sendo este último anotado com o critério do nosso sistema monetário que trabalha até a casa dos centavos. Agora repare que o quociente obtido entre o segundo e o primeiro é o mesmo obtido entre o terceiro e o segundo.

$$\frac{102,01}{101,00} = 1,01.$$

$$\frac{103,0301}{102,01} = 1,01.$$

Os termos encontrados nesta sequência seguem à razão de $q = 1,01$.

Passemos a definir uma progressão geométrica como, por exemplo, em [7]:

Definição 2.4. Progressão Geométrica é toda sequência de números não-nulos na qual o quociente entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Esse quociente é chamado razão da progressão geométrica e é representado pela letra q.

Como no caso da PA, denotamos por a_i, com $i \in \mathbb{N}^*$, o termo da PG que está na posição i. Assim, os n primeiros termos da PG são $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$.

É possível desta forma estabelecer uma equação que relacione o termo de posição n com o primeiro termo a_1 e a razão q, conforme a seguinte proposição.

Proposição 2.5. *Dada uma PG* $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$ *de razão* q*, temos*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{2.2}$$

Demonstração. A prova se dará pelo PIF com a proposição $P(n) : a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, com $n \in N = \mathbb{N}^*$. Verifiquemos que $P(n)$ é válida para $n = 1$. De fato

$$P(1) : a_1 = a_1 \cdot q^{1-1}.$$

Agora, suponha que $P(n)$ seja válida para um natural $n > 1$ (hipótese de indução). Provemos que é verdadeira a sentença $P(n+1)$ (passo de indução):

$$P(n+1) : a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Pela hipótese de indução, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, donde

$$P(n+1) : a_{n+1} = (a_1 \cdot q^{n-1}) \cdot q = a_1 \cdot q^n.$$

$\square$

Para verificarmos a aplicabilidade desta equação que acabamos de apresentar, vamos determinar o terceiro termo do exemplo 2.2, usando a progressão geométrica. Veja:

$$a_3 = 101 \cdot 1,01^2 = 103,0301.$$

Logo, o valor obtido ao final do terceiro mês é de $R\$103,03$.

2.6 SOMA DOS n PRIMEIROS TERMOS DA PG.

A seguir, nosso objetivo é obter uma expressão para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PG. Comecemos considerando o seguinte problema.

Exemplo 2.3. Suponha que a quantidade de produtos vendidos cresça, anualmente, 2% em relação ao ano anterior e que a empresa vendeu $1.000.000$ de unidades em 2010. Calculemos quantos produtos foram vendidos entre 2010 e 2013.

Solução:
Primeiramente, identificamos que a quantidade de unidades vendidas por esta empresa corresponde a uma PG de razão $q = 1,02$. Tomando 2010 como sendo o primeiro momento em que essas vendas foram observadas , temos que $a_1 = 1.000.000$. Logo,

$$a_2 = 1.000.000 \cdot 1,02^{2-1} = 1.020.000,$$

que é a quantidade de unidades vendidas em 2011. Da mesma forma,

$$a_3 = 1.000.000 \cdot 1,02^{3-1} = 1.040.400$$

e

$$a_4 = 1.000.000 \cdot 1,02^{4-1} = 1.061.208.$$

Para sabermos qual foi o total de unidades comercializadas entre 2010 e 2013, devemos efetuar a soma dos termos a_1, a_2, a_3 e a_4:

$$1.000.000 + 1.020.000 + 1.040.400 + 1.061.208 = 4.121.608.$$

Imaginemos fazer esses cálculos para um número grande de termos. Por isso, é importante determinarmos uma equação que forneça a soma dos termos de uma PG, a partir de elementos da mesma. Em muitos livros é possível encontrar a equação abaixo que relaciona a razão, o número de elementos e o primeiro termo da PG, a fim de obter a soma dos n termos desta PG.

Proposição 2.6. *Dada uma PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$ (de termos não-nulos) de razão $q \neq 1$, temos*

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{2.3}$$

Demonstração. Seja S_n a soma dos termos de uma PG:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \tag{2.4}$$

Multiplicamos esta igualdade por q:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \cdot + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q. \tag{2.5}$$

Já sabemos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, logo, no lugar do termo $a_n \cdot q$, da expressão (2.5), podemos escrever $a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q$ e, por consequência, $a_1 \cdot q^n$. Observe novamente a expressão, após esta substituição:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_{n-1} \cdot q + a_1 \cdot q^n. \tag{2.6}$$

Subtraindo a equação (2.4) da equação (2.6), temos:

$$S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_{n-1} \cdot q + a_1 \cdot q^n - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n)$$

Como $a_1 \cdot q = a_2, a_2 \cdot q = a_3, a_3 \cdot q = a_4, \ldots, a_{n-1} \cdot q = a_n$, teremos:

$$S_n \cdot q - S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_1 \cdot q^n - a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_{n-1} - a_n$$

$$S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$$

$$S_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot (q^n - 1).$$

Se $q \neq 1$ então

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{(q-1)}. \tag{2.7}$$

□

Observação 2.6.1. *Caso $q = 1$, então $a_1 = a_2 = \ldots a_n$ e, consequentemente, a soma S_n dos n primeiros termos da PG é igual a $n \cdot a_1$.*

Outra demonstração da proposição 2.6 pode ser feita pelo PIF. Neste caso, apliquemos o PIF à proposição $P(n) : S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, com $n \in N = \mathbb{N}^*$.

Demonstração. Verifiquemos que $P(n)$ é válida para $n = 1$ e $q \neq 1$. De fato

$$P(1) : S_1 = a_1 \cdot \frac{q^1 - 1}{q - 1} = a_1.$$

Agora, suponha que $P(n)$ seja válida para um natural $n > 1$ (hipótese de indução). Provemos que é verdadeira a sentença $P(n+1)$ (passo de indução):

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

Mas, $a_{n+1} = a_n \cdot q$, onde q é a razão da PG; logo,

$$S_{n+1} = S_n + a_n \cdot q.$$

Pela hipótese de indução, $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, donde

$$S_{n+1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_n \cdot q. \tag{2.8}$$

Sabemos que o termo a_n de uma PG pode ser obtido pela equação (2.2) por $a_1 \cdot q^{n-1}$. Então, substituindo (2.2) em (2.8), teremos

$$S_{n+1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q$$

$$S_{n+1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1 \cdot q^n$$

$$S_{n+1} = a_1 \cdot (\frac{q^n - 1}{q - 1} + q^n)$$

$$S_{n+1} = a_1 \cdot (\frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1})$$

$$S_{n+1} = a_1 \cdot (\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}).$$

$\square$

2.7 SISTEMAS DE CAPITALIZAÇÃO

Um sistema financeiro de capitalização, ou simplesmente, sistema de capitalização é um conjunto de regras que normalizam uma operação financeira, determinando (entre outras coisas) como o juro deve ser acrescidos ao capital, ou, em termos de desconto, como estes devem ser retirados do capital. Em um instante inicial, para exemplificar o que pretendemos dizer, analise as seguintes situações descritas abaixo:

Situação 01: *Ao número 10, devemos fazer três acréscimos. O primeiro acréscimo à razão de* $\frac{1}{10}$ *sobre o valor inicial. O segundo, também à razão de* $\frac{1}{10}$ *sobre o valor inicial e o terceiro à razão de* $\frac{1}{10}$ *sobre o valor inicial.*

Para resolver este problema, todos os acréscimos devem ser realizados com base no valor inicial, ou seja, $\frac{1}{10}$ do número 10.

$$\frac{1}{10} \cdot 10 = 1$$

A partir daí, devemos somar ao número 10 três vezes a quantidade 1.

$$10 + 1 + 1 + 1 = 13.$$

Com isso, após os três acréscimos consecutivos, teríamos um valor final igual a 13.

Situação 02: *Ao número 10, devemos fazer três acréscimos. O primeiro à razão de* $\frac{1}{10}$ *sobre o valor inicial. O segundo, também à razão de* $\frac{1}{10}$ *calculado sobre o novo valor, ou seja, o valor inicial adicionado do valor encontrado para o primeiro acréscimo e, o terceiro, à razão de* $\frac{1}{10}$ *calculado sobre o valor final obtido, após os dois acréscimos anteriores.*

Para resolver este problema, cada um dos acréscimos deverá ser calculado, a partir do resultado final obtido, ou seja, para que se possa calcular o segundo acréscimo, deve-se saber o resultado após o primeiro e, para calcular o terceiro, deve-se saber que número se obtém após o primeiro e segundo acréscimos.

$$\frac{1}{10} \cdot 10 = 1.$$

Portanto, após o primeiro acréscimo o resultado será

$$10 + 1 = 11.$$

Para o segundo acréscimo, teremos

$$\frac{1}{10} \cdot 11 = 1,1.$$

Assim, após o segundo acréscimo o resultado será

$$11 + 1,1 = 12,1.$$

E por útimo

$$\frac{1}{10} \cdot 12,1 = 1,21.$$

Então, após o último acréscimo o resultado será

$$12,1 + 1,21 = 13,31.$$

Após os três acréscimos consecutivos, teríamos um valor final igual a 13,31. Perceba que os resultados obtidos na situação 01 e na situação 02 são distintos, ou seja, ao calcularmos a razão sempre sobre o valor inicial o resultado final, com os valores considerados, foi diferente daquele encontrado quando a razão é calculada sobre um novo valor, composto do resultado anterior somado ao acréscimo.

Em uma operação financeira, é possível calcular o juro sempre com base no valor principal dado, acrescentando-o todo de uma vez, ao final do período de capitalização ou acrescentar o juro ao capital após cada cálculo de juro e assim, formar um novo capital para que sirva de base ao próximo cálculo durante todo o período de capitalização.

Classificaremos como *Capitalização Simples de Juro* aquela que se relaciona à primeira situação apresentada, ou seja, quando o juro é calculado sempre com base no valor principal da operação financeira, independentemente de quantas vezes (prazo) este valor deve ser acrescentado.

Por outro lado, chamaremos de *Capitalização Composta de Juro* aquela que se relaciona à segunda situação, ou seja, quando o juro é acrescentado ao valor principal ao final de cada período de cálculo, formando um novo valor, que servirá de capital para o próximo cálculo de juro por quantas vezes (prazo) este valor deva ser acrescentado.

2.8 O SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Já discutimos acima o que vem a ser a capitalização simples e como ela ajuda a compor o valor final, dado um valor inicial e uma taxa de acréscimo. Porém, para que possamos nos situar neste trabalho, convém falarmos sobre como ela acontece em problemas aplicados. Vamos analisar alguns exemplos e por fim, *deduzir* uma equação para usarmos em momentos futuros. Vale lembrar que nesta dissertação utilizaremos o termo "*juro simples*" para se referir ao *sistema de capitalização simples*.

Exemplo 2.4. A quantia de $R\$1.200,00$ foi tomada como empréstimo e deverá ser paga após 5 meses, a juro simples de 2% ao mês. Calcular qual deverá ser o valor do juro pago.

Solução:

No primeiro mês, o juro calculado será de 2% de $R\$1.200,00$. Portanto, o juro referente a este mês pode ser determinado pelo produto entre essas duas grandezas:

$$\frac{2}{100} \cdot 1.200 = 24.$$

Para os próximos quatro meses o cálculo se repetirá da mesma forma, já que se trata de uma capitalização simples. Portanto, podemos encontrar o juro final pago, multiplicando o juro encontrado para um mês por cinco, que é o prazo total dado no problema:

$$24 \cdot 5 = 120.$$

Portanto, o juro pago ao final dos cinco meses são de R$120,00.

Exemplo 2.5. Um capital de $R\$7.800,00$ será quitado após 24 meses, a juro simples de 3% ao mês. Calcular qual deverá ser o valor do juro pago.

Solução:

No primeiro mês, o juro calculado é de 3% de $R\$7.800,00$:

$$\frac{3}{100} \cdot 7.800 = 234.$$

Para os próximos vinte e três meses, o cálculo se repetirá da mesma forma, já que se trata de uma capitalização simples. Portanto, podemos encontrar o juro pago, multiplicando o juro encontrado para um mês por vinte e quatro, que é o prazo total dado no problema:

$$234 \cdot 24 = 5.616.$$

Portanto, o valor pago ao final dos vinte e quatro meses é de R$5.616,00.

Exemplo 2.6. Um capital C será quitado após t períodos, a juro simples de i% capitalizados na mesma unidade de medida que o período. Calcular qual deverá ser o valor J do juro pago.

Solução:

No primeiro mês, o juro calculado corresponde ao produto de i por C. Portanto, o juro referente a este mês pode ser determinado pelo produto entre essas duas grandezas:

$$i \cdot C.$$

Para os próximos $(t-1)$ períodos, o cálculo se repetirá da mesma forma, já que se trata de uma capitalização simples. Portanto, podemos encontrar o juro pago, multiplicando o juro encontrado para um mês por t períodos, que é o prazo total dado no problema:

$$i \cdot C \cdot t.$$

Portanto, o valor pago ao final de t períodos é de $i \cdot C \cdot t$.

Podemos concluir então que no sistema de capitalização simples, o juro J pago ao final de t períodos, à taxa de $i\%$ referente à um capital C pode ser determinado segundo a equação

$$J = C \cdot i \cdot t \tag{2.9}$$

Observe que, nos exemplos 2.4 e 2.5 poderíamos ter usado esta equação (2.9) e encontraríamos a mesma resposta. Para facilitar os cálculos, vamos escrever a taxa em número decimal ao invés de escrevê-la na forma de fração, ou seja, 2% como $0,02$ e 3% como $0,03$. Para o exemplo 2.4, temos que

$$J = 1.200 \cdot 0,02 \cdot 5 = 120,$$

enquanto que para o exemplo 2.5, temos:

$$J = 7.800 \cdot 0,03 \cdot 24 = 5.616.$$

É possível calcular o valor final pago, ou seja, o montante M, que nada mais é que o capital acrescido do juro correspondente ao período de capitalização.

$$M = C + J$$
$$M = C + C \cdot i \cdot t$$

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t) \tag{2.10}$$

É com base nesta equação que iremos problematizar o sistema de Capitalização Composta, a seguir.

2.9 O SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

Na capitalização composta, como vimos anteriormente, o acréscimo é calculado sobre o capital a cada período de operação. Para ficar mais claro, vamos analisar alguns exemplos e por fim, deduzir uma equação que nos forneça o valor futuro M dados o valor presente C, a taxa i e o período t. Nas próximas páginas desta dissertação utilizaremos o termo "juro composto" para nos referirmos ao sistema de capitalização composta.

Exemplo 2.7. A quantia de $R\$1.200,00$ foi tomada como empréstimo e deverá ser paga após 5 meses, a juro composto de 2% ao mês. Calcular qual deverá ser o valor pago ao final do período.

Solução:

No primeiro mês, o juro calculado é de 2% de $R\$1.200,00$. Em seguida será acrescentado ao valor principal para formar o montante. Para este cálculo, podemos usar a equação (2.10):

$$M_1 = 1.200 \cdot (1 + 0,02 \cdot 1) = 1.224.$$

Para os próximos quatro meses, o capital deve ser o montante encontrado no período anterior, ou seja, para o segundo mês, o capital será de R$1.224,00. Dessa forma, encontraremos o montante após a capitalização do segundo mês:

$$M_2 = 1.224 \cdot (1 + 0,02 \cdot 1) = 1.248,48.$$

Portanto, o valor do montante, ao final do segundo mês é de R$1.248,48. Para os próximos meses, devemos repetir os cálculos mais três vezes (terceiro, quarto e quinto mês), porém usando o novo montante como capital. Veja como ficam as contas:

Mês 03:

$$M_3 = 1.248,48 \cdot (1 + 0,02 \cdot 1) = 1.273,4496.$$

Mês 04:

$$M_4 = 1.273,4496 \cdot (1 + 0,02 \cdot 1) = 1.298,918592.$$

Mês 05:

$$M_5 = 1.298,918592 \cdot (1 + 0,02 \cdot 1) = 1.324,896964.$$

Então, ao final dos cinco meses o montante acumulado foi de R$1.324,90, aproximadamente (considerando um arredondamento na casa dos centésimos, já que no nosso sistema financeiro escreve-se até esta casa decimal).

Exemplo 2.8. Calcular o montante de um capital de R$ 1.000,00, aplicado à taxa de 4% ao mês, capitalizado mês a mês, durante 5 meses.

Solução:

Vamos representar por S_t (t = 1, 2, 3, 4 e 5) o valor do montante no final de cada período t unitário, que no nosso exemplo é o *mês*. Para facilitar o entendimento vamos calcular cada um dos períodos, usando uma tabela:

Mês (t)	Capital no início do mês (C_t)	Juro Correspondente ao mês (J_t)	Montante no Final do mês (S_t)
1	1.000,00	$1.000,00 \cdot 0,04 = 40,00$	1.040,00
2	1.040,00	$1.040,00 \cdot 0,04 = 41,60$	1.081,60
3	1.081,60	$1.081,60 \cdot 0,04 = 43,26$	1.124,86
4	1.124,86	$1.124,86 \cdot 0,04 = 45,00$	1.169,86
5	1.169,86	$1.169,86 \cdot 0,04 = 46,79$	1.216,65

Tabela 3: Capitalização nos cinco primeiros meses.

Portanto, o valor do montante final do quinto mês é de R$1.216,65.

Observe que o montante no final de cada mês é o capital inicial do mês seguinte. A fim de facilitar os cálculos, vamos obter uma fórmula para o montante, baseando-nos no raciocínio feito no exemplo 2.8.

Exemplo 2.9. Um capital C será quitado após t períodos, a juro composto, com taxa i, capitalizados na mesma unidade de medida que o período. Calcular qual deverá ser o montantel M após a última capitalização.

Solução:

No primeiro período ($t = 1$), o juro calculado corresponde ao produto de i por C. Portanto, o montante referente a este, pode ser determinado pelo produto entre essas duas grandezas, acrescido do capital, por meio da equação (2.10):

$$M_1 = C \cdot (1 + i \cdot 1) = C \cdot (1 + i).$$

Para os próximos períodos ($t = 2, 3, 4, \ldots, n-1, n$), o cálculo se repetirá da mesma forma, porém, o capital será o montante anterior:

$$M_2 = M_1 \cdot (1 + i).$$

Mas, $M_1 = C \cdot (1 + i)$. Assim,

$$M_2 = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2.$$

Da mesma forma, para $t = 3$,

$$M_3 = M_2 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^3,$$

e para $t = 4$,

$$M_4 = M_3 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^3 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^4.$$

Analogamente, para $t = n - 1$,

$$M_{n-1} = M_{n-2} \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^{n-2} \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^{n-1},$$

e para o último período,

$$M_n = M_{n-1} \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^{n-1} \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^n.$$

Com isso, observamos que o montante M, relacionado à um capital C, à taxa i, capitalizado período a período, após t períodos, é dado por

$$M = C \cdot (1 + i)^t. \tag{2.11}$$

A seguir, provamos (2.11) usando a técnica do PIF.

Proposição 2.7. *Sejam C_0 o valor principal (capital) e i a taxa de juro que será aplicada por um período t (com $t \in \mathbb{N}$) sobre C_0, sob o regime de capitalização composta. Então*

$$P(t) : M_t = C_0 \cdot (1+i)^t.$$

Demonstração. Temos que $P(1)$ é verdadeira, pois, de acordo com (2.10), $M_1 = C_0 \cdot (1 + i \cdot 1) = C_0 \cdot (1+i)^1$.

Suponha que $P(t)$ seja válida para um natural $t > 1$. Provemos que é verdadeira a sentença $P(t+1)$. Vale a seguinte relação:

$$M_{t+1} = M_t \cdot (1+i).$$

Pela hipótese de indução, temos que

$$M_t = C_0 \cdot (1+i)^t.$$

Assim,

$$M_{t+1} = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^{t+1}.$$

□

2.10 A SÉRIE DE PAGAMENTOS UNIFORMES

Um conteúdo bastante interessante, quando se fala de matemática financeira, é a série de pagamentos uniformes. Quando temos um valor a financiar e possuímos a taxa que será aplicada por todo o período do financiamento é possível, entre outras coisas, determinar o valor que devemos pagar a cada período para liquidar a dívida adquirida ao final do financiamento. Isso é muito importante pois, em um sistema de pagamentos no qual se deseja quitar a dívida de forma parcelada, é necessário ter controle sobre qual valor será pago por esta dívida.

As séries de pagamentos uniformes podem ser de dois tipos: *postecipada* e *antecipada*. A primeira é aquela em que o vencimento do primeiro pagamento é dado após correr *um* período e a segunda é aquela em que o primeiro vencimento é dado na data da contratação. Para nossos estudos, trataremos da série de pagamentos uniformes e postecipados.

No sistema de capitalização simples não é difícil imaginar que, como todos os juros são calculados sobre o mesmo capital, basta encontrar o montante M pela equação

(2.10) e, em seguida, dividir o valor calculado pelo número de parcelas. Por se tratar de um caso mais trivial e não tão usado no mercado financeiro, deixaremos de lado a série de pagamentos uniformes e postecipados no sistema de capitalização simples e trataremos a série de pagamentos uniformes e *postecipados* no sistema de capitalização composta. Vejamos um problema para entendermos melhor este tema:

Exemplo 2.10. Um bem, no valor de $R\$10.000,00$ será pago em três parcelas mensais, à taxa de juro de 1% ao mês. Deseja-se saber qual o valor da parcela que deverá ser paga, a fim de quitar a dívida adquirida na compra, após o período contratado.

Solução:
Vamos imaginar a situação mês a mês para melhor entendimento do problema. No ato da contratação temos um saldo devedor de $R\$10.000,00$ e após um mês esse saldo deverá ser corrigido. Neste momento teremos também o primeiro pagamento. Para o segundo mês, teremos uma correção apenas do saldo devedor, após o primeiro pagamento. De maneira análoga, isso acontecerá no terceiro mês, onde o último pagamento encerrará a dívida.

Para analisarmos matematicamente, vamos chamar de S o saldo após cada pagamento, C o valor do bem financiado em três parcelas e chamaremos de R o valor da parcela que deverá ser a mesma (uniforme) para os três pagamentos.

$$S_1 = 10.000 \cdot (1 + 0,01)^1 - R = 10.100 - R.$$

Já para o segundo mês, teremos:

$$S_2 = (10.100 - R) \cdot (1 + 0,01)^1 - R$$

$$S_2 = (10.100 - R) \cdot 1,01 - R$$

$$S_2 = 10.201 - 1,01 \cdot R - R$$

$$S_2 = 10.201 - 2,01 \cdot R.$$

Para o terceiro mês, o saldo deverá ser zero, já que toda a dívida será quitada:

$$S_3 = (10.201 - 2,01R) \cdot (1 + 0,01)^1 - R = 0.$$

$$10.303,01 - 2,0301 \cdot R - R = 0.$$

$$3,0301 \cdot R = 10.303,01.$$

$$R \approx 3.400,22.$$

Portanto, a parcela paga em cada período deve ser de $R\$3.400,22$.

Agora, vamos conferir se o valor acima é de fato, a parcela que em três meses, à taxa de 1% ao mês, liquida o valor que deve ser pago por um bem de $R\$10.000,00$. Os cálculos estão esquematizados na tabela 4.

Período (Mês)	Valor corrigido (taxa de 1%)	Valor pago (Parcela)	Saldo (do período)
0 (Ato)	$0,00$	$0,00$	10.000,00
1	$10.100,00$	3.400,22	6.699,78
2	$6.766,78$	3.400,22	3.366,56
3	$3.400,22$	3.400,22	0,00

Tabela 4: Tabela resumo dos cálculos efetuados no exemplo 2.10.

Então, o valor encontrado é de fato, a parcela que procurávamos. Porém, este processo é demorado e, para um período maior, quase que inviável. Por isso, vamos tratar de encontrar uma equação que relacione a parcela, o valor principal, a taxa e o período envolvidos em um problema. Para isso, utilizaremos o conceito da progressão geométrica, mais especificamente, da soma de termos de uma progressão geométrica, dada em (2.7).

Proposição 2.8. *Em uma série de pagamentos uniformes e postecipados, sujeitos à capitalização composta, taxa i, período t e parcela R, temos que o valor final pago é dado por*

$$M_t = R \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}. \tag{2.12}$$

Demonstração. Seja

$$M_t = R + R \cdot (1+i) + R \cdot (1+i)^2 + R \cdot (1+i)^3 + \cdots + R \cdot (1+i)^{t-1}. \tag{2.13}$$

Multiplicando a equação (2.13) por $(1+i)$, obtemos

$$M_t \cdot (1+i) = R \cdot (1+i) + R \cdot (1+i)^2 + R \cdot (1+i)^3 + \cdots + R \cdot (1+i)^{t-1} + R \cdot (1+i)^t. \tag{2.14}$$

Subtraindo a equação (2.13) da equação (2.14), chegamos a

$$M_t \cdot (1+i) - M_t = R \cdot (1+i) + R \cdot (1+i)^2 + \cdots + R \cdot (1+i)^t - (R + R \cdot (1+i) + R \cdot (1+i)^2 + \cdots + R \cdot (1+i)^{t-1})$$

$$M_t \cdot i = R \cdot (1+i)^t - R.$$

$$M_t \cdot i = R \cdot [(1+i)^t - 1].$$

$$M_t = R \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}.$$

Podemos escrever a equação (2.12) com base no valor principal, substituindo o M_t da equação por $C \cdot (1+i)^t$ da equação (2.11):

$$C \cdot (1+i)^t = R \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}.$$

$$C = R \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i}. \tag{2.15}$$

□

Observemos ainda que, de acordo com (2.7), a série de pagamentos pode ser pensada como a soma dos t primeiros termos de uma PG com $a_1 = R$ e $q = 1 + i$.

Voltando ao exemplo 2.10, notamos que

$$10.000 = R \cdot \frac{(1+0,01)^3 - 1}{(1+0,01)^3 \cdot 0,01}.$$

$$10.000 = R \cdot \frac{0,030301}{0,01030301}.$$

$$R \approx 3.400,22.$$

Com tudo que vimos até aqui, podemos seguir com a leitura para o nosso objeto de estudo, que é a taxa média de juro. No próximo capítulo, falaremos sobre sua importância, bem como, demonstraremos suas relações matemáticas, utilizando os conhecimentos abordados neste capítulo.

3

A TAXA MÉDIA DE JURO E OS SISTEMAS DE CAPITALIZAÇÃO

No capítulo anterior, falamos sobre alguns dos conceitos de matemática discreta e matemática financeira que precisaremos saber para poder compreender um pouco mais sobre a taxa média de juro. Mas o que vem a ser essa tal taxa média? Quais são suas reais aplicações?

Neste capítulo, falaremos um pouco mais sobre os motivos que nos levaram à escolha deste tema, bem como suas aplicações no mercado financeiro e o porquê de aprofundar os estudos nesta temática. Além disso, trataremos de analisar a taxa média no sistema de capitalização simples e no sistema de capitalização composta. A fim de esclarecer um pouco mais sobre as aplicações, daremos alguns exemplos do mercado financeiro.

No nosso cotidiano, muitas vezes lidamos com situações financeiras, das quais se faz necessária a utilização de uma taxa de juro para corrigir o capital aplicado. Pode ser numa aplicação de capitais distintos na poupança, que será resgatada após um determinado período; um parcelamento que sofre correções regulares a taxas diferentes; uma série de depósitos que deverá sofrer alterações por conta das taxas aplicadas a fim de se estabelecer uma correção do valor de compra deste capital. Enfim, muitas situações podem exemplificar a aplicação da taxa média de juro e é preciso entendê-la para que possamos trabalhar com algumas das principais operações financeiras.

Para que possamos entender melhor a taxa média de juro, consideremos duas situações diferentes: a taxa média e o sistema de capitalização simples e a taxa média e o sistema de capitalização composta. Com fins didáticos, vamos iniciar com um exemplo e, em seguida, tratar de formalizar as equações em cada uma dessas situações. Ao final e com base no que foi abordado, proporemos um problema de aplicação para melhor compreensão do assunto.

3.1 TAXA MÉDIA E O SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Analisemos a seguinte situação.

Exemplo 3.1. Dispõe-se de $R\$1.000,00$ para ser aplicado por 6 meses, no sistema de capitalização simples, e pretende-se saber qual é o mais rentável ao final deste período, tomando-se por base as taxas aplicadas, na SELIC e no CDI (indexadores dos bancos), nos últimos seis meses anteriores à aplicação, conforme a tabela 5:

Mês	Taxa CDI	Taxa Selic
Mês 1	1,1773%	1,18%
Mês 2	1,1075%	1,11%
Mês 3	1,1075%	1,11%
Mês 4	1,1077%	1,11%
Mês 5	1,0552%	1,06%
Mês 6	1,1613%	1,17%

Tabela 5: Taxas CDI e Selic para o período, disponível em [2] e [3].

Solução:

Para analisar este problema, vamos chamar de investimento A aquele praticado sobre as taxas do CDI e chamaremos de investimento B aquele praticado sobre as taxas da Selic.

Primeiramente, vamos fazer as contas para cada um dos períodos referente ao investimento A.

Mês 1:

$$J_1 = 1.000 \cdot 0,011773 \cdot 1 = 11,773.$$

Mês 2:

$$J_2 = 1.000 \cdot 0,011075 \cdot 1 = 11,075.$$

Mês 3:

$$J_3 = 1.000 \cdot 0,011075 \cdot 1 = 11,075.$$

Mês 4:

$$J_4 = 1.000 \cdot 0,011077 \cdot 1 = 11,077.$$

Mês 5:

$$J_5 = 1.000 \cdot 0,010552 \cdot 1 = 10,552.$$

Mês 6:

$$J_6 = 1.000 \cdot 0,011613 \cdot 1 = 11,613.$$

A tabela 6 é um resumo dos rendimentos para o investimento A (referente à taxa CDI):

Mês	Taxa CDI	Rendimento (em reais)
1	1,1773%	11,773
2	1,1075%	11,075
3	1,1075%	11,075
4	1,1077%	11,077
5	1,0552%	10,552
6	1,1613%	11,613
Total		67,165

Tabela 6: Rendimentos do investimento A (taxa do CDI).

Portanto, investir R$1.000,00 rendeu a juro simples, um total de R$67,16, aproximadamente.

Agora, vamos fazer as contas para cada um dos períodos referente ao *investimento B*.

Mês 1:

$$J_1 = 1.000 \cdot 0,0118 \cdot 1 = 11,80.$$

Mês 2:

$$J_2 = 1.000 \cdot 0,0111 \cdot 1 = 11,10.$$

Mês 3:

$$J_3 = 1.000 \cdot 0,0111 \cdot 1 = 11,10.$$

Mês 4:

$$J_4 = 1.000 \cdot 0,0111 \cdot 1 = 11,10.$$

Mês 5:

$$J_5 = 1.000 \cdot 0,0106 \cdot 1 = 10,60.$$

Mês 6:

$$J_6 = 1.000 \cdot 0,0117 \cdot 1 = 11,70.$$

A tabela 7 é um resumo dos rendimentos para o investimento B (referente à taxa da Selic):

Mês	Taxa Selic	Rendimento (em reais)
1	1,18%	11,80
2	1,11%	11,10
3	1,11%	11,10
4	1,11%	11,10
5	1,06%	10,60
6	1,17%	11,70
Total		67,40

Tabela 7: Rendimentos do investimento B (taxas da Selic).

Portanto, investir R$1.000,00 rendeu a juro simples, um total de R$67,40.

Comparando-se os dois valores, percebemos que o investimento B foi mais rentável que o investimento A. Com base nestes dados, podemos determinar uma taxa média de rendimentos que, ao longo dos meses, rendeu o juro calculado mês a mês:

Para o investimento A temos, de acordo com (2.9):

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$67,165 = 1.000 \cdot i \cdot 6$$

$$67,165 = 6.000 \cdot i$$

$$i = \frac{67,165}{6.000}$$

$$i \approx 0,011194166.$$

Portanto, a taxa média de juro é de, aproximadamente, $1,119\%$ para o investimento no CDI.

Para o investimento B, temos por (2.9) que

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$67,40 = 1.000 \cdot i \cdot 6$$

$$67,40 = 6.000 \cdot i$$

$$i = \frac{67,40}{6.000}$$

$$i \approx 0,0112333333.$$

Assim, a taxa média de juro é de, aproximadamente, $1,123\%$ para o investimento na Selic, que faz deste, o mais rentável para o período dado.

Definição 3.1. Para $k = 1, 2, \ldots n$, seja i_k a taxa de juro aplicada a um capital C_k em um período t_k, no regime de capitalização simples. A taxa média de juro simples relativa a C_k, i_k e t_k, denotada por $\bar{i}$, é dada por

$$\bar{i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k \cdot i_k \cdot t_k}{\sum_{k=1}^{n} C_k \cdot t_k} \tag{3.1}$$

Em outras palavras, a taxa média de juro simples é aquela que ocupa o lugar de todas as taxas envolvidas na atualização dos valores, fazendo com que todo capital seja corrigido e, formando assim, o mesmo montante que seria acumulado ao utilizarmos as taxas que foram substituídas, segundo o regime de capitalização simples.

Voltando ao exemplo 3.1 e calculando diretamente $\bar{i}$ pela expressão (3.1), temos

- para o investimento A:

$$\bar{i} = \frac{1.000 \cdot 0,011773 \cdot 1 + 1.000 \cdot 0,011075 \cdot 1 + \cdots + 1.000 \cdot 0,010552 \cdot 1 + 1.000 \cdot 0,011613 \cdot 1}{1.000 \cdot 1 + 1.000 \cdot 1 + 1.000 \cdot 1 + 1.000 \cdot 1 + 1.000 \cdot 1 + 1.000 \cdot 1}$$

$$\bar{i} = \frac{11,773 + 11,075 + 11,075 + 11,077 + 10,552 + 11,613}{6.000}$$

$$\bar{i} = \frac{67,165}{6.000}$$

$$\bar{i} = 0,011194166$$

Logo, a taxa média de juro é de, aproximadamente 1,119% para o investimento no CDI.

- para o investimento B:

$$\bar{i} = \frac{1.000 \cdot 0,0118 \cdot 1 + 1.000 \cdot 0,0111 \cdot 1 + \cdots + 1.000 \cdot 0,0106 \cdot 1 + 1.000 \cdot 0,0117 \cdot 1}{1.000 \cdot 1 + 1.000 \cdot 1 + 1.000 \cdot 1 + 1.000 \cdot 1 + 1.000 \cdot 1 + 1.000 \cdot 1}$$

$$\bar{i} = \frac{11,80 + 11,10 + 11,10 + 11,10 + 10,60 + 11,70}{6.000}$$

$$\bar{i} = \frac{67,40}{6.000}$$

$$\bar{i} = 0,011233333$$

Logo, a taxa média de juro é de, aproximadamente 1,123% para o investimento na Selic.

Perceba que no sistema de capitalização simples, ainda que pequena, a variação entre os dois investimentos é percebida pela diferença entre as taxas médias de cada um deles, que chamamos aqui de A e B. No sistema de capitalização composta, esta diferença tende a crescer e ficar mais evidente. Vale lembrar que, no mercado financeiro, a grande maioria das movimentações são realizadas no sistema de capitalização composta que, como vimos no capítulo anterior, trata-se do cálculo do juro sobre o montante, já acrescido do juro do período anterior. Na próxima seção, falaremos um pouco mais sobre a taxa média de juro nesta modalidade de cálculo.

3.2 TAXA MÉDIA E O SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

Para analisar a taxa média de juro no sistema de capitalização composta, comecemos com um exemplo em que três capitais diferentes são aplicados sob taxas diferentes por períodos distintos.

Exemplo 3.2. Um investidor aplica $R\$58.000,00$ em três fundos de ações no mesmo prazo de 8 meses. No primeiro fundo, para o qual a taxa é de 3% ao mês, ele aplica $R\$30.000,00$; no segundo fundo, com a taxa de 5% ao mês, ele aplica $R\$8.000,00$. Finalmente, no terceiro fundo, com a taxa de 4% ao mês, ele aplica $R\$20.000,00$. Qual é a taxa média de juro para este investimento?

Solução:

Para analisar este problema, vamos tratar cada um dos investimentos por *investimento A*, *investimento B* e *investimento C*. Com fins didáticos, vamos construir uma tabela para visualizar os resultados:

Investimento	Aplicação (Valor Atual)	Taxa (%)	Período (meses)	Montante (Valor Futuro)	Juro
A	30.000,00	3	8	38.003,10	8.003,10
B	8.000,00	5	8	11.819,64	3.819,64
C	20.000,00	4	8	27.371,38	7.371,38
Total	58.000,00	—	8	77.194,12	19.194,12

Tabela 8: Resumo dos cálculos para os três investimentos do exemplo 3.2.

Pela equação (2.11), temos que

$$M = C \cdot (1+i)^t.$$

Isolando o termo C, que representa o capital empregado, teremos

$$C = \frac{M}{(1+i)^t}$$

Então, do nosso problema, considerando $\bar{i}$ como a taxa média, podemos encontrar $C_A = \dfrac{M_A}{(1+\bar{i})^{t_A}}$, $C_B = \dfrac{M_B}{(1+\bar{i})^{t_B}}$, $C_C = \dfrac{M_C}{(1+\bar{i})^{t_C}}$. Já o capital total investido pode ser determinado pela equação

$$C_{total} = C_A + C_B + C_C.$$

Portanto,

$$C_{total} = \frac{M_A}{(1+\bar{i})^{t_A}} + \frac{M_B}{(1+\bar{i})^{t_B}} + \frac{M_C}{(1+\bar{i})^{t_C}}.$$

Logo,

$$58.000 = \frac{38.003,10}{(1+\bar{i})^8} + \frac{11.819,64}{(1+\bar{i})^8} + \frac{27.371,38}{(1+\bar{i})^8} = \frac{77.194,12}{(1+\bar{i})^8}.$$

$$(1+\bar{i})^8 \approx 1,330933103$$

$$1+\bar{i} \approx 1,036381205$$

$$\bar{i} \approx 0,036381205.$$

Portanto, a taxa média de juro é de, aproximadamente, 3,64%.

Verifiquemos que a taxa média que encontramos corresponde ao montante final aplicado.

$$M_{total} = C_{total} \cdot (1+\bar{i})^t$$

$$M_{total} \approx 58.000,00 \cdot (1+0,0364)^8$$

$$M_{total} \approx 77.194,12.$$

Uma ressalva que devemos fazer aqui é que, para o exemplo que fizemos, o período é o mesmo para todos os investimentos, mas nem sempre isso precisa acontecer. Porém, ao usar prazos diferentes, em geral serão necessários recursos tecnológicos, como por exemplo, a calculadora financeira ou as planilhas eletrônicas. Então, vamos analisar um problema em que este fato pode ser verificado, ou seja, uma situação em que os períodos de aplicação são diferentes.

Exemplo 3.3. Determinar a taxa média de juro de uma aplicação de $R\$30.000,00$ feita da seguinte forma: $R\$12.000,00$, $R\$8.000,00$ e $R\$10.000,00$ aplicados às taxas de 1,5%, 1,0% e 2,0% ao mês, respectivamente, sendo o prazo da primeira aplicação 10 meses, da segunda 15 meses e da terceira 8 meses.

Solução:
Primeiramente, determinemos o montante que cada um destes capitais formou.

- Primeiro investimento: $M = 12.000 \cdot (1 + 0,015)^{10} = 13.926,49$.
- Segundo investimento: $M = 8.000 \cdot (1 + 0,010)^{15} = 9.287,75$.
- Terceiro investimento: $M = 10.000 \cdot (1 + 0,020)^{8} = 11.716,59$.

O que queremos encontrar, nada mais é que uma taxa única de juro que faça todos os montantes calculados no problema, quando descapitalizados, formar o capital inicial total aplicado, ou seja, $R\$30.000,00$. Observe a equação a seguir que representa matematicamente o que dissemos acima:

$$30.000,00 = \frac{11.716,59}{(1+\bar{i})^{8}} + \frac{13.926,49}{(1+\bar{i})^{10}} + \frac{9.287,75}{(1+\bar{i})^{15}}$$

Esta equação é inviável de ser resolvida algebricamente e, é neste ponto, que utilizaremos a calculadora financeira como recurso. As calculadoras financeiras são grandes aliadas nesse momento. O modelo da figura 1 pode ser encontrado para download no seu aparelho celular por meio de aplicativos.

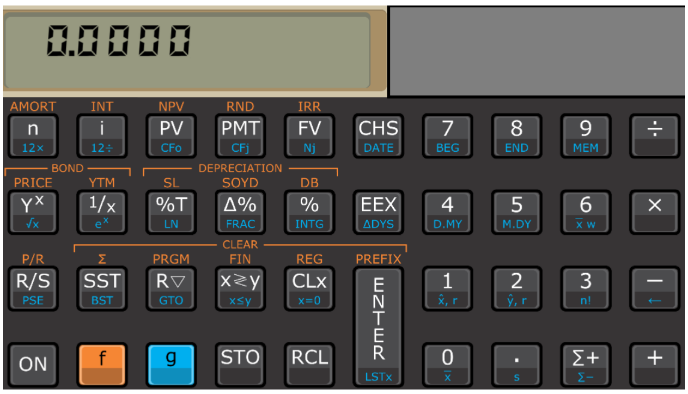

Figura 1: Calculadora financeira disponível para download na sua loja de aplicativos com o nome *Touch Fin Free*.

Para saber mais sobre as funções da calculadora financeira, você pode acessar o manual do usuário de uma das marcas que a comercializa, no site [13]. Um outro manual do usuário, também está disponível na internet no endereço [14], este de uma outra empresa que comercializa a calculadora financeira. Também na internet, é possível conhecer os recursos da calculadora financeira por meio de vídeo. Um deles está disponível no endereço [15].

Para nós, entre todas as suas funções, vamos destacar aquelas que nos ajudam a encontrar a taxa média. A tabela 9 descreve tais funções.

TECLA DA CALCULADORA	O QUE SIGINIFICA O COMANDO?
f	Ativa os comandos escritos acima da tecla
g	Ativa os comandos escritos abaixo da tecla
CLx	Apaga as memórias salvas na calculadora
CHS	Torna o valor negativo
CFo	Guarda o valor principal da operação
CFj	Guarda cada uma das operações em fila, $j = \{1, 2, 3, \cdots, \}$
Nj	Guarda a quantidade de vezes que o CFj se repete
IRR	Retorna a taxa média

Tabela 9: Sequência de comandos para o cálculo da taxa média.

É importante dizer que, diferentemente das calculadoras tradicionais, nesta deve-se primeiro digitar o valor e depois o botão que se deseja associar a este número. Por exemplo, caso queira guardar-se $R\$12.000,00$ como valor principal, deve-se digitar a sequência $12000 \rightarrow g \rightarrow CFo$.

Para obtermos a taxa média em uma operação, primeiro guardamos o valor principal, utilizando os comandos $Valor \rightarrow CHS \rightarrow g \rightarrow CFo$; em seguida, entrar com os valores de cada operação, com os comandos $Valor \rightarrow g \rightarrow CFj$. Se uma operação se repetir por mais de uma vez, você pode simplificar a escrita utilizando o comando Nj, por exemplo, você quer entrar com o valor $R\$3.000,00$ cinco vezes seguidas, então você pode utilizar a sequência $3000 \rightarrow g \rightarrow CFj \rightarrow 5 \rightarrow g \rightarrow Nj$. Depois de finalizar as entradas, você deve solicitar a taxa média utilizando a sequência $f \rightarrow IRR$. O valor aparecerá no visor.

No exemplo 3.3, o montante de $R\$13.926,49$ foi obtido para o período de 10 meses, o de $R\$9.287,75$ para o de 15 meses, enquanto que o de $R\$11.716,59$ para o de 8 meses. Na calculadora que escolhemos trabalhar, o período está associado à posição da fila em que o número será guardado. Como o menor período é o de 8 meses, então guardamos o valor 0 para as 7 primeiras posições e guardamos em seguida, isto é, na 8^a posição, o valor $R\$11.716,59$. Em ordem crescente, o próximo período considerado na aplicação é o de 10 meses, que deve assim ocupar a 10^a posição da fila. Como já estão guardados os valores até a 8^a posição, guardamos 0 para a 9^a posição e o valor de $R\$13.926,49$ na 10^a posição. O último período é o de 15 meses. Como já estão ocupadas as 10 primeiras posições, guardamos 0 por 4 posições na fila e $R\$9.287,75$ na 15^a posição. Finalmente, calculamos a taxa média de juro, como na tabela 10.

DIGITAR	TECLA DA CALCULADORA	O QUE SIGINIFICA O COMANDO?
	f + CLx	Apaga os resíduos da calculadora
30.000	CHS + g + CFo	Guarda o valor principal
0	g + CFj	Guarda o valor digitado em fila
7	g + Nj	Número de vezes que o valor acima se repetiu
11.716,59	g + CFj	Guarda o valor digitado em fila
0	g + CFj	Guarda o valor digitado em fila
13.926,49	g + CFj	Guarda o valor digitado em fila
0	g + CFj	Guarda o valor digitado em fila
4	g + Nj	Número de vezes que o valor acima se repetiu
9.287,75	g + CFj	Guarda o valor digitado em fila
	f + IRR	Retorna a taxa média de Juro

Tabela 10: Sequência de comandos para o cálculo da taxa média do exemplo 3.3.

Como resultado, temos a taxa média $\bar{i} = 1,4453\%$, aproximadamente. Repare que, ao tentar encontrar a taxa média usando o valor futuro, ou seja, o montante total de $R\$34.930,83$, o resultado obtido seria $\bar{i} = 1,4295\%$, com a equação

$$34.930,83 = 12.000,00 \cdot (1+\bar{i})^{10} + 8.000,00 \cdot (1+\bar{i})^{15} + 10.000,00 \cdot (1+\bar{i})^{8}$$

Porém, este resultado não pode ser considerado, pois os valores futuros, com referência em momentos distintos, não poderiam ser somados. Logo, o valor correto é sempre calculado quando escrevemos a equação com o capital inicial.

Definição 3.2. Para $k = 1,2,\dots n$, seja i_k a taxa de juro aplicada a um capital C_k em um período t_k, no regime de capitalização composta. A taxa média de juro composto relativa a C_k, i_k e t_k, denotada por $\bar{i}$, é dada por

$$\sum_{k=1}^{n} C_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k \cdot (1+i_k)^{t_k}}{(1+\bar{i})^{t_k}}. \tag{3.2}$$

Em outras palavras, a taxa média de juro composto é aquela que ocupa o lugar de todas as taxas envolvidas na atualização dos valores, fazendo com que todo capital seja corrigido e, formando assim, o mesmo montante que seria acumulado ao utilizarmos as taxas que foram substituídas, segundo o regime de capitalização composta.

Analisemos um novo exemplo, aplicando-se a equação (3.2).

Exemplo 3.4. Dois capitais iguais, no valor de R$ 6.000,00 serão aplicados em fundos de investimentos diferentes, que rendem 1% ao mês e 2,5% ao mês, durante 10 meses. Determine a taxa média de juro composto.

Solução:

$$6.000 + 6.000 = \frac{6.000 \cdot (1+0,01)^{10}}{(1+\bar{i})^{10}} + \frac{6.000 \cdot (1+0,025)^{10}}{(1+\bar{i})^{10}}$$

$$12.000 = \frac{6.000 \cdot 1,01^{10} + 6.000 \cdot 1,025^{10}}{(1+\bar{i})^{10}}$$

$$(1+\bar{i})^{10} \approx \frac{14.308,24}{12.000}$$

$$1+\bar{i} \approx 1,017748561$$

$$\bar{i} \approx 0,017748561.$$

Portanto, a taxa média de juro é de, aproximadamente, 1,77%.

No caso em que os períodos são distintos, a equação (3.2) não é fácil de ser resolvida algebricamente, tornando-se necessários algum recurso computacional e um método de aproximação adequado, como a interpolação, que consiste em encontrar valores por tentativa e erro, aproximando-se do resultado correto, de modo proporcional.

Analisemos um problema no qual usa-se a interpolação no cálculo da taxa média de juro.

Exemplo 3.5. Determinar a taxa média de juro correspondente a um empréstimo de $R\$1.000,00$ que deverá ser pago em três parcelas mensais, consecutivas e postecipadas, no valor de $R\$300,00$, $R\$500,00$ e $R\$400,00$.

Solução: A solução deste problema está em trazer todos os pagamentos para o presente, onde sabemos o valor do empréstimo:

$$1.000 = \frac{300}{(1+\bar{i})^1} + \frac{500}{(1+\bar{i})^2} + \frac{400}{(1+\bar{i})^3}.$$

Perceba que esta equação é difícil de ser resolvida algebricamente, então vamos utilizar a técnica da interpolação para encontrarmos uma aproximação para a taxa média $\bar{i}$. Escolhemos um valor inicial arbitrário para a taxa, por exemplo, 6%, e calculamos qual deverá ser o valor presente.

$$C = \frac{300}{(1+0,06)^1} + \frac{500}{(1+0,06)^2} + \frac{400}{(1+0,06)^3}$$

$$C \approx 1.063,86.$$

Como o valor presente é $R\$1.000,00$, a taxa $\bar{i}$ deve ser maior que 6%. Vejamos para 11%.

$$C = \frac{300}{(1+0,11)^1} + \frac{500}{(1+0,11)^2} + \frac{400}{(1+0,11)^3}$$

$$C = 968,56.$$

Assim, sabemos que a taxa média é um valor entre 6% e 11%. Com isso, passamos à técnica da interpolação, onde chamaremos de x a taxa média que gostaríamos de saber. Por meio de proporções, temos que

$$\frac{1.063,86 - 968,56}{1.000,00 - 968,56} = \frac{0,06 - 0,11}{x - 0,11}$$

$$\frac{95,30}{31,44} = \frac{-0,05}{x - 0,11}$$

$$x \approx 0,093504721$$

Portanto, $\bar{i} \approx 0,0935$ ou $9,35\%$, aproximadamente. O cálculo a seguir nos dá o valor do capital C caso $\bar{i}$ seja $0,0935$.

$$C = \frac{300}{(1+0,0935)^1} + \frac{500}{(1+0,0935)^2} + \frac{400}{(1+0,0935)^3}$$

$$C = 998,42$$

Embora C esteja próximo de $R\$1.000,00$, vamos proceder novamente com a interpolação para melhorar a aproximação, agora com as taxas de $9,35\%$ e 11% e seus respectivos montantes de $R\$998,42$ e $R\$968,56$.

$$\frac{998,42 - 968,56}{1.000,00 - 998,56} = \frac{0,0935 - 0,11}{x - 0,0935}$$

$$\frac{29,86}{1,44} = \frac{-0,0165}{x - 0,0935}$$

$$x - 0,0935 = \frac{-0,0165 \cdot 1,44}{29,86}$$

$$x = 0,0926474.$$

Calculemos C para $\bar{i} = 0,0926$.

$$C = \frac{300}{(1 + 0,0926)^1} + \frac{500}{(1 + 0,0926)^2} + \frac{400}{(1 + 0,0926)^3}$$

$$C = 1.000,09.$$

De acordo com os cálculos anteriores, vemos que a aproximação melhorou quando consideramos $\bar{i} = 0,0926$. Poderíamos continuar procedendo com as interpolações a fim de melhorar a aproximação com $C = 1.000$, mas $\bar{i} = 0,0926$ já é o suficiente para nossos propósitos.

Com a calculadora da figura 1, resolvemos o exemplo 3.5:

TECLA DA CALCULADORA	O QUE SIGINIFICA O COMANDO?
f + CLx	Apaga memórias anteriores salvas
1.000 + CHS + g + CFo	Guarda o valor principal como saída, ou seja, negativo
300 + g + CFj	Guarda o primeiro pagamento na primeira posição
500 + g + CFj	Guarda o segundo pagamento na segunda posição
400 + g + CFj	Guarda o terceiro pagamento na terceira posição
f + IRR	Pede o valor da taxa média que deverá aparecer no visor

Tabela 11: Sequência de comandos para o cálculo da taxa média do exemplo 3.5.

Com a sequência digitada, encontramos o valor que aparece na figura 2.

No próximo capítulo, vamos aproveitar todos os conteúdos que foram expostos até o momento a fim de criar uma sequência didática para que professores, ou futuros professores, possam tomar como base na preparação de suas aulas.

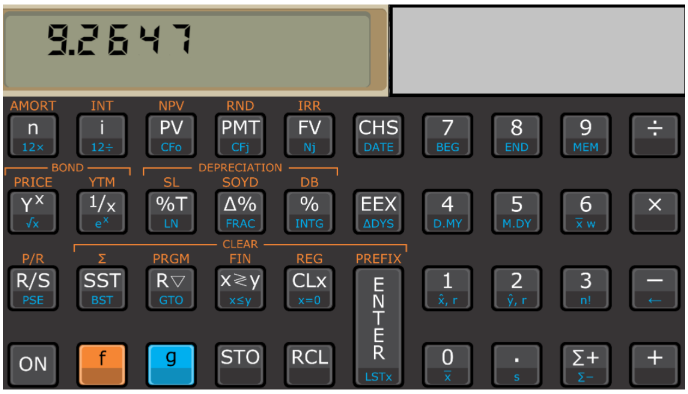

Figura 2: Imagem da calculadora financeira mostrando a taxa média de juro.

4

A TAXA MÉDIA E A EDUCAÇÃO BÁSICA E SUPERIOR: ALGUMAS APLICAÇÕES

Neste capítulo trataremos de identificar e evidenciar reais aplicações do tema proposto, ainda que inserido em outros temas, tanto para o ensino superior quanto para a educação básica. Podemos tratar da temática como o conteúdo a ser explicado, mas em alguns casos, é possível tratá-la em um projeto interdisciplinar ou em uma oficina de matemática.

Vamos dividir esta parte do estudo em duas etapas: uma delas voltada para a educação básica e a outra direcionada para a educação superior. Dentro de cada um destes seguimentos trataremos alguns problemas de aplicação e indicar possíveis ações que possam dispertar a atenção dos alunos, evidenciando a relevância do aprendizado para que os alunos possam se sentir envolvidos e motivados a aprender.

4.1 MOTIVOS PARA APRENDER TAXA MÉDIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Na educação básica, muitos são os momentos em que podemos tratar a educação financeira. Por exemplo, os anos iniciais do ensino fundamental, quando as crianças estão aprendendo sobre o sistema monetário brasileiro e a composição do dinheiro. Neste momento, é possível ensinar aos alunos, por meio de operações básicas, que uma certa quantia pode ser acrescida de valores por conta do pagamento em atraso, ou até mesmo sofrer um desconto por ser paga antes do prazo. Neste momento, a criança aprende sobre matemática financeira a fim de ir se familiarizando com alguns nomes técnicos desta área.

Em um outro momento do ciclo fundamental, já nos anos finais, podemos inserir algumas equações financeiras por meio de modelos matemáticos, no trabalho com juro simples, juro compostos e alguns pagamentos sucessivos. Analisemos uma situação-problema para este segmento de ensino.

Exemplo 4.1. Um filho recebe de seu pai a quantia de R$400,00 e deseja aplicá-la por um ano para obter uma quantia ainda maior. Para isso, há duas opções: aplicar o dinheiro em um fundo de capitalização simples, que rende 1,6% ao mês, ou num fundo de capitalização composta, que rende 1,5% ao mês. Para que o rendimento seja o maior possível, qual a opção que o filho deverá escolher e qual é a diferença entre os valores obtidos ao final dos 12 meses?

Solução:
Calculemos o montante em cada um dos sitemas de capitalização, utilizando as equações (2.10) e (2.11). Para a capitalização simples, temos:

$$M = 400 \cdot (1 + 0,016 \cdot 12) = 476,80.$$

Para a capitalização composta, temos:

$$M = 400 \cdot (1 + 0,015)^{12} = 478,25.$$

Portanto, o filho terá mais dinheiro, ao final dos doze meses, se aplicar o dinheiro no fundo de capitalização composta, sendo a diferença de $R\$1,45$.

Perceba que, neste tipo de problema, é interessante ressaltar aos alunos que, mesmo a uma taxa menor, a capitalização composta se sobressaiu em relação a capitalização simples.

Com base nestas discussões é interessante propor um problema em que os alunos consultem as taxas da poupança, por exemplo, nos últimos 12 meses e determinem uma taxa média para efetuar os cálculos. Nesta faixa etária, um problema que envolva apenas o cálculo da taxa média nos juro simples e a compare com a média aritmética simples das taxas já cumpre bem seu papel de inserir o aluno na discussão sobre rendimentos de fundos de capitalização, como é a poupança. Cálculos mais elaborados como a taxa média na capitalização composta podem ser propostos mais à frente durante o ensino médio, por exemplo. Tomemos uma nova situação:

Exemplo 4.2. Pretende-se aplicar $R\$400,00$ a juro simples em uma caderneta de poupança que trabalha com este sistema de capitalização, durante 6 meses e, $R\$500,00$

nos 6 meses seguintes. Para isso, consulta-se uma tabela com os rendimentos da poupança nos 12 meses anteriores à aplicação, que estão descritos na tabela 12.

Mês/Ano	Taxa (em Porcentagem)
1	0,5882%
2	0,5169%
3	0,6302%
4	0,6079%
5	0,6159%
6	0,6822%
7	0,7317%
8	0,6876%
9	0,6930%
10	0,6799%
11	0,6303%
12	0,7261%

Tabela 12: Rendimentos da poupança nos 12 meses anteriores à aplicação retirados de [9]

Com base nas taxas da tabela 12, pretende-se encontrar uma taxa média para saber quanto renderá a aplicação de $R\$400,00$ nos próximos 12 meses. Considerando-se a média $\bar{x}$ das taxas dadas na tabela 12 e a taxa média $\bar{i}$ dada por

$$\bar{i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k \cdot i_k \cdot t_k}{\sum_{k=1}^{n} C_k \cdot t_k},$$

produza uma outra tabela a fim de comparar os juros totais obtidos, primeiramente caso a aplicação tivesse ocorrido nos últimos 12 meses, em seguida tomando-se a média $\bar{x}$ das taxas e, finalmente, tomando-se a taxa média $\bar{i}$.

Solução:
A média das taxas dadas na tabela 12 é igual a

$$\bar{x} = \frac{0,5882 + 0,5169 + 0,6302 + \cdots + 0,6303 + 0,7261}{12} = \frac{7,7899}{12} = 0,006492,$$

e a taxa média, calculada a partir dos últimos 12 meses, é

$$\bar{i} = \frac{400 \cdot 0,005882 + 400 \cdot 0,005169 + \cdots + 400 \cdot 0,006822 + 500 \cdot 0,007317 + \cdots + 500 \cdot 0,007261}{400 \cdot 6 + 500 \cdot 6}$$

$$\bar{i} = \frac{35,31}{5.400} \approx 0,006539.$$

Na figura 3, resumimos todos estes resultados.

Período (mensal)	Capital	Taxa	Juro	Taxa média	Juro	Média	Juro
1	400	0,5882%	2,35	0,6539%	2,62	0,6492%	2,60
2	400	0,5169%	2,07	0,6539%	2,62	0,6492%	2,60
3	400	0,6302%	2,52	0,6539%	2,62	0,6492%	2,60
4	400	0,6079%	2,43	0,6539%	2,62	0,6492%	2,60
5	400	0,6159%	2,46	0,6539%	2,62	0,6492%	2,60
6	400	0,6822%	2,73	0,6539%	2,62	0,6492%	2,60
7	500	0,7317%	3,66	0,6539%	3,27	0,6492%	3,25
8	500	0,6876%	3,44	0,6539%	3,27	0,6492%	3,25
9	500	0,6930%	3,47	0,6539%	3,27	0,6492%	3,25
10	500	0,6799%	3,40	0,6539%	3,27	0,6492%	3,25
11	500	0,6303%	3,15	0,6539%	3,27	0,6492%	3,25
12	500	0,7261%	3,63	0,6539%	3,27	0,6492%	3,25
Total			35,31		35,31		35,05

Figura 3: Resumo dos cálculos para o exemplo 4.2.

Observe que, como esperado, a taxa média $\bar{i}$ produz o mesmo juro total que aquele produzido pelas taxas dos últimos 12 meses, enquanto que o mesmo não ocorre para $\bar{x}$. É importante destacar que taxa média de juro não é o mesmo que média de taxas.

Para os alunos do ensino médio é possível inserir um problema de taxa média de juro, no sistema de capitalização composta, com base nos problemas praticados em livros didáticos, não tão distantes de sua realidade. Por exemplo, uma situação que envolva descontos em financiamentos, como o problema a seguir.

Exemplo 4.3. Ao adquirir um imóvel na planta, um comprador se compromete a pagar 10 parcelas no valor de $R\$1.500,00$ fixas. Porém, caso queira pagar alguma destas parcelas antes da data, recebe um desconto que varia de acordo com a taxa aplicada pela poupança, no ano anterior, exatamente no mês em que o pagamento será efetuado e a quantidade de meses que o pagamento será adiantado, sob o regime de capitalização composta. Um destes clientes, após pagar 5 parcelas na data de vencimento, resolveu pagar as outras cinco de uma vez, sendo a 6ª na data correta e as outras quatro, adiantadas. As taxas aplicadas pela poupança, no ano anterior, nestes mesmos meses foram de $0,85\%$; $0,62\%$; $0,7\%$ e $0,65\%$, na ordem usual dos meses do ano. Nestas condições, determine o valor total pago por este cliente após todos os descontos e qual a taxa média de desconto aplicada nos últimos quatro pagamentos, levando-se em consideração o sistema de capitalização composta.

Solução:
Em geral, problemas de desconto se assemelham a problemas de juro, porém, o valor calculado não acrescenta ao capital e sim é descontado do capital. Dessa forma, a equação para desconto no sistema de capitalização composta é dada por

$$M_k = C \cdot (1 - i)^{t_k},$$

em que k denota o número de meses de adiantamento da parcela.
Calculamos a seguir os descontos concedidos nas 7ª, 8ª, 9ª e 10ª parcelas:

- 7ª Parcela:
$$M_{7^{\text{a}}} = 1.500 \cdot (1 - 0,0085)^1 = 1.487,25.$$
- 8ª Parcela:
$$M_{8^{\text{a}}} = 1.500 \cdot (1 - 0,0062)^2 = 1.481,46.$$
- 9ª Parcela:
$$M_{9^{\text{a}}} = 1.500 \cdot (1 - 0,007)^3 = 1.468,72.$$
- 10ª Parcela:
$$M_{10^{\text{a}}} = 1.500 \cdot (1 - 0,0065)^4 = 1.461,38.$$

Após os quatro descontos, os valores pagos foram de $R\$1.487,25$; $R\$1.481,46$; $R\$1.468,72$ e $R\$1.461,38$, além das outras seis parcelas no valor de $R\$1.500,00$ totalizando $R\$14.898,81$.

Agora, determinemos a taxa média de desconto:

$$14.898,81 = 1.500 \cdot 6 + 1.500 \cdot (1 - \bar{i}) + 1.500 \cdot (1 - \bar{i})^2 + 1.500 \cdot (1 - \bar{i})^3 + 1.500 \cdot (1 - \bar{i})^4$$

$$5.898,81 = 1.500 \cdot [(1 - \bar{i}) + (1 - \bar{i})^2 + (1 - \bar{i})^3 + (1 - \bar{i})^4]$$

$$3,93254 = (1 - \bar{i}) + (1 - \bar{i})^2 + (1 - \bar{i})^3 + (1 - \bar{i})^4$$

Com o auxílio da calculadora financeira, recurso discutido no capítulo 3, encontramos a taxa média $\bar{i} = 0,006789$ ou $0,6789\%$. É importante que os estudantes verifiquem que a taxa média encontrada produz o mesmo resultado. De fato,

$$14.898,81 \approx$$
$$1.500 \cdot 6 + 1.500 \cdot (1 - 0,0067) + 1.500 \cdot (1 - 0,0067)^2 + 1.500 \cdot (1 - 0,0067)^3 + 1.500 \cdot (1 - 0,0067)^4.$$

Nesta etapa, é possível propor problemas que envolvam financiamentos de veículos, por exemplo, ou aplicações em fundos de investimentos diferentes. Os alunos já reconhecem muitas das coisas que envolvem o mercado financeiro, mas não necessariamente tem propriedade e entendimento sobre elas. Por exemplo, muitos dos estudantes conhecem ou já ouviram falar de cartão de crédito, mas não tem amplo conhecimento sobre as formas de pagamento, os juros envolvidos no pagamento do valor mínimo, o crédito disponibilizado para cada cliente, entre outras informações.

4.2 MOTIVOS PARA APRENDER TAXA MÉDIA NA EDUCAÇÃO SUPERIOR

Para o ensino superior, problemas mais elaborados tendem a aparecer, envolvendo outras situações, como por exemplo a série de pagamentos uniformes e postecipados, muito praticada em operações de crédito que envolvem parcelas para o pagamento de algum bem ou valor. Neste momento, problemas que envolvam financiamentos de veículos, poupança, dívidas de cartão de crédito, entre outros, tendem a ser mais interessantes e relevantes aos alunos, já que, muitos deles conhecem ou já fazem uso dessas questões que permeiam a vida adulta e sua relação com o dinheiro.

Um problema interessante envolve a questão do financiamento de um automóvel que, por uma opção do comprador, terá o saldo do seu financiamento negociado com outra operadora financeira, com fins em diminuir o pagamento de juro. Neste tipo de problema, é possível verificar as habilidades dos alunos nos cálculos de juro composto e taxa média, mas também, provocar neste estudante a busca por melhores taxas no mercado na hora de optar por um financiamento e, mesmo que já contratado em uma financeira, perceber que é possível encontrar opções mais vantajosas e migrar seu saldo para ser quitado em uma outra instituição. Atualmente, isto pode ser feito e muitos bancos isentam a tarifa de abertura de crédito por conta do relacionamento (e vínculo) que criará com o *novo cliente*. Vamos analisar um problema deste tipo.

Exemplo 4.4. Ao comprar um veículo no valor de R$46.000,00 foi oferecida ao cliente uma taxa de financiamento de 2,5% ao mês, e prazo de 60 meses. Neste formato, não se fazia necessário qualquer quantia de entrada, ou seja, o valor total do veículo seria financiado sob tais condições. O cliente então aceitou adquirir o veículo contratando o financiamento que lhe foi apresentado, porém, após pagar 12 parcelas, verificou com o gerente de seu banco que era possível migrar o saldo devedor da sua dívida sem nenhum custo adicional para esta instituição bancária, com uma taxa mais atrativa, de 1,5% ao mês e um prazo de 36 meses. O cliente ficou muito satisfeito com as novas condições e resolveu fazer a migração do financiamento do seu veículo.

Com base nas informações acima, qual foi a economia que o cliente obteve com a troca e qual a taxa média de juro aplicada por toda a operação de crédito?

Solução:
Este problema envolve série de pagamentos uniformes e postecipados, ou seja, parcelas de mesmo valor com o primeiro vencimento após um período de contratação, assunto discutido no capítulo 2.

De acordo com a equação (2.15), se o cliente tivesse mantido o financiamento todo na mesma instituição financeira, a parcela paga seria de

$$46.000 = R \cdot \frac{(1+0,025)^{60} - 1}{(1+0,025)^{60} \cdot 0,025}.$$

$$46.000 \approx R \cdot 30,90865649$$

$$R \approx 1.488,26$$

Ou seja, o valor pago em cada uma das parcelas seria de $R\$1.488,26$ e, ao final dos 60 pagamentos, o montante total pago seria de $R\$89.295,60$. Mas, sabemos que apenas 12 parcelas foram pagas e o saldo remanescente foi transferido para a outra instituição financeira. Até a 12ª parcela, o valor pode ser calculado descapitalizando cada uma das parcelas pagas, conforme a tabela a seguir:

Ou seja, dos $R\$46.000,00$ iniciais, em 12 meses, $R\$4.666,43$ já foram pagos, resultando em um saldo de $R\$41.333,57$, que foi transferido para a outra instituição financeira com taxas mais baixas. Neste novo cenário, havia ainda 36 parcelas à taxa de $1,5\%$ ao mês. Por (2.15), calculamos o valor da nova parcela no financiamento atual:

$$41.333,57 = R \cdot \frac{(1+0,015)^{36} - 1}{(1+0,015)^{36} \cdot 0,015}$$

$$R \approx 1.494,31.$$

Ou seja, o valor da nova parcela é de $R\$1.494,31$. Com este valor de parcelas, o valor total pago na financeira atual é de

Mês	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Parcela
0	R$ 46.000,00			
1	R$ 45.661,74	-R$ 338,26	R$ 1.150,00	-R$ 1.488,26
2	R$ 45.315,03	-R$ 346,71	R$ 1.141,54	-R$ 1.488,26
3	R$ 44.959,65	-R$ 355,38	R$ 1.132,88	-R$ 1.488,26
4	R$ 44.595,39	-R$ 364,26	R$ 1.123,99	-R$ 1.488,26
5	R$ 44.222,01	-R$ 373,37	R$ 1.114,88	-R$ 1.488,26
6	R$ 43.839,31	-R$ 382,71	R$ 1.105,55	-R$ 1.488,26
7	R$ 43.447,03	-R$ 392,27	R$ 1.095,98	-R$ 1.488,26
8	R$ 43.044,95	-R$ 402,08	R$ 1.086,18	-R$ 1.488,26
9	R$ 42.632,82	-R$ 412,13	R$ 1.076,12	-R$ 1.488,26
10	R$ 42.210,39	-R$ 422,44	R$ 1.065,82	-R$ 1.488,26
11	R$ 41.777,39	-R$ 433,00	R$ 1.055,26	-R$ 1.488,26
12	R$ 41.333,57	-R$ 443,82	R$ 1.044,43	-R$ 1.488,26

Figura 4: Descapitalização das parcelas pagas na primeira instituição financeira

$$M = 1.494,31 \cdot 36 \approx 53.795,16.$$

Portanto, ao transferir a dívida, o cliente pagou ao final dos 36 meses o valor de $R\$53.795,16$ que, somado aos $R\$17.859,12$ resulta em $R\$71.654,28$. É possível então perceber que houve uma economia total de $R\$17.641,32$ ao ser feita a troca do plano de financiamento.

Para calcularmos a taxa média de juro nesta operação, devemos levar em consideração que 12 parcelas de $R\$1.488,26$ foram pagas à taxa de $\bar{i}$ e que 36 parcelas no valor de $R\$1.494,31$ foram pagas à esta mesma taxa $\bar{i}$. Com o auxílio da calculadora financeira, encontramos o valor de $1,9755\%$, aproximadamente, para a taxa média de juro nesta operação.

Neste momento, é importante solicitar que o aluno verifique a razoabilidade do resultado encontrado para $\bar{i}$, pois

$$46.000,00 = \tfrac{1.488,26}{1,019755^1} + \tfrac{1.488,26}{1,019755^2} + \cdots + \tfrac{1.488,26}{1,019755^{12}} + \tfrac{1.494,31}{1,019755^{13}} + \tfrac{1.494,31}{1,019755^{14}} + \cdots + \tfrac{1.494,31}{1,019755^{48}}$$

5

CONCLUSÃO

Quando pensamos em cidadãos autônomos e protagonistas de sua própria existência, devemos esperar que em um mundo rodeado de informações financeiras é de extrema importância que saibamos interpretá-las. É preciso entender como se comporta um financiamento de veículos e como as taxas influenciam no valor pago. Observar que no mercado financeiro há outras opções e que, com negociações, é possível encontrar planos melhores. Precisamos entender que quanto mais conhecimento temos sobre um assunto, melhor é a forma com a qual lidamos com ele e, uma educação transformadora tende a criar cidadãos menos endividados e capazes de gerir as suas próprias finanças. Foi com este intuito que este trabalho pretendeu provocar nos professores e futuros professores um olhar diferenciado para a matemática financeira e, mais especificamente, para a taxa média de juro.

Na dissertação, o caráter foi mais prático, sendo que tomamos como orientador a construção de problemas que esclarecessem a inserção do tema e a maneira de trabalhá-lo, sem perder de vista o rigor matemático, mas adequando-o a cada etapa da vida escolar do aluno.

BIBLIOGRAFIA

[1] **BRASIL. MEC. SEF.** Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio. Brasília, 1998.

[2] CDI, PORTAL DAS FINANÇAS. **Taxa de Juros CDI**. Disponível em: <http://www.portaldefinancas.com/cdi1415.htm>. Acesso em: 06 de dez. 2016.

[3] SELIC, PORTAL DAS FINANÇAS. **Taxa de Juros Selic**. Disponível em: <http://www.portaldefinancas.com/cdi1415.htm>. Acesso em: 06 de dez. 2016.

[4] DANTE, Luiz Roberto; Matemática, volume único - São Paulo: Editora Ática, 1ª ed.,2005.

[5] EXAME, Revista. **Com Juro recorde, dívida dos brasileiros no rotativo do cartão de crédito dispara**. Disponível em: <http://exame.abril.com.br/economia/com-juro-recorde-divida-dos-brasileiros-no-rotativo-do-cartao-de-credito-dispara/>. Acesso em: 21 de nov. 2016.

[6] IPARDES. (Brasil). **Rendimentos da Caderneta de Poupança - Brasil - Janeiro 2007 à Fevereiro 2016**. Disponível em: <http://www.ipardes.gov.br/pdf/indices/poupanca.pdf>. Acesso em: 22 mar. 2016.

[7] MACHADO, Antonio dos Santos; Matemática na escola do segundo grau, volume dois - São Paulo: Editora Atual, 1996.

[8] MILIES, César Polcino; COELHO, Sônia Pitta. Números: **Uma introdução à matemática**.São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

[9] POUPANÇA, PORTAL BRASIL. **Cadernet de Poupança: Índices Mensais**. Disponível em: <http://www.portalbrasil.net/poupanca_mensal.htm>. Acesso em: 06 de dez. 2016.

[10] SÃO PAULO. MARIA INêS FINI. (Ed.). **Currículo do Estado de São Paulo**:

Matemática e suas Tecnologias. São Paulo: Atual, 2011. Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>. Acesso em: 08 mar. 2016.

[11] SHOKRANIAN, Salahoddin; SOARES, Marcus; GODINHO, Hemar. Teoria do Números - Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2ª ed.,1999.

[12] SOBRINHO, José Dutra Vieira; Matemática financeira - São Paulo: Editora Atlas, 7ª ed.,2000.

[13] HP. **Guia do usuário: HP12C Calculadora Financeira**. Disponível em: <http://h10032.www1.hp.com/ctg/Manual/bpia5239.pdf>. Acesso em: 02 de abril. 2017.

[14] PROCALC. **Manual Calculadora Financeira**. Disponível em: <http://chtech.com.br/dowlnoad/67/FN1200C.pdf>. Acesso em: 02 de abril. 2017.

[15] YOUTUBE. **Curso rápido da HP-12C**. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=3fnZje8a9z4>. Acesso em: 02 de abril. 2017.