Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Relação entre o Máximo Divisor Comum, o Mínimo Múltiplo Comum e o Diagrama de Venn

Paula Daniele Borges dos Santos

Goiânia

2017

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Paula Daniele Borges dos Santos.

Título do trabalho: Relação entre o Máximo Divisor Comum, o Mínimo Múltiplo Comum e o Diagrama de Venn.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Paula Daniele Borges dos Santos
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 10 / 04 / 2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Paula Daniele Borges dos Santos

Relação entre o Máximo Divisor Comum, o Mínimo Múltiplo Comum e o Diagrama de Venn

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientadora: Profa. Dra. Thaynara Arielly de Lima

Goiânia

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Santos, Paula Daniele Borges dos
Relação entre o Máximo Divisor Comum, o Mínimo Múltiplo Comum e o Diagrama de Venn [manuscrito] / Paula Daniele Borges dos Santos. - 2017.
83 f.: il.

Orientador: Prof. Thaynara Arielly de Lima.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Máximo Divisor Comum. 2. Mínimo Múltiplo Comum. 3. Diagrama de Venn. I. Lima, Thaynara Arielly de, orient. II. Título.

CDU 51

Paula Daniele Borges dos Santos

"Relação entre o Máximo Divisor Comum, o Mínimo Múltiplo Comum e o Diagrama de Venn"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 21 de março de 2017, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Thaynara A. de Lima

Prof^{a}. Dr^{a}. Thaynara Arielly de Lima
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Mário José de Souza

Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Flávio Raimundo de Souza

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro Externo – IFG/GOIÂNIA

Universidade Federal de Goiás-UFG
Instituto de Matemática e Estatística-IME
Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

UFG

PROFMAT

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso da aluna Paula Daniele Borges dos Santos – Aos vinte e um dias do mês de março do ano de dois mil e dezessete (21/03/2017), às 16:30 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof.ª. Drª. Thaynara Arielly de Lima – Orientadora; Prof. Dr. Mário José de Souza e Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"Relação entre o Máximo Divisor Comum, o Mínimo Múltiplo Comum e o Diagrama de Venn"**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Paula Daniele Borges dos Santos discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela Presidente da banca, Prof.ª. Drª. Thaynara Arielly de Lima , que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida a autora do TCC que, em 30 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do IME da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 17:30 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Sonia Maria de Oliveira, secretária do PROFMAT/UFG, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Thaynara A. de Lima
Prof.ª. Drª. Thaynara Arielly de Lima
Presidente – IME/UFG

Prof. Dr. Mário José de Souza
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro – IFG/GOIÂNIA

Paula Daniele Borges dos Santos graduou-se em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás, em 2013, durante a graduação foi bolsista da CAPES pelo projeto PIBID.

Dedico este trabalho a todos os professores de matemática que buscam por novos métodos de ensino, afinal as dificuldades vão surgir, os obstáculos estão presentes, mas precisamos persistir e nunca desistir, pois conseguir acertar é algo gratificante.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, Autor da Vida, Luz das Nações, que a todo momento está comigo me ajudando a ser forte e possibilitando que eu amplie meus limites; ser paciente, me ajudando a controlar minha ansiedade; ser sábia, me permitindo cada vez mais atenção de pensamentos, atos e palavras; ser compreensiva, mesmo quando tudo parece tão injusto e escuro; enfim, a Ele agradeço por me trazer a cada dia o equilíbrio que preciso para seguir meu caminho.

Agradeço a minha mãe, Cleonice, e ao meu noivo, Marcus Vinícius, que foram fundamentais na minha vida durante o mestrado. Ambos são anjos que Deus colocou no meu caminho para estarem comigo me ajudando a não desistir. Estiveram comigo mesmo nos momentos de estresse, de fraqueza, me incentivando e sempre me fazendo sentir capaz.

Agradeço a meu pai, Joel, e a meus irmãos, Paulo Henrique e Danilo, que também estão sempre acreditando no meu potencial e me encorajando para melhora pessoal e profissional.

À minha avó, Ordália, agradeço pelas orações e por sempre me ensinar a grandiosidade de Deus, me fazendo ter fé mesmo quando não acredito que eu posso.

A todos da turma PROFMAT 2015, agradeço pela união, pelo companheirismo e por todo suporte no decorrer desses dois anos de estudo.

Agradeço a minha professora e orientadora da graduação, Profa. Dra. Vanda Domingos Vieira, que mesmo após o término da licenciatura continua me incentivando e ajudando.

À minha orientadora do mestrado, Professora Dra. Thaynara Arielly de Lima, agradeço por ter aceitado a tarefa de me orientar, me proporcionando crescimento pessoal e profissional.

Ao coordenador PROFMAT/UFG, Professor Dr. Mário José de Souza, agradeço pela atenção e pelo apoio. Por abster-se de um tempo para me ajudar na escolha do meu tema e na escrita do pré-projeto do meu trabalho.

À FAPEG, agradeço pelo suporte financeiro neste último ano de mestrado, o que me ajudou a dedicar-me exclusivamente a este trabalho.

Enfim, agradeço a todos os anjos que Deus colocou no meu caminho trazendo palavras de apoio que me deram força para concluir esta meta.

Resumo

O presente trabalho pretende mostrar uma abordagem ilustrativa para se calcular e entender Máximo Dividor Comum e Mínimo Múltiplo Comum, buscando uma maior assimilação e concretização da aprendizagem desse conteúdo. Esta metodologia é apresentada numa ordem cronológica seguindo a evolução dos conceitos matemáticos. Logo, este texto, visando produzir uma abordagem significativa do assunto, busca expor de forma simples o que vem a ser os Números Primos segundo a Teoria dos Números e Diagrama de Venn segundo a Teoria dos Conjuntos, para que assim se consiga visualizar e obter a Relação entre Máximo Divisor Comum, Mínimo Múltiplo Comum e o Diagrama de Venn.

Palavras-chave

Máximo Divisor Comum, Mínimo Múltiplo Comum, Diagrama de Venn.

Abstract

The present work intends to show an illustrative approach to calculate and understand Greater Common Divisor and Least Common Multiple, seeking a greater assimilation and concretization of the learning of this content. This methodology is presented in a chromological order following the evolution of mathematical concepts. Therefore, this text, aiming to produce a meaningful approach of the subject, seeks to expose in a simple way what comes to be the Prime Numbers according to Numbers Theory and Venn Diagram according to the Set Theory, in order to visualize and obtain the Relation between Greater Common Divisor, Least Common Multiple, and Venn Diagram.

Keywords

Greater Common Divisor, Least Common Multiple, Venn Diagram.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A Matemática é uma ciência que teve sua origem a partir da necessidade da vida cotidiana. Desde os primórdios, o ser humano busca meios para facilitar a vida criando métodos para contagem, o sistema de numeração, e mecanismos para operar esses números.

À medida que se desenvolviam, os conhecimentos matemáticos foram cada vez mais exibindo algumas características próprias como abstração, raciocínio lógico e caráter irrefutável. Um bom matemático, ou um mero estudante que cursa uma disciplina de Matemática, necessita de um sistema de abstração para que, a partir de análises e cálculos, consiga demonstrar afirmações que vão surgindo. Precisa ter um raciocínio lógico para saber olhar as demonstrações e fazer analogias concretas e presentes na realidade. E por último, mas não menos importante, a Matemática possui um caráter irrefutável, pois apesar de abstrata, os resultados nela encontrados têm base no mundo real; como prova disso utilizamos esta ciência para aplicar em outras como a Física, a Química, a Medicina, etc.

Sendo assim, a importância da Matemática é algo real e está presente na realidade do aluno. Contudo muitas são as dificuldades encontradas no decorrer dos estudos.

Já nas primeiras séries do Ensino Fundamental o professor querendo um entendimento mais rápido dos alunos, ou mesmo buscando facilitar o processo de aprendizagem, acaba por ensinar Matemática sem explicitar a origem e as finalidades dos conceitos. Logo esse aluno entende que a Matemática serve apenas para contar, e acaba por desconhecer o real potencial desta ciência em aplicações, resoluções de problemas, raciocínio lógico e as mais diversas aplicabilidades.

No ensino da Matemática são visíveis os momentos de dificuldade, obstáculos e erro. Todos erramos quando estudamos, ou mesmo quando ensinamos, erramos até mesmo tentando acertar. Porém, seja no estudo ou seja no ensino, quando se trata da Matemática é preciso uma atitude especial, não basta conhecer é preciso criar.

É diante desta atitude especial, diante deste criar algo que faça a diferença que surgiu o assunto deste trabalho propriamente dito: Relação entre o Máximo Divisor Comum (MDC), o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e o Diagrama de Venn.

Querer ensinar Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum para alunos de 6º ano, os quais precisam lidar com esse conteúdo de forma a aplicá-lo em situações problemas não é algo fácil. Ensinar é um desafio, principalmente quando o assunto é pré-requisito para tantos outros que virão.

Trabalhar com este conteúdo e ver os alunos efetuar eficientemente o MDC e o MMC de dois ou mais números é comum. Crianças aprendem as coisas rápido, principalmente se o procedimento a ser seguido for passivo, isto é, apenas de repetição. Agora, colocar uma determinada situação problema, que envolva interpretação, números, operações básicas, MDC e MMC, pode gerar confusões para alguns, ou para vários dos alunos.

Aplicar uma situação problema pode trazer indagações do tipo: "Que conta preciso fazer?", "MDC é aquele que eu fatoro os números até encontrar o número 1 ou é aquele que eu só divido quando os dois números puderem dividir?", e assim por diante.

Essa dificuldade para diferenciar qual cálculo fazer em uma dada situação problema surge por que não conseguiram compreender o motivo, a ideia, isto é, a fundamentação de tais procedimentos matemáticos.

É diante desta situação, vendo a dificuldade de alguns alunos por não conseguirem compreender a lógica de tais procedimentos matemáticos que surgiu a necessidade de se criar um mecanismo, uma maneira de abordar este conteúdo de maneira menos mecanizada e mais visual.

Na busca por soluções, analisando os conteúdos do Ensino Médio percebe-se que Conjuntos Numéricos são estudados no 1º ano do Ensino Médio, abordado pelos livros didáticos com uma linguagem visual, com Diagramas de Venn, de forma tão diferente da abordada no Ensino Fundamental que até parece um conteúdo nunca visto antes, como algo a parte, sem nenhuma ligação.

O aluno começa o Ensino Médio com o conteúdo de conjuntos como se aquele momento da aprendizagem não dependesse dos conteúdos antes aprendidos.

Mas, será que realmente não existe uma ligação? Será que não é possível facilitar o ensino do aluno do 6º ano colocando MDC e MMC com uma abordagem visual de conjuntos também?

Como ensinar a Matemática? Como motivar o aluno? Como ensiná-lo a analisar este procedimento? Como torná-lo ativo sem precisar apenas mostrar fórmulas prontas para que ele passivamente reproduza e repita até decorar?

Com o intuito de mostrar uma abordagem ilustrativa, isto é, com o objetivo de relacionar MDC, MMC e o Diagrama de Venn é que surge a proposta desta dissertação.

Buscando relacionar esses conteúdos a partir de uma base formal Matemática vamos estruturar o presente trabalho seguindo uma cronologia dos assuntos; sendo assim, antes de falar em MDC ou MMC precisamos do conceito de divisibilidade. Logo, o segundo capítulo do trabalho é *Conceitos e Resultados Preliminares*. Neste capítulo relembramos os números inteiros e suas principais propriedades; abordamos os conceitos de divisibilidade, Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e, por fim, definimos números primos e apresentamos resultados clássicos acerca de tais números.

Apesar do principal objetivo do trabalho ser apresentar uma maneira visual de calcular o Máximo Divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum de dois ou mais números, a fim de que o texto esteja auto-contido, no Capítulo 3 abordamos as maneiras clássicas (que, em geral, são trazidas nos livros didáticos) de se efetuar tais cálculos. Apresentamos neste capítulo como encontrar o MDC e o MMC por meio da divisão euclidiana e por meio de fatoração.

No Capítulo 4 apresentamos a ideia de conjuntos e alguns conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos. Em seguida, abordamos o diagrama de Venn e algumas de suas aplicações.

Depois de desenvolvido todo o aparato teórico necessário, no Capítulo 5, descrevemos como se pode relacionar os cálculos de MDC e MMC com o diagrama de Venn.

Por fim, para ilustrar a aplicabilidade dos tópicos tratados nos capítulos anteriores, tratamos no Capítulo 6 sobre *Aplicações em Situações Problemas*.

2 Conceitos e Resultados Preliminares

Ao falarmos de teoria dos números estamos nos referindo ao ramo da matemática que se dedica aos estudos dos números em geral, muitas vezes dando ênfase e se aprofundando nas propriedades dos números inteiros.

Nossos estudos sobre a teoria dos números, se restringe a algumas propriedades elementares que caracterizam a estrutura algébrica dos números inteiros, pois ao nos adentrar a esse universo temos um caminho que nos dá uma base importante, para conseguirmos com mais facilidade entender os conceitos que são propostos adiante.

2.1 Números Inteiros

Relembramos, brevemente neste tópico, quem são os números inteiros e quais são as suas propriedades.

O conjunto dos números inteiros é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$, determinado pelo conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

A partir deste conjunto podemos obter vários subconjuntos, citamos alguns deles que são importantes no decorrer deste trabalho.

- Conjunto dos números inteiros não nulos: são os números inteiros excluindo o zero, este subconjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}^*$ e determinado pelo conjunto:

$$\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\};$$

- Conjunto dos números inteiros não positivos: são os números inteiros negativos incluindo o zero, este subconjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}_-$ e determinado pelo conjunto:

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\};$$

- Conjunto dos números inteiros não positivos e não nulos (ou conjunto dos inteiros negativos): são os inteiros do conjunto $\mathbb{Z}_-$ excluindo o zero, este subconjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}^*_-$ e determinado pelo conjunto:

$$\mathbb{Z}^*_- = \{..., -3, -2, -1\};$$

- Conjunto dos números inteiros não negativos: são os inteiros positivos incluindo o zero, este subconjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}_+$ e determinado pelo conjunto:
$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\};$$

- Conjunto dos números inteiros não negativos e não nulos (ou conjunto dos inteiros positivos): são os inteiros do conjunto $\mathbb{Z}_+$ excluindo o zero, este subconjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}_+^*$ e determinado pelo conjunto:
$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, ...\}.$$

Pode-se definir duas operações binárias no conjunto $\mathbb{Z}$:

- Adição $(+)$
$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \longmapsto a + b$$

- Multiplicação $(\cdot)$
$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \longmapsto a \cdot b$$

Para obtermos as características do conjunto dos números inteiros necessitamos saber as propriedades das operações de adição e multiplicação.

Propriedades: Quaisquer que sejam os elementos a, b e c pertencentes $(\in)$ aos inteiros $\mathbb{Z}$, temos que:

(A_i) Propriedade Comutativa da Adição : $a + b = b + a$;

(A_{ii}) Propriedade Associativa da Adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

(A_{iii}) Propriedade da Existência do Elemento Neutro da Adição : o número zero pertence ao conjunto dos inteiros, e ele é tal que, $a + 0 = 0 + a = a$;

(A_{iv}) Propriedade da Existência do Elemento Simétrico da Adição : para todo a não-nulo pertencente aos inteiros, existe $-a$ também elemento do conjunto dos inteiros, tal que, $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Este elemento $-a$ é chamado simétrico de a;

(M_i) Propriedade Comutativa da Multiplicação : $a \cdot b = b \cdot a$;

(M_{ii}) Propriedade Associativa da Multiplicação: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

(M_{iii}) Propriedade da Existência do Elemento Neutro da Multiplicação : o número 1 pertence ao conjunto dos inteiros e ele é tal que, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

(AM) Propriedade Distributiva da Multiplicação com relação à adição:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

A seguir, enunciaremos o Princípio da Boa Ordenação. Tal princípio é fundamental quando tratamos de subconjuntos dos inteiros não negativos e será fortemente utilizado em demonstrações futuras neste trabalho.

Teorema 2.1 (Princípio da Boa Ordenação (PBO)). *Todo subconjunto não vazio A de $\mathbb{Z}_+$ possui um menor elemento, isto é, existe $x_0 \in A$ tal que $x_0 \leq x$ qualquer que seja $x \in A$.*

Demonstração. Considere A um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}_+$. Suponha, por contradição, que A não possui um menor elemento. Seja B o complementar de A em $\mathbb{Z}_+$. Nosso objetivo será mostrar que $B = \mathbb{Z}_+$, o que implicaria que o conjunto A é vazio, e, portanto, geraria um absurdo.
Defina o conjunto $I_n = \{k \in \mathbb{Z}_+; k \leq n\}$ e considere a sentença aberta $p(n) = I_n \subset B$. A demonstração de que $B = \mathbb{Z}_+$ será por indução sobre n.
Base de Indução: Se $n = 0$, então $I_0 = \{0\} \subset B$, pois se 0 pertencesse ao conjunto A, 0 seria um menor elemento de A. Logo, p(0) é verdadeira.
Passo Indutivo: Suponha que $p(n)$ seja verdade; ou seja, $I_n \subset B$. Se $n + 1$ pertencer a A então $n + 1$ deve ser um menor elemento de A, já que $I_n = \{k \in \mathbb{Z}_+; k \leq n\} \subset B$. Como supomos que A não possui um menor elemento, segue que $n + 1 \in B$. Portanto, $I_{n+1} = I_n \cup \{n + 1\} \subset B$. Logo, qualquer que seja n, $I_n \subset B$. Portanto, $\mathbb{Z}_+ \subset B \subset \mathbb{Z}_+$ e, consequentemente $B = \mathbb{Z}_+$. Segue que A é vazio. Absurdo! Portanto, A possui um menor elemento. $\square$

No que segue, demonstraremos alguns resultados acerca dos números inteiros.

As propriedades citadas anteriormente, servirão como base para provar tais afirmações.

Todas as demonstrações contidas nas próximas seções e subseções serão baseadas ou retiradas das referências: [1], [2], [4], [5] e [20].

2.2 Divisibilidade

Neste tópico, abordaremos o conceito de divisibilidade e as principais propriedades que advém desta definição. O conceito de divisibilidade é importante para compreendermos o que são números primos, assunto que será tratado na Seção 2.4.

Definição 2.2 (Divisibilidade)**.** *Sejam os elementos a e $b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$. Se existir um elemento $d \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot d$, então dizemos que a divide b e simbolizamos $a \mid b$. É correto dizer também que: a é um divisor de b, ou ainda b é múltiplo de a, ou por último b é divisível por a. Se acaso quisermos negar a afirmação acima, isto é, falar que a não divide b, basta escrevermos $a \nmid b$.*

Exemplo 2.3. *Sabendo que os números* 2, 5 *e* 10 *são inteiros, temos:*

a) $2 \mid 10$, *pois* $10 = 2 \cdot 5$.
b) $5 \mid 10$, *pois* $10 = 5 \cdot 2$.
c) $2 \nmid 5$, *pois não existe* ($\nexists$) *um número inteiro d, tal que,* $5 = 2 \cdot d$.

Para obtermos as características da divisibilidade do conjunto dos números inteiros precisamos saber e entender as propriedades.

Propriedades: Para quaisquer a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, temos que:

(D_i) $a \mid 0$, pois $0 = a \cdot 0$;

(D_{ii}) $a \mid a$, pois $a = a \cdot 1$;

(D_{iii}) Se $a \mid b$ e $b \mid c$ então $a \mid c$, pois se $a \mid b$ e $b \mid c$, existem elementos f e g de $\mathbb{Z}$ tais que $b = a \cdot f$ e $c = b \cdot g$. Logo, $c = (a \cdot f) \cdot g$, e portanto, $a \mid c$;

(D_{iv}) Se $a \mid b$ e $c \mid d$ então $a \cdot c \mid b \cdot d$, pois se $a \mid b$ e $c \mid d$, existem elementos f e g de $\mathbb{Z}$ tais que $b = a \cdot f$ e $d = c \cdot g$.
Logo, $b \cdot d = (a \cdot f) \cdot (c \cdot g) = (a \cdot c) \cdot (f \cdot g)$, portanto, $a \cdot c \mid b \cdot d$;

(D_v) Se $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid (b + c)$, pois se $a \mid b$ e $a \mid c$, existem elementos f e g de $\mathbb{Z}$ tais que $b = a \cdot f$ e $c = a \cdot g$.
Logo, $b + c = a \cdot f + a \cdot g = a \cdot (f + g)$; portanto, $a|(b + c)$;

(D_{vi}) Se $a \mid b$ então $a \mid b \cdot c$, pois se $a \mid b$, então $\exists\, d \in \mathbb{Z}$, tal que, $b = a \cdot d$. Logo, $b \cdot c = a \cdot d \cdot c$ e, portanto, $a \mid b \cdot c$;

(D_{vii}) Se $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid (rb + sc)$, para quaisquer $r, s \in \mathbb{Z}$, pois se $a \mid b$ e $a \mid c$, então para quaisquer elementos r e s de $\mathbb{Z}$, por (D_{vi}), $a \mid rb$ e $a \mid sc$. Logo, por (D_v), $a \mid (rb + sc)$.

2.2.1 Divisão com Resto

A divisão nos inteiros nem sempre é exata, ou seja, muitas vezes um número não é múltiplo de outro.

Por exemplo, 18 não é múltiplo de 7, pois não existe um número inteiro k, tal que $18 = 7 \cdot k$. Sendo assim, para tornarmos essa igualdade verdadeira precisamos somar um determinado número inteiro a $7k$.

Tomando o valor de k o maior inteiro positivo possível para que o produto $7 \cdot k$ não ultrapasse 18, temos $k = 2$. Assim, se $k = 2$ para que a igualdade $18 = 7 \cdot 2$ seja verdadeira precisamos somar o número inteiro 4 ao segundo membro dessa igualdade. Logo, teremos $18 = 7 \cdot 2 + 4$.

Portanto, como $7 \nmid 18$, a divisão de 18 por 7 é dita não exata e o número que precisamos adicionar para tornar a igualdade verdadeira, no caso 4, é chamado de resto, por isso o nome divisão com Resto.

Teorema 2.4 (Divisão Euclidiana). *Sejam a e $d \in \mathbb{Z}$, com $d > 0$. Então existem e são únicos q, $r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = d \cdot q + r$ e $0 \leq r < d$.*

Demonstração.

Existência: Consideremos inicialmente $a \geq 0$. Utilizaremos o princípio de indução sobre a, para provarmos este caso.

Base de indução: Para $a = 0$, temos que $a = d \cdot 0 + 0$ e, portanto $q = 0 = r$.

Passo indutivo: Consideremos que dado $a > 0$, o enunciado vale para todo inteiro positivo n, com $n < a$. Provemos que o resultado também é válido para a. Se $0 < a < d$, basta tomarmos $q = 0$ e $r = a$, isto é, $a = d \cdot 0 + a$. Agora se $a \geqslant d$, como $a \geqslant d > 0$, então $a > a - d \geq 0$. Pela hipótese de indução, existem q, $r \in \mathbb{Z}$ tais que $a - d = d \cdot q + r$, e $0 \leq r < d$. Mas, $a = a - d + d = d \cdot q + r + d = d \cdot (q + 1) + r$, ou seja, existem $k = q + 1$, $r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = d \cdot k + r$ e $0 \leq r < d$. Agora consideramos o caso $a < 0$. Desse modo $-a > 0$ e, portanto, existem q, $r \in \mathbb{Z}$ tais que $-a = d \cdot q + r$, com $0 \leqslant r < d$. Logo, $a = d \cdot (-q) - r$. Se $r = 0$, então $a = d \cdot (-q) + r$ e $0 \leq r < d$. Se $r > 0$, então

$a = d\cdot(-q) - d + d - r = d\cdot(-q-1) + (d-r)$ e $0 \leqslant d - r < d$, ou seja, existem $k = -q - 1$ e $s = d - r$ tais que $a = d\cdot k + s$ e $0 \leq r < d$.

Unicidade: Suponha que existam $q,\, q' \in \mathbb{Z}$ e $r,\, r' \in \mathbb{Z}_+$ tais que $a = d\cdot q + r = d\cdot q' + r'$ e $0 \leq r,\, r' < d$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $r' \leq r$. Neste caso, $0 \leq r - r' = a - d\cdot q - (a - d\cdot q') = d\cdot(q' - q)$, ou seja, $d|(r - r')$. Mas $0 \leq r - r' < d - r' \leq d$. Assim, como $d|(r - r')$ e $0 \leq r - r' < d$, tem-se que $r - r' = 0$, ou seja, $r = r'$. Temos então, $0 = r - r' = d\cdot(q' - q)$. Como $d \neq 0$, então $q' - q = 0$ e, portanto, $q = q'$. □

Nas condições do Teorema 2.4, dizemos que q é o quociente e r é o resto da divisão de a por d.

Exemplo 2.5. *Na divisão de* 20 *por* 3 *encontre o quociente e o resto.*

Sabemos pelo Teorema 2.4 que existem únicos $q,\, r \in \mathbb{Z}$ tais que $20 = 3\cdot q + r$, com $0 \leq r < 3$.

Note que, $20 = 3\cdot 6 + 2$; portanto o quociente da divisão de 20 por 3 é 6 e o resto é 2.

2.3 Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum

Durante essa seção vamos falar desses dois termos, Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum, também conhecidos como MDC e MMC, respectivamente.

Como o próprio nome indica quando falamos de Máximo Divisor Comum estamos nos referindo ao maior divisor comum entre dois ou mais números. De modo análogo, Mínimo Múltiplo Comum se refere ao menor múltiplo comum entre dois ou mais números inteiros.

Máximo Divisor Comum (MDC)

Antes de definir algebricamente o Máximo Divisor Comum de dois números, consideramos os conceitos vistos no tópico anterior e assim, fazemos um exemplo numérico.

Exemplo 2.6. *Sabemos que os divisores positivos do número* 30 *são:* $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ *pois,* $30 = 1\cdot 30$ *;* $30 = 2\cdot 15$ *;* $30 = 3\cdot 10$ *;* $30 = 5\cdot 6$ *;* $30 = 6\cdot 5$ *;* $30 = 10\cdot 3$ *;* $30 = 15\cdot 2$ *e* $30 = 30\cdot 1$.
Analogamente, temos os divisores positivos de 84 *que são:* $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 24, 28, 42, 84\}$.

Logo, os divisores comuns entre 30 *e* 84 *são* $\{1, 2, 3, 6\}$*, e portanto, o maior divisor comum entre* 30 *e* 84 *é o número* 6*.*

Observação 2.7. *Quando falamos em divisores do número zero, vale notar que zero é múltiplo de qualquer número, pois:* $0 = 1 \cdot 0$ *;* $0 = 2 \cdot 0$ *;* $0 = 3 \cdot 0$ *e assim por diante, ou seja, qualquer número não nulo divide zero; isto é,* $a \mid 0$ *qualquer que seja* $a \in \mathbb{Z}^*$*. Logo, temos que todos os elementos do conjunto dos números inteiros são divisores de zero.*

Formalizando a definição de MDC, temos:

Definição 2.8 (Máximo Divisor Comum (MDC))**.** *Sejam* a *e* $b \in \mathbb{Z}$ *com* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$*. A cada um destes números pode-se associar seu conjunto de divisores positivos. O maior elemento da intersecção de tais conjuntos é chamado de Máximo Divisor Comum de* a *e* b*.*

Sendo assim, o MDC de a *e* b *é um inteiro positivo* d*, tal que:*

(i) $d \mid a$ *e* $d \mid b$*.*

(ii) Se $c \in \mathbb{Z}$ *é tal que* $c \mid a$ *e* $c \mid b$*, então* $c \mid d$*.*

Observação 2.9. *Note que, na Definição 2.8 por (i)* d *é um divisor comum de* a *e* b *e, por (ii)* d *é o maior desses divisores, pois se* c *também é divisor comum de* a *e* b *então* c *deve dividir* d*.*

Notação 2.10. *Denotamos o Máximo Divisor Comum de* a *e* b *por* $mdc(a, b)$*, ou apenas (a,b).*

Observação 2.11. $mdc(a, b) = mdc(b, a)$ *e* $mdc(a, 0) = a$*.*

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Tratamos agora do Mínimo Múltiplo Comum.

Antes de definir algebricamente o Mínimo Múltiplo Comum de dois números, consideramos os conceitos vistos anteriormente e assim, fazemos um exemplo numérico.

Exemplo 2.12. *Sabemos que os múltiplos positivos do número* 6 *estão contidos no conjunto* $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ...\}$ *pois,* $6 = 6 \cdot 1$*;* $12 = 6 \cdot 2$*;* $18 = 6 \cdot 3$*;* $24 = 6 \cdot 4$*;* $30 = 6 \cdot 5$*;* $36 = 6 \cdot 6$*;* $42 = 6 \cdot 7$ *e* $48 = 6 \cdot 8$ *e assim por diante. Poderíamos continuar essa sequência infinitamente, pois como o resultado da multiplicação de 6 por qualquer* *número inteiro positivo é sempre um número múltiplo de seis, temos infinitos múltiplos de 6. Analogamente, os múltiplos positivos de* 8 *são:* $\{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, ...\}$. *Logo, os múltiplos comuns entre* 6 *e* 8 *são* $\{24, 48, ...\}$, *e portanto, o menor múltiplo comum positivo entre* 6 *e* 8 *é o número* 24.

Formalizando a definição de MMC, temos:

Definição 2.13 (Mínimo Múltiplo Comum (MMC)). *Sejam a e $b \in \mathbb{Z}_{+}^{*}$. A cada um deles pode-se associar seu conjunto de múltiplos positivos. O menor elemento da intersecção de tais conjuntos é chamado de Mínimo Múltiplo Comum de a e b.*

Sendo assim, o MMC de a e b é um inteiro positivo m, tal que:

(i) $a \mid m$ e $b \mid m$.

(ii) Se $c \in \mathbb{Z}$ é tal que $a \mid c$ e $b \mid c$, então $m \mid c$.

Observação 2.14. *Note que, na Definição 2.13 por (i) temos que m é múltiplo de a e b, e por (ii) temos m como o menor múltiplo positivo de a e de b.*

Notação 2.15. *Denotamos o Mínimo Múltiplo Comum de a e b por $mmc(a, b)$ ou apenas $[a, b]$.*

Observação 2.16. *Seja $a \in \mathbb{Z}$ positivo então $mmc(a, 1) = a$ e $mmc(a, b) = mmc(b, a)$.*

Agora, explanamos sobre números primos, tópico fundamental tanto para aprofundarmos sobre os assuntos MDC e MMC como para discutirmos o assunto que gerou o título desta dissertação: "Relação entre MMC, MDC e o Diagrama de Venn".

2.4 Números Primos

Os Números Primos são fundamentais para determinados estudos, como: criptografia, área de eletrônica, arquitetura, teoria musical, dentre outras.

Segundo a referência [10], os estudos desses números não são recentes, antes mesmo do nosso sistema de numeração ser conhecido, os pitagóricos já costumavam representá-los em forma geométrica através de pontos.

Os pitagóricos representavam os números através de quadrados e retângulos.

Por exemplo, para representar o número:

- 4, era feito um quadrado de bolinhas dois por dois;

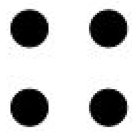

Figura 1: Representação do Número 4 em Forma Geométrica.

- 6, era um retângulo de bolinhas dois por três;

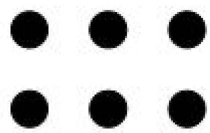

Figura 2: Representação do Número 6 em Forma Geométrica.

- 9, era um quadrado 3 por 3, e assim por diante.

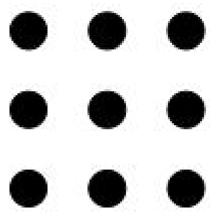

Figura 3: Representação do Número 9 em Forma Geométrica.

Porém, alguns números não podiam ser distribuídos de maneira a formar quadrados e/ou retângulos; só eram capazes de formar linhas. Por exemplo, os números $2, 3, 5, ...$. Esses números eram chamados de primários, que traduzidos para o latim recebiam o nome de primos.

Figura 4: Representação do Número 2 em Forma Geométrica.

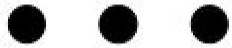

Figura 5: Representação do Número 3 em Forma Geométrica.

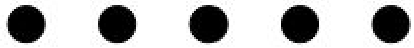

Figura 6: Representação do Número 5 em Forma Geométrica.

Portanto, os números primos são capazes de formar linhas de acordo com os conhecimentos pitagóricos, e os demais números capazes de formar quadrados ou retângulos; estes, como são representados através dos números primários, recebem o nome de compostos.

Vemos que cada número composto é construído como se fosse blocos pitagóricos, isto é, cada número composto é representado a partir da multiplicação de números primos de maneira única, a menos da ordem de multiplicação dos fatores.

Não existe atualmente nenhuma fórmula que permita descobrir todos os números primos. Vemos sua definição e utilizamos somente os números que temos certeza que são primos para desenvolvermos os exercícios e as teorias importantes para este trabalho.

É pelo fato de não existir, ainda hoje, nenhuma fórmula a qual gera todos os números primos, que estes extraordinários números assumem tamanha importância na criptografia. Pois, apesar de existir vários algoritmos populares utilizados na comunicação de computadores, os quais fazem uso dos números primos para cifrarem as mensagens e conseguir visualizar informações que eram privadas, como não se conhece todos os números primos, mesmo os melhores computadores que efetuam milhões de cálculos por segundo, podem demorar décadas para descobrir o conjunto de números primos que são necessários para formar um determinado número inteiro.

Dessa forma, percebemos que problemas envolvendo os números primos têm uma tradição bastante antiga, e ainda hoje são motivos de curiosidades entre matemáticos e estudiosos de áreas afins. Esta seção é dedicada a definir e provar alguns resultados acerca de números primos.

Definição 2.17 (Números Primos). *Sejam a, b e $p \in \mathbb{Z}$, tais que, $p = a \cdot b$. Dizemos que p é um número primo se $p > 1$ e os únicos divisores de p são ± 1 e $\pm p$. Isto é, toda vez que tivermos $p = a \cdot b$, p é primo, se $a = \pm 1$ ou $a = \pm p$.*

Exemplo 2.18. *O número* 2 *é primo, pois seus únicos divisores são* ± 1 *e* ± 2.

Exemplo 2.19. *O número* 10 *não é primo, pois ele possui outros divisores além de* ± 1 *e* ± 10*; observe que os divisores de* 10 *são* $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$.

Teorema 2.20. *Seja* $p \in \mathbb{Z}$. *O número* p *é primo se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

(i) $p > 1$;

(ii) *Dados* $a, b \in \mathbb{Z}_+$, *se* $p = a \cdot b$, *então* $a = 1$ *ou* $b = 1$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se p é um número primo, temos por definição que, $p > 1$. Agora, se $p = a \cdot b$, com a e b inteiros positivos, então a e b são divisores positivos de p. Logo, $a = 1$ ou $a = p$. Vamos analisar os dois casos: Se $a = 1$ nada temos a demonstrar. Se $a = p$ teremos $p = a \cdot b = p \cdot b$, o que implica $b = 1$.
($\Leftarrow$) Suponha que p satisfaz as condições (i) e (ii). Seja a um divisor positivo de p, ou seja, $\exists\ b \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $p = a \cdot b$. Logo, por (ii), $a = 1$ ou $b = 1$. Disso segue que $a = 1$ ou $a = p$ e, portanto, p é um número primo. $\square$

Proposição 2.21. *Sejam* p *um número primo e* a *um inteiro. Se* $p \nmid a$, *então* $mdc(p, a) = 1$.

Demonstração. Seja $mdc(p, a) = d$. Como $d \mid p$ e p é primo, então $d = 1$ ou $d = p$. Desde que $p \nmid a$, então $d \neq p$. Logo, $d = 1$. $\square$

Observação 2.22. *Quando dois ou mais números possuem como único divisor positivo, a saber o número* 1, *dizemos que eles são primos entre si. Isto é, se* a, $b \in \mathbb{Z}$ *são tais que o* $mdc(a, b) = 1$ *então* a *e* b *são primos entre si.*

Teorema 2.23. *Se* a, $b \in \mathbb{Z}^*$, *então o MDC de* a *e* b *é a menor das combinações lineares positivas* $ma + nb$, *com* m *e* n *inteiros. Em outras palavras, se* a, $b \in \mathbb{Z}^*$, *então* $mdc(a, b) = min\ \{x \in \mathbb{Z}_+^*;\ x = ma + nb,\ com\ m,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Demonstração. Seja $L = \{x \in \mathbb{Z}_+^*;\ x = ma + nb$, com $m,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Note que L é não vazio, pois $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e o inteiro $|a| + |b|$ é elemento de L, já que $|a| + |b| > 0$ e $|a| + |b| = (\pm a) + (\pm b) = ma + mb$, sendo $m = \pm 1$ e $n = \pm 1$. Além disso, L é um subconjunto de $\mathbb{Z}_+$. Logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, Teorema 2.1, existe um inteiro d tal que $d = minL$, isto é, $d \in L$ e $d \leq x$, qualquer que seja $x \in L$.
Vemos agora que $d \mid a$ e $d \mid b$. Sendo $d > 0$, pelo Teorema 2.4 existem q e r tais que $a = dq + r$ e $0 \leq r < d$. Como $d \in L$, d pode ser escrito na forma $d = m_0 a + n_0 b$, para

$m_0,\ n_0 \in \mathbb{Z}$.
Então, temos que $r = a - dq = a - (m_0a + n_0b)q = (1 - m_0q)a + (-n_0q)b = m'a + m'b$.
Logo, (1) $r = m'a + n'b$, com $m',\ n' \in \mathbb{Z}$; (2) $r = 0$ ou $0 < r < d$; Se $r \neq 0$, por (1) e (2), teríamos que $r \in L$ e $r < d$; isto é um absurdo, pois contraria o fato de $d = minL$.
Portanto, $r = 0$. Temos então que $d \mid a$.
De modo análogo, mostra-se que $d \mid b$. Seja $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x \mid a$ e $x \mid b$. Pela propriedade D_{vii} de divisibilidade $x \mid (m_0a + n_0b)$ quaisquer que sejam $m_0,\ n_0 \in \mathbb{Z}$; logo $x \mid d$. Disso segue, que d cumpre as propriedades (i) e (ii) da Definição 2.8 e, portanto, temos que $d = mdc(a, b)$, isto é, $minL = mdc(a, b)$. □

Corolário 2.24. *Sejam $a,\ b \in \mathbb{Z}$ então existem $r,\ s \in \mathbb{Z}$ tais que $mdc(a, b) = ra + sb$.*

Demonstração. De fato, pelo Teorema 2.23, $mdc(a, b) = minL$; logo, $mdc(a, b) \in L$.
Portanto, existem $r,\ s \in \mathbb{Z}$ tais que $mdc(a, b) = ra + sb$. □

Corolário 2.25. *Sejam $p,\ a \in \mathbb{Z}$, em que p é um número primo. Se $p \nmid a$, então existem $r,\ s \in \mathbb{Z}$, tais que, $rp + sa = 1$.*

Demonstração. De fato, pela Proposição 2.21, $mdc(p, a) = 1$. E pelo Corolário 2.24 existem $r,\ s \in \mathbb{Z}$ tais que $rp + sa = 1$. □

Corolário 2.26. *Quaisquer que sejam $a,\ b \in \mathbb{Z}^*$ e $n \in \mathbb{Z}^*_+$, $mdc(na, nb) = n\cdot mdc(a, b)$.*

Demonstração. Considere $M = \{y \in \mathbb{Z}^*_+;\ y = (na)r + (nb)s, \text{ com } r,\ s \in \mathbb{Z}\}$.
Note que $M = \{nx \in \mathbb{Z}^*_+;\ x = ra + sb, \text{ com } r,\ s \in \mathbb{Z}\}$, ou seja, $M = n\cdot L$ em que $L = \{x \in \mathbb{Z}^*_+;\ x = ra + sb, \text{ com } r,\ s \in \mathbb{Z}\}$. Observe que $minM = min(nL) = n\cdot minL$.
Mas, pelo Teorema 2.23, $minL = mdc(a, b)$ e $minM = mdc(na, nb)$. Portanto, $mdc(na, nb) = n\cdot mdc(a, b)$. □

Corolário 2.27. *Dados $a,\ b \in \mathbb{Z}^*$, $mdc\left(\dfrac{a}{mdc(a,b)}, \dfrac{b}{mdc(a,b)}\right) = 1$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.26, temos que
$$mdc(a,b)\cdot mdc\left(\frac{a}{mdc(a,b)}, \frac{b}{mdc(a,b)}\right) = mdc\left(\frac{mdc(a,b)\cdot a}{mdc(a,b)}, \frac{mdc(a,b)\cdot b}{mdc(a,b)}\right) = mdc(a,b).$$
Logo, $mdc\left(\dfrac{a}{mdc(a,b)}, \dfrac{b}{mdc(a,b)}\right) = 1$. □

Proposição 2.28. *Se um número primo divide o produto de dois números inteiros, então ele divide pelo menos um dos fatores.*

Demonstração. Considere um número primo p e os números inteiros a e b, tal que $p \mid (a \cdot b)$. Se $p \mid a$ nada temos a demonstrar. Se $p \nmid a$, então pela Proposição 2.21 $mdc(p, a) = 1$. Logo, pelo Corolário 2.25, existem r, $s \in \mathbb{Z}$ tais que $p \cdot r + a \cdot s = 1$. Multiplicando a igualdade por b temos $b \cdot p \cdot r + b \cdot a \cdot s = 1 \cdot b = b$.
Como $p \mid p$ e $p \mid (a \cdot b)$, logo $p \mid (b \cdot p \cdot r + b \cdot a \cdot s) = b$. Portanto, $p \mid b$. □

Teorema 2.29. *(Teorema Fundamental da Aritmética) Todo número inteiro $n > 1$ pode ser representado como um produto $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r$ em que p_i, $1 \leq i \leq r$ são números primos. Além disso, se exigirmos que $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_r$, essa representação é única.*

Demonstração. Dividimos essa demonstração em duas partes. Primeiro demonstramos que existe a representação e depois mostramos que essa representação é única.

Existência: Mostramos a existência dessa representação a partir do Princípio de Indução Finita sobre n.
Base de Indução: Se $n = 2$, então, $n = p_1$, p_1 primo.
Passo Indutivo: Suponha o resultado válido para k, com $2 < k < n$. Se n é primo, não há nada para fazer. Se n não é primo, vimos que $n = a \cdot b$ com $a, b \in \mathbb{Z}_+$ e $1 < a < n$ e $1 < b < n$. Então, pela hipótese de indução, a e b podem ser representados como produtos de primos e, portanto, $n = a \cdot b$ também terá uma representação como produto de primos. Fica então demonstrada a existência da representação. Sobre a ordenação, podemos sempre organizar os números da representação, de forma que $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_r$.

Unicidade: A unicidade dessa representação também será demonstrada por Indução Finita sobre n.
Base de Indução: Se $n = 2$, e $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r$, como 2 é primo, $p_1 = 2$ e $r = 1$. Se $r \geq 2$, temos que $1 = p_2 \cdot ... \cdot p_r \Longrightarrow p_2 \mid 1 \Longrightarrow p_2 \leq 1$, o que é um absurdo. Logo vale a unicidade.
Passo Indutivo: Pela hipótese de indução, suponhamos que a unicidade vale para todos os $m \in \mathbb{Z}_+$, tal que $1 < m < n$. Se $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$, então, $p_1 | q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$. Logo, $p_1 \mid q_i$, para algum i, tal que $1 \leq i \leq s$; como q_i é primo, $p_1 = q_i$. Da mesma forma, $q_1 = p_j$ para algum j tal que $1 \leq j \leq r$. Considerando $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_r$ e $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_s$, como $p_1 = q_i \geq q_1 = p_j \geq p_1$, então $p_1 = q_1$. Se n é primo, como no caso $n = 2$, $n = p_1 = q_1$ e $r = s = 1$. Caso contrário, $r > 1$ e $s > 1$; cancelando p_1, na igualdade $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$, obtemos $p_2 \cdot ... \cdot p_r = q_2 \cdot ... \cdot q_s < q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s = n$. Assim, pela hipótese de indução, a representação $p_2 \cdot ... \cdot p_r = q_2 \cdot ... \cdot q_s$ é única, isto é,

$r = s$ e $p_i = q_i$, para todo i tal que, $2 \leq i \leq r$, o que verifica a unicidade. $\square$

Observação 2.30. *A expressão a^n é denominada potência, onde a é a base e n é o expoente. Na potência descrita, a representa um fator e n indica o número de vezes que este fator aparece na fatoração.*

Observação 2.31. *Ao efetuarmos operações entre potências existem propriedades que ajudam a simplificar os cálculos. Vejamos duas delas as quais utilizaremos futuramente.*

- *Produto de potências de mesma base: sempre que multiplicamos potências de bases iguais, para obter o resultado basta conservar a base e somar os expoentes. Isto é, $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.*

- *Quociente de potências de mesma base: quando dividimos potências de mesma base, devemos conservar a base e subtrair os expoentes. Por exemplo, $\dfrac{a^k}{a^m} = a^{k-m}$ Esta propriedade está bem definida nos números inteiros se $k \geq m$.*

Observação 2.32. *Uma fatoração em primos de um inteiro positivo n é uma representação de n como um produto de números primos ou como um produto de potências de números primos, isto é, $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot ... \cdot p_n^{r_n}$ em que $p_1 < p_2 < ... < p_n$ são números primos e cada r_i é um número inteiro positivo. (Adiante damos mais detalhes.)*

Teorema 2.33 (Infinidade dos primos)**.** *No conjunto dos números inteiros existem infinitos números primos.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que o conjunto dos números primos seja finito. Seja p o maior número primo positivo, e a um inteiro formado pelo produto de todos os primos positivos menores do que p subtraído de uma unidade, assim $a = [2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1)]$. Como $a \neq 0$ e $a \neq \pm 1$, temos que a possui um divisor primo q que podemos supor positivo. Assim, q por ser um número primo positivo, é um dos fatores de $2 \cdot 3 \cdot ... \cdot p$. Porém, se q é divisor primo de a, além de $q|(2 \cdot 3 \cdot ... \cdot p)$, também $q|(-1)$, o que é um absurdo. Portanto, os números primos são infinitos. $\square$

Proposição 2.34. *Se um número inteiro n maior do que 1 não é divisível por nenhum primo positivo p tal que $p^2 \leq n$, então ele é primo.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que n não é primo e seja $q \neq 1$ o menor número primo que divide n. Daí, temos: $n = q \cdot m$ com $q \leq m$; logo $q^2 \leq q \cdot m = n$. Logo, n é divisível por um número primo q tal que $q^2 \leq n$, o que é um absurdo. Portanto, a proposição é verdadeira. $\square$

Com esses resultados vimos várias características importantes dos números primos. A Proposição 2.34 nos fornece um algoritmo para detectar os números primos.

Tal algoritmo é um método antigo, conhecido como Crivo de Eratóstenes, para elaboração de tabelas de números primos até a ordem que desejarmos.

Para finalizarmos este capítulo de números primos, utilizando o Crivo de Eratóstenes, construímos uma tabela dos números primos inferiores a 180.

Passos para construção da tabela:

1. Escreva todos os números de 2 a 180 na tabela;

2. O número 2 é primo, mas todos os múltiplos de 2 não são primos então devemos riscá-los.

   Sabemos, pela Proposição 2.34 que todos os números não riscados inferiores a $2^2 = 4$ são primos, ou seja, os números 2 e 3 são primos.

3. Se 3 é primo os múltiplos dele não o são, logo, devemos riscá-los.

   Novamente pela Proposição 2.34, todos os números não riscados inferiores a $3^2 = 9$ são primos, isto é, os números 2, 3, 5 e 7.

4. Se 5 e 7 são primos devemos riscar todos os múltiplos desses números e assim encontramos os primos inferiores a $7^2 = 49$.

   Repetimos esse método até encontrar todos os primos inferiores a 180, e assim chegamos na tabela a seguir.

Tabela 1: Números Primos Menores que 180

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~
151	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~	157	~~158~~	~~159~~	~~160~~
~~161~~	~~162~~	163	~~164~~	~~165~~	~~166~~	167	~~168~~	~~169~~	~~170~~
~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	179	~~180~~

Portanto, o conjunto dos números primos inferiores a 180 é

{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179 }.

3 MDC e MMC: Diferentes Maneiras de Calcular

Quando falamos em diferentes maneiras de calcular MDC e MMC, estamos nos referindo a métodos que facilitam encontrar esses valores sem pensarmos em todos os divisores dos números em questão.

Neste capítulo descrevemos dois métodos, úteis e práticos, para fazer esses cálculos, a saber:

- MDC a partir do Algoritmo de Euclides;
- MDC e MMC a partir de Fatoração.

3.1 MDC a partir do Algoritmo de Euclides

Nesta seção descrevemos o Algoritmo de Euclides ou Algoritmo das divisões sucessivas que permite calcular de maneira eficiente o MDC entre dois números.

3.1.1 O Cálculo do MDC a partir da Divisão Euclidiana

Vimos na divisão com resto (Teorema 2.4) que:

Sejam a *e* $d \in \mathbb{Z}$, *com* $d > 0$. *Então existem e são únicos* q, $r \in \mathbb{Z}$ *tais que* $a = d \cdot q + r$ *e* $0 \leq r < d$.

A partir deste Teorema surgiu um método que facilitou o cálculo do MDC de dois números inteiros. Tal método é conhecido como Algoritmo da Divisão de Euclides.

Teorema 3.1. *(Base para o Algoritmo da Divisão de Euclides) Se* $a = d \cdot q + r$, *então* $mdc(a, d) = mdc(d, r)$.

Demonstração. Para demonstrarmos esse resultado, basta mostrar que os divisores comuns de a e d são iguais aos divisores comuns de d e r. Seja $n \in \mathbb{Z}$, tal que $n|a$ e $n|d$. Logo $n|(a - d \cdot q) \iff n|r$. Portanto, n divide d e n divide r. Por outro lado, se $n|d$ e $n|r$, então $n|(d \cdot q + r) \iff n|a$, daí n divide simultaneamente a e d. Como o conjunto dos divisores de a e d é igual ao conjunto dos divisores de d e r, segue que os máximos de tais conjuntos também coincidem. □

Observação 3.2. *O Algoritmo de Euclides consiste na aplicação sucessiva do Teorema 3.1.*

A Observação 3.2 faz sentido, pois se a e b são inteiros não negativos, e se $b = 0$ ou $a = b$ temos que então $mdc(a, b) = a$.
Agora, se tivermos $a \neq b$, como $mdc(a, b) = mdc(b, a)$, podemos supor que $a > b > 0$. Logo, pela divisão Euclidiana,

$$a = b \cdot q_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < b.$$

Da igualdade acima e do Teorema 3.1 segue que

$$mdc(a, b) = mdc(r_2, b) = mdc(b, r_2).$$

Assim, podem ocorrer dois casos:

1. $r_2 = 0$. Neste caso, temos $mdc(a, b) = mdc(b, r_2) = mdc(b, 0) = b$;

2. $r_2 \neq 0$. Neste caso efetuamos a divisão euclidiana de b por r_2, obtendo

$$b = r_2 \cdot q_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2.$$

Logo, segue que $mdc(a, b) = mdc(b, r_2) = mdc(r_2, r_3)$. Novamente dois casos podem se apresentar,

1. $r_3 = 0$. Neste caso, $mdc(a, b) = mdc(r_2, 0) = r_2$;

2. $r_3 \neq 0$. Neste caso efetuamos a divisão euclidiana de r_2 por r_3, obtendo

$$r_2 = r_3 \cdot q_3 + r_4, \quad 0 \leq r_4 < r_3.$$

Novamente, procedendo como acima temos que

$$mdc(a, b) = mdc(b, r_2) = mdc(r_2, r_3) = mdc(r_3, r_2),$$

e assim sucessivamente.

Definindo $r_1 = b$, segue que existe um inteiro positivo n tal que $r_{n+1} = 0$ e $r_n \neq 0$. De fato, se para todo n, tivéssemos $r_n \neq 0$, teríamos uma sequência infinita $r_1, r_2, r_3, ...$ tal que

$$r_1 > r_2 > r_3 > ... > 0,$$

contrariando o Princípio da Boa Ordenação, Teorema 2.1. Isto mostra que o processo descrito anteriormente, em algum momento pára.

Então,

$$mdc(a,b) = mdc(b,r_2) = mdc(r_n, r_{n+1}) = mdc(r_n, 0) = r_n.$$

Portanto, o último resto não nulo r_n neste processo nos fornece o valor de $mdc(a,b)$.

Exemplo 3.3. *Calcule* $mdc(112, 176)$.

Utilizando o Teorema 3.1, vamos calcular esse MDC a partir da realização de divisões sucessivas.

Se queremos o MDC de 112 e 176, já vimos anteriormente que,

$$mdc(112, 176) = mdc(176, 112),$$

logo sempre que formos efetuar esse processo fazemos a divisão do maior número pelo menor.

Assim temos:

$$176 = 112 \cdot 1 + 64$$

$$112 = 64 \cdot 1 + 48$$

$$64 = 48 \cdot 1 + 16$$

$$48 = 16 \cdot 3 + 0.$$

Logo,

$$mdc(176, 112) = mdc(112, 64) = mdc(64, 48) = mdc(48, 16) = mdc(16, 0) = 16$$

.

Portanto, $mdc(112, 176) = 16$.

Utilizamos esse mesmo raciocínio, porém organizando os dados do exercício em uma tabela; este é um dispositivo prático de organizar tais dados, que decorre do procedimento acima.

Nessa tabela preenchemos a primeira linha com os valores dos sucessivos quocientes começando da segunda coluna. Na segunda linha ficam os valores dos sucessivos dividendos e divisores, ou seja, os valores de a e d, quando pensamos na terminologia do Teorema 2.1. Por fim, temos uma terceira linha onde ficam os respectivos restos das divisões.

A tabela tem tantas colunas quanto forem necessárias até que o resto seja zero.

O número de colunas são n_{r+1}, em que n_r é o número de restos, como indicado a seguir:

	q_1	q_2	q_3	...	q_{n-2}	q_{n-1}	q_n
a	b	r_2	r_3	...	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_2	r_3	r_4	r_5	...	r_n	0	

Vejamos como fica o dispositivo prático do Exemplo 3.3:

	1	1	1	3
176	112	64	48	16
64	48	16	0	

O MDC procurado é o último número da segunda linha; neste caso, 16.

O Teorema a seguir nos fornece um método para se calcular o MMC a partir do MDC. Desta maneira, é possível calcular o MDC entre dois números utilizando o Algoritmo de Euclides e, posteriormente, calcular o MMC entre tais números por meio do resultado a seguir.

Teorema 3.4. *Dados a e $b \in \mathbb{Z}_+^*$, então $mmc(a,b)\cdot mdc(a,b) = a\cdot b$.*

Demonstração. Seja $m = \dfrac{a\cdot b}{mdc(a,b)}$. Nosso objetivo é mostrar que $m = mmc(a,b)$. Para isso, verificamos as condições (i) e (ii) da Definição 2.13.

i) $a \mid m \quad$ e $\quad b \mid m$.

De fato, $m = a\cdot \dfrac{b}{mdc(a,b)} = b\cdot \dfrac{a}{mdc(a,b)}$. Portanto, $a \mid m \quad$ e $\quad b \mid m$.

ii) Se $c \in \mathbb{Z}$ é tal que $a \mid c \quad$ e $\quad b \mid c \quad$ então $\quad m \mid c$.

De fato, se c é múltiplo de a e de b então existem a_1, $b_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $c = a_1\cdot a$ e $c = b_1\cdot b$. Logo,

$$a_1\cdot \frac{a}{mdc(a,b)} = b_1\cdot \frac{b}{mdc(a,b)}. \tag{1}$$

Pelo Corolário 2.27, $mdc\left(\dfrac{a}{mdc(a,b)}, \dfrac{b}{mdc(a,b)}\right) = 1$, ou seja, $\dfrac{a}{mdc(a,b)}$ e $\dfrac{b}{mdc(a,b)}$ são primos entre si. Pela Igualdade 1, segue que $\dfrac{a}{mdc(a,b)}$ divide b_1.

Portanto, $m = \dfrac{a}{mdc(a,b)} \cdot b$ divide $b_1 \cdot b = c$.

□

Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.5. *Calcule o MDC e o MMC dos números* 480 *e* 75.

Utilizando o Algoritmo de Euclides e a representação dos dados em uma tabela como descrito anteriormente, temos:

$$480 = 75 \cdot 6 + 30$$

$$75 = 30 \cdot 2 + 15$$

$$30 = 15 \cdot 2 + 0$$

	6	2	2
480	75	30	15
30	15	0	

Logo,

$$mdc(480, 75) = mdc(75, 30) = mdc(30, 15) = mdc(15, 0) = 15.$$

Observe que para calcular o MMC desses números basta utilizarmos o Teorema 3.4. Tal resultado afirma que $mmc(a, b) \cdot mdc(a, b) = a \cdot b$. Então:

$$mmc(480, 75) \cdot mdc(480, 75) = 480 \cdot 75$$

$$mmc(480, 75) \cdot 15 = 36000$$

$$mmc(480, 75) = 2400.$$

Portanto, $mdc(480, 75) = 15$ e $mmc(480, 75) = 2400$.

3.2 MDC e MMC a partir de Fatoração

Dizer que 28 é múltiplo de 4 é o mesmo que dizer que 4 é divisor de 28, ou ainda, que 4 divide 28.

A nomenclatura 4 é divisor de 28 nos indica que existe um número inteiro, tal que se multiplicarmos 4 por esse número resultará em 28; logo 4 é fator de 28.

Fatorar um número é escrevê-lo na forma de multiplicação e os fatores são os termos da multiplicação.

Então, no caso acima temos: $28 = 4 \cdot 7$; isto é, 28 foi escrito como a multiplicação de 4 por 7. Neste caso, temos os números 4 e 7 como fatores de 28.

Assim, se escrevemos um número como produto (ou seja, multiplicação) de outros números, fizemos uma fatoração.

3.2.1 Fatoração

Como já foi dito, fatorar um número é escrevê-lo em forma de multiplicação, ou seja, é colocá-lo como produto de dois ou mais números.

A fatoração pode ser completa ou incompleta. Temos uma fatoração incompleta quando algum dos fatores obtidos ainda pode ser fatorado. Vejamos, por exemplo o caso $28 = 4 \cdot 7$. O número 7 é primo, isto é, esse número não pode ser escrito como a multiplicação de dois outros números diferentes dele, pois sabemos que ele só é divisível por 1 e por ele mesmo. Mas, o 4 não é um número primo, logo pode ser escrito da seguinte forma: $4 = 2 \cdot 2$.

Se na fatoração $28 = 4 \cdot 7$ existe um fator, no caso 4, que ainda pode ser fatorado então, $4 \cdot 7$ é uma fatoração incompleta do número 28.

Então, $28 = 4 \cdot 7$ e $4 = 2 \cdot 2$ o que implica $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$. Esta última fatoração de 28 é completa, pois todos os fatores são primos e não podem ser escritos como a multiplicação de dois outros números diferentes deles.

Assim, afirmamos que os números primos são os elementos mínimos da estrutura multiplicativa dos inteiros. Toda vez que um número estiver escrito como um produto de números primos temos uma fatoração completa, também conhecida como decomposição em fatores primos.

Para decompor números maiores , em que é mais difícil descobrir os fatores primos que o formam, existe um método prático. Vejamos esse método fazendo como exemplo a fatoração completa do número 3780.

Primeiro escrevemos o número que desejamos fatorar e à direita dele passa-se uma reta vertical, como mostrado a seguir.

$$\begin{array}{r|l} 3780 & \\ & \\ & \end{array}$$

Para uma melhor organização e ordenação do raciocínio, procuramos sempre começar do menor número primo pelo qual o número a ser decomposto é divisível até chegar ao maior número primo.

Como 2 é o menor número primo e 3780 é divisível por ele, então iniciamos a fatoração pelo número 2. Devemos colocar o número primo que divide o número a ser fatorado sempre do lado direito da linha vertical ao lado do número que vai ser decomposto.

Temos que, $3780 = 2 \cdot 1890$; logo colocamos o número 2 à direita de 3780 e o fator 1890 é colocado abaixo de 3780, como indicado.

$$\begin{array}{r|l} 3780 & 2 \\ 1890 & \\ & \end{array}$$

Analogamente, verificamos o menor número primo que divide 1890; assim, $1890 = 2 \cdot 945$, logo,

$$\begin{array}{r|l} 3780 & 2 \\ 1890 & 2 \\ 945 & \end{array}$$

Continuando, temos o número 945 que não é divisível por 2, mas é divisível pelo número primo 3 e $945 = 3 \cdot 315$, assim,

$$\begin{array}{c|l} 3780 & 2 \\ 1890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & \end{array}$$

Analogamente, $315 = 3 \cdot 105$, $105 = 3 \cdot 35$, $35 = 5 \cdot 7$, $7 = 7 \cdot 1$, daí,

$$\begin{array}{c|l} 3780 & 2 \\ 1890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Portanto, como o número 1 não pode ser escrito como produto de dois números sendo um deles primo, então, a fatoração completa termina quando se chega no número 1.

Logo, a decomposição do número 3780 em fatores primos é: $3780 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, ou ainda, escrevemos, $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

Exemplo 3.6. *Decomponha o número* 360 *em fatores primos.*

Utilizando o método descrito acima temos,

$$
\begin{array}{r|l}
360 & 2 \\
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
$$

Logo, a decomposição do número 360 em fatores primos é $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

3.2.2 O Cálculo do MDC e do MMC a partir de Fatoração

Antes de demonstrar algebricamente como se calcula o Máximo Divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum de dois números, consideramos os conceitos vistos e assim fazer um exemplo numérico.

Exemplo 3.7. *Vamos calcular o mdc e o mmc entre os números* 48 *e* 150*.*

Sabemos que a decomposição em fatores primos do número 48 é $48 = 2^4 \cdot 3$ e do 150 é $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Então, temos que os números 2 e 3 são os únicos presentes em ambas as decomposições, ou seja, 2 e 3 são fatores comuns às duas multiplicações; logo esses números dividem tanto o 48 como o 150, portanto o $mdc(48, 150) = 2 \cdot 3 = 6$.

Agora, para encontrar o Mínimo Múltiplo Comum de 48 e 150 devemos ter os números que são múltiplos ao mesmo tempo desses dois números. Ou seja, precisamos dos números que tenham na sua decomposição pelo menos os fatores comuns à esses números, isto é, os fatores $2^4 \cdot 3$ e $2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Logo para ser múltiplo de 48 e 150 é necessário se ter tanto os fatores de um como os do outro que são $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1200$. Portanto o $mmc(48, 150) = 1200$.

Para generalizar esses cálculos, vejamos o Teorema 3.9, para o qual precisamos do Lema 3.8.

Lema 3.8. *Seja $a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$, em que $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ são números primos e cada r_i, $1 \leq i \leq n$ é um número inteiro positivo. Se d é também um número inteiro positivo, então $d \mid a$ se, e somente se, $d = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n}$ em que, para cada i, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq t_i \leq r_i$.*

Demonstração. Se $d \mid a$, então $a = d \cdot c$, para algum inteiro c.
Assim, $d \mid a \quad \text{e} \quad c \mid a$. Portanto, se p é um primo que divide c ou divide d, então $p \mid a$. Logo, $p = p_i$ para algum $1 \leq i \leq n$. Desse modo, podemos tomar as fatorações de c e d nas formas $c = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n}$ e $d = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n}$, em que cada r_i e cada t_i é um número inteiro positivo. De $a = d \cdot c$ temos
$p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n} = (p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n}) \cdot (p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n}) = p_1^{t_1+s_1} \cdot p_2^{t_2+s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n+s_n}$. Logo, pelo Teorema 2.29, $r_i = t_i + s_i \geq t_i \geq 0$. Por outro lado, se $d = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n}$, em que para cada i, $0 \leq t_i \leq r_i$, então existem números inteiros positivos s_i tais que $r_i = t_i + s_i$, $1 \leq i \leq n$.
Logo, $a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n} = p_1^{t_1+s_1} \cdot p_2^{t_2+s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n+s_n} = (p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n}) \cdot (p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n}) = d \cdot (p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n})$ e, portanto, $d \mid a$. □

Teorema 3.9. *Sejam a e b inteiros positivos, $a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$ e $b = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n}$, em que $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ são números primos e para todo $1 \leq i \leq n$, tem-se que r_i, s_i são inteiros não negativos.*
Então, $mdc(a, b) = p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{u_n}$ e $mmc(a, b) = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n}$ de modo que para cada i, $u_i = min\{r_i, s_i\}$ e $t_i = max\{r_i, s_i\}$.

Demonstração.

1. Mostramos a seguir que $mdc(a, b) = p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{u_n}$, onde $u_i = min\{r_i, s_i\}$ com $1 \leq i \leq n$. Seja $d = p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{u_n}$, com $u_i = min\{r_i, s_i\}$, $1 \leq i \leq n$. Pelo Lema 3.8, $d \mid a \quad \text{e} \quad d \mid b$. Se c é um número inteiro tal que $c|a$ e $c|b$, também pelo Lema 3.8, podemos tomar a fatoração de c na forma $c = p_1^{v_1} \cdot p_2^{v_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{v_n}$, em que para cada i, $1 \leq i \leq n$, $v_i \leq r_i$, $v_i \leq s_i$ e, portanto, $v_i \leq min\{r_i, s_i\} = u_i$. Logo, pelo Lema 3.8, $c \mid d$ e, então, $d = mdc(a, b)$.

2. Vejamos que $mmc(a, b) = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n}$, onde $t_i = max\{r_i, s_i\}$ com $1 \leq i \leq n$. Observe, para cada $1 \leq i \leq n$, que $r_i + s_i = max\{r_i, s_i\} + min\{r_i, s_i\} = u_i + t_i$. Pelo Teorema 3.4, $mdc(a, b) \cdot mmc(a, b) = a \cdot b$. Logo, aplicando as propriedades da Observação 2.31, temos que $p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{u_n} \cdot mmc(a, b) = (p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}) \cdot (p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n})$, então $p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{u_n} \cdot mmc(a, b) = p_1^{r_1+s_1} \cdot p_2^{r_2+s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n+s_n}$, disso segue que
$mmc(a, b) = p_1^{r_1+s_1-u_1} \cdot p_2^{r_2+s_2-u_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n+s_n-u_n}$. Daí, temos que
$p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n} = p_1^{r_1+s_1-u_1} \cdot p_2^{r_2+s_2-u_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n+s_n-u_n}$. Assim, $t_i = r_i + s_i - u_i$, $1 \leq i \leq n$. Portanto, como $u_i = min\{r_i, s_i\}$, $1 \leq i \leq n$, então $t_i = max\{r_i, s_i\}$, $1 \leq i \leq n$, já que $r_i + s_i = max\{r_i, s_i\} + min\{r_i, s_i\}$. □

Exemplo 3.10. *Agora, determinamos o MDC e o MMC dos números* 108 *e* 120 *utilizando o Teorema 3.9.*

Primeiro decompomos os números em fatores primos, assim temos:

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Portanto, $108 = 2^2 \cdot 3^3$ e $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Como vimos no Teorema 3.9, o MDC dos números é o produto dos fatores primos em comum de menor expoente, e o MMC é o produto de todos os fatores primos de maior expoente que aparecem nesses números.

Portanto, pelo Teorema 3.9,

$$mdc(108, 120) = 2^2 \cdot 3 = 12 \quad e \quad mmc(108, 120) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1080.$$

Assim como podemos efetuar a fatoração de cada número separadamente e, no final, analisarmos os fatores de cada um para obtermos o MDC e o MMC dos números em questão, a fim de reduzirmos os cálculos e ganharmos tempo na resolução de uma questão, podemos efetuar a decomposição dos números simultaneamente.

Exemplo 3.11. *Determinamos o MDC e o MMC dos números* 40 *e* 60 *utilizando o Teorema 3.9 e fazendo decomposição simultânea.*

Primeiro, decompomos os números em fatores primos. Para isso escrevemos os dois números que queremos fatorar separados apenas por uma vírgula e, à direita deles, passamos uma reta vertical, como mostrado a seguir.

$$
\begin{array}{c|lcl}
40,\ 60 & 2 & \longrightarrow & \text{fator comum} \\
20,\ 30 & 2 & \longrightarrow & \text{fator comum} \\
10,\ 15 & 2 & \longrightarrow & \text{não é fator comum porque não divide o 15} \\
5,\ 15 & 3 & \longrightarrow & \text{não é fator comum porque não divide o 5} \\
5,\ 5 & 5 & \longrightarrow & \text{fator comum} \\
1{,}1 & & &
\end{array}
$$

Como vimos no Teorema 3.9, o MDC dos números é o produto dos fatores primos em comum nos números, e o MMC é o produto de todos os fatores primos que aparecem nesses números.

Portanto, pelo Teorema 3.9, e pela decomposição feita, temos:

$$mdc(40,60) = 2^2 \cdot 5 = 20 \quad e \quad mmc(40,60) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

4 Tópicos em Teoria dos Conjuntos

Teoria dos Conjuntos é o ramo da matemática que estuda os conjuntos. De acordo com as referências [7], [12], [13], [14], [15], [16], temos que um estudo mais formal sobre Teoria dos Conjuntos foi iniciado no final do século XIX por Georg Cantor (1845-1918), que buscava a mais primitiva e simples definição de conjunto.

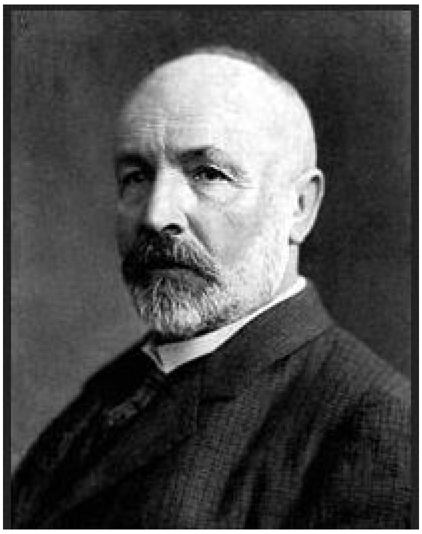

Figura 7: Georg Cantor; retirada de: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nasceu em São Petersburgo, na Rússia, a 3 de março de 1845, e faleceu em Halle, Alemanha, a 6 de janeiro de 1918.

Deixou a Rússia ainda menino, quando emigrou com a família para a Alemanha. Estudou no Instituto Federal de Tecnologia de Zurique. Doutorou-se na Universidade de Berlim em 1867. Em 1872 foi nomeado professor assistente de matemática na Universidade de Halle-Wittenberg, assumindo a direção da cadeira no ano de 1879, onde ele permaneceu até se aposentar em 1913.

Cantor iniciou seus estudos analisando números, pontos sobre linhas, que convergiam para um ponto limite. Com o desenvolvimento das pesquisas, ele se questionou sobre a limitação desses pontos-limites, pois lhe interessava pensar sobre o processo de construção dos conjuntos derivados a partir dos infinitos.

A percepção das correspondências biunívocas entre dois conjuntos foi de extrema importância, para que Cantor conseguisse reconhecer a diferença de cardinalidade entre diferentes conjuntos infinitos.

Sendo assim, Cantor iniciou seu trabalho procurando uma formalização para o conceito de infinito, analisou conjuntos enumeráveis como racionais e naturais, porém sua curiosidade e questionamentos o levou a provar a existência de diferentes ordens infinitas.

As ideias de Cantor não foram aceitas de imediato, mas suas formalizações foram se impondo como elemento unificador dos vários ramos da matemática e tornando-se a base que levou a formalização da matemática contemporânea, à qual conhecemos como Teoria dos Conjuntos. Logo, a Teoria dos Conjuntos é com frequência utilizada como um sistema precursor da matemática.

No que segue, tratamos alguns tópicos de Teoria dos Conjuntos, dando ênfase no que vem a ser conjuntos, suas operações e relações, para que assim sejamos capazes de falar no Diagrama de Venn, que é nosso objetivo principal neste capítulo.

4.1 Conjuntos

Conjunto é uma coleção qualquer de objetos, os quais são chamados de elementos do conjunto.

É importante termos em mente que os elementos de um conjunto podem ser entendidos no sentido mais abrangente possível, depende a que estamos nos referindo. Podemos ter, por exemplo, conjunto de vestuário, conjunto de sentimentos e conjunto de cores; Figuras 8, 9 e 10, respectivamente.

Figura 8: Conjunto de Vestuário.

Figura 9: Conjunto de Sentimentos.

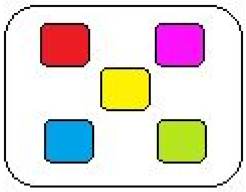

Figura 10: Conjunto de Cores.

Embora qualquer tipo de elementos possam ser reunido em um conjunto, quando falamos em teoria dos conjuntos estamos nos referindo, na maioria das vezes, a elementos que tem alguma relevância para a matemática, sendo assim é mais comum trabalharmos com elementos associados a números.

Usualmente, representamos os conjuntos por letras maiúsculas e os elementos por letras minúsculas. Podemos dizer, por exemplo, que o cojunto M é uma coleção dos objetos a, b, c, d. Isto é, os objetos a, b, c, d pertencem à coleção M, então, a, b, c, d são elementos do conjunto M.

Além da diferenciação entre letras maiúsculas e minúsculas também utilizamos os símbolos { } (chamado de chaves) para designar conjuntos; os elementos de um conjunto ficam representado dentro das chaves e separados por vírgula ou ponto e vírgula.

Logo, para representarmos o conjunto M falado anteriormente, o qual tem como elementos os objetos a, b, c, d, basta escrevermos

$$M = \{a, b, c, d\},$$

onde lemos: M é o conjunto formado pelos elementos a, b, c, d.

Para afirmarmos se um elemento está ou não em um conjunto, devemos estabelecer uma notação para *pertinência*. Isto é feito da seguinte forma:

- $a \in M$, onde lemos, a pertence ao conjunto M, ou simplesmente, a pertence a M.
- $k \notin M$, onde lemos, k não pertence ao conjunto M, ou, k não pertence a M.

Assim, se o elemento está no conjunto, dizemos que ele pertence ao conjunto e colocamos o símbolo $\in$. Caso contrário, dizemos que ele não pertence ao conjunto e o símbolo utilizado é $\notin$.

Mas, como é que fazemos a associação para afirmarmos se um dado elemento pertence ou não a um determinado conjunto?

Em nosso contexto, esta pergunta é fácil de ser respondida. Considere que os conjuntos são definidos a partir de uma propriedade que deve ser satisfeita pelos seus elementos.

Sendo assim, um elemento pertence a um conjunto se ele possui a propriedade à qual define esse conjunto.

Por exemplo, se um conjunto A é definido como uma coleção de elementos, os quais são os números inteiros positivos maiores que 10 e menores que 18, então temos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z}_+ / 10 < x < 18\} \text{ ; logo } A = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}.$$

Portanto, os elementos pertencentes ao conjunto A são os números: 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17. E o conjunto A possui sete elementos.

No caso de um conjunto não possuir nenhum elemento, ou seja, caso não existam objetos que satisfaçam a propriedade que define um dado conjunto, então dizemos que esse comjunto é *vazio*. Neste caso podemos representar tal conjunto de duas formas diferentes,

$$B = \{\quad\} \quad \text{ou} \quad B = \varnothing.$$

Quando um conjunto não estiver definido por uma propriedade (ou alguma característica específica), o autor desse conjunto tem que mencionar cada um de seus elementos, caso contrário, os elementos do conjunto não são possíveis de serem determinados.

4.1.1 Relação entre Conjuntos

Considerando dois conjuntos A e B, definimos entre eles a relação de igualdade e a relação de inclusão.

Definição 4.1 (Igualdade entre Conjuntos)**.** *Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos. Formalmente,* $A = B$ *se todo elemento de* A *é elemento de* B*, e todo elemento de* B *é elemento de* A*.*

Exemplo 4.2. *Considerando os conjuntos,* $A = \{2, 4, 6\}$*,* $B = \{2, 4, 6\}$ *e* $C = \{2, 5, 6\}$*, temos que:* $A = B$*, pois todos os elementos de* A *são elementos de* B *e todos os elementos de* B *são elementos de* A*. Mas* $A \neq C$*, pois nem todos os elementos de* A *pertencem a* C *(no caso, o elemento* 4*, pertence a* A *e não é pertencente a* C*). Analogamente,* $B \neq C$*.*

Definição 4.3 (Inclusão entre conjuntos)**.** *Considere dois conjuntos* A *e* B*. Se todo elemento de* A *é elemento de* B*, então temos uma relação de inclusão entre os conjuntos. Quando todo elemento de* A *pertencer ao conjunto* B *dizemos que* A *está contido em* B*, e escrevemos* $A \subset B$*. Analogamente, se todo elemento de* B *pertencer ao conjunto* A *dizemos que* $B \subset A$*. Logo, pelo que vimos no item anterior, se* $A \subset B$ *e* $B \subset A$ *então* $A = B$*. A negação da relação de igualdade e de inclusão é representada pelo símbolo não está contido e nem é iagual (*$\nsubseteq$*).*

Exemplo 4.4. *Considerando os conjuntos,* $E = \{2, 4\}$*,* $F = \{2, 4, 6\}$ *e* $G = \{4, 7\}$*, temos que:* $E \subset F$*, pois todos os elementos de* E *são elementos de* F*. Nem todos os elementos de* G *pertencem a* F*, então escrevemos* $G \nsubseteq F$*, (no caso, o elemento* 7*, pertence a* G *e não é pertence a* F*). Analogamente,* $F \nsubseteq E$*,* $E \nsubseteq G$ *e* $F \nsubseteq G$*.*

Outra maneira de estabelecer a relação de inclusão é dizer que B tem todos os elementos de A, ao invés de dizer que todos os elementos de A pertencem a B. Sendo assim, se o conjunto B contém todos os elementos de A, escrevemos $B \supset A$, e lemos B contém A. Ao negar esta afirmação dizemos que B não possui todos os elementos de A, então escrevemos $B \nsupseteq A$ e lemos B não contém A.

Analisando o Exemplo 4.4 temos que: $F \supset E$, pois F possui todos os elementos de E. Analogamente, $E \nsupseteq F$, $F \nsupseteq G$, $G \nsupseteq F$, $E \nsupseteq G$ e $G \nsupseteq E$.

Observação 4.5. *Quando um conjunto está contido em outro conjunto, dizemos que o primero é subconjunto do segundo, ou seja, se* $A \subset B$*, então* A *é subconjunto de* B*.*

Proposição 4.6. *O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.*

Demonstração. Provamos por contradição.
Considere um conjunto qualquer A, e suponha que o conjunto vazio não seja subconjunto de A, ou seja, $\varnothing \nsubseteq A$. Mas pelo que vimos da relação de inclusão, se o conjunto vazio não está contido em A, então existe pelo menos um elemento do vazio que não pertence ao conjunto A. Porém, o conjunto vazio não tem nenhum elemento, logo é um absurdo que um elemento do vazio não esteja em A. Portanto, o vazio é um subconjunto de A, isto é, $\varnothing \subset A$. □

4.1.2 Operações entre Conjuntos

Considere dois conjuntos A e B. Definimos as seguintes operações:

Definição 4.7 (União entre conjuntos)**.** *A operação união de A e B resulta em um conjunto que contém todos os elementos de A e todos os elementos de B. Denotamos tal operação por $A \cup B$ e lemos A união B.*

Exemplo 4.8. *Se $A = \{2, 7, 9\}$ e $B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$, então $A \cup B$ é um conjunto com todos os elementos de A e todos os elementos de B. Logo, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.*

Definição 4.9 (Interseção entre conjuntos)**.** *A interseção de A e B é a operação cujo resultado é um conjunto que contém apenas os elementos que aparecem em A e B ao mesmo tempo. Denotamos tal operação por $A \cap B$ e lemos A interseção B.*

Exemplo 4.10. *Se $A = \{2, 7, 9\}$ e $B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$, como no exemplo anterior, então $A \cap B = \{7, 9\}$, pois 7 e 9 são os únicos elementos que aparecem em A e B ao mesmo tempo.*

Observação 4.11. *Quando efetuamos a operação de interseção entre conjuntos e o conjunto resultante é o vazio, ou seja, quando a interseção dos conjuntos não possui nenhum elemento em comum, dizemos que esses conjuntos são disjuntos.*

Definição 4.12 (Diferença entre conjuntos)**.** *A operação diferença de A e B resulta em um conjunto que contém todos os elementos de A que não estão no conjunto B. Escrevemos $A - B$ e lemos conjunto diferença de A e B.*

Observação 4.13. *Quando fazemos a operação de diferença entre dois conjuntos devemos prestar bastante atenção, pois a ordem dos conjuntos nos leva a resultados diferentes.*

Exemplo 4.14. *Se* $A = \{2, 7, 9\}$ *e* $B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$*, então* $A - B$ *tem como resultado um conjunto com todos os elementos de* A *que não pertencem a* B*, logo,* $A - B = \{2\}$*. Analogamente,* $B - A = \{1, 3, 4, 5\}$*.*

Definição 4.15 (Complementar de um conjunto)**.** *O complementar do conjunto* A *em relação a* B *consiste no conjunto formado pelos elementos de* B *que não pertencem a* A*. Isto é, o complementar de* A *em relação a* B *é o conjunto dos elementos que faltam em* A *para que* A *tenha todos os elementos de* B*. Escrevemos* $C_B(A)$ *e lemos conjunto complementar de* A *em relação a* B*.*

Exemplo 4.16. *Se* $A = \{2, 7, 9\}$ *e* $B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$*, então* $C_B(A)$ *é o conjunto com todos os elementos que faltam para que* A *contenha* B*. Logo,* $C_B(A) = \{1, 3, 4, 5\}$*. Analogamente,* $C_A(B) = \{2\}$*.*

Observação 4.17. *Se observarmos as operações de diferença e complementar, vamos perceber que a diferença de* A *e* B *consiste no complementar de* B *em relação a* A*. Analogamente, a diferença de* B *e* A *é o complementar de* A *em relação a* B*. Isto é,* $C_B(A) = B - A$ *e* $C_A(B) = A - B$*.*

Observação 4.18. *Note que, se* A *e* B *são disjuntos* $B - A = B$ *e, de acordo com a Definição 4.15,* $C_B(A) = B - A = B$*.*

4.1.3 Identidades de Conjuntos

Quando efetuamos as operações entre conjuntos existem algumas igualdades que sempre são verdadeiras.

1. Comutatividade:
$$A \cap B = B \cap A \quad e \quad A \cup B = B \cup A.$$

2. Associatividade:
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad e \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

3. Distributividade:
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad e \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4.1.4 Cardinalidade de Conjuntos Finitos

Definição 4.19 (Conjuntos Finitos)**.** *Conjuntos finitos são todos os conjuntos que possuem uma quantidade finita de elementos.*

Por exemplo, o conjunto dos números inteiros positivos menores que 5 tem como elementos $1, 2, 3$ e 4. Logo é um conjunto finito.

Definição 4.20 (Cardinalidade de um conjunto finito)**.** *A cardinalidade de um conjunto finito é o número que indica a quantidade de elementos desse conjunto.*

Assim, se temos o conjunto $T = \{5, 6, 7, 8\}$, então o número de elementos deste conjunto é 4 e por isso T possui cardinalidade 4.

Notação 4.21. *Denotamos a cardinalidade de um conjunto A por $n(A)$, portanto sempre que estivermos levando em consideração apenas o número de elementos de um dado conjunto colocamos n e entre parênteses a letra maiúscula que define tal conjunto.*

Exemplo 4.22. *Dado o conjunto $W = \{2, 3, 7, 9, 13\}$, temos que $n(W) = 5$.*

4.2 Diagramas de Venn

Vimos no tópico anterior uma breve noção do que vem a ser conjuntos na linguagem matemática. E foram apresentadas as relações entre conjuntos e as operações que podem ser efetuadas.

Existe uma representação gráfica que facilita o entendimento das relações e operações entre conjuntos, tornando tais conceitos mais concretos e visíveis. Esta representação foi criada por John Venn, e é conhecida como Diagrama de Venn.

Os diagramas de Venn são ilustrações em forma de círculos ou elipses, usados para mostrar graficamente o agrupamento dos elementos nos conjuntos.

A seguir damos um breve relato sobre John Venn e aprofundamos nosso estudo em relação ao diagrama por ele criado.

4.2.1 John Venn

Segundo as referências [6], [8], [9] e [21] John Venn nasceu em Hull, Inglaterra, no dia 4 de agosto de 1834, e morreu em Cambridge, Inglaterra, no dia 4 de abril de 1923.

Figura 11: Foto de John Venn; Retirada da: Enciclopédia Culturama.

Aos três anos, Venn ficou órfão de mãe e só foi para a escola aos 19 anos, quando ingressou em Cambridge. Lá se formou em Matemática, porém decidiu seguir a vocação familiar e se tornou sacerdote anglicano no ano de 1859.

Venn voltou para Universidade de Cambridge, em 1862, como conferencista em Ciência Moral; estudou e ensinou lógica e teoria da probabilidade. Desenvolveu a lógica Matemática de Boole e ficou conhecido pelo seu diagrama criado para representar conjuntos.

Venn escreveu e publicou livros, deixou a igreja em 1870. Sua carreira mudou de rumo, e em 1883 seu interesse se tornou a História, com a sua eleição a um membro da Sociedade Real. Escreveu e publicou a História da Universidade de Cambridge.

Como podemos perceber, John Venn foi um matemático e filósofo britânico, estudante e professor na Faculdade Caius da Universidade de Cambridge, teve toda sua produção intelectual desenvolvida nessa universidade. Escreveu e publicou livros, porém a contribuição de John Venn que o deixou mais conhecido foi seu diagrama criado para representar conjuntos. Tal diagrama recebeu seu nome, Diagrama de Venn, e é usado atualmente no ensino da matemática elementar, lógica e teoria dos conjuntos.

Na educação básica são utilizados diagramas de Venn de dois, três ou mais conjuntos como ferramenta para que os alunos possam comparar e diferenciar os elementos dos conjuntos a partir de suas características.

4.2.2 Descrição dos Diagramas de Venn

Os Diagramas de Venn consistem de curvas fechadas simples desenhadas sobre um plano (as formas mais utilizadas são círculos e/ou elipses), usados de forma a simbolizar os conjuntos e permitir a representação de união, interseção e inclusão entre eles.

Esses diagramas permitem ainda a visualização das relações de pertinência (pertence ou não pertence) entre os elementos e conjuntos.

Assim, considerando que cada círculo representa um conjunto e a posição relativa no plano de tais círculos vai nos mostrar a relação entre os conjuntos, temos:

- Se dois conjuntos A e B possuem elementos em comum, então graficamente temos uma parte do círculo que representa A se sobrepõem ao círculo representante de B, formando uma interseção entre os conjuntos A e B, que identifica exatamente os elementos que os dois têm em comum.

- Se o conjunto A tiver todos os elementos de B, então significa que A está contido em B; desse modo quando fizermos o Diagrama de Venn o círculo que representa o conjunto A está dentro do círculo que representa o conjunto B.

- Se os conjuntos A e B não tiverem nenhum elemento em comum, isto é, se A e B forem conjuntos disjuntos, na representação por Diagramas temos dois círculos totalmente separados, sem nenhuma interseção.

Sendo assim, durante este tópico mostramos como fazer o Diagrama de Venn e como utilizá-lo na resolução de problemas sobre conjuntos.

Considere os conjuntos A, B, C e D, onde A representa o conjunto dos números inteiros positivos ímpares menores que 10, B representa os números inteiros maiores que 3 e menores que 8, C é o conjunto dos inteiros positivos pares menores ou igual a 10 e D são os inteiros de 1 a 10.

Portanto,
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Utilizamos esses conjuntos para exemplificar o uso do Diagrama de Venn.

1. Representação de um único conjunto:

   Vamos representar uma única coleção e seus objetos, no caso ilustramos o conjunto A em um Diagrama de Venn.

Para isso vamos utilizamos um círculo que representa o conjunto A, e dentro dele colocamos os elementos pertencentes a esse conjunto.

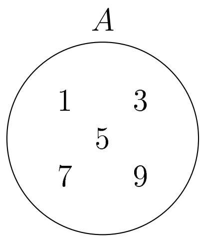

Figura 12: Representação do Conjunto A.

A representação acima é um diagrama do conjunto A. Podemos de maneira análoga representar os conjuntos B, C e D, assim temos:

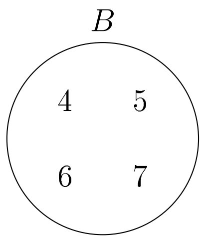

Figura 13: Representação do Conjunto B.

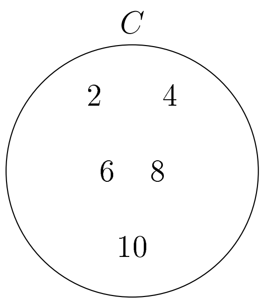

Figura 14: Representação do Conjunto C.

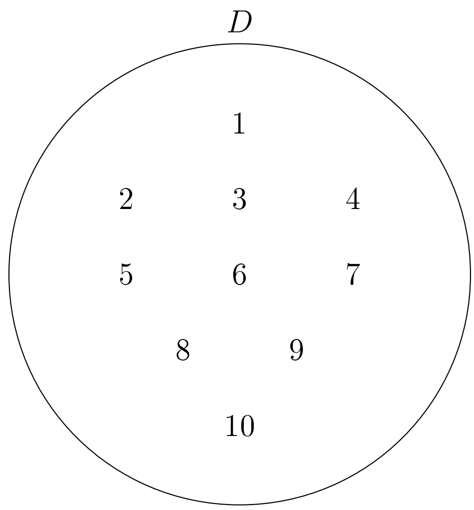

Figura 15: Representação do Conjunto D.

Fizemos acima a representação de quatro diagramas, separadamente, mostrando os elementos de cada conjunto A, B, C e D.

2. Representação de dois conjuntos:

   Para representar dois conjuntos em um único diagrama precisamos levar em consideração os elementos comuns aos dois grupos, e os elementos que são únicos de cada grupo.
   Neste caso ilustramos o conjunto A e B em um Diagrama de Venn.
   Para isso vamos utilizamos um círculo que representa o conjunto A e outro para representar o conjunto B. Sabendo que A e B possuem elementos em comum, devemos colocar esses elementos na interseção dos dois conjuntos.
   Sendo assim, temos dois círculos representados no plano e uma parte desses círculos que se sobrepõem ao outro.

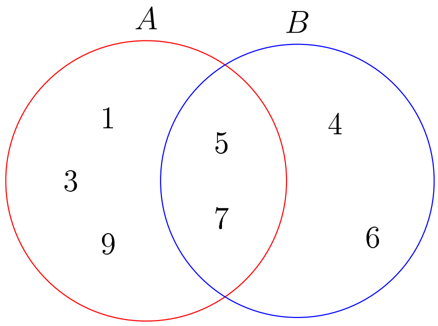

Figura 16: Representação dos Conjuntos A e B.

Como percebemos os elementos 1, 3 e 9 só pertencem ao conjunto A, os elementos 4 e 6 pertencem apenas ao B, já os elementos 5 e 7 pertencem aos dois conjuntos; assim, tais elementos ficam na interseção dos círculos. O caso do diagrama com os conjuntos B e C é análogo.

Façamos agora a representação dos conjuntos A e C em um único diagrama. Os conjuntos A e C são disjuntos, pois $A \cap C = \varnothing$. Logo, os círculos que representam A e C não se sobrepõem, isto é, não tem interseção.

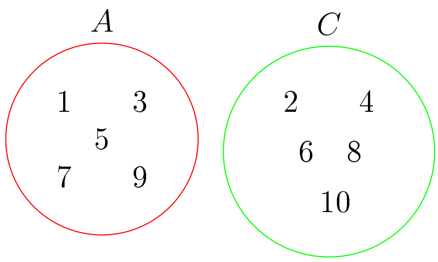

Figura 17: Representação dos Conjuntos A e C.

Ilustramos os conjuntos A e D, usando o Diagrama de Venn:

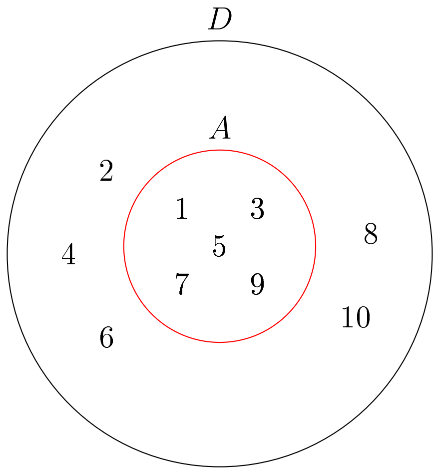

Figura 18: Representação dos Conjuntos A e D.

A partir do diagrama podemos perceber que o conjunto D envolve todo o conjunto A, pois A está contido em D, ou seja, todos os elementos do conjunto A pertencem ao conjunto D.
Se fizermos os diagramas dos conjuntos B e D ou C e D vemos de maneira análoga que D contém B e D contém C, respectivamente.

3. Representação de três ou mais conjuntos:

   Ao analisarmos três ou mais conjuntos seguimos o mesmo raciocínio e assim montamos o Diagrama de Venn pelo mesmo procedimento.
   Levamos em consideração os elementos comuns aos conjuntos, e os elementos que são únicos em cada conjunto.
   Como exemplo deste caso façamos o diagrama dos conjuntos A, B, C e D.
   Para isso utilizamos um círculo que representa o conjunto A, outro para representar o conjunto B, outro o C e ainda temos o círculo D.
   Analisando as interseções, temos:

   - A, B, C e D não possuem elementos que são comuns a todos.
   - A e C também não possuem elementos em comum, logo começamos traçando os conjuntos A e C separadamente, pois são disjuntos.
   - O conjunto B possui dois elementos em comum com A e dois em comum com C, logo o conjunto B tem uma interseção com cada um desses conjuntos.

- Por último temos o conjunto D, este possui todos os elementos dos conjuntos anteriores. Logo A, B, C estão contidos em D.

Ilustrando esse diagrama, obtemos:

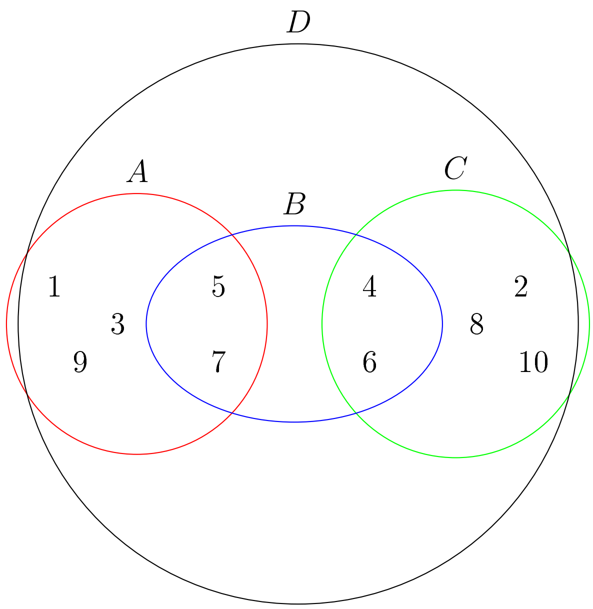

Figura 19: Representação dos Conjuntos A, B, C e D.

Portanto, se quisermos utilizar um Diagrama de Venn ilustrando um ou mais conjuntos, basta analisarmos se há interseções e quais são elas; em seguida devemos verificar os conjuntos como um todo e desenhar.

4.2.3 Aplicação do Diagrama de Venn

Neste tópico fazemos uma aplicação do uso do Diagrama de Venn.

Para essa aplicação, resolvemos um exercício retirado da prova elaborada pela Banca Funrio para o Concurso do Corpo de Bombeiro do Rio de Janeiro de 2008, para Técnico em Enfermagem.

Exemplo 4.23. *Na seleção de operários da construção civil, foram entrevistados 80 candidatos e constatou-se que:*

- *45 desses candidatos sabiam lidar com pintura;*

- *50 deles sabiam lidar com instalações elétricas;*

- *50 sabiam lidar com instalações hidráulicas;*

- *15 tinham habilidades nas três modalidades de serviço.*

Todos os operários tinham habilidade em pelo menos uma das modalidades acima. Foram contratados todos os que tinham habilidade em exatamente duas modalidades. Nessas condições, o número de candidatos contratados foi:

a) 20 b) 10 c) 35 d) 60 e) 55

Quando lemos um exercício e percebemos que ele faz agrupamentos de objetos, elementos ou pessoas, de acordo com alguma característica, propriedade ou habilidade devemos pensar em conjunto.

Analisando os agrupamentos feitos no enunciado dessa questão, observamos 3 conjuntos diferentes. O primeiro se refere às pessoas que sabem lidar com pintura, o segundo que sabem lidar com instalações elétricas e o terceiro com instalações hidráulicas.

Formamos então um diagrama de Venn com esses 3 conjuntos os quais chamamos de P (pintura), E (elétrica) e H (hidráulica), referentes às habilidades das pessoas de cada conjunto.

Cada conjunto é representado no diagrama por um círculo. E cada círculo contém o número de elementos ali agrupados, diferente dos diagramas anteriores nos quais colocamos elemento por elemento.

Iniciamos analisando as interseções dos conjuntos dados:

- Os conjuntos P, E e H têm em comum 15 elementos, ou seja, 15 pessoas têm as três habilidades.

- As pessoas que têm exatamente duas habilidades, estão nas interseções P e E, P e H ou E e H.

  Porém esses números não foram mencionados no enunciado, pois é exatamente o que se deseja encontrar. Queremos saber quantos candidatos foram contratados, sendo estes os que tinham habilidades em exatamente duas modalidades.

  Denotamos por a o número de candidatos com as habilidades P e E, b o número de candidatos com as habilidades P e H, c o número de candidatos com as habilidades E e H.

- Colocados os números das interseções, falta designar os números de candidatos que têm apenas uma das habilidades. Para isso, devemos levar em conta o total de candidatos que tem cada uma das habilidades.

- Apenas pintura: pelo enunciado 45 pessoas sabem lidar com pintura; mas sabemos que 15 pessoas têm habilidades em pintura, hidráulica e elétrica; além disso, a pessoas tem habilidade em pintura e elétrica e b pessoas sabem lidar com pintura e hidráulica. Portanto, o número de pessoas que sabem lidar apenas com pintura é $45 - 15 - a - b = 30 - a - b$.

- Apenas instalação elétrica: fazendo uma análise análoga ao item anterior temos que o número de pessoas que lidam apenas com elétrica é $50-15-a-c = 35-a-c$.

- Apenas instalação hidráulica: o número de pessoas com habilidade apenas em hidráulica é $50 - 15 - b - c = 35 - b - c$.

Montando esse diagrama, obtemos:

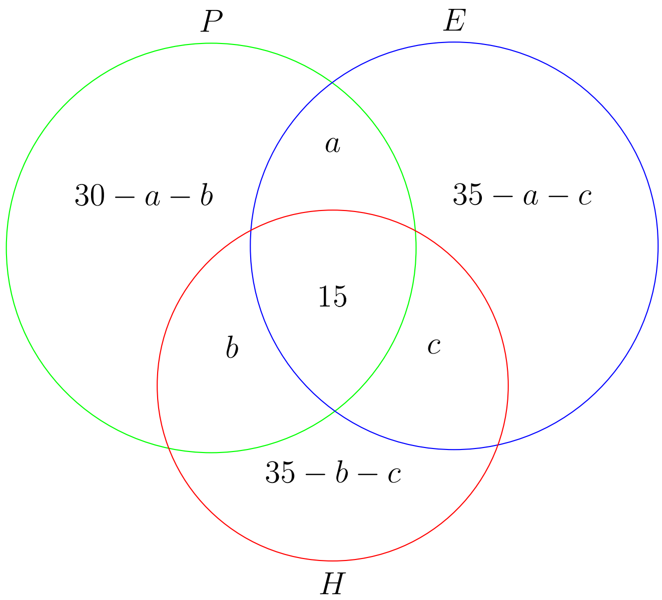

Figura 20: Diagrama dos Conjuntos P, E e H.

Sabemos que 80 é o número total de entrevistados; e cada um dos 80 tem pelo menos uma das habilidades; ou seja, todas essas oitenta pessoas estão contabilizadas no diagrama montado, seja nas interseções, ou em apenas uma das modalidades.

Logo, para descobrir qual o número total de candidatos que tinham apenas duas habilidades $(a+b+c)$, que são os candidatos contratados, basta resolver a equação em que a soma de todos os candidatos do diagrama são exatamente os 80 entrevistados.

Assim,

$$(30 - a - b) + (35 - a - c) + (35 - b - c) + (a) + (b) + (c) + (15) = 80$$

$$30 - a - b + 35 - a - c + 35 - b - c + a + b + c + 15 = 80$$

$$(30 + 35 + 35 + 15) + (-a - a + a) + (-b - b + b) + (-c - c + c) = 80$$

$$115 - a - b - c = 80$$

$$115 - 80 = a + b + c$$

$$35 = a + b + c$$

$$a + b + c = 35$$

Logo, se foram contratados todos os que tinham habilidade em exatamente duas modalidades, então o número de candidatos entrevistados contratados foi $a+b+c = 35$.

A alternativa correta é C.

5 Relação entre MDC e MMC com Diagrama de Venn

O primeiro contato que um aluno tem com o conteúdo de múltiplos e divisores é no 4º e/ou 5º ano do Ensino Fundamental, também conhecido como 3ª série e/ou 4ª série, respectivamente.

Mas, é no 6º ano (5ª série) que o aluno tem no seu currículo escolar os conteúdos sobre números primos, fatoração em primos, Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum.

Assim, é no 6º ano que temos crianças de apenas 11 anos às quais precisam lidar com esse conteúdo de forma a memorizar processos, algumas vezes até decorar fórmulas e aplicar corretamente os conceitos de acordo com a situação problema proposta. Em muitos casos, tais crianças reproduzem os procedimentos que o professor fez inicialmente, porém sem entender as ideias que levam à formalização daquele processo.

Ao adentrarmos em uma sala de aula do 6º ano temos a expectativa que o estudante entenda Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum de dois ou mais números inteiros positivos e mostre sua compreensão em situações problemas, porém na maioria das vezes não apresentamos para esses alunos uma abordagem visual do que estamos falando.

Contradizendo totalmente a linha de raciocínio da Matemática, em que um conteúdo depende do outro, um professor de Ensino Médio ensina para alunos de 15 anos Diagrama de Venn e Teoria dos Conjuntos como se fosse um contéudo nunca visto antes, isto é, como se fosse algo a parte daquilo que o estudante já aprendeu nos anos anteriores.

Sendo assim, este capítulo visa mostrar uma abordagem ilustrativa, para encontrar o Máximo Divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum de dois ou três números inteiros, apresentando o Diagrama de Venn como uma ajuda visual que permite aos alunos uma melhor assimilação do processo que está sendo feito.

Vemos, consequentemente, a relação que existe entre esses conteúdos, e como esse procedimento pode ser facilmente generalizado para encontrar o MDC e o MMC de três ou mais inteiros.

5.1 Encontrar MDC e MMC Utilizando o Diagrama de Venn

O conteúdo desta e das próximas seções deste capítulo é baseado no artigo [3], o qual trata esse assunto de maneira suscinta.

Vimos no decorrer dos capítulos anteriores conceitos importantes e métodos para calcular o Máximo Divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum de dois números inteiros positivos. Aprendemos a listar os fatores primos dos números inteiros, identificar os fatores comuns, encontrar o MDC e o MMC. Também vimos como este processo pode ser feito usando Algoritmo de Euclides.

Agora, podemos entender visualmente MDC e MMC usando Diagrama de Venn.

Procedimento para calcular MDC e MMC de dois números inteiros positivos usando o Diagrama de Venn

Suponha que os números inteiros que queremos encontrar o MDC e o MMC sejam x e y, assim:

1. Devemos encontrar a fatoração prima de cada um dos números dados;

2. Como representamos a fatoração dos números separadamente, então podemos visualizar e contar os fatores primos que se repetem em ambos os inteiros;

3. Para representar no diagrama de Venn, consideramos os fatores primos de x como elementos de um conjunto X, e os fatores primos de y como elementos de outro conjunto Y, sendo que os fatores pertencentes a ambos os números são colocados na interseção dos conjuntos X e Y;

4. Como os números da interseção dividem tanto x como y, então os divisores simultâneos desses números são todas as combinações dos fatores pertencentes à interseção. E portanto, o MDC é o maior número presente nesta combinação, isto é, é o produto de todos os elementos da interseção;

5. Sabemos pelo conceito de múltiplos, que um número inteiro z para ser múltiplo de x deve conter todas as potências de fatores primos presentes em x, e para ser múltiplo de y deve conter todas as potências de fatores de y, logo para z ser múltiplo de ambos os números deve conter em sua decomposição as potências de fatores primos de ambos. Portanto, o MMC de x e de y é o produto de todos os elementos que aparecem no diagrama.

Exemplo 5.1. *Encontre o Máximo Divisor Comum (MDC) e o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) dos números 252 e 270 utilizando o Diagrama de Venn.*

Seguindo o procedimento descrito anteriormente temos:

1º Passo

$$\begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, $252 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$ e $270 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5$.

2º Passo

Colocando em negrito os fatores que se repetem em ambos, temos:

$$252 = \mathbf{2}\cdot 2\cdot \mathbf{3}\cdot \mathbf{3}\cdot 7 \quad \text{e} \quad 270 = \mathbf{2}\cdot \mathbf{3}\cdot \mathbf{3}\cdot 3\cdot 5.$$

Isto é, os números pertencentes a ambas fatorações são: 2, 3 e 3.

3º Passo

Considere os fatores primos do número 252 como elementos de um conjunto, que chamamos de E e os fatores primos do inteiro 270 como elementos de outro conjunto, F. Esses dois conjuntos possuem elementos em comum, logo, temos uma interseção no diagrama, e nesta interseção estão os números 2, 3 e 3, pois são os fatores que se repetem nas fatorações de ambos os números.

Logo, o diagrama fica da seguinte maneira:

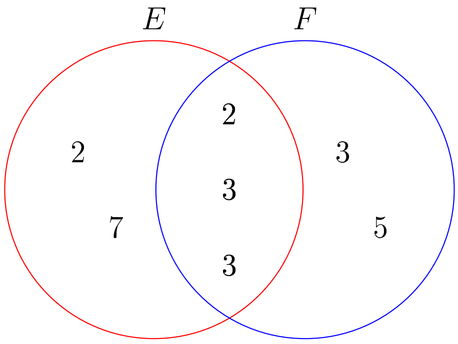

Figura 21: Diagrama dos Conjuntos E e F.

4º Passo

Como os números 2, 3 e 3 dividem ambos os inteiros, então os divisores simultâneos de 252 e 270 são todas as combinações de 2, 3 e 3, mais o número 1, que é divisor de todos os números. Portanto, os divisores de 252 e 270 são: $1, 2, 3, 2\cdot 3, 3\cdot 3, 2\cdot 3\cdot 3$, ou seja, $1, 2, 3, 6, 9, 18$.

Assim, o Máximo Divisor Comum de 252 e 270 é o produto dos fatores comuns, 2, 3, 3, que são os elementos da interseção. Então $mdc(252, 270) = 2\cdot 3\cdot 3 = 18$.

5º Passo

Seguindo o raciocínio do conceito de múltiplos temos que: para ser múltiplo de 252 o número precisa ter os fatores primos de 252 e para ser múltiplo de 270 o número deve ter os fatores primos de 270, então para ser múltiplo de ambos, deve ter os fatores primos de ambos. Logo, os múltiplos de 252 e de 270 devem conter em sua fatoração os números presentes em $E \cup F$.

Portanto, o Mínimo Múltiplo Comum de 252 e 270 é o produto dos números que aparecem no diagrama anterior, assim: $mmc(252, 270) = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 3780$.

Observação 5.2. *Analisando o raciocínio descrito temos que, montado o diagrama de Venn, o produto dos elementos da interseção nos dá o Máximo Divisor Comum. O produto dos elementos de cada conjunto nos fornece os números que tínhamos inicialmente, e o produto de todos os números (união dos conjuntos) resulta no Mínimo Múltiplo Comum dos números considerados.*

Seguindo este raciocínio façamos outro exemplo.

Exemplo 5.3. *Determine o MDC e o MMC dos números* 504 *e* 588*.*

Decompondo os números em fatores primos temos:

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

588	2
294	2
147	3
49	7
7	7
1	

Logo, $504 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$ e $588 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot 7$.

Colocando em negrito os fatores que se repetem, temos: $504 = \mathbf{2}\cdot \mathbf{2}\cdot 2\cdot \mathbf{3}\cdot 3\cdot \mathbf{7}$ e $588 = \mathbf{2}\cdot \mathbf{2}\cdot \mathbf{3}\cdot \mathbf{7}\cdot 7$. Isto é, os números pertencentes a ambas fatorações são: 2, 2, 3 e 7.

Se L e M são os conjuntos dos números que aparecem na fatoração de 504 e 588, respectivamente. Então o diagrama de Venn representando tais conjuntos é ilustrado a seguir:

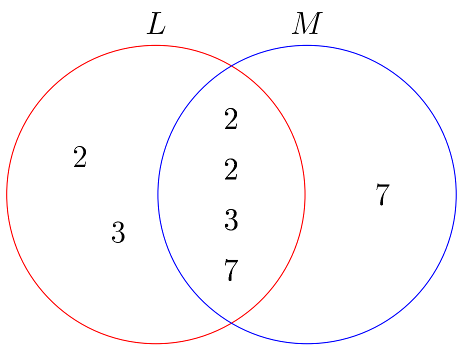

Figura 22: Diagrama dos Conjuntos L e M.

Analisando o diagrama temos que o Máximo Divisor Comum de 504 e 588 é o produto dos números comuns, que são os elementos da interseção, então:

$mdc(504, 588) = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7 = 84$. E o Mínimo Múltiplo Comum de 504 e 588 é o produto de todos os números que aparecem no diagrama, que são os elementos da união, assim: $mmc(252, 270) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 7 = 3528$.

Cálculo do MDC e do MMC de três ou mais números inteiros positivos

Cada vez que aumentamos a quantidade de números que estão sendo trabalhados, analisar seus MDC e MMC vai se tornando uma tarefa mais complicada e difícil. Principalmente, para o estudante que não compreendeu o processo de fatoração de números inteiros positivos, bem como os conceitos de MDC e MMC.

Desse modo, vemos a necessidade cada vez maior de uma ligação do conteúdo a um conceito conhecido, ou a algo que o aluno consegue visualizar e abstrair um conhecimento para se chegar a uma aprendizagem significativa.

Sendo assim, vamos neste tópico exemplificar o uso do Diagrama de Venn para calcular o MDC e o MMC entre três números. O procedimento é análogo ao descrito para dois números.

Exemplo 5.4. *Determine o Máximo Divisor Comum (MDC) e o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) dos números 8085, 1575, 990 utilizando o Diagrama de Venn.*

Como nos exemplos anteriores nosso primeiro passo é encontrar a fatoração prima de cada um dos inteiros dados. Assim,

$$\begin{array}{r|l} 8085 & 3 \\ 2695 & 5 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1575 & 3 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, $8085 = 3\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 11$, $1575 = 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7$ e $990 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 11$.

Como representamos a fatoração dos números separadamente podemos visualizar e contar os fatores primos que se repetem nos três inteiros, e os que se repetem em apenas dois dos inteiros.

Assim, colocando em amarelo os fatores que se repetem nos três números, em vermelho os que se repetem apenas em 8085 e 1575, em azul os comuns somente a 8085 e 990, e em verde os elementos comuns a 1575 e 990, temos que: $8085 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11$, $1575 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$ e $990 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$.

Para representar no diagrama de Venn devemos considerar os fatores primos do número 8085 como um conjunto, que chamamos de P, os fatores primos pertencentes ao inteiro 1575 como outro conjunto, Q, e os fatores primos de 990 de R.

Esses três conjuntos possuem elementos em comum, isto é, os números pertencentes a todas fatorações que são: 3 e 5. Pertencente aos conjuntos P e Q temos o número 7; e pertencente à interseção P e R temos o 11, e na interseção de Q com R temos o elemento 3.

Logo, a ilustração do nosso diagrama fica da seguinte maneira:

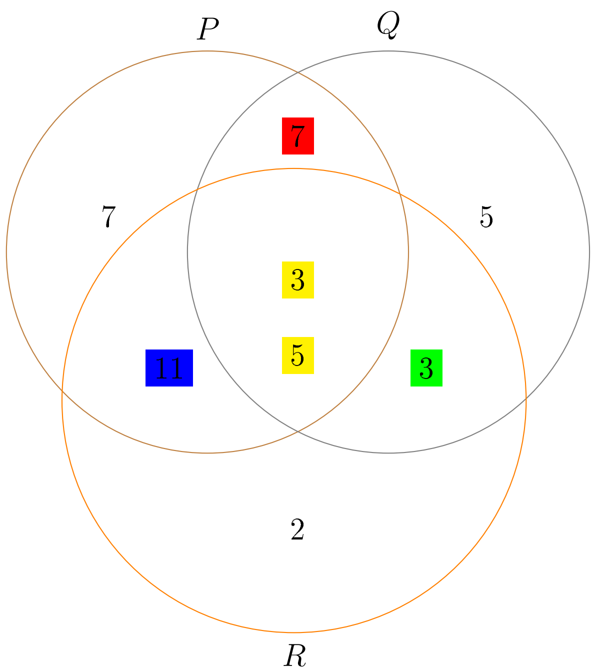

Figura 23: Diagrama dos Conjuntos P, Q e R.

Analisando o diagrama observamos que:

- 3 e 5, que são comuns aos 3 conjuntos, dividem 8085, 1575 e 990 ao mesmo tempo;
- 7, é comum apenas ao conjunto P e Q, isto é, divide 8085 e 1575, mas não divide 990;

- 11, comum aos conjuntos P e R, divide 8085 e 990, mas não divide 1575;
- 3, comum aos conjuntos Q e R, divide 1575 e 990, porém não divide 8085.

Se os números 3 e 5 dividem os três inteiros do enunciado, então os divisores desses inteiros são todas as combinações de 3 e 5, mais o número 1 que é divisor de todos os números, logo os divisores simultâneos de 8085, 1575 e 990 são $1, 3, 5, 3 \cdot 5$.

Assim, o maior divisor comum de 8085, 1575 e 990 é o produto dos números do conjunto $P \cap Q \cap R$, isto é: $mdc(8085, 1575, 990) = 3 \cdot 5 = 15$.

Para que um número seja múltiplo de 8085, 1575 e 990 este deve ter os fatores primos de todos eles. Assim, os múltiplos simultâneos de 8085, 1575 e 990 são os múltiplos do produto dos números pertencentes a $P \cup Q \cup R$.

Portanto, o Mínimo Múltiplo Comum que procuramos é o produto dos números que aparecem no diagrama, isto é, $mmc(8085, 1575, 990) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 = 242550$.

É também possível, efetuar uma análise do MDC e MMC de dois desses números, utilizando o diagrama da Figura 23.

Por exemplo, para calcular o MDC e o MMC de 1575 e 990 podemos estabelecer o seguinte raciocínio:

Sabendo que o MDC é o produto dos elementos da interseção dos conjuntos Q e R, então, $mdc(1575, 990) = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$. E ainda, sabendo que o MMC é o produto dos elementos da união dos conjuntos Q e R temos que,

$$mmc(1576, 990) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 3150.$$

Portanto, depois de desenhado o diagrama, basta saber os conceitos de interseção e união de conjuntos para calcularmos o MDC e o MMC de dois elementos propostos.

5.2 Relação entre MDC e MMC com Diagrama de Venn

5.2.1 Relação entre MDC e MMC de Dois Números Inteiros Positivos

Vimos no Capítulo 3 resultados acerca de Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum de dois números inteiros positivos. A partir de teoremas de Teoria dos Números provamos o Teorema 3.4, onde afirma-se que o produto de dois inteiros positivos é igual ao produto entre o MDC e o MMC destes dois números.

Isto é,

Dados a e $b \in \mathbb{Z}_{+}^{*}$, então podemos afirmar que:

$$a \cdot b = mdc(a,b) \cdot mmc(a,b). \tag{2}$$

Esta relação foi provada no Capítulo 3 de acordo com conteúdos vistos no Ensino Superior. Desta maneira, em geral, apresentamos aos alunos do Ensino Básico, a fórmula pronta, mas não discutimos sua demonstração.

Ou seja, quando apresentamos essa relação pronta para os nossos alunos estamos permitindo que os estudantes sejam capazes de calcular o MMC sabendo o valor dos números em questão e tendo encontrado o MDC, porém mais uma vez, estamos levando a nossos alunos uma fórmula pronta para ser decorada e aplicada, sem verdadeiramente entender o processo como um todo.

Contudo, se analisarmos esse resultado pela Teoria dos Conjuntos, vemos que existe uma maneira de discutir utilizando o Diagrama de Venn. Podemos apresentar esta ideia em sala de aula para que o estudante tenha uma melhor assimilação do resultado.

Façamos novamente uma discussão da Relação 2, explorando a representação visual do MDC e MMC, fornecida pelo Diagrama de Venn.

Considere os conjuntos finitos A e B, com r elementos pertencentes apenas ao conjunto A, s elementos pertencentes aos conjuntos A e B simultaneamente e t elementos pertencentes apenas ao conjunto B. Utilizando o Diagrama de Venn para representar tais conjuntos temos:

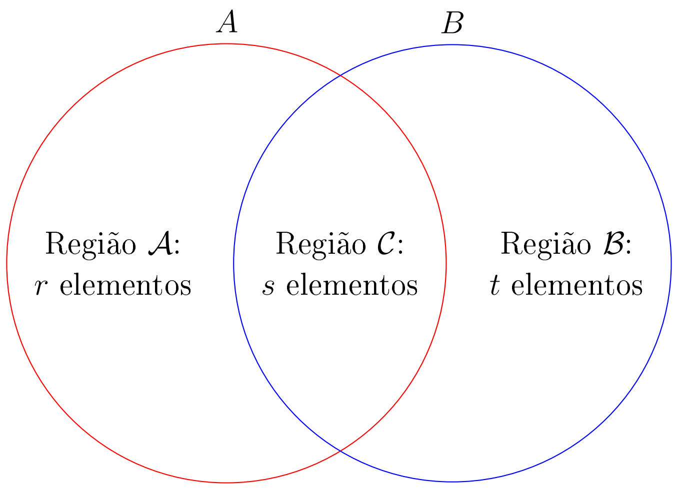

Figura 24: Diagrama dos Conjuntos A e B.

O total de elementos do conjunto A é igual a soma dos elementos que estão na Região $\mathcal{A}$ e os elementos da Região $\mathcal{C}$. Logo, pela Definição 4.20, temos que

$$n(A) = r + s. \tag{3}$$

Analogamente, o total de elementos do conjunto B é igual a soma dos elementos que estão na Região $\mathcal{B}$ e os elementos da Região $\mathcal{C}$. Isto é,

$$n(B) = s + t. \tag{4}$$

Somando as Equações 3 e 4, teremos:

$$n(A) + n(B) = r + s + s + t,$$

que podemos reescrever da seguinte forma

$$n(A) + n(B) = r + s + t + s. \tag{5}$$

Mas, sabemos que a operação união entre os conjuntos A e B, resulta em todos os elementos de A e todos os elementos de B, sem repeti-los, isto é, de acordo com o Diagrama 24, o número de elementos de $A \cup B$, são os elementos da Região $\mathcal{A}$, mais os elementos da Região $\mathcal{B}$, mais os elementos da Região $\mathcal{C}$. Logo,

$$n(A \cup B) = r + s + t. \tag{6}$$

E ainda, sabemos que a operação interseção entre os conjuntos A e B resulta em um conjunto que contém apenas os elementos que aparecem em A e B simultaneamente, ou seja, no Diagrama 24,

$$n(A \cap B) = s. \tag{7}$$

Assim, substituindo as Equações 6 e 7 na Equação 5, temos:

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B). \tag{8}$$

Como já vimos, quando calculamos o MDC e o MMC de dois números utilizando diagrama de Venn, estamos nos referindo ao produto dos elementos da interseção e ao produto dos elementos da união, respectivamente. E quando pensamos na fatoração de dois números, a e b, cujos fatores primos são elementos dos conjuntos A e B, respectivamente, então a e b são os produtos dos elementos de A e de B, respectivamente.

Logo, existe uma relação entre as Equações 2 e 8 em que a multiplicação na Equação 2 foi substituída pela adição na Equação 8. Neste paralelo entre as equações, substituímos o número de elementos dos conjuntos pelo produto de elementos desses conjuntos.

Claramente, esta maneira de discutir o Teorema 1 está longe de ser uma demonstração formal para tal resultado. Porém, nos fornece uma alternativa para apresentá-lo a alunos do Ensino Básico, no intuito de facilitar a assimilação da Expressão 2 por tais estudantes, evitando levar uma fórmula pronta que eles devem apenas memorizar.

5.2.2 Relação entre MDC e MMC de Três ou mais Números Inteiros Positivos

Nesta seção estendemos a análise feita na seção anterior, considerando três inteiros positivos.

Analisamos o que acontece quando nos referimos a três conjuntos finitos, aos quais damos os nomes de A, B e C, cujos elementos correspondem aos fatores primos de três inteiros positivos a, b, c, respectivamente.

Sabemos que quando temos dois conjuntos finitos, é válida a Equação 8

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B),$$

a qual é equivalente à igualdade,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \tag{9}$$

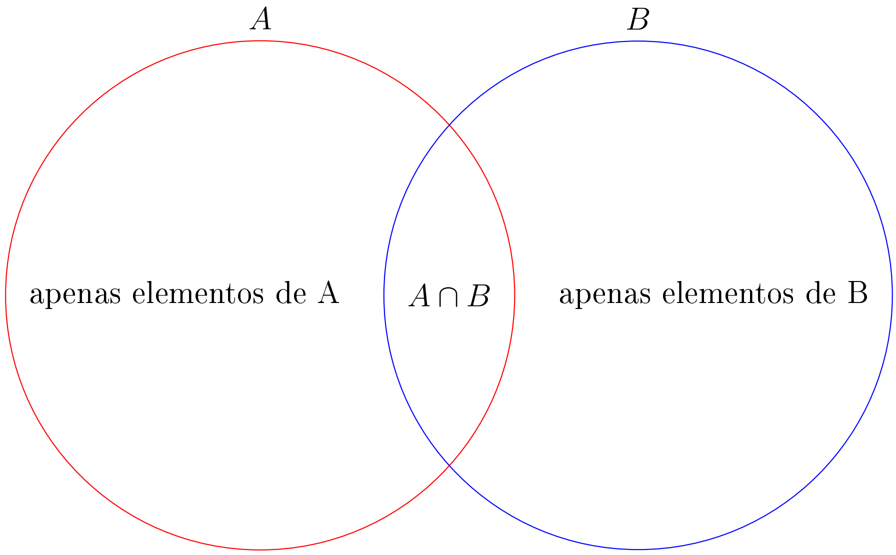

Figura 25: Diagrama dos Conjuntos A e B.

Ao considerarmos um terceiro conjunto C o diagrama de Venn que representa tais conjuntos é como na Figura 26.

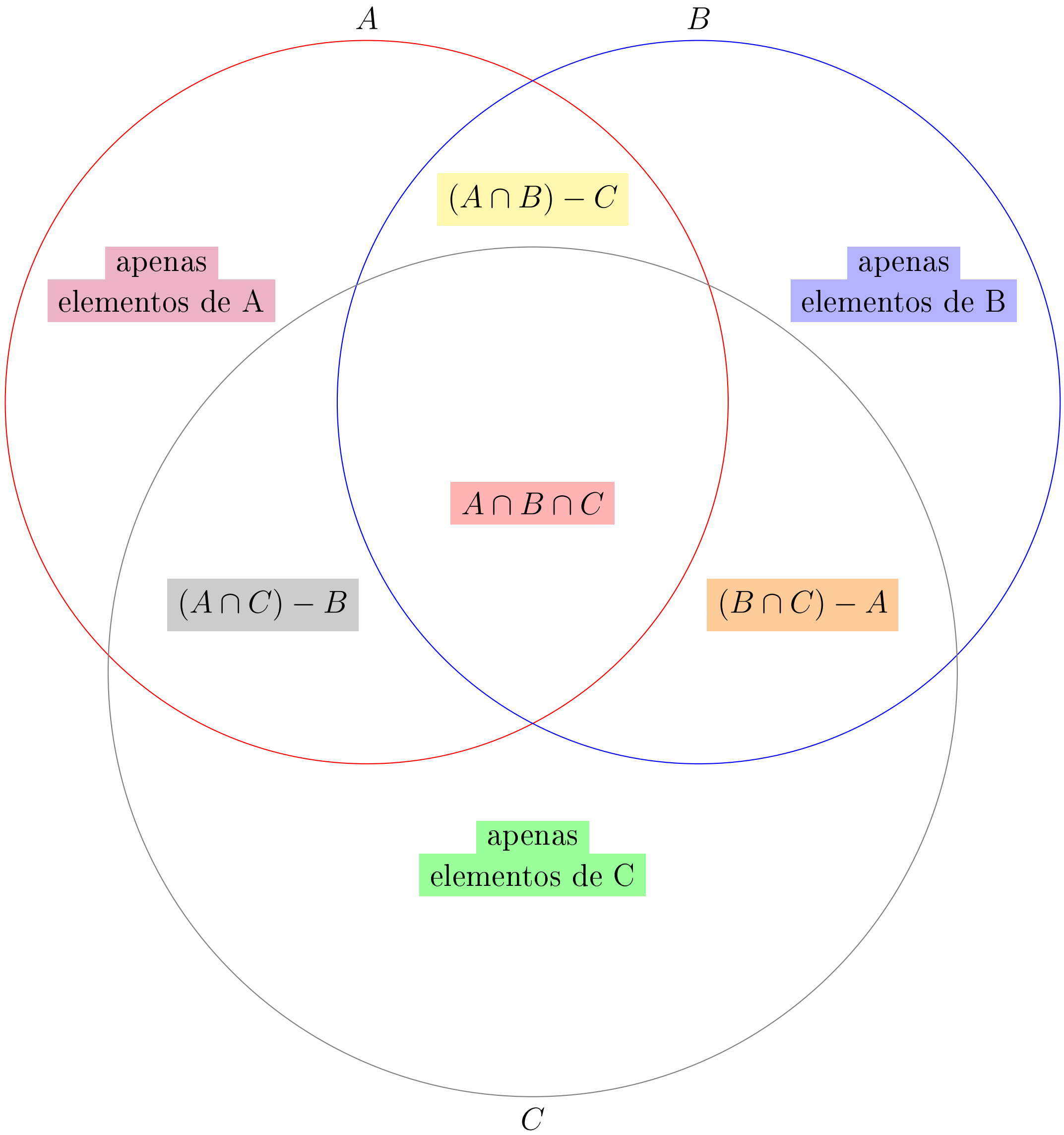

Figura 26: Diagrama dos Conjuntos A, B e C.

Ao considerarmos as interseções do diagrama da Figura 26 obtemos:

- $(A \cap B) - C \cup A \cap B \cap C = A \cap B$.
- $(A \cap C) - B \cup A \cap B \cap C = A \cap C$.
- $(B \cap C) - A \cup A \cap B \cap C = B \cap C$.

Note que ao contabilizarmos $n(A \cup B \cup C)$ devemos efetuar $n(A) + n(B) + n(C)$ e subtrair $n(A \cap B)$ (pois este valor foi contabilizado tanto em $n(A)$ como em n(B)), $n(A \cap C)$, $n(B \cap C)$ (por motivo análogo de descontar $n(A \cap B)$). Feito isso, devemos acrescentar ao número resultante $n(A \cap B \cap C)$, pois o número de elementos desse conjunto foi desconsiderado ao subtrairmos $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$ e $n(B \cap C)$.

Logo, podemos escrever a fórmula:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Reescrevendo essa equação, temos:

$$n(A \cup B \cup C) + n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) = n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C). \quad (10)$$

Observação 5.5. *A Expressão 10 pode ser obtida algebricamente, a partir, da Equação 8 e das Identidades de Conjuntos.*

Considerando os conjuntos finitos A, B e C como mostrados na Figura 26, temos:

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C \Longrightarrow$$

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C). \quad (11)$$

Mas, sabemos que $(A \cup B \cup C)$ são todos os elementos contidos nas regiões definidas pelo diagrama, Figura 26, logo, a união dessas regiões consiste em um conjunto formado por todos os elementos presentes no diagrama.

Deste modo, a partir das Equações 9 e 11, segue que

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C)) \Longrightarrow$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap (B \cup C)). \quad (12)$$

Utilizando a Identidade de conjuntos que trata sobre distributividade, temos que

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n((A \cap B) \cup (A \cap C)).$$

Novamente, pela Equação 9

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)] \Longrightarrow$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)]. \quad (13)$$

Ou seja,

$$n(A \cup B \cup C) + n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) = n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C). \quad (14)$$

Utilizando o mesmo processo que fizemos quando tratamos de dois conjuntos, substituímos a adição do número de elementos dos conjuntos pela multiplicação dos elementos destes conjuntos. E como estamos querendo relacionar MDC e MMC trocamos as interseções por MDC e a união por MMC.

Assim, a partir da Expressão 14, podemos estabelecer que

$$mmc(a,b,c) \cdot mdc(a,b) \cdot mdc(a,c) \cdot mdc(b,c) = a \cdot b \cdot c \cdot mdc(a,b,c) \Longrightarrow$$

$$mmc(a,b,c) = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot mdc(a,b,c)}{mdc(a,b) \cdot mdc(a,c) \cdot mdc(b,c)}.$$

Com essas mesmas ideias podemos generalizar a fórmula que relaciona MDC e MMC para conjuntos com mais de três elementos.

Apesar deste Capítulo estar voltado para o Ensino Básico, isto é, para o estudo de Diagramas de Venn de até três conjuntos, estendemos um pouco este tópico, não fugindo do assunto, mas apenas buscando uma visualização para a generalização desta fórmula.

Para encontrarmos a relação entre MDC e o MMC de mais de três números inteiros positivos, seguimos o raciocínio utilizado anteriormente, isto é, determinamos o número de elementos da união dos conjuntos em questão.

Quando aumentamos progressivamente o número de conjuntos e calculamos a cardinalidade ou o número de elementos da união desses conjuntos, vai se criando uma sequência lógica a qual resulta em uma generalização de um dos princípios básicos de contagem conhecido como Princípio da Inclusão e Exclusão, também chamado de PIE.

Utilizamos a Referência [17] para conhecermos PIE e chegarmos a essa generalização.

O PIE é de grande importância em Análise Combinatória ao se trabalhar com uma quantidade finita de conjuntos finitos. Este princípio nos diz que, para obter o número de elementos da união de um número finito de conjuntos finitos, devemos proceder da seguinte forma:

1. Somar o número de elementos de cada um dos conjuntos;

2. Subtrairmos a soma dos números de elementos das duplas interseções possíveis;

3. Somar os números de elementos das triplas interseções possíveis;

4. Subtrair a soma dos números de elementos das quádrupas interseções possíveis;

   e assim, deve-se continuar o processo até chegar ao número de elementos da interseção de todos os conjuntos.

Para o caso de dois conjuntos A e B, o PIE se reduz à Equação 9, em que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

já demonstrada anteriormente.

Para o caso de três conjuntos A, B e C, o PIE se reduz à Equação 13, em que

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C),$$

também já provada.

Agora, se tivermos quatro conjuntos A, B, C e D, então pelo PIE, temos:

- 1º. $n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$;
- 2º. $-n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D)$;
- 3º. $n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(B \cap C \cap D)$;
- 4º. $-n(A \cap B \cap C \cap D)$.

Logo, para o caso de quatro conjuntos, utilizando o PIE, obtemos:

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C)$$

$$-n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D).$$

Generalizando temos que, se $A_1, A_2, ...A_n$ são conjuntos finitos, então:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2} n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$$

$$- \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}) + ... + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

com $1 \leq i_k \leq n$.

Seguindo o raciocínio das discussões anteriores, suponha que $A_1, A_2, ...A_n$ sejam os conjuntos de fatores primos de inteiros $a_1, a_2, ..., a_n$, respectivamente. Substituindo na equação anterior a adição do número de elementos do conjunto pela multiplicação dos elementos de tal conjunto, a subtração por divisão, as interseções por MDC e as uniões por MMC, temos que:

$$mmc(a_1, a_2, ..., a_n) =$$
$$\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3} mdc(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}) \cdot ... \cdot \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_{2j+1}} mdc(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{2j+1}}) \cdot [mdc(a_1, ..., a_n)]^{(-1)^{n-1}}}{\prod_{1 \leq i_1 < i_2} mdc(a_{i_1}, a_{i_2}) \cdot \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4} mdc(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}) \cdot ... \cdot \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_{2j}} mdc(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{2j}})}$$

com $1 \leq i,\ i_k \leq n$.

Ou seja,

$$mmc(a_1, a_2, ..., a_n) =$$
$$\frac{a_1 \cdot ... \cdot a_n \times \text{Produto dos MDC's de todos os } a_{i's} \text{ tomados uma quantidade ímpar de vezes}}{\text{Produto dos MDC's de todos os } a_{i's} \text{ tomados uma quantidade par de vezes}}$$

Portanto, podemos encontrar o MMC de quaisquer números inteiros positivos, bastando para isso saber como o número de elementos de cada conjunto e os elementos nas várias interseções

Podemos encontrar uma demonstração formal e em nível superior para tais fórmulas na Referência [18].

6 Aplicações em Situações Problemas

Neste capítulo resolvemos algumas situações problemas envolvendo MDC, MMC e o Diagrama de Venn.

Problema 6.1 (Exercício elaborado pela banca do Pólo de Biotecnologia do Rio de Janeiro (BIO RIO), aplicado na prova de Profissional Nível Médio - Área de Suporte I pelo Centro de Pesquisa de Energia Elétrica (CEPEL) no ano de 2014)**.** *As afirmativas a seguir podem ser verdadeiras (V) ou falsas (F). Todas se referem aos números 36, 90 e 162:*

I. são todos múltiplos de um mesmo número primo.
II. o MMC de todos eles é 1620.
III. o MDC de todos eles é 6.
As afirmativas I, II e III são respectivamente:

$(A)\quad V, F, F \qquad (B)\quad V, F, V \qquad (C)\quad F, V, V \qquad (D)\quad V, V, F \qquad (E)\quad V, V, V$

Podemos resolver o problema de outras maneiras, porém usamos o Diagrama de Venn.

Considerando os fatores primos obtidos na fatoração de 36 como elementos de um conjunto X, os fatores de 90 como elementos de outro conjunto Y e os de 162 como elementos de um terceiro conjunto Z, nossa primeira tarefa é fatorar esses números e representá-los no diagrama de Venn de X, Y e Z. Assim, temos:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Logo,

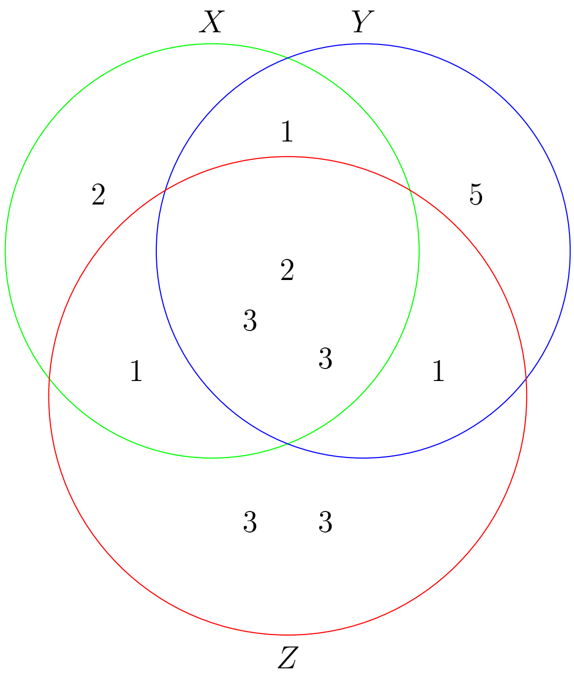

Figura 27: Diagrama dos Conjuntos X, Y e Z.

Feito o digrama, basta analisar as alternativas de acordo com o diagrama.

A alternativa I nos diz que todos os números são múltiplos de um mesmo número primo. Visualizando o diagrama temos que os três números são múltiplos tanto de 2 como de 3, logo todos eles são múltiplos de um mesmo número primo. Isso é verdadeiro. Contudo, observe que se a Afirmativa contivesse a informação de que todos possuem como fator simultâneo um único número primo, ela seria falsa.

A alternativa II descreve que o MMC de todos eles é 1620. Sabemos que para descobrir o MMC basta multiplicar todos os fatores que aparecem no diagrama ou aplicar à fórmula encontrada no capítulo anterior. Utilizando o primeiro método que citamos temos: $mmc(36, 90, 162) = 2\cdot 1\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 1\cdot 3\cdot 3 = 1620$. Logo essa alternativa também é verdadeira.

No item III afirma-se que o MDC de todos eles é 6. Como vimos durante os nossos estudos o MDC dos números fatorados e colocados em um diagrama, nada mais é que o produto dos números da interseção. Daí $mdc(36, 90, 162) = 2\cdot 3\cdot 3 = 18$. Logo o item III é falso.

Portanto, a análise das afirmações resultou na sequência V,V e F.

Alternativa D.

Problema 6.2 (Exercício elaborado pela banca da VUNESP, aplicado na prova de Assistente Administrativo I pela UNESP no ano de 2016). *Sejam x e y dois números naturais tais que $mdc(x, 105) = 1$, o $mmc(x, 21) = 168$ e o $mdc(x, y) = 4$. Então, sabendo que y é maior que x, porém é menor que o dobro de x, pode-se afirmar que y é igual a:*

(A) 4 $\quad$ (B) 8 $\quad$ (C) 12 $\quad$ (D) 16 $\quad$ (E) 20

Sabendo que o exercício que queremos resolver envolve MDC e MMC de números inteiros positivos, vamos então fatorar os números que aparecem, no caso 105 e 21. Em seguida, façamos o diagrama de Venn representando tal fatoração.

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, pela fatoração podemos perceber que os números têm em comum os fatores 3 e 7. Pelo enunciado temos que $mdc(x, 105) = 1$, isto é, x e 105 são primos entre si, logo o elemento da interseção entre os conjuntos que contém os fatores presentes na fatoração de x e 105 é o número 1.

Então, se X, Z e K são os conjuntos que contêm os elementos da fatoração de x, 21 e 105, respectivamente no digrama, temos:

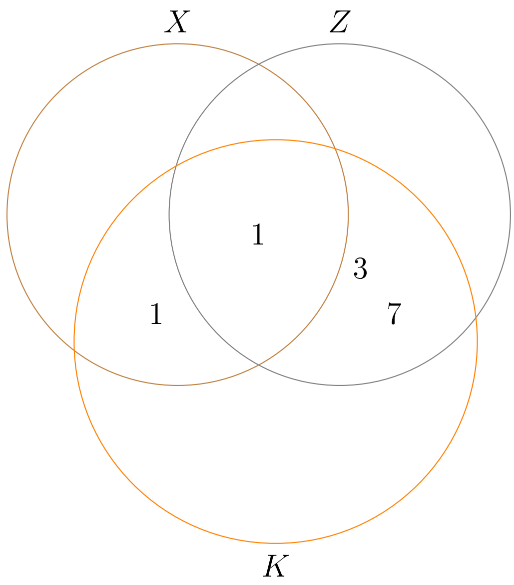

Figura 28: Diagrama dos Conjuntos X, Z e K.

Para completar o conjunto cujos elementos correspondem à fatoração de 105 falta apenas um espaço e sabemos que na fatoração feita temos ainda o fator 5; logo podemos preencher este espaço com o número 5.

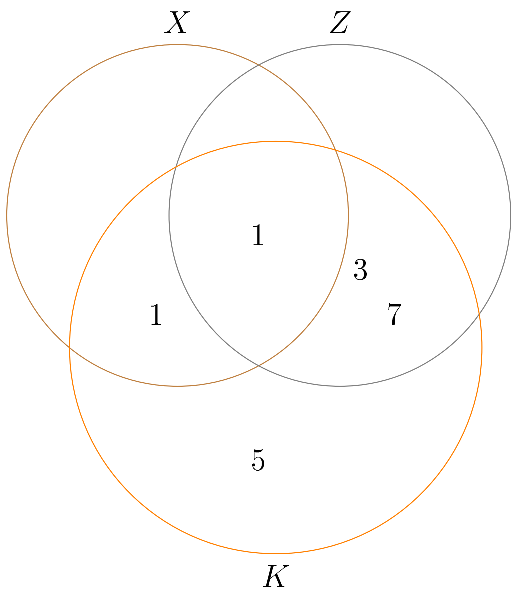

Figura 29: Diagrama dos Conjuntos X, Z e K.

Observe que o conjunto Z, dos fatores de 21, já possui os elementos 3 e 7 cujo produto resulta em 21; logo as outras interseções relacionadas ao conjunto Z e ainda não descritas no diagrama não apresentam fatores primos. Portanto, nessas interseções aparece o número 1, como ilustrado na Figura 30.

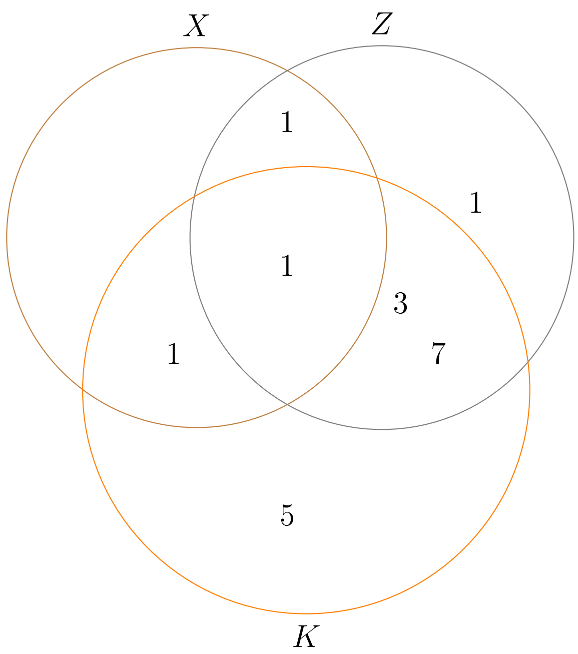

Figura 30: Diagrama dos Conjuntos X, Z e K.

Analisando este diagrama podemos afirmar que os números x e 21, e x e 105 são primos entre si, já que $X \cap Z = \{1\}$ e $X \cap K = \{1\}$. Para completar a nossa ilustração, temos que colocar x no espaço que está faltando para que o produto dos elementos do conjunto X resulte em x.

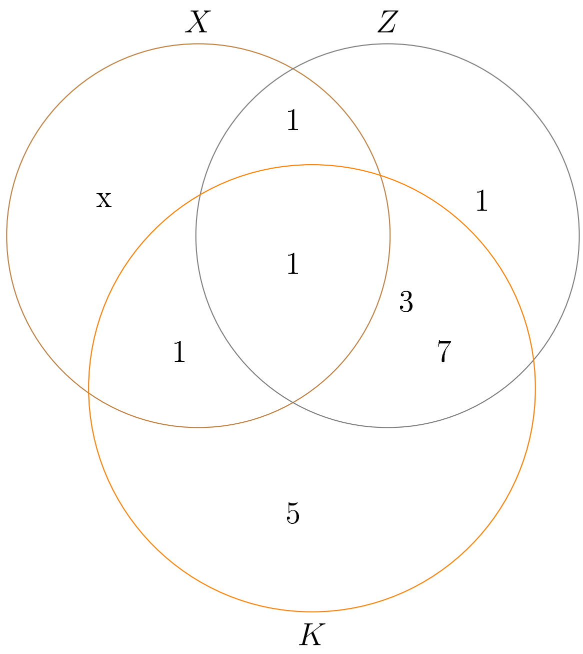

Figura 31: Diagrama dos Conjuntos X, Z e K.

Novamente pelo enunciado, temos que $mmc(x, 21) = 168$. Como $mmc(x, 21)$ é o produto de todos os elementos de $X \cup Z$, então:

$$x \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 = 168 \Rightarrow$$

$$x \cdot 21 = 168 \Rightarrow$$

$$x = \frac{168}{21} \Rightarrow$$

$$x = 8$$

Tendo obtido o valor de x o nosso objetivo agora é encontrar o valor de y, sabendo que o $mdc(x, y) = 4$ e que y é maior que x, porém é menor que o dobro de x.

Se o $mdc(x, y) = 4 = 2 \cdot 2$, então esses fatores estão na interseção dos conjuntos de X e Y, onde Y é o conjunto cujos elementos estão na fatoração de y. Mas $x = 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, logo, se $2 \cdot 2$ está na interseção $X \cap Y$, falta apenas um fator 2 para completar o conjunto X e este fator colocamos no conjunto $X - (X \cap Y)$, como mostra a figura 32.

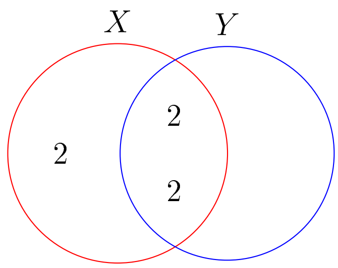

Figura 32: Diagrama dos Conjuntos X e Y.

Mas sabemos que "y é maior que x, porém é menor que o dobro de x", isto é,

$$x < y < 2x,$$

ou seja,

$$8 < y < 16.$$

Por estas desigualdades temos que y está entre 8 e 16, e é múltiplo de 4. Portanto, y só pode ser o número 12.

Alternativa C.

Vamos analisar agora um exercício que não envolve MDC e MMC porém está diretamente relacionado ao conteúdo de conjuntos. A resolução dessa situação problema visa mostrar a diferença entre diagramas que envolvem número de elementos e diagrama que envolve produto (fatoração) dos elementos.

Problema 6.3 (Exercício aplicado na prova de vestibular da UFPA, em 2007)**.** *Um professor de Matemática, ao lecionar Teoria dos Conjuntos em uma certa turma, realizou uma pesquisa sobre as preferências clubísticas de seus n alunos, tendo chegado ao seguinte resultado:*

- *23 alunos torcem pelo Paysandu Sport Club;*
- *23 alunos torcem pelo Clube do Remo;*
- *15 alunos torcem pelo Clube de Regatas Vasco da Gama;*
- *6 alunos torcem pelo Paysandu e pelo Vasco;*

- *5 alunos torcem pelo Vasco e pelo Remo.*

Se designarmos por A o conjunto dos torcedores do Paysandu, por B o conjunto dos torcedores do Remo e por C o conjunto dos torcedores do Vasco, todos da referida turma, teremos, evidentemente, $A \cap B = \varnothing$. Concluímos que o número n de alunos dessa turma é:

(A) 49 (B) 50 (C) 47 (D) 45 (E) 46

Como neste exercício estamos falando em número de elementos então o nosso diagrama envolve a operação de adição, pois não estamos falando de fatoração (produto) e sim de contagem de alunos. Logo precisamos lembrar que o elemento neutro da adição é zero, isto é, quando não estiver nenhum elemento presente em uma interseção colocamos o número zero pois ele que simboliza a ausência de objetos.

Para começarmos nossa ilustração temos pelo enunciado os conjuntos A, B e C, onde $A \cap B = \varnothing$.

Se os conjuntos A e B não possuem elementos em comum, então A, B e C também não têm elementos em comum, isto é $A \cap B \cap C = \varnothing$. Assim:

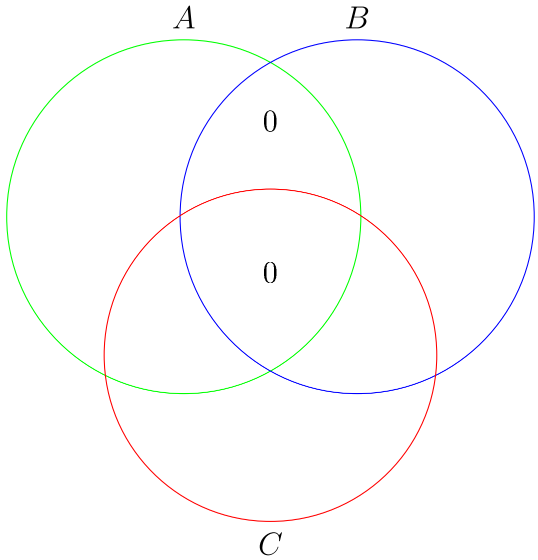

Figura 33: Representação do Diagrama dos Conjuntos A, B e C.

Temos, pelo enunciado, que 6 alunos torcem pelo Paysandu e pelo Vasco, e ainda que 5 alunos torcem pelo Vasco e pelo Remo. Logo $n(A \cap C) = 6$ e $n(B \cap C) = 5$. Essas informações estão representadas no Diagrama ilustrado na Figura 34.

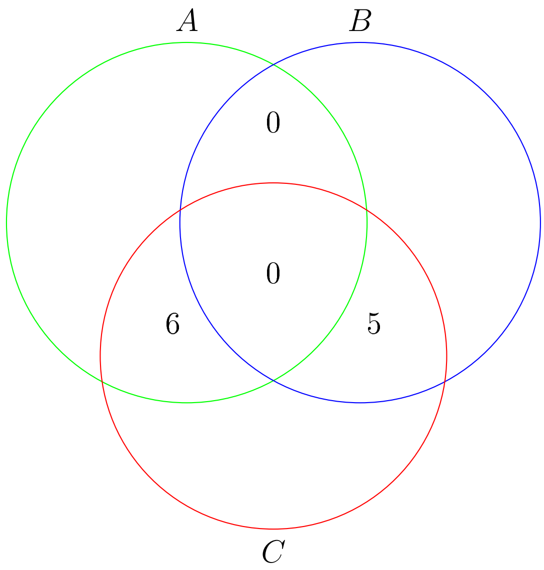

Figura 34: Representação do Diagrama dos Conjuntos A, B e C.

Olhando a Figura 34, observamos que o nosso diagrama ainda tem três espaços não preenchidos. Porém, analisando nosso enunciado também temos três informações que não utilizamos. Então, vamos interpretá-las.

O conjunto A, que é representado pelo círculo verde no nosso diagrama, já possui 6 elementos, isto é, já temos 6 alunos que torcem pelo Paysandu; mas pelo enunciado sabemos que o total de torcedores deste time são 23 alunos. Logo está faltando representar no círculo verde do diagrama a preferência de $23 - 6 = 17$ pessoas.

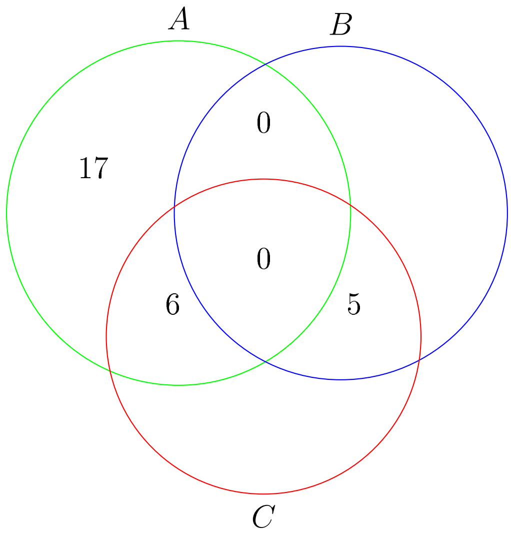

Figura 35: Representação do Diagrama dos Conjuntos A, B e C.

Analogamente, analisando o conjunto B, representado pelo círculo azul, está faltando a preferência de $23 - 5 = 18$ alunos.

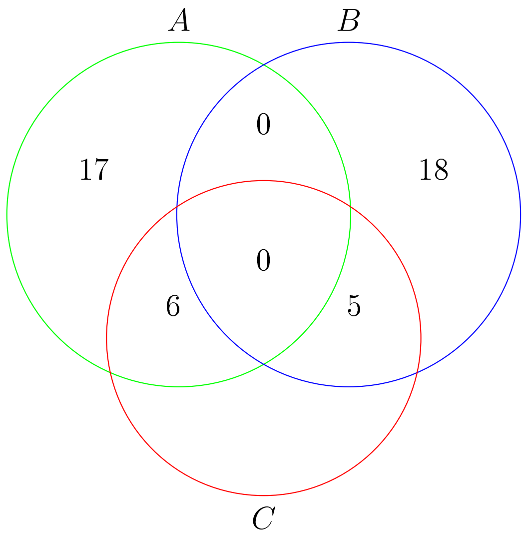

Figura 36: Representação do Diagrama dos Conjuntos A, B e C.

E por fim, analisando o conjunto C, representado pelo círculo vermelho, já temos

$6+5=11$ pessoas contadas, contudo o total de elementos do conjunto C é 15. Então: $15-11=4$, está faltando 4 elementos nesse conjunto.

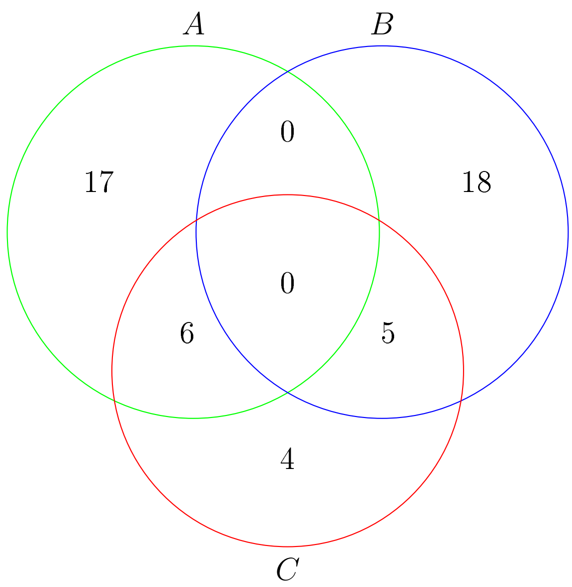

Figura 37: Representação do Diagrama dos Conjuntos A, B e C.

Portanto, a partir dos dados do enunciado montamos o Diagrama de Venn, em que temos representado todos os alunos da classe de acordo com a sua preferência em relação a esses três times.

Precisamos agora apenas calcular quantos alunos n haviam nessa sala de aula. Para isso basta somar todos os elementos do diagrama.

Logo,

$$n = 17+0+18+6+0+5+4$$

$$n = 50.$$

Portanto, o número de alunos dessa classe é 50.

Alternativa B.

Outra forma de resolver esse exercício é utilizando a expressão

$$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$

Relembrando os dados do enunciado:

- 23 alunos torcem pelo Paysandu Sport Club;
- 23 alunos torcem pelo Clube do Remo;
- 15 alunos torcem pelo Clube de Regatas Vasco da Gama;
- 6 alunos torcem pelo Paysandu e pelo Vasco;
- 5 alunos torcem pelo Vasco e pelo Remo;
- $A \cap B = \varnothing$.

Sabemos que se os conjuntos A e B não possuem elementos em comum, então A, B e C também não têm elementos em comum. Então, $n(A \cap B \cap C) = n(A \cap B) = 0$, de onde temos que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n = 23 + 23 + 15 - 0 - 6 - 5 + 0$$

$$n = 61 - 11$$

$$n = 50.$$

7 Considerações Finais

Muitas vezes buscando métodos para facilitar o processo de aprendizagem do nosso aluno, colocamos a fórmula pronta no quadro, ensinamos o processo prático e até alguns "macetes" para reduzir os cálculos e o tempo gasto em um dado problema. Porém a solução que encontramos para resolvermos essa dificuldade em curto prazo pode nos trazer um grande problema futuro.

O ponto positivo do processo facilitador, o aprendizado que julgamos rápido e eficiente, não é realmente eficaz se antes não conceituarmos o conteúdo. De nada adianta o aluno aprender a repetir o procedimento e aplicar a fórmula se ele não sabe efetivamente onde utilizá-lo, ou mesmo quando aplicá-lo.

Com este trabalho vimos a importância de discutir os porquês de cada assunto. Em cada conceito, em cada definição, só fizemos a demonstração, ou a generalização após ver o que acontecia no processo, isto é, após refletir um exemplo numérico e pensar se era válido para outros números.

Em cada assunto discutido, buscamos colocar um método formal (Ensino Superior) de demonstração e um método talvez não formal, mas que pode ajudar o aluno a refletir no cálculo que fará, não apenas pegando algo pronto.

O trabalho foi desenvolvido de maneira que o aluno do Ensino Básico possa compreender cada conceito e procedimento trabalhado, descobrindo com isso as aplicações de cada conteúdo, não apenas fazendo continhas sem porquês, porém mostrando que cada fórmula utilizada, possui um raciocínio lógico e uma aplicabilidade. Neste sentido, esta dissertação possui demonstrações que um aluno do Ensino Básico talvez não consiga entender, porém buscamos outras maneiras de discutir tais resultados de forma que o professor possa mostrar para seu aluno.

A partir desses raciocínios e metodologias foi possível criar uma maneira de abordar MDC e MMC de forma menos "mecânica" e mais visual como queríamos. Vimos que através do conteúdo de conjuntos, do seu conceito, de suas operações e a partir da visualização pelo Diagrama de Venn é possível explicar o Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum.

Os conteúdos possuem total ligação sendo possível inclusive fazer associação para ensinar as fórmulas que relacionam MDC e MMC de dois ou mais números inteiros para alunos do Ensino Básico.

Neste momento pode estar surgindo na cabeça do leitor, "mas como posso ensinar um conteúdo do Ensino Médio para alunos do Ensino Fundamental?"

De fato, não temos tempo suficiente para colocarmos todo um capítulo extra sobre Teoria dos Conjuntos na matéria do 6º ano, porém como o conceito básico de conjuntos, de agrupamentos de objetos, já foi visto pelos alunos na Educação Infantil, o que vai ser mostrado de novidade é a representação dos números da fatoração no Diagrama de Venn; o que além de simples e de fácil entendimento, também vai servir como uma metodologia a mais para sair da mesmice dos cálculos e trazer uma motivação extra para as crianças. Afinal, as turmas de 6º ano geralmente possuem alunos de 10 e 11 anos, e a maioria gosta de desenhar.

Além do método que buscávamos discutir no início do trabalho, conseguimos a partir das pesquisas, encontrar um método muito simples e ilustrativo para que o aluno possa visualizar se o número é ou não primo. Isto é, sabendo que os números primos são números primários, aprendemos que eles formam a base para os blocos pitagóricos (linhas), não sendo capazes de formar blocos quadrangulares e/ou retangulares.

Assim, chegando ao fim deste trabalho conseguimos disponibilizar e, utilizando o método que relaciona Diagrama de Venn, MMC e MDC, resolver algumas aplicações em situações problemas, mostrando que o conteúdo é de grande importância tanto para as séries iniciais, como para concursos.

Referências

[1] Gonçalves, A., *Introdução à Álgebra*, Impa, Rio de Janeiro, 3ª edição, pp. 15-28.

[2] Hefez,A., *Curso de Álgebra*, Impa, Rio de Janeiro, vol. 1, 2ª edição (1997), pp. 1-12 , 66-70, 87-90.

[3] Kolitsch, S. and Kolitsch,L., *Greatest Common Factores and Least Common Multiples with Venn Diagrams*, The University of Tennessee at Martin, TN 38238, http://www.lamath.org/journal/vol5no1/Venn_Diagrams.pdf, (acesso em: novembro/2016).

[4] Brochero Martinez, F.E., Moreira,C.G.T.A., Saldanha,N., Tegan,E., *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, http://www.mat.ufmg.br/ fbrocher/TN/Teoria_dos_numeros_Um_passeio_com_primos_3ed.pdf, (acesso em: novembro/2016).

[5] Nascimento,M.C., Feitosa,H.A., *Elementos da Teoria dos Números*, 2013, http://wwwp.fc.unesp.br/ mauri/TN/TN.pdf, (acesso em: novembro/2016).

[6] *John Venn*, http://www.somatematica.com.br/biograf/venn.php, (acesso em: novembro/2016).

[7] Marques, G.C., *Fundamentos de Matemática I*, Módulo I: Introdução à Teoria dos Conjuntos, http://midia.atp.usp.br/plc/plc0001/impressos/plc0001_01.pdf, (acesso em: novembro/2016) pp.17-21.

[8] *Diagrama de Venn*, https://pt.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Venn, (acesso em: novembro/2016).

[9] *Diagrama de Venn*, http://historiaddv.blogspot.com.br/, (acesso em: novembro/2016).

[10] *Números Primos*, http://alunosonline.uol.com.br/matematica/numeros-primos-.html, (acesso em: janeiro/2017).

[11] *Qual a importância dos números primos?*, http://www.matematica.pt/faq/numeros-primos.php, (acesso em: janeiro/2017).

[12] *Georg Cantor - O Pensador do Infinito*, http://georgecantor-6na.blogspot.com.br/, (acesso em: janeiro/2017).

[13] *Georg Cantor*, https://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/copy_of_r
G, (acesso em: janeiro/2017).

[14] *Teoria dos Conjuntos*, http://www.infoescola.com/matematica/teoria-dos-conjuntos/, (acesso em: janeiro/2017).

[15] *Georg Cantor*, https://educacao.uol.com.br/biografias/georg-cantor.htm, (acesso: janeiro/2017).

[16] *Georg Cantor*, https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor, (acesso: janeiro/2017).

[17] Rimsa, l.g. and Falcão, r. c., *Permutações Caóticas sobre Sequências Finitas*, Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de São João Del Rei, http://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/Leonardo.pdf, (acesso em: fevereiro/2017).

[18] Abhishek, c.s., *Relation between N numbers and their LCMs and GCDs*, International Journal of Scientific & Engineering Research Volume 3, Issue 5, May-2012, http://www.ijser.org/researchpaper/Relation-between-N-numbers-and-their-LCMs-and-GCDs.pdf, (acesso em: fevereiro/2017).

[19] Conjuntos, http://www.cinoto.com.br/website/index.php/conj?id=3207, (acesso em: fevereiro/2017).

[20] Sampaio, *Um Mini - Curso de Aritmética dos Inteiros*, http://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/capitulo2.PDF, (acesso em: fevereiro/2017).

[21] *John Venn, criador dos diagramas de conjuntos, é tema de Doodle do Google*, http://www.techtudo.com.br/noticias/noticia/2014/08/john-venn-criador-dos-diagramas-de-conjuntos-e-tema-de-doodle-do-google.html, (acesso em: fevereiro/2017).

[22] Silva, a., Martins, s., *Falar de Matemática Hoje é ...*, http://www.ipv.pt/millenium/20_ect5.htm, (acesso em: fevereiro/2017).

[23] PIMENTEL, A. M., *Caracterização da Área de Matemática*, http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAs5EAL/caracteristicas-conhecimento-matematico, (acesso em: fevereiro/2017).