



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Determinação do Instante de Morte, Falsificação
de Obras de Arte e Outros Problemas
Curiosos

Luciano Drigo Gomes

Goiânia

2017

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

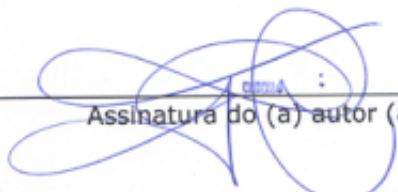
Nome completo do autor: Luciano Drigo Gomes

Título do trabalho: Determinação do Instante de Morte, Falsificação de Obras de Arte e Outros Problemas Curiosos

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento **SIM** **NÃO¹**

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do (a) autor (a) ²

Data: 24 / 04 / 2017.

Luciano Drigo Gomes

**Determinação do Instante de Morte,
Falsificação de Obras de Arte e Outros
Problemas Curiosos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dra. Thaynara Arielly de Lima

Goiânia

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Drigo Gomes, Luciano

Determinação do Instante de Morte, Falsificação de Obras de Arte e Outros Problemas Curiosos [manuscrito] / Luciano Drigo Gomes. - 2017.

106 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Thaynara Arielly de Lima.

Trabalho de Conclusão de Curso Stricto Sensu (Stricto Sensu) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.

Bibliografia.

Inclui siglas, fotografias, símbolos, gráfico, tabelas, algoritmos, lista de figuras.

1. Equações Diferenciais. 2. Aplicações Matemáticas. 3. Ensino Básico e Superior. 4. Funções Exponenciais e Logarítmicas. I. Arielly de Lima, Thaynara, orient. II. Título.

CDU 517



Universidade Federal de Goiás-UFG
Instituto de Matemática e Estatística-IME
Mestrado profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT/UFG



Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Luciano Drigo Gomes – Aos trinta e um dias do mês de março do ano de dois mil e dezessete (31/03/2017), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof.^a Dr.^a Thaynara Arielly de Lima – Orientadora; Prof.^a Dr.^a Karly Barbosa Alvarenga, Prof.^a Dr.^a Lidiane dos Santos Monteiro Lima e Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada: **“Determinação do Instante de Morte, Falsificação de Obras de Arte e Outros Problemas Curiosos”**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Luciano Drigo Gomes discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela Presidente da banca, Prof.^a Dr.^a Thaynara Arielly de Lima, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução n.º. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do IME da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 15:00 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Sonia Maria de Oliveira, secretária do PROFMAT/UFG, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Thaynara A. de Lima

Prof.^a Dr.^a Thaynara Arielly de Lima
Presidente – IME/UFG

Karly B. Alvarenga

Prof.^a Dr.^a Karly Barbosa Alvarenga
Membro – IME/UFG

Lidiane S. M. Lima
Prof.^a Dr.^a Lidiane dos Santos Monteiro Lima
Membro – IME/UFG

J. E. S. Vasconcelos
Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos
Membro – IFG/GOIÂNIA

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Luciano Drigo Gomes graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás, é pós-graduado em Ensino de Matemática para o Ensino Básico e Superior, também pela Universidade Estadual de Goiás, professor com mais de 15 anos de atuação no Ensino Básico.

Dedico este trabalho à minha linda e querida esposa Ana
Paula Drigo, esta que me conhece mais que eu mesmo...
é pra você, não só esse trabalho, mas a minha vida...
Muito obrigado por tudo, meu amor!

Te amo!♡♡

Agradecimentos

Agradeço a Deus, dono e progenitor de todo saber e de tudo que existe! Ao Senhor, Glórias e Glórias eternamente!

Agradeço aos meus pais, Belimar e Darci, meus heróis, que nunca mediram esforços para me fazer e ver-me feliz. Por terem abdicado de si mesmos, de seus sonhos, de seus ideais para simplesmente, viverem os meus... Amo vocês demais!

Aos meus queridos filhos, João Miguel e Giovanna Drigo, que, embora não saibam quão importante é esse momento em nossas vidas, trouxe o equilíbrio de se passar momentos difíceis com a certeza do sucesso... Vocês são a razão de eu estar em pé. Papai ama vocês demais! "mais do que um prédio!!!"

A minha querida irmã, Letícia Drigo, que sempre, mesmo em silêncio, manifestava sua energia positiva para que tudo corresse bem nesse mestrado. Você sempre foi, e sempre será, motivo de inspiração para mim, Lé.

Ao meu Amigo, Marcello Cândido, que, incondicionalmente, abdicou de seu tempo de juventude para cuidar dos meus filhos enquanto a Ana Paula viajava a trabalho para me ajudar no orçamento e eu estudava para as provas do mestrado, e, especialmente, nessa etapa final de escrita dessa dissertação. Marcello, nem escrevendo as coisas mais bonitas, eu vou conseguir retribuir o que tem feito para a minha família e para mim. Muito obrigado, conte sempre comigo!

A todos os meus familiares, nas pessoas de meus padrinhos: Senir Maria e Paulo Drigo. Só eu sei o quanto torcem por mim e me apoiam desde o início de meus estudos.

Agradeço a CAPES, pelo incentivo financeiro ao longo destes dois anos de dedicação máxima voltada a melhoria da educação nesse país, muito obrigado!

Agradeço aos professores da UFG que me instruíram e ajudaram-me nesta conquista. Quero aqui fazer um agradecimento à minha querida amiga e professora da Graduação Dra. Karly Barbosa Alvarenga, que se mostrou pronta em suas orientações e foi extremamente prestativa e peça fundamental nesse trabalho, meu muito obrigado!

Agradeço, em especial, a Profa. Dra. Thaynara Arielly de Lima, que desde o começo nunca hesitou em me ajudar. Parou, em nossa primeira orientação para me ensinar os principais comando do Latex. Como essa iniciativa foi importante! Sua orientação foi fundamental em minha formação como mestre em Matemática. Sempre muito prestativa e suas exigências não eram exigências, eram pedidos sutis, sem imposição, educadíssimos, para deixar meu trabalho cada vez melhor. Quanto profissionalismo, conhecimento científico e dedicação comigo. Horas e horas semanalmente orientando-me na busca incessante de um trabalho bem feito e que possa servir de referência para estudiosos da área. Muito obrigado, de coração!

Resumo

O intuito deste trabalho é servir como material de apoio para professores do Ensino Médio e, especialmente, para o Ensino Superior, no que se remete ao estudo de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem, bem como as técnicas de resoluções e sua infinidade de aplicações práticas. O tema Equações Diferenciais apresenta diversas aplicações interessantes e faz a Matemática tornar-se mais palpável, mais prática e mais atrativa aos olhos de quem a estuda. Serão realizadas algumas demonstrações das técnicas de resoluções, e, especialmente, serão aplicadas tais técnicas para resolver problemas interessantes voltados ao Ensino Básico e Superior. Este último de forma mais intensa. Apropriar-se-á também de softwares livres como Wxmaxima e o Geogebra para plotagem gráfica.

Palavras-chave

Equações Diferenciais, Aplicações Matemáticas, Ensino Básico e Superior, Funções Exponenciais e Logarítmicas.

Abstract

The purpose of this paper is to serve as support material for college teachers and, especially, for Higher Education, which refers to the study of Linear Differential Equations of First Order, as well as the techniques of resolutions and their infinity practical applications . The theme Differential Equations presents some many applications and makes Mathematics more palpable, more practical and more attractive to look for those who study it. Some demonstrations of resolution techniques will be performed, and especially will be applied such techniques to solve interesting problems for Basic and Higher Education. The latter more intensely. It will also take advantage of free software like Wxmaxima and Geogebra for graphic plotting.

Keywords

Differential Equations, Mathematical Applications, Basic and Higher Education, Exponential and Logarithmic Functions.

Lista de Figuras

2.1	Família de Parábolas $\frac{dy}{dx} = k$. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	26
2.2	Campo de Direções de $\frac{dy}{dx} = y - 2x^2$. Exemplo 7. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	27
2.3	Campo de Direções de $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Exemplo 8. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	28
2.4	Campo de Direções de $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Exemplo 9. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	29
2.5	Campo de Direções de $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2}$. Exemplo 11. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	39
3.1	Gráfico da Aplicação 3.1. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	48
3.2	Gráfico da Aplicação 3.2. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	50
3.3	Absorção de Drogas. Disponível em [13].	55
3.4	Decaimento exponencial de uma droga em cada intervalo de aplicação. Fonte: Elaborado no Excel com a ajuda da Profa. Ms. Danielle Lago.	57
3.5	Caminho do remédio no organismo. Disponível em [14].	58
3.6	Moça com Brinco de Pérola. Disponível em [15].	60
3.7	Os Peregrinos de Emaús. Disponível em [16].	62
3.8	A Última Ceia. Disponível em [17].	62
3.9	Cristo e a Adúltera. Disponível em [18].	63
3.10	Meegeren Pintando para os Especialistas. Disponível em [19].	64
3.11	Julgamento de Meegeren. Disponível em [20].	64
3.12	Meia-vida dos elementos.	67

4.1	Funções Exponenciais Crescentes: $a > 1$. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	79
4.2	Funções Exponenciais Decrescentes: $0 < a < 1$. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	80
4.3	Gráfico da Aplicação 1. Crescimento populacional de bactérias com o passar do tempo. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	83
4.4	Tomografia Computadorizada. Disponível em [21].	84
4.5	Gráfico da Aplicação 2. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	85
4.6	Função Logarítmica, $a > 1$. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	96
4.7	Função Logarítmica, $0 < a < 1$. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	96
4.8	Funções Inversas: Exponencial e Logarítmica, $a > 1$. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	97
4.9	Funções Inversas: Exponencial e Logarítmica, $0 < a < 1$. Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra, com auxílio da acadêmica em Matemática pela UFG Selma Céu.	98
4.10	Gráfico da Aplicação 1. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	100
4.11	Gráfico da Aplicação 2. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.	102

Sumário

1	Introdução	17
2	Equações Diferenciais	19
2.1	Equações Diferenciais Ordinárias - Conceitos Básicos	21
2.2	Soluções de uma E.D.O	23
2.3	Equação Diferencial Geral de Primeira Ordem	24
2.4	Problema de Valor Inicial: P.V.I.	30
2.5	Equações Diferenciais Autônomas	31
2.6	Método de Resolução: Fator Integrante	33
2.7	Equações Separáveis	37
3	Problemas Curiosos e Suas Resoluções	43
3.1	Uma secretária quase perfeita	43
3.2	Morte e mistério...	49
3.3	Crescimento de uma célula	51
3.4	Absorção de Drogas	54
3.5	Falsificações de Obras de Arte	59
3.5.1	Os "Vermeers" de Van Meegeren	59
4	Aplicações no Ensino Médio	75
4.1	Contextualização e Interdisciplinaridade	75
4.2	Funções Exponencial e Logarítmica	77
4.2.1	Função Exponencial	78
4.2.2	Resolução de Equações Exponenciais	80
4.2.3	Aplicações da Função Exponencial no Ensino Médio	82
4.2.4	Definição de Logaritmo	85

4.2.5	Consequências da definição de Logaritmo	86
4.2.6	Propriedades Operatórias dos Logaritmos	87
4.2.7	Cologaritmo	90
4.2.8	Mudança de Base	91
4.2.9	Logaritmo Neperiano ou Logaritmo Natural	92
4.2.10	Função Logarítmica	95
4.2.11	Aplicações das Funções Logarítmicas no Ensino Médio	98
5	Considerações finais	103

Capítulo 1

Introdução

Traz-se ao leitor, tendo por base o Ensino de Matemática nas Universidades e nas Escolas de Ensino Básico, ao desenvolver este trabalho, o prazer em estudar Matemática de forma contextualizada e interdisciplinar, utilizando dos recursos que a mesma dispõe de forma a contribuir como poderoso instrumento de pesquisa de fenômenos relacionados à vida corrente de nossos alunos.

É sabido que muitos conteúdos de Matemática são ministrados no Ensino Médio e Superior, muitas vezes, de forma descomprometida com a realidade do aluno como por exemplo: Funções Exponencial e Logarítmica, Números Complexos, Transformações Trigonométricas, dentre outros. E foi neste contexto que escolhi falar sobre Aplicações Curiosas extraídas das Equações Diferenciais, aplicando seus conceitos e resultados no Ensino Superior e, somente seus resultados no Ensino Básico. Tais aplicações são oriundas das Equações Diferenciais Lineares de 1ª Ordem, foco principal nesta obra.

O Capítulo 2 traz algumas definições básicas e caracterização de Equações Diferenciais, classificando-as em *ordinárias* e *parciais*. Foram abordados neste capítulo os campos de direções, que é um método gráfico para encontrar soluções aproximadas para Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's). Além deste método gráfico-geométrico, são apresentados os Teoremas de Existência e Unicidade de soluções para Problemas de Valor Inicial (P.V.I) ou problema de Cauchy e, para o caso de EDO's lineares de 1ª ordem, tais teoremas foram demonstrados. Ainda no Capítulo 2, apresenta-se o Método de Resolução de EDO's lineares de 1ª ordem: Fator Integrante, e outros tipos de Equações Diferenciais Ordinárias são apresentadas.

O Capítulo 3 é voltado para aplicações. Nele foram apresentadas duas aplicações voltadas à Física, determinando o *Instante de Morte de um indivíduo*, utilizando-se da *Lei do Resfriamento de Newton*. Remetendo-se à Biologia, foi abordada uma aplicação sobre o *Crescimento de uma célula*, onde observa-se que a razão do crescimento da massa celular é proporcional à sua massa presente em cada instante de tempo. No tocante à Química, a *Absorção de Drogas* foi uma outra aplicação sobre Equações Diferenciais, em que entende-se o porquê de cada medicação ter seu intervalo de administração devido. E, como última aplicação, utilizando da interdisciplinaridade com a Química, História e Arte, em que, a partir do uso de técnicas para resolução de Equações Diferenciais, é possível construir-se um modelo matemático do fenômeno de decaimento radioativo e determinar, de forma aproximada, a idade de uma pintura. Apresenta-se a curiosa história de Van Meegeren e seus ‘Vermeers’ e como pesquisadores da Universidade de Carnegie puderam desvendar questões acerca de falsificações de obras de arte.

O último Capítulo desta obra, está voltado às Funções Exponencial e Logarítmica, definindo-as, exemplificando-as e, aplicando-as em situações-problema interessantes, a fim de buscar a atenção do aluno com situações pelas quais ele possa visualizar os conceitos matemáticos ministrados em sala de aula, de forma extremamente prática e prazerosa. As Funções Exponencial e Logarítmica aparecem em geral, nas soluções de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem. Deste modo, apresentamos situações-problema envolvendo Equações Diferenciais nos apropriamos de seus resultados e aplicamos em situações voltadas ao Ensino Médio. Fizemos o uso de recursos gráficos para ilustrar informações acerca dos problemas propostos, utilizando de softwares, inclusive livre: o Wxmaxima e o Geogebra.

Sendo assim, com a Matemática pode-se estabelecer explicação ou um modelo para diferentes áreas do conhecimento: Física, Biologia, Química, Arte, História, dentre outras. A Matemática elucida as questões da vida social e os valores humanos e seu estudo permite e aprimora o desenvolvimento intelectual de quem interessa-se por ela. É com esta visão que a contextualização serviu de motivação para a execução desta obra.

Capítulo 2

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais é o ramo da Matemática que se aproxima e interage bastante com outras ciências desde a sua origem. Estudos e resultados importantes em: Física, Química, Biologia, Engenharia, Economia, mostram a interação bem sucedida entre a Matemática e as Ciências de modo geral.

O Cálculo Diferencial e Integral e as Equações Diferenciais nasceram juntos, e os dois teoremas básicos do Cálculo¹ estão intimamente ligados à solução da Equação Diferencial mais simples e importante

$$x'(t) = f(t).$$

Tal solução visa obter a função incógnita $x(t)$, uma vez conhecida a sua derivada $f(t)$.

A grande motivação inicial para o estudo das Equações Diferenciais veio da Mecânica. Com o aparecimento do Cálculo, no final do século XVIII, por obra de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), inúmeros problemas mecânicos puderam ser modelados matematicamente na forma de Equações Diferenciais. A partir de então, surgia a questão de dar resolução aos problemas matemáticos apresentados por modelos físicos, químicos, biológicos, dentre outros.

É sabido que, na maioria das vezes, problemas não podem ser representados exatamente por uma equação matemática ou por um sistema de equações como são. Pela existência de uma grande quantidade de variáveis, o problema se torna complexo e de difícil resolução. Em geral, o que se faz é escolher as variáveis essenciais do fenômeno

¹O Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema do Valor Médio.

em estudo. As leis que são aplicadas sobre os fenômenos físicos, químicos, biológicos, etc, são equações de variações. Quando estas variações são instantâneas, o fenômeno se desenvolve continuamente, sendo, portanto denominadas *Equações Diferenciais*.

De forma geral, dizemos que temos uma Equação Diferencial ou um Sistema de Equações Diferenciais se, na equação, ou no sistema dados, estão envolvidas funções incógnitas e suas derivadas.

As situações a seguir são exemplos de como as Equações Diferenciais são base para a modelagem de problemas importantes.

Exemplo 1. *No processo de desintegração (variação) de uma substância radioativa, percebemos que o número de desintegrações por unidade de tempo é proporcional à quantidade de substância presente em cada instante. Dessa forma, se $x = x(t)$ representa a quantidade de substância presente em cada instante t , a equação matemática que representa o fenômeno é dada por*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t)$$

onde $\frac{dx}{dt}$ representa a variação instantânea (desintegração) sofrida pela substância e α representa o coeficiente de proporcionalidade, que é constante para cada tipo de substância radioativa.

Exemplo 2. *Para determinarmos o movimento de um corpo de massa m sobre o qual atua uma força F em cada instante t , a Lei de Newton estabelece a conexão entre a aceleração do corpo e a força que produz o movimento*

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

onde $\frac{d^2x}{dt^2}$ é a aceleração do corpo (variação instantânea da velocidade) e F é a força agindo sobre o corpo na direção do movimento. Por exemplo, $F = -mg$ se a força é devida à gravidade, $F = -mg - K \frac{dx}{dt}$ quando se considera também a resistência do ar, etc.

Exemplo 3. *A relação entre a densidade de carga $f(x, y, z)$ e o potencial $u(x, y, z)$ de um campo eletrostático é dada pela Equação de Poisson*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi f(x, y, z).$$

Exemplo 4. *As equações de Lotka-Volterra, ou equações presa-predador, são importantes em modelagem ecológica. Vejamos seus formatos*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy\end{aligned}$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são populações respectivas das espécies presa e predadora. As constantes a , α , c e γ são baseadas em observações empíricas e dependem das espécies particulares em análise.

A Equação Diferencial é denominada *ordinária* (E.D.O) se a função incógnita depender somente de uma variável independente, conforme Exemplos 1 e 2. Caso dependa de duas ou mais variáveis independentes, tal Equação Diferencial será chamada *parcial* (E.D.P.), conforme Exemplo 3. Uma outra classificação de Equações Diferenciais depende do número de funções desconhecidas. Se existe uma única função a ser determinada, uma equação é suficiente, mas se existem duas ou mais funções a serem determinadas, estamos diante de um *Sistema de Equações Diferenciais*, como mostra o Exemplo 4.

Nesta obra, ateremos em discorrer sobre Equações Diferenciais Ordinárias, especificamente, as de Primeira Ordem. Neste capítulo, especificamente, apresentaremos algumas Equações Diferenciais Ordinárias e alguns métodos de resolução.

2.1 Equações Diferenciais Ordinárias - Conceitos Básicos

Segundo Bassanezi [1]

Definição 1 (E.D.O. e ordem de uma E.D.O.). *A ordem de uma Equação Diferencial é indicada pela maior ordem de derivação que aparece na equação. Uma E.D.O. de ordem n tem como expressão geral*

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dx^n}\right) = 0 \quad (2.1)$$

onde F é uma função de $n + 2$ variáveis.

A Equação (2.1) representa a relação entre a variável independente x e os valores da função incógnita y e suas n primeiras derivadas

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^{(n)}y}{dx^n}$$

Quando pudermos explicitar $y^{(n)}$ na Equação (2.1), teremos

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

que é denominada *forma normal* da E.D.O. de ordem n . À estas Equações Diferenciais na forma normal daremos enfoque.

Uma classificação fundamental de equações diferenciais é se elas são *lineares ou não*.

Definição 2 (E.D.O. linear). *A Equação Diferencial*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

é dita *linear* se F é uma função linear das variáveis $y, y', \dots, y^{(n)}$. A forma geral da Equação Diferencial Ordinária Linear de Ordem n é dada por

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x),$$

onde $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Exemplo 5 (Capitalização de investimentos). Segundo Boyce e DiPrima [12], sabe-se que, em muitos casos, o sistema de juros compostos é bem mais rentável que o sistema de juros simples. Os investimentos financeiros e financiamentos são calculados segundo tal sistema. Aplicações financeiras no regime de juros compostos podem ser modeladas por Equações Diferenciais.

Suponha que uma quantia de dinheiro é depositada em um banco que paga juros a uma taxa i ao mês. O valor $S(t)$ do investimento em qualquer instante t depende tanto da periodicidade de capitalização dos juros, quanto da taxa de juros. Se supusermos que a capitalização é contínua, pode-se ter um problema de valor inicial descrevendo o crescimento do investimento.

A taxa de variação do valor do investimento é $\frac{dS}{dt}$. Tal quantidade é a taxa de juros i , vezes o valor atual do investimento $S(t)$. Com isso, chega-se à Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem

$$\frac{dS}{dt} = iS.$$

Observa-se existir também as Equações Diferenciais *Não-Lineares*. Segundo Boyce e Diprima [4], surgem, por exemplo, no problema do pêndulo: o ângulo θ que um pêndulo de comprimento L descreve com a direção vertical satisfaz a Equação Diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\text{sen}(\theta) = 0 \quad (2.2)$$

Nela, o termo $\text{sen}(\theta)$ faz com que a Equação (2.2) seja Não-Linear.

Sabe-se existir todo um embasamento teórico muito bem fundamentado para a resolução de Equações Lineares. Contrapondo-se a isso, a teoria para Equações Não-Lineares é bem mais complexa, os seus métodos de resolução não tão satisfatórios. Em detrimento a isso, é comum que se faça aproximações de uma Equação Não-Linear ‘tornando-a’ Linear. Esse processo é chamado de *Linearização* e é extremamente útil para tratarmos as Equações Não-Lineares. Se θ é pequeno, o valor do seno se aproxima de θ . Logo, é possível considerar a seguinte equação como uma Linearização da Equação (2.2)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

2.2 Soluções de uma E.D.O

Qualquer função definida em algum intervalo I , que, quando substituída na Equação Diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de *solução para a equação no intervalo*.

Definição 3 (Solução de uma E.D.O.). *Uma solução para a Equação Diferencial Ordinária $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação, isto é, $F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$ para todo x no intervalo I .*

Exemplo 6. *Verificar por substituição direta, que a equação de primeira ordem $\frac{dR}{dt} = -kR$ tem a solução $R = \phi(t) = ce^{-kt}$, $-\infty < t < \infty$, onde c é uma constante arbitrária.*

Solução. Temos que:

$$\frac{dR}{dt} = -kR$$

e que

$$R = \phi(t) = ce^{-kt},$$

logo, substituindo R por ce^{-kt} , teremos:

$$\frac{dR}{dt} = -kce^{-kt},$$

o que implica que

$$-kce^{-kt} = -kce^{-kt}.$$

Evidenciando que

$$R = \phi(t) = ce^{-kt}$$

é solução da E.D.O. dada.

2.3 Equação Diferencial Geral de Primeira Ordem

Segundo Bassanezi [3], uma Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem é do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.3}$$

onde f é uma função definida em um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ com valores em \mathbb{R} . A solução de (2.3) é uma função $y = \phi(x)$, com x pertencente a um aberto $]x, y[$ derivável e que satisfaça as seguintes condições

$$(x, \phi(x)) \in A \tag{2.4}$$

e

$$\frac{d\phi}{dx} = f(x, \phi(x)) \tag{2.5}$$

A Equação (2.3) evidencia uma inter-relação entre as coordenadas de um ponto e o coeficiente angular da reta tangente a y em cada ponto. Uma equação do tipo 2.3 determina um *campo de direções* podendo ser chamado também de *inclinações*. Resolver a Equação (2.3) significa encontrar as curvas, chamadas *curvas integrais*, de sorte que a direção das retas tangentes em cada ponto da curva coincida com a direção do campo naquele ponto.

Definição 4 (Isóclinas). *O lugar geométrico dos pontos onde cada tangente à curva integral preserva uma direção constante são linhas chamadas isóclinas, onde, em termos matemáticos, podemos expressá-las da seguinte forma*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = c$$

em que, c é uma constante - inclinação da reta.

Acerca dos campos de direções, tratam-se de um método gráfico para encontrar soluções aproximadas para uma determinada Equação Diferencial, além, é claro, de contribuir consideravelmente para um melhor entendimento daquelas.

Vejamos alguns exemplos sobre campos de direções:

Exemplo 7. *Considere $\frac{dy}{dx} = y - 2x^2$, determine seu campo de direções.*

Solução. As isóclinas são as curvas

$$\frac{dy}{dx} = k;$$

que são as famílias das parábolas $y - 2x^2 = k$, onde para cada valor k temos $\frac{dy}{dx} = k$ em cada ponto da isóclina. Obtemos o campo de direções, conforme mostram as Figuras 2.1 e 2.2.

Exemplo 8 (Tirado integralmente do Livro Bassanezi e Ferreira [1], p.19). *Determine o campo de direções da Equação Diferencial:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} (x \neq 0).$$

Solução. As isóclinas são as retas $y = kx$ ($k \neq 0$ e constante).

Em cada par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $x \neq 0$, o coeficiente angular da reta tangente à curva integral é igual a $\frac{y}{x}$, coincidindo com o mesmo valor do coeficiente angular da reta isóclina que sai da origem e passa pelo ponto (x, y) . (Conforme Figura 2.3) Neste caso, as curvas integrais são da forma $y = cx, x \neq 0$, uma vez que estas retas coincidem em toda parte com a direção do campo.

Exemplo 9 (Tirado integralmente do Livro Bassanezi e Ferreira [1], p.19). *Determine o campo de direções e isóclinas da equação diferencial:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} (y \neq 0) \tag{2.6}$$

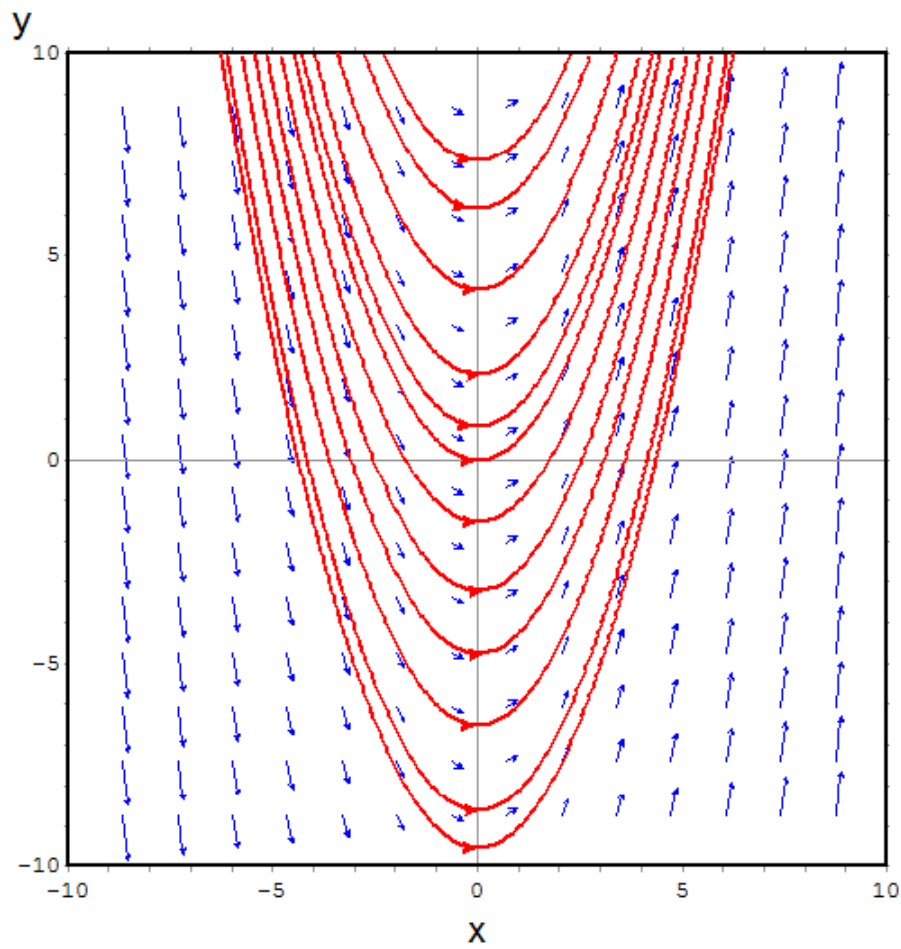


Figura 2.1: Família de Parábolas $\frac{dy}{dx} = k$. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

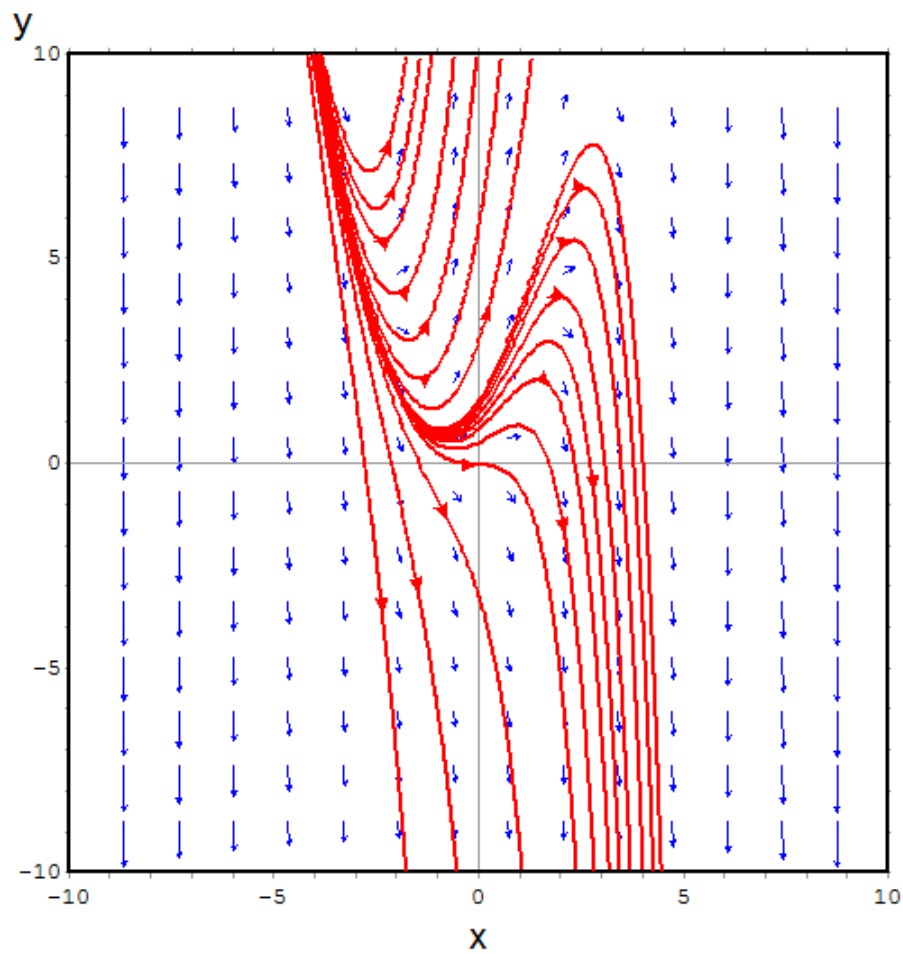


Figura 2.2: Campo de Direções de $\frac{dy}{dx} = y - 2x^2$. Exemplo 7. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

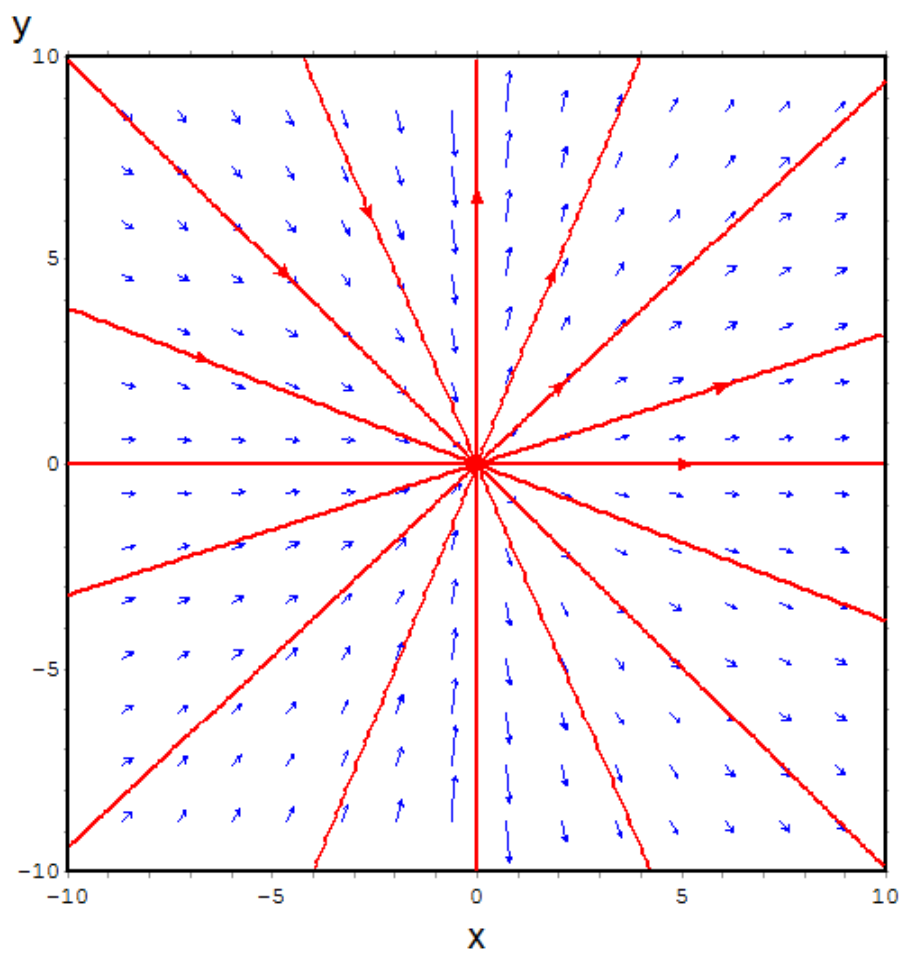


Figura 2.3: Campo de Direções de $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Exemplo 8. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

Solução. As isóclinas são retas $y = -\frac{1}{k}x$. Da Geometria Analítica, temos que duas retas são perpendiculares quando o produto de seus coeficientes angulares resulta em -1 . Logo, o campo de direções definido pela Equação Diferencial dada é ortogonal ao campo de direções do Exemplo 8 pois $\frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) = -1$, ou seja, a condição de ortogonalidade é satisfeita em cada ponto, conforme Figura 2.4.

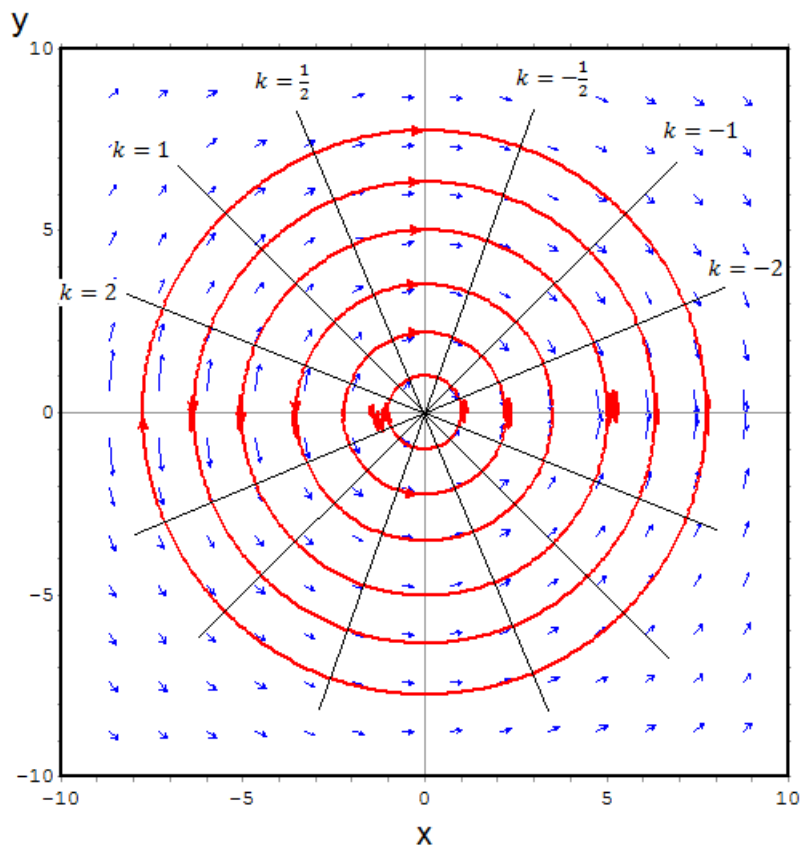


Figura 2.4: Campo de Direções de $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Exemplo 9. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

Percebe-se que na Figura 2.4: Se $y > 0$, as curvas integrais são semicircunferências concêntricas na origem $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ e se $y < 0$, $y = -\sqrt{c^2 - x^2}$. A função $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ não é contínua nos pontos $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Obs.: Para $y = \sqrt{c^2 - x^2}$, note que se $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{c^2 - x^2}} \cdot (-2x)$ é substituído em 2.6, a equação $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ é satisfeita.

2.4 Problema de Valor Inicial: P.V.I.

Um Problema de Valor Inicial (P.V.I.) ou Problema de Cauchy consiste em uma Equação Diferencial que é acompanhada do valor da função objetivo em um determinado ponto, chamado de **valor inicial** ou **condição inicial**. Segundo Bassanezi [3], como acabamos de ver, os campos de direções, servem significativamente para a compreensão das Equações Diferenciais, emitindo graficamente soluções aproximadas. Porém, é importante conseguirmos assegurar se dado P.V.I. possui solução. Os Teoremas de Existência e Unicidade das soluções para o Problema de Valor Inicial (P.V.I.) versam sobre tal assunto.

Tais teoremas se referem à existência e à unicidade de soluções locais para o Problema de Valor Inicial, ou seja, soluções definidas em alguma vizinhança do ponto x_0 , isto é, num intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$.

Teorema 1. (*Teorema da Existência e Unicidade de Solução para o Problema de Valor Inicial*)

Considere o P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

em que

1. $f(x, y)$ seja uma função contínua em um disco aberto D , de raio r , centrado no ponto (x_0, y_0) ,

$$D = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r\}$$

2. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = g(x, y)$ exista e seja contínua em D .

Então, existe uma função $y = \varphi(x)$ definida num intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, que satisfaz o problema de Cauchy (2.7). Ainda mais se $y = \psi(x)$ é outra solução de (2.7), no intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, então $\varphi(x) = \psi(x)$ no intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Portanto, só existe uma única solução local para o problema de Cauchy.

Uma consequência geométrica importante da unicidade da solução descrita no Teorema 1 é que os gráficos de duas soluções não podem se intersectar. Caso contrário, existiriam duas soluções satisfazendo a condição inicial correspondendo ao ponto de interseção, contradizendo o Teorema 1.

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em Bassanezi e Ferreira [1], Capítulo 5. Faremos na Seção 2.6 deste trabalho uma demonstração do Teorema 1 para o caso em que $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ é uma Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem.

2.5 Equações Diferenciais Autônomas

Nesta seção vamos abordar o Problema de Valor Inicial, segundo [1] e [3], para Equações Diferenciais Ordinárias da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad (2.8)$$

denominadas *Equações Diferenciais Autônomas*.

Uma condição de que devemos impor é que $\frac{1}{f(y)}$ esteja bem definida em um determinado intervalo, ou seja, que $f(y)$ não se anule e seja contínua em um intervalo I , aberto e que exista a inversa $x(y)$ da função $y(x)$.

Sabemos que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \neq 0$ em I . Isto é visto invocando o teorema que trata da derivada da inversa de uma função.

Portanto, a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

é obtida pela solução do problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \\ x(y_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$\frac{dy}{dx} = f(y)$, $a < x < b \iff \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$, $c < y < d$, e pela inversão da função $x(y)$ encontrada, e vice-versa, a solução de (2.10) é obtida por meio da solução de (2.9) e da inversão de $y(x)$.

Contudo, pode-se escrever a solução geral do P.V.I. (2.10)

$$x(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{f(z)} dz + x(y_0), y_0 \in I. \quad (2.11)$$

Sob hipóteses de que $f(y)$ seja contínua e não se anule em I , e que $y_0 \in I$, e que $f'(y)$ exista e seja contínua em I , teremos como conclusão de que o Problema (2.9) tem solução, e a mesma é única.

Note que para utilizarmos o argumento acima, o intervalo de definição de $y(x)$ não pode incluir pontos onde $f(y(x)) = 0$. Caso isso ocorra, tais pontos serão denominados *estacionários* ou *singulares* e o Problema (2.9) terá solução *constante*, denominada *solução de equilíbrio*.

Em modelagem matemática, sempre que um problema tiver uma lei de formação que enuncie "a taxa de variação de uma quantidade $y(t)$ é proporcional a esta mesma quantidade", estaremos diante de uma Equação Diferencial Autônoma, na forma

$$\frac{dy}{dx} = ky. \quad (2.12)$$

Note que $y = c \cdot e^{kx}$, c constante é solução de (2.12), pois $\frac{dy}{y} = k \cdot dx \implies \ln y = kx \implies y = e^{kx} \implies y = c \cdot e^{kx}$.

Exemplo 10 (Desintegração Radioativa).

Segundo Bassanezi e Ferreira [1]:

A atividade de uma substância radioativa é medida pelo número de desintegrações por unidade de tempo. Este fenômeno é devido à emissão de três tipos de radiações: partículas α (núcleos de hélio), partículas β (elétrons) e raios γ (ondas eletromagnéticas de alta frequência). Os principais experimentos de que resultam tal compreensão foram realizados por Rutherford, Becquerel, Royds, Vilard e M. Curie no final do século passado e no início deste, quando já se sabia que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes em cada instante.

Matematicamente, temos

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \quad (2.13)$$

sendo $\lambda > 0$.

Onde:

- λ é a constante de desintegração; usa-se o sinal de negativo devido à quantidade de átomos, que diminui com o passar do tempo;
 - $N = N(t)$ representa o número de átomos radioativos no momento t ;
 - N_0 representa a quantidade inicial de átomos radioativos, ou seja, $N(0) = N_0$.
- E a solução particular para a **Equação Autônoma 2.13** é da forma

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

2.6 Método de Resolução: Fator Integrante

As Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem também podem ser escritas na forma

$$y' + p(x)y = g(x). \quad (2.14)$$

Admitimos que p e g são funções contínuas em algum intervalo $\alpha < x < \beta$.

O que queremos é deduzir um método para resolver equações do tipo (2.14).

Para tal feito, consideremos:

$$y' + p(x)y = g(x). \quad (2.15)$$

Sabemos que, se $\mu(x)$ é uma função diferenciável em (α, β) , contínua e diferente de zero no intervalo $\alpha < x < \beta$, temos que

$$(y\mu(x))' = y'\mu(x) + y\mu'(x). \quad (2.16)$$

Multiplicando toda a Equação (2.15) por $\mu(x)$, teremos:

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x).$$

Somando e subtraindo

$$\mu'(x)y - \mu'(x)y,$$

teremos:

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y - \mu'(x)y + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \implies$$

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y - [\mu'(x) - \mu(x)p(x)]y = \mu(x)g(x) \quad (2.17)$$

Agora, se

$$\mu'(x) - \mu(x)p(x) = 0,$$

por (2.16) e (2.17) teremos:

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)g(x).$$

Pela integração dos dois membros, teremos:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)g(x)dx.$$

Desta maneira, a Solução Geral da Equação Diferencial Ordinária Linear de Primeira Ordem é dada por

$$y(x) = \frac{\int \mu(x)g(x)dx}{\mu(x)} + c,$$

em que c é uma constante, caso

$$\mu'(x) - \mu(x)p(x) = 0. \quad (2.18)$$

Mostremos agora de que maneira devemos tomar $\mu(x)$, a fim de que a Equação (2.18) seja verdadeira.

Deste modo, escolheremos $\mu(x)$ tal que:

$$\mu'(x) - \mu(x)p(x) = 0$$

Ou seja,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x). \quad (2.19)$$

Admitindo $\mu(x) > 0$, observe que:

$$\frac{d(\ln\mu(x))}{dx} = \frac{1}{\mu(x)} \cdot \mu'(x),$$

pela Regra da Cadeia.

Portanto, de (2.19)

$$\frac{d(\ln\mu(x))}{dx} = p(x).$$

Integrando ambos os membros:

$$\ln \mu(x) = \int p(x) dx + c.$$

De onde,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int p(x) dx + c} \implies \\ \mu(x) &= e^c \cdot e^{\int p(x) dx} \implies \\ \mu(x) &= k \cdot e^{\int p(x) dx} \end{aligned}$$

Sendo k uma constante.

Logo, tomando $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$, temos que a solução da equação $y' + p(x)y = g(x)$ é dada por

$$y(x) = \frac{\int \mu(x)g(x)dx}{\mu(x)} + c.$$

Para encerrar esta seção, mostraremos sob quais condições o P.V.I.

$$\begin{cases} y' + p(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

possui solução única.

Teorema 2. (*Teorema de Existência e Unicidade para E.D.O Lineares de Primeira Ordem.*) Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto $I : \alpha < x < \beta$, que contém o ponto $x = x_0$, então existe uma única função $y = \phi(x)$ que satisfaz o Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} y' + p(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Demonstração.

Existência:

A demonstração da existência de solução para o P.V.I. proposto é pautada na discussão anterior sobre Fator Integrante.

Seja $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$. Como p é contínua em $\alpha < x < \beta$ então p é integrável neste intervalo. Logo, a função μ está bem definida, é diferenciável e não nula, como podemos observar pela sua lei de formação.

Ao multiplicarmos a equação $y' + p(x)y = g(x)$ por $\mu(x)$, obtemos que

$$\frac{d}{dx} [\mu(x)y] = \mu(x)g(x)$$

Como μ e g são contínuas em I , segue que a função $\mu.g$ é contínua e, portanto, integrável. Logo, a função $\int \mu(x)g(x)dx$ existe e é diferenciável em $\alpha < x < \beta$. A função $y(x)$ definida em

$$\mu(x).y(x) = \int \mu(x)g(x)dx + c, \quad (2.20)$$

satisfaz $y' + p(x)y = g(x)$.

Isto foi esclarecido na apresentação do Método de Resolução: Fator Integrante e será omitido aqui.

Portanto, $y(x)$ definida a partir de (2.20) é solução de $y' + p(x)y = g(x)$.

Unicidade:

A unicidade é obtida a partir da condição inicial, já que $y(x_0) = y_0$ determina a constante c de maneira única.

Note que o fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ é único a menos de uma constante multiplicativa que depende do limite inferior de integração. Suponhamos tal limite de integração como x_0 , então

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

e

$$\mu(x_0) = e^{\int_{x_0}^{x_0} p(t)dt} = 1.$$

Utilizando $\mu(x) = e^{\int_{x_0}^x p(t)dt}$ obtemos a solução geral da equação $y' + p(x)y = g(x)$ como

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int_{x_0}^x \mu(t)g(t)dt + c \right]$$

Se $x = x_0$

$$y(x_0) = \frac{1}{\mu(x_0)} \left[\int_{x_0}^{x_0} \mu(t)g(t)dt + c \right] \implies c = y(x_0) = y_0.$$

Portanto, sob a condição inicial $y(x_0) = y_0$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int_{x_0}^x \mu(t)g(t)dt + y_0 \right]$$

é a única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} y' + p(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

□

2.7 Equações Separáveis

Considere uma Equação de Primeira Ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2.21)$$

Nesta seção, vamos considerar aqui uma família de Equações de Primeira Ordem que podem ser solucionadas por um método de integração direta.

Tais equações são da forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.22)$$

É possível a Equação (2.22), a partir da Equação (2.21) simplesmente fazendo $M(x, y) = -f(x, y)$ e $N(x, y) = 1$. Para o caso em que M depende apenas de x e N depende apenas de y , a Equação 2.22 é expressa por

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.23)$$

A Equação (2.23) é denominada *Separável*. Tal equação pode ser

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \quad (2.24)$$

Vejamos o exemplo a seguir

Exemplo 11 (Tirado integralmente de [4], p.24).

Mostre que a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2} \quad (2.25)$$

é separável e depois encontre uma equação para suas curvas integrais.

Solução. Ao escrevermos a Equação (2.25) na forma

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (2.26)$$

então ela terá a forma da Equação (2.23), portanto é *Separável*. Note que o primeiro termo da Equação (2.26) é a derivada de $-\frac{x^3}{3}$, e que o segundo termo, pela regra da cadeia, é a derivada em relação a x de $y - \frac{y^3}{3}$. Dessa maneira, a Equação (2.26) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{x^3}{3} \right) + \frac{d}{dx} \left(y - \frac{y^3}{3} \right) = 0,$$

que implica que

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3} \right) = 0,$$

donde, integrando ambos os membros, obteremos

$$-x^3 + 3y - y^3 = c, \quad (2.27)$$

onde c , é uma constante qualquer. A Equação (2.27) é uma equação para as curvas integrais da Equação (2.25). A Figura (2.5) mostra o campo de direções e diversas curvas integrais. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaz a Equação (2.27) é uma solução da Equação (2.25). Uma equação da curva integral que contém um ponto particular (x_0, y_0) pode ser encontrada substituindo-se x por x_0 e y por y_0 , na Equação (2.27), determinando, desta forma, o valor da constante c .

Voltando à Equação (2.23), o mesmo procedimento do exemplo anterior pode ser utilizado, para obter a solução de uma Equação Separável. Sejam H_1 e H_2 primitivas de M e N em (2.23), respectivamente. Logo

$$\begin{cases} H_1'(x) = M(x) \\ H_2'(y) = N(y) \end{cases} \quad (2.28)$$

e a Equação (2.23) fica

$$H_1'(x) + H_2'(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.29)$$

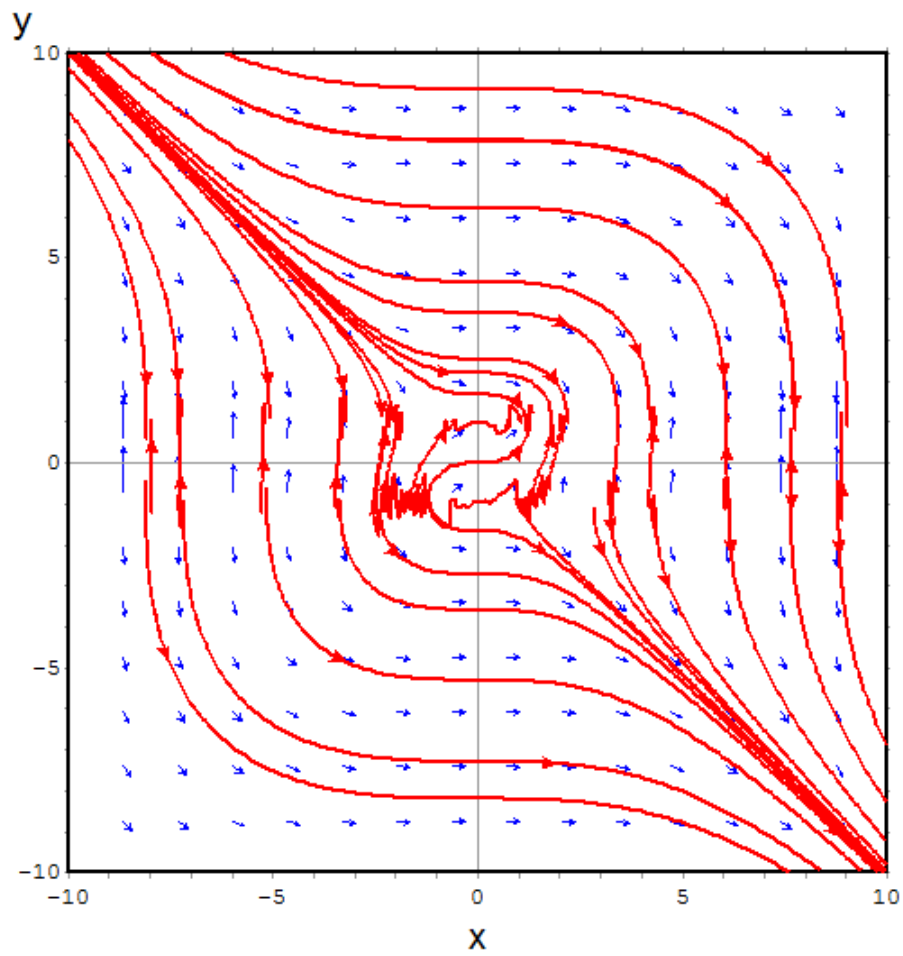


Figura 2.5: Campo de Direções de $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2}$. Exemplo 11. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

Pela regra da cadeia, temos

$$H_2'(y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} H_2(y) \quad (2.30)$$

Disto, podemos escrever a Equação (2.29) da seguinte forma

$$\frac{d}{dx} [H_1(x) + H_2(y)] = 0 \quad (2.31)$$

Integrando a Equação (2.31), obtemos

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \quad (2.32)$$

onde c é uma constante qualquer. Qualquer função $y = \phi(x)$ que satisfaça a Equação (2.32) é solução da Equação (2.23); ou seja, a Equação (2.32) define a solução implicitamente, ao invés de explicitamente.

Obs.: Pelo que acabamos de discutir, em termos práticos, a Equação (2.32) é obtida da Equação $M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0$ (2.24), integrando-se o primeiro termo à esquerda da igualdade em relação a x e o segundo termo à esquerda da igualdade em relação a y . Desta maneira, uma equação separável $M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0$ pode ser representada por $M(x)dx + N(y)dy = 0$. Esta é dita *separável*, já que as parcelas associadas a cada variável podem ser separadas pela igualdade.

Agora, se além da Equação Diferencial, é fornecida também uma condição inicial

$$y(x_0) = y_0, \quad (2.33)$$

então a solução da Equação (2.23) que satisfaz essa condição inicial é obtida fazendo-se $x = x_0$ e $y = y_0$ na Equação (2.32). Evidenciando que

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0). \quad (2.34)$$

Substituindo o valor obtido pra c na Equação (2.32) e atentando para

$$\begin{aligned} H_1(x) - H_1(x_0) &= \int_{x_0}^x M(s)ds \\ H_2(y) - H_2(y_0) &= \int_{y_0}^y N(s)ds, \end{aligned}$$

obteremos uma representação implícita para a solução da Equação Diferencial (2.23) escrita da seguinte forma

$$\int_{x_0}^x M(s)ds + \int_{y_0}^y N(s)ds = 0, \quad (2.35)$$

que também satisfaz a condição inicial (2.33). É importante salientar que para a determinação de uma forma explícita para a solução, é preciso que a Equação (2.35) seja resolvida para y como função de x . Mas isso é, em muitos e muitos casos, impossível ser feito de modo analítico. Daí, pode-se recorrer à métodos numéricos para encontrar valores aproximados para x e y , onde recursos computacionais adequados são bem vindos.

Capítulo 3

Problemas Curiosos e Suas Resoluções

...quando tentamos descrever algum aspecto do mundo real percebemos... que ele oferece mais do que a nossa pobre e finita mente consegue alcançar. Mas se aplicarmos nossos poderes apropriadamente, podemos alcançar um entendimento parcial que se adapte suficientemente para nos dar fidelidade às leis do universo. Para ter uma chance de sucesso, devemos idealizar e simplificar a fim de obter uma figura mental que possamos manejar. Quando chegarmos a uma descrição precisa, pela seleção das características que consideramos essenciais, temos um modelo matemático. (Rosenblom)

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas situações curiosas, cuja modelagem utiliza Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem. E, a partir do aparato teórico desenvolvido no capítulo anterior, estudar as soluções de tais problemas.

3.1 Uma secretária quase perfeita

Este problema foi retirado, em partes, de Bassanezi e Ferreira [1].

Um indivíduo é encontrado morto em seu escritório pela secretária deste que liga imediatamente para a polícia. Quando a polícia chega, duas horas depois da chamada, examina o cadáver, afere-lhe a temperatura em 35°C . Uma hora depois da chegada,

este policial examina novamente o cadáver, verificando que sua temperatura caiu para $34,2^\circ\text{C}$. A temperatura na sala, onde se encontrava a vítima, era de 20°C . O perito questiona a secretária acerca da saúde do falecido e ela responde que ele nunca havia se queixado de nenhum mal-estar. O perito então admite que no momento da morte, a temperatura corpórea do indivíduo era de $36,5^\circ\text{C}$. Uma hora depois o policial prende a secretária. Por quê?

Solucionando o problema. Na investigação de um homicídio, ou de uma morte acidental, muitas vezes é importante estimar o instante em que determinado indivíduo morreu. Vamos agora seguir alguns passos para mostrarmos a equação que expressa, aproximadamente, o instante de morte de determinado indivíduo.

Um corpo sem fonte de calor interna, com temperatura θ , quando deixado em um ambiente de temperatura T tende àquela do meio que o cerca. Assim, se a temperatura, $\theta < T$, este corpo se aquecerá e, caso contrário, se resfriará. Isto é evidenciado de forma precisa pela *Lei do Resfriamento de Newton*, que diz: "*a taxa de variação de temperatura de um corpo - sem fonte de calor - é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente.*"

Vamos denotar as variáveis que utilizaremos na resolução desse problema.

- $\theta(t)$: temperatura do corpo no instante t .
- t : instante de tempo.
- T : temperatura constante do ambiente.
- k : constante de proporcionalidade, real e positiva.

Baseado na Lei do Resfriamento de Newton, pode-se traduzir este problema por meio uma Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem do tipo:

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T) \quad (3.1)$$

o sinal de negativo na Equação (3.1) provém do fato de que se o corpo for mais quente do que suas vizinhanças ($\theta > T$) então aquele se torna mais frio com o desenrolar do tempo. Então,

$$\frac{d\theta}{dt} < 0$$

quando $\theta - T > 0$.

Vamos admitir que no instante $t = 0$, descobre-se um cadáver e que a temperatura deste é aferida e igual a θ_0 . Vamos admitir que no instante de morte t_m a temperatura de um corpo fosse θ_m , igual a temperatura normal entre $36,5^\circ\text{C}$ e 37°C .

Se admitirmos que a Equação (3.1) seja válida para modelar esta situação, a nossa tarefa é determinar t_m .

A resolução da Equação (3.1), com a condição inicial $\theta(0) = \theta_0$ é feita da seguinte forma:

Reescrevendo a Equação (3.1), temos:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= -k(\theta - T) \\ \theta' &= -k\theta + kT \\ \theta' + k\theta &= kT.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Como foi mencionado, trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária Linear de Primeira Ordem da forma

$$\theta' + p(t)\theta = g(t).$$

Desta maneira, iremos solucioná-la usando o método do Fator Integrante, já demonstrado no capítulo anterior. Neste caso, o Fator Integrante $\mu(t)$ é:

$$\mu(t) = e^{\int k dt}$$

$$\mu(t) = e^{kt}.$$

Multiplicando a Equação (3.2) pelo Fator Integrante, obteremos a equação:

$$\theta' e^{kt} + k\theta e^{kt} = kT e^{kt}.\tag{3.3}$$

É sabido do Cálculo I que a primeira parte da Equação (3.3) trata-se do resultado da derivada do produto de uma função. Tal equação pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\frac{d(\theta e^{kt})}{dt} = kT e^{kt}.\tag{3.4}$$

Integrando ambos os membros da Equação (3.4), em relação à variável t , obtemos a igualdade:

$$\theta e^{kt} = T e^{kt} + c.\tag{3.5}$$

Dividindo ambos os membros da Equação (3.5) por e^{kt} , obteremos a solução geral para a Equação (3.1)

$$\theta(t) = T + ce^{-kt}.\tag{3.6}$$

A temperatura do cadáver θ_0 no momento em que é encontrado é

$$\theta(0) = \theta_0 = T + c.$$

Logo,

$$c = \theta_0 - T.$$

Portanto, utilizando a condição inicial $\theta(0) = \theta_0$, podemos reescrever a Equação (3.6) da seguinte forma:

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{-kt} \quad (3.7)$$

que é solução da Equação (3.1).

Falta ainda encontrar o valor da constante k .

Fazendo $t = t_1$ e $\theta(t_1) = \theta_1$ e substituindo na Equação (3.7), temos:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= T + (\theta_0 - T)e^{-kt_1} \\ \theta_1 - T &= (\theta_0 - T)e^{-kt_1} \\ \frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T} &= e^{-kt_1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aplicando logaritmo neperiano na Equação (3.8), temos:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T} \right) &= \ln e^{-kt_1} \\ \ln \left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T} \right) &= -kt_1 \end{aligned}$$

e o valor de k pode ser expresso por:

$$k = -\frac{1}{t_1} \cdot \ln \left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T} \right). \quad (3.9)$$

Onde:

- θ_0 : temperatura inicial após a morte;
- θ_1 : temperatura depois de um determinado intervalo de tempo;
- T : temperatura ambiente; e
- t_1 : intervalo de tempo dado entre as temperaturas θ_0 e θ_1 .

Depois de obtida a equação que expresse o valor da constante de proporcionalidade k , podemos escrever a equação que determina o instante de morte t_m a uma temperatura em que o corpo foi encontrado θ_0 , da seguinte forma:

Fazendo $t_1 = t_m$ e $\theta_1 = \theta_m$ e substituindo na Equação (3.9), obteremos finalmente a equação que expressa, aproximadamente, o Instante de Morte de determinado indivíduo

$$t_m = -\frac{1}{k} \cdot \ln \left(\frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T} \right), \quad (3.10)$$

onde, k é a constante dada pela Equação (3.9).

Determinando k com os dados fornecidos pelo problema:

$$\begin{aligned} k &= -\frac{1}{t_1} \cdot \ln \left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T} \right) \implies \\ k &= -\frac{1}{1} \cdot \ln \left(\frac{34,20 - 20,00}{35,00 - 20,00} \right) \implies \\ k &= 0,05481. \end{aligned}$$

Agora sim, calculando o instante de morte utilizando a Equação (3.10), temos:

$$\begin{aligned} t_m &= -\frac{1}{k} \cdot \ln \left(\frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T} \right) \implies \\ t_m &= -\frac{1}{0,05481} \cdot \ln \left(\frac{36,50 - 20,00}{35,00 - 20,00} \right) \implies \\ t_m &= -1,73892h. \end{aligned}$$

Pode-se concluir que o assassinato ocorreu há 1h, 44 minutos e 20 segundos antes da polícia chegar. A secretária foi presa, portanto, porque quando esta telefonou para a polícia, o seu chefe ainda estava vivo. Ver Gráfico (3.1).

Neste modelo matemático, a temperatura do corpo só atinge a temperatura ambiente T no limite em que $t \rightarrow +\infty$; na realidade, entretanto, a temperatura ambiente é atingida num tempo finito.

Podemos chamar de t_∞ o tempo necessário para que θ atinja 99% de T . Em termos numéricos, isto significa que se o erro relativo for de 1%, ou menos, podemos considerar $\theta(t)$ como sendo praticamente igual a T . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{99}{100}T &= (\theta_0 - T)e^{-kt_\infty} + T \implies \\ e^{-kt_\infty} &= \left| \frac{1}{100} \cdot \frac{T}{T - \theta_0} \right| \implies \\ -kt_\infty &= \ln \left| \frac{T}{100(T - \theta_0)} \right| \implies \\ t_\infty &= \frac{1}{k} \ln \left| \frac{100(T - \theta_0)}{T} \right| \end{aligned} \quad (3.11)$$

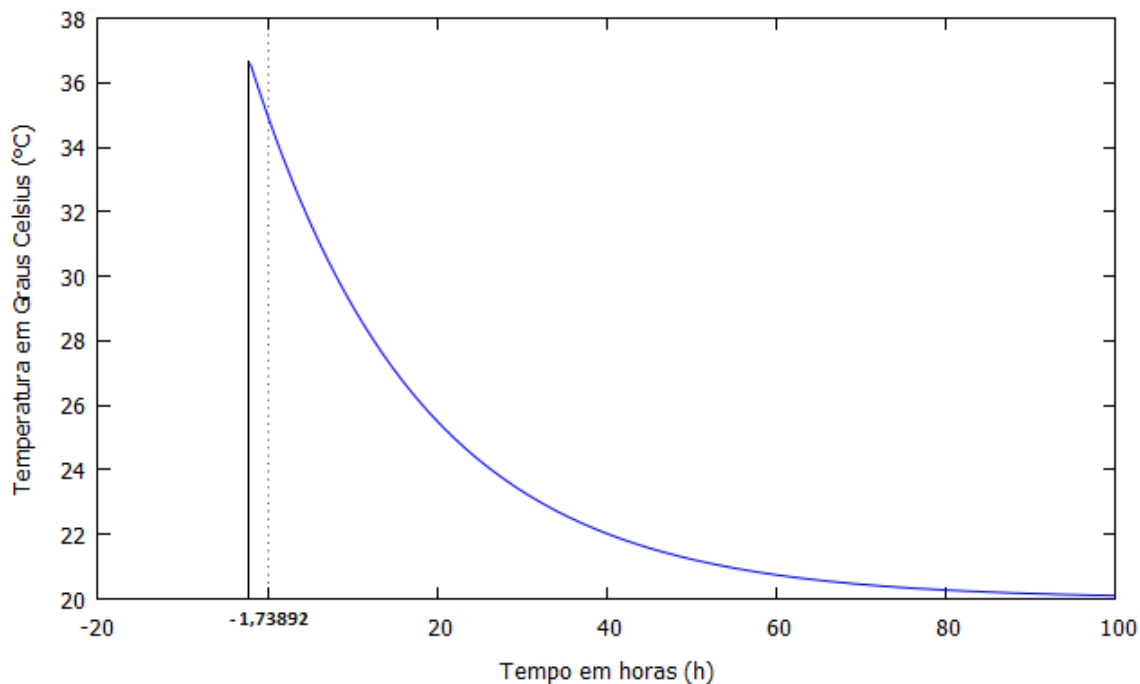


Figura 3.1: Gráfico da Aplicação 3.1. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

Este é um problema de ficção policial muito interessante, porém realmente impossível. Os dados colhidos pelo legista estão completamente fora da realidade uma vez que, neste caso, o tempo necessário para o corpo atingir a temperatura de $19,8^{\circ}\text{C}$ – equivalente a 99% da temperatura ambiente – seria $t_{\infty} = 80,5$ horas, quando o valor normal para t_{∞} é aproximadamente 6 horas! Podemos concluir que nem sempre um problema com resposta dentro dos padrões de normalidade está baseado em fatos reais.

Então, quais seriam as medidas corretas obtidas pelo legista para se obter uma melhor aproximação da realidade?

Tomamos $t_{\infty} = 6$ h e obtemos k da Fórmula 3.11

$$6 = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{100(20,00 - 36,50)}{20} \right| \implies$$

$$k = 0,73547$$

Caso queiramos obter $t_m = 1,73892$ h, fazemos

$$\theta(t_m) = 16,5e^{-0,73547 \cdot 1,73892} + 20 \implies$$

$$\theta(t_m) \approx 24,59^{\circ}\text{C}$$

o que é absurdo, por que foi admitido que a temperatura no momento da morte era de $36,5^{\circ}\text{C}$.

Isso mostra que nem sempre um problema com dados convincentes é a expressão da realidade.

Pode-se ainda, ir mais longe, supondo que o indivíduo assassinado estivesse febril quando morreu; seria ainda possível descobrir o instante de sua morte?

3.2 Morte e mistério...

Este problema é baseado em fatos reais.

Um publicitário foi encontrado morto em uma periferia da grande Goiânia dentro do seu carro em um lote baldio, no dia 21 de fevereiro de 2004. O perito chegou ao local às 23 horas e 30 minutos, depois de um morador do bairro ter feito a denúncia. Este perito aferiu a temperatura do cadáver, em $34,8^{\circ}\text{C}$. Uma hora depois, aferiu novamente, encontrando $34,1^{\circ}\text{C}$. A temperatura dentro do veículo era a mesma do ambiente, 20°C , haja vista que os vidros se encontravam abertos.

O laudo do Instituto de Criminalística aponta que a vítima estava com a cabeça tombada para baixo quando recebeu o disparo de um revólver calibre 38. O autor do disparo estava do lado esquerdo da vítima podendo estar sentado no banco do motorista ou no banco traseiro. O tiro foi disparado a curta distância e atingiu a nuca. "Quase de encosto à nuca. Não houve reação da vítima", afirma o delegado responsável pelo caso. Foram também encontrados fios de cabelo e três impressões digitais, que serão comparadas às de um dos acusados de participação no crime. Qual seria, contudo, o horário provável em que o publicitário foi vitimado?

Solucionando o problema. Determinemos k com os dados fornecidos pelo problema, substituindo-os na Equação 3.10

$$\begin{aligned} k &= -\frac{1}{t_1} \cdot \ln \left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T} \right) \implies \\ k &= -\frac{1}{1} \cdot \ln \left(\frac{34,10 - 20,00}{34,80 - 20,00} \right) \implies \\ k &= 0,04845. \end{aligned}$$

Agora sim, calculando o instante de morte utilizando a Equação (3.10), temos:

$$\begin{aligned}
 t_m &= -\frac{1}{k} \cdot \ln \left(\frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T} \right) \implies \\
 t_m &= -\frac{1}{0,04845} \cdot \ln \left(\frac{36,50 - 20,00}{34,80 - 20,00} \right) \implies \\
 t_m &= -2,24423h.
 \end{aligned}$$

Logo, o publicitário¹ morreu há 2 horas 14 minutos e 39 segundos, ou seja, às 21 horas 15 minutos e 21 segundos do dia 21/02/2004, conforme Gráfico (3.2). Após a chegada deste laudo, o inquérito deve ser concluído e remetido ao poder judiciário.

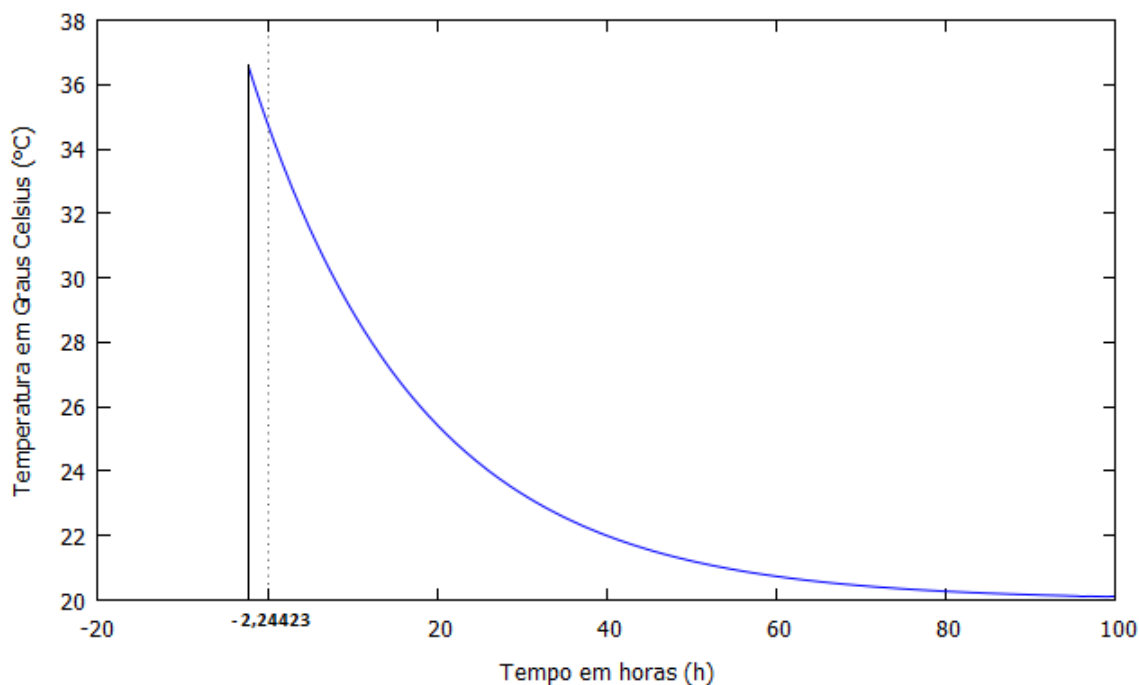


Figura 3.2: Gráfico da Aplicação 3.2. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

Diante dos fatos percebe-se que situações similares aos Problemas (3.1) e (3.2), reais ou ficcionais, podem ser representadas por uma equação matemática ou por um sistema de equações. Pela existência de uma grande quantidade de variáveis, porém, o problema se torna complexo e de difícil resolução. Eis a importância de se escolher as variáveis essenciais do fenômeno em estudo. O modelo matemático que esboça tais

¹Neste modelo também consideramos que a vítima faleceu em condições normais de saúde, ou seja, não estava com febre.

fenômenos irá conduzir à soluções bem próximas das observadas na realidade. Sendo assim, as Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem tornam-se grandes aliadas no processo de modelagem de problemas. Apresentar situações que vemos em nosso cotidiano e mostrar como é possível aplicar métodos, que a princípio parecem apenas teóricos, no seu processo de resolução, faz com que o aluno compreenda a importância, tome gosto pelo estudo matemático, percebendo que tudo ao seu redor, é simplesmente Matemática.

3.3 Crescimento de uma célula

Não há dúvidas de que crescimento é um problema biológico e que deve ser resolvido por experimentação, e não na mesa de um matemático. Mas, para se penetrar profundamente na natureza deste fenômeno, devemos combinar o método experimental com a teoria matemática. Uma possibilidade que tem sido desenvolvida por brilhantes pesquisadores. A combinação do método experimental com a teoria quantitativa é, em geral, uma das mais potentes ferramentas nas mãos da Ciência Contemporânea. (G.F. Gause, 1934)

Este exemplo é uma adaptação do exemplo retirado de Bassanezi e Ferreira [1]

Uma planta tem massa $m = 200g$ e cresce 6 g por dia. Com base nessas informações, determine:

- (i) Em quanto tempo se tornará uma pequena árvore de 50 kg?
- (ii) De quanto aumentará sua massa em 1 dia quando a planta já estiver com 50 kg?

Supomos que a massa de uma célula, denotada por m , seja função do tempo; ou seja, $m = m(t)$ e que $m_0 = m(0)$, seja sua massa inicial no instante $t = 0$. Vamos supor ainda que o crescimento da célula seja determinado somente pela velocidade do metabolismo no seu interior.

Como o *aumento do metabolismo* depende da massa das moléculas em atividade, pode-se concluir que a razão do crescimento da massa celular é proporcional à sua

massa presente em cada instante de tempo. Em termos matemáticos podemos traduzir esta relação por meio da seguinte equação:

$$\frac{dm(t)}{dt} = km(t), \quad (3.12)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade positiva. A Equação (3.12) está restrita à condição $m < M$, pois quando a célula atinge determinado tamanho ela se divide. Ou seja, M é a massa que a célula precisa atingir para se dividir.

Já sabemos que a solução geral da Equação (3.12) é dada por

$$m(t) = A.e^{kt}.$$

Para a condição inicial $m(0) = m_0$, teremos como solução particular

$$m(t) = m_0 e^{kt} \quad (3.13)$$

com $m < M$.

Dessa forma, a célula tem um crescimento exponencial até se dividir, ou seja, enquanto

$$\begin{aligned} m_0 e^{kt} &< M \implies \\ e^{kt} &< \frac{M}{m_0}. \end{aligned}$$

Como $\ln(x) : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente,

$$kt < \ln\left(\frac{M}{m_0}\right),$$

ou seja

$$t < \frac{1}{k} \ln\left(\frac{M}{m_0}\right).$$

O tempo t_d , no qual ocorre a divisão celular, é tal que

$$t_d = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{M}{m_0}\right).$$

Algo bastante relevante é o conceito de *crescimento específico*, que matematicamente é dado por

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dt} = k, \quad (3.14)$$

k é uma constante.

Desta forma, enquanto $\frac{dm}{dt}$ mede a velocidade do crescimento celular, k mede a velocidade de crescimento relativo à massa presente. Partindo desse princípio, vamos utilizar o modelo de crescimento celular para o crescimento de uma planta, que é o problema proposto nesta seção.

Solução (i). A taxa média de crescimento é dada por

$$\frac{m}{t} = \frac{6g}{24h}.$$

Agora, supondo que esta taxa não varie com o tempo, pode-se considerar que $\frac{1}{4}$ g/h seja uma boa aproximação de $\frac{dm}{dt}$ (taxa de crescimento instantâneo). A taxa de crescimento específico pode ser assim calculada

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dt} \implies \\ k &= \frac{\frac{1}{4}}{200} \implies \\ k &= \frac{1}{800} \implies \\ k &= 0,00125. \end{aligned}$$

Então, usando $m_0 = 200\text{g} = 0,2 \text{ kg}$ e $k = 0,00125$ e substituindo $m(t) = 50 \text{ kg}$, temos

$$\begin{aligned} m(t) &= m_0 \cdot e^{kt} \implies \\ 50 &= 0,2 \cdot e^{0,00125t} \implies \\ e^{0,00125t} &= \frac{50}{0,2} \implies \\ e^{0,00125t} &= 250. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Aplicando \ln em ambos os membros da Equação 3.15, temos

$$\begin{aligned} 0,00125t &= \ln 250 \implies \\ t &= \frac{\ln 250}{0,00125} \implies \\ t &= 4417,2 \end{aligned}$$

ou seja, irá demorar 4417,2 horas, que são 184,05 dias, ou ainda 6 meses, ou melhor, 6 meses e 4 dias para que a planta se torne uma pequena árvore de 50 kg. Neste problema

não foi mencionada a espécie da árvore, mas segundo a Profa. Ms. Alessandra Fonseca Mota, Bióloga: "*um Eucalipto chegaria a essa massa sim em seis meses, mas outras espécies de mata, por exemplo, levariam de 40 a 60 anos para chegarem ao grande porte.*"

Solução (ii). Usando a solução $m(t) = m_0 e^{kt}$ para $m_0 = 50$ kg e $t = 24$ h, temos

$$m(t) = 50.e^{0,00125.24} \implies$$

$$m(t) = 50.e^{0,03} \implies$$

$$m(t) = 51,523$$

Portanto a pequena árvore aumentará 1,523 kg em um dia.

O crescimento de uma planta ou animal, porém, não é tão simples como descrito no problema. A divisão celular em um organismo não é um processo contínuo. A descontinuidade surge inicialmente em algum órgão, no caso animal; ou na origem de uma folha, por exemplo, no caso vegetal.

Para eliminar essa possível descontinuidade, pode-se supor que no início do processo de crescimento exista apenas uma quantidade m_0 de células meristemáticas², responsáveis pelo crescimento de uma planta. Se as células, oriundas da divisão de uma meristemática, também forem meristemáticas, o processo de divisão continuará, e o modelo que descreve este crescimento será dado pela Equação (3.12), com $m(0) = m_0$ e, neste caso, a solução encontrada em (ii) seria perfeitamente aceita.

3.4 Absorção de Drogas

Este problema foi retirado de Bassanezi [3].

Em farmacologia, estudos são direcionados para saber como uma medicação – droga – se concentra no sangue de um indivíduo. Isso permite dimensionar a dosagem a ser ministrada e o tempo entre as doses. Sabe-se que a taxa de variação da concentração é proporcional à concentração da droga na corrente sanguínea em cada instante t . Matematicamente, temos

$$\frac{dC}{dt} = -kC. \tag{3.16}$$

²Células que se reproduzem por divisão.



Figura 3.3: Absorção de Drogas. Disponível em [13].

Onde:

- k é uma constante positiva que depende do medicamento utilizado; o sinal negativo mostra que há um decaimento da droga em cada intervalo de tempo.

- $C = C(t)$ é a concentração de droga no sangue.

É sabido que a solução da Equação (3.16) é da forma

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

Onde C_0 é a dose inicial, absorvida pelo sangue de maneira extremamente rápida, se comparado com o tempo entre uma dose e outra.

Considere que uma segunda dose de mesma quantidade C_0 seja administrada depois de um intervalo de tempo T . Temos então,

$$C(t) = C_0 e^{-kt} \implies \quad (3.17)$$

$$C(T_-) = C_0 e^{-kT} \implies \quad (3.18)$$

$$C(T_+) = C_0 e^{-kT} + C_0 \quad (3.19)$$

Onde:

- A Equação (3.17) deve obedecer à condição $0 \leq t < T$ e representa a quantidade de droga no sangue imediatamente após a 1ª dose.

- A Equação (3.18) representa a quantidade de droga no sangue imediatamente antes da 2ª dose.

- E a Equação (3.19) representa a quantidade de droga no sangue imediatamente depois da 2ª dose.

Desta forma, $C(T_+)$ passa a ser a concentração – inicial – de droga que começa a decrescer após o tempo T . Disto temos

$$\begin{aligned} C(t) &= [C_0 e^{-kT} + C_0] e^{-k(t-T)} \implies \\ C(t) &= C_0 (1 + e^{-kT}) e^{-k(t-T)} \end{aligned}$$

com $T \leq t < 2T$.

Dando continuidade ao tratamento, tomando outra dose de concentração C_0 no instante $2T$, temos

$$\begin{aligned} C(2T_-) &= C_0 (1 + e^{-kT}) e^{-kT} \implies \\ C(2T_+) &= C_0 (1 + e^{-kT}) e^{-kT} + C_0 \text{ ou seja,} \\ C(2T_+) &= C_0 (1 + e^{-kT} + e^{-2kT}). \end{aligned}$$

Desta maneira, se $2T \leq t \leq 3T$,

$$C(t) = C_0 (1 + e^{-kT} + e^{-2kT}) e^{-k(t-2T)}.$$

Pode-se generalizar para depois da n -ésima aplicação da droga no sangue. A equação ficará assim

$$\begin{aligned} C(nT_+) &= C((n-1)T_+) e^{-kt} + C_0 \implies \\ C(nT_+) &= C_0 (1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \dots + e^{-(n-1)kT}) e^{-kT} + C_0 \implies \quad (3.20) \\ C(nT_+) &= C_0 (1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \dots + e^{-nkT}). \end{aligned}$$

Portanto, se $T \leq t < (n+1)T$, então

$$C(t) = C_0 (1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \dots + e^{-nkT}) e^{-k(t-nT)}$$

se $nT \leq t$.

As Equações (3.20) mostram as concentrações de droga administrada periodicamente. É fácil ver que a expressão

$$(1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \dots + e^{-nkT})$$

é a soma dos $(n+1)$ termos de uma Progressão Geométrica de razão igual a e^{-kT} e primeiro termo igual a 1. Logo, temos que

$$C(nT_+) = C_0 \frac{1 - e^{-(n+1)kT}}{1 - e^{-kT}}.$$

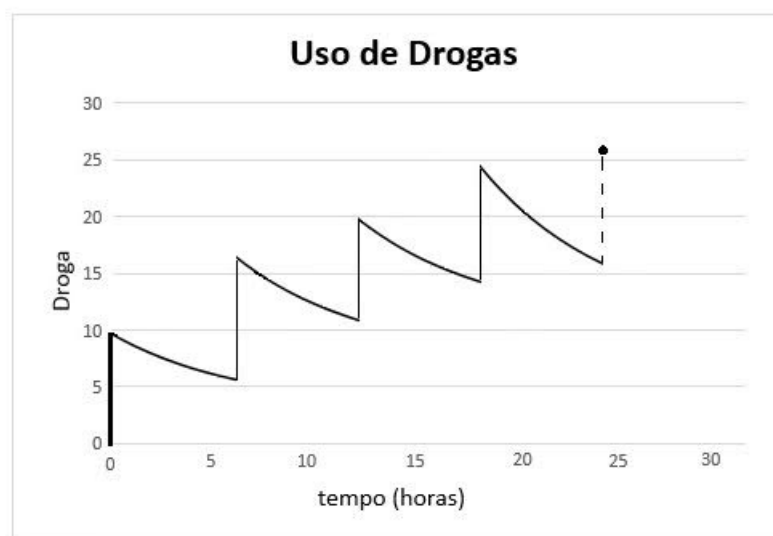


Figura 3.4: Decaimento exponencial de uma droga em cada intervalo de aplicação. Fonte: Elaborado no Excel com a ajuda da Profa. Ms. Danielle Lago.

Assim, se o tempo de tratamento com uma droga for muito longo, por um tempo indeterminado, pode-se estabelecer um *nível de saturação* da droga no sangue por

$$C_s = \lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \frac{1 - e^{-(n+1)kT}}{1 - e^{-kT}}$$

$$C_s = \frac{C_0}{1 - e^{-kT}}. \quad (3.21)$$

Agora, com base em toda a teoria estudada aqui sobre a Absorção de Drogas no sangue, analisemos as seguintes questões:

(i) Conhecendo o valor C_0 (quantidade administrada em cada dose) e de C_s (nível de saturação da droga), determine o intervalo de aplicação T ;

(ii) Se temos C_s e T , calcule a dosagem C_0 ;

Solução (i). Sabemos que $C_s = \frac{C_0}{1 - e^{-kT}}$, logo

$$1 - e^{-kT} = \frac{C_0}{C_s} \implies$$

$$e^{-kT} = 1 - \frac{C_0}{C_s} \implies$$

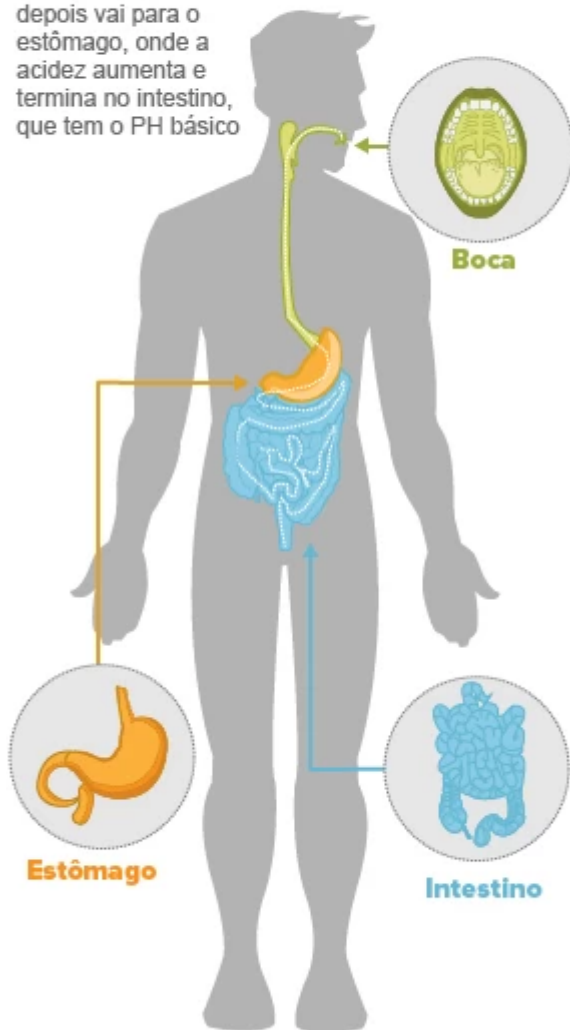
$$e^{-kT} = \frac{C_s - C_0}{C_s} \quad (3.22)$$

Remédios

Cirurgião do aparelho digestivo Fábio Atui e farmacêutico Tarcísio Palhano explicam como agem no organismo

Caminho do remédio no corpo

Passa pela boca, que tem PH neutro; depois vai para o estômago, onde a acidez aumenta e termina no intestino, que tem o PH básico



Tipos

Efeito rápido

Entram em contato rapidamente com o sangue e tratam problemas agudos

- Injetáveis
- Inaláveis
- Sublinguais

Efeito local

Indicados para problemas musculares ou de pele

- Cremes
- Pomadas
- Sprays
- Emplastos

Blindados

Têm o conteúdo envolvido para não se desfazer antes de chegar ao órgão alvo

- Cápsulas de gel
- Encapsulados
- Comprimidos

Agradáveis

Tem cor, cheiro e gosto para facilitar a ingestão

- Xaropes
- Mastigáveis
- Gotas

Proteja seu remédio



UMIDADE



CALOR



CRIANÇAS

Isso evita que o remédio perca a validade e também suas funções, o que pode trazer riscos à saúde

Figura 3.5: Caminho do remédio no organismo. Disponível em [14].

Aplicando logaritmo natural em ambos os membros da Equação (3.22) e dividindo por k em ambos os membros desta, teremos que o intervalo de aplicação da droga é dado por

$$T = -\frac{\ln\left(\frac{C_s - C_0}{C_s}\right)}{k}.$$

Solução(ii). Se temos C_s e T , podemos obter a dosagem C_0 , simplesmente evidenciando C_0 na Equação (3.21), ou seja,

$$C_0 = C_s (1 - e^{-kT}).$$

3.5 Falsificações de Obras de Arte

3.5.1 Os "Vermeers" de Van Meegeren

Esta seção foi baseada em M. Braun [8], Evangelista [11], Silva [9] e Wynne [7].

O mercado da arte sempre esteve em alta e nunca em crise. Apesar dos abalos financeiros no mundo, esse mercado artístico registra índices de crescimento gradativos anuais, movimentando fortunas adquiridas em leilões por colecionadores particulares ou museus, mas nem todas as obras são legítimas. Analistas de obras de arte dizem que metade das obras de arte que circulam no mercado internacional é composta por réplicas.

Entre os dez mestres da falsificação de arte estão Eric Hebborn, Willian Sykes, Tom Keating, Elmyr de Hory, John Myatt, Os Greenhalgh, Icílio Federico Joni, Mark Landis, Michelangelo Buonarrotti e Han Van Meegeren. Este último não optou por ser um falsificador, queria ser reconhecido como artista. Por não encontrar resultado financeiro no mercado da arte para suas obras originais, começou a replicar o estilo do também holandês Johannes Vermeer. Tornou-se uma estrela secreta do mundo das artes e um dos maiores falsários de todos os tempos.

Henricus Antonius Han Van Meegeren foi um pintor holandês e falsificador de arte, nascido nos Países Baixos em 10 de outubro de 1889, morreu por ataque cardíaco aos 58 anos de idade, em 30 de dezembro de 1947, em Amsterdan. Seu pai queria que o filho fosse arquiteto. Este, na adolescência, ganhava concursos de desenho pela Europa,

assinava seus quadros e com dezoito anos fez sua primeira exposição. Três anos depois morou na Itália por três meses aprendendo arte com os mestres renascentistas.

Regressando à Holanda fez uma nova exposição e vendeu todas as suas obras. Devido ao uso de entorpecentes e brigas constantes, sua fama foi abalada e estacionaram sua carreira. Para sair da situação decadente, Meegeren dedicou-se a pintar obras falsas de outros pintores como Franz Hals, Pieter de Hooch e Gerard ter Borch, porém se especializou em Vermeer. Um dos motivos encontrados foi o próprio desconhecimento que se tinha sobre a vida de Vermeer, e agindo dessa forma ficaria fácil ‘encontrar’ uma obra do mestre.

Johannes Vermeer (1632 – 1675) foi um mestre da era barroca da pintura de ouro da Holanda, tendo sua obra denominada ‘pintura de gênero’ dedicada às cenas do cotidiano. A Dama com brinco de pérola, a Mona Lisa da Holanda, é uma de suas mais famosas obras, tendo inclusive inspirado a produção de um filme, dirigido por Peter Webber e lançado em 2003, com título original *Girl with a Pearl Earring* e traduzido para o português como *Moça com Brinco de Pérola* (Ver Figura 3.6). Meegeren optou pelas obras de Vermeer, pois eram extremamente valiosas e escassas, não mais que 35 delas haviam sobrevivido.



Figura 3.6: Moça com Brinco de Pérola. Disponível em [15].

Meegeren mergulhou nas biografias dos antigos mestres da arte buscando técnicas de marca registrada e catálogos, definindo assim, os procedimentos químicos e técnicos que seriam necessários para suas réplicas ‘perfeitas’. Adquiriu autênticas telas do século

XVII misturando suas próprias tintas a partir de matérias-primas: lápis azul, chumbo branco, índigo e cinábrio, pincéis de cabelo de texugo³ semelhantes aos de Vermeer. Meegeren elaborou um esquema de utilização de fenol formaldeído para endurecer a tinta após a aplicação, fazendo com que as pinturas parecessem ter 300 anos de idade e, para concluí-la, cozinhava as telas de 100°C (212°F) a 120°C (248°F) rolando sobre um cilindro para aumentar as rachaduras, e finalmente, lavar a pintura em tinta preta índia para o preenchimento das rachaduras.

Anos se passaram e Meegeren estava satisfeito com suas obras em ambos os níveis artístico e enganoso.

Meegeren não copiava os quadros de Vermeer, pois sabiam o paradeiro das suas obras devido a escassa produção em vida. Ele pintava obras originais, copiando com perfeição o estilo do mestre e assinava as obras como se fosse de Vermeer. Então dizia ter encontrado as obras. Assim passou à produção de uma dezena de ‘Vermeers’ falsos e comemorava pelo preços elevados que os vendia.

O artista em foco viveu os horrores da Segunda Guerra Mundial e a Revolução da Arte Moderna. Faturou mais de cinquenta milhões de dólares com seus quadros falsos vendidos aos maiores museus europeus – A Cabeça de Cristo, A Última Ceia, A Bênção de Jacó, A Adúltera e A Lavagem dos Pés – tudo à maneira de Vermeer.

Os Peregrinos de Emaús (Ver Figura 3.7) é a obra mais famosa do falsário, foi pintada em 1937. Meegeren teve o cuidado em produzi-la de forma que não se assemelhasse ao estilo habitual de Vermeer pois desse só se conhecia uma tela religiosa, a chamada Cristo na casa de Marta e Maria. Esta já era exposta desde 1901 em uma galeria de arte em Londres. O crítico holandês, Abraham Bredius, atestou que tal obra foi pintada por Vermeer ainda no início da carreira e concluiu que outras obras dessa época poderiam surgir a qualquer momento. Diante da possibilidade de descoberta de novos ‘Vermeers’ pontuada por Bredius e da ousadia de Meegeren, este pintou A Última Ceia assinando-a como Vermeer (Ver Figura 3.8). Esta obra de arte rendeu-lhe sete milhões de dólares e ele não parou por aí.

No auge da Segunda Guerra Mundial, as tropas nazistas invadiram a Holanda e a produção de ‘Vermeers’ continuou. Quando terminou a Guerra, os aliados de Hitler encontraram uma réplica de Vermeer Cristo e a Adúltera (Ver Figura 3.9) numa mina

³Designação comum a diversos mamíferos da família dos mustelídeos, de corpo atarracado, cauda curta e pelos rijos, usado na confecção de diversos tipos de pincéis. São animais noturnos e vivem em grandes tocas cavadas no solo.



Figura 3.7: Os Peregrinos de Emaús. Disponível em [16].



Figura 3.8: A Última Ceia. Disponível em [17].

de sal na Áustria. Comprovadamente, ela pertencia a Hermann Göring, um membro do governo nazista que chegou a ser nomeado por Adolf Hitler como seu sucessor, adquirida através de Meegeren por quinze milhões de dólares (convertendo o valor para os dias de hoje). Pela venda de um ‘autêntico Vermeer’ a um membro do partido Nazista, o artista falsário foi para a prisão acusado de trair a pátria e poderia ser condenado até à pena de morte. Sendo assim, não restava outra opção a Meegeren a não ser confessar que havia falsificado os ‘Vermeers’. Diz-se que o espanto foi geral. Admitiu que todos aqueles quadros eram de sua autoria e o único recurso da corte foi exigir que pintasse seu último Vermeer, Jesus entre os doutores, diante de um júri para provar que era capaz de pintar como o mestre (Ver Figura 3.10). Foi um artista fenomenal, embora não reconhecido. Meegeren queria ser aclamado um herói nacional dizendo não ser



Figura 3.9: Cristo e a Adúltera. Disponível em [18].

um traidor, mas alguém que conseguiu enganar os nazistas. Apesar de não ter sido reconhecido por seu talento com pinturas de obras de arte, Meegeren entrou para a história da arte e ainda zombou dos críticos que haviam renegado e aclamado suas réplicas. Disse ele ‘Ou bem os críticos admitem que costumam falhar, ou reconhecem que sou tão grande quanto Vermeer.’ O falsário alegou que os motivos de pintar tais réplicas seria vingar-se dos críticos que davam apoio às nascentes vanguardas. Segundo ele, tinha o propósito de revelar sua identidade após o sucesso da sua primeira réplica. Seu julgamento teve uma duração de dois anos (Ver Figura 3.11). Meegeren acabou sendo inocentado da acusação de traição e colaboração com o nazismo, sendo condenado a apenas um ano de prisão pelo crime de falsificação de obras.

Um mês após seu julgamento final, porém, morreu sem ter cumprido nenhum dia da pena estabelecida.

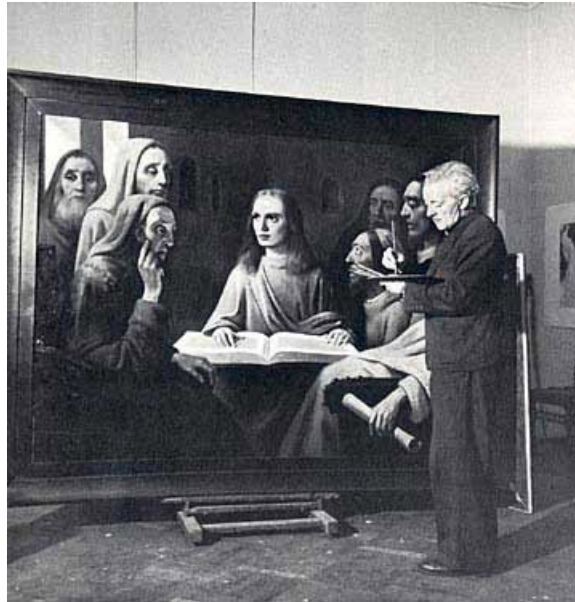


Figura 3.10: Meegeren Pintando para os Especialistas. Disponível em [19].



Figura 3.11: Julgamento de Meegeren. Disponível em [20].

Conclui-se que se a falsificação do quadro Cristo e a Adúltera não tivesse sido descoberta, provavelmente hoje, admiraríamos um Meegeren como se fosse um Vermeer. As pinturas de Meegeren não foram destruídas e hoje valem pequenas fortunas e são expostas em vários lugares do mundo.

Vinte anos após a morte de Van Meegeren, cientistas da Carnegie University Mellon decidiram trabalhar no intuito de determinar a idade das obras que se tinha dúvida se eram autênticos Vermeers, a fim de solucionar uma questão que nem críticos gabaritados de arte foram capazes de desvendar.

Considerando os estudos de Rutherford e sua equipe, que assegura que os átomos de certos elementos radioativos não são estáveis e que, com o passar do tempo tais substâncias se desintegram formando novos elementos, os cientistas de Carnegie conseguiram medir substâncias específicas presentes nas tintas utilizadas em pinturas. Esta medição possibilitou estimar a idade das obras em questão e, conseqüentemente, estabelecer a autoria dos quadros analisados. No que segue, formalizaremos esta ideia, a fim de explicar matematicamente como se deu a datação das obras.

Rutherford provou que a radioatividade de uma substância é diretamente proporcional ao número de átomos da mesma. Ou seja, se denotarmos o número de átomos de determinado elemento em uma amostra no instante t por $N(t)$, então o número de átomos que se desintegra por unidade de tempo da amostra, a saber $\frac{dN}{dt}$, é proporcional a $N(t)$. Isto é expresso pela Equação Diferencial

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t) \quad (3.23)$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante que caracteriza o decaimento radioativo e depende da substância analisada.

Note que:

- (i) $\frac{dN}{dt} < 0$, o que traduz matematicamente a desintegração da substância; e
- (ii) quanto maior o valor da constante λ , mais rápido a substância decairá.

O tempo que uma substância leva para que metade da quantidade átomos radioativos de tal substância decaia é chamado de meia-vida radioativa. A meia-vida radioativa é, portanto, uma medida da taxa de desintegração de dada substância.

Suponhamos que $N(t_0) = N_0$ e encontremos, a partir da Equação (3.23), o tempo de meia-vida de uma substância genérica em função de sua constante de desintegração

λ .

$$\begin{aligned} N'(t) &= -\lambda N(t) \implies \\ N'(t) + \lambda N(t) &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando a método do Fator Integrante, temos que o Fator Integrante é $\mu(t) = e^{\int \lambda dt} = e^{\lambda t}$ e a solução da Equação (3.23) é

$$N(t) = \frac{\int e^{\lambda t} \cdot 0 dt + c}{e^{\lambda t}} = c \cdot e^{-\lambda t}.$$

Como $N(t_0) = N_0$,

$$N_0 = c \cdot e^{-\lambda t_0} \implies c = \frac{N_0}{e^{-\lambda t_0}} = N_0 \cdot e^{\lambda t_0}.$$

Logo,

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot e^{\lambda t_0}}{e^{\lambda t}} = N_0 \cdot e^{\lambda(t_0 - t)} = N_0 \cdot e^{-\lambda(t - t_0)}$$

Portanto,

$$\left(\frac{N(t)}{N_0} \right) = e^{-\lambda(t - t_0)}.$$

Aplicando o logaritmo natural, temos que

$$-\lambda(t - t_0) = \ln \left(\frac{N(t)}{N_0} \right).$$

De onde,

$$t - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{N_0}{N(t)} \right). \quad (3.24)$$

Se $N(t) = \frac{N_0}{2}$, então

$$t - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln(2). \quad (3.25)$$

Utilizando a aproximação $\ln(2) = 0,6931$ temos que o tempo de meia vida é

$$t - t_0 = \frac{0,6931}{\lambda}.$$

Em geral, a constante de decaimento λ é conhecida ou pode ser computada. Assim, de posse da Equação (3.24), podemos determinar facilmente a idade $t - t_0$ da substância, caso conheçamos N_0 . Em [8] detalha-se fatos e dados importantes que devem ser

considerados a fim de se estimar N_0 em substâncias presentes nas pinturas utilizadas por um artista por um período de 2000 anos. No que segue, listaremos as principais informações contidas em [8] e [11] e as analisaremos com o intuito de desvendar quais pinturas pertenciam a Veermer e quais pertenciam a Meegeren. Ressaltamos que nossa análise é baseada e estabelecida em [8] e [11].

Fato 1. A maioria das rochas presentes na crosta terrestre contém uma pequena quantidade de Urânio-238. O Urânio-238 possui meia-vida radioativa de cerca de $4\frac{1}{2}$ bilhões de anos, transformando-se após esse tempo em Tório-234, este por sua vez tem uma meia-vida de 330 mil anos e seu decaimento o reduz a Rádio-226. O Rádio tem meia-vida de 1600 anos e se transforma em Chumbo-210 (Pb^{210}). Por fim, o Chumbo-210 tem meia-vida de 22 anos e, após este período, decai para o elemento não radioativo Chumbo-206 (Pb^{206}), conforme Figura 3.12.

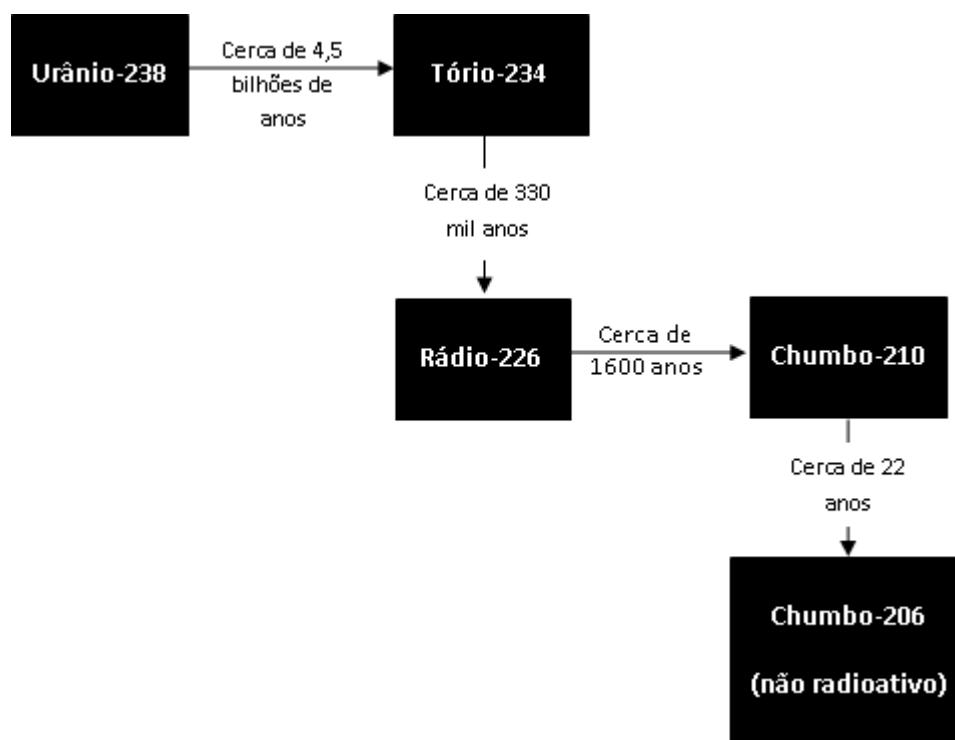


Figura 3.12: Meia-vida dos elementos.

Fato 2. Todas as pinturas feitas de 2000 anos até os dias atuais usam em sua composição um pigmento chamado Chumbo Branco. O Chumbo Branco, presente nos quadros, possui uma pequena quantidade de um elemento radioativo Chumbo-210 e uma quantidade ainda menor de Rádio-226 (o Rádio-226 aparece em menor quantidade

pois no processo utilizado na extração do Chumbo Branco perde-se de 90 a 95% do Rádío presente na matéria-prima; além disso, a transformação do Urânio para o Rádío é bem mais lenta do que a do Rádío para Chumbo-210).

Fato 3. O Chumbo-210 presente no Chumbo Branco começa a se desintegrar rapidamente, já que sua meia-vida radioativa é de 22 anos. Assume-se que o processo de decaimento do Pb^{210} continua até que este entre em equilíbrio radioativo com a pequena quantidade de Rádío da amostra. Por equilíbrio radioativo entende-se que a quantidade de Rádío que decai para Chumbo é igual a quantidade de Chumbo que se desintegra por unidade de tempo.

Considere:

- $y(t)$ a quantidade de Chumbo-210 por grama de Chumbo Branco no tempo t ;
- y_0 a quantidade de Chumbo-210 por grama de Chumbo Branco no tempo t_0 de fabricação do pigmento;
- $r(t)$ o número de desintegrações do Rádío-226 por minuto por grama de Chumbo Branco no tempo t .
- λ a constante de decaimento do Chumbo-210.

Levando em consideração o **Fato 3**, temos o seguinte P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\lambda y + r(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Estamos interessados na variação da quantidade de Chumbo-210 em um período de, no máximo 300 anos (diferença entre o período em que foi realizada a pesquisa e o período em que foram pintadas as possíveis obras de Veermer). Como o Rádío-226 tem uma meia vida de 1600 anos, assumiremos que em um período de no máximo 300 anos, a quantidade de Rádío-226 na amostra de Chumbo Branco permanece constante. Além disso, sabemos que a taxa de desintegração do Rádío é proporcional a quantidade de átomos desse elemento; logo $r(t)$ também é constante e será denotada por r .

O nosso P.V.I. simplifica-se em

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\lambda y + r \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Para resolver o P.V.I., vamos utilizar o Método do Fator Integrante para Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem.

Temos que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -\lambda y + r \implies \\ \frac{dy}{dt} + \lambda y &= r.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Comparando a Equação (3.26) com $y' + p(t)y = g(t)$, temos que $p(t) = \lambda$ e $g(t) = r$. Sabemos que o Fator Integrante $\mu(t)$ é dado por

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int \lambda dt} = e^{\lambda t}.$$

Multiplicando ambos os membros de (3.26) por $\mu(t) = e^{\lambda t}$, temos

$$e^{\lambda t} \cdot \frac{dy}{dt} + e^{\lambda t} \cdot \lambda y = e^{\lambda t} \cdot r\tag{3.27}$$

Temos que o 1º membro da Equação (3.27) é o resultado da derivada do produto $\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} \cdot y)$. Logo

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} \cdot y) = e^{\lambda t} \cdot r.$$

Integrando ambos os membros, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dt}(e^{\lambda t} \cdot y) &= \int e^{\lambda t} \cdot r dt \implies \\ e^{\lambda t} \cdot y &= r \cdot \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} + c.\end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por $e^{\lambda t}$, temos

$$y = \frac{r}{\lambda} \cdot \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}} + \frac{c}{e^{\lambda t}}.$$

Logo, temos como solução geral:

$$y(t) = \frac{r}{\lambda} + c \cdot e^{-\lambda t}.\tag{3.28}$$

Agora, substituindo o P.V.I. $y(t_0) = y_0$ na Equação (3.28), temos

$$\begin{aligned}y(t_0) &= \frac{r}{\lambda} + c \cdot e^{-\lambda t_0} \implies \\ y_0 &= \frac{r}{\lambda} + c \cdot e^{-\lambda t_0} \implies \\ y_0 - \frac{r}{\lambda} &= c \cdot e^{-\lambda t_0} \implies \\ c &= y_0 \cdot e^{\lambda t_0} - \frac{r}{\lambda} \cdot e^{\lambda t_0}.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Substituindo (3.29) na Equação (3.28), temos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{r}{\lambda} + \left(y_0 \cdot e^{\lambda t_0} - \frac{r}{\lambda} \cdot e^{\lambda t_0} \right) \cdot e^{-\lambda t} \implies \\ y(t) &= \frac{r}{\lambda} + y_0 \cdot e^{-\lambda(t-t_0)} - \frac{r}{\lambda} \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução do P.V.I. é dada por:

$$y(t) = \frac{r}{\lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + y_0 \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}. \quad (3.30)$$

Para estabelecermos a datação das obras, determinado por $t - t_0$, seria necessário conhecer y_0 , o que a priori não é possível. Então, vamos elencar outros fatos para continuar nossa análise.

Fato 4. Se o quadro é muito antigo, a quantidade de radiação emitida do Chumbo-210 deve ser aproximadamente a mesma quantidade de radiação do Rádio-226 na pintura. Isto é intuitivo, pois em um período de 300 anos, enquanto a quantidade de Rádio na pintura permanece quase que constante, o Chumbo-210 já passou por mais de 13 intervalos de meia-vida. Em contrapartida, se a pintura é atual, então a quantidade de radiação emitida pelo Chumbo-210 deveria ser bem maior do que a quantidade de radiação emitida pelo Rádio-226.

Consideremos a Equação (3.30) e façamos alguns cálculos.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{r}{\lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + y_0 \cdot e^{-\lambda(t-t_0)} \implies \\ \lambda y(t) &= r \cdot (1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + \lambda y_0 \cdot e^{-\lambda(t-t_0)} \implies \\ \lambda y(t) e^{\lambda(t-t_0)} &= r \cdot e^{\lambda(t-t_0)} - r + \lambda y_0 \implies \\ \lambda y_0 &= \lambda y(t) e^{\lambda(t-t_0)} - r \cdot (e^{\lambda(t-t_0)} - 1). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pelo descrito no **Fato 4**, se a obra é atual λy_0 , que mede a taxa de variação de Pb^{210} no instante t_0 , deve ser muito alto

Suponha $t - t_0 = 300$ na Equação 3.31

$$\lambda y_0 = \lambda y(t) e^{300\lambda} - r \cdot (e^{300\lambda} - 1). \quad (3.32)$$

Se ao instanciarmos $y(t)$, t , r e λ (sabemos que estes podem ser computados) obtivermos um alto valor para λy_0 , teremos uma incoerência. Isto pois, estamos supondo que determinada obra tem 300 anos (é antiga) e mesmo assim λy_0 está resultando em um alto valor. Este absurdo seria gerado por supormos que $t - t_0 = 300$; disto, poderíamos concluir que a obra em questão é uma falsificação moderna.

A pergunta que surge é: quão alto deve ser λy_0 para que tal inconsistência seja gerada? Iremos discutir essa questão a seguir.

Fatos 5. A média de quantidade de Urânio em pedras da crosta terrestre é e aproximadamente 27 partes por milhão, ou seja, 0,00027%.

Suponhamos que a taxa de desintegração do Pb^{210} é de 98000 desintegrações por minuto por grama (dpm/g) de Chumbo Branco. Nosso objetivo é mostrar que tal desintegração do Pb^{210} indicará uma quantidade inimaginável de Urânio compondo a rocha da qual tal Pb^{210} foi extraído.

Consideremos a meia-vida radioativa do Urânio-238 como $4,51 \cdot 10^9$ anos. Considere ainda que, o Urânio-238 e o Chumbo-210 encontram-se em equilíbrio radioativo no minério do qual foram extraídos. Então, se U representa a quantidade de Urânio na rocha, temos que

$$\frac{dU}{dt} = -\lambda_U \cdot U = -30000 \text{ dpm/g},$$

onde λ_U é a constante de decaimento do Urânio-238.

Como 1 ano tem 525600 minutos, pela Equação (3.25)

$$\lambda_U = \frac{\ln(2)}{4,51 \cdot 5,25600 \cdot 10^{14}} \approx 0,029 \cdot 10^{-14}.$$

Portanto, no instante t_0

$$U = \frac{30000}{\lambda} = \frac{98000}{0,29 \cdot 10^{-14}} = \frac{9,8 \cdot 10^4}{0,29 \cdot 10^{-14}} \approx 33,79 \cdot 10^{18} \text{ átomos}.$$

Logo, temos cerca de $33,79 \cdot 10^{18}$ átomos de Urânio no minério no instante em que a taxa de desintegração de Pb^{210} é 98000 dpm/g . Calculemos agora, a porcentagem de Urânio na rocha que isto equivale. Lembremos que 1 mol de Urânio equivale a 238 g, que por sua vez possui $6,02 \cdot 10^{23}$ átomos de Urânio. Este último valor é a constante chamada *avogadro*. Então

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ mol} & - & - & - & 238 \text{ g} & - & - & - & 6,02 \cdot 10^{23} \text{ átomos} \\ & & & & x & - & - & - & 33,79 \cdot 10^{18} \text{ átomos} \\ & & & & x & \approx & & & 1335,88 \cdot 10^{-5}. \end{array}$$

Ou seja, se o Chumbo-210 se desintegra a uma taxa de 98000 dpm/g de Chumbo Branco, temos que no minério do qual tal Chumbo foi extraído havia mais de 1,34% de Urânio, o que é absurdo. Portanto, se for constatado que $\lambda y_0 > 98000$ para determinada obra de arte, quando consideramos $t - t_0 = 300$, podemos afirmar que se trata de uma

falsificação. Quimicamente falando, a taxa de desintegração do Polônio-210 (Po^{210}), após alguns anos, é a mesma do Pb^{210} e a do Polônio é mais fácil de ser medida, já que o Chumbo é um núcleo estável e o Polônio é um elemento radioativo.

Sabemos que a constante de decaimento do Pb^{210} é $\lambda = \frac{\ln(2)}{22}$. Logo, para calcularmos $e^{300\lambda}$ basta fazermos

$$\begin{aligned} e^{300\lambda} &= e^{300 \cdot \frac{\ln(2)}{22}} \implies \\ e^{300\lambda} &= e^{\frac{300}{22} \cdot \ln(2)} \implies \\ e^{300\lambda} &= e^{\ln(2) \frac{300}{22}} \implies \\ e^{300\lambda} &= 2^{\frac{300}{22}} \implies \\ e^{300\lambda} &= 2^{\frac{150}{11}}. \end{aligned}$$

Podemos assim substituir os valores fornecidos pela Tabela (3.1) na Equação (3.32) e avaliarmos λy_0 em cada Obra de Arte descrita.

Descrição	Desintegração Po^{210}	Desintegração Ra^{226}
Os Peregrinos de Emaús	8,5	0,8
Lavagem dos Pés	12,6	0,26
Mulher Lendo Música	10,3	0,3
Mulher Tocando Bandolim	8,2	0,17
A Rendeira	1,5	1,4
Mulher Sorridente	5,2	6,0

Tabela 3.1: Desintegração dada em minutos por grama de Chumbo Branco.

Vejamos os cálculos:

Os Peregrinos de Emaús:

$$\lambda y_0 = (8,5)2^{\frac{150}{11}} - (0,8) \left(2^{\frac{150}{11}} - 1 \right) = 98050.$$

Lavagem de Pés:

$$\lambda y_0 = (12,6)2^{\frac{150}{11}} - (0,26) \left(2^{\frac{150}{11}} - 1 \right) = 157134,1.$$

Mulher Lendo Música:

$$\lambda y_0 = (10, 3)2^{\frac{150}{11}} - (0, 3) \left(2^{\frac{150}{11}} - 1 \right) = 127337, 2.$$

Mulher Tocando Bandolim:

$$\lambda y_0 = (8, 2)2^{\frac{150}{11}} - (0, 17) \left(2^{\frac{150}{11}} - 1 \right) = 102251, 7.$$

A Rendeira:

$$\lambda y_0 = (1, 5)2^{\frac{150}{11}} - (1, 4) \left(2^{\frac{150}{11}} - 1 \right) = 1274, 7.$$

Mulher Sorridente:

$$\lambda y_0 = (5, 2)2^{\frac{150}{11}} - (6, 0) \left(2^{\frac{150}{11}} - 1 \right) = -10181.$$

Portanto, por todos os cálculos efetuados para cada Obra de Arte com os dados da Tabela (3.1), pode-se constatar que as obras *Peregrinos de Emaús*, *Lavagem de Pés*, *Mulher Lendo Música* e *Mulher Tocando Bandolim* são falsificações modernas do seu compatriota Vermeer. Enquanto *A Rendeira* e *Mulher Sorridente* não são falsificações de Meegeren, o que já havia sido confirmado por alguns especialistas da época.

Capítulo 4

Aplicações no Ensino Médio

4.1 Contextualização e Interdisciplinaridade

Sabe-se que em uma sala de aula, o ensino de Matemática, em especial, é muito mais do que uma simples transmissão de conhecimento, envolve o entendimento de atitudes e valores. É um engano pensar que os alunos terão êxito em exames como ENEM¹, vestibulares e concursos se forem preparados o tempo todo, trabalhando grandes quantidades de conteúdos sem conexão com sua realidade, fazendo com que aqueles decorem fórmulas ou ‘macetes’. A ideia de contextualização da Matemática com outras áreas do conhecimento é fundamental no ensino, podendo dar mais responsabilidade e segurança no processo educativo, propiciando um elo entre a teoria e a prática. É fundamental a contextualização do ensino, por ser assim que o estudante se sentirá comprometido e envolvido com o processo educativo.

Infelizmente, de nada adiantará se o conhecimento matemático não for consolidado, permitindo desenvolver um raciocínio lógico. Para que esse paradigma educacional, que vem se arrastando há décadas, cuja proposta é transmitir conteúdos sem significado para o aluno, possa ser rompido e novas metodologias possam ser desenvolvidas, é preciso que o sistema educacional mude em alguns aspectos. Leia o que diz a pedagoga interdisciplinar Heloisa Lück:

No ensino, a falta de contato do conhecimento com a realidade parece

¹Exame Nacional do Ensino Médio.

ser uma característica mais acentuada ainda. Os professores, no esforço de levar seus alunos a aprender, o fazem de maneira a dar importância ao conteúdo em si e não à sua interligação com a situação a qual emerge, gerando a já clássica dissociação entre teoria e prática. 'O que se aprende na escola não tem nada a ver com a realidade', é o entendimento comum de pessoas que, saindo dos bancos escolares, assumem uma responsabilidade profissional. (HELOISA LÜCK, 1995, p. 38)

A transmissão de conteúdos e conhecimentos em sala de aula faz com que os alunos construam seus próprios conceitos e que eles possam atingir os seus desenvolvimentos tanto individuais quanto intelectuais e sociais. Piaget, quando analisa o papel da atividade do professor no processo ensino-aprendizagem ressalta que "compreender é inventar ou reconstruir, através da reinvenção, e será preciso curvar-se ante tais necessidades se o que se pretende, para o futuro, é moldar indivíduos capazes de produzir ou de criar, e não apenas de repetir."

O planejamento de conteúdos deve partir de princípios que possam contribuir no desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem do aluno. Para que tais mudanças possam acontecer, deve-se planejar utilizando-se de metodologias diversas, e espera-se que cada uma possa atingir os objetivos esperados. Quando se busca diferentes metodologias no ensino de Matemática, não se pode afirmar que, a utilização do tradicional quadro branco e pincel e do livro didático estejam erradas e ultrapassadas, mesmo porque,

a educação é hoje conhecida como um fator de mudanças, renovação e progressão. Por tais circunstâncias o planejamento se impõe, nesse setor, como recurso de organização, devendo ser adequado a cada instância e à dificuldade de cada aluno ou aluna. A cada nova metodologia aplicada, espera-se que o ensino-aprendizagem possa ser alcançado por todos. É bom lembrar que não existem metodologias adequadas se o professor não souber desenvolvê-las. (FLÁVIA et al., 2000)

Quando um aluno estuda Matemática, o professor tem a responsabilidade de fazer com que aqueles percebam que os conceitos que alguns livros didáticos trazem não são conceitos prontos e acabados, mas que podem ser mudados à luz de novos conhecimentos e que esta matéria se faz com experimentos, observações, acertos e erros.

A Matemática é uma das mais importantes ferramentas da sociedade moderna. Apropriar-se dos conceitos e procedimentos matemáticos básicos contribui para a for-

mação do futuro cidadão que se engajará no mundo do trabalho, das relações sociais, culturais e políticas. Para exercer plenamente a cidadania é preciso saber contar, comparar, medir, calcular, resolver problemas, argumentar, conhecer formas geométricas e interpretar criticamente informações em gráficos e tabelas.

Nos atos cotidianos e nas construções humanas, bem como nas atividades artísticas, a quase totalidade dos homens sofre a influência da Matemática, pois cada um deles tem uma ferramenta a empregar, um aparelho a pôr em funcionamento, uma máquina a utilizar. Sem falar dos especialistas, marinheiros, arquitetos, médicos, engenheiros, físicos, biólogos, dentre outros, para os quais o uso profissional da Matemática tem um caráter permanente.

Diante dos fatos, o ensino que se tem hoje não consegue fazer com que os alunos contextualizem determinados conteúdos. Os alunos precisam saber que as coisas mais simples que acontecem ao seu redor estão relacionadas à Matemática. Ter noção básica desta instrumentaliza o cidadão para que ele possa saber exigir os benefícios do conhecimento matemático para a sociedade, sem esquecer-se, claro, da parte teórica, pois quem não tem teoria não consegue aplicar.

Nos capítulos anteriores, apresentamos alguns métodos de resolução de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem e situações-problema cujas soluções dependiam de tais métodos. Obviamente, não é viável apresentar tais resultados para alunos do Ensino Básico, porém pode-se observar que muitas das soluções dos problemas propostos envolviam Funções Exponenciais e Logarítmicas.

O estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas inicia-se no Ensino Médio e é visto pela maioria dos estudantes como assuntos de grande complexidade. Muitas vezes, o professor define tais funções e apresenta suas propriedades, mas não ilustra como tais conteúdos são importantes para abordar problemas que estão presentes em nosso cotidiano. Neste capítulo temos como objetivo trabalhar as Funções Exponenciais e Logarítmicas, apresentando sua definição, propriedades e situações-problema que envolvem aquelas funções e podem ser utilizadas para exemplificar sua importância a alunos do Ensino Básico.

4.2 Funções Exponencial e Logarítmica

Segundo os autores Luiz Roberto Dante [5] e Giovani e Bonjorno [6], pode-se orga-

nizar de forma clara e prática os tópicos que se relacionam com as Funções Exponencial e Logarítmica, a fim de, em seguida fazermos a análise gráfica dos problemas desenvolvidos no Capítulo 3.

Como veremos, as Funções Exponenciais e Logarítmicas dos problemas propostos neste capítulo são oriundas de soluções de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem, tratadas nos capítulos anteriores. Como já dissemos, apesar de não ser possível abordar todo o processo de modelagem e estratégia de resolução de Equações Diferenciais para alunos do Ensino Médio, a contextualização e a exemplificação de que Funções Exponenciais e Logarítmicas são de grande importância para solucionarmos problemas de destaque na Física, Química e Biologia, atuam como poderosa ferramenta para estimular o aluno ao estudo de tais tópicos.

Assume-se que para acompanhar este capítulo, um aluno de Ensino Médio domine os conceitos de: propriedades de potências e radiciação em \mathbb{R} ; funções; domínio, contradomínio e imagem de funções; e injetividade, sobrejetividade e bijetividade de funções.

4.2.1 Função Exponencial

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada *função exponencial de base a* . É importante ressaltar o porquê da base ser positiva e diferente de 1. Analisemos os seguintes casos:

1. Se $a < 0$, então $f(x) = a^x$ não estaria definida para todo x real. Por exemplo, supondo $a = -4$ e $x = \frac{1}{6}$, temos que:

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = (-4)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{-4},$$

onde, percebe-se que não se trata de um número real. Logo, a fim de que $f(x) = a^x$ esteja definida para todo x real, exigimos que $a > 0$.

2. Se $a = 1$, então $f(x) = a^x$ será uma função constante, ou seja, uma reta passando por $y = 1$, paralela ao eixo das abscissas.

Assim, de acordo com a definição da Função Exponencial $f(x) = a^x$:

- O domínio da função é $D(f) = \mathbb{R}$;
- O contradomínio da função é $CD(f) = \mathbb{R}$;

- A imagem da função é $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$;
- A Função Exponencial $f(x) = a^x$ é injetiva, pois dados quaisquer dois elementos distintos pertencentes ao seu domínio, obtêm-se imagens distintas. Isto é, se $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $a^x \neq a^y$, logo f é injetiva.
- Ela não é sobrejetiva, pois $Im(f) \neq CD(f)$. Entretanto, ela passa a ser sobrejetiva e, conseqüentemente, bijetiva, se restringirmos o seu domínio² a $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Agora, vamos examinar o comportamento da Função Exponencial traçando seu gráfico no plano cartesiano. Temos dois casos a serem analisados: o caso em que $a > 1$ e o caso em que $0 < a < 1$. Para termos uma ideia de como se comporta a Função Exponencial em cada um destes casos, analisaremos dois exemplos.

Exemplo 12 (1º Caso: $a > 1$).

Considere as funções $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3^x$, $f_3(x) = 4^x$ e $f_4(x) = 5^x$.

Os gráficos dessas funções estão ilustrados na Figura 4.1.

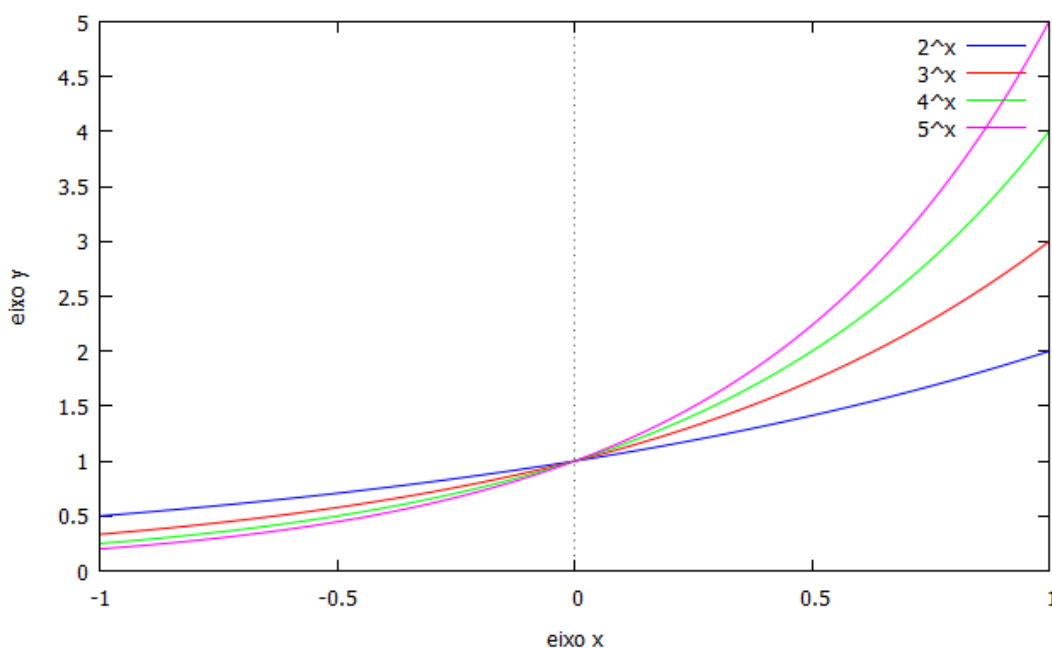


Figura 4.1: Funções Exponenciais Crescentes: $a > 1$. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

No caso geral, para $a > 1$ qualquer, pode-se observar que quanto maior o expoente

²Essa restrição será muito relevante para o estudo das Funções Logarítmicas na próxima seção.

x , maior é a potência a^x , ou seja, se $a > 1$, a função f é dita **Função Exponencial Crescente**, conforme Figura (4.1), pois $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplo 13 (2º Caso: $0 < a < 1$).

Considere as funções $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Os gráficos dessas funções estão ilustrados na Figura 4.2.

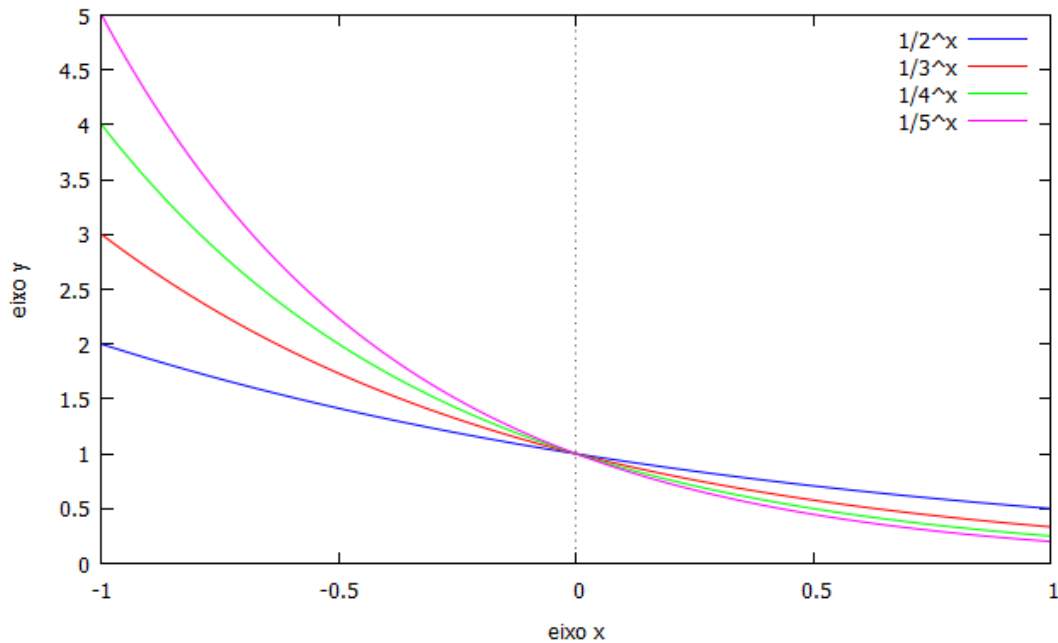


Figura 4.2: Funções Exponenciais Decrescentes: $0 < a < 1$. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

Neste caso, pode-se observar que, quanto maior o expoente x , menor é a potência a^x , ou seja, se $0 < a < 1$ a função f é dita **Função Exponencial Decrescente**, conforme Figura (4.2), pois $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

4.2.2 Resolução de Equações Exponenciais

Definição 5 (Equações Exponenciais). Equações nas quais apresenta-se uma incógnita no expoente são denominadas **Equações Exponenciais**.

Exemplo 14. São exemplos de Equações Exponenciais:

(a) $3^x = 27$

$$(b) \quad 2. \left(\frac{1}{8}\right)^x = 32$$

$$(c) \quad 125^{x+2} = \sqrt{5^x}$$

Para resolver Equações Exponenciais como as do Exemplo (14), basta igualarmos as bases utilizando-se as propriedades de potências e raízes. E, pelo fato da Função Exponencial ser injetiva, ou seja, $a > 0$ e $a \neq 1$, podemos proceder assim

$$a^{x_m} = a^{x_n} \Leftrightarrow x_m = x_n.$$

Exemplo 15.

Resolvendo as Equações Exponenciais do Exemplo (14) em \mathbb{R} :

Resolução de (a). Basta converter a equação dada em uma igualdade de potências de mesma base:

$$3^x = 27 \implies 3^x = 3^3 \implies x = 3.$$

Resolução de (b). Utilizando-se das propriedades de potências, temos

$$\begin{aligned} 2. \left(\frac{1}{8}\right)^x &= 32 \implies \\ \left(\frac{1}{2^3}\right)^x &= \frac{32}{2} \implies \\ (2^{-3})^x &= 16 \implies \\ 2^{-3x} &= 2^4 \implies \\ -3x &= 4 \implies \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Resolução de (c). Utilizando-se das propriedades das potências e raízes, temos

$$\begin{aligned} 125^{x+2} &= \sqrt{5^x} \implies \\ (5^3)^{x+2} &= 5^{\frac{x}{2}} \implies \\ 5^{3x+6} &= 5^{\frac{x}{2}} \implies \\ 3x+6 &= \frac{x}{2} \implies \\ 6x+12 &= x \implies \\ 5x &= -12 \implies \\ x &= -\frac{12}{5} \implies \\ x &= -2\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Para as próximas aplicações faremos uso de Equações Exponenciais bem similares à do Exemplo (14), item b.

4.2.3 Aplicações da Função Exponencial no Ensino Médio

Vejam alguns fenômenos que podem ser descritos por meio de uma Função Exponencial. Estas aplicações foram retiradas e adaptadas de Dante [5].

Aplicação 1. (FMJ-SP) O número de bactérias de uma cultura, t horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão $N(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38400 bactérias?

Solução. Temos que

$$N(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$$

Queremos descobrir para qual valor de t

$$N(t) = 38400$$

Igualando, temos

$$\begin{aligned} 1200 \cdot 2^{0,4t} &= 38400 \implies \\ 2^{0,4t} &= \frac{38400}{1200} \implies \\ 2^{0,4t} &= 32 \implies \\ 2^{0,4t} &= 2^5 \implies \\ 0,4t &= 5 \implies \\ t &= \frac{5}{0,4} \implies \\ t &= 12,5h \end{aligned}$$

Portanto, a cultura terá 38400 bactérias após 12 horas e 30 minutos, conforme Figura 4.3.

Aplicação 2.

A PET (*Positron Emission Tomography*) é uma das melhores técnicas de tomografia para obtenção de imagens do corpo humano, permitindo melhores definições de imagem usando menos radiação do que as demais técnicas. A radioatividade é um fenômeno que ocorre em núcleos de átomos instáveis por emitirem partículas e radiações. A *meia vida* ou *período de semi-desintegração* \mathbf{P} é a medida de tempo na qual metade da

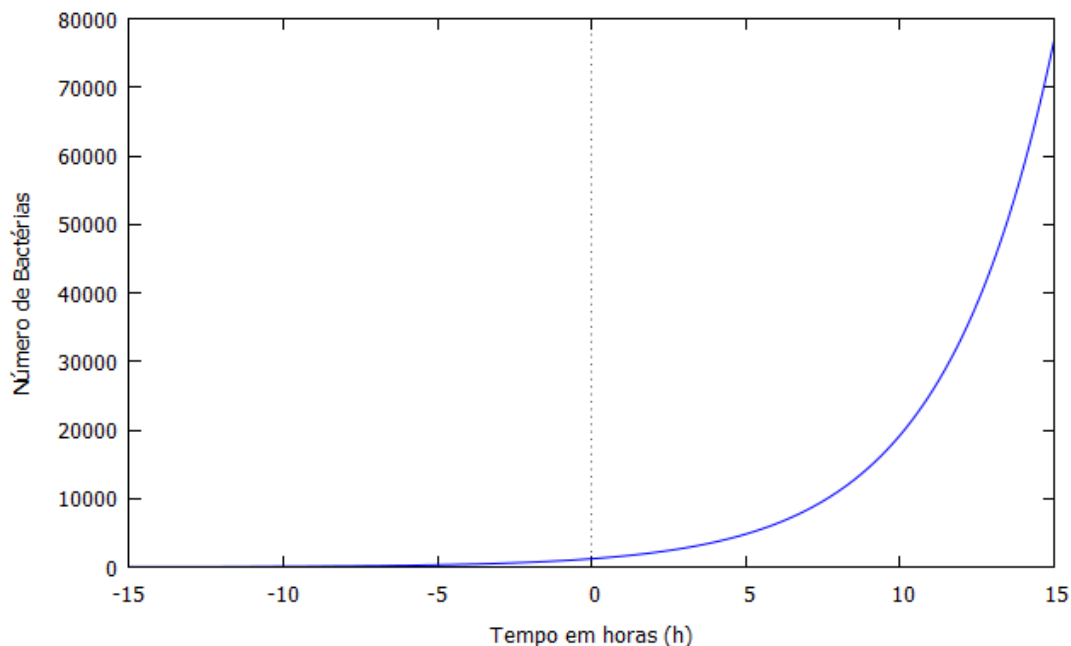


Figura 4.3: Gráfico da Aplicação 1. Crescimento populacional de bactérias com o passar do tempo. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

quantidade do material radioativo se desintegra. E cada elemento químico radioativo tem um valor específico para essa constante \mathbf{P} . Sendo assim, a cada período de tempo \mathbf{P} , a quantidade de material radioativo reduz-se à metade da anterior, sendo possível relacionar a quantidade de material radioativo a qualquer tempo com a quantidade inicial por meio de uma Função Exponencial do tipo $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\mathbf{P}}}$, onde:

- N_0 representa a quantidade inicial do material radioativo;
- t representa o tempo decorrido; e
- \mathbf{P} representa o valor da meia-vida do material radioativo em análise.

Com base nessas informações, resolva o problema:

Para a realização da Tomografia Computadorizada em um paciente, alguns radiofármacos devem ser injetados para facilitar a visualização das imagens do corpo humano. Os isótopos mais usados nesses radiofármacos são: carbono-11, nitrogênio-13, oxigênio-15 e o fluor-18, cujas meias-vidas são respectivamente de 20, 10, 2 e 110 minutos. Como os isótopos usados têm meia-vida muito pequena, assim que um desses isótopos é obtido, restam poucos minutos para sintetizar o radiofármaco e injetá-lo no paciente. Calcule em quanto tempo uma amostra de carbono-11 se reduz a 25% do que

era quando foi obtida.



Figura 4.4: Tomografia Computadorizada. Disponível em [21].

Solução. Utilizando a Função Exponencial fornecida no problema, temos que $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{P}}$. Devemos descobrir o tempo t em que $N(t) = 0,25N_0$. Levando em conta que P , o período de meia-vida do carbono-11, é de 20 minutos. Então:

$$\begin{aligned}
 0,25N_0 &= N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \implies \\
 \frac{1}{4}N_0 &= N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \implies \\
 \frac{1}{4} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \implies \\
 \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \implies \\
 2 &= \frac{t}{20} \implies \\
 t &= 40
 \end{aligned}$$

Desta forma, são necessários 40 minutos para que uma amostra de carbono-11 se reduza a 25% do que era quando foi obtida, conforme Figura 4.5.

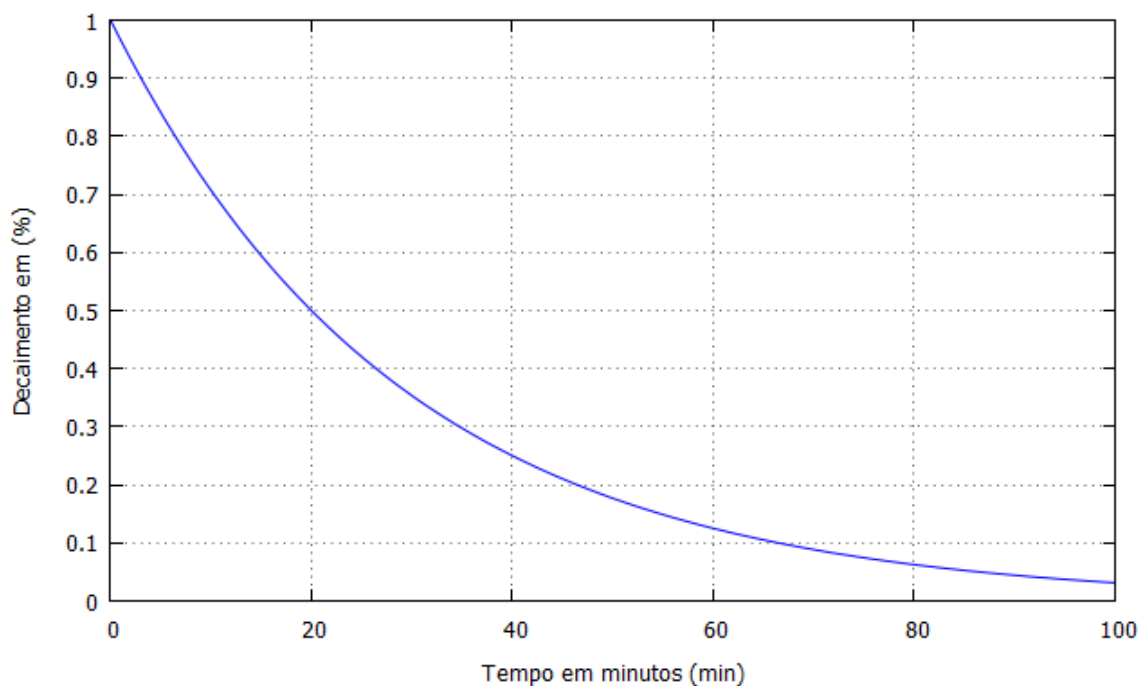


Figura 4.5: Gráfico da Aplicação 2. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

4.2.4 Definição de Logaritmo

Para histórico inicial sobre os Logaritmos ver Revista Cálculo [23] e também pelo site da Universidade de São Paulo (USP) [22].

Dados os números reais positivos a e b , com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a , o número real x , que deve ser o expoente de a para que a potência a^x seja igual ao número b . Isto é,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

com $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Onde:

- b é o logaritmando.
- a é a base do logaritmo.
- x é o logaritmo, que nada mais é do que um número.

O conjunto de logaritmos na base 10 de todos os números reais positivos é chamado de *sistema de logaritmos decimais ou de Briggs*³. Nesse sistema de logaritmos omite-se

³Briggs (1536–1630): matemático inglês, primeiro a destacar as vantagens dos logaritmos de base

a escrita da base 10, subentendendo-se que $\log b = x$ seja reconhecido como logaritmo de b na base 10 é igual a x .

4.2.5 Consequências da definição de Logaritmo

Satisfeitas as condições de existência dos logaritmos, pode-se verificar que:

1. Quando o logaritmando for igual a 1, em qualquer base, o resultado será a zero.

$$\log_a 1 = 0,$$

pois $a^0 = 1$.

2. Quando o logaritmando for igual à base, o resultado será 1.

$$\log_a a = 1,$$

pois $a^1 = a$.

3. Quando o logaritmando for uma potência da base, o resultado será o expoente.

$$\log_a a^m = m,$$

pois $\log_a a^m = q \Leftrightarrow a^q = a^m$. Disto temos que $q = m \implies \log_a a^m = m$.

4. Um número real a elevado ao $\log_a b$ é igual ao logaritmando do expoente.

$$a^{\log_a b} = b,$$

pois $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$. Logo, se $x = \log_a b$, então, substituindo em $a^x = b$, prova-se que $a^{\log_a b} = b$.

5. Quando temos uma igualdade de dois logaritmos na mesma base, seus logaritmandos são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c.$$

Vejamos:

10 como instrumento auxiliar dos cálculos numéricos. Foi também ele quem publicou a primeira tábua de logaritmos de 1 a 1000, fato ocorrido em 1617.

Se $\log_a b = r$ e $\log_a c = s$, ou seja, $a^r = b$ e $a^s = c$, temos:

- $b = c \implies a^r = a^s \implies r = s \implies \log_a b = \log_a c$
- $\log_a b = \log_a c \implies r = s \implies a^r = a^s \implies b = c$.

Exemplo 16 (Consequências da Definição).

Calcule:

$$(i) 3^{\log_2 17 \cdot \log_3 2} = I$$

Das propriedades de potências e das consequências da definição de logaritmo, temos

$$\begin{aligned} I &= (3^{\log_3 2})^{\log_2 17} \implies \\ I &= 2^{\log_2 17} \implies \\ I &= 17. \end{aligned}$$

$$(ii) 5^{\left(\frac{\log_5 7}{7}\right)} = II$$

Das propriedades de potências e das consequências da definição de logaritmo, temos

$$\begin{aligned} II &= 5^{\left(\frac{\log_5 7}{7}\right)} \implies \\ II &= 5^{\frac{1}{7} \cdot \log_5 7} \implies \\ II &= (5^{\log_5 7})^{\frac{1}{7}} \implies \\ II &= 7^{\frac{1}{7}} \implies \\ II &= \sqrt[7]{7}. \end{aligned}$$

$$(iii) 4^{1+\log_4 9} = III$$

Das propriedades de potências e das consequências da definição de logaritmo, temos

$$\begin{aligned} III &= 4^{1+\log_4 9} \implies \\ III &= 4^1 \cdot 4^{\log_4 9} \implies \\ III &= 4 \cdot 9 \implies \\ III &= 36. \end{aligned}$$

4.2.6 Propriedades Operatórias dos Logaritmos

As propriedades demonstradas a seguir visam simplificar cálculos com logaritmos, especialmente nas aplicações feitas na Seção 4.2.11.

Propriedade 1. (*Logaritmo de um produto*) O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores, na mesma base, ou seja

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c,$$

com $b > 0$, $c > 0$ e $1 \neq a > 0$

Demonstração.

Sejam os logaritmos:

$$\log_a b = r \Leftrightarrow b = a^r \quad (4.1)$$

$$\log_a c = s \Leftrightarrow c = a^s \quad (4.2)$$

$$\log_a(b.c) = t \Leftrightarrow bc = a^t. \quad (4.3)$$

Substituindo (4.1) e (4.2) em (4.3), temos:

$$a^t = b.c \implies a^t = a^r . a^s$$

$$a^t = a^{r+s} \implies t = r + s$$

Desta última igualdade, concluímos que

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c,$$

□

Exemplo 17 (*Logaritmo de um produto*).

$$(i) \log_4 15 = \log_4(3.5) = \log_4 3 + \log_4 5$$

$$(ii) \log 500 = \log(5.100) = \log 5 + \log 100 = \log 5 + 2$$

Propriedade 2. (*Logaritmo de um quociente*) O logaritmo de um quociente é igual ao logaritmo do numerador *menos* o logaritmo do denominador, na mesma base, ou seja

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c,$$

com $b > 0$, $c > 0$ e $1 \neq a > 0$

Sejam os logaritmos:

$$\log_a b = r \Leftrightarrow b = a^r \quad (4.4)$$

$$\log_a c = s \Leftrightarrow c = a^s \quad (4.5)$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = t \Leftrightarrow \frac{b}{c} = a^t \quad (4.6)$$

Substituindo-se (4.4) e (4.5) em (4.6), temos:

$$\begin{aligned} a^t = \frac{b}{c} &\implies a^t = \frac{a^r}{a^s} \\ a^t = a^{r-s} &\implies t = r - s \end{aligned}$$

Desta última igualdade, concluímos que

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c.$$

Exemplo 18 (*Logaritmo de um quociente*).

$$\begin{aligned} (i) \log_2 \left(\frac{1}{16} \right) &= \log_2 1 - \log_2 16 \implies \\ \log_2 \left(\frac{1}{16} \right) &= 0 - 4 \implies \\ \log_2 \left(\frac{1}{16} \right) &= -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \log \left(\frac{9}{1000} \right) &= \log 9 - \log 1000 \implies \\ \log \left(\frac{9}{1000} \right) &= \log 9 - 3. \end{aligned}$$

Propriedade 3. (*Logaritmo de uma potência*)

O logaritmo de uma *potência* é igual ao *produto* do expoente pelo logaritmo da base da potência, ou seja

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b,$$

com $b > 0$, $1 \neq a > 0$ e $n \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

Seja o logaritmo:

$$\log_a b = r \Leftrightarrow b = a^r. \quad (4.7)$$

Elevando-se os dois membros da Equação 4.7 ao expoente n , temos

$$b = a^r \implies b^n = (a^r)^n \implies b^n = a^{nr}.$$

Logo, nr é o logaritmo de b^n na base a , isto é:

$$\log_a b^n = nr. \quad (4.8)$$

Substituindo r por $\log_a b$ na Equação 4.8, concluímos que

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b.$$

□

Exemplo 19 (*Logaritmo de uma potência*).

$$(i) \log_5 7^3 = 3 \cdot \log_5 7.$$

$$\begin{aligned} (ii) \log \sqrt[4]{100} &= \log 100^{\frac{1}{4}} \implies \\ \log \sqrt[4]{100} &= \frac{1}{4} \cdot \log 100 \implies \\ \log \sqrt[4]{100} &= \frac{1}{4} \cdot 2 \implies \\ \log \sqrt[4]{100} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4.2.7 Cologaritmo

Definição 6 (Cologaritmo). *Denomina-se cologaritmo de um número b na base a , com $b > 0$ e $1 \neq a > 0$, ao oposto do logaritmo de b na mesma base a , ou seja:*

$$\log_a \left(\frac{1}{b} \right) = -\log_a b = \text{colog}_a b.$$

Justificativa:

$$\log_a \left(\frac{1}{b} \right) = \log_a 1 - \log_a b$$

Mas sabemos de (4.2.5), item 1, que $\log_a 1 = 0$, logo

$$\log_a \left(\frac{1}{b} \right) = 0 - \log_a b \implies$$

$$\log_a \left(\frac{1}{b} \right) = -\log_a b \implies$$

$$\log_a \left(\frac{1}{b} \right) = \operatorname{colog}_a b,$$

pela Definição 6.

4.2.8 Mudança de Base

Para resolver equações ou simplificar expressões logarítmicas é necessário aplicar as Propriedades Operatórias (4.2.6), sendo que, os logaritmos devem estar na mesma base. Para tal feito, vamos enunciar e demonstrar a Fórmula da Mudança de Base.

Conhecendo os logaritmos numa base d , queremos escrevê-lo numa outra a . Assim

$$\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a}, \quad (4.9)$$

com $b > 0$, $0 < a \neq 1$ e $0 < d \neq 1$.

Demonstração.

Para demonstrar a Fórmula (4.9), considere

$$\log_a b = r \iff a^r = b. \quad (4.10)$$

Aplicando o logaritmo na base d em ambos os membros da Equação (4.10), temos:

$$\log_d a^r = \log_d b.$$

Usando a Propriedade 3 da Seção (4.2.6), temos:

$$\begin{aligned} r \cdot \log_d a &= \log_d b \implies \\ r &= \frac{\log_d b}{\log_d a}. \end{aligned}$$

Onde de (4.10) conclui-se que

$$\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a}.$$

□

4.2.9 Logaritmo Neperiano ou Logaritmo Natural

Há também o sistema de logaritmos neperianos – nome atribuído em homenagem a John Napier⁴. A base desses logaritmos é o número irracional $e = 2,718281828\dots$

Esse sistema também é conhecido como sistema de logaritmo natural e tem grande aplicação no estudo de diversos fenômenos da natureza, ou seja, é extremamente usado nos problemas traduzidos por meio de Equações Diferenciais, como vistos no Capítulo 3. São denotados da seguinte forma

$$\log_e b = \ln b.$$

Coube ao matemático suíço *Leonhard Euler* (1707–1783), o primeiro a designar e provar que esse número irracional é o resultado do limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ quando x cresce infinitamente. Ou melhor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

A seguir, mostraremos como determinar o número irracional e por meio de *Juros Compostos*.

Entre as bases a , de uma Função Exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 1$ por convenção, destaca-se uma designada e . Este número é irracional e tem aproximação $e = 2,718281828\dots$, como já dissemos.

Utilizando-se dos conceitos de Juros Compostos, pode-se chegar a esse valor da seguinte maneira.

Supondo-se que um banco pague 100% de juros ao ano em uma conta poupança, ao depositar R\$1,00, depois de um ano o resgate será de R\$2,00.

Acrescentando-se 50% a cada seis meses, depois de um ano seu saldo será:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

⁴John Napier (1550–1617): matemático escocês, autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos.

Utilizando fator comum em evidência, temos:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25.$$

Logo, fazendo dois pagamentos por ano, após um ano o resgate será de R\$2,25.

Compondo a aplicação de R\$1,00 três vezes ao ano, após três pagamentos, o resgate após um ano será

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left[\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) \right] = \\ & \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \\ & \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right] = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left[1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \right] = \\ & \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2,37. \end{aligned}$$

Analogamente, compondo sua aplicação de R\$1,00 n vezes por ano, depois de um ano o resgate será:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (4.11)$$

Desta forma, de acordo com o total de pagamentos por ano, é possível de se prever o quanto receberá após um ano de aplicação. Veja a Tabela (4.1).

Se n for muito grande, o saldo ao final de um ano será **R\$e** reais. Tudo isso para uma aplicação inicial de R\$1,00.

O número irracional e também é chamado *natural* porque a composição é contínua e não depende de uma unidade particular de tempo.

Pode-se usar o Binômio de Newton para calcular e . Ou seja:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ & 1 + n \left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{n^4} + \dots + \frac{1}{n^n}. \end{aligned}$$

Para n razoavelmente grande, as frações: $\frac{(n-1)}{n} \approx \frac{(n-2)}{n} \approx \frac{(n-3)}{n} \approx 1$.

Pagamento por ano	Total após 1 ano
1	$(1 + 1)^2 = R\$2,00$
2	$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = R\$2,25$
3	$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx R\$2,37$
4	$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \approx R\$2,44$
5	$\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 \approx R\$2,49$
...	...
100	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx R\$2,705$
1000	$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx \mathbf{R\$2,718}$
...	...

Tabela 4.1: Resgate após 1 ano de acordo com o número de pagamentos.

Assim os termos de (4.11) podem ser escritos da seguinte forma:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{10!} + \dots + \frac{1}{100!} + \dots$$

Se n cresce indefinidamente, o número e é dado por:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{10!} + \dots + \frac{1}{100!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

4.2.10 Função Logarítmica

A função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real $x > 0$ o número real $\log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada de *função logarítmica na base a* e é indicada por

$$f(x) = \log_a x$$

Assim, de acordo com a definição de Função Logarítmica:

- O domínio da função é $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.
- O contradomínio da função é $CD(f) = \mathbb{R}$.
- A imagem da função é $Im(f) = \mathbb{R}$.

À medida que $x \rightarrow 0$:

- Se $a > 1$ a função cresce lentamente.
- Se $0 < a < 1$ a função decresce lentamente.

Vamos analisar o comportamento da Função Logarítmica plotando seu gráfico para exemplos particulares. Temos dois casos a serem analisados.

1º Caso: Se $a > 1$ a Função Logarítmica é dita *Crescente*. Desta forma

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2.$$

Exemplo 20. Considere a função $f(x) = \log_2 x$.

O gráfico de $f(x) = \log_2 x$ é dado por (Ver Figura 4.6)

2º Caso: Se $0 < a < 1$ a Função Logarítmica é dita *Decrescente*. Desta forma

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2.$$

Exemplo 21. Considere a função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

O gráfico de $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é dado por (Ver Figura 4.7)

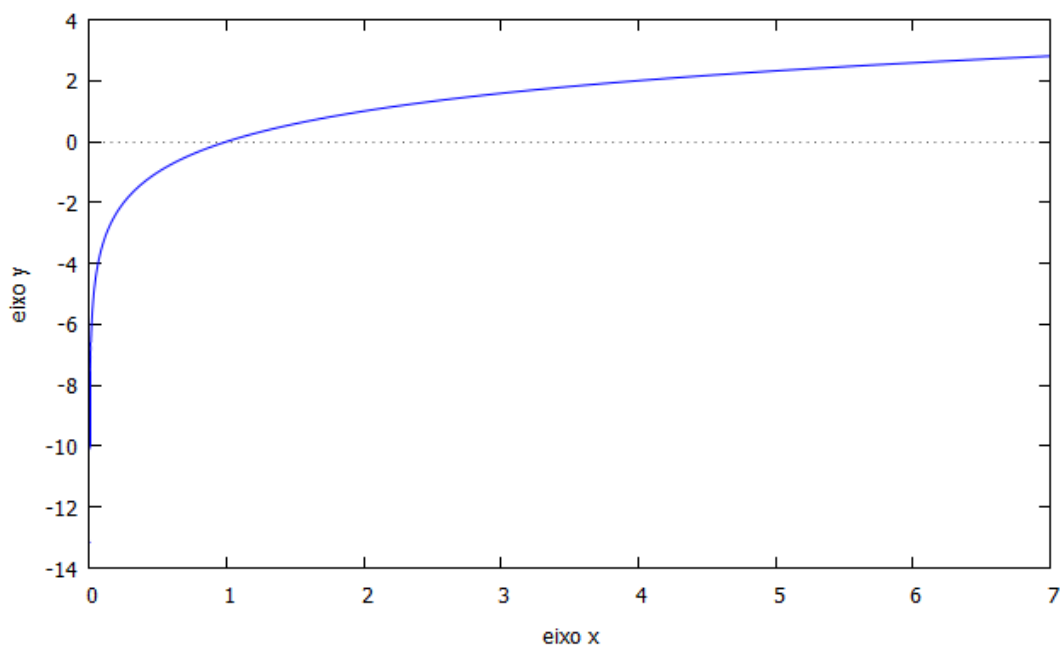


Figura 4.6: Função Logarítmica, $a > 1$. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

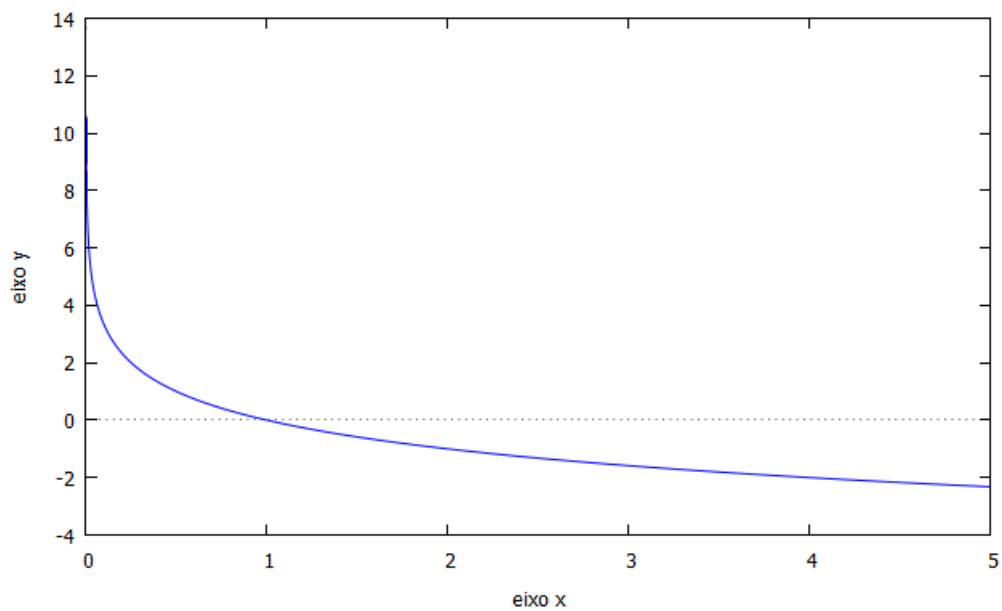


Figura 4.7: Função Logarítmica, $0 < a < 1$. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

De acordo com Dante [5]:

Da Seção (4.2.1), sabe-se que a Função Exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, para qualquer número real positivo $a \neq 1$, é uma bijeção entre \mathbb{R} e \mathbb{R}_+^* , e que f tem a seguinte propriedade:

$$f(x_m + x_n) = f(x_m) \cdot f(x_n) \implies a^{x_m + x_n} = a^{x_m} \cdot a^{x_n}. \quad (4.12)$$

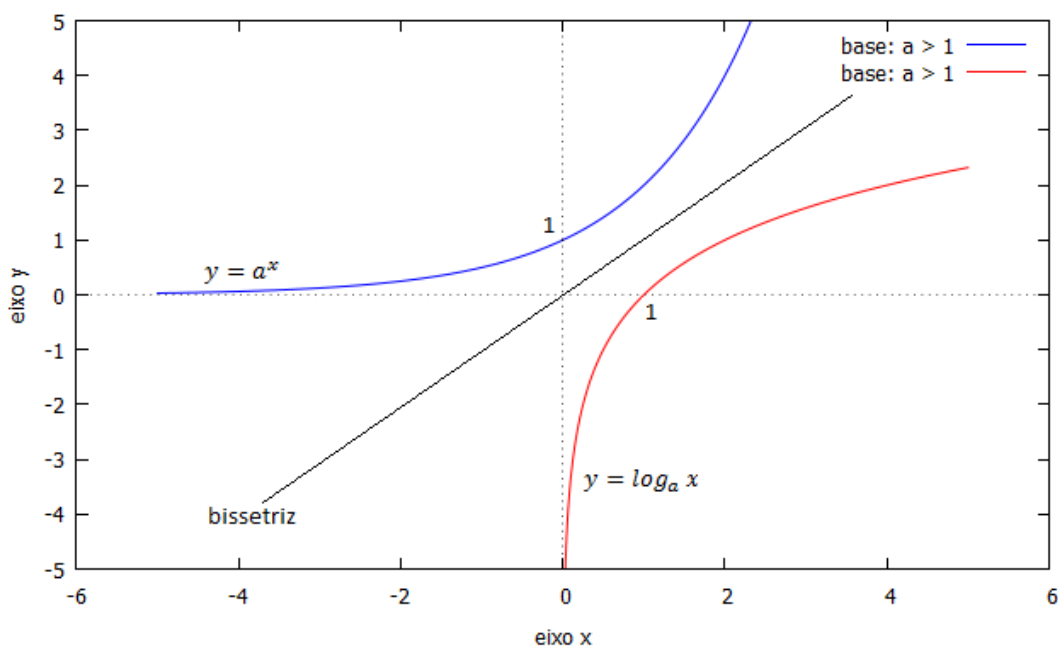


Figura 4.8: Funções Inversas: Exponencial e Logarítmica, $a > 1$. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

O fato de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

ser bijetiva garante que f é invertível. Sua inversa é a Função Logarítmica $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo x ao número real $\log_a x$, com $0 < a \neq 1$, denominado logaritmo de x na base a . (Ver Figuras 4.8 e 4.9)

Observe que de (4.12), a sua inversa $g(x) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, é dada por $g(x) = \log_a x$, e tem a propriedade

$$\log_a(x_m \cdot x_n) = \log_a x_m + \log_a x_n$$

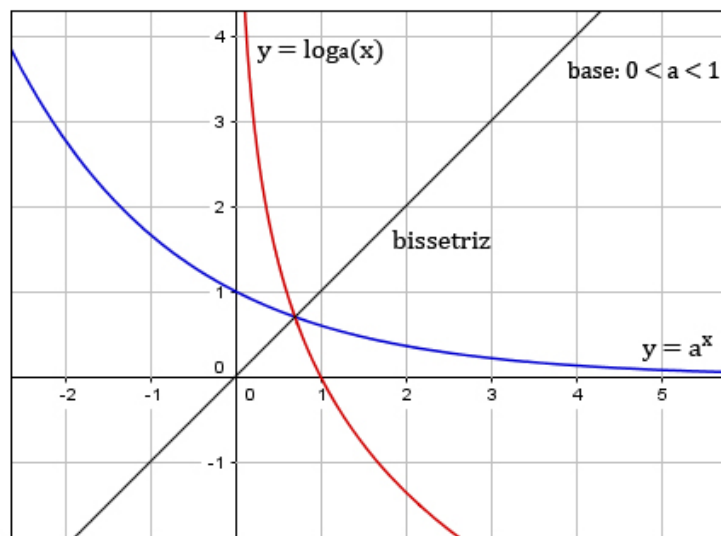


Figura 4.9: Funções Inversas: Exponencial e Logarítmica, $0 < a < 1$. Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra, com auxílio da acadêmica em Matemática pela UFG Selma Céu.

Desta forma, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x , ou seja:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

4.2.11 Aplicações das Funções Logarítmicas no Ensino Médio

Aplicação 1. O número de bactérias numa cultura, depois de um tempo t , é dado por $N = N_0 \cdot e^{r \cdot t}$, em que N_0 é o número inicial (quando $t = 0$) e r é a taxa de crescimento relativo. Em quanto tempo o número de bactérias dobrará se a taxa de crescimento contínuo é de 5% por minuto?

Solução. Pelo enunciado, o questionamento é: em quanto tempo $N = 2 \cdot N_0$, se $r = 0,05$?

Assim,

$$\begin{aligned} N &= N_0 \cdot e^{r \cdot t} \implies \\ 2N_0 &= N_0 \cdot e^{0,05 \cdot t} \implies \\ 2 &= e^{0,05 \cdot t}. \end{aligned}$$

Aplicando \ln , temos

$$\ln 2 = \ln e^{0,05 \cdot t}.$$

Pela Propriedade 3, Seção 4.2.6, temos

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 0,05 \cdot t \cdot \ln e \implies \\ \ln 2 &= 0,05 \cdot t \implies \\ t &= \frac{\ln 2}{0,05}. \end{aligned}$$

Temos que $\ln 2 \approx 0,6931$, logo

$$\begin{aligned} t &= \frac{0,6931}{0,05} \implies \\ t &= 13,8. \end{aligned}$$

Portanto, o número de bactérias dobrará em 13 minutos e 48 segundos. Esses cálculos evidenciam também que o tempo não depende do número inicial de bactérias. (Ver Figura 4.10)

Aplicação 2. (Retirada integralmente de Dante [5]) (Vunesp) O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22 horas. Às 22h 30min o médico da polícia chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de $32,5^\circ$. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou $31,5^\circ$; a temperatura do ambiente foi mantida constante a $16,5^\circ C$. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja $36,5^\circ C$ e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo é dada por

$$D(t) = D_0 \cdot 2^{(-2\alpha t)}$$

em que t é o tempo em horas, D_0 é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente no instante $t = 0$, $D(t)$ é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente num instante t qualquer e α é uma constante positiva. Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela seguinte:

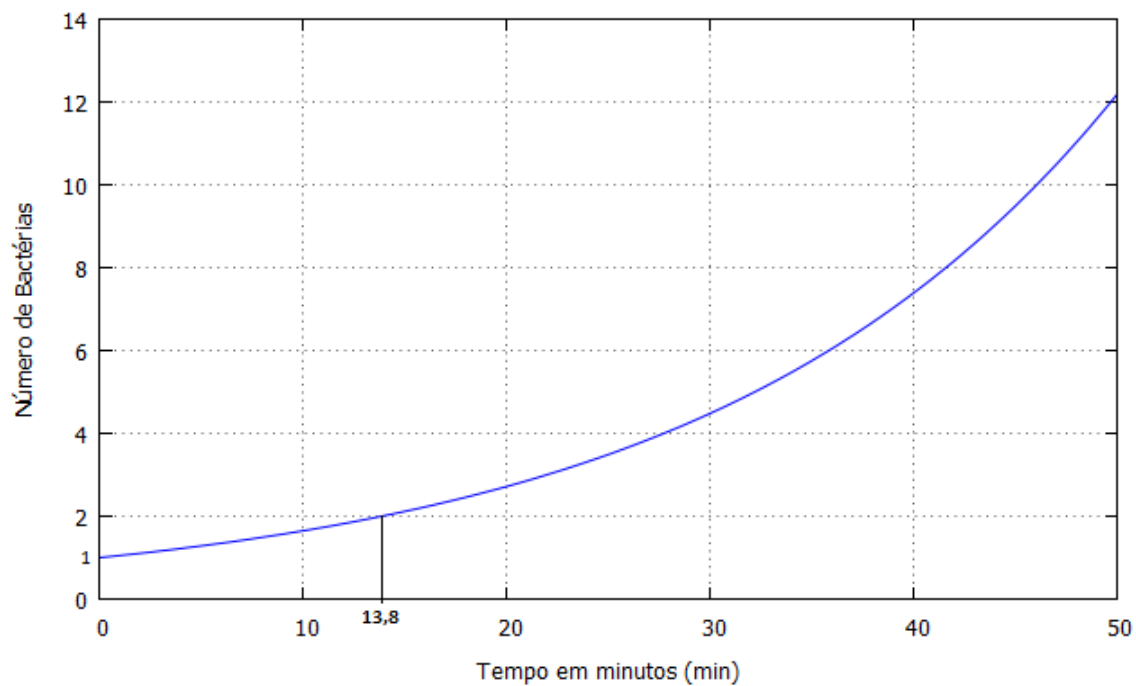


Figura 4.10: Gráfico da Aplicação 1. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

	Hora	Temperatura do corpo (°C)	Temperatura do quarto (°C)	Diferença de temperatura (°C)
$t_m = ?$	hora da morte	36,5	16,5	$D(t_m) = 20$
$t = 0$	22h 30min	32,5	16,5	$D(0) = D_0 = 16$
$t = 1$	23h 30min	31,5	16,5	$D(1) = 15$

Considere os valores aproximados $\log_2 5 = 2,3$ e $\log_2 3 = 1,6$, determine:

a) a constante α ;

Solução. Para $t = 1$, temos:

$$\begin{aligned} D(t) &= D_0 \cdot 2^{(-2\alpha t)} \implies \\ D(1) &= D_0 \cdot 2^{(-2\alpha \cdot 1)} \implies \\ 15 &= 16 \cdot 2^{(-2\alpha)} \implies \\ -2\alpha &= \log_2 \frac{15}{16} \text{ pela Prop. 4.2.6, item 2, temos} \\ -2\alpha &= \log_2 15 - \log_2 16 \implies \\ -2\alpha &= \log_2 3 + \log_2 5 - 4 \implies \\ \alpha &= \frac{4 - \log_2 3 - \log_2 5}{2}. \end{aligned}$$

Usando os valores fornecidos no enunciado, temos

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \frac{4 - 1,6 - 2,3}{2} \\ \alpha &\approx 0,05. \end{aligned}$$

Assim, $\alpha \approx 0,05$.

b) a hora em que a pessoa morreu.

Solução. Devemos determinar t_m quando $D(t_m) = 20$:

$$\begin{aligned} D(t_m) &= D_0 \cdot 2^{(-2\alpha t_m)} \implies \\ 20 &= 16 \cdot 2^{(-2\alpha t_m)} \implies \\ -2\alpha t_m &= \log_2 \frac{5}{4} \text{ pela Prop. 4.2.6, item 2, temos} \\ t_m &= \frac{2 - \log_2 5}{2\alpha} \implies \\ t_m &= \frac{2 - 2,3}{2 \cdot (0,05)} \implies \\ t_m &= -3. \end{aligned}$$

Logo, a pessoa morreu há aproximadamente 3 horas antes do médico da polícia chegar ($t = 0$), isto é, aproximadamente às 22h 30min $-3\text{h}=19\text{h } 30\text{min}$. (Ver Figura 4.11)

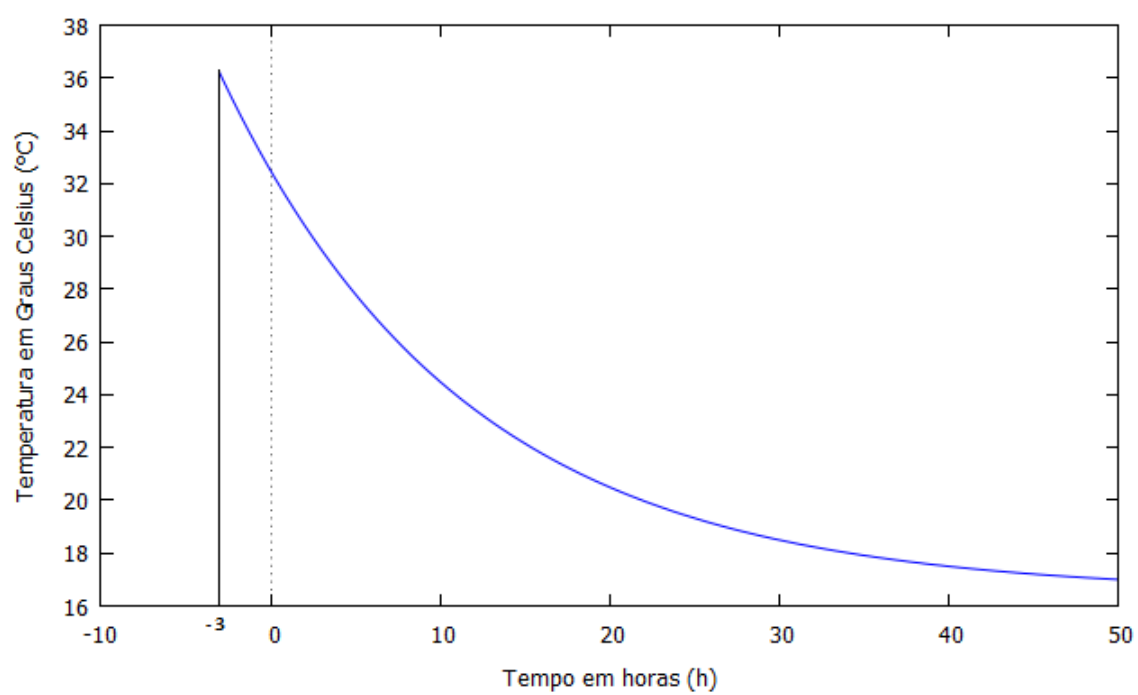


Figura 4.11: Gráfico da Aplicação 2. Fonte: Elaborado no Wxmaxima pelo autor.

Capítulo 5

Considerações finais

Ao concluir este trabalho, nota-se que a Matemática se torna mais envolvente quando trabalhada de forma contextualizada e interdisciplinar com as diversas áreas do conhecimentos como a Física, a Química, a Biologia, a Arte, a História, dentre outras.

Observamos que as Equações Diferenciais trata-se de uma poderosa ferramenta no processo de modelagem matemática de situações diárias. Também destacamos que apesar da parte teórica ser bem pesada, fundamentada nos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais é uma disciplina extremamente funcional.

Mesmo em nível superior, a disciplina de Equações Diferenciais não deve ser ministrada somente com teorias carregadas de definições e demonstrações, é necessário a parte teórica. Mas também é preciso permear entre seus conceitos de fundamentação teórica com a infinidade de aplicações curiosas que esta disciplina traz dentro de si. Isso faz com que o estudante universitário assista, na prática, à teoria sendo aplicada.

A Matemática não deve ser considerada importante simplesmente por alguma definição arbitrária ou porque mais tarde ela poderá ser aplicada. Sua importância deve-se residir no fato de poder ser tão agradável quanto interessante. Nessa nova forma de encarar a Matemática, a modelagem – que pode ser tomada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem – tem se mostrado eficaz. A modelagem matemática consiste na parte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. (BASSANEZI, 2006)

Já em nível médio, os conceitos de Funções Exponencial e Logarítmica também não devem ser explorados de forma descomprometida com a realidade do aluno. Este absorve muito mais os conteúdos quando se contextualiza em uma situação curiosa. É essa interação entre realidade do aluno e a sala de aula que o estimula a prosseguir seus estudos sem deixar lacunas no aprendizado.

Diante de tudo, faz-se necessário salientar que a Matemática não deve ser tratada como uma disciplina estanque e descomprometida com o processo ensino-aprendizagem, como parece. Pelo contrário, esta matéria insere e instrumentaliza o indivíduo na sociedade em busca de novos caminhos.

Referências Bibliográficas

- [1] BASSANEZI, R.C.; JÚNIOR, W.C.F., *Equações Diferenciais com Aplicações*, São Paulo: Harbra, 1988, pp. 01-72.
- [2] BASSANEZI, R.C., *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*, São Paulo: Contexto, 2000, pp. 124-141.
- [3] BASSANEZI, R.C., *Modelagem Matemática: Teoria e Prática*, São Paulo: Contexto, 2015, pp. 67-84.
- [4] BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 8ª edição, Rio de Janeiro: LTC, pp. 1-64.
- [5] DANTE, L.R., *Matemática: Contexto e Aplicações*, São Paulo: Ática, 2010, pp. 131-169.
- [6] GIOVANNI, J.R.; BONJORNO, J.R, *Matemática: Uma Nova Abordagem 1 - Versão Progressões*, São Paulo: FTD, 2000, pp. 246-303.
- [7] WYNNE, F., *Eu fui Vermeer: A lenda do falsário que enganou os nazistas*, São Paulo: Companhia das Letras, 2008.
- [8] BRAUN, M., *Differential Equations and their Applications*, 4ª edição, New York: Springer, 1993, pp. 11-17.
- [9] SILVA, E. C., *Equações Diferenciais Ordinárias em Alguns Contextos Históricos e Reais*, Trabalho de Conclusão de Curso, São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2011, pp. 8-17.
- [10] GONICK, L., *Cálculo em Quadrinhos*, São Paulo: Blucher, 2014, pp. 37-56.

- [11] EVANGELISTA, A. C., *Aplicações de Equações Diferenciais: As Falsificações de Arte de Van Meegeren*, Artigo Científico, Uberlândia: Universidade de Uberlândia, 2011.
- [12] BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 9ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [13] *Absorção de Drogas*, <http://portaldosfarmaceuticos.blogspot.com.br>, (acesso: fevereiro/2017).
- [14] *Caminho do remédio no organismo*, <http://lukareissinger.blogspot.com.br/2013/07/absorcao-de-medicamentos-no-organismo.html>, (acesso: fevereiro/2017).
- [15] *Moça com Brinco de Pérola*, <http://virusdaarte.net/vermeer-moca-com-brinco-de-perola/>, (acesso: fevereiro/2017).
- [16] *Os Peregrinos de Emaús*, <http://mol-tagge.blogspot.com.br/2009/08/falsificadores-arte-1-van-meegeren.html> , (acesso: fevereiro/2017).
- [17] *A Última Ceia*, <http://mol-tagge.blogspot.com.br/2009/08/falsificadores-arte-1-van-meegeren.html> , (acesso: fevereiro/2017).
- [18] *Cristo e a Adúltera*, <http://mol-tagge.blogspot.com.br/2009/08/falsificadores-arte-1-van-meegeren.html> , (acesso: fevereiro/2017).
- [19] *Meegeren Pintando para os Especialistas*, <http://mol-tagge.blogspot.com.br/2009/08/falsificadores-arte-1-van-meegeren.html> , (acesso: fevereiro/2017).
- [20] *Julgamento de Meegeren*, <http://mol-tagge.blogspot.com.br/2009/08/falsificadores-arte-1-van-meegeren.html> , (acesso: fevereiro/2017).
- [21] *Tomografia Computadorizada*, <http://www.hab.org.br/medicina-diagnostica/diagnostico-por-imagem/>, (acesso: fevereiro/2017).
- [22] *História dos Logaritmos*, <http://ecalculo.if.usp.br/>, (acesso: abril/2017).
- [23] *História dos Logaritmos*, <https://www.lojasegmento.com.br/>, (acesso: abril/2017).