PROFMAT **Departamento de Matemática**
Universidade Federal do Paraná
81531-980, Curitiba, PR
Brasil

Modelagem Matemática Aplicada a Fenômenos Exponenciais e Logarítmicos

por

Anderson Oliveira de Almeida

Preprint PROFMAT 1 (2013) 6 de Abril, 2013

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

Modelagem Matemática Aplicada a Fenômenos Exponenciais e Logarítmicos

Anderson O. de Almeida
Departamento de Matemática - UFPR
19081-980, Curitiba, PR
Brasil
ander_prof@hotmail.com

6 de Abril de 2013

Resumo

Neste artigo, discute-se o uso da Modelagem Matemática como estratégia no ensino das Funções Exponenciais e Logarítmicas, com o objetivo de apresentá-la a professores e alunos como metodologia auxiliar no processo de ensino-aprendizagem.
Palavras-Chave: Modelagem Matemática, Funções Exponenciais e Logarítmicas, Sequência Didática

1 Introdução

Neste artigo, discute-se o uso e a aplicação da Modelagem Matemática para o ensino das Funções Exponenciais e Logarítmicas em sala-de-aula, com o objetivo de apresentá-la a professores e alunos como metodologia auxiliar no processo de ensino-aprendizagem.

Para tanto, descreve-se os principais conceitos sobre a Modelagem Matemática, como propostos em [7] e [5]. Entretanto, em virtude das fragilidades da forma como a teoria é proposta em [7] e [6], seguiremos os pressupostos de [5], pois este dividiu a modelagem em três casos, dos quais escolhemos o primeiro que sugere apresentar a situação-problema direta ao aluno, auxiliando o professor que deseja iniciar o uso gradual da Modelagem em suas aulas.

Esse artigo está dividido em quatro seções, sendo que na primeira será apresentada definições sobre Modelagem; na segunda, será exibido uma lista de modelos Funções Exponenciais e Logarítmicas com sugestões de situações-problema; e já na terceira parte, duas sugestões de sequência didática. Por fim, conclui-se o presente texto apresentando as considerações finais sobre o trabalho proposto.

2 Modelagem Matemática

A inquietação dos professores perante a dificuldade dos alunos do Ensino Médio em compreender e aplicar os conceitos de Funções Exponenciais e Logaritmicas motivou a reflexão sobre o processo do ensino-aprendizagem desses dois assuntos específicos dos currículos da Matemática para o Ensino Médio.

Em geral, muitos professores enfatizam, durante as suas aulas, os procedimentos algorítmicos tentando em alguns momentos da aula contextualizar o conteúdo. Sendo assim, se o trabalho em sala não for contextualizado o conteúdo abordado torna-se artificial e desconectado da realidade. Quando fala-se de realidade não se trata especificamente da realidade do aluno, mas sim da real aplicação dos conceitos matemáticos aqui abordados. Percebe-se que em alguns livros didáticos, situações para contextualização são apresentadas apenas no fim dos capítulos correspondentes. Todavia, a contextualização não deveria ser apenas uma nota de rodapé, mas usada com maior destaque em todo o capítulo, quando possível.

Com efeito, acredita-se a aprendizagem só será efetiva no processo de construção dos conceitos matemáticos se for trabalhada de maneira que o aluno entenda-a no seu contexto e seja apresentada de forma significativa.

E com base nessa perspectiva, a Modelagem Matemática entra como uma solução na significação e na contextualização de conceitos matemáticos abordados no Ensino Médio. Assim, tem-se na modelagem matemática um processo pelo qual se pode transformar problemas reais em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real e na linguagem Matemática. Em [7] a Modelagem Matemática é apresentada como "um processo dinâmico, utilizado para a obtenção e generalização com a finalidade de previsão de tendências". Existem várias definições sobre Modelagem Matemática dentre elas destaca-se as citadas por [7] e [5].

Vejamos a seguir os conceitos que envolvem a Modelagem Matemática:

- **Modelagem Matemática**: segundo [7] "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo-real."

- **Modelagem Matemática**: segundo [5] é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade de aprendizagem.

Como a proposta é apresentar uma forma de abordagem em sala-de-aula mais significativa para o aluno e mais conectada com a realidade, acredita-se que a definição de modelagem abordada por [5] seja mais prática e possa auxiliar o professor nesses primeiros passos de uma aula usando Modelagem como auxiliar no processo ensino-aprendizagem.

Ao analisarmos alguns estudos realizados por [5], citamos que no ambiente da Modelagem Matemática, há "três níveis de possibilidades", os quais o autor chama de "casos", exibidos abaixo:

1º Caso: O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução. Quando o aluno investiga, logo aparecem as indagações sobre o processo investigativo. Assim, a relação entre investigação e indagação não podem estar separadas, pois uma é consequência da outra.

Neste caso percebe-se que a coleta de dados fica dentro das situações-problema, não havendo necessidade de investigação fora de sala-de-aula.

2º Caso: O professor traz para a sala de aula um problema de outras áreas da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução. Os dados são obtidos fora da sala-de-aula e os alunos são responsáveis pela simplificação das situações-problema.

3º Caso: A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.

É importante o professor perceber que ele fará várias intervenções durante o processo de resolução, estando presente com os alunos durante as investigações, e sempre dialogando com eles, deixando o aluno com a maior parte da responsabilidade sobre a resolução.

Já no 1º Caso, o professor perceberá que sua intervenção será maior, e é justamente esse caso que nos interessa, pois estamos galgando os primeiros passos no uso da modelagem matemática. Assim que o professor estiver familiarizado com as novas abordagens, ele poderá repensar sua prática usando o 2º e o 3º casos. Assim, o 1º Caso ficará em destaque em nossa abordagem.

3 Modelos Exponenciais

Nesta seção será apresentado alguns modelos exponenciais, envolvendo funções exponenciais e logarítmicas aplicadas à realidade e que poderão ser utilizadas com alunos do Ensino Médio e do Nível Superior.

Em geral, a função exponencial é apresentada na forma $f(x) = a^x$, onde a é uma base maior que zero, diferente de 1 e $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, a função logarítmica é dada pela função inversa da função exponencial da seguinte forma $f(x) = \log_a x$, lembrando que o logaritmo de um número positivo x, num sistema de base $a > 0$, é o expoente ao qual y deve-se elevar a base a de modo que se tenha $a^y = x$.

3.1 Juros Contínuos

Antes de ser considerado juros contínuos devemos perceber que, em geral, o regime de juros praticado no dia a dia é o de juros compostos, pois comumente a capitalização de quantias ocorre sempre em relação ao período anterior considerado. O fato de exibirmos o tema juros contínuos e compostos reside na relação com a função exponencial, e para entendermos melhor essa situação observemos o que acontece no seguinte exemplo:

imagine que desejamos capitalizar uma quantia de R$ 100,00 a uma taxa de 5% ao mês num regime de juros compostos, num período de 3 meses. Dessa maneira teremos a seguinte situação:

- Ao final de um mês teremos a quantia de: $R\$(100 \cdot 1,05) = R\$\,105,00$

- Ao final de dois meses teremos a quantia de: $R\$(100 \cdot 1,05 \cdot 1,05) = R\$(100 \cdot 1,05^2) = R\$110,25$

- Ao final de três meses teremos a quantia de: $R\$(100 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05) = R\$(100 \cdot 1,05^3) \approx R\$115,76$.

Nesse exemplo percebe-se realmente que a capitalização, por meio do regime de juros compostos, está associada a uma *progressão geométrica*, de razão $1,05$, que por sua vez, está ligada a uma função exponencial. Essa relação de discretização da função exponencial é apresentada em [2], pois é percebido que ao final de n meses (período discreto) teremos em mãos a quantia $100 \cdot (1,05)^n$, em reais.

Agora o interesse está no estudo dos juros contínuos, pois é comum que em algumas instituições financeiras as políticas sobre a composição de juros sejam diferentes. Por exemplo, algumas capitalizam os juros mensalmente, outras semanalmente e outras ainda podem capitalizar diariamente. Dessa forma se faz necessário o cálculo dos juros de forma contínua, e para entender melhor o processo desse tipo de capitalização vamos recorrer à situação proposta por [2].

Um capital c, empregado a uma taxa de k por cento ao ano rende no fim de um ano juros no valor de $kc/100$. Pondo $\alpha = k/100$, temos que c renderá, no fim de um ano, juros no valor de αc. Decorrido um ano, o capital torna-se igual a $c + \alpha c$, ou seja, $c(1+\alpha)$. Passado dois anos, o novo capital $c_1 = c(1+\alpha)$, empregado à mesma taxa, tornar-se-á igual a $c_1(1+\alpha) = c(1+\alpha)^2$. Logo, em m anos teremos o capital $c(1+\alpha)^m$. Devemos perceber que a fórmula $c(1+\alpha)^m$ é a generalização de capitalização composta.

Além da forma composta, pode-se usar essa generalização para capitalização mais vezes ao longo de um período, de tal forma que consigamos issor a cada instante n.

Tomando uma fração $1/n$ de ano, o capital c, empregado a mesma taxa de juros, deverá render $\alpha c/n$ de juros, de modo que, decorrida a fração $1/n$ de ano, o capital c transforma-se em

$$c_1 = c + \frac{\alpha c}{n} = c\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right).$$

Empregando o novo capital c_1 e esperando mais $1/n$ de ano, obtém-se $c_1(1+\alpha/n)$, ou seja, $c(1+\alpha/n)^2$. Prosseguindo assim, percebe-se que ao dividirmos o ano em n partes iguais, e decorridos cada um desses períodos de $1/n$ de ano, capitalizaremos os juros rendidos, reinvestindo sucessivamente à mesma taxa, teremos ao fim do ano, ao invés de $c(1+\alpha)$, um capital maior, a saber:

$$c\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

Antes de contiuarmos, precisamos analisar o que acontece com a expressão

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n, \tag{1}$$

à medida que n se torna cada vez maior, pois esta é uma situação em que o professor pode explorar com o aluno, para verificar se algo de interessante ocorre mediante substituição de valores crescentes de n. Dessa forma podemos recorrer a uma tabela para perceber que a expressão (1) ficará cada vez mais próxima do número irracional $e = 2,718281828\ldots$.

Analisando a tabela percebe-se que quando $\alpha = 100\%$ tem-se a expressão (1), quando n for cada vez maior, ou seja, $n \to \infty$ tem-se a seguinte situação:

$$c \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to c \cdot e,$$

generalizando temos:

$$c \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \to c \cdot e^{\alpha}.$$

Assim, essa situação permite que uma instituição financeira calcule os juros a cada instante; ou seja, com juros capitalizados continuamente.

3.2 Decaimento radioativo

O processo de desintegração radioativa é aquele no qual os átomos de uma substância (como rádio ou o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outras substâncias.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,718146
100000	2,718268

Tabela 1: Alguns resultados da aplicação da função descrita em (1), para valores crescentes de n.

Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui. Isto é feito de tal maneira que, num determinando instante, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo é proporcional à quantidade de substância presente naquele momento. A constante de proporcionalidade α, que é uma medida da velocidade na qual determinada substância é decomposta com o passar do tempo, é determinada experimentalmente, pois essa constante varia de substância para substância, e de isótopo para isótopo.

Para entender melhor o que acontece na situação de desintegração, considere um corpo de massa M_0, formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração é α. Se a desintegração se processa instantaneamente, então temos que decorrido o tempo $t = 1$ segundo, haverá uma perda de αM_0 unidades de massa, restanto apenas a quantidade $M_1 = M_0 - \alpha M_0 = M_0(1-\alpha)$. Decorridos 2 segundos, a massa restante é $M_2 = M_1(1-\alpha) = M_0(1-\alpha)^2$. E em geral, passados s segundos, restará a massa

$$M_s = M_0(1-\alpha)^s.$$

Procurando uma aproximação melhor para o fenômeno, fixe um inteiro $n > 0$ e imagine que a desintegração se dá em cada intervalo de $1/n$ de segundo. Depois da primeira fração $1/n$ de segundo a massa do corpo se reduzirá ao valor

$$M_0 - \left(\frac{\alpha}{n}\right) M_0 = M_0\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right).$$

Decorrido 1 segundo, ocorrerrão n desintegrações instantâneas e, efetuadas as n reduções, restará no corpo a massa $M_0\,(1-\alpha/n)^n$. Dividindo o intervalo $[0,1]$ em um número n cada vez maior de partes iguais, chega-se à conclusão de que, ao final de 1 segundo, a massa do corpo ficará reduzida a

$$\lim_{n\to\infty} M_0\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n = M_0\cdot e^{-\alpha}.$$

Se o objetivo for calcular a massa ao fim de t segundos, deve-se dividir o intervalo $[0,1]$ em n partes iguais. Em cada intervalo parcial a perda da massa será $M_0\cdot\alpha t/n$. Repetindo o argumento acima chega-se à expressão

$$M(t) = M_0\cdot e^{-\alpha t}, \tag{2}$$

que fornece a massa do corpo depois de decorridos t segundos.

Perceba que nesses dois exemplos retirados de [2], temos duas formas de funções exponenciais: uma relacionando ao modelo de crescimento contínuo de juros compostos; e outra, relacionada ao modelo de decrescimento contínuo aplicado ao decaimento radioativo.

O número e será analisado de um ponto de vista mais teórico no final desta seção, pois até agora usamos um ponto de vista mais intuitivo. Acredita-se na importância do professor conheçer um pouco mais sobre o número e (*número de Euler*) e perceber que será um grande facilitador da modelagem, principalmente pelo fato de que ele aparece naturalmente em diversos modelos como os já mostrados.

3.3 O método do carbono 14

O método do Carbono 14 é um exemplo também retirado de [2] e representa mais um modelo de funções exponeciais, mas antes é importante entender o que é o método do Carbono 14, indicado por C^{14}. O Carbono 14 é um isótopo radioativo do Carbono, formado na atmosfera devido ao bombarderio da terra por raios cósmicos. Através dos tempo, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem-se mantido constante porque sua produção é compensada por sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} também se mantém constante. O C^{14} é criado nos vegetais durante o processo da fotossíntese e absorvido pelos animais através da ingestão, direta ou indireta, de vegetais. Quando o ser morre, a absorção cessa mas o C^{14} nele existente continua a desintegrar-se. Este fato pode ser usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira.

Para isto, sabe-se empiricamente que a meia-vida do C^{14} é 5730 anos. Mas o que é meia-vida? Meia-vida é um conceito fácil, porém os alunos na sua maioria não entendem a sua essência. Por isso, apresenta-se o conceito correspondente a seguir:

Meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que uma dada quantidade da substância se reduza à metade.

O que precisa ficar claro para o aluno e também para o professor é que o tempo de meia-vida independe da massa da substância, conforme será visto a seguir.

Antes disso, encontra-se o tempo de *meia-vida* usando a equação (2). Sabendo que um certo elemento radioativo tem *meia-vida* igual a t_0 unidades de tempo, isto significa que uma unidade de massa desse elemento se reduz à metade no tempo t_0. Assim pela definição de *meia-vida* tem-se:

$$M(t) = \frac{M_0}{2} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

Assim,

$$\frac{1}{2} = e^{-\alpha t_0}.$$

Aplicando logaritmos e suas propriedades, temos:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\alpha t_0,$$

ou ainda

$$-\ln 2 = -\alpha t_0.$$

Disso segue que:

$$\alpha = \frac{\ln 2}{t_0}. \tag{3}$$

Analisando (3) e isolando t_0, temos t_0 em função da taxa de desintegração α, o que nos permite encontrar a meia-vida, a saber:

$$t_0 = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Agora que sabemos encontrar a meia-vida de uma substância qualquer, aplicar-se-a esse conhecimento para a constante de desintegração do C^{14}. Sabemos por experimentações que a meia-vida do C^{14} é 5730 anos. Usando (3), segue que a constante de desintegração é:

$$\alpha = \frac{\ln 2}{5730} = \frac{0,6931}{5730} = 0,00012096. \tag{4}$$

Depois dessas informações será possível analisar um exemplo de [2], descrito a seguir. Nessa situação é apresentado como o uso modelo do C^{14} pode ser útil para acabar com a seguinte controvérsia: Foi encontrado num castelo inglês uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do Rei Artur, soberano que viveu no século V. Por meio de um contador Geiger (instrumento que mede radioatividade) constatou-se que a massa $M = M(t)$ de C^{14} hoje existente na mesa é de $89,4\%$ da massa de C^{14} que existe num pedaço de madeira viva com o mesmo peso da mesa.

Sabe-se de (2) que $M = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$, donde $M/M_0 = e^{-\alpha t}$, fazendo as substituições temos que $0,894M_0 = M_0 \cdot e^{(-0,00012096t)}$. Portanto, conclui-se que o tempo em anos do pedaço de madeira encontrado é aproximadamente

$$t = -\frac{\ln(0,894)}{0,00012096} = \frac{0,1121}{0,00012096} = 926 anos.$$

Analisando a situação, percebe-se que se a mesa fosse da Távola Redonda, deveria ter mais de 1500 anos. Portanto conclui-se que o pedaço de madeira não é da referida Távola Redonda.

Deve-se perceber que na situação descrita acima, é necessário o conhecimento de logaritmos como uma ferramenta auxiliar na hora de resolver uma dada equação exponencial com bases diferentes. Uma outra situação onde o conhecimento de funções exponenciais pode ser usado, também retirado de [2], é do resfriamento de um corpo, onde é usada a *Lei do, Resfriamento de Newton*, conforme será visto a seguir.

3.4 Resfriamento de um corpo

O resfriamento de um corpo possui uma situação análoga à desintegração radioativa pois, pode-se associar a esse fenômeno um modelo de decaimento exponencial. Analisando a situação temos um objeto aquecido, colocado num meio mais frio (ar ou água por exemplo), e cuja grande massa faz com que a temperatura desse meio permaneça praticamente constante, sem ser afetada pela presença do objeto mais quente. Sendo assim, a *Lei do Resfriamento de Newton* afirma que, nessas condições, a diferença de temperatura D, entre o objeto e o meio que o contém, decresce com um taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Como no caso da desintegração radioativa, esta lei se traduz matematicamente da seguinte forma: chamando D_0 a diferença de temperatura no instante $t = 0$ e $D(t)$ a diferença num instante t qualquer, tem-se

$$D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

onde a constante α depende do material de que é constituida a superfície do objeto[1].

3.5 Pressão atmosférica

A pressão atmosférica é outra situação em que aparece a função exponencial, e que o professor poderá usar como um modelo inédito para os alunos. O exemplo a seguir, retirado de [2] sobre pressão atmosférica, diz o seguinte: A pressão atmosférica é a pressão exercida pela camada de moléculas de ar. Como a grandeza pressão é a força exercida por unidade de área, temos que a pressão atmosférica num dado ponto do planeta mede a força exercida pelo ar numa região próxima daquele ponto. À medida que a altura h em relação ao nível do mar aumenta, a pressão atmosférica diminui, não somente porque a coluna de ar acima do dado ponto diminui, mas também em virtude de o ar se tornar mais rarefeito, e portanto pesar menos. Prova-se, como consequência da Lei de Boyle, que se p_0 é a pressão atmosférica ao nível do mar, então a pressão a uma altitute h é

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\alpha h}, \tag{5}$$

onde α é uma constante. A pressão atmosférica $p = p(h)$ pode ser medida diretamente por um instrumento chamado *barômetro*.

Um exercício que pode ser proposto é aquele em que, medindo-se a pressão atmosférica em dois pontos cujas altitutes h_1 e h_2 são conhecidas, pede-se para determinar a constante α. Chamando de p_1 e p_2 as pressões verificadas nas alturas h_1, e h_2, respectivamente, temos de (5) que

$$p_1 = p_0 \cdot e^{-\alpha h_1}$$
$$p_2 = p_0 \cdot e^{-\alpha h_2}.$$

Dividindo uma equação pela outra, temos

$$\frac{p_1}{p_2} = e^{-\alpha(h_1 - h_2)},$$

[1] A Lei de Newton vale também com expoente positivo, onde ocorre o aquecimento de um corpo frio colocado numa ambiente mais quente.

e por fim, ao aplicarmos o logaritmo a ambos os membros, podemos isolar a constante α pedida, a saber:

$$\alpha = \frac{\ln(p_1/p_2)}{h_2 - h_1} = \frac{\ln(p_2/p_1)}{h_1 - h_2}.$$

Pode-se notar que, por exemplo, conhecendo a constante α e possuindo um barômetro, podemos a cada momento determinar a que altura h um dado avião voa, por meio da fórmula abaixo, obtida ao isolarmos a altura h na equação (5):

$$h = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right),$$

onde p_0 é a pressão ao nível do mar e $p = p(h)$ é a pressão medida pelo barômetro no momento dado, no avião.

3.6 Eliminação de álcool ingerido

O exemplo da eliminação do álcool, retirado de [7], foi realizado na PUC-CAMP em 1998 no curso de Modelagem. Nesse curso, foi mostrado que o álcool ingerido por um indivíduo sofre um processo de eliminação gradual através da urina, suor e respiração. O bafômetro, utilizado pela polícia rodoviária para detectar o teor alcoólico entre consumidores de bebida alcoólica, mede a concentração de álcool eliminado pelos pulmões. Durante esse período, os alunos do curso de Modelagem tomaram algumas medidas de concentração alcoólica, utilizando um bafômetro construído por eles. Dessa forma, a primeira medida foi tomada 70 minutos após terem ingerido aproximadamente 10 copos de cerveja. Após esta medida eles pararam de beber e foram feitas outras 2 medidas subsequentes. Os valores obtidos na tabela a seguir são médios, levando-se em conta o peso de cada participante:

Tempo (minuto)	concentração média de álcool (g/L)
70	0,95
75	0,76
155	0,46

Como estamos analisando funções exponenciais e logarítmicas, é de se esperar que a eliminação de álcool no organismo seja proporcional à quantidade existente em cada instante. Assim, o modelo proposto para essa situação é a da função exponencial que obedece a seguinte lei:

$$c(t) = c_0 \cdot e^{-kt},$$

onde c_0 é a concentração inicial, ou seja, o valor obtido quando os indivíduos pararam de beber. Ao considerarmos o ajuste exponencial dos dados experimentais, chega-se ao seguinte modelo:

$$c = 1,472 \cdot e^{-0,0075t}, t \geq 70.$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = t - 70$ na equação acima, obtendo $\tau = 0$ quando $t = 70$, podemos escrever a equação acima como:

$$c(t) = 0,8683 \cdot e^{-0,0075\tau}, \tau \geq 0.$$

Dessa forma, obtem-se uma função que determina o tempo para eliminação do álcool ingerido. Vale ressaltar que essa função é válida para indivíduos com média de 72Kg, sendo essa a média obtida dos participantes do experimento.

3.7 Escala Richter

A escala foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e por seu colega Beno Gutenberg, ambos membros do California Institute of Technology (Caltech).

A escala Richter é uma escala logarítmica que mede a amplitude das ondas sísmicas (ondas causadas pela vibração do solo). A princípio, essa escala foi graduada de 1 a 9, porém, atualmente não existe limite teórico. Sendo assim, a Escala Richter é uma "escala aberta".

A escala utilizada é logarítmica de base 10, onde a magnitude corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas a 100 km do epicentro (ponto da superfície do globo mais próximo do centro de abalo de um terremoto), ou seja, é calculada pela equação:

$$M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right),$$

onde A representa a amplitude medida num terremoto por um instrumento chamado sismógrafo e A_0 é uma amplitude de referência. Por ser uma escala logarítmica de base 10, à medida que a magnitude aumenta, temos uma amplitude 10 vezes maior. Por exemplo, um terremoto com magnitude 6, tem uma amplitude 10 vezes maior que um terremoto de magnitude 5. Dessa forma, o professor poderá utilizar a escala Richter como ferramenta de aplicação com os seus alunos.

3.8 Magnitude Aparente de Uma Estrela

Nesse exemplo retirado de [13], temos na astronomia uma aplicação de logaritmos, pois as estrelas são classificadas pelo brilho, usando um sistema de magnitudes, realizado da seguinte forma:

A estrela mais brilhante é de 1^a magnitude, as quais são vistas a olho nu com uma magnitude m_1 com brilho F_1; e as de menor brilho, são de 6^a magnitude com magnitude aparente m_6, e que correspondem a um fluxo F_6. Sabe-se que o brilho de uma estrela com m_1 é 100 vezes maior que o brilho de uma estrela com m_6. Assim temos $F_1 = 100 \cdot F_6$, sendo que um intervalo de 5 magnitudes corresponde a um fator de 100 no brilho. A diferença de 1 magnitude corresponde a um fator de $100^{1/5} \approx 2,5$. Como esta escala é baseada nas observações do olho humano, podemos dizer que ele corresponde a de um detetor logarítmico.

A escala de magnitudes inclui valores maiores (positivos) para representar estrelas fracas, por exemplo aquelas detectáveis pelo Observatório do Monte Palomar, cujo levantamento fotográfico realizado tem sensibilidade para magnitudes até $m_v = 23,5$. Por outro lado, a escala também se estende para valores negativos para representar objetos muito brilhantes. Dessa forma, pode-se deduzir a relação entre magnitude e brilho. Para isso, vamos primeiramente comparar as magnitudes m_1 e m_6. Chamando de Δ_m a diferença entre as magnitudes consideradas, nesse caso temos $\Delta_m = 5$. Com isso, a relação entre os brilhos correspondentes é

$$\frac{F_1}{F_6} = 100.$$

Assim, para $\Delta_m = 1$ temos que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\frac{F_i}{F_{i+1}} = 100^{\frac{1}{5}} \approx 2,5.$$

Considerando agora magnitudes m_1 e m_2, tem-se $\Delta_m = 1$. Disso segue que:

$$\frac{F_1}{F_2} = 100^{\left(\frac{m_2 - m_1}{5}\right)}.$$

Aplicando logaritmo a ambos os membros temos:

$$\log \frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{m_2 - m_1}{5}\right) \cdot \log 100 \approx 0,4(m_2 - m_1).$$

Assim obtem-se:

$$m_2 - m_1 = 2,5 \log \frac{F_1}{F_2}.$$

Agora é necessário encontrar uma expressão geral para magnitude m de uma estrela. Para este fim, supoem-se que seu brilho seja $F = F_2$ e que o brilho correspondente à magnitude zero ($m_1 = 0$) seja $F_0 = F_1$. Assim, temos: $m - 0 = 2,5\log\frac{F_0}{F_2}$, ou seja, $m = 2,5\log F_0 - 2,5\log F$. Substituindo $C = 2,5\log F_0$, que define-ses como o ponto zero na escala de magnitudes e dependendo do sistema fotométrico, teremos $m = C - 2,5\log F$.

Lembrando que o brilho observado depende da distância, isto é,

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

onde L é uma constante positiva, temos

$$m = C' - 2,5\log L + 5\log d,$$

com $C' = C + (2,5\log 4\pi)$ e m a magnitude aparente da estrela.

3.9 Escala Musical

Na escala musical, uma oitava, representa um fator de 2 na frequência dos sons, é dividida em 12 meio tons. Esses meio-tons são espaçados uniformemente cada um num fator de $\sqrt[12]{2}$ a partir do anterior. Por exemplo, retirado de [1] a quantidade de meio-tons que separam a frequência de 440 hertz de uma frequência de 329,6 hertz, pode ser obtida aplicando a diferença de logaritmos de base $\sqrt[12]{2}$ entre 440 e 329,6 hertz, isto é:

$$\log_{\sqrt[12]{2}} \frac{440}{329,6} \approx 5.$$

Esse resultado significa que a distância que separa 440 hertz de 329,6 na escala musical é 5 semitons.

3.9.1 O número e

Para começar, define-se o número e pela seguinte igualdade: $\exp 1 = e$. Dessa forma, percebe-se que

$$\exp n = \exp(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{\text{n vezes}}) = \underbrace{\exp 1 \cdot \ldots \cdot \exp 1}_{\text{n vezes}} = e^n,$$

lembrando que: $\exp\left(x + y\right) = \left(\exp x\right) \cdot \left(\exp y\right)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Entretanto, se $n > 0$ é inteiro, veremos que: $\exp(-n) = \left(\exp n\right)^{-1} = (e^n)^{-1} = e^{-n}$. Se $r = \frac{p}{q}$ com

p e $q > 0$ inteiros, então $\left(\exp r\right)^q = \exp(p) = e^p$; extraindo-se a raiz q-ésima de ambos os membros, temos $\exp(r) = e^r$. Provando assim a proposição a seguir:

Proposição 3.1 *Dado qualquer r racional tem-se que:* $\exp r = e^r$.

Ao analisar outra expressão para o número e tem-se que, pondo $f(x) = \ln(1+x)$, tem-se que a derivada de f em $x = 0$ é 1. Isso significa, pela definição de derivada, que:

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Fazendo $x \to 0$ pela sequência $x_n = 1/n$, $n \geq 1$, segue que:

$$1 = \lim_{x\to\infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Como $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left\{\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]\right\}$ e exp é uma função contínua, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp 1 = e.$$

Vamos mostrar agora que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Para isso, escreve-se $a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ e $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, para cada $n \geq 1$. Em primeiro lugar, como $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \geq 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^{n-1}$, temos que

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3,$$

para todo $n \geq 1$. Portanto, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente. Denotando por α sua soma, vemos que $2 \leq \alpha \leq 3$.

Agora será analisada a sequência b_n. Desenvolvendo b_n pelo binômio de Newton, tem-se:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Cada termo da última soma é menor que os termos correspondentes na soma, definindo a_n, portanto, $b_n < a_n$ para todo $n \geq 1$. Como b_n converge para e, temos que: $e \leq \alpha$. Vamos provar que: $e = \alpha$.

De fato, dado $\epsilon > 0$ seja p tal que $\alpha - a_p < \epsilon$, isto é, $\alpha - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{p!}\right) < \epsilon$. Dado qualquer $n > p$, temos que:

$$b_n > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{p-1}{n}\right).$$

Mantendo p fixo e fazendo $n \to \infty$ na última desigualdade, vemos que

$$e = \lim_{n\to\infty} b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{p!} = a_p > \alpha - \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, fazendo $\epsilon \to 0$, temos que $e \geq \alpha$, e portanto, $e = \alpha$, como queríamos. Logo,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

4 Aplicações de Exponenciais e Logaritmos em Sala de Aula

Nesta seção será apresentado duas sequências didáticas que envolve a *Lei de Resfriamento de Newton* e como usá-las na proposta de modelagem matemática apresentada por [5], ou seja, o professor deve apresentar ao aluno uma situação-problema, com todas as informações necessárias para investigações e resolução da mesma.

Algo muito importante nesssa fase é mostrar a aprendizagem matemática de forma conexa, principalmente com assuntos já estudados pelos alunos.

4.1 A temperatura ideal do café

A primeira situação-problema é estudar a *lei do resfriamento de Newton* no caso de uma xícara de café quente, quando deixado para esfriar. Para esta atividade segere-se dividí-la em três etapas, a seguir:

1. apresentação do texto retirado de [10] que apreseta a **Lenda do Café**.

2. questionamentos que o professor pode fazer após a leitura do texto. Segue alguma exemplos:

- Quanto tempo devemos esperar para que o café esfrie sem o risco de queimar a lingua?
- Por que o café esfria?
- Qual é a relação entre a temperatura do café e a do ambiente que o cerca?

3. Para responder a alguns dos questionamentos sugere-se o teto sobre a *lei do resfriamento de Newton* a seguir:

A Lei de resfriamento de Newton

A Lei de resfriamento de Newton é uma das leis básicas da física e de ampla aplicação. Por exemplo, essa lei garante que à medida que o café esfria, a taxa de esfriamento correspondente diminui, pois a diferença de temperatura entre o café e o ar diminui. A matemática ali encontrada ajuda a compreender muitos outros fenômenos, tais quais: decaimento radioativo, meia-vida de uma substância. A fórmula é simples e está associada ao nosso objeto de estudo: as funções exponenciais. É útil lembrar de aulas anteriores quando o tema progressões geométricas foi abordado. A relação entre esses dois assuntos é fundamental para que haja entendimento sobre o que está acontecendo, pois quando falamos de funções exponenciais estamos remetendo a variações de expoentes. Assim, a lei do resfriamento de Newton ajudará na determinação do tempo necessário para que, por exemplo, o leitor e sua família saboreiem uma boa xícara de café sem queimar a língua.

Assim, um objeto quando colocado em um ambiente com uma temperatura diferente da sua, tende a entrar em equilíbrio térmico com a vizinhança. Esse equilíbrio térmico segue a seguinte lógica: se este objeto estiver a uma temperatura mais alta do que a sua vizinhança, ele perderá calor para o ambiente e esfriará; caso contrário, esquentará. Dessa forma, a taxa de resfriamento de um objeto depende da diferença de temperatura entre este e o ambiente. A lei do resfriamento de Newton afirma que, para pequenas diferenças de temperaturas, a taxa de resfriamento é aproximadamente proporcional à diferença de temperatura. Um corpo que não possui internamente nenhuma fonte de calor, quando deixado em meio ambiente na temperatura T, tende àquela do meio que o cerca T_a (*temperatura ambiente*). Assim, se a temperatura $T < T_a$, esse corpo se aquecerá e caso, contrário, se resfriará.

Após esses dois textos sugere-se apresentar aos alunos o questionamento: "Se uma xícara de café estava a uma temperatura de $95°C$ e esfriou para $85°C$ em um minuto em uma sala a $20°C$, em quanto tempo esse café atingirá a temperatura de 65°C, sendo possível tomá-lo sem riscos de queimadura?"

Agindo como mediador o professor juntamente com os aluno deverá encontrar $3,57$mim como o tempo necessário para que o café mantenha o sabor sem o risco de queimadura.

4.2 Criminalística - a hora da morte?

Nesta situação-problema continuaremos o estudo da *Lei do Resfriamento de Newton* no caso da morte de Dona Florinda Flores, sugere-se dividir em dois casos, a seguir:

1. apresentação do texto retirado de [12] que trata de crimes que ficam sem solução.

2. apresentação do vídeo [11] sobre a morte de Dona Florinda Flores.

Descrição de uma parte da situação encontrada no vídeo [11]:

Caso Florinda Flores

"O corpo de Dona Florina Flores foi encontrado por volta das 18:15 por uma amiga, sendo que os vizinhos disseram que ela foi vista viva por volta das 12:30. O principal suspeito é o jardineiro, pois o mesmo foi visto trabalhando na casa de Dona Florinda por volta das 12:30, e ficou por lá até às 13:30. Logo após, ele foi visto pegando o ônibus em direção ao outro serviço, que fica do outro lado da cidade, às 14:30."[...] "Para determinar a hora da morte, o delegado informa que: a temperatura do corpo encontrado às 18:23 era de $32°C$ e a temperatura ambiente era de $28°C$. Partindo do fato que a temperatura média de uma pessoa sem febre é de $36,5°C$ e o tempo que levaria para que o corpo de Dona Florinda esfriar e chegar à temperatura de $28°C$ é de aproximadamente 6 horas, é possível determinar se o jardineiro foi o autor do crime?"

Para resolver esse mistério juntamente o o professores o aluno deve analisar a seguinte função apresentada no vídeo

$$T_c(t) = t_i(0) \cdot e^{r \cdot t}.$$

O professor agindo como mediador deverá juntamente com o aluno encontrar que Dona Florinda morreu cerca de 3 horas antes dela ter sido encontrada por sua amiga. Isentando o jardineiro do crime.

Algo importante a ressaltar para os professores é o fato de que as funções exponenciais aqui apresentadas não são obtidas de forma trivial, pois a maioria são soluções de equações diferenciais, logo o professor que se interessar mais sobre esse assunto deve analisar melhor as referências de [8], [7] e livros sobre Equações Diferenciais.

5 Considerações Finais

Ao iniciar este artigo houve uma preocupação com o processo de ensino-aprendizagem de Funções Exponenciais e Logarítmicas, mais especificamente a forma como que os professores aplicam esses conceitos. Para isso, indicamos o uso da Modelagem Matemática baseada nos pressupostos de [7], [5] e [6].

Conforme foi verificado e devido a de algumas fragilidades apontadas por [7] e [6] optou-se pela teoria apresentada por [5]. Ele aponta três casos sobre Modelagem Matemática, dos quais selecionamos para esse trabalho o primeiro, pois propõe que se apresente a situação-problema diretamente ao aluno. Este, por sua vez, pode encontrar todos os dados necessários para a resolução dessa situação.

Outro fato que nos fez escolher esse primeiro caso é a facilidade e a praticidade que o professor encontra ao utilizar a Modelagem Matemática como uma metodologia auxiliar. Porém, ele deverá ficar mais atento aos questionamentos que envolverão a prática. Por esse motivo, apresentou-se uma lista com sugestões de situações-problema que envolvem funções exponenciais e logarítmicas para que o professor as utilize nas aulas em que usará a Modelagem. Além disso, foi também apresentado duas sequências didáticas das quais pode-se perceber na Modelagem a possibilidade de apresentar os conceitos de Funções Exponenciais e Logarítmicas de forma satisfatória, contextualizada e que pode vir a ser mais significativa para o aluno.

Desta forma, esse artigo visa, dentre as várias teorias que envolvem a Modelagem, ser um auxiliador para o professor que deseja iniciar o uso dessa metodologia em sala de aula e avançar com pesquisas nessa área. É importante ressaltar que a Modelagem Matemática não pode ser vista como uma "tábua de salvação"no ensino da Matemática, ela é mais uma ferramenta para auxiliar nessa tarefa de ensinar de forma mais significativa e empolgante.

Referências

[1] C. Kluepfel: *When are Logarithms used?,* The Mathematics Teacher, Vol. 74, No 4 (April, 1981), pp.250 - 253.

[2] E. L. Lima: *Logaritmos*, SBM, Rio de Janeiro, 2009.

[3] E. L. Lima: *A matemática do ensino médio Volume 1*/ Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado, Rio de Janeiro, 2006.

[4] E. L. Lima: *Temas e Problemas*/ Paulo Cezar Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado, SBM, Rio de Janeiro, 2001.

[5] J. C. Barbosa: *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para debate teórico*/In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, Rio de Janeiro, 24, 2001.

[6] M. S. Biembengut: *Modelagem matemática no ensino*, Contexto, São Paulo, 2003.

[7] R. C. Bassanezi: *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*, Contexto, São Paulo, 2002.

[8] R. C. Bassanezi: *Equações Diferenciais: com Aplicações*, Harba, São Paulo, 1988

[9] Escala Richter, http://www.ufrgs.br/museudetopografia/artigos/Escala_Richter.pdf, acessado 07/02/2013

[10] ABIC - *Associação Brasileira da Indústira do café*, http://www.abic.com.br/publique/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?sid=39, Acessado em 10/03/2013.

[11] http://www.youtube.com/watch?v=Vy36aCdV35s, acessado em: 23/03/2013.

[12] http://www.advocaciabittar.adv.br/noticias/item/em-um-ano-10-mil-crimes-ficam-sem-soluo-no-paran.html, Acessado em: 23/03/2013.

[13] http://astroweb.iag.usp.br/~dalpino/AGA215/APOSTILA/cap08cor.pdf, acessado em: 07/02/2013.