

Rokenedy Lima Passos

Séries de Fourier e o Teorema de Equidistribuição de Weyl

Itabaiana

Maio de 2017

Rokenedy Lima Passos

Séries de Fourier e o Teorema de Equidistribuição de Weyl

Dissertação de Mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Aislan Leal Fontes

Universidade Federal de Sergipe

Departamento de Matemática

Programa de pós-graduação em Matemática

Itabaiana

Maio de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

P289s Passos, Rokenedy Lima.
Séries de Fourier e o Teorema de Equidistribuição de Weyl /
Rokenedy Lima Passos; orientador Aislan Leal Fontes. –
Itabaiana, 2017.
59 f. ; il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –
Universidade Federal de Sergipe, 2017.

1. Séries de Fourier. 2. Teorema de Equidistribuição de Weyl.
3. Funções periódicas. 4. Convergências pontual e uniforme. I.
Fontes, Aislan Leal, orient. II. Título.

CDU 517.518.45



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Séries de Fourier e o teorema de equidistribuição de Wely

por

Rokenedy Lima Passos

Aprovada pela banca examinadora:

Aislan Leal Fontes

Prof. Me. Aislan Leal Fontes - UFS
Orientador

Alejandro Caicedo Roque

Prof. Dr. Alejandro Caicedo Roque - UFS
Primeiro Examinador

Filipe Dantas dos Santos

Prof. Dr. Filipe Dantas dos Santos - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 18 de Maio de 2017

Agradecimentos

Primeiramente ao glorioso Deus, por me proporcionar mais uma realização. Em segundo, não menos importante, a todos os que contribuíram direta e indiretamente no desenvolvimento do presente trabalho.

Resumo

Este trabalho é tratado em duas partes. A primeira consiste em encontrar condições suficientes sobre uma dada função para que sua expansão em Série de Fourier convirja pontualmente e uniformemente, como também uma abordagem ao Teorema de Fejér, resultado interessante e útil no estudo de Séries de Fourier. A segunda parte uma aplicação provenientes das Séries de Fourier, o Teorema de equidistribuição de Weyl. Um problema que se encontra na fronteira dos Sistemas Dinâmicos com a Teoria dos Números. O mesmo refere-se à distribuição de números irracionais no intervalo $[0, 1)$.

Palavras-chaves: Funções periódicas, Séries de Fourier, Convergência pontual e uniforme, Sequências equidistribuídas.

Abstract

This work is treated in two parts. The first is to find sufficient conditions for a function so that its Fourier series distributions become common and uniform, as well as an approach to Fejér's Theorem, an interesting and useful result of no Fourier Series study. A second part of the application of the Fourier Series, Weyl equidistribution theorem. A problem that lies at the frontier of Dynamic Systems with a Theory of Numbers. The same refers to the distribution of irrational numbers in the range $[0, 1)$.

Key-words: Periodic functions, Fourier series, Punctual and uniform convergence, Sequences equidistributed.

Sumário

Introdução	13
1 Séries de Fourier	15
1.1 Preliminares	15
1.1.1 Funções Periódicas	15
1.2 Coeficientes da Série de Fourier	16
1.3 Teorema de Fourier	18
1.3.1 Existência da Série de Fourier	18
1.3.2 Funções Seccionalmente Contínuas	20
1.3.3 O Teorema de Fourier	24
1.3.4 Estimativas dos Coeficientes de Fourier	25
1.3.5 Forma Complexa da Série de Fourier	27
2 Convergência da Série de Fourier	29
2.1 Convergência Pontual	29
2.2 Convergência Uniforme	36
2.2.1 Desigualdade de Bessel	38
2.2.2 O Teorema de Fejér	45
2.2.3 Sistemas Ortogonais	52
3 O Teorema de Equidistribuição de Weyl	55
Referências	61

Introdução

Jean Baptiste Joseph Fourier foi um matemático e físico, nasceu na França, na cidade de Auxerre em 21 de março de 1768 e faleceu em 16 de maio de 1830 em Paris. Foi o precursor no estudo sobre a representação de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes, chamadas em sua homenagem de Séries de Fourier.

A história das Séries de Fourier ilustra como a solução de um problema físico acaba gerando novas fronteiras na matemática. Fourier foi levado a desenvolver suas séries ao estudar a propagação de calor em corpos sólidos. Admitindo que essa propagação deveria se dar por ondas de calor e levando em conta que a forma mais simples de uma onda é uma função senoidal, Fourier mostrou que qualquer função, por mais complicada que seja, pode ser decomposta como uma soma de senos e cossenos.

No presente trabalho usamos [1] como literatura base para os capítulos 1 e 2, e para o capítulo 3 as literaturas [4] e [5]. Estudaremos tópicos de análise harmônica, mais especificamente as Séries de Fourier e alguns fatos provenientes dessa teoria. E nosso principal objetivo é demonstrar o Teorema de equidistribuição de Weyl, onde o mesmo afirma que, a sequência $\langle \alpha \rangle, \langle 2\alpha \rangle, \langle 3\alpha \rangle, \dots, \langle n\alpha \rangle, \dots$ das partes fracionárias é equidistribuída em $[0, 1)$, com α um número irracional. A seguir descreveremos sucintamente cada capítulo dessa dissertação.

No capítulo 1 definimos as Séries de Fourier, e destacamos as condições para que a Série de Fourier esteja bem definida, nesse capítulo temos como resultado principal, o Teorema de Fourier, onde a demonstração é deixada para o capítulo 2, seguido dos coeficientes de Fourier e a forma complexa da Série de Fourier. Assumiremos que tais séries convergem uniformemente, visto que o detalhamento desse conceito é feito no capítulo 2.

O capítulo 2 é o mais longo e delicado do presente trabalho. Nele tratamos da convergência da Série de Fourier, inicialmente a convergência pontual, onde temos como destaque o Núcleo de Dirichlet e o Teste Dini, esse último, resultado crucial para a prova do Teorema de Fourier. Destacamos também a Desigualdade de Bessel, resultado importante

para demonstração do primeiro Teorema sobre convergência uniforme da Série de Fourier, e ainda temos o segundo Teorema sobre convergência uniforme da Série de Fourier. Para finalizar o capítulo, temos os interessantes conceitos de série Cesàro-somável e Núcleo de Fejér, e o conveniente Teorema de Fejér, onde a convergência da Série de Fourier se dar em hipóteses menos restritas, tornando-o mais forte que os Teoremas de Fourier. Além disso, o Teorema de Fejér, tem papel fundamental para demonstração da Identidade de Parseval e a unicidade da Série de Fourier.

Por fim, no capítulo 3 aplicamos as ideias provenientes das Séries de Fourier a uma problema que se encontra na fronteira de Sistemas Dinâmicos com a Teoria dos Números. O mesmo refere-se à distribuição de números irracionais no intervalo $[0, 1)$. O objetivo final desse trabalho, o Teorema de equidistribuição de Weyl, foi demonstrado pelo matemático alemão Hermann Klaus Hugo Weyl que nasceu na cidade de Elmshorn em 9 de novembro de 1885 e faleceu em Zurique no dia 8 de dezembro de 1955. Ele provou que sendo α um número irracional, então a sequência $\langle \alpha \rangle, \langle 2\alpha \rangle, \langle 3\alpha \rangle, \dots, \langle n\alpha \rangle, \dots$ das partes fracionárias é equidistribuída em $[0, 1)$.

1 Séries de Fourier

Neste primeiro capítulo apresentaremos alguns conceitos preliminares que terão um papel fundamental para o entendimento de todo o texto.

1.1 Preliminares

1.1.1 Funções Periódicas

É comum encontrarmos funções definidas em toda reta real, mas cujos valores se repetem com uma certa periodicidade. Por este motivo estas funções são chamadas de funções periódicas.

Definição 1.1. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita periódica de período $T > 0$, se para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

Exemplo 1.1. A função $f(x) = x - [x]$, chamada parte fracionária de x , onde $[x]$ representa o maior inteiro menor do que ou igual a x , é periódica de período 1. De fato,

$$f(x + 1) = x + 1 - [x + 1] = x + 1 - ([x] + [1]) = x + 1 - [x] - 1 = x - [x] = f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.2. As funções $\sin x$ e $\cos x$ possuem períodos iguais a 2π . De fato,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \cos 2\pi + \sin 2\pi \cos x = \sin x.$$

De modo análogo determina que o período de $\cos x$ também vale 2π .

Em geral, para qualquer valor $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\sin \alpha x$ e $\cos \alpha x$ têm período fundamental igual a $\frac{2\pi}{\alpha}$. Em particular, as funções $\sin \frac{n\pi x}{L}$ e $\cos \frac{n\pi x}{L}$, com $n \in \mathbb{N}$ e L um número real não nulo, têm períodos iguais a $\frac{2L}{n}$.

Dada uma função definida em um intervalo limitado, podemos construir uma função periódica definida em toda reta. De fato, se por exemplo $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função

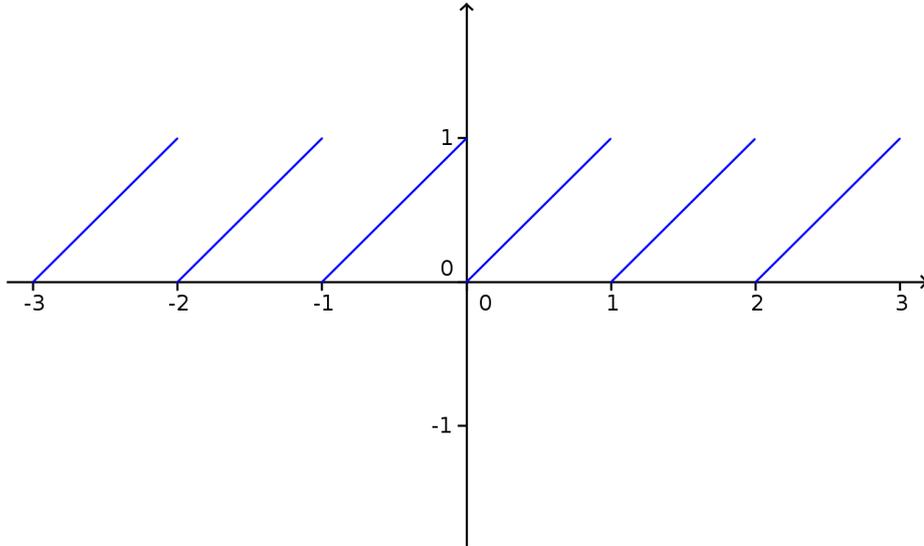


Figura 1 – Gráfico da função $f(x) = x - [x]$.

periódica de período $T = b - a$, inicialmente definimos o intervalo $I = [a, b)$. Se $x \in \mathbb{R}$ e $x \notin I$, seja n um número inteiro tal que $x \in I_n = [a + nT, b + nT)$, dessa forma $\mathbb{R} = \bigcup_n I_n$. Note que, dado $x \in \mathbb{R}$ temos que existe um único número inteiro n tal que $x \in I_n$, neste caso definimos $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $F(x) = f(x - nT)$. Por construção temos que F é periódica de período T .

Agora, se f é uma função definida num intervalo compacto, digamos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, podemos construir uma função periódica definida em toda a reta, desde que $f(a) = f(b)$.

1.2 Coeficientes da Série de Fourier

Apresentamos as seguintes relações entre as funções $\sin \frac{n\pi x}{L}$ e $\cos \frac{n\pi x}{L}$, as quais levam o nome de relações de ortogonalidade.

Proposição 1.1 (Relações de Ortogonalidade). *Valem as seguintes identidades:*

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \quad \text{se } n, m \geq 1; \quad (1.1)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m, \quad n, m \geq 1; \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m, \quad n, m \geq 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Demonstração. Iremos mostrar (1.3), suponha $n \neq m$, escrevemos

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \frac{(n-m)\pi x}{L} - \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n-m} \operatorname{sen} \frac{(n-m)\pi x}{L} - \frac{1}{n+m} \operatorname{sen} \frac{(n+m)\pi x}{L} \right] \Big|_{-L}^L \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Agora, suponha $n = m$, escrevemos

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[1 - \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x - \frac{L}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L} \right] \Big|_{-L}^L \\
&= L.
\end{aligned}$$

□

Suponha que possamos expandir uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (1.4)$$

onde a expressão do lado direito de (1.4) é a Série de Fourier de f . A igualdade só é possível, se a série (1.4) convergir pontualmente para f em cada ponto x da reta real. Em particular, f é periódica de período $2L$. De fato, as funções $\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ e $\cos \frac{n\pi x}{L}$ tem período igual a $2L$, segue que,

$$\begin{aligned}
f(x+2L) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi(x+2L)}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x+2L)}{L} \right] \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) = f(x).
\end{aligned}$$

Além disso, suponha que a função f seja integrável em $[-L, L]$ e que a série do lado direito de (1.4) convirja uniformemente para f em toda reta, logo podemos integrar termo a termo. Obtemos,

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right) = a_0 \cdot L,$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (1.5)$$

A fim de obter cada coeficiente a_n , iremos a partir de (1.4), multiplicar cada membro por $\cos \frac{m\pi x}{L}$, com $m \geq 1$ fixado, integrando e usando as relações de ortogonalidade, Proposição (1.1), obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{2} a_0 \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos^2 \frac{m\pi x}{L} dx + b_m \cdot 0 \\ &= a_m \cdot L. \end{aligned}$$

De modo análogo, obtém-se,

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = b_m \cdot L.$$

Finalmente, escrevemos os coeficientes da Série de Fourier (1.4) ,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0; \quad (1.6)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (1.7)$$

1.3 Teorema de Fourier

Vamos determinar condições suficientes para que uma função f possua uma Série de Fourier e que esta convirja para f pelo menos na maioria dos pontos de seu domínio.

1.3.1 Existência da Série de Fourier

Inicialmente, vamos ver quais condições suficientes a função f deve satisfazer para que a sua Série de Fourier esteja definida, mesmo que ela possa não convergir para f em nenhum ponto. Para que a Série de Fourier de f exista, os coeficientes de Fourier de f precisam estar definidos.

Consideremos funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Observaremos apenas os seguintes casos sobre a integrabilidade:

1. A função f é limitada. Neste caso ela é integrável se o supremo das somas inferiores é igual ao ínfimo das somas superiores. Isto é, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$, para $x \in [a, b]$. A função f é integrável, se dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição \mathcal{P} do intervalo $[a, b]$

$$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

tal que

$$S[f, \mathcal{P}] - s[f, \mathcal{P}] < \varepsilon, \quad \text{onde}$$

$$s[f, \mathcal{P}] = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}), \quad m_j = \inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\} \quad \text{e}$$

$$S[f, \mathcal{P}] = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \quad M_j = \sup\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\},$$

são as somas inferior e superior, respectivamente, associadas à partição \mathcal{P} .

2. A função f não é limitada. Neste caso, a função f é integrável (a integral é chamada integral imprópria) se o intervalo $[a, b]$ puder ser decomposto em um número finito de intervalos I_1, \dots, I_n , com $I_k = [a_k, b_k]$, tais que a função f é limitada e integrável em (a_k, b_k) e os limites abaixo existem

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a_k^+} \int_t^{b_k} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx = \lim_{t' \rightarrow b_k^-} \int_{a_k}^{t'} f(x) dx.$$

Neste caso, a integral imprópria de f é

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx.$$

A função f será absolutamente integrável se o valor absoluto $|f|$ for integrável no sentido 1 ou 2 acima.

A fim de melhorar a notação, denominaremos funções integráveis e absolutamente integráveis no intervalo $[a, b]$ por \mathcal{L}^1 , isto é, f é uma função em \mathcal{L}^1 definida em $[a, b]$ se, e somente se, f e $|f|$ são integráveis em $[a, b]$.

Proposição 1.2. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$, então os coeficientes de Fourier de f*

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0, \quad (1.8)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1, \quad (1.9)$$

estão bem definidos.

Demonstração. De fato,

$$\left| \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \int_{-L}^L |f(x)| \left| \cos \frac{n\pi x}{L} \right| dx \leq \int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty,$$

$$\left| \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \int_{-L}^L |f(x)| \left| \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| dx \leq \int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty.$$

□

1.3.2 Funções Seccionalmente Contínuas

Definição 1.2. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se ela tiver um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado.

Em outras palavras, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, \dots, n-1$ e existem os limites laterais

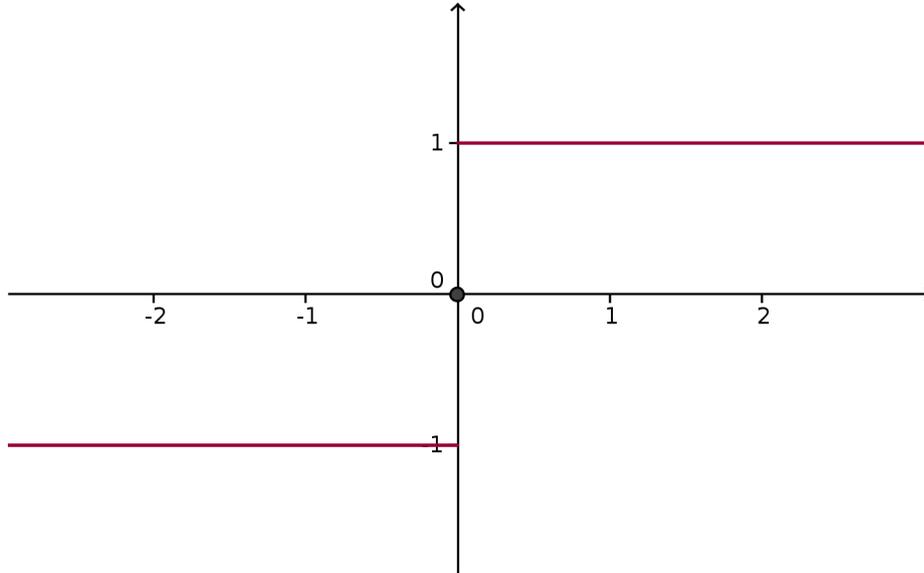
$$f(a_j^+) := \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a_j^-) := \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

Exemplo 1.3. A função sinal de x , definida abaixo

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

é seccionalmente contínua. De fato, fica claro que a descontinuidade é no ponto 0, além disso

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sign}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} +1 = +1 = \operatorname{sign}(0^+) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sign}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1 = \operatorname{sign}(0^-).$$

Figura 2 – Gráfico da função $\text{sign } x$.

Exemplo 1.4. A função parte fracionária de x , $f(x) = x - [x]$ é seccionalmente contínua em $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. De fato, considere $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$. Note que,

$$[x] = \begin{cases} -1, & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ 0, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Portanto,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ x, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Notemos que f é contínua nos intervalos $(-\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$. Agora calculando os limites laterais do ponto 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0^+) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 = 1 = f(0^-).$$

Exemplo 1.5. A função

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ 1, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

não é seccionalmente contínua em $[-1, 1]$. De fato, seja $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ 1, & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Note que, g não está bem definida em $x = 0$, ou seja, o limite lateral à esquerda do ponto 0 não existe, vejamos

$$g(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty.$$

Temos que a descontinuidade no ponto ($x = 0$) é de segunda espécie.

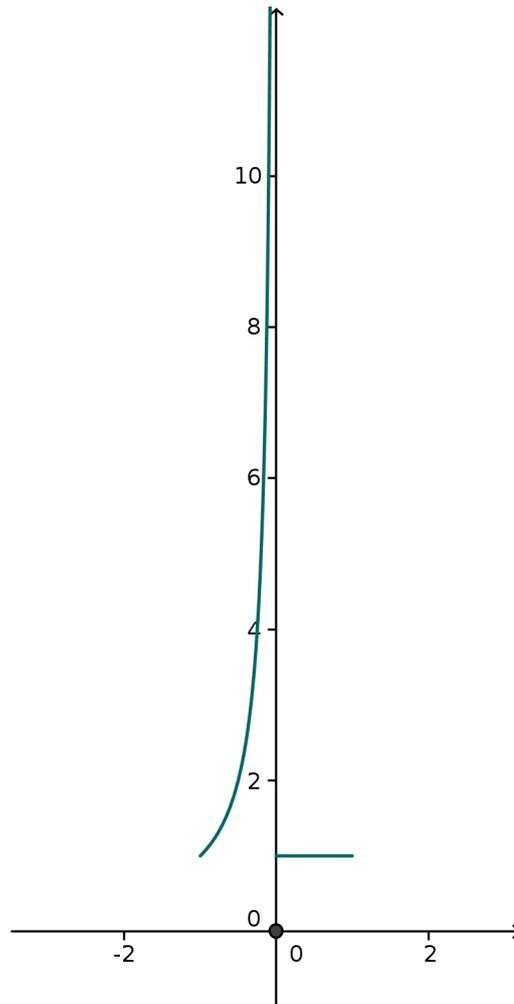


Figura 3 – Gráfico da função g em $[-1, 1]$.

Exemplo 1.6. A função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1, \\ \frac{1}{n}, & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots, \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

não é seccionalmente contínua, apesar de todas as descontinuidades serem de primeira espécie, acontece que no intervalo $(0, 1)$, há uma infinidade de descontinuidades. De fato,

suponha que h possua um número finito de descontinuidades no intervalo $(0, 1)$. Seja $(\frac{1}{M+1}, \frac{1}{M})$ o último intervalo de descontinuidade, ou seja, para $n = M$. E para $n = M + 1, M + 2, \dots$, será que há descontinuidades? Considerem os intervalos $(\frac{1}{M+1}, \frac{1}{M})$ e $(\frac{1}{M+2}, \frac{1}{M+1})$. Note que,

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{M+1})^+} h(x) = \frac{1}{M}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{M+1})^-} h(x) = \frac{1}{M+1},$$

ou seja, h é descontínua em $n = M + 1$, contradição.

Motivado pelo estudo de funções seccionalmente contínuas, agora definiremos funções seccionalmente diferenciáveis.

Definição 1.3. uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente diferenciável se f e f' são seccionalmente contínuas.

Exemplo 1.7. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é contínua, mas não é seccionalmente diferenciável. De fato, note que f' é definida por

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é derivável no ponto $(x = 0)$, mas nenhum dos limites laterais da derivada em $x = 0$ existe.

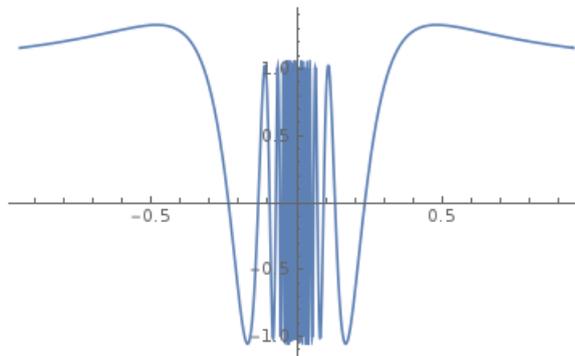


Figura 4 – Gráfico da função f' .

1.3.3 O Teorema de Fourier

Agora enunciaremos o Teorema de Fourier, que fornece condições suficientes para a convergência da Série de Fourier.

Teorema 1.1 (Teorema de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a Série de Fourier da função f , converge para $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ em cada ponto x , isto é,*

$$\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (1.10)$$

onde,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0;$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1,$$

e $f(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h)$, $f(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x+h)$ são os limites laterais, direito e esquerdo, de f em x , respectivamente.

Observe que, se f é contínua em x , então a média dos limites laterais de f em x é exatamente igual a $f(x)$. A demonstração desse Teorema será feita no capítulo 2, no momento, iremos aplicá-lo.

Exemplo 1.8. (Onda quadrada) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -L < x < 0, \\ 1, & \text{se } 0 < x < L, \end{cases}$$

periódica de período $2L$. Temos,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \int_0^L f(x) dx = L,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L = 0, \quad n > 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L = \frac{L}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{2L}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Portanto,

$$f(x) \sim \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{L},$$

onde a expressão do lado direito é a Série de Fourier de f . Note que, não usamos a igualdade, por não saber se a Série de Fourier de f acima converge uniformemente.

Para valores de descontinuidades ($x = kL, k \in \mathbb{Z}$), os senos se anulam e a Série de Fourier de f tem valor igual a $\frac{L}{2}$, o que é exatamente a média dos limites laterais nestes pontos. Nos demais pontos, a Série de Fourier converge para f .

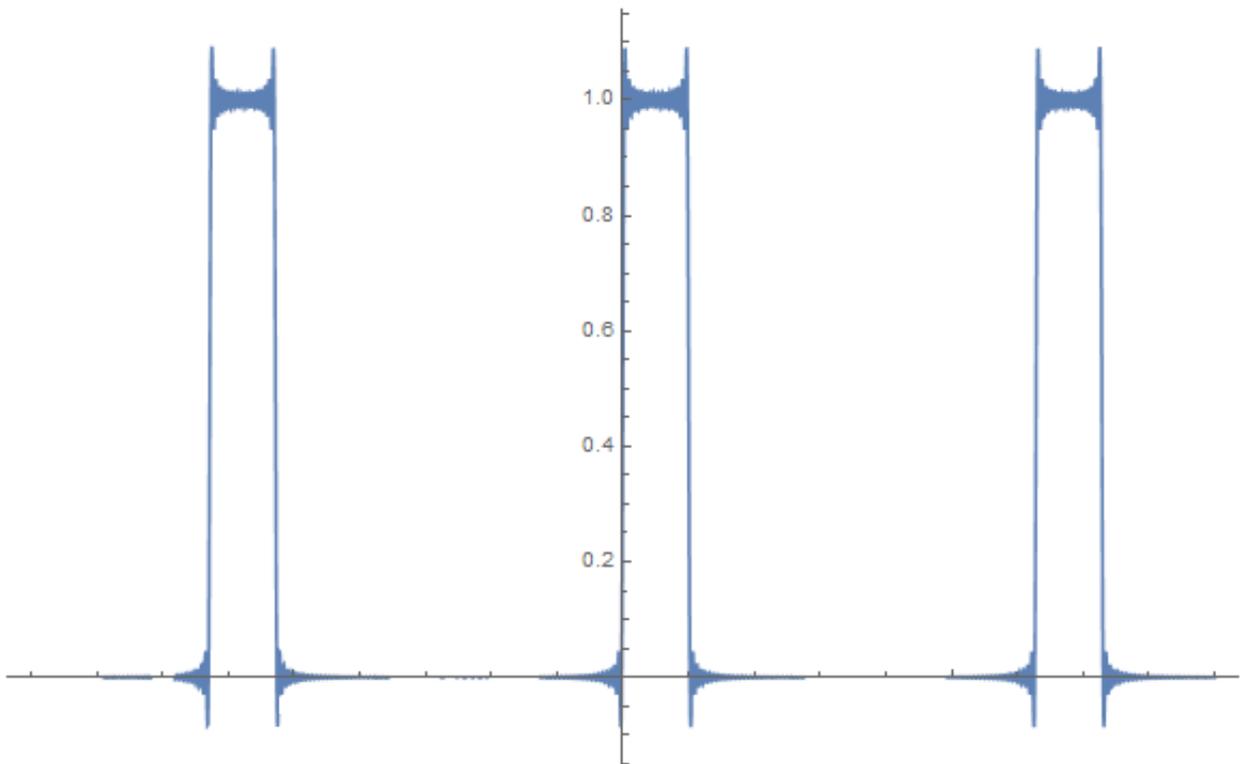


Figura 5 – Gráfico da Série de Fourier de f truncada em $n = 100$.

1.3.4 Estimativas dos Coeficientes de Fourier

Se f possuir maior regularidade, é possível provar diretamente que a sua Série de Fourier converge sem recorrer ao Teorema de Fourier. A ideia é obter estimativas para os coeficientes de Fourier e então usar o teste da comparação para concluir que a Série de Fourier converge. Esse resultado terá papel importante na demonstração da convêrgencia uniforme do Teorema de Fourier.

Suponha que f é uma função periódica de período $2L$, \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Logo, pela

Proposição (1.2), temos

$$|a_n| \leq M_0 \quad \text{e} \quad |b_n| \leq M_0, \quad \text{para todo } n, \quad (1.11)$$

onde $M_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx$.

Agora, suponha f periódica de período $2L$, derivável em $[-L, L]$, e tal que a derivada f' pertença a \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Então, integrando por partes (1.8), temos para $n > 0$

$$La_n = \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{n\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

ou seja,

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{1}{n\pi} b'_n, \quad (1.12)$$

onde $b'_n = \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$. Tomando os valores absolutos,

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

De modo análogo com (1.9), obtém-se

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{n\pi} a'_n, \quad (1.13)$$

onde $a'_n = \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$. Tomando valores absolutos

$$|b_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

Seja

$$M_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx,$$

daí

$$|a_n| \leq \frac{M_1}{n} \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{M_1}{n}, \quad \text{para } n > 0. \quad (1.14)$$

No caso, a'_n e b'_n designam os coeficientes da Série de Fourier de f' .

De outro lado, quando consideramos f periódica de período $2L$ e f'' uma função \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$, podemos integrar (1.8) por partes duas vezes para obter

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \left[-f'(x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right],$$

logo,

$$|a_n| \leq \frac{1}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx.$$

De modo análogo com (1.9), obtém-se

$$|b_n| \leq \frac{1}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx.$$

Fazendo

$$M_2 = \frac{1}{\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx,$$

temos

$$|a_n| \leq \frac{M_2}{n^2} \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{M_2}{n^2}, \quad \text{para } n > 0. \quad (1.15)$$

Nestas condições, sem usar o Teorema de Fourier, concluímos pelo teste da comparação que a Série de Fourier converge, pois a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

Os cálculos acima mostram ainda que é possível calcular os coeficientes de Fourier das derivadas de uma função a partir dos coeficientes de Fourier da própria função, em certas condições, sem que haja a necessidade de calcular novas integrais.

1.3.5 Forma Complexa da Série de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$, então a Série de Fourier de f pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

onde $C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx$, com $n \in \mathbb{Z}$. De fato, pela fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

que decorre imediatamente,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Note que,

$$\begin{aligned} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} &= a_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2} + b_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i} \\ &= \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-i\frac{n\pi x}{L}}. \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes C_n da Série de Fourier são dados por

$$C_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) dx,$$

e definimos

$$C_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2}.$$

Por fim, concluímos que,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

com $C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx$, para $n \in \mathbb{Z}$.

2 Convergência da Série de Fourier

Neste segundo capítulo daremos condições suficientes para a convergência pontual e uniforme da Série de Fourier.

2.1 Convergência Pontual

Agora enunciaremos uma expressão que será bem conveniente para o nosso estudo:

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \sum_{k=-n}^n e^{\frac{ik\pi x}{L}}, \quad (2.1)$$

conhecida como **Núcleo de Dirichlet**.

Podemos enxergar 2.1 como uma função definida $D : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, onde decorre algumas propriedades, que serão úteis:

1. $D_n(x)$ é uma função par;
2. $D_n(x)$ é uma função contínua;
3. $D_n(x)$ é uma função periódica de período $2L$;
4. $D_n(0) = \frac{(n+\frac{1}{2})}{L}$;
5. $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$;

Para verificar a propriedade (1), basta ver que $D_n(-x) = D_n(x)$, ou seja, satisfaz a definição de função par, e como $f(x) = e^{\frac{ik\pi x}{L}}$ é uma função contínua, segue que, a soma de funções contínuas é uma função contínua, ou seja, $D_n(x)$ é contínua, logo a propriedade (2) é verificada. Com procedimentos e manipulações simples de cálculos, verifica-se as demais propriedades.

Proposição 2.1. Dado $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\text{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right]}{\text{sen}\frac{\pi x}{2L}}, \quad (2.2)$$

para $x \neq 2kL$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Pondo $w = e^{\frac{i\pi x}{L}}$, então

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \sum_{k=-n}^n e^{\frac{ik\pi x}{L}} = \frac{1}{2L} \left(\sum_{k=-n}^{-1} w^k + \sum_{k=0}^n w^k \right) = \frac{1}{2L} \left(\sum_{k=1}^n w^{-k} + \sum_{k=0}^n w^k \right).$$

Efetuada as somas geométricas, teremos

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \left(\frac{w^{-n} - 1}{1 - w} + \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} \right) = \frac{1}{2L} \left(\frac{w^{-n} - w^{n+1}}{1 - w} \right).$$

Agora, multiplicando numerador e denominador por $\frac{w^{-\frac{1}{2}}}{2i}$, concluímos que

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{w^{-(n+\frac{1}{2})} - w^{(n+\frac{1}{2})}}{\frac{w^{-\frac{1}{2}} - w^{\frac{1}{2}}}{2i}}.$$

Retomando a variável, obtemos

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{L}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{L}}}{\frac{e^{-\frac{i\pi x}{2L}} - e^{\frac{i\pi x}{2L}}}{2i}}$$

Por fim, usando a fórmula de Euler

$$D_n(x) = \frac{\text{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right]}{\text{sen}\frac{\pi x}{2L}}$$

□

A demonstração do Teorema 1.1 para um ponto fixado x , convergência pontual, será feita ao longo dessa seção. Inicialmente faremos uso dos lemas *Riemann-Lebesgue* e do *Teste de Dini*.

Apenas enunciaremos o Teorema a seguir cuja demonstração pode ser encontrada em [1].

Teorema 2.1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em \mathcal{L}^1 . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \varepsilon,$$

$$\psi(a) = \psi(b) = 0.$$

Lema 2.1 (Riemann-Lebesgue). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em \mathcal{L}^1 no intervalo $[a, b]$. Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0 \quad (2.3)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{cos}(tx) dx = 0. \quad (2.4)$$

Demonstração. (i) Inicialmente suponha que f seja limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$, para $x \in [a, b]$. Considere a partição $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$ determinada pelos pontos $x_j = a + \frac{j}{n}(b - a)$, para $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Então

$$\int_a^b f(x) \operatorname{cos}(tx) dx = \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{cos}(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{cos}(tx) dx. \quad (2.5)$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{cos}(tx) dx \right| &= \left| \frac{\operatorname{sen}(tx)}{t} \right|_{x_{j-1}}^{x_j} \\ &= \left| \frac{\operatorname{sen}(tx_j) - \operatorname{sen}(tx_{j-1})}{t} \right| \\ &\leq \frac{1}{t} + \frac{1}{t} = \frac{2}{t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

e que

$$|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j, \quad (2.7)$$

onde $m_j = \inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$ e $M_j = \sup\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$.

Usando as estimativas (2.6) e (2.7) em (2.5), obtemos

$$\left| \int_a^b f(x) \cos(tx) dx \right| \leq \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}). \quad (2.8)$$

E note que, o somatório em (2.8) é exatamente a diferença $S[f, \mathcal{P}] - s[f, \mathcal{P}]$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, tome n tal que essa diferença seja menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, isto é,

$$S[f, \mathcal{P}] - s[f, \mathcal{P}] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para o n fixado, tome t_0 tal que $\frac{2nM}{t_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ e para todo $t \geq t_0$, temos que

$$\left| \int_a^b f(x) \cos(tx) dx \right| < \varepsilon.$$

Para a demonstração de (2.3) o processo é de modo análogo.

(ii) Suponhamos agora que f seja uma função em \mathcal{L}^1 . Dado $\varepsilon > 0$, tome uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.9)$$

usando para tal o Teorema 2.1. Note que toda função contínua num intervalo compacto é limitada e integrável, ou seja, $\psi(x) \cos(tx)$ é contínua e portanto limitada e integrável no intervalo compacto $[a, b]$. Logo, podemos aplicar a parte (i) da demonstração e concluir que existe t_0 , tal que $t > t_0$, se tem

$$\left| \int_a^b \psi(x) \cos(tx) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.10)$$

Agora, como

$$\int_a^b f(x) \cos(tx) dx = \int_a^b \psi(x) \cos(tx) dx + \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \cos(tx) dx,$$

tem-se das estimativas (2.9) e (2.10) que

$$\left| \int_a^b f(x) \cos(tx) dx \right| \leq \left| \int_a^b \psi(x) \cos(tx) dx \right| + \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \varepsilon.$$

□

Inicialmente nos ateremos na convergência pontual da função f no Teorema 1.1. Seja $x \in \mathbb{R}$, fixado, e considere a diferença

$$e_n(x) := s_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad (2.11)$$

onde a soma parcial $s_n(x)$ é dada por

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{\frac{ik\pi x}{L}},$$

com $C_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{ik\pi x}{L}} dx$.

De início, vamos escrever a soma parcial $s_n(x)$ de modo mais conveniente com o propósito de obter majorações para $e_n(x)$.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{\frac{ik\pi x}{L}} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-\frac{ik\pi y}{L}} dy \\ &= \int_{-L}^L f(y) \frac{1}{2L} \sum_{k=-n}^n e^{\frac{ik\pi(x-y)}{L}} dy \\ &= \int_{-L}^L f(y) D_n(x-y) dy, \end{aligned}$$

onde $D_n(x-y)$ é o *Núcleo de Dirichlet*. Fazendo a mudança de variável $y = x - t$, obtemos

$$s_n(x) = \int_{-L}^L f(y) D_n(x-y) dy = \int_{-L+x}^{L+x} D_n(t) f(x-t) dt.$$

Como D_n e f são funções periódicas de período $2L$, a soma parcial $s_n(x)$ pode ser escrita como

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(t) f(x-t) dt.$$

Usando o fato de $D_n(t)$ ser uma função par, temos

$$s_n(x) = \int_{-L}^0 D_n(t) f(x-t) dt + \int_0^L D_n(t) f(x-t) dt,$$

finalmente podemos escrever

$$s_n(x) = \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt. \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) em (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} e_n(x) &= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\ &= \int_0^L D_n(t) \left\{ [(x+t) - f(x^+)] + [f(x-t) - f(x^-)] \right\} dt. \end{aligned}$$

Definindo a função

$$g(x, t) = [f(x+t) - f(x^+)] + [f(x-t) - f(x^-)],$$

temos que

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t) g(x, t) dt. \quad (2.13)$$

Agora, enunciamos o resultado que garantirá a convergência pontual da Série de Fourier para um ponto fixado x .

Lema 2.2 (Teste de Dini). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, com f em \mathcal{L}^1 no intervalo $[-L, L]$. Fixado x em $[-L, L]$, suponha que $f(x^+)$ e $f(x^-)$ existam e que exista η tal que*

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty. \quad (2.14)$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = 0.$$

Demonstração. Usando (2.2) na decomposição da expressão (2.13) em duas partes, temos

$$e_n(x) = \int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(t, x)}{t} dt + \int_\delta^L \frac{1}{2L} \frac{\text{sen}[(n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}]}{\text{sen} \frac{\pi t}{2L}} g(x, t) dt,$$

com $\delta \in [0, L]$.

Inicialmente tomaremos a primeira integral e tornando δ suficientemente pequeno.

Temos que,

$$|t D_n(t)| \leq \frac{t}{2L \text{sen} \frac{\pi t}{2L}},$$

e como a função

$$h(t) = \frac{t}{2L \text{sen} \frac{\pi t}{2L}}$$

é contínua e crescente em $[0, L]$, obtemos a estimativa

$$|tD_n(t)| \leq \frac{1}{2},$$

para $t \in [0, L]$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta < \min\{L, \eta\}$, tal que

$$\left| \int_0^\delta tD_n(t) \frac{g(t, x)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(t, x)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.15)$$

o que é garantido pela hipótese do lema.

Agora, com o δ fixado, considere a função

$$w(t) = \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}},$$

com $t \in [\delta, L]$.

Note que, a expressão $2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}$, é não nula em $[\delta, L]$, logo w é contínua no intervalo $[\delta, L]$, portanto w é integrável em todo intervalo $[\delta, L]$. Portanto, para um n suficientemente grande e usando o Lema (2.1)

$$\left| \int_\delta^L \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen}[(n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{L}]}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} g(x, t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.16)$$

A partir de (2.15) e (2.16), concluímos que

$$|e_n(x)| < \varepsilon.$$

Donde segue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = 0.$$

□

Iremos fazer uma verificação rápida de que a condição da hipótese do Lema (2.2) é satisfetida em um número grande de funções, vejamos:

Exemplo 2.1. Seja f uma função **Hölder** contínua, ou seja, quando existem constantes reais $0 < \alpha \leq 1$, $\delta > 0$ e $K > 0$ tais que

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^\alpha \quad (2.17)$$

para $t, s \in [x - \delta, x + \delta]$. $\alpha = 1$, então a função f satisfaz a condição de Lipschitz, critério usado sobre a continuidade de uma função na reta. Daí, (2.17) garante que f é contínua em x , portanto $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$, logo

$$|g(x, t)| \leq |f(x + t) - f(x)| + |f(x - t) - f(x)|,$$

usando (2.17), obtemos

$$|g(x, t)| \leq 2Kt^\alpha.$$

Então,

$$\int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt \leq 2K \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt < \infty,$$

o que verifica a hipótese do Lema (2.2).

Exemplo 2.2. Seja $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo compacto \mathcal{I} . Se existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq K$ para todo $x \in \mathcal{I}$, então a desigualdade (2.17) se verifica para $\alpha = 1$. De fato, sejam $x, y \in \mathcal{I}$, f é contínua no intervalo fechado cujas extremidades são x e y e é derivável no intervalo aberto correspondente. Logo, existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y),$$

como $|f'(c)| \leq K$, temos que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq K|x - y|,$$

o que segue imediatamente do Exemplo (2.1).

Nessas condições é fácil ver que a condição da hipótese do Lema Teste de Dini se verifica. Portanto, a demonstração do Teorema de Fourier, 1.1, é dada imediatamente a partir do Lema (2.2).

2.2 Convergência Uniforme

Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de quadrado integrável, se f e $|f|^2$ forem integráveis. Usaremos a nomenclatura \mathcal{L}^2 para designar tal conjunto de função de quadrado integrável.

A partir do que foi enunciado, podemos observar:

1. Se f for limitada e Riemann integrável, então f está em \mathcal{L}^2 . De fato, sendo f limitada e integrável, tem-se que $|f|$ é integrável, por outro lado, $|f| \cdot |f|$ também é integrável, ou seja, $|f|^2$ é integrável. E como f é limitada, temos

$$|f| \leq M, \text{ então } |f|^2 \leq M^2,$$

onde $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$, por fim, temos

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq M^2(b-a).$$

2. No caso de f não ser limitada, pode acontecer que f esteja em \mathcal{L}^1 , mas f não pertence a \mathcal{L}^2 . De fato, tome o exemplo: $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, para $0 < x < 1$. Note que,

$$\int_0^1 |x^{-\frac{1}{2}}| dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2,$$

temos que, f pertence a \mathcal{L}^1 . Por outro lado,

$$\int_0^1 |x^{-\frac{1}{2}}|^2 dx = \int_0^1 x^{-1} dx = \infty.$$

Portanto, f não pertence a \mathcal{L}^2 .

Agora enunciaremos as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Minkowski as quais serão úteis nas demonstrações dos resultados que estão ao longo dessa seção.

Proposição 2.2. *Sejam $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ dois vetores de \mathbb{R}^n . As desigualdades para vetores do \mathbb{R}^n ,*

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

e

$$\left[\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

são respectivamente, as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Minkowski.

Notemos que, toda função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com f em \mathcal{L}^2 , é uma função em \mathcal{L}^1 . De fato, sejam f e g funções em \mathcal{L}^2 no intervalo $[a, b]$, usando a desigualdade (2.18) temos

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

Daí, $f \cdot g$ é absolutamente integrável, já que f e g são funções em \mathcal{L}^2 . Fazendo $g(x) \equiv 1$ em (2.20), obtemos

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

ou seja, f é uma função em \mathcal{L}^1 .

Na seção anterior vimos que o Teorema 2.1, consegue-se aproximar, uma função f em \mathcal{L}^1 , por uma função ψ contínua. E se f for uma função \mathcal{L}^2 , será que existe uma função ψ contínua, dentro das hipóteses do Teorema 2.1? A resposta é afirmativa.

Teorema 2.2. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em \mathcal{L}^2 . Então existe uma sucessão de funções contínuas $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$, tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

A demonstração pode ser encontrada em [1].

2.2.1 Desigualdade de Bessel

Queremos agora estudar como as somas parciais da Série de Fourier aproximam a função. Como consequência, obteremos uma desigualdade que será importante no estudo da convergência uniforme da série de Fourier.

Definição 2.1. *Seja $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, com f em \mathcal{L}^2 no intervalo $[-L, L]$. O erro quadrático médio na aproximação de f pelas somas parciais da Série de Fourier é definido por*

$$E_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x) - s_n(x)|^2 dx, \quad (2.21)$$

onde $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sen \frac{k\pi x}{L} \right)$.

Teorema 2.3. *Seja $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, com f em \mathcal{L}^2 no intervalo $[-L, L]$. Então*

$$E_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \quad (2.22)$$

Demonstração. A partir de (2.21), temos

$$E_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) s_n(x) dx + \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |s_n(x)|^2 dx. \quad (2.23)$$

Para obter o resultado, observe que em (2.23), a segunda integral é

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) s_n(x) dx &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &= \frac{a_0}{2} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^n b_k \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Enquanto que em (2.23), usando as relações de ortogonalidade, a terceira integral é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |s_n(x)|^2 dx &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{a_0^2}{4} dx + \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \cos^2 \frac{k\pi x}{L} dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^n b_k^2 \cdot \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \sin^2 \frac{k\pi x}{L} dx \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

□

Colorário 2.1 (Desigualdade de Bessel). *Seja $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, com f em \mathcal{L}^2 no intervalo $[-L, L]$. Então,*

$$\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (2.24)$$

Demonstração. Por (2.21), $E_n \geq 0$, agora tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ em (2.22), temos o resultado. □

As somas parciais $s_n(x)$ da Série de Fourier de uma função f são os polinômios trigonométricos que melhor aproximam f .

Proposição 2.3. *Considere o polinômio trigonométrico de ordem n*

$$\tilde{s}_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right),$$

onde $c_k, d_k \in \mathbb{R}$ são coeficientes quaisquer, e se definirmos o erro quadrático médio com relação a este polinômio trigonométrico por

$$\tilde{E}_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx,$$

então

$$E_n \leq \tilde{E}_n.$$

Demonstração. De fato, aplicando os procedimentos usados na demonstração do Teorema 2.3, obtemos

$$\tilde{E}_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{c_0 a_0}{2} + \frac{c_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2 + d_k^2 - 2c_k a_k - 2d_k b_k.$$

Agora, completando quadrados, temos

$$\tilde{E}_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx + \frac{1}{4}(c_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (d_k - b_k)^2 - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2.$$

Note que o menor valor de \tilde{E}_n será obtido quando $c_0 = a_0, c_k = a_k, d_k = b_k$ para $k = 1, \dots, n$. Neste caso, \tilde{E}_n coincide com E_n . Portanto, em geral, temos que

$$E_n \leq \tilde{E}_n.$$

□

Teorema 2.4 (Teste M de Weierstrass). *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série de funções reais definidas em conjunto X . Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$, para todo $x \in X$ e a sua $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge. Então, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente.*

Demonstração. Para cada $x \in X$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente pelo teste da comparação. Logo, podemos definir uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Vamos provar que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente para f em X . Para todo $x \in X$, escreva

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^k f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} M_n.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $k > k_0$ então,

$$\sum_{n=k_0+1}^{\infty} M_n < \varepsilon.$$

□

Teorema 2.5 (Primeiro Teorema sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier).
Seja f uma função periódica de período $2L$, contínua e com primeira derivada em \mathcal{L}^2 .
Então, a Série de Fourier de f converge uniformemente para f .

Demonstração. Suponha f contínua e periódica de período $2L$. Considere também sua primeira derivada uma função em \mathcal{L}^2 . Das relações (1.12) e (1.13) de estimativas dos coeficientes da Série de Fourier, obtemos

$$a_n = -\frac{L}{\pi n} b'_n$$

e

$$b_n = -\frac{L}{\pi n} a'_n,$$

onde $b'_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$ e $a'_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$. Nesse caso, a'_n e b'_n designam os coeficientes da Série de Fourier de f' . Note que,

$$\left| a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right| \leq |a_n|$$

e

$$\left| b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \leq |b_n|,$$

logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|. \quad (2.25)$$

Portanto a reduzida de ordem n da série (2.25) é

$$\sum_{j=1}^n |a_j| + |b_j| = \frac{L}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} |a'_j| + |b'_j|. \quad (2.26)$$

Fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz em (2.26), obtemos

$$\frac{L}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} |a'_j| + |b'_j| \leq \frac{L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.27)$$

Novamente, da desigualdade de Cauchy-Schwarz no segundo fator de (2.27) temos

$$\left(\sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \left(\sum_{j=1}^n |a'_j|^2 + |b'_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.28)$$

De (2.27) e (2.28), e substituindo em (2.26) obtemos

$$\sum_{j=1}^n |a_j| + |b_j| \leq \sqrt{2} \frac{L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{j=1}^n |a'_j|^2 + |b'_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

Portanto, a série (2.25) é majorada por

$$\sqrt{2} \frac{L}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{j=1}^{\infty} |a'_j|^2 + |b'_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

onde $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ converge, pois trata-se de uma p-série, com $p = 2$. E por outro lado, $\left[\sum_{j=1}^{\infty} |a'_j|^2 + |b'_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ converge em virtude da desigualdade de Bessel. Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$$

é convergente e, pelo Teorema (2.4),

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

converge uniformemente para f .

□

Antes de enunciar o Teorema que garante a convergência uniforme da Série de Fourier em hipóteses mais abrangentes, enunciaremos e demonstraremos um lema, que será conveniente para a demonstração de tal teorema.

Lema 2.3. *Seja ψ a função periódica de período $2L$ assim definida:*

$$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{L}\right), & \text{se } -L \leq x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{L}\right), & \text{se } 0 < x \leq L. \end{cases} \quad (2.30)$$

Então, a Série de Fourier de ψ converge uniformemente para ψ em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma $2Ln$, para n inteiro.

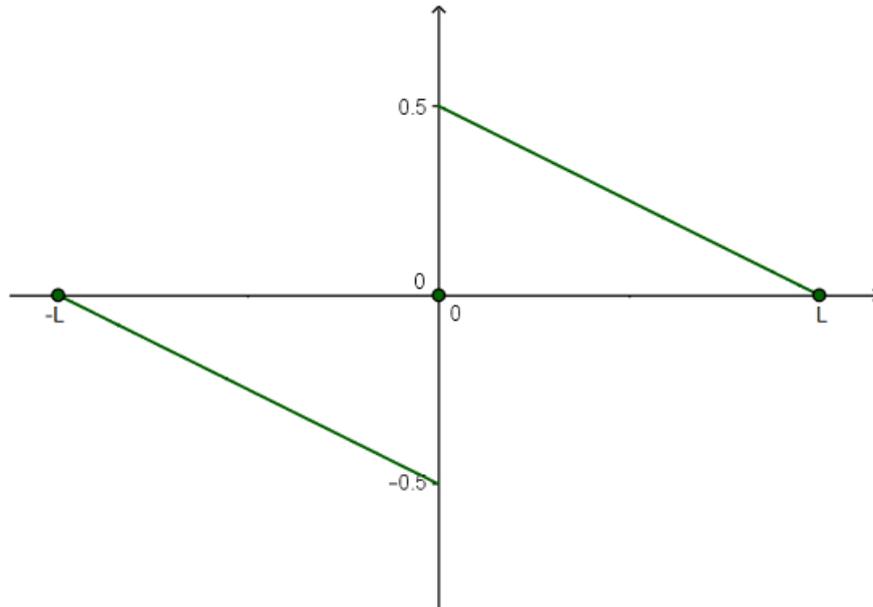


Figura 6 – Gráfico da função ψ no intervalo $[-L, L]$.

Demonstração. Inicialmente vamos determinar a Série de Fourier da função ψ definida em (2.30). Notamos que ψ é uma função ímpar, logo os coeficientes da Série de Fourier podem ser determinados da seguinte maneira:

$$a_n = 0 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

da última expressão, fazendo os cálculos necessários, obtemos que,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{n\pi}.$$

Logo, a Série de Fourier da função Ψ é

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (2.31)$$

cuja representação complexa é

$$-\frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}, \quad \text{onde} \quad \theta = \frac{\pi x}{L}. \quad (2.32)$$

Para demonstração do lema, a Série (2.32) tem que convergir uniformemente. Para tal, usaremos o critério de Cauchy, daí, basta mostrar que, para $\theta \in [\varepsilon, \pi]$, e dado $\varepsilon > 0$, existir um N tal que

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n > m \geq N.$$

Considere

$$P_n(\theta) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}. \quad (2.33)$$

Note que,

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} [P_k(\theta) - P_{k-1}(\theta)], \quad (2.34)$$

por outro lado,

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} P_{k-1}(\theta) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{1}{j+1} P_j(\theta).$$

Agora usaremos um artifício conhecido como a "Fórmula de Abel de adição por partes". Que consiste em, se (a_n) e (b_n) são duas sucessões e $(B_n = \sum_{k=1}^n b_k)$, então para $1 < m < n$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n b_k a_k &= \sum_{k=m}^n (B_k - B_{k-1}) a_k = \sum_{k=m}^n B_k a_k - \sum_{k=m}^n B_{k-1} a_k \\ &= \sum_{k=m}^n B_k a_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} B_k a_{k+1} \\ &= B_n a_n + \sum_{k=m}^{n-1} B_k a_k - B_{m-1} a_m - \sum_{k=m}^{n-1} B_k a_{k+1}, \end{aligned}$$

de modo que a "Fórmula de Abel de adição por partes" é dada por

$$\sum_{k=m}^n b_k a_k = \sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) B_k + B_n a_n - B_{m-1} a_m. \quad (2.35)$$

Aplicando (2.35) em (2.34) obtemos,

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) P_k(\theta) + \frac{1}{n} P_n(\theta) - \frac{1}{m} P_{m-1}(\theta). \quad (2.36)$$

Para majorar a soma parcial $P_n(\theta)$ usaremos um argumento similar àquele usado na demonstração da Proposição (2.1), para $0 < \theta < 2\pi$, temos

$$|P_n(\theta)| = \left| \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}|} = \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Portanto, a partir (2.36), temos

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \left[\sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right] = \frac{2}{m \sin \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{n(n+1) \sin \frac{\theta}{2}}$$

logo, para $0 < \varepsilon \leq \theta \leq \pi$, temos que

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{2}{m \sin \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{1}{n(n+1) \sin \frac{\varepsilon}{2}},$$

o que implica, pelo critério de Cauchy, a convergência uniforme de (2.32). \square

Finalmente enunciaremos o Teorema que garante a convergência uniforme da Série de Fourier em condições mais gerais.

Teorema 2.6 (Segundo Teorema sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier). *Seja f uma função periódica de período $2L$, seccionalmente contínua e tal que a derivada primeira é uma função em \mathcal{L}^2 . Então, a Série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f .*

Demonstração. Sejam x_1, x_2, \dots, x_k , os pontos do intervalo $[-L, L)$, onde f é descontínua. Considerem $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ os saltos da f nesses pontos de descontinuidade, isto é, $\omega_j = f(x_j^+) - f(x_j^-)$. Logo, a função $\omega_j \psi(x - x_j)$ é descontínua nos mesmos pontos da função ψ , ou seja, pontos da forma $2Ln$, com n inteiro, e o salto nesses pontos é ω_j . Então, a função $f(x) - \omega_j \psi(x - x_j)$ é contínua nesses pontos e nos demais onde f já é contínua. Desse modo, temos uma função com menos descontinuidades que a função original f . Seguindo o mesmo procedimento, eliminamos todas as descontinuidades da função f . Obtemos assim uma função g contínua para todo x , dada por

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^k \omega_j \psi(x - x_j).$$

Pelo Teorema (2.5) a Série de Fourier de g converge uniformemente para g , em toda a reta. E pelo Lema (2.3), a Série de Fourier da função $\psi(x - x_j)$ converge uniformemente em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma $2Ln$. Como a Série de Fourier de f é a soma das Séries de Fourier das funções g e $\omega_j \psi(x - x_j)$, para $j = 1, 2, \dots, k$, segue que a Série de Fourier de f converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha pontos da forma $2Ln$, para n inteiro, que são os pontos de descontinuidade da f . □

2.2.2 O Teorema de Fejér

Ao invés de considerarmos as somas parciais da Série de Fourier, vamos aproximar a função através das médias aritméticas das somas parciais. A utilidade do conceito está na existência de séries divergentes tais que as médias aritméticas de suas somas parciais formam uma sequência convergente. Quando uma série converge no sentido de que as médias aritméticas das reduzidas converge, dizemos que ela é *Cesàro-somável*.

Exemplo 2.3. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ é divergente, mas a sequência das médias aritméticas de suas somas parciais é a sequência (σ_n)

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \dots,$$

onde (σ_n) é definida por

$$\sigma_{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \quad \text{e} \quad \sigma_{2n} = \frac{n}{2n},$$

que converge para $\frac{1}{2}$. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ é Cesàro-somável.

A partir do exemplo acima perguntamos se toda série numérica convergente é Cesàro-somável? O próximo resultado garante que a resposta é afirmativa.

Proposição 2.4. *Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para s , então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é Cesàro-somável para s .*

Demonstração. Dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, onde $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Considerem as médias aritméticas das reduzidas, isto é, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k$, queremos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = s$. De fato,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k - s \right| &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n (s_k - s) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |s_k - s| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^l |s_k - s| + \frac{1}{n} \sum_{k=l+1}^n |s_k - s|. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha l de modo que para todo $k > l$, $|s_k - s| < \frac{\varepsilon}{2}$, pois $s_k \rightarrow s$. Agora com l fixo, escolha N suficientemente grande para que $n > N$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^l |s_k - s| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k - s \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^l |s_k - s| + \frac{1}{n} \sum_{k=l+1}^n |s_k - s| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n-l)\frac{\varepsilon}{2}}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k$ converge, e para s . Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é Cesàro-somável para s .

□

Isso mostra que o conceito de somabilidade à Cesàro é interessante, pois ele torna somáveis séries que divergem, sem perturbar aquelas que já convergem.

Sabemos que uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica de período $2L$, tem sua Série de Fourier, onde a mesma nem sempre converge. Perguntamos se ela não seria *Cèsaro-somável*? Fejér respondeu positivamente essa questão, em 1904. O resultado de Fejér será uma ferramenta importante na demonstração da identidade de Parseval, além de servir para provar outros resultados sobre Série de Fourier. As médias aritméticas das somas parciais da Série de Fourier recebem o nome de *Somas de Fejér*.

Definição 2.2. Denote por

$$s_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right)$$

as somas parciais da Série de Fourier de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente contínua e periódica de período $2L$. Definimos as **Somas de Fejér** por

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(x).$$

Lembrando que as somas parciais da Série de Fourier podem ser escritas na forma

$$s_n(x) = \int_{-L}^L f(t) D_n(x-t) dt,$$

onde D_n é o Núcleo de Dirichlet (definimos $D_0 = 1$ para abranger também o caso $n = 0$), obtemos a seguinte expressão para as Somas de Fejér

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-L}^L f(t) D_k(x-t) dt = \int_{-L}^L f(t) \left[\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x-t) \right] dt. \quad (2.37)$$

Isso sugere definir o **Núcleo de Fejér**

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x). \quad (2.38)$$

Lema 2.4. *O Núcleo de Fejér é uma função par, contínua, periódica de período $2L$ que pode ser expressa como*

$$F_n(x) = \frac{1}{2L(n+1)} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}} \right]^2 \quad (2.39)$$

Para $x \neq 2kL$, com $k \in \mathbb{Z}$ e tal que

$$\int_{-L}^L F_n(t) dt = 1 \quad e \quad (2.40)$$

$$F_n(0) = \frac{n+1}{L}. \quad (2.41)$$

Demonstração. Demonstraremos apenas a primeira identidade, já que as outras identidades e demais propriedades do Núcleo de Fejér seguem diretamente da definição e das propriedades correspondentes do Núcleo de Dirichlet.

Pela Proposição 2.1, temos

$$F_n(x) = \frac{1}{2L(n+1) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} \sum_{k=0}^n \operatorname{sen} \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi x}{L}.$$

Para calcular

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{sen} \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi x}{L} = \sum_{k=0}^n \operatorname{sen} \left(k + \frac{1}{2}\right) \theta, \quad (2.42)$$

para $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Agora, observe que (2.42) é representada pela parte imaginária de

$$\operatorname{Im} \sum_{k=0}^n e^{i\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta} = \operatorname{Im} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right) = \operatorname{Im} \left[e^{\frac{i\theta}{2}} \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[e^{\frac{i\theta}{2}} \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right] &= \operatorname{Im} \left[\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[\frac{1 - \cos(n+1)\theta - i \operatorname{sen}(n+1)\theta}{-2i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[\frac{i - i \cos(n+1)\theta + \operatorname{sen}(n+1)\theta}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \right] \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)\theta}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{(n+1)\theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Tomando $\theta = \frac{\pi x}{L}$, segue que

$$F_n(x) = \frac{1}{2L(n+1) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} = \frac{1}{2L(n+1)} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}} \right]^2.$$

□

Teorema 2.7 (Teorema de Fejér). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, limitada e seccionalmente contínua em $[-L, L]$. Então,*

1. *para cada x ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)],$$

2. *a sucessão (σ_n) converge uniformemente para f em todo intervalo fechado \mathcal{I} que não contenha pontos de descontinuidade de f .*

Demonstração. Usando a expressão (2.12),

$$s_n(x) = \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt$$

e a definição do núcleo de Fejér, obtemos

$$\sigma_n(x) = \int_0^L F_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt.$$

Daí, como o Núcleo de Fejér é uma função par

$$1 = \int_{-L}^L F_n(x) dx = 2 \int_0^L F_n(x) dx.$$

Temos

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \int_0^L F_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt \\ &\quad - \int_0^L [f(x^+) + f(x^-)] F_n(t) dt \\ &= \int_0^L g(x, t) F_n(t) dt, \end{aligned}$$

onde,

$$g(x, t) = [f(x+t) - f(x^+)] + [f(x-t) - f(x^-)].$$

Como f é seccionalmente contínua, portanto, $f(x^+)$ e $f(x^-)$ existem, logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x) > 0$ tal que $0 < t < \delta$ temos

$$|f(x+t) - f(x^+)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |f(x-t) - f(x^-)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ou seja,

$$|g(x, t)| < \varepsilon.$$

Além disso, como f é limitada, temos que

$$|g(x, t)| < M$$

se $\delta < t < L$, para alguma constante $M > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \sigma_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right| &\leq \int_0^L |g(x, t)| F_n(t) dt \\ &< \varepsilon \int_0^\delta F_n(t) dt + M \int_\delta^L F_n(t) dt \\ &\leq \varepsilon + M \int_\delta^L F_n(t) dt. \end{aligned}$$

Para terminar, basta provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^L F_n(t) dt = 0.$$

Para isso, observe que pelo lema 2.4,

$$0 \leq \left| \int_\delta^L F_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{2L(n+1)} \int_\delta^L \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi \delta}{2L}} dt < \frac{L - \delta}{2L \sin^2 \frac{\pi \delta}{2L}} \frac{1}{n+1}. \quad (2.43)$$

Aplicando o limite quando $n \rightarrow \infty$ em (2.43), obtemos o resultado.

Finalmente, se f é contínua, então f é uniformemente contínua em $[-L, L]$ e portanto o mesmo δ pode ser tomado para todo $x \in \mathbb{R}$, logo a convergência é uniforme. \square

Nesse momento observamos que o Teorema de Fejér é mais forte do que os Teoremas de Fourier sobre convergência pontual e uniforme, não apenas analisando as hipóteses de cada Teorema, mas também como se dar a convergência das Séries de Fourier, isto é, toda série convergente é Cesàro-somável, porém a recíproca não é verdadeira.

Colorário 2.2 (Aproximação de Weierstrass). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua, definida no intervalo $[a, b]$. Então, existe uma sucessão de polinômios P_n que converge uniformemente para f em $[a, b]$.*

Demonstração. O resultado segue diretamente do item *ii*) do Teorema 2.7, uma vez que

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(x)$$

é um polinômio trigonométrico. \square

Agora mostraremos que o erro quadrático médio com relação às somas parciais da Série de Fourier tende a zero quando tomamos somas parciais cada vez maiores.

Teorema 2.8. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, com f em \mathcal{L}^2 no intervalo $[-L, L]$. Então, a Série de Fourier da função f converge em média quadrática para f , ou seja,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0,$$

$$\text{onde } E_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x) - s_n(x)|^2 dx$$

Demonstração. Iremos separar em dois casos:

(i) Suponha f uma função contínua. Pelo Teorema de Fejér, $\sigma_n \rightarrow f$ uniformemente, logo

$$\max_{-L \leq x \leq L} |\sigma_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Note que,

$$\int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx \leq 2L \left(\max_{-L \leq x \leq L} |\sigma_n(x) - f(x)| \right)^2,$$

segue que

$$\int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.44)$$

Por outro lado, como $\sigma_n(x)$ é um polinômio trigonométrico de ordem n , temos pela Proposição 2.3

$$E_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx,$$

e a partir de (2.44), temos $E_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

(ii) Agora suponha f uma função em \mathcal{L}^2 . Logo pela Proposição 2.2 f pode ser aproximada por funções contínuas ψ . E como f é periódica de período $2L$, segue que ψ também será. Sendo assim, existe uma função $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e periódica de período $2L$ tal que

$$\int_{-L}^L |f(x) - \psi(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (2.45)$$

Por outro lado, aplicando a primeira parte da demonstração para funções contínuas, segue-se a existência de n_0 , tal que $n > n_0$, temos

$$\int_{-L}^L |\psi(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad (2.46)$$

onde \tilde{s}_n representa a reduzida de ordem n da Série de Fourier de ψ . Agora, pela Desigualdade de Minkowski (2.19), tem-se

$$\left(\int_{-L}^L |f(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-L}^L |f(x) - \psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-L}^L |\psi(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, de (2.45) e (2.46) temos

$$\int_{-L}^L |f(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2 < \varepsilon, \quad \text{se } \varepsilon < 1.$$

Pela Proposição 2.3,

$$\int_{-L}^L |f(x) - s_n(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |f(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx < \varepsilon,$$

para $n > n_0$. Assim $E_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

□

Agora, obtemos um resultado mais forte que a Desigualdade de Bessel.

Colorário 2.3 (Identidade de Parseval). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, com f em \mathcal{L}^2 no intervalo $[-L, L]$. Então,*

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Demonstração. Segue imediatamente dos Teoremas 2.3 e 2.8.

□

2.2.3 Sistemas Ortogonais

Definição 2.3. Um conjunto de funções $\{\psi_n\} \subset \mathcal{L}^2([a, b])$ é chamado um *sistema ortogonal*, se ele satisfaz as duas condições seguintes:

1. $\int_a^b \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0$, se $n \neq m$,
2. $\left[\int_a^b \psi_n^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} = c_n \neq 0$.

Se $c_n = 1$ para todo n , então dizemos que $\{\psi_n\}$ é um *sistema ortonormal*.

Exemplo 2.4. O conjunto $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}_{n=0,1,2,3,4,\dots}$ é um sistema ortonormal. De fato, segue das relações de ortogonalidades.

Definição 2.4. Um sistema ortonormal $\{\psi_n\} \subset \mathcal{L}^2([a, b])$ é *completo*, se para uma função f em \mathcal{L}^2 no intervalo $[-L, L]$

$$\int_{-L}^L f \psi_n dx = 0, \quad \text{para todo } n, \tag{2.47}$$

então $f \equiv 0$.

Proposição 2.5. *O sistema trigonométrico $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}_{n=0,1,2,3,4,\dots}$ é completo.*

Demonstração. A partir da Identidade de Parseval, obtemos

$$\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = 0,$$

pois, neste caso (2.47) garante que todos os coeficientes da Série de Fourier de f se anulam.

Temos que $f \equiv 0$. De fato, se x_0 for um ponto de continuidade de f e $f(x_0) \neq 0$, então existirá $\delta > 0$ tal que para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ temos $f(x) \neq 0$. Logo,

$$0 < \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = 0,$$

contradição. □

Teorema 2.9 (Unicidade da Série de Fourier). *Sejam f e g funções periódicas de período $2L$, f e g em \mathcal{L}^2 no intervalo $[-L, L]$. Suponha que suas Séries de Fourier sejam as mesmas, então $f = g$.*

Demonstração. Considere $h = f - g$. Como os coeficientes de f e g são os mesmos, então

$$\int_{-L}^L h(x) \psi_n(x) dx = 0,$$

para todas as ψ_n do sistema trigonométrico. Logo, pela Proposição 2.5, $h = 0$. □

3 O Teorema de Equidistribuição de Weyl

Seja f uma função periódica no intervalo $[-L, L)$ de período $2L$. Por meio da mudança de coordenadas $w = 2Lx$, temos uma função $F(x) = f(w)$ a qual é periódica de período 1. Assim sem perda de generalidade podemos considerar f no intervalo $[0, 1)$ periódica de período 1.

Agora, aplicamos as ideias provenientes das Séries de Fourier a um problema que se encontra na fronteira dos Sistemas Dinâmicos com a Teoria dos Números. O mesmo refere-se à distribuição de números irracionais no intervalo $[0, 1)$. Antes de enunciar o resultado principal começamos com uma breve discussão de congruências.

Dado um número real x denotamos por $\langle x \rangle = x - [x]$ a parte fracionária de x , onde $[x]$ representa o maior inteiro menor do que ou igual a x . Note que, $\langle x \rangle \in [0, 1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, $[2, 6] = 2$ e $\langle 2, 6 \rangle = 0, 6$, bem como $[-3, 7] = -4$ e $\langle -3, 7 \rangle = 0, 3$.

Considere a seguinte relação de equivalência em \mathbb{R} . Dados x e y números reais, dizemos que são congruentes módulo 1, se $x - y \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$x \equiv y \pmod{1}.$$

Observe que qualquer número real x é congruente a um único número em $[0, 1)$ que é precisamente a sua parte fracionária de x , $\langle x \rangle$. Com efeito, sejam $n, m \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_n, \alpha_m \in [0, 1)$ tais que

$$x = n + \alpha_n = m + \alpha_m,$$

logo $|n - m| = |\alpha_n - \alpha_m| < 1$. Então, $n = m$ e $\alpha_n = \alpha_m$. Portanto a congruência módulo 1 significa olhar somente para sua parte fracionária e desconsiderando sua parte inteira.

Seja $\alpha \neq 0$ um número real e considere a sequência de seus múltiplos

$$\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, n\alpha, \dots$$

Agora, olhamos para a sequência de suas partes fracionárias

$$\langle \alpha \rangle, \langle 2\alpha \rangle, \langle 3\alpha \rangle, \dots, \langle n\alpha \rangle, \dots \tag{3.1}$$

Vejam algumas observações acerca da sequência (3.1):

1. Se $\alpha = \frac{p}{q}$ racional, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ são números primos entre si, então a sequência (3.1) possui um número finito de termos distintos, isto é, os primeiros q termos são

$$\left\langle \frac{p}{q} \right\rangle, \left\langle 2\frac{p}{q} \right\rangle, \left\langle 3\frac{p}{q} \right\rangle, \dots, \left\langle (q-1)\frac{p}{q} \right\rangle, \left\langle q\frac{p}{q} \right\rangle = 0.$$

Note que a sequência começa a se repetir

$$\begin{aligned} \left\langle (q+1)\frac{p}{q} \right\rangle &= \left\langle p + \frac{p}{q} \right\rangle = \left\langle \frac{p}{q} \right\rangle, \\ \left\langle (q+2)\frac{p}{q} \right\rangle &= \left\langle 2p + 2\frac{p}{q} \right\rangle = \left\langle 2\frac{p}{q} \right\rangle, \\ &\vdots \\ \left\langle (2q)\frac{p}{q} \right\rangle &= \left\langle 2qp + 2q\frac{p}{q} \right\rangle = 0, \dots \end{aligned}$$

e assim por diante.

2. Se α é irracional, então todos os termos da sequência (3.1) são distintos. Com efeito, se $\langle n\alpha \rangle = \langle m\alpha \rangle$, para $n \neq m$, logo $n\alpha - m\alpha \in \mathbb{Z}$, desde que α seja racional, uma contradição.

Abordaremos em seguida resultados mais profundos acerca da sequência (3.1). Mostraremos que a sequência (3.1) é densa em $[0, 1)$ e o resultado principal da seção, o Teorema de equidistribuição de Weyl, o qual garante que a sequência (3.1) é uniformemente equidistribuída em $[0, 1)$ quando α é irracional.

Agora definimos o que representa uma sequência uniformemente equidistribuída.

Definição 3.1. Dizemos que uma sequência $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais é uniformemente equidistribuída no intervalo $[0, 1)$, se para todo intervalo $(a, b) \subset [0, 1)$ tem-se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|A_N|}{N} = b - a,$$

onde $A_N = \{1 \leq n \leq N; \alpha_n \in (a, b)\}$ e $|A_N|$ é o número de elementos de A_N .

Exemplo 3.1. Se $\alpha = \frac{p}{q}$ racional, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ são números primos entre si, então a sequência (3.1) é equidistribuída em $[0, 1)$, com pontos da forma

$$0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}.$$

Na verdade, basta provar que para qualquer $0 \leq a < q$ temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N; \langle n\alpha \rangle = \frac{a}{q}\}|}{N} = \frac{1}{q}.$$

Note que, pelo princípio arquimediano, existe um inteiro n com $kq \leq n < (k+1)q$, para cada inteiro $k \geq 0$. Agora, pelo algoritmo da divisão de Euclides, existem l e r inteiros tal que $N = lq + r$, com $l \geq 0$ e $0 \leq r < q$. Donde seguem,

$$l \leq |\{1 \leq n \leq N; \langle n\alpha \rangle = \frac{a}{q}\}| \leq l + 1,$$

se, e somente se,

$$\frac{l}{N} \leq \frac{|\{1 \leq n \leq N; \langle n\alpha \rangle = \frac{a}{q}\}|}{N} \leq \frac{l+1}{N},$$

se, e somente se,

$$\frac{1}{q} - \frac{r}{Nq} \leq \frac{|\{1 \leq n \leq N; \langle n\alpha \rangle = \frac{a}{q}\}|}{N} \leq \frac{1}{q} + \frac{q-r}{Nq}.$$

Por fim, fazendo $N \rightarrow \infty$, temos o resultado.

Exemplo 3.2. Sendo $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma enumeração de $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$, definimos $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por

$$\alpha_n = \begin{cases} r_{\frac{n}{2}} & \text{se } n = 2k \\ 0, & \text{se } n = 2k - 1, \end{cases}$$

não é equidistribuída em $[0, 1)$, pois dado o intervalo $(a, b) = (0, 1)$, segue que, para todo $N \in \mathbb{N}$ metade da sequência $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não pertence a $(0, 1)$. Logo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|A_N|}{N} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

As seqüências dos exemplos acima são densas em $[0, 1)$, pois contém racionais deste intervalo. Contudo, o conceito de equidistribuição é mais delicado que o de densidade. Vejamos o seguinte resultado.

Proposição 3.1. *Seja a sequência $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais uniformemente equidistribuída em $[0, 1)$. Então, $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é densa em $[0, 1)$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in [0, 1)$ e $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [0, 1)$. Assim

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|A_N|}{N} = 2\delta > 0,$$

o que implica que existe algum termo da sequência no interior do intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Como δ foi tomado arbitrário, temos o resultado. \square

O resultado seguinte é conveniente para a demonstração do Teorema de equidistribuição de Weyl.

Lema 3.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, periódica de período 1 e α um número irracional. Então,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\alpha) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Demonstração. Iremos separar em dois casos:

(i) Inicialmente suponhamos $f \equiv 1$, temos que a igualdade é verificada. Se $f(x) = e^{2\pi i k x}$, com $k \neq 0$, temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k n \alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{2\pi i k \alpha}}{N} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i k N \alpha}}{1 - e^{2\pi i k \alpha}} = 0,$$

note que, $1 - e^{2\pi i k \alpha} \neq 0$, pois α é irracional. Por outro lado,

$$\int_0^1 e^{2\pi i k x} dx = \frac{e^{2\pi i k x}}{2\pi i k} \Big|_0^1 = \frac{e^{2\pi i k}}{2\pi i k} - \frac{e^0}{2\pi i k} = 0,$$

pois $e^{2\pi i k} = 1$. Se f, g funções da forma $e^{2\pi i k x}$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos que, $h(x) = f(x) + g(x)$ é tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(n\alpha) = \int_0^1 h(x) dx.$$

Dessa forma, vale para todo polinômio trigonométrico.

(ii) Sendo f contínua e periódica, logo pelo Colorário 2.2, existe um polinômio trigonométrico p tal que

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $\varepsilon > 0$. Pelo caso i) da demonstração, existe $N_0 > 1$ tal que $N > N_0$ tem-se

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p(n\alpha) - \int_0^1 p(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\alpha) - \int_0^1 f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(n\alpha) - p(n\alpha)| \\
&+ \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p(n\alpha) - \int_0^1 p(x) dx \right| \\
&+ \int_0^1 |f(x) - p(x)| dx \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $N > N_0$.

□

Teorema 3.1 (Teorema de Weyl). *Seja α um número irracional. Então, a sequência*

$$\langle \alpha \rangle, \langle 2\alpha \rangle, \langle 3\alpha \rangle, \dots, \langle n\alpha \rangle, \dots$$

é uniformemente equidistribuída em $[0, 1)$.

Demonstração. Fixado $(a, b) \subset [0, 1)$, vamos denotar por $\mathcal{X}_{(a,b)}(x)$ a função Característica do intervalo (a, b) , isto é, a função vale 1 em (a, b) e 0 em $[0, 1) - (a, b)$. Consideremos uma extensão periódica de período 1 em toda a reta da função Característica $\mathcal{X}_{(a,b)}(x)$.

Assim,

$$\mathcal{X}_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (a + n, b + n), \\ 0, & \text{se } x \in [n, 1 + n) - (a + n, b + n), \end{cases}$$

com $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que,

$$|A_N| = |\{1 \leq n \leq N; \alpha_n \in (a, b)\}| = \sum_{n=1}^N \mathcal{X}_{(a,b)}(n\alpha).$$

Portanto, para a demonstração do Teorema é equivalente a mostrar

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{X}_{(a,b)}(n\alpha) = \int_0^1 \mathcal{X}_{(a,b)}(x) dx.$$

Agora, pelo Teorema(2.1), podemos considerar as funções f_ε^- e f_ε^+ contínuas, periódicas de período 1 que aproximam de $\mathcal{X}_{(a,b)}(x)$ em $[0, 1)$. As funções f_ε^- e f_ε^+ são limitadas por 1 e que coincidem com $\mathcal{X}_{(a,b)}(x)$ exceto em intervalos de comprimento 2ε , veja a figura 7.

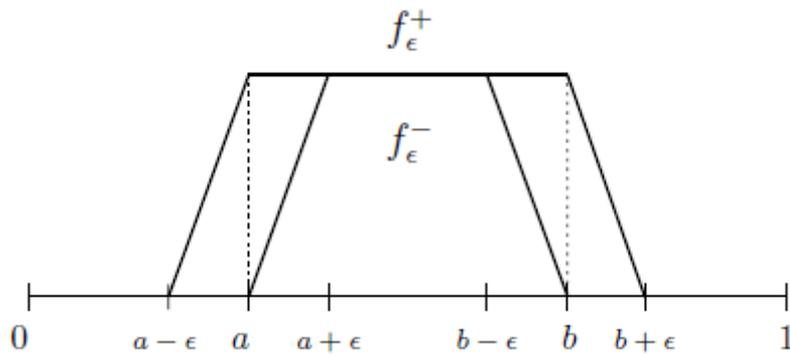


Figura 7 – Aproximação da $\mathcal{X}_{(a,b)}(x)$ em $[0, 1)$.

Em particular,

$$f_{\varepsilon}^{-}(x) \leq \mathcal{X}_{(a,b)}(x) \leq f_{\varepsilon}^{+}(x)$$

e satisfazendo

$$b - a - 2\varepsilon \leq \int_0^1 f_{\varepsilon}^{-}(x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 f_{\varepsilon}^{+}(x) dx \leq b - a + 2\varepsilon.$$

Assim,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_{\varepsilon}^{-}(n\alpha) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{X}_{(a,b)}(n\alpha) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_{\varepsilon}^{+}(n\alpha),$$

pelo Lema 3.1, obtemos

$$b - a - 2\varepsilon \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \min \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{X}_{(a,b)}(n\alpha) \right| \quad \text{e}$$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{X}_{(a,b)}(n\alpha) \right| \leq b - a + 2\varepsilon.$$

Como ε foi tomado arbitrário, temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{X}_{(a,b)}(n\alpha) = b - a = \int_0^1 \mathcal{X}_{(a,b)}(x) dx.$$

□

Referências

- [1] Figueiredo, D. G. de, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 4^a edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [2] Lima, E. L., *Álgebra linear*. 1^a edição. Rio de Janeiro : IMPA, 2014.
- [3] Lima, E. L., *Curso de Análise* Vol 1. 11^a edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [4] Stein, E. M. and Shakarchi, R., *Fourier Analysis An Introduction*. Princeton University Press. Princeton Lectures in Analysis I, 2003.
- [5] Kuipers, L. and Niederreiter H., *Uniform Distribution of Sequences*. Wiley, New York, 1974.