Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de pós-graduação e pesquisa
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

A topologia no ensino médio: um novo olhar com mapas conceituais

por

Evaní Machado de Melo
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT - São Cristovão - SE

Orientador: Prof. Kalasas Vasconcelos de Araújo
Coorientador: Prof. Milton Souza Ribeiro

Abril de 2013

Evaní Machado de Melo

A topologia no ensino médio: um novo olhar com mapas conceituais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Kalasas Vasconcelos de Araújo
Coorientador: Milton Souza Ribeiro

São Cristóvão
2013

Melo, Evani Machado de

M528t A topologia no ensino médio: um novo olhar com mapas conceituais / Evani Machado de Melo; orientador Kalasas Vasconcelos de Araújo. – São Cristóvão, 2013.

81 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

1. Ensino médio. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Topologia. 4. Aprendizagem. I. Araújo, Kalasas Vasconcelos de, orient. II. Título

CDU 51:37

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe ,como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

A topologia no ensino médio: um novo olhar com mapas conceituais

por

Evani Machado de Melo

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araujo - UFS
Orientador

Prof. Dr. Rodrigo Gondim Neves - UFRPE
Primeiro Examinador

Prof^a. Dra. Rita de Cássia Pistóia Mariani - UFS
Segunda Examinadora

São Cristóvão, 13 de abril de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Dedicatória

A minha mãe Helena e a meus filhos Thiago e Leonardo.

Agradecimentos

- A Deus, por estar sempre caminhando ao meu lado, protegendo-me e auxiliando-me na tomada de decisões.
- A minha mãe Helena e a meu pai Adriano(in memória), meus pais, por todo esforço que fizeram para que eu estudasse. Pelos bons conselhos e por acreditar e sentir orgulho de mim.
- A meus filhos, Thiago e Leonardo. Obrigado pela cumplicidade.
- Ao professor Dr. Kalasas Vasconcelos, por sua orientação e por me fazer gostar ainda mais de Matemática, livrando-me de alguns "fantasmas". Obrigada por acreditar em meu trabalho.
- Ao professor Dr. Milton Ribeiro, Miltão, por sua coorientação, principalmente na parte pedagógica, por sua confiança e apoio em todo percurso do meu curso. Com a maior paciência, me ajudou a decifrar o "látex". Obrigada pela atenção e carinho!
- A cada um de meus irmãos: Heraldo, Helenice, Valmir e André. Meus grandes companheiros! Obrigada por estarem sempre do meu lado.
- Aos meus sobrinhos: Ingrid, Ricardo, Michel, Caio, Valmir Filho, Paloma, André Vitor e Enzo. Obrigada pela aconchego!

- Aos grandes amigos: Carolina, Romilda, Miraci, minha tia, Jefferson e a seus pais Eliete e João, que me têm como filha. Obrigada pela amizade e zelo.

- Aos meus colegas de turma do mestrado, em especial a Elson Nascimento, pelos momentos de muito estudo, pelas conversas descontraídas, a jornada ficou mais leve.

- Ao coordenador do curso Fábio dos Santos, por está sempre em alerta a nos atender.

- Aos admiráveis professores, Almir Rogério, Danilo Felizardo, Eder Mateus e Evilson Vieira. Obrigada pela atenção e ensinamentos.

- Aos meus colegas de trabalho e aos meus alunos do Colégio Estadual José Ferreira Pinto. Obrigada pela coompreensão.

- Enfim, a todos que de alguma forma contribuiram para minha jornada nesse mestrado. Obrigada!

Resumo

Este trabalho constitui uma investigação que busca analisar nos mapas conceituais construídos pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades que envolvem conceitos vinculados a Topologia uma linguagem mais apropriada e de forma conceitual. A pesquisa está fundamentada nos pressupostos teóricos do construtivismo(questionário com conhecimentos prévios), na Transposição didática(saber científico, topologia, num saber escolar), Teoria da Aprendizagem Significativa e no uso de Mapas Conceituais. Para tanto, tecemos algumas considerações sobre o conceito de topologia, sua história, com exemplos clássicos e problemas curiosos de caráter topológico. Os mapas conceituais são propostos como meio de negociação de significados e como instrumentos para a verificação de indícios da ocorrência de aprendizagem significativa. A aplicação desse trabalho foi feita no início de 2013, com alunos do 2º e 3º ano do ensino médio, no Colégio Estadual José Ferreira Pinto de Feira de Santana, na Bahia, com resultados que nos estimulam a acreditar que temas modernos e contemporâneos da Matemática podem e devem ser tratados na educação básica.

Palavras-chave: ensino médio, topologia, mapas conceituais.

Abstract

This work is an investigation that seeks to analyze the concept maps constructed by students during the development of activities that involve concepts tied to a language more suitable topology and conceptually. The research is based on the theoretical principles of constructivism (questionnaire prior knowledge), in the didactic transposition (scientific knowledge, topology, namely a school), Theory of Meaningful Learning and Concept maps. To do so brings forth some considerations on the concept of topology, its history, with classic examples and problems topological curious character. Concept maps are proposed as a means of negotiating meanings and as tools for the verification of evidence of the occurrence of significant learning. The application of this work was done in early 2013, with students from 2nd and 3rd year of high school in the State College José Ferreira Pinto de Feira de Santana, Bahia, with results that encourage us to believe that modern themes and contemporary mathematics can and should be treated in basic education.

Keywords: school, topology, conceptual maps.

Sumário

Introdução

Este trabalho constitui uma investigação que busca nos mapas conceituais, construídos pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades, mostrar que a Topologia pode ser apresentada para uma turma de nível médio em uma linguagem apropriada e de forma conceitual, apesar da complexidade de tal tema, ao considerarmos a estrutura cognitiva deles.

A topologia em atividades práticas parece estar dissociada da realidade do aluno de Ensino Fundamental/Médio e não aparece em livros didáticos excluindo-se assim um saber matemático necessário ao desenvolvimento do estudante. Para o professor desenvolver o ensino de Topologia de forma efetiva, além de atualizar e construir seus próprios conhecimentos é necessário que ele reflita sobre suas escolhas metodológicas. Dentre as escolhas possíveis opta-se, ao desenvolver este trabalho, pela tendência de investigação. E com certeza o professor é responsável por esse processo, deve ser mediador entre o conhecimento matemático e o aluno,a transposição didática, para mediação do conceito de topologia na construção de significados ao aluno e que a aprendizagem seja significativa. Portanto, propomos a utilização dos mapas conceituais na construção de conceitos, pois além de ser um instrumento que pode auxiliar o professor a conhecer a forma como o aluno associa de maneira diferente, possibilita interferir de maneira direta nas lacunas apresentadas.

Nessa pesquisa foi utilizado o método hipotético dedutivo, que é um método lógico; as conseqüências são deduzidas por meio de experimentação. Neste caso, a experimentação foi feita por meio de um estudo da Topologia, seu conceito e sua história e como o ensino, através de mapas conceituais, pode ajudar a compreende-lo melhor.

Para tanto, foi necessário a realização de uma pesquisa bibliográfica, documental e experimental. A pesquisa bibliográfica serviu para melhor embasamento teórico e cientifico. Já a pesquisa documental foi necessária para referenciar atividades a serem aplicadas. E a pesquisa experimental foi feita uma amostragem com alunos do 2º e 3º ano do ensino médio do turno vespertino do Colégio Estadual José Ferreira Pinto, em Feira de Santana, na Bahia, local esse escolhido para aplicação dessa atividade por ser a escola que leciono e com turmas que ministro aula.

Quanto à coleta de dados foram utilizados fontes primárias (questionários) e secundárias (livros, sites, artigos, dissertações). O tratamento desses dados foi qualitativo, pois considerou a qualidade da eficiência da técnica associada à interpretação.

Dividimos a pesquisa em três partes.

A primeira parte trata de topologia, um pouco de sua história, definição, conceitos básicos, apresentando alguns exemplos clássicos como as pontes de Konigsberg, a faixa de Mobius, a garrafa de Klein e alguns problemas curiosos de caráter topológico.

Na segunda parte, tratamos da parte do referencial pedagógico, as idéias de construtivismo, segundo Piaget. Se através da transposição didática, com uma aprendizagem significativa, o aluno pode aprender o novo, fazendo relação com o conhecimento já adquirido e o mapa conceitual como avaliação.

Na última parte, é a análise da experiência em sala de aula e da relação do ensino de topologia e da avaliação com mapas conceituais. Nele, abordamos, ainda, alguns questionamentos importantes acerca do ensino, como a sistematização e da metodologia.

Finalizando, estabelecemos a conclusão dos trabalhos ao demonstrar que de maneira prática é possivel trabalhar o conhecimento de topologia significativamente numa sala de aula do ensino médio usando mapas conceituais.

Capítulo 1

Topologia

O século XX foi marcado por avanços no campo da Topologia, no qual seu estudo abriu caminhos para a moderna teoria dos Grafos, onde podem ser aplicados para planejar desde as redes de serviços urbanos, como água e eletricidade, até as de computadores.

Esse capítulo, é dedicado ao estudo de Topologia, objeto de estudo desse trabalho onde falaremos um pouco de sua história, definição, bem como algumas aplicações. Nessa exposição utilizamos frequentemente os textos de Katz (1998), Munkres (2000), Sampaio (2008), Barr (1989), De Maio (2010) e Borges (2005), além de outras referências que serão oportunamente citadas.

1.1 História

A Topologia é considerada uma das mais novas linhas da Matemática clássica e aparece no século XVII com o nome de *Analyse Situs*, ou seja Análise da Posição. Muitos autores concordam que o primeiro a tentar estudar propriedades topológicas foi Leibniz [1646-1716], em 1679. Posteriormente, Euler [1707-1783], em 1736 publica a solução do problema das pontes da cidade de Koenigsberg, institulado "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*" pois percebeu que o problema pouco, ou nada, tinha a ver com geometria. O importante era estabelecer uma rede – grafo – que representasse o rio e as pontes, passando assim a trabalhar com vértices e arestas, interessando-se somente pela forma como os vértices estavam ligados entre si. É considerada como sendo um dos primeiros resultados topológicos, isto é, não dependente de quaisquer medidas. Este é um exemplo de problema que liga diferentes áreas da matemática, com a teoria dos grafos.

Bem antes, René Decartes [1596-1650], por volta de 1639, sabia que se um poliedro tiver V vértices, A arestas e F faces, então $V - A + F = 2$. Esta relação é conhecida por Fórmula de Euler, dado que este publicou uma demonstração em 1751.

A palavra topologia foi oficialmente usada pela primeira vez por Johann Benedict Listing[1808-1882] em 1847 no artigo *Vorstudien zur Topologie, Vandenhoeck und Ruprecht*, em Gottingen em 1848. Entretanto Listing já vinha usando tal termo há pelo menos 10 anos, em suas correspondências. O termo "*topology*" (Topologia em inglês) foi introduzido muitos anos mais tarde na revista *Nature* em um artigo de 1883 com a finalidade de "*distinguir a geometria qualitativa da geometria comum onde os aspectos qualitativos são primariamente estudados*" (KATZ, 1998, p.74).

O estudo dos espaços de funções, realizado por matemáticos notáveis como Georg Cantor [1845 — 1918], Vito Volterra [1860 — 1940], Cesare Arzelá [1847 — 1912] , Jacques Hadamard [1865 — 1963], entre outros, culmina com o trabalho de Maurice Fréchet [1878-1973], que introduziu a noção de espaço métrico, muitas de suas características lembrando o $\Re^n$. Atualmente os espaços métricos são considerados casos específicos, mas muito importantes, de uma classe mais geral conhecida como espaços topológicos.

A formalização do conceito de espaço topológico é devida a Felix Hausdorff [1868-1942] que definiu em 1914 o que hoje é conhecido como espaço de Hausdorff. O conceito final de espaço topológico é um pouco mais geral que o conceito de espaço de Haussdorf e foi introduzido posteriormente por Kazimierz Kuratowski [1896-1980] em 1922.

Henri Poincaré [1854-1912] introduziu em seu livro "*Analysis Situs*" de

1895 os conceitos de homotopia e homologia, sendo considerado o marco de criação da topologia algébrica. O interesse no estudo da topologia inclui a percepção de que alguns problemas topológicos são mais tratáveis que os problemas algébricos, como mostrar que $\Re^n$ não é topológicamente equivalente (homeomorfo) a $\Re^2$ se n é diferente de *2*. As bases da Topologia moderna foram estabelecidas no Congresso Internacional de Matemática de 1909, em Roma, onde Frigyes Riesz [1880-1956] propõe o carater axiomático á Topologia, baseado na teoria do conjuntos.

1.2 O que é topologia?

Topologia (do grego *topos*, "lugar", e *logos*, "estudo") é o ramo da matemática que estuda os espaços topológicos; é tido como uma extensão da geometria. A palavra topologia é usada para descrever a área de estudos para designar uma família de conjuntos (conjuntos abertos) assim como para definir o conceito básico da teoria, o espaço topológico. Também é chamada geometria de borracha, transformações contínuas no estudo da geometria em que comprimento, ângulos e formas podem ser alterados por transformações contínuas e reversíveis, pois trata das propriedades de posição que não são afetadas por mudanças de tamanho e forma, quando movidos.

Definição 1.2.1. Uma **topologia** é uma coleção τ de subconjuntos de A (chamados abertos da topologia), com as seguintes propriedades:

(a) $\varnothing$ e A estão em τ;

(b) A união dos elementos de qualquer subcoleção de τ está em τ;

(c) A interseção de qualquer subcoleção finita de τ está em τ.

A topologia estuda os espaços topológicos das estruturas que permitem a formalização de conceitos tais como convergência, conexidade e continuidade, elementos que aparecem em praticamente todos os ramos da matemática moderna e são noções unificadoras centrais.

Definição 1.2.2. Um **espaço topológico** é um par (A, τ) onde A é um conjunto e τ é uma topologia em A.

Como exemplos temos:

- Se A é um conjunto, a topologia $\tau = P(A)$ onde $P(A)$ é o conjunto das partes de A é denominada a topologia discreta sobre A.
- Se A é um conjunto, a topologia $\tau = \{\varnothing, A\}$ é denominada topologia grosseira sobre A.
- Um espaço métrico (A, d), tem uma estrutura natural de espaço topológico para τ, definido como o conjunto das bolas abertas $B(x, \delta) = \{y \in A : d(x, y) < \delta\}$.
- Nada impede que, a um conjunto A, esteja associada mais de uma topologia, por exemplo, τ_1 e τ_2. Quando todo aberto de τ_1 for um aberto de τ_2 , diz-se que a topologia τ_1 é mais grossa que τ_2, ou, analogamente, que τ_2 é mais fina que τ_1. A topologia grosseira é mais grossa que qualquer outra, e a topologia discreta é mais fina que qualquer outra.

Para compreendermos mais intuitivamente o que é topologia consideremos o caso particular da Topologia das Superfícies.

Definição 1.2.3. Um **Espaço Topológico de Hausdorff** é um espaço topológico (A, τ) no qual pontos distintos, x e y de A têm vizinhanças U de x e V de y disjuntas ($U \bigcap V \neq \varnothing$).

Definição 1.2.4. Uma **superfície** é um objeto geométrico bidimensional, de tal forma que é definida como um espaço topológico de Hausdorff segundo contável e não vazio no qual cada ponto tem uma vizinhança aberta homeomórfica a algum subconjunto aberto do plano Euclidiano E^2. Cada superfície, portanto, forma um espaço topológico.

Assim, a Topologia é o estudo das propriedades geométricas (por exemplo, entre as superfícies) que permanecem inalteradas mesmo que existam as

4 deformações de: a) esticar, b) encolher, c) torcer, e d) cortar e colar novamente no mesmo sentido do corte. Tais deformações são funções bijetoras, contínuas e têm inversas contínuas. Se uma superficie é obtida de outra por uma combinação de um número finito de vezes, por exemplo (i) de algumas ou todas as três primeiras deformações, diremos que elas são *isotópicas*; (ii) e das quatro deformações dizemos que elas são *homeomorfas*. Obviamente, superficies isótópicas são homeomorfas.

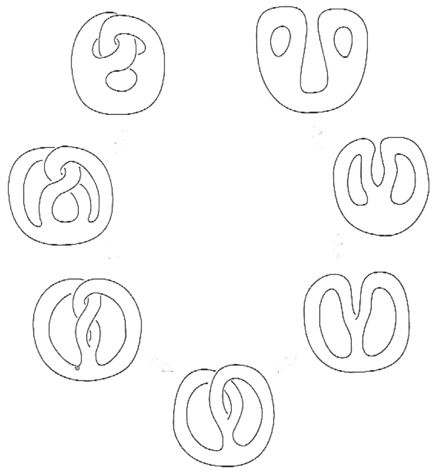


Figura 1.1: Figuras isotópicas: sequência de deformações (SAMPAIO, 2008, p.31).

Na figura (1.1) utilizamos somente as três primeiras deformações para esta conclusão, ou seja, analisando o seu esquema no sentido anti-horário podemos observar que a superfície começa a ser deformada esticando-a nas laterais, encolhendo e torcendo sua parte central, na qual o espaço que havia em seu centro vai diminuindo até que não se tenha mais qualquer abertura em sua parte central chegando à superfície que se encontra no alto do canto direito.

Duas superfícies isotópicas são homeomorfas mas a recíproca nem sempre é verdadeira comprovada através do esquema mostrado na figura (1.2). Analisando o esquema percebe-se que neste caso, além das três primeiras deformações, houve a utilização do procedimento de corte e colagem, mostrando que dessa forma a superfície (a) e a superfície (b) são homeomorfas mas não isotópicas.

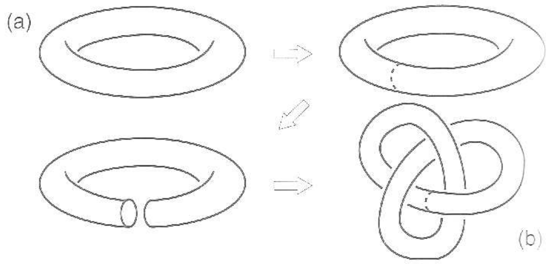


Figura 1.2: Transformação de recorte e colagem aplicada a uma superfície (SAMPAIO,2008, p.32).

Define-se então *topologia de uma superficie* como um conjunto de aspectos geométricos dessa superficie que não se alteram quando a ela aplicamos qualquer uma das quatro deformações. Quando duas superficies, com suas respectivas topologias, transformam-se uma na outra quando aplicamos qualquer uma destas quatro deformações, diz-se que são *topologicamente equivalentes* ou *superfícies homeomorfas* conforme caso mostrado na figura (1.3).

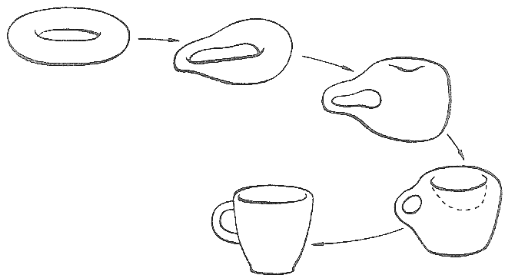


Figura 1.3: Superfícies homeomorfas: deformação do toro numa caneca (BARR,1989, p.4).

Diz-se que uma função $f : A \to B$ entre espaços topológicos é contínua se a imagem inversa ou contraimagem de qualquer aberto de B é um aberto de A.

Uma função $f : E \to F$, em que E e F são espaços topológicos, é sequencialmente contínua em um ponto $a \in E$ quanto ela comuta com o limite de sequências, ou, em outras palavras, quando para toda sequência $x_i \in E$ cujo limite (em E) seja a, temos que o limite (em F) de $f(x_i)$ é f(a). Uma forma elegante de escrever isso é $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(\lim_{i\to\infty} x_i)$.

Definição 1.2.5. Dizemos que dois espaços topológicos (A_1, τ_1) e (A_2, τ_2) são homeomorfos quando existe uma transformação bijetora, continua, $f : A_1 \to A_2$ cuja inversa $f^{-1} : A_2 \to A_1$ também é continua. Neste caso, f chama-se *homeomorfismo* de A_1 sobre A_2.

Devido a isso os objetos na topologia podem ser representados por objetos feitos de um material perfeitamente deformável. Bolas de plástico são modelos físicos de superficies esféricas, já as câmaras de ar, de borracha elástica vulcanizada, são modelos de uma superficie denominada toro bidimensional. Dessa forma, os aspectos de sua natureza, tais como ângulos, distâncias, áreas e curvatura se alteram pelas deformações enumeradas. Uma evidente dicotomia entre o quantitativo e o qualitativo.

Noções de vizinhança, fora-dentro, interior-exterior, aberto-fechado, longe-perto, separado-unido, contínuo-descontínuo, alto-baixo, são noções topológicas. Claramente, estas noções costumam vir associadas à outras tais como: adjacências (proximidade), ordem, etc., as quais, igualmente se incluem no rol das noções topológicas.

Assim, para a geometria, uma mapa é uma figura geométrica, enquanto que, para a topologia um mapa, como por exemplo o do metrô, é um grafo topológico, onde o que importa não são as dimensões reais, mas a ordem das estações e os entroncamentos.

Definição 1.2.6. Grafo é uma figura constituida de um número finito de arcos (ou curvas), chamados *arcos* ou *arestas* do grafo, cujas extremidades são chamados *vértices* do grafo. Um mesmo vértice pode pertencer a vários arcos e dois arcos podem ter em comum um ou dois vértices de suas extremidades, podendo coincidir dando lugar a um único vértice.

Um grafo pode ter uma configuração espacial, como o grafo das arestas e vértices de um cubo. *Grafo planar* é denominado o grafo que pode ser deformado - quando tem suas arestas esticadas, encolhidas ou deformadas -, de modo a ser desenhado num plano.

Um subconjunto de um espaço topológico diz-se "fechado" se o seu complementar for um conjunto aberto.

Como propriedades do espaço topológico fechado, sendo (A, τ) um espaço topologico, temos:

1. $\emptyset$ e A são fechados;

2. A união finita e a intersecção arbitrária de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Um ponto $x_0 \in A_1 \subset A$ é chamado de ponto interior de A_1 quando existe um aberto B tal que $x_0 \in B \subset A_1$. Ver a representação geométrica na figura (1.4).

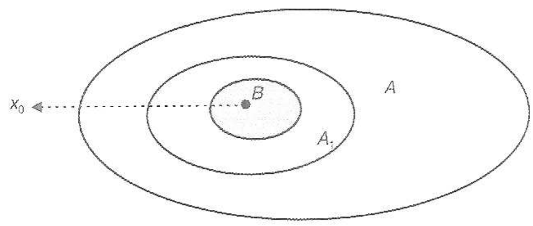


Figura 1.4: Ponto interior (DE MAIO, 2010, p.190).

O interior de um conjunto $A_1 \subset A$, do espaço topológico (A, τ), é o conjunto cujos elementos são os pontos interiores de A_1, e representamos por A_1^0, já o exterior é o interior do conjunto complementar de A_1, enquanto que a fronteira é o conjunto de pontos de A que não são interiores e nem exteriores (vide figura 1.5).

Um conceito importante é o de topologia induzida, pois serve para estudarmos importantes aplicações.

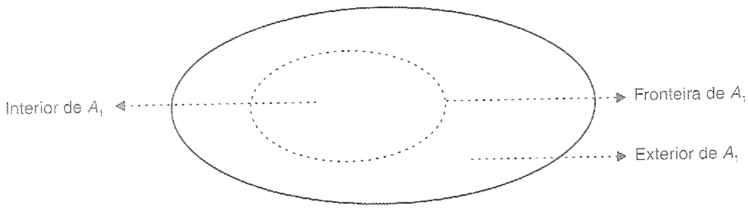


Figura 1.5: O conceito de interior, fronteira e exterior depende do subconjunto dado e da topologia (DE MAIO,2010, p.191).

Definição 1.2.7. Topologia induzida num conjunto: Seja B um conjunto qualquer e (A, τ_A) um espaço topológico. Consideremos uma aplicação $f : B \to A$ e seja $A_1 \subset A$ um aberto. O conjunto τ_B das imagens inversas $f^{-1}(A_1)$ é uma topologia em B e a topologia τ_B é chamada de topologia induzida em B pela aplicação *f*.

A Topologia é uma área muito ampla, com muitas sub-áreas. Espaços topológicos estão presentes em quase todos os ramos da matemática. Tal fato permitiu que a topologia se tornasse uma ponte entre diversas teorias matemficas. A topologia geral, ou como é chamada em inglês, *point set topology*, define e estuda propriedades dos espaços topológicos como conexidade e compacidade. Além disto, a topologia geral classifica aplicações entre espaços topológicos por meio de termos como continuidade, separabilidade, homeomorfismos e aplicações próprias. Já a topologia algébrica estuda as diferentes maneiras em que se pode associar a um determinado espaço topológico uma estrutura algébrica. Estuda também a homologia e a teoria K de um espaço topológico, que associam a um espaço topológico uma sequência de grupos abelianos e um par ordenado de anéis, respectivamente. Topologia geométrica, estuda as variedades e suas aplicações, fibrados lineares, de linhas incluindo a teoria dos nós. Outro ramo da topologia é a topologia diferencial, que estuda a topologia de variedades diferenciáveis, e quais propriedades definidas em termos analíticos são na realidade consequências da topologia de uma variedade. Entre as implicações importantes desta teoria, temos o teorema de Gauss-Bonnet, a teoria de Morse e o teorema do índice de

Hopf. No contexto da teoria de categorias existe uma generalização de espaço topológico, definida por Alexander Grothendieck[1928-] e que denomina-se topos.

Na matemática, a topologia é a área em que se estudam os espaços topológicos; em engenharia, o conceito está associado à disposição lógica de elementos; em topografia, a topologia refere-se ao estudo das formas exteriores (relevo) do terreno; em informática, topologia de rede é a forma por meio da qual ela se apresenta fisicamente, ou seja, como os elementos de rede (*network nodes*) estão dispostos; em psicanálise, é uma característica do inconsciente lacaniano.

1.3 Algumas aplicações de topologia

Nessa seção apresentaremos alguns problemas clássicos da topologia, como por exemplo, as Pontes de Königsberg, a faixa de Möbius, a garrafa de Klein e algums problemas curiosos de caráter topológico.

1.3.1 Problema das sete pontes de Konigsberg

A antiga cidade alemã Königsberg (hoje conhecida como Kaliningrado e localizada em território russo) é cortada por um rio que tem uma ilha; sete pontes ligavam a cidade à ilha que interligam a quatro regiões da cidade através do rio Pregel conforme a figura (1.6) [1].

Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar todas as pontes sem repetir nenhuma. Havia-se tornado uma lenda popular a possibilidade da façanha quando o matemático suíço Leonhard Euler, em 1736, provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições.

Euler usou um raciocínio muito simples. Transformou os caminhos em retas e suas intersecções em pontos, criando possivelmente o primeiro grafo da história. Ele percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro

[1] Duas das sete pontes originais da cidade foram destruídas durante o bombardeamento de Königsberg em agosto de 1944.

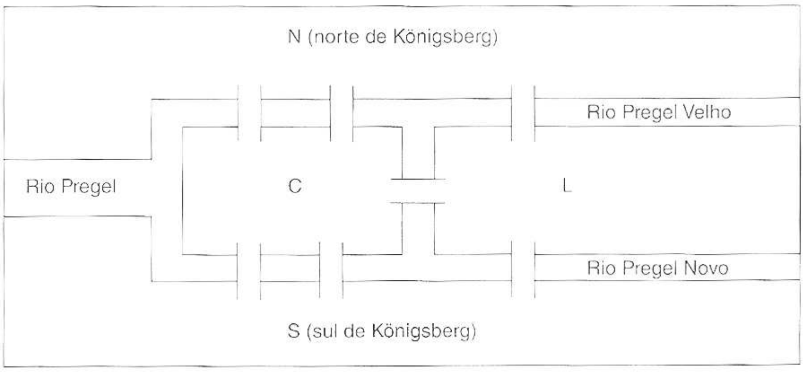


Figura 1.6: Diagrama das sete pontes de Konigsberg (SAMPAIO,2008 p.15).

passando uma única vez em cada ponte se houvesse exatamente zero ou dois pontos de onde saísse um número ímpar de caminhos. A razão de tal coisa é que de cada ponto deve haver um número par de caminhos, pois será preciso um caminho para "entrar" e outro para "sair". Os dois pontos com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente. Se não houver pontos com número ímpar de caminhos, pode-se (e deve-se) iniciar e terminar o trajeto no mesmo ponto, podendo esse ser qualquer ponto do grafo. Isso não é possível quando temos dois pontos com números ímpares de caminhos, sendo obrigatoriamente um o início e outro o fim, conforme mostra a figura (1.7).

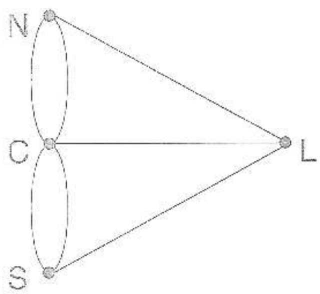


Figura 1.7: O grafo das pontes de Königsberg. Este grafo não é Euleriano, portanto, não existe uma solução (SAMPAIO,2008, p.16).

O conceito introduzido por Euler para resolução do problema das sete pontes - **Caminho Euleriano** - é um caminho em um grafo que visita cada aresta apenas uma vez. Como caso especial, um Circuito Euleriano é um caminho Euleriano que começa e termina no mesmo vértice.

Uma das principais condições para um grafo ser Euleriano é que todos os vértices precisam ser de grau par. Esta condição é também suficiente. Euler provou que uma condição necessária para a existência de circuitos eulerianos é de que todos os vértices tenham grau par, e afirmou, sem prova de que grafos conexos com todos os vértices pares tem um circuito Euleriano. Há, ainda, grafos com caminhos Eulerianos se houver 2 vértices de grau ímpar. Nesse caso, ao se acrescentar uma aresta ligando estes dois vértices, o novo grafo passa a ser Euleriano, conforme a figura (1.8).

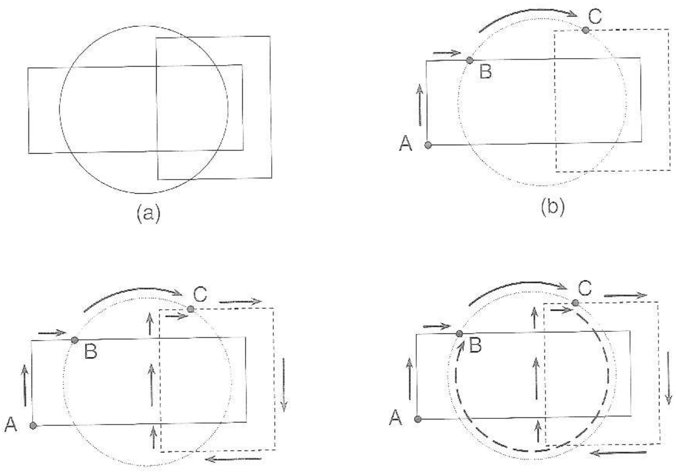


Figura 1.8: Construindo um grafo Euleriano com um exemplo simples cujos vértices são todos pares, tendo o vértice A como final e inicial (SAMPAIO,2008, p.20).

Teorema 1.3.1 (Teorema de Euler para Grafos). *Um grafo G conexo possui caminho euleriano se e somente se ele tem exatamente zero ou dois vértices de grau impar.*

1.3.2 Relação de Euler

Seja um poliedro simples (em um poliedro simples podemos deformar sua superfície de uma maneira contínua até transformá-la na superfície de uma esfera, tetraedro, cubo, pirâmide, etc.) no qual convencionamos:

- V: soma do número de vértices;
- F: soma do número de faces;
- A: soma do número de arestas.

Suponhamos que submetemos este poliedro a uma transformação topológica: torcemos suas arestas, dobramos suas faces, enfim, fazemos tudo aquilo permitido em uma transformação topológica. Problema: quais as propriedades que permanecem invariantes quando um poliedro simples é submetido a uma transformação topológica? A resposta é dada pelo Teorema de Descartes – Euler: em que todo poliedro simples, convexo se verifica a seguinte relação:

$$V - A + F = 2. \tag{1.1}$$

Esse número 2 dado na equação (1.1) é um invariante topológico, isto é depende apenas da forma que toma o poliedro quando é deformado, de modo a tornar-se uma superficie suave. Assim, os polidros convexos assumem forma esférica quando suficientemente "inflados".

Seja um cubo oco feito de um material elástico, como borracha, por exemplo. Como sabemos, o cubo é limitado por seis faces, doze arestas e oito vértices. Enchendo esse cubo até ele se "transformar" numa esfera, então, as faces do cubo, suas arestas e seus vértices são, respectivamente, "transformados".

1.3.3 Faixa de Mobius

Uma fita de Möbius ou faixa de Mobius é um espaço topológico obtido pela colagem das duas extremidades de uma fita, após efetuar meia volta numa delas. Deve seu nome a August Ferdinand Möbius [1790-1868], que a estudou em 1858. Ele estudou este objeto em 1858 tendo em vista a obtenção de um prêmio da Academia de Paris sobre a teoria geométrica dos poliedros. Johann Benedict Listing [1808-1882] já tinha trabalhado sobre o mesmo objeto alguns meses antes. O fato de tanto Mobius como Listing terem estudado alguns anos antes com Carl Friedrich Gauss [1777-1855] sugere que a gênese destas ideias esteja ligada a este matemático.

A importância do estudo deste objeto, na época, prendia-se à noção de orientabilidade, que não era ainda bem compreendida. Möbius introduziu também a noção de triangulação no estudo de objetos geométricos do ponto de vista topológico. Möbius apenas publicou o seu trabalho em 1865, num artigo intitulado *Uber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyëders.*

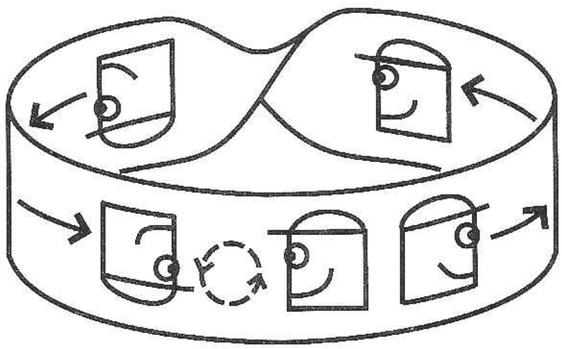


Figura 1.9: Faixa de Mobius (SAMPAIO,2008, p.38).

A faixa de Möbius conforme a figura (1.9) tem por propriedades ser uma superfície com uma componente de fronteira, não orientável, possuindo apenas um lado e apenas uma borda do qual se pode entrar ou sair de um espaço ou superfície, sem "dar a volta". A primeira coisa que notamos na Faixa de Moebius é que ela só tem um lado: podemos ir de um ponto de um "lado" da faixa a qualquer ponto do "outro" lado através de um caminho contínuo sem nunca perfurar a superfície nem passar pela fronteira. A faixa de Moebius não tem um lado de "dentro" nem de "fora", tem somente uma face. Além disso, ela tem uma única borda (cujo bordo é também uma circunferência).

Mais interessante ocorre, se tentamos cortar a faixa ao meio. Obtemos um único objeto contínuo: um anel que tem dois meio giros. Esse novo objeto não é uma faixa de Moebius genuína pois possui dois lados distintos. Mas se cortamos a faixa de Moebius numa linha que dista 1/3 da borda, teremos dois anéis entrelaçados: uma verdadeira faixa de Moebius e outro um anel que tem dois meio giros.

Em matemática, a orientabilidade de um espaço refere-se à não invertibilidade (como num espelho) de uma figura que percorre esse espaço. Se a figura pode voltar ao sítio original invertida, o espaço diz-se não orientável; se não, o espaço diz-se orientável. Uma superfície é não orientável se contém um subconjunto homeomorfo a uma faixa de Möbius.

Considere o cilindro $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$, com a topologia induzida por $\Re$. Seja o conjunto dos pares não ordenados: $M = \{\{c, -c\} \mid c \in \mathbb{C}\}$. De forma natural, temos a seguinte funcão sobrejetiva: $II : \mathbb{C} \to M$, tal que $II(p) = \{p, -p\}$. O par (M, τ_{II}) é dito faixa de Moebius.

1.3.4 Garrafa de Klein

Uma garrafa de Klein é um espaço topológico obtido pela colagem de duas fitas de Möbius. O nome se refere ao matemático Felix Klein [1849-1925]. A garrafa de Klein é uma superfície de compacidade (compacta), orientabilidade (não orientável ou seja não é possível definir um "interior" e um "exterior") e conexidade (conexa).

No quinto estágio da construção, conforme a figura (1.10) uma das extremidades do tubo cilíndrico tem de passar "através" da superfície, para que os pontos A, B e C possam ser colados sobre os pontos *A'*, *B'* e *C'*. Como não é permitido cortar a superfície, a única saída é construir a garrafa em uma película " fantasma". Neste caso, a superfície da garrafa passa através de si mesma, sem porém, auto-interceptar-se.

Em estudos, principalmente na Astronomia, há muitas aplicações para a "fita de möbius" assim como para a "garrafa de Klein".

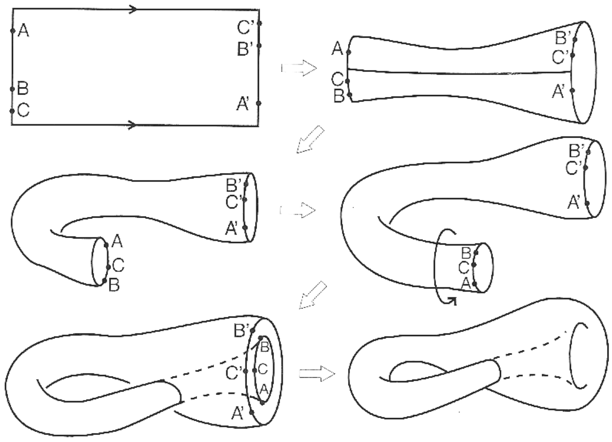


Figura 1.10: Tentativa de construção da Garrafa de Klein no espaço euclidiano tridimensional (SAMPAIO,2008, p.35).

1.3.5 Água, luz e telefone

O desafio é ligar água, luz e telefone em cada uma das 3 casas conforme a figura (1.11), sem haver cruzamento de ligações e nem ligações de uma casa com outra. As ligações podem ser em linhas retas ou não, podem cruzar atrás das casas, mas é importante salientar, as ligações não podem ser cruzadas. Não é possível tal ligação com a restrição da estrutura de ligação ponto a ponto (no caso, casa 1 com água, luz e telefone, casa 2 com água, luz e telefone e casa 3 com água,luz e telefone) é o caso de um grafo.

Figura 1.11: Problema das 3 casas.

Modelando o problema, água,luz, telefone e casa tornam-se vértices, e as ligações arestas, o problema passa a ser encontrar uma representação para o grafo planar (cujas arestas não se cruzam) abaixo, exposto por Cunha (2010, p.2):

Formalmente, os pontos são denominados **vértices** e as ligações, **arestas** (no exemplo, com os serviços fornecidos até então, são 5 os vértices: casa 1, casa 2, água, luz, esgoto; e são 6 as arestas: casa 1 – água, casa 1 – luz, casa 1 – esgoto, casa 2 – água, casa 2 – luz, casa 2 – esgoto, como o grafo representado na figura (1.12).

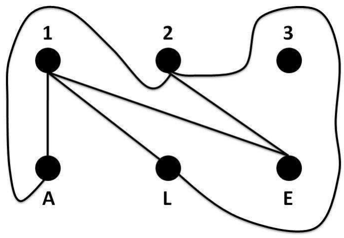


Figura 1.12: grafo planar com vértices, regiões e arestas, sem a casa 3 (CUNHA,2010, p.2).

Ora, a casa 3 se situa na região II, e essa região faz fronteira apenas com as estações de serviço de luz e esgoto (podemos então incluir estas ligações, o que criaria uma terceira região interna III), conforme grafo mostrado no esquema representado pela figura (1.13). Como a central de serviços de água não faz fronteira com a região II, qualquer ligação da casa 3 com esta estação de serviços necessitaria "ultrapassar a fronteira de pelo menos uma região".

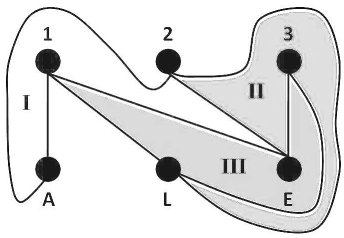


Figura 1.13: Grafo planar com vértices, regiões e arestas, envolvendo partes com a casa 3 (CUNHA,2010, p.2).

Fazendo um paralelo com a relação de Euler, equação (1.1), já mostrado como invariante topólogico, no caso, o número de faces são as regiões.

Ora, para as ligações dos três serviços em duas casas apenas, temos 5 vértices, 3 regiões e 6 arestas, e: $5 - 6 + 3 = 2$. Acrescentando as duas ligações possíveis para a casa 3, temos 6 vértices, 4 regiões e 8 arestas, e: $6 - 8 + 4 = 2$. Incluindo a aresta $3 - A$ não iria criar uma nova região, mas aumentaria o número de arestas, contrariando a propriedade de Euler, pois $6 - 9 + 4 \neq 2$.

1.3.6 Problema das cinco cores

Quantas cores são precisas para colorir um mapa, com qualquer número de países, de maneira que nenhum país tenha a mesma cor daquele que lhe for fronteiriço? No plano todo mapa pode ser colorido com 5 cores. Em 1976, por intermédio de computadores, foi provado que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa.

Vamos iniciar demonstrando dois fatos que serão utilizados para provar o Teorema das Cinco Cores, mostrado por Courant e Robbins (1996).

O primeiro deles é entender que a fórmula de Euler 1.1 vale para o mapa. Considere um mapa regular no plano com V vértices, A fronteiras e F regiões, incluindo o oceano. Estamos interessados em verificar que vale a relação $V - A + F = 2$, o que pode ser verificado na seção (1.3.5).

Com isso, podemos demonstrar o seguinte fato:

Lema 1.3.1. *Todo mapa regular contém pelo menos uma região poligonal com menos de seis lados.*

Demonstração: Seja F_n o número de regiões com V vértices e F o número total de regiões no mapa. Se uma dada região não tem vértices ou tem apenas um vértice, então ela tem apenas um país vizinho e podemos colori-la com qualquer cor, exceto com a cor do vizinho. Como essas regiões não causam problemas, vamos deixá-las de lado e supor, no resto da prova, que elas não estão presentes. Assim, temos que:

$$F = F_2 + F_3 + ... + F_k. \tag{1.2}$$

Cada fronteira está ligada a exatamente dois vértices e em cada vértice se conectam três fronteiras. Se A é o número total de fronteiras no mapa e V é o número total de vértices, temos

$$2A = 3V. \tag{1.3}$$

Os países com dois vértices têm duas fronteiras; países com três vizinhos têm três fronteiras, e assim por diante. Como cada fronteira pertence a dois países, o resultado da soma $2F_2 + 3F_3 + ...$, é igual ao dobro do número de fronteiras no mapa, isto é,

$$2A = 3V = 2F_2 + 3F_3 + ... + . \tag{1.4}$$

Multiplicando ambos os lados da fórmula de Euler, equação (1.1), por seis, temos

$$6V + 6F - 6A = 12. \tag{1.5}$$

Da equação (1.3), podemos ver que

$$4A = 6V. \tag{1.6}$$

Substituindo na equação (1.5), temos

$$6F - 2A = 12. \tag{1.7}$$

Como temos a equação (1.2), chegamos a

$$6(F_2 + F_3 + ...) - (2F_2 + 3F_3 + ...) = 12, \tag{1.8}$$

que pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} &(6-2)F_2 + (6-2)F_3 + (6-2)F_3 + (6-2)F_4 + \\ &+(6-2)F_5 + (6-2)F_6 + (6-2)F_7 + ... = 12. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Como o lado direito da equação (1.9) é um número positivo, podemos concluir que pelo menos um dos números F_2, F_3, F_4, F_5 deve ser positivo. Ou seja, o mapa deve conter pelo menos uma região com menos de seis lados, e o Lema está provado. ∎

Teorema 1.3.2 (Teorema das Cinco Cores). *Todo mapa pode ser colorido com, no máximo, cinco cores.*

Demonstração 1.3.1. Pelo Lema (1.3.1), podemos considerar que o mapa possui pelo menos uma região com menos de seis fronteiras (menos de seis vizinhos). Vamos separar a demonstração em dois casos.

Caso 1: O mapa contém uma região R com 2, 3 ou 4 vizinhos

Neste caso, para pintar o mapa M com n regiões, vamos remover uma das fronteiras da região R, unindo-a, momentaneamente, a alguma região vizinha. O mapa M_1 resultante será regular, com $(n-1)$ regiões, conforme mostrado no esquema da figura (1.14).

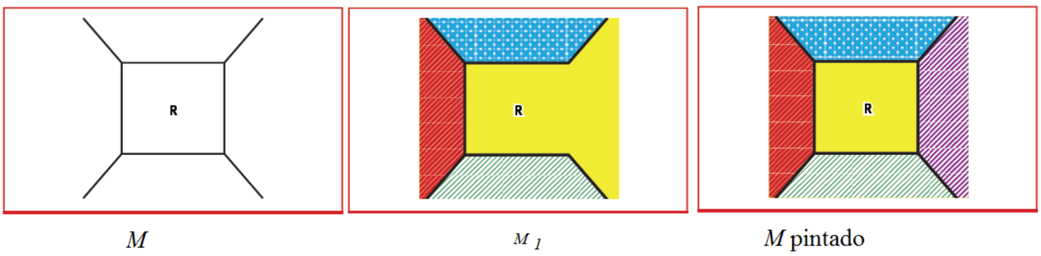


Figura 1.14: Mapas: M, M_1 e M pintado (TOREZZAN,2004, p.5).

Como a região R possui no máximo quatro vizinhos, se M_1 puder ser colorido com cinco cores, o mapa original M também poderá. Para tanto, basta voltar ao mapa original (devolvendo a fronteira retirada) e pintar a região R com uma cor diferente das de seus vizinhos.

Caso 2: O mapa contém uma região *R* com 5 vizinhos

Neste caso, vamos denotar por W_1, W_2, W_3, W_4 e W_5 as cinco regiões vizinhas a R, conforme esquema mostrado na figura (1.15). Sempre podemos encontrar duas dessas vizinhas que não estejam lado a lado. Vamos supor que W_1 e W_3 não são vizinhas entre si. Podemos remover as fronteiras de R, formando uma grande região que engloba W_1, R e W_3.

O novo mapa será regular e terá $(n-2)$ regiões. Se este novo mapa puder ser colorido com cinco cores, o mapa original M também poderá. Para tanto, basta voltar ao mapa original, devolvendo as fronteiras retiradas. Neste caso, como W_1 e W_3 possuem a mesma cor, a região R estará em contato com, no máximo, quatro cores distintas e uma quinta cor pode ser atribuída a ela.

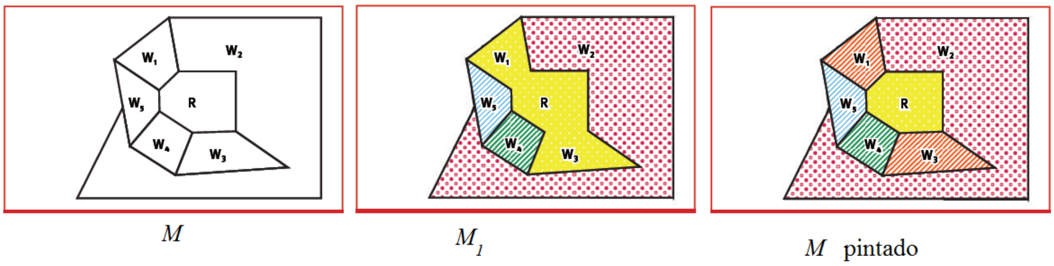


Figura 1.15: Mapas: M, M_1 e M pintado (TOREZZAN,2004, p.6).

Procedendo de acordo com o descrito nos casos **1** e **2**, podemos converter qualquer mapa regular M em um novo mapa M que tem $(n-1)$ ou $(n-2)$ regiões, com a seguinte propriedade: se puder ser pintado com cinco cores, M também poderá.
Esse processo pode ser aplicado recursivamente a M_1, produzindo uma sequência de mapas M_1, M_2, M_3, ..., tal que, se M_{j+1} puder ser pintado com cinco cores, então M_{j-1} também poderá.
Como o número de regiões nos mapas dessa sequência sempre diminui, chegaremos a um mapa que contém cinco ou menos regiões. Tal mapa pode claramente ser colorido com, no máximo, cinco cores. Assim, retornando etapa por etapa, concluímos que o mapa original M pode ser colorido com cinco cores, o que completa a prova. ∎.

1.3.7 Brincadeira topológica com as letras do alfabeto

Consideremos as letras do alfabeto:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, W, Y, Z

Os grupos de letras abaixo são topologicamente equivalentes:

- E, F, G, T, Y;
- C, I, J, L, M, N, S, U, V, Z, W;
- D, O ;
- K, X ; e
- A, R .

Além desses, temos os grupos formados por um único elemento:

- B ;
- H;
- P;
- Q.

O conhecimento desses 9 grupos possibilita uma aprendizagem do alfabeto de forma lúdica através de uma brincadeira topólogica, ao deformar um elemento ou letra de um grupo em outras letras desse mesmo grupo. Assim, uma criança ao ser alfabetizada aprenderia inicialmente uma letra de cada grupo para posteriormente, através da brincadeira topológica de deformar, transformar em outra letra topologicamente equivalente do mesmo grupo.

1.3.8 Problema do casaco

Vista-se com um casaco deixando-o desabotoado e por debaixo deste, esteja com um colete. Problema: é possível tirar o colete sem tirar o casaco? Esta operação tem de ser feita com a restrição de nunca, durante a retirada do colete, seus braços saírem das mangas do casaco. Primeiro desabotoe o colete. Em seguida, puxe o lado esquerdo do casaco para dentro da abertura do braço esquerdo, a partir de fora. Force a abertura do braço por cima do ombro esquerdo e depois para baixo, até ficar sobre o braço esquerdo. A abertura envolve agora o casaco por trás do ombro esquerdo. Continue a forçar a abertura do braço à volta do corpo, passando-a por cima do ombro e braços direitos, e finalmente libertando-a do lado direito do casaco. Em outras palavras, a abertura do braço roda completamente à volta do corpo (MOREIRA,*et all*,2009, p.9).

Capítulo 2

Referenciais pedagógicos

O construtivismo tem diversas vertentes, mas todas concordam em considerar a aprendizagem como um processo no qual o aprendiz relaciona a informação que lhe é apresentada com seu conhecimento prévio sobre esse tema. A história da construção do conhecimento pessoal é a história da vida de cada um de nós, pois construímos esse conhecimento de uma maneira específica e individual. Assim esse capítulo irá tratar das ideias do construtivismo, sua função com a transposição didática e a relação com a aprendizagem significativa utilizando mapas conceituais.

2.1 Construtivismo: idéias de Piaget

Até pouco tempo atrás, e ainda hoje, em muitos lugares do mundo, as teorias de aprendizagem, com suas respectivas epistemologias, dividem-se em duas correntes: do ponto de vista epistemológico, empirista e apriorista (racionalista), e do ponto de vista pedagógico, pedagogia diretiva e pedagogia não-diretiva.

Para os aprioristas, a estrutura do conhecimento está no próprio sujeito, ou seja, sua bagagem cultural está geneticamente armazenada dentro dele, onde a função do professor, do ponto de vista metodológico, é apenas estimular que estes conhecimentos aflorem, pois a aprendizagem depende de um processo de maturação. Já para os empiristas, a base do conhecimento provém dos sentidos, está nos objetos, na observação. Para estes, o aluno é mero receptor, é tabula rasa e o conhecimento é algo fluido, que pode ser repassado de um para outro pelo contato entre eles, seja de forma oral, escrita, gestual, etc. O professor usa a metodologia do falar, explicar e o aluno do ouvir e repetir verdades prontas e acabadas. É nesta teoria que baseiam-se a maioria das correntes pedagógicas que conhecemos e que usualmente denominamos de tradicionais.

Rompendo com estes dois paradigmas, ou melhor dizendo, fundindo-os em um único, temos a teoria de Piaget. Jean Piaget[1896-1980][1], foi um dos primeiros estudiosos a pesquisar cientificamente como o conhecimento era formado na mente de um indivíduo, com estudos em observações de bebês. Observou como um recém-nascido passava do estado de não reconhecimento de sua individualidade frente ao mundo que o cerca indo até a idade de adolescentes, onde já temos o início de operações de raciocínio mais complexas.

Do fruto de suas observações, sistematizadas por uma metodologia de análise, denominada Método Clínico, Piaget estabeleceu as bases de sua teoria, que chamou de Epistemologia Genética, cuja fundamentação está descrita em um de seus livros, O Nascimento da Inteligência na Criança (1982): o sujeito tem potencialidades e características próprias, mas, se o meio não favorece esse desenvolvimento (fornecendo objetos, abrindo espaços e organizando ações), elas não se concretizam.

Piaget define três conceitos fundamentais para sua teoria:

1. interação,
2. assimilação,
3. acomodação.

Ferreira(1998) afirma em relação a esses conceitos que :

[1] Biólogo por formação, psicólogo pela classificação profissional, mas epistemólogo pelo conjunto de sua obra.

> É imprescindível que se compreenda que sem uma **interação** (atitude) do sujeito com o objeto, que perturbe as suas estruturas, este não tentará **acomodar-se** à situação, criando uma futura **assimilação** do objeto, dando origem às sucessivas **adaptações** do sujeito ao meio, com o constante desenvolvimento de seu cognitivismo (FERREIRA,1988)

Os estudos de Piaget não foram feitos para aplicação em sala de aula - por isso, é um equívoco falar em "método construtivista de ensino" -, mas suas teorias inspiraram as obras sobre Educação popular de Paulo Freire [1921-1997], sobre Matemática de Constance Kamii, sobre ética de Yves de la Taille e sobre a psicogênese da língua escrita de Emilia Ferreiro e Ana Teberosky. Têm influenciado também investigações nas didáticas específicas de cada disciplina. Dessa forma, no que tange à Educação, relacionaremos à epistemologia construtivista, a pedagogia relacional.

Pela concepção construtivista, o professor deve criar contextos, conceber ações e desafiar os alunos para que a aprendizagem ocorra. Segundo Mauri(1996) em O Construtivismo na Sala de Aula "o conhecimento não é incorporado diretamente pelo sujeito: pressupõe uma atividade, por parte de quem aprende, formulando hipóteses para entender o objeto de conhecimento, organizando e integrando os novos conhecimentos aos já existentes". Nesse sentido, é importante que o professor faça uma transposição didática daquele novo conhecimento.

2.2 Transposição didática

Transposição didática é um instrumento que possibilita transformar o saber sábio, ou conhecimento científico, em saber ensinado, ou conhecimento escolar(POLIDORO E STIGAR,2010). Para tanto, analisa-se o saber sábio, buscando compreendê-lo, para, através deste acontecer, modificar a sua forma, mantendo os aspectos essencias de seu conteúdo, e estabelecer o saber ensinado, ou seja aquele que possa ser ensinado pelos professores e aprendido pelos alunos, levando em consideração a estrutura cognitiva destes. A escola, dentre suas principais funções, tem o papel de socializar os conhecimentos produzidos pela humanidade.

Assim, a transposição didática enquanto o instrumento aludido acima, tem três etapas importantes: compreender aprofundadamente o *saber sábio* (aquele que os cientistas estabelecem); transpô-lo para o *saber a ensinar* (aquele que está nos livros didáticos); e através deste, adequá-lo à estrututa cognitiva dos estudantes, transformando-o no *saber ensinado* (aquele que acontece em sala de aula).

Os recursos importantes para instrumentalizar a transposição didática são a inter/transdisciplinaridade e a contextualização (ou recontextualização). Transposição didática, inter/transdisciplinaridade e contextualização (ou recontextualização) são na verdade três facetas inseparáveis de um mesmo processo complexo: transformar o conhecimento em conhecimento escolar a ser ensinado; definir o tratamento a ser dado a esse conteúdo e tomar as decisões didáticas e metodológicas que vão orientar a atividade do professor e dos alunos com o objetivo de construir um ambiente de aprendizagem eficaz.

Embora a noção de transposição didática tenha sido introduzida pelo sociólogo Michel Verret em 1975, foi Yves Chevallard em 1985 quem a difundiu com seu livro *La Transposition Didatique*em 1991(POLIDORO E STIGAR, 2010), onde mostra as transposições que um saber sofre quando passa do campo científico para a escola e alerta para a importância da compreensão deste processo por aqueles que lidam com o ensino das disciplinas científicas.

Segundo Polidoro e Stigar(2010,p.154), "Chevallard conceitua 'Transposição Didática' como o trabalho de fabricar um objeto de ensino, ou seja, fazer um objeto de saber produzido pelo "sábio" (o cientista) ser um objeto do saber escolar". Dessa forma a Teoria da Transposição Didática vem mostrar que o saber científico difere do saber a ser ensinado, como, também, do saber que é efetivamente ensinado; difere na forma, mantendo a essência do conteúdo.

Chevallard parte do pressuposto de que o ensino de um determinado elemento do saber só será possível se esse elemento sofrer certas "deformações" (mudanças na forma) para que esteja apto (adequado à estrutura cognitiva dos estudantes) a ser ensinado. Nesse aspecto, indica elementos que caracterizam o funcionamento didático com base no conceito de transposição didática, sendo que o saber ensinado supõe processos de: (CHEVALLARD,1991, apud MARANDINO, 2004, p. 97) [2]

- *descontemporalização*: o saber ensinado é exilado de sua origem e separado de sua produção histórica na esfera do saber sábio;
- *naturalização*: o saber ensinado possui o incontestável poder das "coisas naturais", no sentido de uma natureza dada, sobre a qual a escola agora espera sua jurisdição;
- *descontextualização*: existe algo invariante (significante) e algo variável no elemento do saber sábio correspondente ao elemento do saber ensinado e, nesse sentido, procede-se através de uma descontextualização dos significantes, seguida de uma recontextualização em um discurso diferente. No entanto, nesse processo, há algo que permanece descontextualizado, já que não se identifica com o texto do saber, com a rede de problemáticas e de problemas no qual o elemento descontextualizado encontrava-se originalmente, modificando dessa forma seu emprego, ou seja, seu sentido original;
- *despersonalização*: o saber considerado em *statu nascendi* está vinculado a seu produtor e se encarna nele. Ao ser compartilhado na academia, ocorre um certo grau de despersonalização comum ao processo de produção social do conhecimento, que é requisito para sua publicidade. Porém, esse processo é muito mais completo no momento do ensino, pois cumprirá uma função de reprodução e representação do saber sem estar submetido às mesmas exigências da produtividade.

[2]CHEVALLARD,Y. La Transposition Didactique.Paris: La Pensée Sauvage,1991

Temos, então, que as relações entre saberes científicos e saberes escolares ficam caracterizadas por uma transposição de conhecimentos, que tem origem no saber científico, destinados a serem incorporados como conhecimentos escolares. O reconhecimento do conceito da Transposição Didática justifica a introdução, no campo da didática, das reflexões referentes às escolhas dos saberes a ensinar, pois, a partir da maneira de escolher os saberes, certamente, rompe-se com a idéia de conhecimento linear, abrindo espaço para entender que existem diferentes transformações do saber científico.

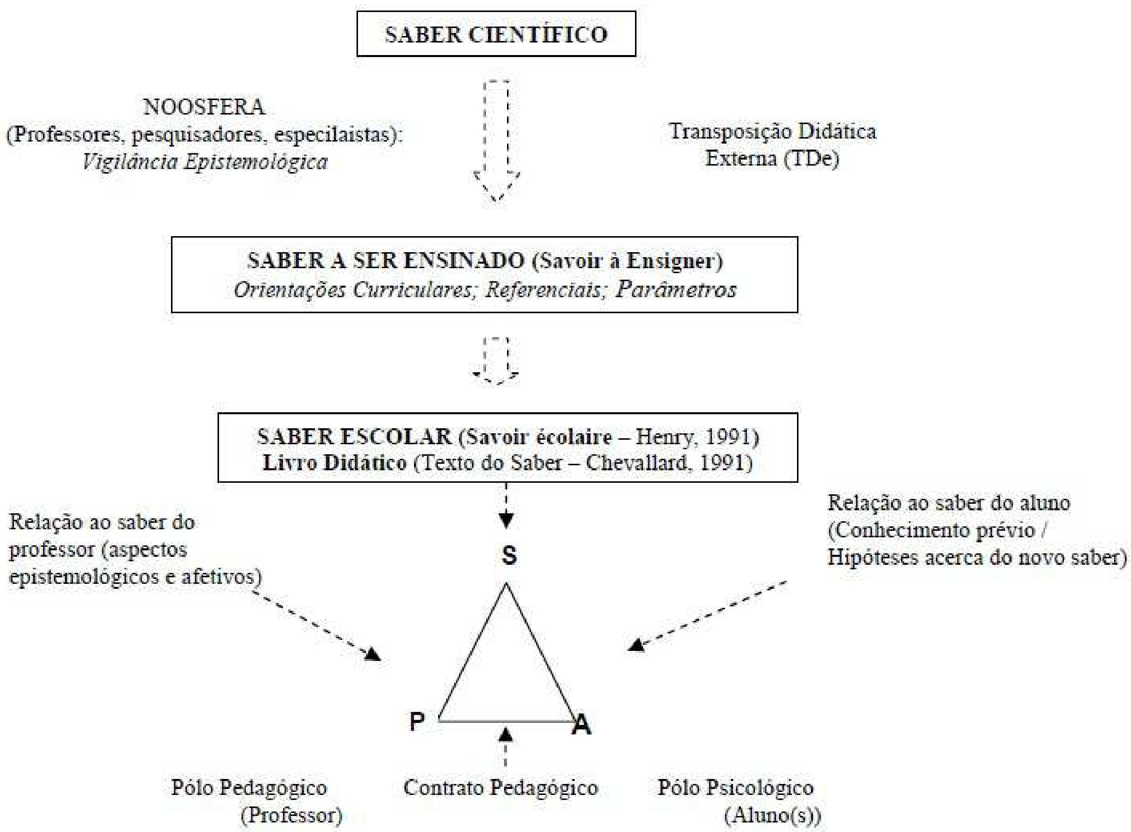


Figura 2.1: Esquema da trajetória do Saber na Transposição Didática (MATOS FILHO *et all*, 2008, p.1193).

Conforme ilustrado no esquema na figura (2.1) Matos Filho *et all* (2008, p.1193) retrata a trajetória sobre o caminho realizado pelo saber, do momento em que é produzido, saber científico, até sua chegada na sala de aula, saber a ser ensinado. Esse processo tem se mostrado transformador na prática docente por colocar o professor numa situação privilegiada, permitindo a ele "enxergar" o processo ensino-aprendizagem por um ponto de vista "externo" ao seu ambiente habitual.

Polidoro e Stigar, afirma que:

> No processo de didática, há uma profunda relação ente os elementos internos e externos que o influenciam. Apresenta-se subordinado a diferentes conjuntos de regras, como as forças institucionais da pesquisa; a própria instituição escolar (tipo de escola, objetivos, projeto pedagógico); as forças políticas (programas e currículos de secretarias de Educação); e a força do mercado (livros didáticos e/ou paradidáticos).
>
> [...]
>
> No processo de transformação do conhecimento, o funcionamento didático e científico do conhecimento não são os mesmos. Eles se inter-relacionam, mas não se sobrepõem. Para que um determinado conhecimento seja ensinado, em situação acadêmico-científica ou escolar, necessita passar por uma transformação, pois não foi criado com o objetivo de ser ensinado. A cada transformação sofrida pelo conhecimento corresponde um processo de Transposição Didática.
>
> Essa transformação do objeto de conhecimento científico em objeto de conhecimento escolar – para ser ensinado pelos professores e aprendido pelos estudantes – significa selecionar e inter-relacionar o conhecimento acadêmico, adequando-o às possibilidades cognitivas dos alunos e exemplificando de acordo com o seu contexto circundante.(POLIDORO E STIGAR,2010, p.155)

Apesar das posições distintas do professor em relação ao estudante, é assegurada, a cada momento de introdução de um novo objeto de ensino, uma certa equivalência entre eles, pois a distância temporal (experiência) em relação aos alunos, tende a diminuir quando da superação da contradição antigo/novo, isto é, no decorrer do processo bem sucedido de aprendizagem. Nesse sentido, a diferença entre o professor e o aluno estaria no "tempo de saber" e não apenas na relação de cada um com o saber propriamente dito.

A idéia da necessidade de algum tipo de adaptação do conhecimento quando se trata de ensiná-lo pode ser considerada virtualmente unânime no meio educacional como reflexão acerca dos desdobramentos dessa constatação, desenvolvida por diferentes caminhos, com diversos graus de importância e sentido atribuídos a esse processo de transformação do conhecimento a ser ensinado. [3]

As propostas teóricas de muitos estudiosos da didática da matemática tentam explicar a relação entre professor, aluno e saber. Dessa forma, vislumbra-se a teoria da transposição didática mostrando a importância de se pensar no preparo das aulas: como redigi-las, como organizá-las, como contextualizá-las; isso porque, em essência, o trabalho de transposição diz respeito aos saberes.

2.3 Aprendizagem significativa

Uma das finalidades da educação escolar é propiciar ao aluno meios para que aprenda de forma que se lembre do que aprende quando precisar seja para a aprendizagem de novos conteúdos, seja para resolver problemas com que se depara na sua vida acadêmica ou fora dela, preparando para o exercício da cidadania, cabendo formar o aluno com conhecimentos, habilidades, valores, atitudes, formas de pensar e atuar na sociedade através de uma aprendizagem que seja significativa.

Aprendizagem significativa, conceito central da teoria da aprendizagem do psicólogo David Paul Ausubel (2008), estabelece que existe uma interação entre o novo conhecimento e o já existente, na qual ambos se modificam. À medida que o conhecimento prévio serve de base para a atribuição de

[3] http://www2.dbd.puc.br/pergamum/tesesabertas/0212105_4_cap_3.pdf

significados à nova informação, ele também se modifica. A estrutura cognitiva está constantemente se reestruturando durante a aprendizagem significativa, o processo é dinâmico e o conhecimento vai sendo construído.

A caracterização dessa aprendizagem está relacionada com a mudança ou evolução da estrutura cognitiva do que é aprendido, permanecendo por mais tempo disponível na memória e, mesmo esquecido, é mais facilmente lembrado, bastando para isso colocar o aluno em contato com atividades que possam promover esta mudança ou evolução em sua estrutura cognitiva. Um dos desafios dos educadores em geral.

Segundo Smole, para que uma aprendizagem seja significativa,

> [...]se exige que seja vista como a compreensão de significados, relacionando-se as experiências anteriores e vivências pessoais dos alunos, permitindo a formulação de problemas de algum modo desafiantes que incentivem o aprender mais o estabelecimento de diferentes tipos de relações entre fatos, objetos, acontecimentos, noções e conceitos, desencadeando modificações de comportamentos e contribuindo para a utilização do que é aprendido em diferentes situações. (SMOLE, 2002)

Santana, afirma que,

> [...] partindo dos referenciais propostos inicialmente por Ausubel, pode ser admitido ou começado a ter consciência de que a aprendizagem se divide em três grupos como é proposto por sua teoria: a cognitiva, a efetiva e a psicomotora. Na aprendizagem cognitiva os indivíduos armazenam as informações ou eventos não sendo construído ou despertado, nessa fase, nenhum sinal que demonstre prazer, dor, satisfação, desconforto alegria ou tristeza como acontece na aprendizagem efetiva. A aprendizagem que se dá por meio de respostas ou estímulos musculares adquiridos através de treinos ou práticas repetitivas Ausubel classifica como psicomotora.(SANTANA, 2009)

Pelizzari & outros propõe que,

> A intervenção educativa precisa, portanto, de uma mudança de ótica substancial, na qual não somente abranja o saber, mas também o saber fazer, não tanto o aprender, como o aprender a aprender. Para isso, é necessário que os rumos da ação educativa incorporem em sua trajetória um conjunto de legalidades processuais.(PELIZZARI & OUTROS, 2001, P.40)

Para Santos (2012)a concretização dessa aprendizagem se dá através do que entendemos ser os sete passos da (re)construção do conhecimento:

1. O sentir – toda aprendizagem parte de um significado contextual e emocional.
2. O perceber – após contextualizar o educando precisa ser levado a perceber as características específicas do que está sendo estudado.
3. O compreender – é quando se dá a construção do conceito, o que garante a possibilidade de utilização do conhecimento em diversos contextos
4. O definir – significa esclarecer um conceito. O aluno deve definir com suas palavras, de forma que o conceito lhe seja claro.
5. O argumentar – após definir, o aluno precisa relacionar logicamente vários conceitos e isso ocorre através do texto falado, escrito, verbal e não verbal.
6. O discutir – nesse passo, o aluno deve formular uma cadeia de raciocínio através da argumentação.
7. O transformar – o sétimo e último passo da (re)construção do conhecimento é a transformação. O fim último da aprendizagem significativa é a intervenção na realidade. Sem esse propósito, qualquer aprendizagem é inócua.

As sete fases apresentadas ajudam a caracterizar a ação do professor frente a esse desafio. A compreensão das atitudes a serem adotadas em cada etapa, capacita o professor a promover a aprendizagem significativa.

Para Mizukami, os professores precisam mais do que uma compreensão pessoal da matéria que ensinam.

> [...] Eles necessitam possuir uma compreensão especializada da matéria/área de conhecimento que lhes permita criar condições para que a maioria de seus alunos aprenda. Deverão gerar formas alternativas de lidar com suas disciplinas – análises, ilustrações, metáforas, exemplos, experimentos, simulações, dramatizações, músicas, filmes, casos de ensino, demonstrações etc. – que levem em consideração diferentes habilidades, conhecimentos prévios e estilos de aprendizagem de seus alunos. O modelo do raciocínio pedagógico contempla, precisamente, o processo de construção desse conhecimento de como ensinar.(MIZUKAMI, 2004)

A análise do currículo e o ensino sob uma abordagem ausubeliana, em termos de significados, implicam para Moreira:

1. identificar a estrutura de significados aceita no contexto da matéria de ensino;
2. identificar os subsunçores (significados) necessários para a aprendizagem significativa da matéria de ensino;
3. identificar os significados preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz;
4. organizar seqüencialmente o conteúdo e selecionar materiais curriculares, usando as idéias de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa como princípios programáticos;
5. ensinar usando organizadores prévios, para fazer pontes entre os significados que o aluno já tem e os que ele precisaria ter para aprender significativamente a matéria de ensino, bem como para o estabelecimento de relações explícitas entre o novo conhecimento e aquele já existente e adequado para dar significados aos novos materiais de aprendizagem.(MOREIRA, 1988, p.5)

Para que a aprendizagem significativa aconteça, é necessario que haja a construção de “links” entre as estruturas cognitivas ou mentais preexistentes dos indivíduos e a pré-disposição por parte do aprendiz para aprender, senão seria possível construir conhecimento verdadeiro e efetivo em um indivíduo por mero desejo do processo. A outra condição é quanto ao nível de organização que o conteúdo a ser aprendido é apresentado como materiais de apoio didático onde permita despertar no estudante a curiosidade e interesse pelo conhecimento apresentado pelo conteúdo trabalhado.

Sugere-se então a participação ativa do sujeito, sua atividade auto - estruturante, a participação pessoal do aluno na aquisição de conhecimentos, seja de tal forma que não sejam uma repetição ou cópia dos formulados pelo professor ou pelo livro-texto, mas uma reelaboração pessoal.

2.4 Mapas conceituais

Uma forma de perceber indicativos de aprendizagem significativa é o uso de mapas conceituais (MOREIA,1988), e que foi originalmente baseado na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. São instrumentos que permitem descobrir as concepções equivocadas ou interpretações não aceitas de um conceito, ilustradas por uma frase que inclui no conceito.

Podemos dizer que mapa conceitual é uma representação gráfica em duas ou mais dimensões de um conjunto de conceitos construídos de tal forma que as relações entre eles sejam evidentes. O tema principal fica no topo, por hierarquia dentro de um retângulo, logo abaixo se coloca os conceitos mais especificos relacionados com o principal, também dentro de um retângulo e unido por um segmento ou seta descritiva (com uma palavra ou frase), que estabelece uma conexão entre os elementos conceituais. As frases de ligação têm funções estruturantes e exercem papel fundamental na representação de uma relação entre dois conceitos. A dois conceitos, conectados por uma frase de ligação chamamos de proposição, caracteristica particular dos mapas conceituais se comparados a outros tipos de representação como os mapas mentais.

Mapas conceituais podem ser instrumentos úteis para negociar significados, quer dizer, os alunos sempre trazem alguma coisa deles, não são como uma tábua rasa ou um recipiente vazio que o professor deve preencher. Os conceitos que aparecem no mapa, as relações estabelecidas pelo aluno, a presença ou não de linhas de ligação entre os conceitos, bem como o uso de conectivo adequado para indicar a relação envolvida, são elementos que indicam a ocorrência de aprendizagem significativa. Como um exemplo, Silveira e Miltão (1999), objetivando mostrar aos estudantes um esboço da origem do Universo (conceito prévio trazido à baila pelos próprios alunos na sala de aula), e a sua relação com a Astronomia, escolheram a conceito da Temperatura do Universo por ser um tema que engloba uma quantidade essencial de conteúdos físicos, os quais poderiam ser trabalhados na sala de aula, utilizando os mapas conceituais.

Para Moreira,

> Mapas conceituais podem ser traçados para toda uma disciplina, para uma subdisciplina, para um tópico específico de uma disciplina e assim por diante. Existem várias maneiras de traçar um mapa conceitual, ou seja, há diferentes modos de representar uma hierarquia conceitual em um diagrama. Além disso, mapas conceituais traçados por diferentes especialistas em uma mesma área de conhecimento, provavelmente, refletirão pequenas diferenças de compreensão e interpretação das relações entre conceitos-chave dessa área. O ponto importante é que um mapa conceitual deve ser sempre visto como "um mapa conceitual", não como "o mapa conceitual" de um determinado conjunto de conceitos. Isto é, qualquer mapa conceitual deve ser visto apenas como uma das possíveis representações de uma certa estrutura conceitual. (MOREIRA,2006, p.10)

Ainda segundo Moreira,

> Na medida em que os alunos utilizarem mapas conceituais para

> integrar, reconciliar e diferenciar conceitos, na medida em que usarem esta técnica para analisar artigos, textos, capítulos de livros, romances, experimentos de laboratório, e outros materiais educativos do currículo, eles estarão utilizando o mapeamento conceitual como um recurso de aprendizagem. (MOREIRA,1988, p.5)

Segundo Tavares,

> Quando um aprendiz utiliza o mapa durante o seu processo de aprendizagem de determinado tema, vai ficando claro para si as suas dificuldades de entendimento desse tema. Um aprendiz não tem muita clareza sobre quais são os conceitos relevantes de determinado tema, e ainda mais, quais as relações sobre esses conceitos. Ao perceber com clareza e especificidade essas lacunas, ele poderá voltar a procurar subsídios (livro ou outro material instrucional) sobre suas dúvidas, e daí voltar para a construção de seu mapa. Esse ir e vir entre a construção do mapa e a procura de respostas para suas dúvidas irá facilitar a construção de significados sobre conteúdo que está sendo estudado. O aluno que desenvolver essa habilidade de construir seu mapa conceitual enquanto estuda determinado assunto, está se tornando capaz de encontrar autonomamente o seu caminho no processo de aprendizagem. Caso ele não consiga encontrar as respostas nas consultas ao material instrucional, ele ainda assim terá conseguido ter clareza sobre as suas perguntas, e desse modo já terá encaminhado a sua aprendizagem de maneira conveniente e segura. Pois quando se tem clareza das perguntas, ou das dúvidas, é mais fácil procurar ajuda de pessoas mais experientes.(TAVARES,2007, p.74)

No ensino, o uso de mapas conceituais feitos pelo professor apresenta vantagens e desvantagens. Moreira aponta possíveis vantagens, entre elas pode-se mencionar:

1. enfatizar a estrutura conceitual de uma disciplina e o papel dos sistemas conceituais em seu desenvolvimento;

2. mostrar que os conceitos de uma certa disciplina diferem quanto ao grau de inclusividade e generalidade e apresentar esses conceitos em uma ordem hierárquica de inclusividade que facilite sua aprendizagem e retenção;
3. proporcionar uma visão integrada do assunto e uma espécie de "listagem conceitual" daquilo que foi abordado nos materiais instrucionais.(MOREIRA, 1979)

Dentre as possíveis desvantagens, ainda pode-se citar:

1. se o mapa não tem significado para os alunos, eles podem encará-lo como algo mais a ser memorizado;
2. os mapas podem ser muito complexos ou confusos e dificultar a aprendizagem e retenção, ao invés de facilitá- las;
3. a habilidade dos alunos em construir suas próprias hierarquias conceituais pode ficar inibida em função de já receberem prontas as as estruturas propostas pelo professor (segundo sua própria percepção e preferência). (MOREIRA, 1979)

Ainda segundo Moreira e Buchweitz, na prática, essas desvantagens

> [...] podem ser minimizadas explicando os mapas e sua finalidade, introduzindo-os quando os estudantes já têm alguma familiaridade com o assunto, chamando atenção que um mapa conceitual pode ser traçado de várias maneiras e estimulando os alunos a traçar seus próprios mapas. Além disso, o professor, ao elaborar mapas conceituais para usá-los como recurso instrucional, deve ter sempre em mente um compromisso entre clareza e completeza. Ou seja, nem todas as possíveis linhas que indicam relações entre conceitos devem ser traçadas a fim de manter a clareza do mapa.(MOREIRA e BUCHWEITZ, 1993)

Outra possibilidade de uso dos mapas conceituais levantado por Moreira, está na avaliação da aprendizagem.

> Avaliação não com o objetivo de testar conhecimento e dar uma nota ao aluno, a fim de classificá-lo de alguma maneira, mas no sentido de obter informações sobre o tipo de estrutura que o aluno vê para um dado conjunto de conceitos. Para isso, pode-se solicitar ao aluno que construa o mapa ou este pode ser obtido indiretamente através de suas respostas a testes escritos ou entrevistas orais. (MOREIRA,2006, p.17)

Portanto, o uso de mapas conceituais como instrumentos de avaliação implica uma postura que, para muitos, difere da usual. Na avaliação através de mapas conceituais a principal idéia é a de avaliar o que o aluno sabe em termos conceituais, isto é, como ele estrutura, hierarquiza, diferencia, relaciona, discrimina, integra, conceitos de uma determinada unidade de estudo, tópico, disciplina, etc. buscando informações, significados e relações significativas entre conceitos-chave da matéria de ensino segundo seu ponto de vista.

Capítulo 3

A topologia na sala de aula

Tendo em vista a importância da educação matemática, faz-se necessário oferecer ao aluno uma boa formação e com certeza o professor é responsável por esse processo e deve ser mediador entre o conhecimento matemático e o aluno. O propósito dessa pesquisa constitui um relato de experiência, sobre a mediação do conceito de topologia na construção de significados para o aluno. Portanto propomos a utilização dos mapas conceituais nessa construção de conceitos.

Para a elaboração desses mapas conceituais, partimos dos princípios ausebianos (Ausubel), em que os alunos devem aprender um conteúdo inicial (conceitos e idéias), e a partir desse conteúdo, associar progressivamente ao novo conteúdo, Topologia, fazendo uma distinção (diferenciação) entre esses conceitos, onde os conceitos originais buscam associações entre si, interligando-se de forma expansiva e sistemática através de um questionário com conhecimento prévios, estruturado no construtivismo.

Torna-se necessária a discussão sobre as concepções de práticas educativas, que são conduzidas pelas tendências pedagógicas e sobre a forma pela qual é compreendido o processo de ensino-aprendizagem. O problema da aprendizagem na sala de aula está na falta da utilização de recursos que facilitem a passagem da estrutura conceitual da disciplina, para a estrutura cognitiva do aluno, ou seja, uma adequação desse processo para possibilitar a aprendizagem significativa.

Nossa pesquisa se deu com alunos do 2º e 3º anos do vespertino do Ensino Médio do Colégio Estadual José Ferreira Pinto, na cidade de Feira de Santana na Bahia. A atividade foi dividido em 4 aulas, em dois dias distintos no turno da manhã.

3.1 1º dia: apresentação de topologia de superfície e brincadeiras topológicas

O primeiro passo da aula foi apresentar um questionário conforme anexo B com conhecimentos prévios referentes a conteúdos de topologia a fim de analisar quais conceitos eles tinham sobre o assunto. Em nenhum momento apareceu a palavra topologia. Inicialmente ficaram sem saber direito o que deveriam fazer, se estariam certas ou erradas as respostas às questões propostas, deixando-os inquientos, por vezes recorrendo ao colega do lado, mas foram tranquilizados de que o mais importante não era encontrar uma resposta pronta, definitiva, mas fazer um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos, para que em um momento futuro pudessem estabelecer comparações. A concepção construtivista justifica a necessidade de considerar esses conhecimentos prévios como elemento fundamental do estado inicial dos alunos por fazer parte da própria definição construtivista da aprendizagem escolar.

Em seguida os alunos foram motivados para que ficassem curiosos sobre as novidades que iriam assistir no filme "Arte e Matemática:Forma que transforma - parte 1", com algumas perguntas: Quem já passou por uma ponte que balança? Quem já fez aviãozinho de papel, sem cortar a folha utilizada? Quem já brincou com massa de modelar ou argila? Quem já viu uma cinta ou anel com uma única face? Foram informados que o filme que eles assistiriam trata de tudo isto, apresentando uma geometria que estuda as transformações contínuas, como as dobraduras para fazer aviãozinho, bem como as transformações descontínuas, que acontecem quando um objeto se rompe.

Após a exibição do filme, foram comentadas algumas situações acerca do vídeo como a definição de Topologia de uma superfície, “Geometria de Borracha”, como o estudo das propriedades geométricas que permanecem inalteradas mesmo que existam as deformações de esticar, encolher, torcer, cortar, e colar novamente no mesmo sentido do corte.

O novo conteúdo, Topologia, apresentado como objeto de aprendizagem significativa, significa que contando com a ajuda e guias necessárias, grande parte da atividade mental construtiva dos alunos deve consistir em mobilizar e atualizar seus conhecimentos anteriores para entender sua relação ou relações com o novo conteúdo.

Foi identificando características de continuidade e descontinuidade em obras de arte exposto no vídeo, além de algumas questões para a distinção de transformações contínuas de transformações descontínuas:

- Continuidade é uma característica do conjunto dos números reais?
- A descontinuidade é uma característica do conjunto dos números inteiros?
- Considerando o tecido utilizado para confeccionar a roupa que vestimos hoje, é possível identificar algumas transformações contínuas ou descontínuas feitas sobre o tecido?

Dessa forma os alunos puderam comparar e fazer ligações entre o assunto apresentado com os conhecimentos prévios que foram analisados no questionário. Sobre perguntas relacionadas com os aspectos quantitativos ou qualitativos, conforme questões (1) e (2) do referido questionário, há evidente dicotomia entre o quantitativo e o qualitativo. Eles conseguiram elaborar alguns pontos, mas nem todos, compararando propriedades métricas(Geometria Euclidiana)com topológicas conforme a questão (3). Com a discussão puderam rever que as noções de vizinhança, fora-dentro, interior-exterior, aberto-fechado, longe-perto, separado-unido, contínuo-descontínuo, alto-baixo, são noções topológicas, relacionados a questões do qualitativo.

Na questão (4), se fossem feitos de borracha, quais situações poderia haver uma transformação, alguns exemplos tinham no vídeo, outros eles puderam analisar se aconteceriam ou não a transformação. O que gerou um questionamento maior foram as propriedades invariantes (permanecem as mesmas), propostas na questão (5), possibilitando uma discussão entre eles mesmos e relacionando os conceitos de pontos interior e exterior, vizinhança e continuidade.

Em seguida foi apresentado o origami, como a arte de transformar folhas de papel em diversas figuras, através de dobraduras, as transformações contínuas. Foi pedido que fizessem um origami partindo de uma folha de papel, observando que a folha toma várias formas conforme a figura (3.1), devido às atividades feitas pelos alunos, mas continuará a ser uma folha de papel, uma superfície, só que agora ela não é mais dita plana.

Figura 3.1: Construção de origami.

O estudo das propriedades da topologia também foi demonstrado com a construção da faixa de Moebius reafirmando as características dessas propriedades. Os alunos se surpreenderam ao verificar que a faixa tinha um único lado, riscando com giz de cera. Em seguida, brincaram com a construção de outras faixas de Moebius utilizando recortes conforme mostrado na figura (3.2):

Figura 3.2: Construção de faixas de Moebius.

Foram feitos alguns questionamentos sobre a faixa de Moebius:

(a) Uma tira de papel e uma cinta de Moebius são topologicamente iguais? Por quê?

(b) Quais são as diferenças entre uma tira de papel e uma cinta de Moebius?

(c) Quais são as diferenças entre a cinta de Moebius e as cintas obtidas a partir de um e/ou dois cortes?

Foi enfatizado que uma transformação só é contínua quando for realizada sem furar, sem emendar e sem cortar. Se uma ou mais destas três ações ocorrer, a transformação não é contínua, ou seja, é descontinua.

A outra atividade topológica serviu de confirmação de que a Topologia é a " Geometria de Borracha": em uma bexiga branca vazia foi pedido que desenhassem nela vários triângulos, quadrados, círculos conforme a figura (3.3), ou outro desenho de seu gosto, conforme a figura (3.4); poderia ser um desenho de cada vez, para observar melhor. No enchimento da mesma, foram verificando como ficaram os desenhos feitos e observando as transformações que eles iam sofrendo, lembrando aos alunos que a bexiga, enquanto um objeto físico (i.e, uma bexiga) permanece o mesmo (continua sendo uma bexiga), mudando somente a sua forma, a sua representação. Puderam também observar no plano, uma circunferência se transformar em um elipse ou em um ovóide, mas não em uma parábola; e no espaço tridimensional, uma esfera se transformar um elipsoíde, mas não em um toro, ou em uma câmara de ar. Imaginaram que os desenhos e os objetos são feitos de borracha, como a bexiga.

Figura 3.3: Transformações de figuras geométricas.

Figura 3.4: Transformações de um desenho.

Em todas as atividades, buscaram-se as transformações contínuas realizadas.

3.2 2º dia: aprendizagem de conceitos topológicos e construção dos mapas conceituais respectivos

No início da aula foi feito um questionamento do que foi trabalhado na aula anterior (topologia, "geometria de borracha" e as deformações) para verificarmos o que foi fixado pelos alunos. Pudemos comprovar pelas respostas dadas que os temas trabalhados foram fixados. Algumas respostas representativas foram: *a topologia está relacionada a aspectos qualitativos, que se referem a dentro-fora, interior-exterior, aberto-fechado, longe-perto, alto-baixo*; *que nas transformações sofridas mudam as formas, os ângulos e as distâncias, nas superfícies, e permanece a continuidade, os pontos: interior e exterior.*

Consequentemente, avançamos no estudo, apresentando novos conhecimentos. Os alunos foram informados que se uma superfície é obtida de outra por uma combinação, de um número finito de vezes, de algumas ou todas as três primeiras transformações (esticar, encolher e torcer), diremos que elas são isotópicas; e se for das quatro deformações (esticar, encolher, torcer e cortar, e colar novamente no mesmo sentido do corte) dizemos que elas são homeomorfas.

Em seguida foi passado o filme "Forma que transforma - parte 2" e comentado algumas situações acerca do vídeo como o problema clássico das sete pontes de Königsberg e o caminho euleriano, situação na qual um dos alunos disse que adora desvendar: poder desenhar, com um único traço, sem tirar o lápis do papel, passando o lápis somente uma vez em cada segmento e consequentemente o estudo dos grafos, proposto no questionário do anexo B, na questão (6) mostrando que tal atividade desperta o interesse dos alunos.

Em seguida foi feita uma revisão breve de poliedros, fazendo diferença entre prismas e pirâmides, e não-poliedros. Foi distribuidas algumas embalagens e ou objetos com formatos de poliedros, salientando o que é vértice, aresta e vértices nos mesmos conforme figura (3.5).

Figura 3.5: Alguns tipos de poliedros a serem pesquisados.

Neles foi utilizada a relação de Euler na transformação topológica de poliedros convexos para mostrar grafos, fazendo relação do tipo de poliedro com as faces (F), os Vértices (V) e as Arestas (A), mostrado nas questões (7) e (8) do questionário B. Os alunos puderam verificar que a equação (1.1), $V - A + F = 2$, é um invariante topólogico, isto é depende apenas da forma que toma o poliedro quando é deformado, de modo a tornar-se uma superficie suave conforme mostra o esquema da figura (3.6) feita por um deles:

Nome	Nº de faces	Nº de arestas	Nº de vértices	Relação
Prisma de base triângular	5	9	6	V+F-A = 6+5-9 = 2
Pirâmide de base quadrangular	5	8	5	V+F-A = 5+5-8 = 2
Tronco de uma pirâmide de base quadrangular	6	12	8	V+F-A = 8+6-12 = 2
Poliedro	5	9	6	V+F-A = 6+5-9 = 2
Paralelepipedo	6	12	8	V+F-A = 6+8-12 = 2

Figura 3.6: Relação dos poliedros com número de lados, vértices e arestas.

Para avaliar os conceitos adquiridos sobre o tema de topologia, foi sugerido um esquema de atividades de elaboração dos mapas conceptuais baseado em um modelo proposto por Novak conforme anexo C.

- Pedi que listassem palavras que representem o que foi aprendido.
- Em seguida que enumerassem as palavras de forma hierárquica a partir dos mais inclusos até os mais ordenados, utilizando assim, o princípio da diferenciação progressiva.

Essas atividades foram apropriadamente realizadas conforme o esquema representativo da figura (3.7).

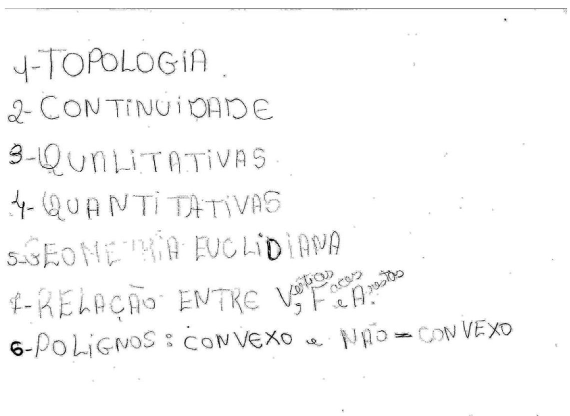


Figura 3.7: Enumeração de palavras do que foi aprendido.

A elaboração dos mapas foi realizada de acordo com os princípios da aprendizagem significativa (a hierarquização dos conceitos, a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora).

- Foi pedido que colocassem essa sequência hierárquica de conceito em retângulos formando um tipo de "árvore", incentivando a colocarem palavras curtas de ligações entre os retângulos.
- Foi sugerido que essas ligações fossem entre ramificações não lineares, promovendo assim a "reconciliação integrativa", ou seja, os conteúdos originais buscando associar-se entre si.

Essas atividades foram apropriadamente realizadas conforme os esquema representativos da figura (3.8).

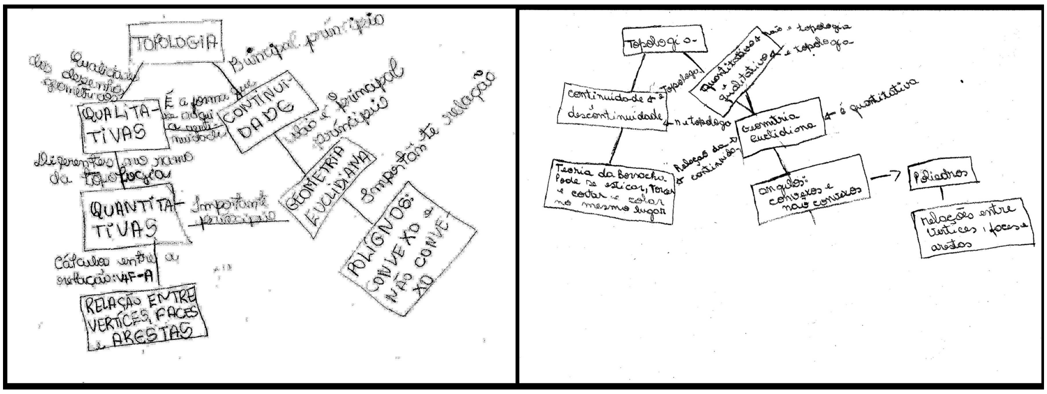


Figura 3.8: esboço de dois mapas conceituais construidos pelos alunos.

Não se pode esperar que o aluno, na sua primeira tentativa, apresentasse na avaliação o mapa conceitual "correto"; o que foi apresentado foi o mapa como ele compreendeu o tema abordado, o que nos permitiu a posteriori uma intervenção para a construção de um mapa mais adequado. Pois, o importante não é se esse mapa está certo ou não, mas sim, se ele dá evidências de que esteja aprendendo significativamente o conteúdo. Assim, procurei obter evidências de aprendizagem significativa, através de explicações orais, em relação a seu mapa para facilitar a tarefa de orientador nesse sentido. Para tanto, questionamos os alunos sobre alguns pontos conceituais que permitissem a construção de um mapa mais adequado, tais como: qualitativo e quantitativo, e topologia e geometria euclidiana, que foram palavras retratadas nos dois mapas apresentados na figura (3.8).

Assim, na construção dos mapas conceituais, no modelo proposto, podemos afirmar que o aluno viu a situação concreta e apontou esta visão relacionada com a interação pessoal dele com o problema. É neste momento que a interação e os questionamentos provocados pelo professor, corroboram para a facilitação da aprendizagem significativa. Assim em dupla, cada um mostrou para o outro seu ponto de vista, explorou seu esboço e puderam identificar possíveis erros de compreensão e depois de discutido, apresentaram o modelo da figura (3.9) após modificações e com alguns acréscimos.

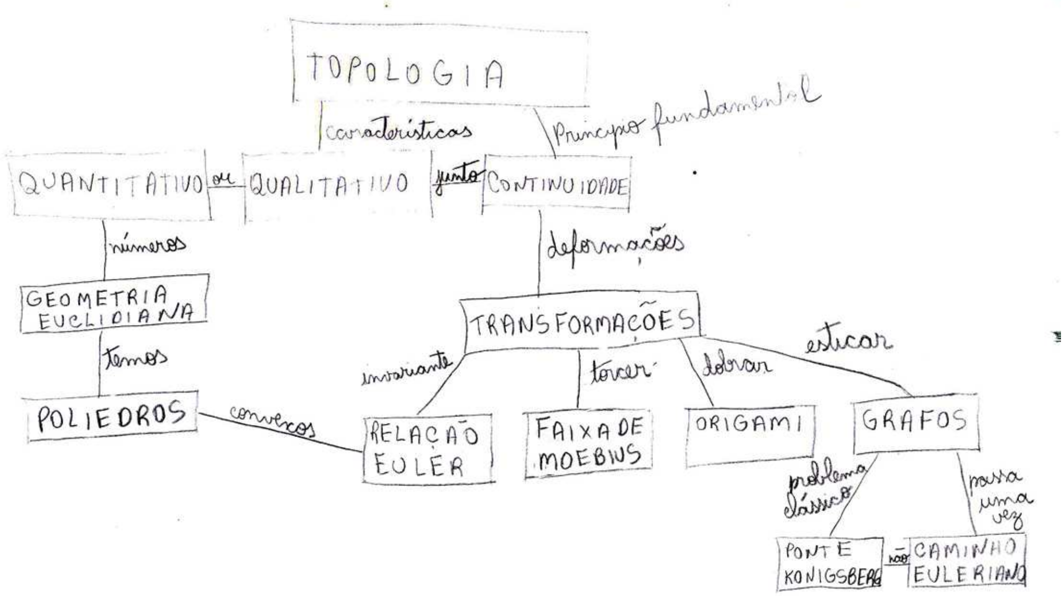


Figura 3.9: mapa conceitual depois de modificado.

Em seguida eles puderam fazer uma avaliação do que foi trabalhado em sala, conforme anexo D. Todos foram unânimes em afirmar que o conhecimento prévio que possuíam de topologia (quantitativo, qualitativo, noções de Geometria Euclidiana, poliedros), ajudou na construção das atividades ao usaram raciocínio lógico; que a houve praticidade na construção das atividades; que o tema Topologia é relevante e útil, sendo adequada aintervenção do professor; assim como o desenvolvimento do curso em relação ao nível de conhecimento do aluno, da mesma forma como foi abordada a aula de Topologia. Na avaliação evidenciou-se fatos relevantes das transformações topologicas, como uma letra se transformar em outra; uma rosca, numa xícara, sendo que algumas situações eles já tinham conhecimento (concepções prévias), mas a maneira como foi abordado se tornou mais significativa e com um nome, Topologia. Como sugestão foram propostas outras aulas mais dinâmicas e práticas para construção de novos conhecimentos.

Conclusão

A Topologia, embora sendo um dos ramos mais recentes da matemática, assume uma importância muito grande na ciência e na tecnologia, mas considerando que pode apresentar alguma complexidade, o mesmo pode ser levado para uma turma de nível médio em uma linguagem mais apropriada, considerando seus aspectos conceituais por exploração através de material manipulativo, questões investigativas, que podem proporcionar aos estudantes comparar conhecimentos de Topologia e Geometria Euclidiana.

Observando objetos do mundo material, vemos que eles podem ser agrupados em classes, com as mesmas propriedades e estruturas. Dentro da Topologia, as superfícies possuem propriedades que independem da métrica e podem ser agrupadas em classes de equivalência, as características. Então poderíamos classificá-las através dessas características, através das transformações, dentro do estudo da Topologia, como por exemplo: temos 23 letras do alfabeto, mas topologicamente temos 9 grupos (E, F, G, T, Y; C, I, J, L, M, N, S, U, V, Z, W; D, O; K, X ; A, R; B; H; P; Q), que seriam muito mais fáceis de serem estudados.

Na sua teoria, Ausubel apresenta uma aprendizagem que tenha como ambiente uma comunicação eficaz, respeite e conduza o aluno a imaginar-se como parte integrante desse novo conhecimento através de elos, de termos familiares a ele. Através da palavra, o educador pode diminuir a distância entre a teoria e a prática na escola, capacitando-se de uma linguagem que ao mesmo tempo desafie e leve o aluno a refletir e sonhar, conhecendo a sua realidade e os seus anseios. O importante é utilizar a transposição didática adequadamente para buscar analogias e comparações desses conhecimentos que tornem significativos ao individuo, o construtivismo tem papel importante nessa construção.

Acredita-se que os mapas conceituais se constituem em um instrumento potencialmente útil para o desenvolvimento dos conhecimentos em sala de aula, e as atividades apresentadas nesse trabalho foram pontos motivadores para as aulas.

Espera-se que as experiências desenvolvida com os alunos tenha contribuído para mostrar que o conteúdo de Topologia pode ser trabalhado no ensino médio e o material pedagógico produzido sirva como subsídio metodológico para outros professores.

Bibliografia

ALMEIDA, L. M. W. ; FONTANINI, Maria Lúcia de Carvalho . **Aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática: uma investigação usando mapas conceituais**. Investigações em Ensino de Ciências (Online), v. 15, p. 403-425, 2010. Disponível em:
http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo$_ID243/v15_n2_a2010.pdf.Acesso$: $novembro$2012.

BARR, Stephen. **Experiments in Topology**. New York: Crowell Company,1989.

BORGES, Carloman Carlos. **A topologia: considerações teóricas e implicações para o ensino da matemática**. Caderno de Física da UEFS, 03 (02): 15-35. Feira de Santana, 2005.

COURANT, Richard & ROBBINS, Herbert. **What is mathematic? An Elementary Approach to Ideas and Methods.** Oxford University Press: New York, 1996.

CUNHA, Sueli. **Problema das 3 casas** . Jornal da Matemática,05:1-3. Universidade Gama Filho. setembro de 2010. Disponivel em:
http://www.ugf.br/files/jornalmatematica/jogos-matematicos-5.pdf. Acesso: novembro 2012

DE MAIO, Waldemar. **Álgebra: espaços métricos e topológicos**. Fundamentos de Matemática. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

KATZ, Victor J., **A History of Mathematics**. An Introduction, 2nd ed., New York: Addison Wesley Longman, 1998.

MARANDINO, Martha.**Transposição ou recontextualização?** Revista Brasileira de Educação. Maio /Jun /Jul /Ago 2004 n.26. 95-108

MATOS FILHO, Maurício A. Saraiva de; MENEZES, Josinalva Estácio; SILVA, Ronald de Santana da & QUEIROZ, Simone Moura. **A transposição didática em Chevallard: As deformações/transformações sofridas pelo conceito de função em sala de aula**. Anais do Educere 2008. 1190-1201. VIII Congresso Nacional de Educação.PUCPR- PR.Disponível em:
<http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2008/anais/pdf/431$_2$46.*pdf* >
.
Acesso : *dezembrode*2013.

MELLO, G.N. **Tranposição didática, interdisciplinaridade e contextualização.**Disponível em:
http://www.namodemello.com.br/pdf/escritos/outros/contextinterdisc.pdf.
Acesso: dezembro de 2012.

MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti.**Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman**. Centro de Educação. Edição: 2004 - Vol. 29 - N 02. Revista Educação CE/UFSM. Disponível em: http://coralx.ufsm.br/revce/revce/2004/02/a3.htm. Acesso: dezembro de 2012.

MOREIRA, Luiz Guilherme Pantoja; PERES, Camila Araújo & SÁ, Pedro Francode. **Recreações Topológicas**. Anais VIII Encontro Paraense de Educação Matemática.08-09/2009. Belém,2009.

MOREIRA, Marco Antonio. **Mapas conceituais e aprendizagem significativa**. O Ensino, Pontevedra/Espanha & Braga/Portugal, N. 23 a 28: 87-95, 1988.

______ . **Mapas Conceituais e Diagramas de V**. Instituto de Física: UFRS, 2006.

MOREIRA, M. A. & BUCHWEITZ, B. **Novas estratégias de ensino e aprendizagem: os mapas conceptuais e o Vê epistemológico**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1993.

MUNKRES, James Raymond. **Topology**. 2. ed. N. Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs.,2000.

NOVAK, J. D., GOWIN, D. Bob. **Aprender a Aprender**. Trad. Carla Valadares. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1996.

PELIZZARI, Adriana; KRIEGL, Maria de Lurdes; BARON, Márcia Pirih; FINCK, Nelcy Teresinha Lubi & DOROCINSKI, Solange Inês. **Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel**.Rev. PEC, Curitiba, v.2, n.1, p.37-42, jul. 2001-jul. 2002.

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança**. 4. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1982.

POLIDORO, Lurdes de Fátima & STIGAR, Robson.**A Transposição Didática: a passagem do saber científico para o saber escolar**. Ciberteologia-Revista de Teologia e Cultura. Ano VI,Edição nº 27 – Ano VI – Janeiro/Fevereiro 2010. pg 153-159. Disponível em: http://ciberteologia.paulinas.org.br/ciberteologia/wp-content/uploads/2009/12/02A-transposicao-didatica.pdf.Acesso: dezembro de 2012.

SAMPAIO, João Carlos Vieira.**Uma Introdução à Topologia Geométrica: passeios de Euler, superfícies e o teorema das quatro cores**. São Carlos: EDUFSCar, 2008.

SANTANA, Edcarlos da Silva. **Estudo Sobre as Concepções Espontâneas no Ensino de Física: Um Esboço para a Compreensão das Idéias dos Estudantes**.Feira de Santana,2009. Monografia (Graduação em Física)- Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana.

SANTOS, Júlio César Furtado dos. **O desafio de promover a aprendizagem significativa**. UFRJ. Disponível em: http://cenfophistoria.files.wordpress.com/2012/02/textodesafio.pdf. Acesso: janeiro de 2013.

SILVEIRA, Tamila Marques & MILTÃO, M. S. R. **Incentivo ao ensino de astronomia, no nível fundamental, utilizando mapas conceituais**. Caderno de Física, UEFS n.07 (01 e 02): 99-114, 2009

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. **Aprendizagem significativa: O lu-**

gar do conhecimento e da inteligência. Revista Aprender Online, ano 1, n. 1 de 2002 – Editora Hoper – Primeira publicação. Disponível em: http://www.fe.unb.br/pie/zAPRENDIZAGEM%20SIGNIFICATIVA.htm. Acesso: janeiro de 2013.

TAVARES, Romero. **Construindo mapas conceituais**. Ciência e Cognição. V.12, p.72-85. Novembro 2007.

TOREZZAN, Cristiano. **Com quantas cores posso pintar um mapa?**. Matemática Multimídia. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2004

ZABALA, Antoni. **Os enfoques didáticos**. In: COLL, César; MARTÍN, Elena; MAURI, Teresa et al. **O construtivismo na sala de aula.** São Paulo: Ática, 1996. p. 153-196.

FORMA QUE SE TRANSFORMA(Arte e Matemática).Ministério da Educação:TV Escola - Matemática. BR: Domínio Público. 1 DVD (26 min). Disponível no site:
http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/debaser/singlefile.php?id=9556. Acesso: novembro de 2012.

Anexo A

Termo de autorização

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

Declaro que, voluntariamente, autorizo a participação de ________________

____ meu (minha) filho(a)

na pesquisa cientifica ***A TOPOLOGIA NO ENSINO MÉDIO: UM NOVO OLHAR COM MAPAS CONCEITUAIS***, que será realizada pela professora *Evaní Machado de Melo*, no Colégio Estadual José Ferreira Pinto, onde ele(a) estuda.

Estou ciente de que os resultados são confidenciais e que serão utilizados somente para fins de pesquisa. Autorizo a publicação dos resultados das analises em conjunto para efeito público. Os resultados individuais que dizem respeito ao meu (minha) filho(a) só poderão ser comunicados a minha pessoa.

Estou ciente, ainda, de que posso desistir da participação nesse estudo a qualquer momento sem que cause nenhum prejuízo ou dano pessoal ao meu(minha) filho(a).

Feira de Santana,____, de janeiro de 2013

____

Assinatura do pai/ responsável

Número da Identidade ______________________________

Nome completo do filho(a) ______________________________

Pesquisadores:

Evani Machado de Melo (pesquisadora)

Kalasas Vasconcelos de Araújo (orientador)

Anexo B

Questionário

Estamos realizando um questionário para a elaboração da monografia de conclusão do PROFMAT na UFS. Pedimos gentilmente a sua colaboração para participar de nossa pesquisa, que tem o objetivo de analisar alguns conceitos que serão por nós trabalhados.

Consideremos as seguintes perguntas:

(a) Qual é o <u>comprimento</u> desta sala de aula?

(b) Qual o <u>ângulo</u> feito por aquelas duas paredes?

(c) Qual <u>área</u> desta sala?

(d) Qual à <u>distância</u> do centro da cidade para a Universidade de Feira?

(e) <u>Aonde</u> vamos hoje à noite?

(f) Você é <u>vizinho</u> de Paulo?

(g) Maria derramou o café <u>fora</u> da xícara?

(h) José se encontra <u>separado</u> de Maria?

(i) Ou ele está entre Maria e João?

(j) O móvel já está dentro da sala?

(k) Qual a divisa (fronteira) entre Sergipe e Bahia?

(l) A porta está aberta ou fechada?

1. Quais dessas respostas são quantitativas?

2. E quais são qualitativas?

   Consideremos o quadrado abaixo:

3. Rotulemos algumas propriedades dessa figura: De todas as propriedades abaixo mencionadas apenas uma não é estudada na Geometria de Euclides; as demais se caracterizam por suas propriedades métricas e, pertencem a essa Geometria. Qual seria?

   (a) ( ) O lado AB mede 5 cm.

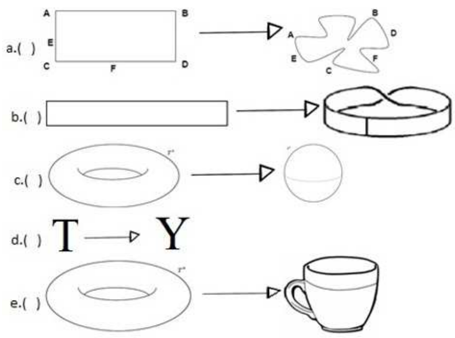
   (b) ( ) Seus quatros lados são iguais.

   (c) ( ) A distância do lado AC à margem esquerda é de 5,5 cm.

   (d) ( ) Todos os seus ângulos são iguais.

   (e) ( ) A figura divide o plano em três conjuntos de pontos: os pontos que estão dentro dela; os pontos que estão sobre as suas quatro linhas; os pontos que estão fora dela.

4. Quais das situações abaixo poderia haver uma transformação, imaginando que fossem feitos de borracha?



5. Das que são possíveis haver essa deformação, quais propriedades permanecem as mesmas (são invariantes)?

   (a) ( ) Ângulos

   (b) ( ) Vértices

   (c) ( ) Pontos: interior e exterior

   (d) ( ) Lados

   (e) ( ) Distâncias

   (f) ( ) Vizinhança

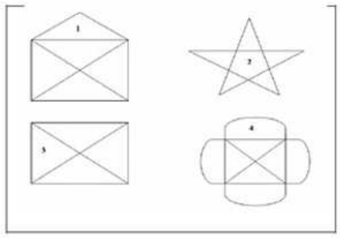
   (g) ( ) Continuidade

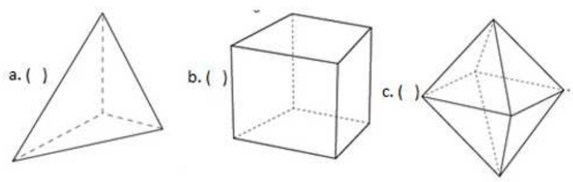
   (h) ( ) Forma

6. Quais dessas figuras (grafos) podemos desenhar, com um único traço, sem tirar o lápis do papel, passando o lápis somente uma vez em cada segmento?

7. Nas figuras abaixo, quantos vértices, quantas faces e quantas arestas existem em cada poliedro?

8. Existe uma relação entre eles, você saberia dizer qual é?





9. Que área da Matemática estuda esses conceitos utilizados nesse questionário?

   (a) ( )Álgebra

   (b) ( )Topologia

   (c) ( )Estatística

   (d) ( )Cálculo

   (e) ( )Aritmética

   (f) ( )Geometria Euclidiana

Anexo C

Esquema de mapa conceitual

Atividade de elaboração dos mapas conceituais proposto por Novak (1996,pg. 49-50)

1. Seleccione um ou dois parágrafos especialmente significativos de um livro de texto ou de qualquer outro tipo de material impresso e peça aos estudantes que o leiam e seleccionem os conceitos mais importantes, ou seja, os conceitos que são necessários para se entender o significado do texto. Depois de estes conceitos terem sido identificados, prepare com eles uma lista no quadro ou projecte-a com o retroprojector e discuta com os estudantes qual é o conceito mais importante, qual é a ideia mais inclusiva do texto.

2. Coloque o conceito mais inclusivo ao princípio de uma nova lista ordenada de conceitos e vá-lhe acrescentando os restantes conceitos da primeira lista até todos os conceitos terem sido ordenados, da maior à menor generalidade e inclusividade. Os estudantes não estarão sempre todos de acordo em relação à ordenação, mas geralmente produzir-se-ão poucas diferenças de opinião que sejam relevantes. Aliás, isto é positivo, porque sugere que há mais do que uma maneira de entender o significado de um texto.

3. Agora, comece a elaborar um mapa, utilizando como referência a lista ordenada. Incentive os alunos a ajudar, pedindo-lhes que sugiram palavras de ligação adequadas para formar as proposições que se mostram nas linhas do mapa. Uma forma de fazer com que eles pratiquem a elaboração de mapas é dizer a alguns estudantes para escreverem conceitos e palavras de ligação em rectângulos de papel e depois reordenarem estes rectângulos à medida que vão descobrindo novas formas de organizar o mapa.

4. Procure, a seguir, ligações cruzadas entre conceitos de uma secção do mapa e conceitos noutra parte da "árvore" de conceitos. Peça aos alunos que ajudem na escolha de palavras de ligação para as ligações cruzadas.

5. A maior parte dos primeiros mapas têm uma má simetria ou apresentam grupos de conceitos com uma localização deficiente em relação a outros conceitos ou grupos de conceitos com os quais estão intimamente relacionados.

6. Há que refazer os mapas, se tal se entender como útil. Explique aos estudantes que, para se conseguir uma boa representação dos significados preposicionais, tal como eles os entendem, há que refazer o mapa pelo menos uma vez, e por vezes duas ou três.

7. Discuta o critério de classificação dos mapas conceptuais e classifique o mapa conceptual que foi construído. Realce possíveis mudanças estruturais que possam melhorar o significado, ou mesmo a pontuação, do mapa.

8. Peça aos estudantes para escolherem uma secção de texto ou outro material e repetirem sozinhos os passos 1-6 (ou em grupos de dois ou três).

9. Os mapas elaborados pelos estudantes podem ser apresentados à turma no quadro ou em acetatos. Peça aos estudantes que "leiam" os mapas

que elaboraram para tornar claro aos seus colegas de turma qual é o tema do texto, segundo a sua interpretação.

10. Solicite aos estudantes que construam mapas conceptuais das ideias mais importantes dos seus passatempos favoritos, o desporto ou tudo aquilo que lhes interesse particularmente. Estes mapas podem ser colocados à turma, fomentando-se discussões informais sobre eles.

11. No próximo teste, inclua uma ou duas perguntas sobre mapas conceptuais, para deixar claro que tais mapas constituem um procedimento válido de avaliação que exige.

Anexo D

Avaliação

---

1. O conhecimento que vocês possuiam de topologia ajudou na construção das atividades?
    (a) ( )Muito
    (b) ( )Pouco
    (c) ( ) Não ajudou
2. A maneira de como foi construída as atividades foi prático?
    (a) ( )Muito
    (b) ( )Pouco
    (c) ( ) Não ajudou
3. O Tema Topologia é relevante e útil?
    (a) ( )Muito
    (b) ( )Pouco
    (c) ( ) Não ajudou

4. Para a construção das atividades vocês utilizaram raciocínio lógico?
   (a) ( )Muito
   (b) ( )Pouco
   (c) ( ) Não ajudou
5. A intervenção do professor nas atividades foi adequada?
   (a) ( )Muito
   (b) ( )Pouco
   (c) ( ) Não ajudou
6. O desenvolvimento dado ao curso pareceu-lhe adequado ao seu nível de conhecimento?
   (a) ( )Muito
   (b) ( )Pouco
   (c) ( ) Não ajudou
7. Vocês gostaram do modo como foi abordada essa aula de Topologia?
   (a) ( )Muito
   (b) ( )Pouco
   (c) ( )Não ajudou

Deixe comentários, sugestões, criticas:
