Universidade Federal de Juiz de Fora
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Leandro de Oliveira Sodré

O NÚMERO 142857 E O NÚMERO DE OURO:
curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas

Juiz de Fora
2013

Leandro de Oliveira Sodré

O NÚMERO 142857 E O NÚMERO DE OURO: curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na área de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche

Juiz de Fora
2013

Sodré, Leandro de Oliveira.
O número 142857 e o número de ouro: curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas / Leandro de Oliveira Sodré. – 2013.
79 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática recreativa. I. Título.

CDU 51:37.02

Leandro de Oliveira Sodré

O NÚMERO 142857 E O NÚMERO DE OURO:

curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche (orientador)
Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – UFJF

Prof. Dr. Sergio Guilherme de Assis Vasconcelos
Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – UFJF

Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira
Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – UFSJ

Juiz de Fora, 09 de março de 2013.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, fiel amigo, pela vida da minha filha, Amanda, e por ter me dado condições de concluir este trabalho.

A minha esposa, Raquel, que tem me apoiado em minha carreira e compreendido minha ausência.

A meus pais, irmãos, familiares e amigos, por grande incentivo e apoio.

A meus irmãos em Cristo, pelas constantes orações.

Ao meu grande amigo Alexandre J. Rodrigues, por me indicar o PROFMAT.

Aos amigos do PROFMAT, pela amizade e companheirismo.

Aos colegas de trabalho, pela colaboração, paciência e incentivo.

Ao meu orientador professor Dr. Sandro, pelo material de apoio e sugestões.

A CAPES, pelas Bolsas de Estudo que recebi.

RESUMO

Neste trabalho são apresentadas curiosidades, propriedades matemáticas, aplicações além do campo puramente matemático e um pouco da história de dois números: o número 142857 e o Número de Ouro. Além disso, são propostas algumas atividades didáticas para o estudo desses números em aulas de Matemática. O número 142857 é chamado de cíclico porque 142857x2 = 285714, 142857x3 = 428571, 142857x4 = 571428, 142857x5 = 714285 e 142857x6 = 857142 e o Número de Ouro tem aplicações na Botânica, Zoologia, Artes, Engenharia de Materiais e tem muitas relações com a sequência de Fibonacci.

Palavras-chaves: números cíclicos, Número de Ouro, sequência de Fibonacci, atividades didáticas, curiosidades matemáticas.

ABSTRACT

This work presents curiosities, mathematical properties, applications beyond the purely mathematical field and some of the history of two numbers: the number 142857 and the golden number. In addition, some educational activities for the study of these numbers in mathematics classes are proposed. The number 142857 is called of cyclic because 142857x2 = 285714, 142857x3 = 428571, 142857x4 = 571428, 142857x5 = 714285 e 142857x6 = 857142 and the golden number is applied in botany, zoology, art, materials engineering and has many relationships with the Fibonacci sequence.
Keywords: cyclic numbers, golden number, Fibonacci sequence, educational activities, mathematical curiosities.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Os números fazem parte da rotina do ser humano há muitos anos e, desde então, são objetos de estudo. Para se ter ideia, a tábua matemática chamada Plimpton 322, escrita aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C, contém 15 linhas divididas em 3 colunas numéricas, uma das quais serve apenas para numerar as linhas; as outras duas colunas apresentam, com uma única exceção não justificável, pares de números inteiros que são as medidas das hipotenusas e de um dos catetos de triângulos retângulos (EVES, 2004, p. 64). Além disso, em *O Livro Chinês das Permutações*, escrito mais de 1000 anos antes de Cristo, já existe uma distinção clara entre números pares e ímpares (HOGBEN, 1958, p. 49). Os números naturais, em virtude da necessidade de se contar objetos e animais, foram os primeiros a serem incorporados à rotina humana. Com o estudo de medidas e de comparações entre elas, os racionais positivos surgiram.

Os números negativos foram reconhecidos por Diofanto no século III d.C e usados por Brahmagupta por volta de 630 (BOYER, 1996, p. 150). Esses números começaram a ser um pouco mais familiares a nós a partir de 1225, quando Fibonacci (1175 a 1250) interpretou a raiz negativa de uma equação, que surgiu de um problema financeiro, como uma perda e não como um ganho. Outro avanço em direção ao reconhecimento desses números se deu quando Rafael Bombelli (1526 a 1572) interpretou os números como comprimentos de uma linha e as operações elementares como movimentos ao longo dessa linha. Por fim, apenas quando a subtração foi interpretada como o inverso da adição é que os números negativos foram aceitos definitivamente como números (MAOR, 2006, p. 214 e 215).

Os números irracionais possivelmente foram “descobertos” na era de Pitágoras (c. 569 a.C a 475 a.c), no século V a.C., e essa descoberta pode estar relacionada à Razão Áurea, como será visto no item 3. Já os números complexos começaram a ser estudados no século XVI, na mesma época em que Girolano Cardano (1501 a 1576) publicou métodos de resoluções para as equações cúbicas e quárticas, no livro *Ars Magna* (BOYER, 1996, p. 193; MAOR, 2006, p. 215).

Alguns números possuem propriedades particulares que, por vezes, despertam curiosidade em quem os estuda. São exemplos desses números os irracionais π, e e φ, os racionais que são dízimas periódicas e os números primos.

Nessa dissertação, no item 2 há um estudo das propriedades do número 142857, mostrando que ele é um número cíclico, ou seja, é um número cujos produtos das multiplicações dele pelos naturais de 2 a 6 são números formados pelos mesmos seis algarismos de 142857 e que esses algarismos preservam um ordem relativa entre eles; no item 2.1 mostra-se que não existe outro número de seis algarismos que tenha essa mesma propriedade; no item 2.2 prova-se que se 1/n gera uma dízima periódica simples que tem n – 1 algarismos no período, esse período é um número cíclico; o item 2.3 contém propostas de atividades didáticas relacionadas ao estudo das propriedades do número 142857.

O item 3 contém uma síntese da história do Número de Ouro, que nesse texto é representado pela letra φ, e a demonstração de alguns resultados relacionados a ele; nos itens 3.1 são apresentadas algumas aplicações do Número de Ouro na Anatomia, na Odontologia, na Botânica, na Zoologia e na Astronomia; o item 3.2 aborda outras propriedades e curiosidades de φ; e no item 3.3 atividades didáticas relacionadas ao estudo do Número de Ouro são propostas.

No item 4 são apresentadas as conclusões e no item 5 prova-se a irracionalidade de φ e que múltiplos distintos do ângulo áureo não serão congruentes entre si e é feita uma representação do número de ouro com 1000 casas decimais.

Os objetivos deste trabalho são: apresentar curiosidades, propriedades matemáticas, aplicações além do campo puramente matemático e um pouco da história dos números 142857 e $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, e propor atividades didáticas para o estudo desses números em aulas de Matemática.

2. O INTRIGANTE NÚMERO 142857

Nesse item faremos um estudo do número 142857 e de suas propriedades. Esse número é o período da dízima periódica simples gerada ao dividir 1 por 7. Ele tem uma propriedade muito curiosa: ao ser multiplicado por 2, 3, 4, 5 e 6, os produtos são, respectivamente, 285714, 428571, 571428, 714285 e 857142. Não é difícil perceber que esses produtos são formados pelos mesmos algarismos que formam o 142857 e, o mais curioso, que esses algarismos preservam uma ordem circular relativa entre si, ou seja, os produtos são um tipo especial de permutação dos algarismos do número 142857.

Para entender melhor essa última afirmação, observe a figura a seguir, onde os números assinalados nos vértices do hexágono, seguindo o sentido horário, formam o número 142857 e os seus produtos por 2, 3, 4, 5 e 6, quando se escolhem, respetivamente os números 1, 2, 4, 5, 7 e 8 para começar o "percurso".

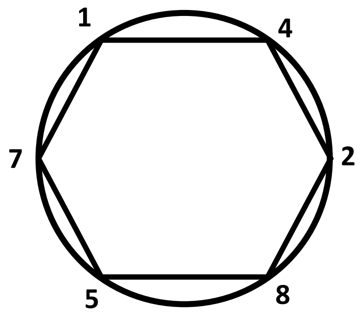

FIGURA 1: Esquema cíclico para 142857

Para facilitar a comunicação, vamos definir o que é uma *permutação rígida positiva* de um número.

<u>Definição</u>: Dado um número, uma permutação rígida positiva dele é um outro número, formado pelos mesmos algarismos do número dado e que preserva a ordem circular relativa entre os algarismos, no sentido horário.

Para facilitar o entendimento da definição, as permutações rígidas positivas de 1325, por exemplo, são os números 3251, 2513 e 5132.

Além dessa definição, se os produtos das multiplicações de um número de n algarismos pelos números naturais de 2 a n forem as permutações rígidas positivas dele, então esse número será chamado de cíclico. Assim, 142857 é um exemplo de número cíclico.

É apresentada a seguir uma maneira de descobrir quais são os respectivos números que começam os produtos das multiplicações de 142857 por 2, 3, 4, 5 e 6.

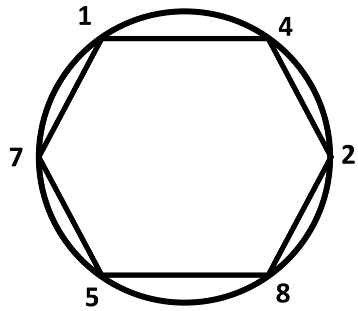

FIGURA 2: Esquema cíclico para 142857

É fácil ver que 2 x 142857 é um número que termina em 4. Observando o polígono do esquema e respeitando o sentido horário, o número que terminar em 4 deverá começar com 2. Assim, a permutação rígida positiva de 142857 que começa com o algarismo 2 (ou o que termina em 4) é 285714. Esse é, de fato, o produto 2 x 142857.

O produto 3 x 142857 tem que terminar em 1 e, consequentemente, pelo esquema, começar com 4. Portanto, o resultado será 428571. Já o resultado de 4 x 142857 tem que terminar em 8. Assim, pelo esquema, obtém-se que 4 x 142857 começa com 5 e é igual a 571428. Quando multiplicamos 142857 por 5, o resultado tem que terminar em 5. Observando o esquema, conclui-se que 5 x 142857 = 714285. Por fim, o produto 6 x 142857 termina em 2, e, portanto, é igual a 857142, resultado que pode ser facilmente obtido através do polígono do esquema.

Claro que não é necessário o esquema apresentado para se descobrirem os produtos sem fazer as multiplicações completas. Pode-se pensar, simplesmente, que as permutações rígidas positivas de 142857, em ordem crescente, são 285714, 428571, 571428, 714285 e 857142, ou que os algarismos que compõem 142857, em ordem crescente, são 1, 2, 4, 5, 7 e 8, mas o esquema pode ser usado pelo professor quando propuser atividades didáticas a seus alunos (veja item 2.3).

As propriedades desse número foram minuciosamente estudadas por Fourrey, E. Lucas, Rouse Ball, Guersey e Legendre, sendo que Fourrey, em seu livro *Récréations Arithmétiques*, apresenta o produto 142857 x 326451, que tem a propriedade de as colunas dos produtos parciais serem formadas por algarismos iguais, na seguinte ordem: 42857142857 (SOUZA, 2009, p. 27).

```
          142857
    x     326451
    ------------
          142857
         714285
        571428
       857142
      285714
     428571
    ------------
     46635810507
```

Os produtos de 142857 pelos números 1x7, 2x7, 3x7, 4x7, 5x7, 6x7, 7x7, 8x7, 9x7 e 10x7 são, respectivamente, 999999, 1999998, 2999997, 3999996, 4999995, 5999994, 6999993, 7999992, 8999991 e 9999990, que apresentam um padrão de formação bem curioso também.

Após esses comentários, as seguintes perguntas parecem bem naturais:

i) Existem outros números cíclicos?
ii) Por que 142857 é cíclico?

Pode-se mostrar (como feito no item 2.1) que não existe outro número de 6 algarismos que seja cíclico. No entanto, ao multiplicar 142857 por números inteiros entre 7 e 70 (com exceções de alguns, como o 17, 24, 27 e 31), os produtos terão 7 algarismos e serão iguais a permutações rígidas positivas de 142857 com uma pequena alteração (essa alteração está descrita na página de curiosidades do sitio www.somatematica.com.br). Dessa forma, as permutações rígidas positivas de 142857 podem ser chamadas de números "quase cíclicos", pois, ao multiplicá-las por alguns números inteiros, os produtos serão quase permutações rígidas positivas de 142857 (ou de suas permutações rígidas positivas).

Existe um interessante padrão de formação para os produtos de 142857 pelos números naturais maiores que 7 (veja o livro *Aritmética recreativa* de Yakov Perelma).

Souza (2009, p. 28) afirma que existem outros números que são, de fato, cíclicos e cita como exemplos os períodos das dízimas obtidas nas divisões de 1 por 17 e de 1 por 23. Conforme Gardner (1985, p. 94), os valores de n, menores que 100, para os quais os períodos das dízimas geradas pela fração 1/n sejam cíclicos são: 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61 e 97. O mesmo Gardner (1985, p.94) afirma que William Shanks (1812 a 1882), o primeiro a calcular corretamente as primeiras 527 casas decimais de π, descobriu que o período de 1/17389 também é cíclico e calculou corretamente os 17388 algarismos dele.

A tabela a seguir mostra os resultados das multiplicações de 0588235294117647 (período de 1÷17) pelos naturais de 1 a 16.

n	n. 0588235294117647	n	n. 0588235294117647
2	1176470588235294	10	5882352941176470
3	1764705882352941	11	6470588235294117
4	2352941176470588	12	7058823529411764
5	2941176470588235	13	7647058823529411
6	3529411764705882	14	8235294117647058
7	4117647058823529	15	8823529411764705
8	4705882352941176	16	9411764705882352
9	5294117647058823		

De forma geral, sempre que a fração 1/n gerar uma dízima periódica simples cujo período tiver n – 1 algarismos, o período da dízima será cíclico (demonstrado no item 2.2). Assim, 142857 é cíclico porque ele tem 6 algarismos e é o período da dízima gerada pela fração 1/7.

2.1. DEMONSTRAÇÃO DE QUE NÃO EXISTE NÚMERO DE 6 ALGARISMOS, DIFERENTE DE 142857, QUE SEJA CÍCLICO

Suponha x um número de 6 algarismos que tenha a referida propriedade.

Pode-se representar x da seguinte forma: x = abcdef. Como x tem 6 algarismos, necessariamente $100000 \leq x < 1000000$.

Como 6x tem que ser uma permutação rígida positiva de x, é necessário que 6x tenha 6 algarismos, ou seja, que $6x < 1000000$. Assim sendo, tem-se que $100000 < x < 166666{,}66...$. Logo, na representação de x, tem-se que a = 1, ou seja, x = 1bcdef. Além disso, $2x < 400000$.

Para que as permutações rígidas positivas de x sejam os produtos das multiplicações de x pelos naturais de 2 a 6, nenhum dos algarismos de x pode ser igual a zero (para que nenhuma das permutações rígidas positivas comece com zero).

As permutações rígidas positivas de x são:

1) bcdef1
2) cdef1b
3) def1bc
4) ef1bcd
5) f1bcde

Serão analisadas as possibilidades de 2x ser igual a cada uma dessas permutações.

Caso 1 – Suponha 2x = bcdef1.

Imediatamente pode-se perceber que isso é um absurdo, visto que 2x é par e bcdef1 é ímpar, pois termina em 1.

Caso 2 – Suponha 2x = cdef1b

Temos o seguinte algoritmo:

$$\begin{array}{r} 1bcdef \\ \times\ 2 \\ \hline cdef1b \end{array}$$

Comparando as dezenas de x e de 2x, têm-se as possibilidades: $2e = 1$, $2e = 11$, $2e + 1 = 1$ ou $2e + 1 = 11$.

As três primeiras possibilidades são absurdas, visto que 2e é par e $e \neq 0$.

Se $2e + 1 = 11$, então $e = 5$. Assim, comparando as unidades de milhar tem-se que $2c + 1 = 5$ ($c = 2$) ou $2c + 1 = 15$ ($c = 7$).

Como $2x < 400000$, $c = 7$ é um absurdo.

Considerando $e = 5$ e $c = 2$, tem-se $x = 1b2d5f$ e $2x = 2d5f1b$, e é necessário que $2f = 10 + b$ (*), $2d + 1 = 10 + f$ (**) e $2b = d$ (***). Assim, $b = 4$, $f = 7$ e $d = 4$. Portanto $x = 142857$.

<u>Caso 3</u> – Suponha $2x = def1bc$

Temos o seguinte algoritmo:

$$\begin{array}{r} 1bcdef \\ \times\ 2 \\ \hline def1bc \end{array}$$

Comparando as centenas de x e de 2x, têm-se as possibilidades: $2d = 1$, $2d = 11$, $2d + 1 = 1$ ou $2d + 1 = 11$.

Todas elas são absurdas, visto que 2d é par, $d \neq 0$ e $d < 4$ ($2x < 400000$).

<u>Caso 4</u> – Suponha $2x = ef1bcd$.

Temos o seguinte esquema:

$$\begin{array}{r} 1bcdef \\ \times\ 2 \\ \hline ef1bcd \end{array}$$

Comparando as unidades de milhar de x e de 2x, têm-se as possibilidades: $2c = 1$, $2c = 11$, $2c + 1 = 1$ e $2c + 1 = 11$.

As três primeiras são absurdas, visto que 2c é par e $c \neq 0$.

Se $2c + 1 = 11$ ($c = 5$), é necessário que $2f = 10 + d$. Tem-se, então, que $2e + 1 = 5$ ($e = 2$) ou $2e + 1 = 15$ ($e = 7$). Como a segunda possibilidade é absurda, porque $2x < 400000$, tem-se que $c = 5$, $2f = 10 + d$ e $e = 2$.

Substituindo esses valores no algoritmo:

$$\begin{array}{r} 1b5d2f \\ \times\ 2 \\ \hline 2f1b5d \end{array}$$

Assim, é necessário, ainda, que $2d = 10 + b$ e $2b + 1 = f$. Dessa forma, Ter-se-ia $7f = 59$, o que é um absurdo porque f é algarismo.

<u>Caso 5</u> – Suponha $2x = f1bcde$.

Temos o seguinte esquema:

$$\begin{array}{r} 1bcdef \\ \times\ 2 \\ \hline f1bcde \end{array}$$

Comparando as dezenas de milhar, têm-se as possibilidades: $2b = 1$, $2b = 11$, $2b + 1 = 1$ e $2b + 1 = 11$.

As três primeiras são absurdas, porque 2b é par e $b \neq 0$.

Se $2b + 1 = 11$ ($b = 5$), comparando as centenas de milhar, tem-se que $f = 3$.

Assim $e = 6$, $d = 2$ e $c = 5$. Logo, ter-se-ia $x = 155263$ e $2x = 315526$. Mas como $2.155263 = 310526 \neq 315526$, tem-se um absurdo!

Mostrou-se, assim, que o único número de 6 algarismos cujo produto da multiplicação dele por 2 é igual a uma de suas permutações rígidas positivas é o 142857. Dessa forma, sabendo que ele é um número cíclico, ele é o único número de 6 algarismos que é cíclico.

2.2. DEMONSTRAÇÃO DE QUE O PERÍODO DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA SIMPLES QUE TEM n – 1 ALGARISMOS, E CUJA GERATRIZ É A FRAÇÃO 1/n, É CÍCLICO.

Antes de mostrar a propriedade enunciada, serão demonstrados dois Lemas.

LEMA 1: Para que o período de 1/n tenha n – 1 algarismos, é necessário que os restos parciais da divisão de 1 por n percorram todos os naturais de 1 a n – 1.

Demonstração:

Na divisão de 1 por n, não se pode ter um resto parcial igual a zero, pois 1/n não é decimal exato. Além disso, como n tem que ser um valor maior que 1, o primeiro resto parcial (r_0) será igual a 1, e o primeiro algarismo a compor o quociente será 0.

Suponha o seguinte algoritmo para a divisão de 1 por n:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & n \\ \hline
1 & 0,q_1q_2q_3q_4\ldots q_{n-1} \\
r_1 & \\
r_2 & \\
r_3 & \\
r_4 & \\
\ldots & \\
r_{n-2} & \\
r_{n-1} &
\end{array}
$$

Assim, tem-se que:

* $1 \leq r_i \leq n - 1$, para $i \in \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$;

* $1 = nQ_i + 10^{-i} r_i$, onde $Q_i = 0,q_1q_2q_3q_4...q_i$ para $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$; e

* $nq_i + r_i = 10r_{i-1}$, para $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$.

Suponha $r_i = r_j$, para $1 \le i < j \le n-2$ (veremos que isso implicaria $q_{i+1}q_{i+2} ... q_j$ ser um período da dízima).

Se $r_i = r_j$, então, $nq_{i+1} + r_{i+1} = 10r_i$ e $nq_{j+1} + r_{j+1} = 10r_j = 10r_i$. Como o quociente e o resto em uma divisão são únicos (imagine $10r_i$ sendo dividido por n), segue que $q_{i+1} = q_{j+1}$ e $r_{i+1} = r_{j+1}$. Com mesmo raciocínio, mostra-se que $q_{i+k} = q_{j+k}$ e $r_{i+k} = r_{j+k}$, para $k \in \{2, 3, ..., j-i-1\}$ (como i é qualquer, sempre que dois restos parciais forem iguais, os próximos algarismos a comporem o quociente serão iguais, e os novos restos também serão iguais).

Assim, como $r_{j-1} = r_{i+j-i-1} = r_{j+j-i-1} = r_{2j-i-1}$, tem-se que $q_j = q_{2j-i}$ e $r_j = r_{2j-i}$. Logo, $q_{j+1} = q_{2j-i+1}$ e $r_{j+1} = r_{2j-i+1}$, e ter-se-ia o seguinte algoritmo:

$$\begin{array}{l|l}
1 & n \\ \cline{2-2}
1 & 0,q_1q_2q_3...q_i\mathbf{q_{i+1}...q_{j-1}q_j}q_{i+1}...q_{j-1}q_j... \\
r_1 & \\
... & \\
r_i & \\
r_{i+1} & \\
... & \\
r_{j-1} & \\
r_i & \\
... & \\
r_{j-1} & \\
r_i & \\
... &
\end{array}$$

Assim, $\mathbf{q_{i+1} ...q_{j-1}q_j}$ é o período da dízima $0,q_1q_2q_3q_4...q_{n-1}q_1q_2q_3q_4...q_{n-1}...$

Logo $q_1q_2q_3q_4...q_{n-1} = q_1q_2q_3...q_i = q_{i+1}...q_{j-1}q_j$. Mas como $i < n - 1$, tem-se um absurdo. Portanto $r_i \neq r_j$, $1 \leq i < j \leq n - 2$.

Com um raciocínio análogo, verifica-se que $r_i \neq 1$, para $i \in \{1, 2, ... n - 2\}$ e que $r_{n-1} = 1$.

Portanto, os restos parciais (r_i, $i \in \{0, 1, 2, ... , n - 2\}$) da divisão de 1 por n são os $n - 1$ números naturais que pertencem ao conjunto $\{1, 2, .., n - 1\}$, pois de r_0 a r_{n-2} tem-se $n - 1$ números diferentes.

LEMA 2: Se 1/n gera uma dízima periódica simples cujo período tem $n - 1$ algarismos, então n é primo.

<u>Demonstração</u>

Suponha $n = pxq$ com p primo e $q > 1$. Assim sendo, pelo que acabou de ser provado, p deve aparecer como resto parcial na divisão de 1 por n.

Considere o algoritmo:

$$\begin{array}{l|l}
1 & n = pxq \\ \hline
1 & 0,q_1q_2q_3q_4...q_{n-1} \\
r_1 & \\
r_2 & \\
r_3 & \\
r_4 & \\
... & \\
r_{n-2} & \\
1 &
\end{array}$$

Assim, $1 = Q_i.p.q + 10^{-i} r_i$, para $i \in \{1, 2, ... , n - 1\}$, onde $Q_i = 0, q_1q_2q_3q_4...q_i$.

Suponha, então, $r_i = p$ para algum $i \in \{1, 2, ... , n - 2\}$. Tem-se, então:

$1 = Q_i.p.q + 10^{-i}p \Rightarrow 10^i = Q_i.10^i.p.q + p \Rightarrow 10^i = p(10^i.Q_i.q + 1) \Rightarrow p|10^i \Rightarrow p = 2$ ou $p = 5 \Rightarrow n = 2^x.5^y \Rightarrow 1 \div n$ é decimal exato (1/n é uma fração decimal). Mas isso é uma contradição, visto que 1/n gera uma dízima periódica simples.

Assim, n não pode ser escrito como produto de um primo por um natural maior que 1, ou seja, n é primo.

Com esses dois resultados, podemos fazer a demonstração proposta, ou seja, podemos mostrar que, se um número de $n - 1$ algarismos é o período de uma dízima periódica simples cuja fração geratriz é 1/n, então esse número é cíclico.

Uma forma de imaginar esse resultado é pensar que, em algum momento da divisão de 1 por n, faz-se a divisão de r_i ($r_i < n$) por n e, desse momento em diante, na divisão de 1 por n, pode-se pensar que a operação é a divisão de r_i por n. Dessa forma r_i/n é uma dízima cujo período é uma permutação rígida positiva do período de 1/n. Porém, com argumentos mais formais, a demonstração é feita a seguir.

Considere o algoritmo:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & n \\ \hline
1 & 0,q_1q_2q_3q_4...q_{n-1}q_1q_2... \\
r_1 & \\
r_2 & \\
r_3 & \\
r_4 & \\
... & \\
r_{n-2} & \\
1 & \\
r_1 & \\
r_2 & \\
... &
\end{array}
$$

e seja $Q_i = 0,q_1q_2q_3q_4...q_i$, com $i \in \{1, 2, ... n - 1\}$.

Tem-se, pelo algoritmo da divisão, que $1 = Q_i.n + 10^{-i} r_i$. Assim:

$$\frac{1}{n} = Q_i + 10^{-i}\frac{r_i}{n} \Rightarrow \frac{10^i}{n} = 10^i Q_i + \frac{r_i}{n} \Rightarrow \frac{r_i}{n} = 10^i\left(\frac{1}{n} - Q_i\right).$$

Como $\frac{1}{n} = 0,q_1q_2...q_iq_{i+1}...q_{n-1}q_1q_2...q_{i-1}q_i...$, tem-se:

$$\frac{r_i}{n} = 10^i\left[(0,q_1q_2...q_iq_{i+1}...q_{n-1}q_1q_2...q_{i-1}q_i...) - (0,q_1q_2...q_i)\right] =$$

$$(q_1q_2...q_i,q_{i+1}...q_{n-1}q_1q_2...q_{i-1}q_i...) - (q_1q_2...q_i) = 0,q_{i+1}...q_{n-1}q_1q_2...q_{i-1}q_iq_{i+1}...$$

Assim: $10^{n-1}\frac{r_i}{n} \;=\; q_{i+1}...q_{n-1}q_1q_2...q_{i-1}q_i,q_{i+1}...$ e

$$r_i(Q_{n-1}10^{n-1}) \;=\; r_i(q_1q_2...q_{n-1}) \;= r_i\left(10^{n-1}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 10^{n-1}\frac{r_i}{n} - \frac{r_i}{n} =$$

$$(q_{i+1}...q_{i-1}q_i,q_{i+1}...q_{i-2}q_{i-1}...) - (0,q_{i+1}...q_{i-2}q_{i-1}...) = q_{i+1}...q_{i-2}q_{i-1}q_i$$

Portanto, $r_i(10^{n-1}\cdot Q_{n-1})$ é uma permutação rígida de $10^{n-1}\cdot Q_{n-1}$. Como r_i percorre todos os naturais de 1 a n – 1, o resultado segue.

2.3. ATIVIDADES DIDÁTICAS

A seguir, é proposta uma sequência de atividades didáticas que têm como foco o estudo das propriedades/curiosidades do número 142857 em sala de aula. O professor não deve utilizar mais do que três aulas para realizar todas as atividades e, o público alvo delas são alunos do 7º ou 8º anos que estejam estudando números racionais, em especial, as dízimas periódicas.

As atividades estão descritas de forma indireta, como orientações ao professor, que, para aplicá-las em sala de aula, pode seguir as seguintes etapas:

1) Pedir aos alunos para dividirem 1 por 7 e perguntar qual a representação decimal da fração 1/7.

OBSERVAÇÕES:

1) O professor pode pedir simplesmente para os alunos obterem a representação decimal de 1/7.

2) O professor pode optar por pedir aos alunos que utilizem a calculadora, perguntar se aquele resultado é preciso e gerar uma discussão sobre a limitação da calculadora, inclusive mostrando que se eles multiplicarem o resultado por 7 a resposta não será igual a um.

2) Perguntar aos alunos se 1/7 é um decimal exato, dízima periódica simples ou dízima periódica composta.

3) Após ouvir as respostas e mostrar que é uma dízima periódica simples, perguntar qual é o período e quantos algarismos ele tem.

4) Pedir para os alunos calcularem o dobro de 142857 e, após mostrar que esse valor é 285714, perguntar se existe alguma semelhança entre o número 142857 e o dobro dele.

OBSERVAÇÕES:

1) A semelhança está descrita na página 12.

2) Nessa etapa, o professor pode usar a figura do hexágono, inscrito na circunferência, cujos vértices representam os algarismos de 142857, para mostrar essa semelhança (veja página 12).

5) Pedir para os alunos escreverem um número que termine em 1 e que tenha a mesma semelhança com 142857 que tem esse número e o seu dobro.

OBSERVAÇÃO: Esse número é 428571 (veja página 12).

6) Pedir para os alunos calcularem o algarismo das unidades do triplo de 142857.

7) Perguntar aos alunos se eles acham que a resposta da etapa 5 é o triplo de 142857 e pedir para eles justificarem as respostas e questionar essas respostas.

8) O professor pode, então, dizer:

- Para "tirarmos a prova dos nove", vamos calcular 3x142857.

OBSERVAÇÃO: Neste momento, o professor pode explicar o que significa a expressão "tirar/fazer a prova dos nove" e mostrar o significado matemático dela.

9) Após mostrar que, de fato, a resposta da etapa 5 é o triplo de 142857, o professor pergunta:

- Suponha que o resultado de 4x142857, do quádruplo de 142857, também seja semelhante a 142857 da mesma maneira como o dobro e o triplo de 142857 são semelhantes a ele. Multiplicando apenas um algarismo por outro, qual seria o resultado de 4x142857?

OBSERVAÇÃO: A figura do hexágono pode ajudar os alunos nessa etapa.

10) Calcular, junto com os alunos, 4x142857 e comparar com o valor sugerido na etapa anterior.

OBSERVAÇÃO: Nessa etapa, o professor pode definir para os alunos o que é uma permutação rígida positiva de um número, sem mostrar todas as permutações rígidas positivas de 142857, para não facilitar muito a resposta da etapa seguinte.

11) Fazer a seguinte pergunta aos alunos:

- Se continuarmos multiplicando 142857 pelos números naturais, em sequência, ou seja, multiplicarmos 142857 por 5, 6, 7, 8, etc., e se os produtos continuarem respeitando a regra válida para os produtos por 2, 3 e 4, existiria um limite, ou poderemos ir multiplicando indefinidamente?

OBSERVAÇÃO: Se os alunos tiverem dificuldades para responder corretamente, o professor pode perguntar quantas permutações rígidas positivas tem 142857 e pedir para os alunos associarem esse número com a pergunta anterior.

12) Após concluírem que o valor limite é 6, pois 142857 tem 6 algarismos, o professor pode mostrar que 5x142857 e 6x142857 são, de fato, permutações rígidas positivas de 142857.

13) Falar que, devido a essa propriedade, o número 142857 é chamado de número cíclico, e perguntar aos alunos se eles acham que existem outros números com essa propriedade.

14) Comentar que, de 6 algarismos, esse é o único número cíclico e que ele é cíclico porque ele tem 6 algarismos e é o período da dízima periódica gerada pela fração 1/7.

15) Falar que, sempre que 1/n gerar uma dízima periódica simples com n – 1 algarismos no período, esse período é um número cíclico e que n sempre é um número primo.

OBSERVAÇÃO: Dependendo da turma e da receptividade dos alunos em relação à atividade, o professor pode fazer a demonstração formal dessa proposição (veja item 2.2).

16) Fazer com os alunos a divisão de 1 por 17 para mostrar que o período da dízima tem 16 algarismos e que, portanto, é um número cíclico.

OBSERVAÇÕES:

1) Para que os alunos verifiquem, parcialmente, que o período de 1/17 é cíclico, o professor pode pedir aos alunos para escolherem quaisquer dois números naturais entre 2 e 16 (inclusive qualquer um dos dois) e fazer as multiplicações junto com os alunos (veja tabela na página 15).

2) O professor pode modificar essa etapa pedindo aos alunos para tentarem encontrar um outro número cíclico.

17) Comentar que 1/17389 é uma dízima periódica simples cujo período tem 17388 algarismos, ou seja, cujo período pode ser multiplicado por 2, 3, 4, 5, 6, ..., 17388 e os produtos serão permutações rígidas positivas dele.

Após cumprir essas etapas em sala de aula, o professor estará proporcionando aos alunos a oportunidade de utilizarem a calculadora em sala de aula e descobrirem que ela é limitada, aprenderem sobre as dízimas periódicas, praticarem divisões e multiplicações como etapas de construções de resultados, e não como objetivo final, conhecerem as propriedades/curiosidades do número 142857 e de estarem estimularem o raciocínio lógico/dedutivo e a capacidade de abstrair. Além disso, é possível (e espera-se) que alguns alunos tenham o interesse pela Matemática despertado ou aumentado.

3. φ: O NÚMERO DE OURO

Neste item faremos um estudo de outro número que também desperta muita curiosidade, surpresa e encantamento, e que possui propriedades singulares: é o número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Esse número está cercado de mistérios e mitos e é conhecido como Número de Ouro, número áureo, Razão Áurea e seção ou secção áurea. Em virtude de seu encantamento por esse número, o italiano Luca Pacioli (1445 a 1517) o chamou de *Divina Proporção* e usou esse termo como título de um conjunto de três livros que ele publicou em 1509.

Esse número, que neste texto será representado pela letra grega φ (fi), é um número irracional (provado no item 5.1) cuja representação até a 30ª casa decimal é 1,618033988749894848204586834365. Em 1996, foram calculadas 10 milhões de casas decimais de φ (LIVIO, 2011, p.99), e uma representação dele, com 1000 casas decimais, é apresentada no item 5.3.

O primeiro registro histórico relacionado, diretamente, ao Número de Ouro foi feito por Euclides de Alexandria, na coleção "Os Elementos", por volta de 300 a.C (LIVIO, 2011, p. 13). Euclides definiu que um segmento AB é dividido em média e extrema razão por um ponto C quando $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$.

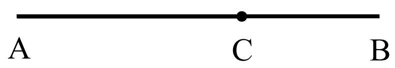

FIGURA 3: Ponto C dividindo um segmento AB em média e extrema razão

Independente da medida de AB, a proporção $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$ é igual a φ. De fato:

Se AB = a e CB = x, então, AC = a – x.

Seja $r=\frac{a}{a-x}=\frac{a-x}{x}$.

Uma maneira de reescrever a igualdade $r=\frac{a}{a-x}$ é

$$r = \frac{a - x + x}{a - x} = 1 + \frac{x}{a - x} = 1 + \frac{1}{r}$$

Assim, tem-se a equação $r^2 - r - 1 = 0$, cuja raiz positiva é $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

A professora e escritora Maria Salett Biembengut, em seu livro *Número de Ouro e Secção Áurea: considerações e sugestões para sala de aula*, chama esse número de Número de Ouro, e o seu inverso, $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, de secção áurea (pp. 16); no artigo em que Paulo Domingos Cordaro publicou na Revista do Professor de Matemática (RPM) – 43/12 comentando esse livro de Biembengut, ele também usa essa nomenclatura (esse artigo está disponível em http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM43/RPM43_12.PDF). A maioria dos autores usa os dois termos como sinônimos.

Além da divergência em relação à nomenclatura dos números, existem divergências em relação à notação que representa o Número de Ouro. Alguns autores (Biembengut, Queiroz, Maor e Livio) usam a letra grega maiúscula fi (ϕ) para representar o Número de Ouro, e outros autores (Souza, Zahn e Garcia) usam a mesma letra, só que minúscula (φ), para representar o mesmo número. Lauro usa ϕ para representar o Número de Ouro e φ para representar seu inverso.

Até o início do século XX, usava-se, habitualmente, a letra grega tau (τ), que em grego significa *o corte*, para representar o Número de Ouro (LIVIO, 2011, p. 16; EVES, 1992, p. 42). Como fi são as primeiras letras do nome Fídias (um escultor e arquiteto grego que viveu aproximadamente entre 490 e 460 a.C e que contribuiu para a construção do Partenon, em Atenas), o matemático americano Mark Barr, no início do século XX, começou a utilizar a letra fi para representar o Número de Ouro, em homenagem a Fídias (LIVIO, 2011, p. 16; LAURO, 2005, p. 41). Essa homenagem deve-se ao fato de a fachada do Partenon ser considerada inscritível em um retângulo áureo, ou seja, inscritível em um retângulo onde a razão entre o comprimento e a altura é igual ao Número de Ouro (BIEMBENGUT, 1996, p. 29; LAURO, 2005, p. 41). A afirmação de que a fachada é inscritível em um retângulo áureo é muito questionada (LIVIO, 2011, p. 91).

Segundo Markowsky, o adjetivo *áureo* só começou a ser associado a φ recentemente, no século XIX; até então era comum chamá-lo de razão extrema e média e de divina proporção. Mas fato é que o Número de Ouro tem despertado a curiosidade e a admiração de matemáticos, artistas, biólogos, arquitetos, físicos, dentre outros profissionais, há muito tempo (LIVIO, 2011, p. 16). Como exemplo, podemos citar o que disse o grande cientista alemão Johannes Kepler (1571 a 1630): *"A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro a Proporção Áurea. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma jóia preciosa"* (LAURO, 2005, p. 3; SOUZA, 2009, p. 85; LIVIO, 2011, p. 79).

Como já citado, a primeira definição clara que leva ao valor de φ tem mais de 2200 anos. É, porém, possível que, antes mesmo de Euclides definir a divisão de um segmento em média e extrema razão, Hipaso de Metaponto (c. 470 a 400 a.C), um dos seguidores da escola pitagórica, ainda por volta do século V a.C, tenha descoberto a Razão Áurea e a incomensurabilidade ao estudar as razões entre medidas de lados e diagonais e entre outros segmentos de um pentágono regular (LIVIO, 2011, p. 49). Vale destacar que a razão entre a diagonal e o lado desse polígono é φ (mostrado mais adiante).

Alguns textos sugerem que o Número de Ouro tenha sido usado, propositalmente, na construção das pirâmides de Giseh, no Egito (EVES, 1992, p. 44 e QUEIROZ, 2007, p. 9). Se de fato isso aconteceu, o Número de Ouro é conhecido há mais de 4000 anos, visto que essas pirâmides datam de aproximadamente 2500 a.C (QUEIROZ, 2007, p. 9). O capítulo 3 do livro *Razão Áurea*, de Mario Livio, explora profundamente se o φ e até o π foram utilizados propositalmente na construção da Grande Pirâmide. A conclusão a que o autor chega é que, apesar de algumas medições atuais e de algumas teorias defendidas por muitos autores sugerirem que sim, é muito provável que esses dois números não foram utilizados propositalmente na construção da primeira das sete maravilhas do mundo antigo – as pirâmides de Gisé.

Devido a inúmeras descobertas que mostram a presença do Número de Ouro em diversas situações, como ainda veremos, alguns acreditam que esse número seria como a digital do Criador, e, portanto, utilizada desde a origem do universo. Dentre os que acreditaram nisso, podemos citar Kepler, o autor das três leis do movimento planetário (LIVIO, 2011, p. 165 e 178).

Voltando a falar de Hipaso, é, de fato, possível que ele tenha descoberto o Número de Ouro e a incomensurabilidade (BOYER, 1996, p. 50), visto que os pitagóricos tinham grande interesse pelo pentágono regular e pelo pentagrama – figura gerada pelo traçado de todas as diagonais do pentágono regular –, pois o pentagrama era o símbolo da escola pitagórica (LAURO, 2005, p.7; EVES, 1992, p. 44). Além disso, Iâmblico (aproximadamente 245 a 325 d.C), o fundador da escola síria de Neoplatonismo, relata que, após Hipaso comentar seus resultados com os "irmãos pitagóricos", estes erigiram uma lápide para Hipaso como se ele estivesse morto (LIVIO, 2011, p. 49).

Essa atitude dos pitagóricos, em relação à descoberta de Hipaso, ocorreu porque, para Pitágoras e seus seguidores, todos os fenômenos no universo podiam ser reduzidos a números inteiros ou a razões entre inteiros (EVES, 2004, p. 106; http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/HipasusM.html).

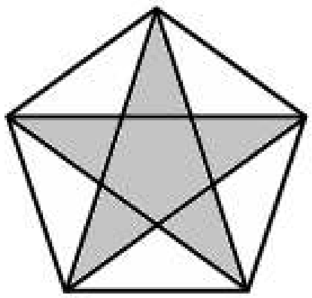

Figura 4: Pentágono regular e Pentagrama

O famoso filósofo e matemático grego Platão (428 – 348 a.C), aluno de Teodoro, que, por sua vez, foi um dos discípulos de Pitágoras, e o também grego Theaetetos (c. 417 a 369 a.C), que contribuiu grandemente para os livros X e XIII de Euclides, trabalharam muito com medidas cujas razões são o Número de Ouro. Essa afirmação é garantida, pois ambos se dedicaram intensamente ao estudo dos poliedros regulares, conhecidos como Poliedros ou Sólidos de Platão. Esses sólidos estão ligados à Razão Áurea, como, por exemplo, no fato de os 12 vértices de um icosaedro regular e os 12 centros das faces de um dodecaedro regular poderem ser divididos em três grupos de quatro pontos, sendo que os quatro pontos de cada grupo formam um retângulo áureo (veja a figura a seguir). Vale lembrar que as faces do dodecaedro regular são pentágonos regulares, que, como já mencionado, estão diretamente ligados à Razão Áurea.

Além disso, Theaetetos, considerado o primeiro a construir os cinco poliedros regulares e o primeiro a afirmar que existem cinco, e somente cinco, poliedros regulares (BOYER, 1996, p. 59), precisou desenhar, para a construção do dodecaedro, pentágonos regulares, cuja construção, segundo Livio (2011, p. 97), foi o principal motivo de interesse dos gregos pela Razão Áurea.

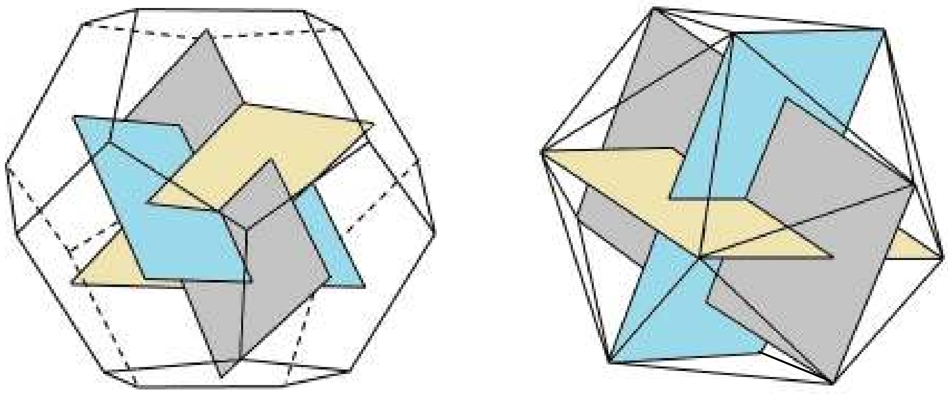

FIGURA 5: Retângulos áureos no dodecaedro e no icosaedro regulares

O pentágono regular e φ estão relacionados de várias maneiras. Dentre essas maneiras, podemos destacar e demonstrar que a razão entre uma diagonal e o lado é φ.

Demonstração:

Seja ABCDE um pentágono regular. A partir do vértice A, trace as diagonais AC e AD.

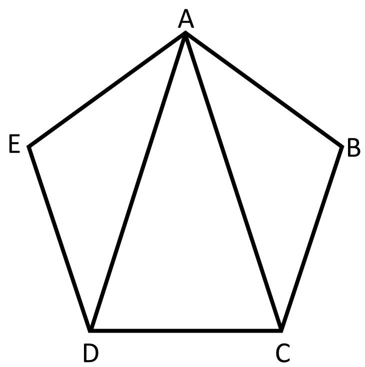

FIGURA 6: Pentágono regular

É fácil ver que os triângulos ABC e AED são isósceles e congruentes (LAL). Dessa forma, o triângulo ACD também é isósceles e seus ângulos internos medem 36°, 72° e 72°

(com raciocínio análogo mostra-se que todas as diagonais de um pentágono regular são congruentes entre si).

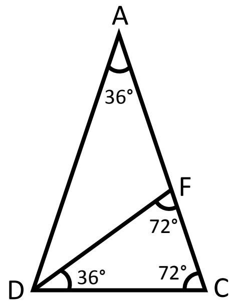

FIGURA 7: Triângulo formado por duas diagonais e um lado de um pentágono regular

Ao traçar a bissetriz do ângulo D, aparece o triângulo FCD (que é isósceles e semelhante a ACD) e aparece o triângulo AFD (que também é isósceles). Assim:

AFD e FCD isósceles $\Rightarrow$ AF = DF = CD

$$\text{FCD} \sim \text{CDA} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CF} \Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AF}{FC}.$$

Assim, F divide AC na Razão Áurea (AC = φ AF) e a base do triângulo ACD tem a mesma medida de AF, ou seja, AC = φ CD, como queríamos demonstrar.

Outra relação entre o pentágono regular e o Número de Ouro é que o ponto de encontro entre duas diagonais (exceto quando elas se encontram no vértice) divide as duas diagonais em Razão Áurea.

Para utilização futura, é importante definir que triângulos isósceles cuja razão entre lado e base é igual a φ são chamados de triângulos áureos.

Pela demonstração anterior, para desenhar um pentágono regular ABCDE usando a Razão Áurea, pode-se proceder conforme o esquema:

- tome um segmento MN (que será o lado do pentágono);

- crie um segmento MP, tal que $\frac{MP}{MN} = \varphi$, ou seja, $MP = \varphi \cdot MN$ (veja, a seguir, como fazer essa construção);
- construa um triângulo isósceles ACD, de forma que AC = AD = MP e CD = MN;
- construa, a partir de AC, um triângulos isósceles ABC, onde AB = BC = CD;
- construa, a partir de AD, um triângulos isósceles ADE, onde AE = ED = CD.

É necessário, portanto, saber construir um segmento de medida igual a φ vezes a medida de um segmento dado. Isso é bem simples e pode ser feito da seguinte forma:

A partir de um quadrado ABCD, tome M o ponto médio de AB. Com centro em M e raio MC, marque sobre a reta AB, à direita de B, o ponto E. O segmento AE tem medida igual a φ vezes a medida de AB, e o retângulo com vértices em A, E e D será áureo.

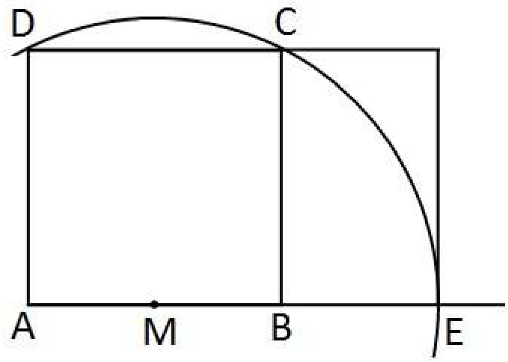

FIGURA 8: Como construir um segmento de medida igual a φ vezes a medida de outro segmento

Demonstração de que AE = φ AB.

Suponha, por conveniência, AB = 2x.

Assim, AM = MB = x, MC = ME = $x\sqrt{5}$, $AE = AM + ME = x + x\sqrt{5} = x(1+\sqrt{5})$ e

$\frac{AE}{AB} = \frac{x(1+\sqrt{5})}{2x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$. Portanto, $AE = \varphi \cdot AB$.

Pode-se dividir um segmento AB em média e extrema razão, ou seja, encontrar C, entre A e B, de forma que AB/AC = AC/CB, da seguinte maneira:

A partir de AB, construa o triângulo retângulo ABD, retângulo em B, de forma que BD = AB/2. Marque em AD um ponto E, tal que DE = DB. Marque C, em AB, de forma que AC = AE.

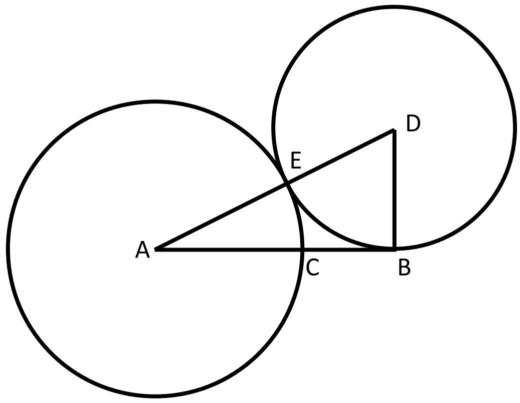

FIGURA 9: Divisão de um segmento em Razão Áurea

É fácil confirmar que $\frac{AB}{AC} = \varphi$.

Suponha (por conveniência) AB = 2x. Assim, BD = DE = x, AD = $x\sqrt{5}$ e AE = AC = $x\sqrt{5} - x = x(\sqrt{5} - 1)$. Logo, $\frac{AB}{AC} = \frac{2x}{x(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$.

No livro *Construções Geométricas*, Eduardo Wagner faz uma interessante construção relacionada a essas duas últimas construções (2007, p. 41 e 42).

Euclides, na proposição 11 do livro II de *Elementos*, faz uma alusão à Razão Áurea, usando área (SPIRA, 2012, p. 2; GALVÃO, 2008, p. 147); no livro VI, Euclides define o que é dividir um segmento em média e extrema razão e, na proposição 30, mostra como fazer essa divisão; a Razão Áurea é usada no livro IV para a construção do pentágono e no teorema 17 do livro XIII para a construção do dodecaedro (LIVIO, 2011, p. 96).

Após Euclides, outros matemáticos continuaram a produzir resultados geométricos envolvendo a Razão Áurea. Dentre esses matemáticos, podemos citar Hipsicles de Alexandria (que viveu por volta do século II a.C), Hero (século I d.C), Ptolomeu (século II d.C) e Pappus de Alexandria (século IV d.C).

Hipsicles é considerado o autor de um livro que por vezes é mencionado como o XIV livro de *Elementos* (de Euclides) ou o *Suplemento de Elementos*. Esse livro traz um importante teorema sobre um dodecaedro e um icosaedro inscritos em uma mesma esfera. Pappus, o último grande geômetra grego que desenvolveu teoremas relativos ao Número de Ouro, em seu trabalho intitulado *Coleção*, apresenta uma nova maneira de construir o dodecaedro e o icosaedro e comparações entre os volumes dos cinco sólidos de Platão, sempre utilizando o Número de Ouro (LIVIO, 2011, p. 106).

Após Pappus, o estudo da Razão Áurea ficou, por alguns anos, praticamente estagnado e sem nenhum resultado importante. Já nos séculos IX e X, matemáticos árabes e indianos produziram resultados aritméticos adicionais, mas sem grandes proporções, relativos ao Número de Ouro. Só na Idade Média, com os trabalhos de Leonardo de Pisa (o famoso Fibonacci) novos capítulos interessantes surgem na história do Número de Ouro (LIVIO, 2011, p. 106 a 110).

> O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações. (LIVIO, 2011, p. 115)

Em seu livro *Practica Geometriae* (Prática de Geometria), de 1223, Fibonacci divulga resultados, envolvendo o Número de Ouro, ao apresentar cálculos dos lados do pentágono e do decágono em função dos diâmetros dos círculos inscritos e circunscritos, cálculos dos volumes do dodecaedro e do icosaedro e novos métodos para se calcular a diagonal e a área do pentágono (LIVIO, 2011, p. 115).

Esse matemático italiano *"expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações"*, em 1202, quando publicou em seu primeiro livro, *Liber Abbaci* (O livro do ábaco), o seguinte problema:

Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

Esse problema provavelmente é oriundo do papiro de Rhind ou de Ahmes, um texto egípcio escrito por Ahmes por volta de 1600 a.C (HOGBEN, 1958, p. 20 e 64), comprado em 1858 pelo egiptólogo escocês Alexander Henry Rhind (ZAHN, 2011, p. 5, MAOR, 2006, p. 62). Não é muito complicado ver que os números de casais de coelhos, a cada mês, formam a seguência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... . Essa sequência tem a interessante propriedade de que, a partir do terceiro elemento, cada elemento é igual à soma dos dois imediatamente anteriores a ele. Por exemplo, o terceiro elemento, 2, é igual à soma dos dois primeiros, 1 e 1, e o décimo elemento, 55, é igual à soma do oitavo, 21, e do nono, 34.

Essa propriedade pode ser representada através da seguinte fórmula de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n > 2 \text{ e } a_1 = a_2 = 1.$$

A relação, quase inimaginável, entre esse problema e a Razão Áurea, cuja descoberta é atribuída a Kepler, pode ser percebida ao calcular as sucessivas razões entre um elemento da sequência e o seu antecessor. Observe:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3} = 1{,}666666...$$

$$\frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\frac{a_7}{a_6} = \frac{13}{8} = 1{,}625$$

$$\frac{a_8}{a_7} = \frac{21}{13} \cong 1{,}6153846$$

$$\frac{a_9}{a_8} = \frac{34}{21} \cong 1{,}6190476$$

$$\frac{a_{10}}{a_9} = \frac{55}{34} = 1{,}617647$$

$$\frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{89}{55} = 1{,}6181818...$$

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{144}{89} \cong 1{,}6179775$$

Nota-se que, à medida que avançamos nos cálculos, as razões vão se aproximando de φ. Além disso, quando o maior elemento é de ordem par, a razão é um valor menor que φ, e quando o maior elemento é de ordem ímpar, a razão é um valor maior que φ. No capítulo 4 do livro *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*, de Maurício Zahn, essas propriedades da sequência de Fibonacci são demonstradas. Nesse livro também existe a prova de outra relação interessante entre φ e a sequência. Essa relação é uma fórmula que permite calcular o enésimo termo da sequência, a_n, sem precisar dos dois termos anteriores. A fórmula é chamada de fórmula de Binet, em homenagem ao matemático francês Jacques Phillipe Marie Binet (1786 a 1856), que, segundo Livio (2011, p. 128), em meados do século XIX, redescobriu a fórmula. Livio usa o termo "redescobriu" porque a fórmula *"aparentemente, era conhecida no século XVIII pelo mais prolífico matemático da história, Leonard Euler (1707 a 1783), e pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667 a 1754)".* A intrigante fórmula é:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right).$$

Lembre-se que os números da sequência de Fibonacci são todos números inteiros e perceba o quão intrigante é essa fórmula.

Utilizando essa fórmula e conceitos e propriedades básicas do cálculo, fica fácil mostrar que as razões de termos consecutivos da sequência de Fibonacci convergem para φ. De fato:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n}\right)} = \frac{\varphi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}}{\varphi^{n} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n}}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n} = 0,$ segue que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} = \lim_{n\to\infty}\varphi = \varphi.$$

Para entender uma outra relação entre a sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, é preciso conhecer um pouco sobre uma figura (curva) chamada de *espiral logarítmica*.

A espiral logarítmica foi minuciosamente estudada por, e era a curva preferida de, Jakob Bernoulli (1654 a 1705), um matemático renomado que contribuiu grandemente para o desenvolvimento do cálculo e da teoria das probabilidades, que introduziu na Geometria Analítica as coordenadas polares e que batizou a espiral logarítmica de *spira mirabilis*, que significa espiral maravilhosa. A equação polar dessa curva pode ser escrita como $r = e^{a\theta}$, onde r é a distância de um ponto do gráfico à origem do plano cartesiano, *e* é o número de Euler $\left(\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2{,}71828\right)$, θ é um ângulo dado em radianos e *a* é uma constante que determina a taxa de crescimento da espiral.

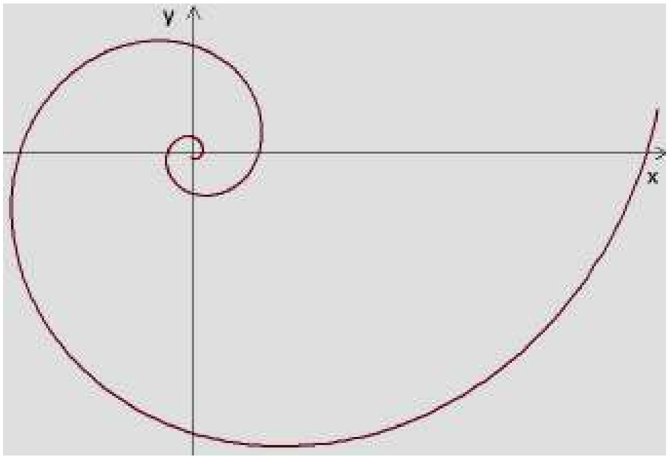

FIGURA 10: Espiral logarítmica

O ponto inicial da curva, que no gráfico acima é a origem do sistema cartesiano, é chamado de pólo.

Pode-se mostrar que a espiral logarítmica possui propriedades singulares. Por exemplo, cada semirreta com origem no pólo corta a espiral logarítmica através de ângulos iguais (no apêndice 6 do livro *e: a história de um número*, Eli Maor demonstra essa propriedade) e, se aumentarmos θ em progressão aritmética, r aumenta em progressão geométrica (lembre que $e^{a(\theta + \alpha)} = e^{a\theta}.e^{a\alpha}$). A primeira dessas propriedades explica o fato de a curva também ser chamada de espiral *equiangular*, e a segunda propriedade, o fato de a curva ser chamada de espiral *logarítmica*.

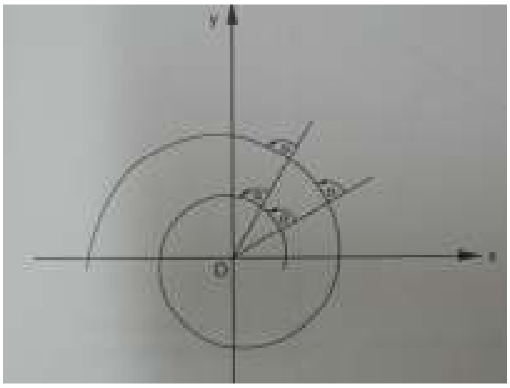

FIGURA 11: Espiral equiangular
(imagem obtida em *e: a história de um número*)

Outra propriedade encantadora da espiral logarítmica é: a partir de um ponto P de seu gráfico, são necessárias infinitas rotações sobre o gráfico para se chegar até o pólo; porém, a distância percorrida será finita. Essa propriedade foi mostrada por Evangelista Torricelli (1608 a 1647).

Segundo Maor (2006, p. 163), "o que mais encantava Jakob Bernoulli em relação à espiral logarítmica era o fato de ela permanecer invariável – imutável – na maioria das transformações de geometria". Todo esse encantamento de Bernoulli pela *spira mirabilis* o levou a expressar o desejo de que fosse gravada, em sua lápide, uma espiral logarítmica, desejo que quase foi atendido, visto que uma espiral foi talhada em sua lápide, mas não uma logarítmica, e sim uma arquimediana – uma espiral arquimediana não possui crescimento geométrico, e sim aritmético.

Para perceber a associação entre φ, a espiral equiangular e a sequência de Fibonacci, vamos, inicialmente, construir um retângulo áureo ABCD, como o da figura:

FIGURA 12: Retângulo áureo

Em seguida, a partir do lado AD, vamos construir um quadrado, ADEF, interno ao retângulo. É fácil mostrar que o retângulo BCEF é áureo. Repetindo esse processo indefinidamente e traçando arcos de circunferências nos vértices dos quadrados, conforme a próxima figura, obtém-se uma (pseudo) espiral logarítmica, comumente chamada de espiral de ouro ou espiral áurea.

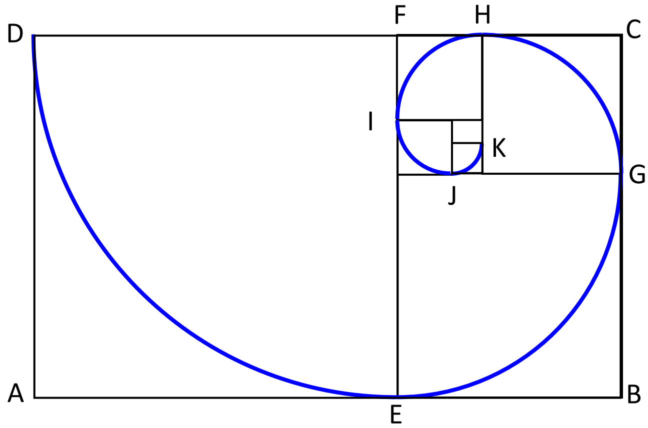

FIGURA 13: (pseudo) Espiral áurea

O termo *pseudo* foi incluído porque a figura, apesar de visualmente ser muito parecida, não é uma espiral logarítmica.

Segundo Zanh (2011 p. 37), a equação polar de uma espiral áurea que passa pelos pontos (1, 0) e $(\varphi, \pi/2)$ é $r = e^{\ln \varphi^{\frac{2}{\pi}} \cdot \theta}$.

Para encontrar o pólo da (pseudo) espiral de ouro, construída a partir dos retângulos áureos, basta obter a interseção de duas convenientes diagonais de dois retângulos áureos (AC e BF, por exemplo), conforme a figura.

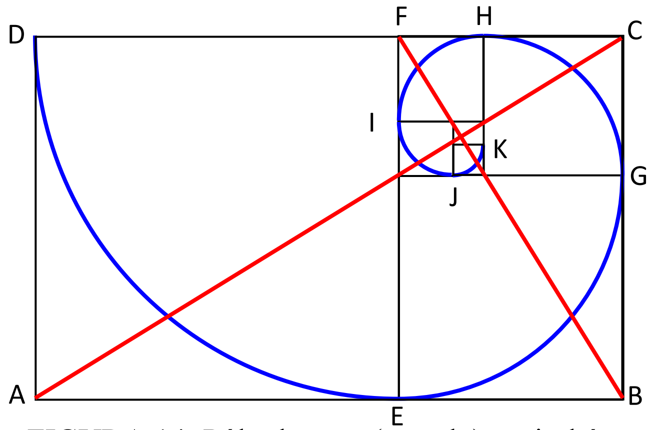

FIGURA 14: Pólo de uma (pseudo) espiral áurea

Boyer (1996, p. 76) afirma que o pólo é o centro de uma espiral logarítmica tangente aos retângulos nos pontos D, E, G, H, I, ... Na conferência sobre o Número de Ouro, ministrada pelo professor Michel Spira, cujo vídeo está disponível em http://www.youtube.com/watch?v=WVc2bS5Gc-k, Spira argumenta contra essa afirmação.

A relação dessa (pseudo) espiral com a Razão Áurea e com os números de Fibonacci (números da sequência de Fibonacci) aparece quando construímos quadrados cujas medidas dos lados são os números de Fibonacci e traçamos arcos de circunferências seguindo o esquema da seguinte figura:

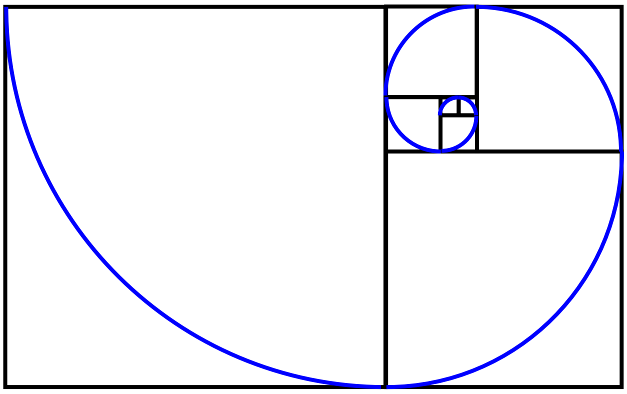

FIGURA 15: Espiral de Fibonacci

Nessa figura, os dois quadrados menores têm lados medindo 1, os demais têm lados medindo 2, 3, 5, 8, 13 e 21. Essa espiral é uma ótima aproximação para a (pseudo) espiral de ouro, e isso pode ser entendido pela relação que já mostramos existir entre a sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.

Para construir essa espiral, segundo Lauro (2005, p. 41) e segundo Livio (2011, p. 140), pode-se partir, também, de um triângulo isósceles áureo (a razão entre um lado e a base é φ). Como visto na demonstração de que a razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular é φ, ao traçar a bissetriz de um dos ângulos da base de um triângulo áureo (ACD), surge um novo triângulo áureo (DFC).

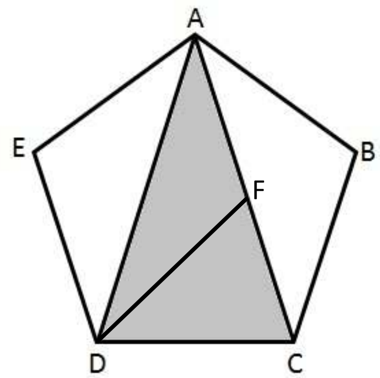

FIGURA 16: Triângulos áureos no pentágono regular

Repetindo o processo de construções de triângulos áureos indefinidamente, e traçando arcos de circunferências, obtém-se a “espiral”.

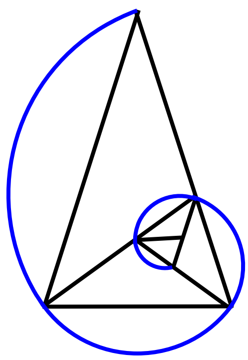

FIGURA 17: (pseudo) Espiral áurea
associada a triângulos áureos

Maor (2007, p. 175) escreve sobre a espiral logarítmica que

> sua forma graciosa tem sido um modelo decorativo favorito desde a antiguidade; e, com a possível exceção do círculo (que é, em si, um caso especial da espiral logarítmica), ela ocorre com mais frequência na natureza do que qualquer outra curva, às vezes com uma precisão espantosa, como é o caso da concha do náutilo.

A relação entre o Náutilo e a espiral logarítmica será detalhada no item 3.1.

Voltando à história do Número de Ouro, vale destacar um matemático e pintor italiano, chamado Piero della Francesca (c. 1412 a 1492). Três livros que Piero escreveu sobre Matemática foram preservados: *Sobre a perspectiva na pintura* (que se tornou referência na literatura sobre artes), *Livro curto sobre os cinco sólidos regulares* (escrito em latim) e *Tratado sobre o ábaco.*

> Tanto no Tratado sobre o ábaco quanto em Cinco sólidos regulares, Piero apresenta uma vasta gama de problemas (e suas soluções) que envolvem o pentágono e os cinco sólidos platônicos. Ele calcula os comprimentos dos lados e das diagonais, além de áreas e volumes. Muitas das soluções envolvem a Razão Áurea e algumas das técnicas de Piero representam um pensamento inovador e original. (LIVIO, 2011, p. 150)

Outro nome de destaque nessa história, já mencionado no início do estudo do Número de Ouro, é Luca Pacioli. Como citamos, ele escreveu uma trilogia intitulada *Divina Proporção,* publicada em 1509, que contém 60 ilustrações de sólidos geométricos desenhados por Leonardo da Vinci (1452 a 1519). No primeiro volume, Pacioli apresenta um sumário detalhado das propriedades de φ.

Já no segundo volume, Pacioli aborda o estudo das proporções e suas aplicações na arquitetura e na estrutura do corpo humano. Esse trabalho teve grande influência da coletânea *Os dez livros da arquitetura,* escritos pelo arquiteto e engenheiro romano Marcus Vitruvius Pollio (70 a 25 a.C). Sem dúvida, esse volume de *Divina proporção* inspirou da Vinci a fazer, em 1492, seu mais famoso desenho, intitulado *O homem vitruviano*, que pode estar intimamente ligado a φ, como veremos mais adiante.

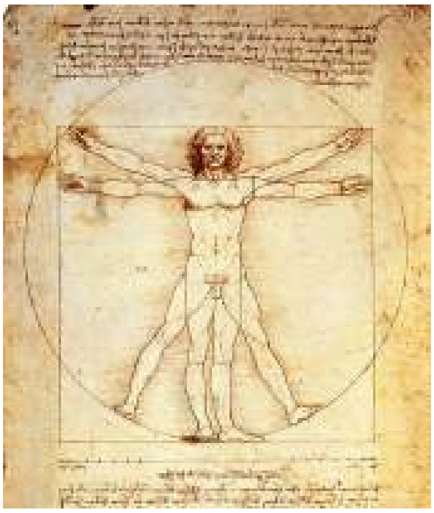

FIGURA 18: O Homem Vitruviano (imagem obtida em http://www.infoescola.com/desenho/o-homem-vitruviano/)

O terceiro volume da tríade *Divina proporção* é uma tradução para o italiano de *Livro curto sobre os cinco sólidos regulares*, de Piero. Pacioli também é o autor do famoso *Summa (Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita)*, um livro de cerca de 600 páginas que aborda os conceitos de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade e que contém grande parte do estudo algébrico do Número de Ouro feito por Piero (LIVIO, 2011, p. 151).

Os trabalhos de Pacioli contribuíram grandemente para a divulgação da matemática em geral e, em particular, do conceito do Número de Ouro, que, até àquela época, só era conhecido pelos matemáticos. A partir desses trabalhos, o interesse pela razão áurea foi renovado e o conceito começou a ser acessível a artistas, através de tratados teóricos.

Outro matemático e artista renascentista que contribuiu para a história do Número de Ouro foi o alemão Albrecht Dürer (1471 a 1528), cuja principal obra científica foi um tratado, composto de quatro volumes, chamado de *Tratado sobre medida com compasso e régua*, considerado o primeiro texto matemático em alemão. No primeiro livro, Dürer se dedica ao estudo das linhas retas e curvas, dando descrição detalhada de como construir várias curvas, inclusive a espiral logarítmica. No segundo livro, o autor se dedica a explorar figuras planas e apresenta duas formas, uma exata e uma aproximada, de se desenhar o pentágono regular. Nos dois últimos, Dürer estuda corpos sólidos e como representá-los no plano (a perspectiva). Estuda também a teoria das sombras e mostra aplicações de seus estudos na arquitetura. Também no livro 4, ele apresenta, ineditamente, redes de poliedros, que são planificações dos poliedros que, ao serem recortadas, permitem a montagem tridimensional dos mesmos – comuns em livros didáticos atuais.

O próximo nome associado à história de φ é o de Kepler, já mencionado anteriormente e considerado o pai da ciência moderna. Ele era um religioso que amava a Geometria e a Astronomia e, assim como Pacioli, também usava a expressão P*roporção Divina* para se referir à Razão Áurea.

Em seu primeiro livro, *Mysterium cosmographicum* (O mistério cósmico), publicado em 1597, Kepler utiliza os sólidos platônicos para tentar explicar detalhes dos movimentos dos planetas de nossa galáxia que já eram conhecidos. Também em 1597, ele escreveu uma carta para um de seus ex-professores comentando sobre o seguinte teorema: “Se numa linha dividida nas razões média e extrema se constrói um triângulo retângulo, de modo que o ângulo reto esteja sobre a perpendicular colocada no ponto da secção, então o lado menor terá o mesmo valor do maior segmento da linha dividida". (ver a próxima figura).

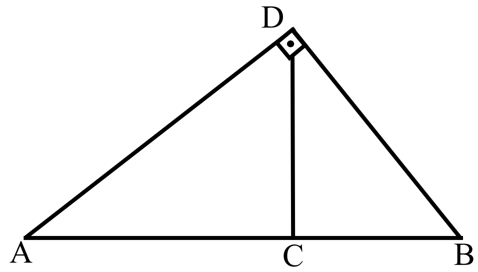

FIGURA 19: Triângulo retângulo associado a um segmento dividido em Razão Áurea

Demonstração:

Se C divide AB em média e extrema razão, então $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$. Assim, $AC^2 = AB \cdot BC$.

Pelas relações métricas no triângulo retângulo, pode-se concluir que BD < AD e que $BD^2 = AB \cdot BC$. Comparando as duas últimas igualdades, conclui-se que BD = AC.

Foi Kepler quem descobriu a relação entre o Número de Ouro e a razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci e que o quadrado de um número de Fibonacci difere, no máximo, de uma unidade do produto dos dois termos adjacentes ao número (LIVIO, 2011, p. 176). Como exemplo, o quadrado do 6º termo da sequência de Fibonacci ($8^2 = 64$) somado de uma unidade é 65 e é igual ao produto entre o 5º e o 7º termos (5 e 13), e o quadrado do 7º (13), subtraído de uma unidade, é 168 e é igual ao produto do 6º e do 8º (8 e 21).

No seu livro *Hamonice Mundi* (A harmonia do mundo), publicado em 1619, consta um estudo sobre formas de preencher um plano com figuras geométricas, conhecido como *tiling*. Uma das figuras que Kepler divulga no livro utiliza, basicamente, apenas três polígonos ligados ao Número de Ouro: o pentágono, o pentagrama e o decágono (para mais detalhes sobre o trabalho de Kepler sobre *tiling*, acesse http://gruze.org/tilings/kepler).

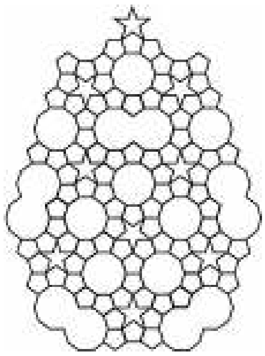

FIGURA 20: Tiling de Kepler (imagem obtida em http://www.flickr.com/photos/zook360/4525356945/)

A utilização do Número de Ouro em obras de diversos artistas, passando por Giotto di Bondoni (1267 a 1337), Cenni di Pepo (c. 1240 a 1302), Sienna Duccio di Buoninsegna (1255 a 1319), Leonardo da Vinci (especialmente no quadro *Monalisa*), Pierre Puvis de Chavannes (1824 a 1898) e Georges Seurat (1859 a 1891), tem sido defendida por muitos e considerada infundada por outros. Livio (pp. 193) argumenta que é bem provável que o primeiro artista de destaque a utilizar, conscientemente, a Razão Áurea em suas obras foi o francês Paul Sérusier (1864 a 1927). Salvador Dali (1904 a 1989) foi outro artista a usar a Razão Áurea, por exemplo, no quadro *A última ceia*, de 1955 (LIVIO, 2011, p. 20).

Em 1927 o escritor Matila Ghyka (1881 a 1965) publicou o livro *Estética das proporções na natureza e nas artes* e, em 1931, publicou *O número áureo: ritos e ritmos pitagóricos no desenvolvimento da civilização ocidental*. Nesses livros, Ghyka mistura propriedades matemáticas verídicas da Razão Áurea com relatos incoerentes de ocorrências dessa Razão nas artes (LIVIO, 2011, p. 192).

Após Sérusier, pintores e escultores, como Juan Gris (1887 a 1927), Jacques Lipchitz (1891 a 1973), Gino Severini (1883 a 1966), usaram propositalmente o Número de Ouro em algumas de suas obras. As obras e a vida do pintor holandês Piet Mondrian (1872 a 1944) são investigadas para saber se o artista usou a proporção divina em seus trabalhos (os resultados são contraditórios).

Fato é que o famoso arquiteto e pintor Le Corbusier (Charles-Édouard Jeanneret – 1887 a 1965) utilizou o Número de Ouro em suas obras após 1927. Para confirmar essa afirmação, basta observar o *Modulor*, figura criada por Le Corbusier com a intenção de encontrar um padrão para proporções e que, segundo ele, daria proporções harmoniosas a tudo (LIVIO, 2011, p. 198).

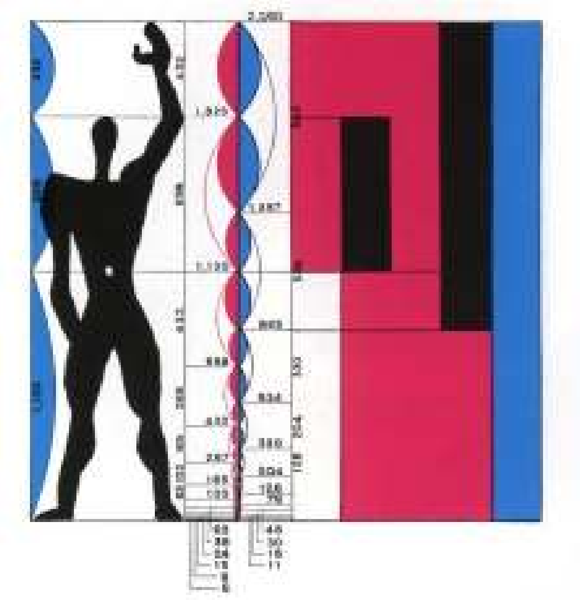

FIGURA 21: O Modulo (imagem obtida em http://coisasdaarquitetura.wordpress.com/2010/06/30/ quem-acredita-no-modulor/)

A figura retrata um homem de aproximadamente 1,83 m cujo umbigo divide essa altura segundo a Razão Áurea, ficando a 1,13 m do chão. Há também outra divisão semelhante na figura e duas escalas relacionadas à sequência de Fibonacci, uma em azul e uma em vermelho.

Le Corbusier utilizou, na prática, as proporções apresentadas em *Modulor*, como se pode ver nas notas que ele fez para o *layout* urbano da cidade de Chandigarh, na Índia (LIVIO, 2011, p. 199).

Em 1974, a pintora Maria Vorobëva (conhecida como Marevna) publicou um livro, intitulado *A Vida com os Pintores de La Ruche*, em que comenta que pintores como Pablo Picasso (1881 a 1973) e Diego Rivera (1886 a 1957) também fizeram uso de φ em suas obras. Infelizmente a autora não indica como isso pode ser comprovado, deixando um ar de incerteza e dúvida sobre a veracidade de suas afirmações.

Muitas outras afirmações, que são detalhadamente investigadas por estudiosos da música e que podem até ser verdadeiras, visto que existem alguns indícios disso, mas que não têm como serem provadas, referem-se à utilização da Divina Proporção e da sequência de Fibonacci na música. Dentre as obras incluídas nessas disputas estão as de Johann Sebastian Bach (1685 a 1750), Mozart (1756 a 1791), Béla Bartók (1881 a 1945) e Claude Debussy (1862 a 1918) e os cantos *Kyrie* da coleção de cantos gregorianos conhecidos como *Liber Usualis* e que são os registros mais antigos da música ocidental feitos em notação musical (LIVIO, 2011, p. 212).

Verdade é que *"O violino é um instrumento no qual a Razão Áurea de fato aparece com frequência"* e que alguns compositores, a partir do século XX, utilizaram o φ em suas obras (LIVIO, 2011, p. 209 e 219).

Outra questão controversa na história da Razão Áurea se refere ao retângulo áureo. Muitos textos afirmam que esse retângulo era considerado pelos gregos antigos como a figura mais harmoniosamente dimensionada. Conforme Queiroz (2007, p. 8), em 1876, o psicólogo alemão Gustav Theodor Fechner realizou uma pesquisa sobre a preferência por formatos de retângulos. O resultado desta pesquisa mostrou que a maioria das pessoas prefere um retângulo cuja razão entre as suas medidas muito se aproxima da Razão Áurea. Queiroz (2007, p. 8) afirma ainda que essas pesquisas foram repetidas por Wilmar (1894), Lalo (1908) e Thorndike (1917) e, em cada uma destas pesquisas, os resultados foram semelhantes. Antes mesmo dessas pesquisas, em 1854, Adolph Zeising publicou o livro *A nova teoria das proporções no corpo humano*, onde deixa claro que ele acredita que a Razão Áurea define o padrão de beleza na arte e na natureza (LIVIO, 2011, p. 203). Algumas críticas aos métodos dessas pesquisas, e resultados de outras pesquisas, deixam em dúvida a certeza da existência de uma preferência "universal" pelo retângulo de ouro (LIVIO, 2011, p. 203 a 208).

Em 1914, Theodore Andrea Cook (1867 a 1928) publicou *As curvas da vida*, um livro com pouco menos de 500 páginas dedicadas integralmente à espiral e ao seu papel na arte e na natureza. Em 1926, Jay Hambidge publicou *Os elementos da simetria dinâmica*, um livro que influenciou gerações de artistas e que cita e utiliza o Número de Ouro (MAOR, 2006, p. 177).

Universalmente aceito (e matematicamente comprovado) é que o Número de Ouro está presente nos fantásticos ladrilhos descobertos, em 1974, pelo renomado físico/matemático Roger Penrose, nascido em 1931 no Reino Unido. Esses ladrilhos formam mosaicos que não têm um padrão de formação periódica, mas apresentam um tipo especial de regularidade.

O par mais famoso e interessante dos ladrilhos de Penrose é formado por dois tipos de quadriláteros, chamados de seta (dardo ou flecha) e pipa (ou papagaio), sendo que dois lados de cada um medem 1, e dois lados medem φ. Na figura a seguir, à esquerda está hachurada/colorida a seta, e à direita, a pipa.

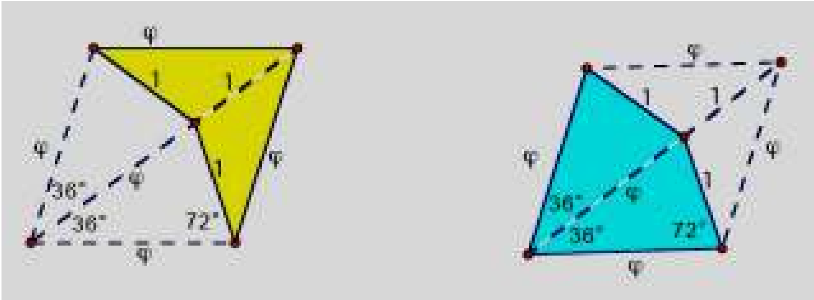

FIGURA 22: Seta e Pipa de Penrose (imagem obtida em http://www.ime.usp.br/~matemateca/textos/ladrilhamentos.pdf)

Mosaicos que utilizam esses ladrilhos podem ser vistos facilmente na internet.

Outro par de ladrilhos descoberto por Penrose em 1974, também ligados à Razão Áurea, é composto de dois losangos de lados medindo 1. A diferença entre eles é que a diagonal maior de um é φ (losango aberto) e a diagonal menor do outro é $1/\varphi$ (losango fechado).

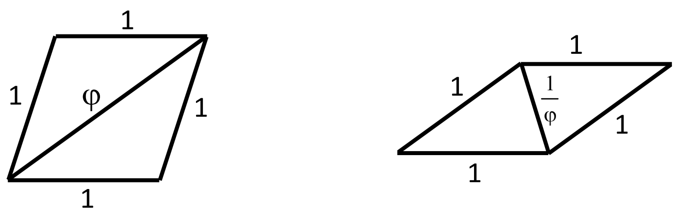

FIGURA 23: Paralelogramos de Penrose

Curioso também é o fato de que ambos os pares de ladrilhos de Penrose podem ser encaixados de forma a preencher todo o plano e apresentar uma simetria rotativa quíntupla, relacionada ao pentágono e, além disso, cada um dos quatro ladrilhos pode ser obtido no pentágono regular ao traçar as diagonais desse polígono. Interessante também é que, ao ladrilhar grandes áreas com setas e pipas, a razão entre suas respectivas quantidades será um valor muito próximo de φ e, se utilizarmos o outro par, a razão entre o número de losangos abertos e o número de losangos fechados será igualmente próxima de φ (LIVIO, 2011, p. 230 e 232).

Algo semelhante ao que Penrose fez para preencher o plano, Robert Ammann, em 1976, fez para preencher o espaço. Ammann utilizou dois paralelepípedos com faces, respectivamente, congruentes aos losangos aberto e fechado de Penrose.

Em 1984, o israelense Dany Schectman, engenheiro de materiais, e seus colaboradores, descobriram uma outra forma para a estrutura de um sólido, chamada de *quase cristais*. Até então, acreditava-se que *"sólidos só podiam surgir em duas formas básicas: ou eram cristais extremamente ordenados e totalmente periódicos ou eram completamente amorfos"* (LIVIO, 2011, p. 233).

A estrutura de um quase cristal nem é periódica (extremamente ordenada) nem é totalmente desordenada. Ela apresenta uma ordenação ao analisar grandes regiões e certo tipo de desordem em pequena escala – algo semelhante ao que acontece com os ladrilhos de Penrose e com os paralelepípedos de Ammann. Segundo Livio (2011, p. 236), outras pesquisas sugerem que a estrutura desses materiais também está intimamente relacionada à Razão Áurea de outras formas. O mesmo escritor comenta que a Razão Áurea tem aplicações no estudo de fractais e que a origem do universo, segundo recentes teorias, pode estar diretamente ligada à teoria fractal (2011, p. 247 a 250).

Voltando cerca de 2400 anos na história da razão áurea, a base do raciocínio que pode ter levado Hipaso, aquele discípulo de Pitágoras, à descoberta da incomensurabilidade, foi uma forma fractal que envolve o pentágono regular e o pentagrama gerado pelas diagonais do pentágono. Ao traçar as diagonais de um pentágono regular, surgem um pentagrama e um novo pentágono regular. As diagonais desse novo pentágono geram um novo pentagrama e um novo pentágono. Seguindo assim indefinidamente, pode-se chegar a um pentágono cujo lado seja menor que qualquer unidade pré-fixada, mostrando, assim, que não existirá uma medida que servirá de unidade para expressar as medidas do lado e da diagonal do pentágono como múltiplos inteiros dessa unidade.

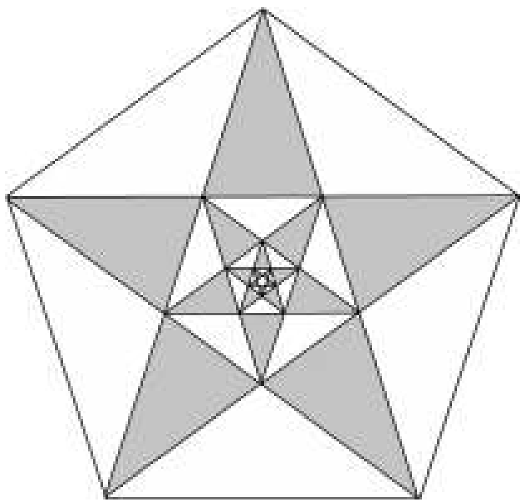

FIGURA 24: Efeito fractal no pentágono regular

3.1. APLICAÇÕES DE φ

Podem-se encontrar, na natureza, várias formas, medidas e razões relacionadas ao Número de Ouro. Curiosamente, a razão entre diversas medidas do corpo de muitas pessoas é um valor próximo de φ (ou de $1/\varphi$, dependendo da ordem dos elementos na razão). Por exemplo, a razão entre o comprimento de uma pessoa e a medida do umbigo à sola do pé, e a razão entre a distância do ombro à ponta do dedo médio e a distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio é um valor próximo do valor de φ. Outros pares de medidas cujas razões são próximas de φ são: o comprimento do rosto e a distância dos olhos ao queixo; as distâncias dos olhos ao queixo e do nariz ao queixo; as distâncias do nariz ao queixo e da boca ao queixo.

No artigo *O Número de Ouro e suas manifestações na natureza e na arte*, publicado na revista Complexus (ano 1, número 2), Edson de Oliveira e Tiago Emanuel Ferreira mostram que, no homem representado no desenho *O homem vitruviano*, o cotovelo e o umbigo dividem, respectivamente, o braço e o corpo em Razão Áurea.

Spira (O Número de Ouro) comenta que, em um livro francês chamado *O Número de Ouro*, publicado em 1940, o autor, implicitamente, prega que, em mulheres espiritualmente mais desenvolvidas, o umbigo divide o corpo, de forma quase perfeita, em Razão Áurea e apresenta desenhos mostrando que as mulheres negras e as judias têm o umbigo bem abaixo da linha que divide o corpo em média e extrema razão. Vale lembrar que a Segunda Guerra Mundial ocorria naquela época.

De acordo com Lauro (2005, p. 44):

> a "razão dourada", dentre outras aplicações, tem lugar reservado também nos consultórios de ortodontia. Atualmente, a busca de tratamentos odontológicos estéticos tem sido priorizada em diversas áreas da odontologia. Vários são os recursos utilizados em busca de um sorriso perfeito. Respeitando as regras da proporção áurea e os movimentos mandibulares do paciente, são utilizados instrumentos para verificar o posicionamento correto da arcada dentária.

No mesmo artigo há uma fotografia que, segundo a autora, mostra uma pessoa cujos quatro dentes frontais, de cada lado da arcada dentária superior, decrescem segundo o inverso de φ. Queiroz (2007, p. 36, 37) também argumenta a favor dessas afirmações e cita como referência bibliográfica o site www.labordental.com.br (nesse site, clicando no *link* Biblioteca Virtual e, depois, em Literatura Científica, chega-se a uma página que disponibiliza o artigo *Introdução à aplicação da proporção áurea em estética dental*).

Outra aplicação da Razão Áurea, agora na botânica, pode ser vista no intrincado arranjo das pétalas em uma rosa. Incrivelmente, as pétalas se organizam sendo separadas umas das outras segundo um ângulo chamado de ângulo áureo. Esse ângulo pode ser obtido da seguinte forma: tome uma circunferência qualquer; seja AB um segmento de comprimento igual ao comprimento da circunferência; divida AB em Razão Áurea (suponha CB o menor dos segmentos); marque, na circunferência, um arco de comprimento igual a CB; o ângulo central relativo a esse arco é o ângulo áureo e mede $\frac{360°}{\varphi^2} \cong 137{,}5°$.

O ângulo áureo permite que as pétalas não se sobreponham e preencham o espaço de forma eficiente. Pode-se mostrar (ver o apêndice desse trabalho) que nenhum múltiplo inteiro do ângulo áureo será congruente a qualquer outro múltiplo, também inteiro, do mesmo ângulo áureo. Para mais detalhes sobre como o ângulo áureo e as flores de uma roseira estão relacionados, e outras aplicações da razão áurea (e do ângulo áureo) na botânica, ver o tópico *Quando o girassol de volta para seu deus* do capítulo 5 do livro *Razão Áurea*, de Mario Livio. Assista, também, ao vídeo *A beleza da Matemática*, disponível em http://www.youtube.com/watch?v=TncA5tVsxqI.

O falcão-peregrino é o animal mais rápido do mundo, chegando a atingir a inacreditável velocidade de 300 km/h durante suas caçadas. Como seus olhos situam-se na lateral da cabeça, para enxergar melhor um ponto que está à sua frente, ele precisa inclinar a cabeça lateralmente aproximadamente 40°. Segundo o biólogo Vance A. Tucker (apud LIVIO, 2011, p. 141), se o falcão se deslocar com a cabeça inclinada em 40°, ele se tornará menos rápido.

Dessa forma, para aumentar suas chances de capturar uma presa, o falcão precisa manter o olhar fixo na presa e se aproximar dela com rapidez. Ele conseguirá isso se deslocando sem inclinar a cabeça e realizando um voo de aproximação que descreve uma espiral logarítmica, não no plano, mas no espaço (semelhante à espiral que pode ser vista na imagem da concha marinha, na página 55). Pela propriedade equiangular da espiral logarítmica, já descrita anteriormente, essa afirmação se torna bem plausível (LIVIO, 2011, p. 141, e material interessante e dinâmico disponível no sitio da Universidade Federal Fluminense - http://www.uff.br/sintoniamatematica/matematicaenatureza/matematicaenatureza-html/audio-falcao-br.html).

É importante, no entanto, observar que, apesar de Livio não garantir que essa curva é a espiral áurea, a informação consta no livro cujo tema e título são *Razão Áurea*, sugerindo que a espiral seja áurea. No site mencionado acima, também só consta que o movimento do gavião é descrito por uma espiral logarítmica. Já Diegues (2004, p. 47) afirma que a espiral é áurea.

Em muitos trabalhos sobre o Número de Ouro, comenta-se que as espirais que aparecem nos girassóis e nas margaridas são espirais áureas. Spira (O Número de Ouro) afirma que as espirais são logarítmicas, mas não áureas.

FIGURA 25: Girassol (imagem obtida em http://codigodacultura.wordpress.com/2010/04/30/a-sequencia-de-fibonacci/)

Apesar dessas contradições, segundo Livio (2011, p. 133) e o próprio Spira, a razão entre o número de espirais que estão em um dos sentidos e o número das que estão no outro sentido é quase sempre a razão entre dois números consecutivos de Fibonacci (lembre-se de que essas razões convergem para φ).

A mesma forma espiralada pode ser vista nas conchas do molusco Náutilo, como mostrado na figura a seguir.

FIGURA 25: Concha de um Náutilo
(obtidas no Google Imagens)

A próxima figura mostra uma concha marinha e uma construção geométrica associada, que divide a distância entre duas linhas não consecutivas da espiral em média e extrema razão. Apesar de a linha intermediária da espiral não estar perfeitamente no ponto de divisão entre as outras duas linhas, a aproximação é razoável.

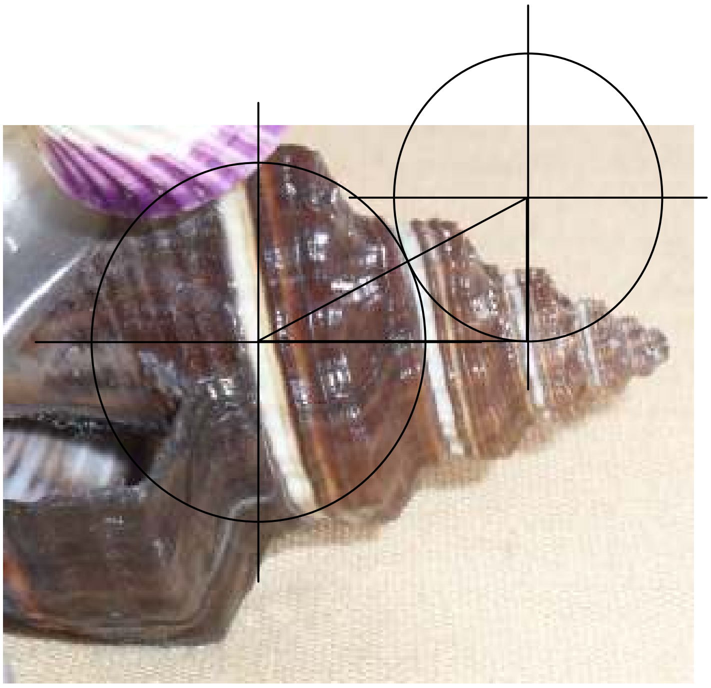

FIGURA 27: Concha do mar associada à divisão
de um segmento em Razão Áurea

Na página 47 do artigo de Diegues, uma foto é apresentada para mostrar que na concha de um molusco da Nova Zelândia (muito parecida com a foto anterior) razões entre várias medidas da concha são iguais a 0,618... (inverso de φ, mas que é chamado de φ pelo autor). Medindo alguns segmentos e calculando algumas das razões indicadas na reportagem, percebe-se que os resultados não conferem.

Novamente, em muitos artigos sobre o Número de Ouro, afirma-se que as espirais nas conchas dos moluscos são áureas, mas, segundo Spira (O Número de Ouro), são espirais logarítmicas que não têm nenhuma relação com φ.

As figuras 56 do livro de Maor (2006, p. 177) e 43 do livro de Livio (2011, p. 142) e a ilustração da capa da primeira edição da revista Sapiens (setembro de 2004) revelam que a forma espiral define as imagens obtidas dos universos-ilhas. Esses universos são gigantes galáxias formadas por bilhões de estrelas como o nosso sol (LIVIO, 2011, p. 142). Maor (2006, p. 177) afirma que as espirais são logarítmicas; Livio (2011, p. 142) afirma apenas que são espirais; já Diegues (2004) garante que são espirais áureas.

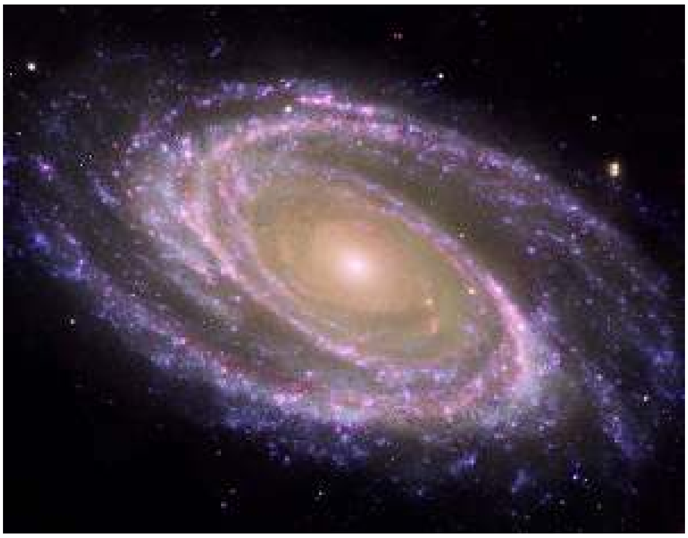

FIGURA 28: Imagem de uma galáxia (obtida em http://misteriosdomundo.com/universo-invisivel-materia-escura-e-energia-escura)

3.2. OUTRAS PROPRIEDADES E CURIOSIDADES DE φ

A seguir são apresentadas algumas propriedades e curiosidades sobre o Número de Ouro.

3.2.1. Potências de φ

Sabendo que $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ é fácil calcular:

$\varphi^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{2(3+\sqrt{5})}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\varphi$ (essa igualdade pode ser obtida através da equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$).

$$\varphi^3 = \varphi.\varphi^2 = \varphi(1+\varphi) = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi$$

$$\varphi^4 = \varphi.\varphi^3 = \varphi.(1+2\varphi) = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2(1+\varphi) = 2 + 3\varphi$$

$$\varphi^5 = \varphi.\varphi^4 = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(1+\varphi) = 3 + 5\varphi$$

$$\varphi^6 = \varphi.\varphi^5 = 3\varphi + 5\varphi^2 = 3\varphi + 5(1+\varphi) = 5 + 8\varphi$$

Neste ponto, já é possível sugerir que $\varphi^n = a_{n-1} + a_n.\varphi$, para $n \geq 2$, onde a_n são os termos da sequência de Fibonacci.

Usando Indução Matemática, pode-se mostrar essa relação entre as potências de φ e os números de Fibonacci. De fato:

Sabendo que $\varphi^2 = 1 + 1\varphi = a_1 + a_2\varphi$ e que, na sequência de Fibonacci, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$, para $k \geq 3$, e supondo $\varphi^n = a_{n-1} + a_n\varphi$, para algum $n \geq 2$, tem-se:

$$\varphi^{n+1} = \varphi.\varphi^n = \varphi(a_{n-1} + a_n\varphi) = \varphi.a_{n-1} + a_n\varphi^2 = \varphi.a_{n-1} + a_n(1+\varphi) \Rightarrow$$

$$\varphi^{n+1} = \varphi(a_{n-1} + a_n) + a_n = \varphi.a_{n+1} + a_n \Rightarrow \varphi^{n+1} = a_n + a_{n+1}\varphi$$

Portanto, para $n \geq 2$, está provado que $\varphi^n = a_{n-1} + a_n.\varphi$.

3.2.2. Uma interessante relação entre $\frac{1}{\varphi}$, φ e φ^2

Como visto no início do capítulo, $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Isso implica que $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ e $\varphi^2 = \varphi + 1$. Assim, $\frac{1}{\varphi}$, φ e φ^2 têm suas partes decimais iguais e as partes inteiras, respectivamente, iguais a 0, 1 e 2 (inteiros consecutivos). Portanto:

$$\frac{1}{\varphi} = 0{,}61803... \qquad \varphi = 1{,}61803... \qquad \varphi^2 = 2{,}61803...$$

3.2.3. Duas maneiras de se obter φ

Fazendo uso do cálculo (ver CARVALHO, 2008, páginas 25 e 26), pode-se mostrar que são verdadeiras as igualdades

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}} \qquad \text{e} \qquad \varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}\ .$$

Com argumentos menos formais, pode-se obter essas igualdades como segue:

1) Suponha $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}}$.

Uma maneira de reescrever a igualdade é $x = 1 + \frac{1}{x}$, visto que o denominador da segunda parcela do lado direito da igualdade é $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$, que foi inicialmente definido como x.

Resolvendo a equação $x = 1 + \frac{1}{x}$, obtemos como raiz positiva o valor $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, que é o próprio φ.

2) Suponha $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$.

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade, obtém-se $y^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$, que pode ser reescrito como $y^2 = 1 + y$. A raiz positiva dessa última equação é $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, que é igual a φ.

Uma maneira de se chegar a essas expressões para φ é, a partir da igualdade $\varphi^2 = 1 + \varphi$, dividi-la por φ ou extrair a raiz quadrada de ambos os membros: $\varphi^2 = 1 + \varphi$ $\Rightarrow$ $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ ou $\varphi = \sqrt{1 + \varphi}$. Substituindo φ, nos segundos membros, pelas expressões correspondentes, obtém-se, respectivamente, $\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}$ e $\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}}$. Repetindo esse processo indefinidamente, obtém-se

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}} \quad \text{ou} \quad \varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}.$$

Existe uma relação entre a primeira dessas duas maneiras de se obter φ e a sequência de Fibonacci. Para enxergarmos essa ligação, vamos fazer alguns cálculos relacionados à expressão $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$.

* $1+\frac{1}{1}=\frac{1+1}{1}=\frac{2}{1}$

* $1+\frac{1}{1+1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

* $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}=1+\cfrac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

* $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}=1+\cfrac{1}{\frac{5}{3}}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$

* $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}=1+\cfrac{1}{\frac{8}{5}}=1+\frac{5}{8}=\frac{13}{8}$

Pode-se ver que cada soma é igual à razão entre dois números consecutivos da seguência de Fibonacci, que, como visto anteriormente, Kepler descobriu que converge para φ.

3.2.4. A Sequência Áurea

Existe uma sequência chamada de sequência áurea. Ela é formada utilizando apenas o elemento neutro da adição e o elemento neutro da multiplicação nos reais, ou seja, é formada apenas com os algarismos 0 e 1.

O primeiro elemento é 1 e cada elemento, a partir do segundo, é obtido substituindo cada um e cada zero do elemento anterior, respectivamente, por 10 e por 1. Assim, a sequência áurea é:

1, 10, 101, 10110, 10110101, 1011010110110, 101101011011010110101, 1011010110110101101011011010110110, ...

Outra maneira de se obter os elementos dessa sequência, a partir do terceiro, é agrupando os dois elementos anteriores, de forma que o imediatamente anterior é colocado no início, da esquerda para a direita, da representação e o outro no fim (algo semelhante ao que é feito na sequência de Fibonacci). Por exemplo, o terceiro elemento (101) é o agrupamento do segundo (10) e do primeiro (1), nessa ordem.

Uma interessante curiosidade dessa sequência é que a razão entre a quantidade de uns e de zeros em cada termo, a partir do segundo, converge para φ. Para entendermos essa propriedade, vamos, inicialmente, contar e listar a quantidade de uns em cada termo.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Incrivelmente, essa sequência é a própria sequência de Fibonacci.

Vamos, agora, contar e listar a quantidade de zeros em cada termo.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Novamente, essa é a sequência de Fibonacci (com uma pequena alteração – começando com zero).

Dessa forma, a razão entre a quantidade de uns e a quantidade de zeros em cada termo, a partir do segundo, é a razão entre dois elementos consecutivos da sequência de Fibonacci, que, como já sabemos, converge para φ.

Outras curiosidades sobre essa sequência podem ser vistas no livro de Mario Livio, indicado na bibliografia.

3.2.5. O número de ancestrais, por geração, de um zangão

Em qualquer colmeia, existem dois tipos de abelhas fêmeas: as operárias e as rainhas; e os zangões, que são machos. Nasce um zangão quando um ovo de uma rainha não é fecundado (um zangão não tem pai) e nasce uma abelha quando o ovo de uma rainha é fecundado por um zangão. Assim, um (1) zangão tem uma (1) mãe, dois (2) avós (o pai e a mãe da mãe), três (3) bisavós (a mãe do avô e o pai e a mãe da avó – 2 fêmeas e 1 macho), cinco (5) trisavós (3 fêmeas e 2 machos), oito (8) tataravós (5 fêmeas e 3 machos), e assim por diante – ver esquema a seguir, no qual Z significa zangão e A, abelha fêmea (LIVIO, 2011, p. 119 e 120 e http://www.bpiropo.com.br/fpc20070319.htm).

1ª geração	Z												
2ª geração	A												
3ª geração	A	Z											
4ª geração	A	Z	A										
5ª geração	A	Z	A	A	Z								
6ª geração	A	Z	A	A	Z	A	Z	A					
7ª geração	A	Z	A	A	Z	A	Z	A	A	Z	A	A	Z

....

Dessa forma, começando com o zangão, o número de ancestrais dele forma a sequência de Fibonacci. Além disso, a razão entre o número de fêmeas e o número de machos, em cada geração, é a razão entre dois números consecutivos da sequência de Fibonacci – que converge para φ. Para visualizar essa última propriedade, construa, como feito no item anterior, duas sequências: uma contando o número de As em cada geração, a partir da segunda, e outra contando o número de Zs, a partir da terceira geração.

É interessante observar que, no esquema anterior, a partir da segunda geração, a próxima geração é o agrupamento das duas anteriores, começando com a imediatamente anterior. Observe que esse mesmo esquema foi utilizado para a construção da sequência áurea.

Para entender mais uma relação entre a árvore genealógica de uma zangão e a sequência áurea, basta substituir, no esquema anterior, Z por 1 e A por 10.

1												
10												
10	1											
10	1	10										
10	1	10	10	1								
10	1	10	10	10	1	10						
10	1	10	10	10	1	10	10	1	10	10	1	10

....

Observe que, surpreendentemente, forma-se a sequência áurea.

3.3. ATIVIDADES DIDÁTICAS

A seguir, é proposta uma sequência de atividades didáticas que têm como foco o estudo do Número de Ouro em sala de aula. O professor deve utilizar entre seis e sete aulas para realizar todas as atividades e, o público alvo delas são alunos do 8º ano que estejam estudando números irracionais, ou alunos do 9º ano que estejam estudando polígonos regulares, ou alunos do 1º ano do Ensino Médio que estejam estudando sequências.

As atividades estão descritas de forma indireta, como orientações ao professor, que, para aplica-las em sala de aula, pode seguir as seguintes etapas:

1) Contar aos alunos a seguinte história (autor desconhecido):

Um pai e um filho caminhavam por uma estrada rural quando, de repente, encontram com um cachorro morto. O cão já estava cheirando mal e o menino logo comenta com o pai:

- Credo pai, que coisa mais horrível! Que fedor!

- Realmente, meu filho; este cachorro está fedendo muito. Mas olha só como ele tinha um pelo lindo!

- É mesmo. Olha como o pelo dele era comprido e brilhante. Que cor mais bonita!

- Além disso, filho, você viu a cor dos olhos dele?

- Nossa, é azul! - responde, encantada, a criança.

- Olha lá, filho, como os dentes dele eram branquinhos.

- É verdade, pai. Coitado do cachorrinho, lamenta o filho.

- Vamos enterrá-lo? - pergunta o pai.

- Vamos sim, responde o menino.

Então, eles enterraram o cachorro e colocaram sobre a terra uma cruz com o seguinte dizer: “Aqui jaz um lindo cachorro”.

2) Comentar com os alunos que muitas coisas que nós achamos feias, horríveis, ou que para nós não têm valor, podem possuir características que sejam incrivelmente belas e interessantes. Afirmar que muitas pessoas que nós ofendemos por acharmos que elas são feias, gordas, magras, chatas ou *nerds*, muitas vezes são pessoas legais, inteligentes, alegres, de bom coração, honestas, que estão sempre nos ajudando, ou que são boas em algum esporte. Ensinar que essas pessoas merecem ser respeitadas e amadas como quaisquer outras.

3) Dizer que na matemática isso também pode acontecer, e dar como exemplo o número $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, comentando que, mesmo que pareça “feio”, ele é um número que possui características/propriedades interessantes e que, por causa disso, é mais conhecido hoje como “O Número de Ouro”, “Divina Proporção” ou “Razão Áurea”.

4) Contar que esse número, provavelmente, já era conhecido desde o tempo de Pitágoras (século V a.C). Explicar e mostrar que esse número pode ser obtido, por exemplo, calculando a razão entre as medidas dos dois segmentos que dividem um outro segmento, conforme definiu Euclides, em média e extrema razão, e comentar que o livro que tem essa definição é o primeiro documento histórico sobre o Número de Ouro.

OBSERVAÇÕES:

1) Uma demonstração de que φ pode ser obtido calculando a razão entre dois segmentos que dividem um outro em Razão Áurea está feita na página 28.

2) Se os alunos ainda não souberem resolver uma equação do segundo grau, o professor pode mostrar que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ satisfaz a equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, substituindo φ por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e fazendo as contas.

5) Ensinar os alunos a dividirem um segmento em Razão Áurea, utilizando dobradura e também usando régua e compasso.

OBSERVAÇÃO: Para aprender a fazer a divisão usando dobraduras, assista ao vídeo http://www.youtube.com/watch?v=WVc2bS5Gc-k. Já os passos mais importantes para se fazer a divisão utilizando régua e compasso estão descritos na página 35.

6) Definir o que é, e pedir para os alunos desenharem, utilizando régua e compasso, um retângulo áureo. Solicitar que os alunos façam uma pesquisa em casa, procurando ver se cartões de crédito, cédulas de identidades, livros, quadros, fotos e outros objetos são retângulos áureos perfeitos, aproximados ou muito diferentes, e levem os resultados na aula seguinte.

7) Mostrar aos alunos várias figuras nas quais aparece a forma espiral (por exemplo, nas conchas dos náutilos e de outros moluscos, nas galáxias, nos girassóis e nas margaridas). Mostrar como desenhar a (pseudo) espiral áurea baseada em um retângulo áureo e pedir aos alunos para desenharem uma. Comentar e explicar que esse desenho não é, de fato, uma espiral igual às apresentadas nas figuras, mas que visualmente são bem parecidas.

8) (para dinamizar a aula) Pedir que os alunos calculem o valor de φ na calculadora. Comentar e demonstrar que ele é um número irracional que teve as primeiras 10 mil casas decimais calculadas em 1996.

OBSERVAÇÃO: Há uma prova da irracionalidade de φ no item 5.1 deste trabalho.

9) Separar os alunos em grupos de no máximo 5 alunos, para que eles façam algumas medidas em seus corpos, usando fitas métricas ou outro objeto semelhante, calculem razões entre pares convenientes dessas medidas e comparem com o valor de φ. O professor deve comentar que os resultados que os alunos encontrarão não serão iguais ao valor de φ, mas que são valores relativamente próximos. O professor pode, então, comentar que há a possibilidade de Leonardo da Vinci ter usado o valor de φ em algumas de suas obras, em especial em *O homem vitruviano*. Apresentar uma imagem do desenho, e comentar um pouco sobre o artista e sobre o desenho.

OBSERVAÇÃO: os pares de medidas convenientes estão descritos na página ++.

10) Pedir para os alunos calcularem $\frac{1}{\varphi}$ e φ^2, usando $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; mostrar que esses resultados podem ser escritos como $\varphi - 1$ e $\varphi + 1$; e comentar a semelhança das casas decimais de φ, $\frac{1}{\varphi}$ e φ^2.

OBSERVAÇÕES:

1) Essa semelhança está descrita no item 3.2.2.

2) Caso os alunos não tenham aprendido a racionalizar, o professor pode mostrar que $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ e $\varphi^2 = \varphi + 1$ utilizando o artifício visto no item 3.2.2 ou pedir para os alunos calcularem os valores utilizando a calculadora (nesse caso, os resultados serão aproximados, e o professor pode aproveitar o momento para comentar sobre essa limitação da calculadora).

11) (continuando a fazer algumas "contas") Propor que os alunos resolvam, e resolver no quadro com a turma, o seguinte desafio: supondo $y = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$, qual o valor de y?

OBSERVAÇÕES:

1) Se os alunos ainda não souberem resolver equações de segundo grau, o professor pode usar a mesma alternativa apresentada na atividade 4.

2) Essa atividade também pode ser feita (uma aproximação para o valor de y) utilizando a calculadora (começando com o cálculo de $\sqrt{2}$, são necessárias nove etapas de cálculos para se obter precisão até à quarta casa decimal de φ).

12) (voltando para a geometria) O professor pode, então, dizer:

- Lembram que eu falei que o Número de Ouro já era conhecido desde a época de Pitágoras? Pitágoras foi um apaixonado pela Matemática e tinha uma escola especializada no estudo dessa ciência. Essa escola tinha um símbolo, assim como tem a Mercedes-bens, a Nike e outras empresas. Alguém sabe qual era o símbolo da escola de Pitágoras? Era um pentagrama regular, ou seja, era a estrela de cinco pontas que aparece quando desenhamos as diagonais de um pentágono regular.

OBSERVAÇÃO: se os alunos não tiverem estudado polígonos regulares e não souberem o que é uma diagonal, o professor pode apresentar as definições.

13) Entregar a cada aluno uma folha de papel com um pentágono regular impresso, pedir para os alunos desenharem as diagonais do polígono e comentar sobre o "efeito fractal" que é gerado.

OBSERVAÇÕES:

1) O professor deve distribuir pentágonos de tamanhos variados para que o objetivo da próxima atividade seja atingido.

2) Caso queira, o professor pode mostrar desenhos que utilizam a teoria fractal e comentar sobre a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do pentágono regular.

3) Se os alunos dispuserem de transferidor, o professor pode explicar e mostrar que cada ângulo interno do pentágono regular mede 108° e pedir para os alunos desenharem um pentágono regular.

14) Pedir para os alunos compararem as medidas das 5 diagonais do pentágono (ver que são iguais), dividirem em Razão Aurea uma das diagonais e compararem o maior dos segmentos com a medida do lado do pentágono (ver que são iguais, independente do tamanho do pentágono). Comentar que a razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular é igual a φ .

OBSERVAÇÕES:

1) Se os alunos já tiverem estudado semelhança de triângulos, o professor pode fazer a prova formal.

2) Há uma demonstração na página 32.

15) Ensinar os alunos a desenharem um segmento de medida igual a φ vezes a medida de um segmento dado e usar essa ideia para ensinar os alunos a desenharem um pentágono regular usando o método descrito no texto (ver páginas 33 e 34).

OBSERVAÇÃO: A vantagem desse método de construção é que as atividades anteriores deixam claros os passos da construção.

16) Apresentar aos alunos e pedir para eles resolverem o problema dos coelhos de Fibonacci.

OBSERVAÇÕES:

1) Esse problema está na página 36.

2) O professor deve pedir para os alunos calcularem e escreverem o número de casais a cada mês, para que seja formada a sequência de Fibonacci.

17) (após os alunos chegarem à solução) Comentar a lei de recorrência da sequência e perguntar aos alunos se eles veem alguma relação entre essa sequência de números e φ.

18) Pedir para os alunos calcularem sucessivas razões entre um termo da sequência e o seu anterior, partindo do segundo termo, e comentarem se os resultados têm alguma semelhança com o valor de φ.

19) Comentar, em linguagem acessível à turma, que as razões convergem para φ.

20) (para dinamizar) Passar o vídeo *A beleza da Matemática*, disponível em http://www.youtube.com/watch?v=TncA5tVsxqI.

21) Comentar que as primeiras imagens mostram a construção da sequência de Fibonacci e sua relação com a (pseudo) espiral áurea, e pedir para os alunos construírem a espiral baseada nessa sequência.

> OBSERVAÇÃO: Se os alunos dispuserem de papel quadriculado, a atividade pode ser concluída mais rapidamente.

22) Comentar com os alunos que o problema hipotético dos coelhos de Fibonacci tem uma relação interessante com outro bicho, a abelha, e mostrar essa relação.

> OBSERVAÇÃO: Essa relação está descrita na página 62.

23) (voltando a fazer contas) Propor aos alunos, e resolver, o seguinte desafio: supondo $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$, qual o valor de x?

OBSERVAÇÕES:

1) O professor pode resolver de três formas: partindo de $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$, escrevendo $x = 1 + \frac{1}{x}$ e resolvendo a equação; partindo da equação $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ e substituindo o φ que aparece no segundo membro pelo segundo membro todo, e repetindo esse processo indefinidamente (veja página 59); ou mostrando a relação entre esse exercício e a convergência das razões de termos consecutivos da sequência de Fibonacci (veja página 60).

2) O professor deve comentar que essas soluções utilizam estratégias/argumentos não muito formais, mas que levam ao resultado correto.

24) (continuando a fazer algumas contas) Pedir para os alunos utilizarem a equação $\varphi^2 = \varphi + 1$ e calcularem expressões resumidas para $\varphi^3, \varphi^4, \varphi^5$ e φ^6. Perguntar se eles acharam alguma familiaridade com os números que aparecem nos resultados; pedir para os alunos sugerirem um possível valor para φ^7, sem fazerem as contas; e comentar a relação das potências de φ com os números de Fibonacci (veja item 3.2.1).

OBSERVAÇÃO: Essa relação entre as potências de φ e os números de Fibonacci está demonstrada na página 57 e, dependendo da turma, pode ser feita em sala de aula.

25) Apresentar aos alunos os três primeiros termos da sequência áurea; perguntar à turma qual deve ser o quarto termo e pedir explicações para as respostas que forem dadas; falar que 10110 é o quarto termo e explicar a lei de formação; pedir para cada aluno escrever em seu caderno até o 7º termo; perguntar se eles veem alguma

relação dessa sequência com o Número de Ouro e comentar sobre essa relação (veja página 61).

Após cumprir todas essas etapas em sala de aula, o professor terá proporcionando aos alunos a oportunidade de interagirem entre si, utilizarem objetos como a calculadora, a régua e o compasso, conhecerem propriedades/curiosidades e aplicações do Número de Ouro, aprenderem Geometria, Desenho Geométrico, propriedades dos números irracionais e um tipo especial de sequência numérica. Os alunos estarão estimulando o raciocínio lógico/dedutivo, desenvolvendo a coordenação motora e a capacidade de abstração e ampliando seus conhecimentos matemáticos. Essas atividades também proporcionam a interdisciplinaridade, envolvendo a história, as artes e a biologia, e as etapas 1 e 2 possibilitam aos alunos reflexões sobre seus comportamentos sociais. Além disso, é possível que alguns alunos tenham o interesse pela Matemática despertado ou aumentado.

O professor pode dividir e realizar as atividades da seguinte forma: em duas aulas seguidas aplicar as etapas de 1 a 11; em uma ou duas aulas quaisquer, aplicar as atividades das etapas de 12 a 15; em outra aula qualquer, aplicar as etapas de 16 a 21; e fazer as últimas etapas em outras duas aulas.

Se o professor quiser, ele pode optar por realizar apenas as atividades relativas à Geometria/Desenho Geométrico (etapas 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14 e 15) ou pelas atividades mais algébricas/aritméticas (etapas 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24 e 25), ou realizar uma oficina sobre o tema.

4 - CONCLUSÕES

Após este estudo, pode-se perceber que os dois números estudados são, realmente, especiais e que as atividades didáticas abordando esses números podem ser realizadas de forma a proporcionar aos alunos grande aprendizado matemático.

A possibilidade de encontrar os produtos das multiplicações de 142857 pelos números 2, 3, 4, 5 e 6 através das permutações rígidas positivas de 142857 é muito interessante.

Durante a realização das atividades sobre esse número cíclico, o professor pode, para que os alunos sejam um pouco mais desafiados, substituir as etapas 5, 6 e 7 pela pergunta: dentre os números que são semelhantes a 142857, assim como o produto 2x142857 é semelhante a ele, qual é um possível resultado para 3x142857? Se o professor optar por essa abordagem, ele deve indagar dos alunos o porquê de suas respostas e afirmar que o único valor possível seria 428571, visto que é o único que termina em 1 e que é semelhante a 142857, assim como o produto 2x142857 é semelhante a ele.

O docente também pode pedir aos alunos que tentem identificar um padrão para a multiplicação de 142857 por números entre 7 e 70 (diferentes de múltiplos de 7 e dos que “fogem à regra”).

As atividades sobre o número 142857 podem ser adaptadas para serem aplicadas quando o assunto estudado for *Permutações*, e podem ser aplicadas em qualquer aula, a partir do 7º ou 8º ano do Ensino Fundamental, como atividades extras.

O Número de Ouro, apesar dos mitos que o cercam, possui propriedades e aplicações muito interessantes.

Mesmo que a Razão Áurea ou o valor exato de φ não tenham sido usados ou não apareçam nas pirâmides, no Partenon e em obras de grandes artistas, como valores próximos a φ são encontrados, pode-se supor que, em algumas situações, utilizamos, mesmo que inconscientemente, valores que se aproximam de φ.

Para realizar as atividades propostas sobre o Número de Ouro, não é necessário o uso do computador. No entanto, algumas das atividades podem ser facilmente adaptadas para serem realizadas utilizando, por exemplo, os programas GeoGebra ou

Cabri Geometry. Sugestões de atividades relacionadas ao Número de Ouro e cujas soluções estão vinculadas ao uso do GeoGebra são encontradas em NÓBRIGA, J. C. C.; ARAÚJO, L. C. L. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. São Paulo: Exato, 2010.

Que esse trabalho contribua para a divulgação das propriedades, curiosidades e aplicações do número 142857 e do Número de Ouro; que os leitores tenham prazer nas descobertas que fizerem lendo este texto, e que as atividades didáticas aqui propostas, quando aplicadas em sala de aula, proporcionem aos alunos grande aprendizado e despertem neles a admiração pelos números em foco e pela Matemática como um todo.

5. APÊNDICE

Nesse apêndice será provado que φ é irracional, que nenhum múltiplo natural do ângulo áureo é congruente a outro múltiplo natural dele e será apresentada uma representação de φ com 1000 casas decimais.

5.1. PROVA DE QUE φ É IRRACIONAL

Vamos, inicialmente, mostrar que $\sqrt{5}$ é irracional.

Suponha, por absurdo, $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$, com m e n naturais primos entre si, ou seja, suponha $\sqrt{5}$ racional. Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos:

$5 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 5n^2 = m^2 \Rightarrow m^2$ é múltiplo de 5 $\Rightarrow$ m é múltiplo de 5 (visto que todos os fatores primos que aparecem em m^2 também aparecem em m, só que com expoente dividido por 2) $\Rightarrow$ m = 5x, para algum x natural $\Rightarrow 5n^2 = 25x^2 \Rightarrow n^2 = 5x^2 \Rightarrow$ n é múltiplo de 5.

Mas, sendo m múltiplo de 5 e m e n primos entre si, é um absurdo n ser múltiplo de 5. Portanto, $\sqrt{5}$ é irracional.

Suponha, agora, também por absurdo, $\varphi = \frac{a}{b}$, com a e b naturais primos entre si. Assim: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{2a-b}{b}$. Como $2a - b$ é natural (a > b, pois φ > 1), teríamos $\sqrt{5}$ racional. Absurdo! Assim, φ é irracional.

5.2. PROVA DE QUE MÚLTIPLOS DISTINTOS DO ÂNGULO ÁUREO NÃO SERÃO CONGRUENTES ENTRE SI

Sejam k, m e n inteiros e $\theta = 360° - \frac{360°}{\varphi} = \frac{360°(\varphi - 1)}{\varphi}$ o ângulo áureo.

Suponha que $k.\theta = m.360° + n.\theta$. Assim, teríamos $\theta(k-n) = m.360°$. Mas:

$$\theta(k-n) = m.360° \Rightarrow \frac{360°(\varphi-1)}{\varphi}(k-n) = m.360° \Rightarrow (\varphi-1)(k-n) = \varphi.m \Rightarrow$$

$$\varphi(k-m-n) = k-n \Rightarrow \varphi = \frac{k-n}{k-m-n}$$

Nessa última igualdade conclui-se que φ seja a razão entre dois inteiros, mas isso é absurdo visto que φ é irracional (no vídeo *A beleza da Matemática*, disponível em http://www.youtube.com/watch?v=TncA5tVsxqI, algumas cenas estão relacionadas ao ângulo áureo).

5.3. REPRESENTAÇÃO DE φ COM 1000 CASAS DECIMAIS

1,61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576 28621
35448 62270 52604 62818 90244 97072 07204 18939 11374 84754 08807
53868 91752 12663 38622 23536 93179 31800 60766 72635 44333 89086
59593 95829 05638 32266 13199 28290 26788 06752 08766 89250 17116
96207 03222 10432 16269 54862 62963 13614 43814 97587 01220 34080
58879 54454 74924 61856 95364 86444 92410 44320 77134 49470 49565
84678 85098 74339 44221 25448 77066 47809 15884 60749 98871 24007
65217 05751 79788 34166 25624 94075 89069 70400 02812 10427 62177
11177 78053 15317 14101 17046 66599 14669 79873 17613 56006 70874
80710 13179 52368 94275 21948 43530 56783 00228 78469 97829 77834
78458 78228 91109 76250 03026 96156 17002 50464 33824 37764 86102
83831 26833 03724 29267 52631 16533 92473 16711 12115 88186 38513
31620 38400 52221 65791 28667 52946 54906 81131 71599 34323 59734

94985 09040 94762 13222 98101 72610 70596 11645 62990 98162 90555
20852 47903 52406 02017 27997 47175 34277 75927 78625 61943 20827
50513 12181 56285 51222 48093 94712 34145 17022 37358 05772 78616
00868 83829 52304 59264 78780 17889 92199 02707 76903 89532 19681
98615 14374 03149 97411 06926 08867 42962 26757 56052 31727 77520
35361 39362

6. REFERÊNCIAS

BIEMBENGUT, M. S. **Número de Ouro e secção áurea**: considerações e sugestões para sala de aula. Blumenau: FURB, 1996.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CARVALHO, J. J. de. **Razão Áurea**. 2008. 30 f. Monografia (Especialização em Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008. Disponível em http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_Jurandir.pdf . Acesso em: 17 jan. 2013.

DIEGUES, Flávio. Se Deus fosse um número... . **Sapiens**, São Paulo, ed. 1, p. 46-49, set. 2004.

EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: UNESP. São Paulo. 2009.

EVES, Howard. **Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula**: Geometria. São Paulo: Atual, 1992.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

GALVÃO, M. E. E. L. **História da Matemática**: dos números à geometria. Osasco: Edifieo, 2008.

GARCIA, V. C.; et al. **O Número de Ouro como instrumento de aprendizagem significativa no estudo dos números irracionais**. Trabalho disponível em http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/cultura_matematica_%20numero%20_%20ouro%20.pdf. Acesso em: 25 jan. 2013.

GARDNER, Martin. **Circo matematico**. 2.ed. Madri: Alianza, 1985.

GORMAN, Peter. **Pitágoras**: uma vida. São Paulo: Licença. 1979.

HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática**. 2.ed. Porto Alegre: Globo, 1958.

LAURO, M. M. A Razão Áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. **Exacta**, São Paulo, v. 3, p. 35-48, 2005. Disponível em http://redalyc.uaemex.mx/pdf/810/81000304.pdf. Acesso em: 05 dez. 2012.

LIVIO, Mario. **Razão Áurea**: a história de fi, um número surpreendente. 6.ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

MAOR, Eli. **e**: A História de um número. 3.ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MARKOWSKY, George. **Misconseptions about the golden ratio**. Texto disponível em http://www.umcs.maine.edu/~markov/GoldenRatio.pdf. Acesso em: 16 dez. 2012.

NÓBRIGA, J. C. C.; ARAÚJO, L. C. L. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. São Paulo: Exato, 2010.

OLIVEIRA, Edson; FERREIRA, T. E. O Número de Ouro e suas manifestações na natureza e na arte. **Complexus**, Salto, Ano. 1, n. 2, p. 64-81, set. 2010. Disponível em www.engenho.info.com.br. Acesso em: 11 dez. 2012.

QUEIROZ, Rosania Maria. Razão Áurea. In: **Programa de desenvolvimento educacional (PDE)**, 2007, Londrina. Trabalho disponível em http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf. Acesso em: 12 dez. 2012.

SOUZA, J. C. M. e. Matemática divertida e curiosa. 27.ed. Rio de janeiro: Record, 2009.

SPIRA, Michel. On the golden ratio. In: **12th International Congress on Mathematical Education**, 2012, Seul. Artigo disponível em http://www.icme12.org/upload/submission/1948_F.pdf. Acesso em: 15 jan. 2013.

SPIRA, Michel. O Número de Ouro. Vídeo disponível em http://www.youtube.com/watch?v=WVc2bS5Gc-k. Acesso em: 25 jan. 2013.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM. 2007.

ZAHN, Maurício. **Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.

http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-math-br.html. Acesso em 31 jan. 2013.

http://www.brasilescola.com/biografia/albrecht-durer.htm. Acesso em: 16 jan. 2013.

http://www.infoescola.com/desenho/o-homem-vitruviano/. Acesso em: 16 jan. 2013.

http://www.ced.ufsc.br/claudiaflores/PESQUISA/textos_publicados/Teoria_e_representacao_geometrica_na_obra_de_Albrecht.pdf. Acesso em 16 jan. 2013.

http://www.tipografos.net/historia/duerer.html. Acesso em 14 jan. 2013.

http://coisasdaarquitetura.wordpress.com/2010/06/30/quem-acredita-no-modulor/. Acesso em: 17 jan. 2013.

http://gruze.org/tilings/kepler. Acesso em: 18 jan. 2013.

http://www.flickr.com/photos/zook360/4525356945/. Acesso em: 18 jan. 2013.

http://www.youtube.com/watch?v=TncA5tVsxqI. Acesso em: 8 jan. 2013.

http://www.ime.usp.br/~matemateca/textos/ladrilhamentos.pdf. Acesso em: 19 jan. 2013.

http://codigodacultura.wordpress.com/2010/04/30/a-sequencia-de-fibonacci/. Acesso em: 15 jan. 2013.

www.google.com.br (imagens). Acesso em: 23 jan. 2013.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Proporcionalidad_geometrica_amh/espiral.htm. Acesso em: 23 jan. 2013.

http://www.uff.br/sintoniamatematica/matematicaenatureza/matematicaenatureza-html/audio-falcao-br.html. Acesso em: 23 jan. 2013.

http://misteriosdomundo.com/universo-invisivel-materia-escura-e-energia-escura. Acesso em: 23 jan. 2013.

http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM43/RPM43_12.PDF. Acesso em: 24 jan. 2013.

http://www.bpiropo.com.br/fpc20070319.htm. Acesso em: 03 fev. 2013.