



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# CÁLCULO DE ÁREAS: UM MEIO ATRATIVO PARA O ENRIQUECIMENTO DO ENSINO DA MATEMÁTICA

LISE CANÁRIO DE ARAUJO

Salvador - Bahia  
ABRIL DE 2013

# CÁLCULO DE ÁREAS: UM MEIO ATRATIVO PARA O ENRIQUECIMENTO DO ENSINO DA MATEMÁTICA

LISE CANÁRIO DE ARAUJO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello.

Salvador - Bahia

Abril de 2013

# CÁLCULO DE ÁREAS: UM MEIO ATRATIVO PARA O ENRIQUECIMENTO DO ENSINO DA MATEMÁTICA

LISE CANÁRIO DE ARAUJO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 4 de abril de 2013.

## Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello (Orientador)  
UFBA

---

Prof. Dr. Perfilino Eugênio Ferreira Jr.  
UFBA

---

Prof. Dr. Marcelo Miranda Viana da Silva  
IMPA

*À minha família, que para mim está acima de qualquer coisa.*



# Agradecimentos

Agradeço a todos que de maneira direta ou indireta, acreditando ou não, me ajudaram a concluir mais este verdadeiro desafio na minha vida, dentre tantos outros de igual importância. Inicialmente, como é natural, à minha mãe, sempre a minha melhor referência, amiga de todas as horas, a quem devo tudo o que sou. Também aos meus irmãos e irmãs.

Aos meus queridos filhos, que tanto amo, que tanto orgulho me dão, o que me motiva para seguir adiante, e que torcem sempre pelo meu sucesso.

A todos os professores que colaboraram com a minha formação ao longo da vida, especialmente ao professor Vinícius Mello, que só conheci através do PROFMAT, mas que vai deixar sua assinatura para sempre na minha vida profissional.

Ao PROFMAT, que possibilitou aos professores da rede pública essa oportunidade única de ampliar e aprofundar seus conhecimentos, sem detrimento do seu sustento, que é um dos maiores empecilhos para não avançar e investir numa melhor qualificação.

Às minhas amigas de sempre, inseparáveis, mesmo quando distantes. Aos meus colegas da pioneira turma PROFMAT-UFBA.

Aos meus queridos amigos, companheiros, irmãos de alma, que me impulsionaram e foram como alicerces nesta minha trajetória, Luiz José da Silva (Ziul) e Ian Santana Macedo. Vencemos juntos essa grande luta. Algumas vezes nem acreditamos, mas nos equilibramos uns aos outros, nos sustentamos com garra. Estaremos sempre juntos.

Finalmente, como não poderia deixar de ser, o meu reconhecimento, a minha especial homenagem ao maior e mais verdadeiro responsável por ter atingido com êxito este momento: o meu esposo, companheiro, amor da minha vida, Sergio. É impossível expressar todo o sentimento e agradecimento que devo a ele, que cuida, que acredita e investe mais em mim do que eu mesma.

Obrigada, mais uma vez, a todos vocês.

*“Raramente a verdade é pura,  
e nunca é simples.”*

*Oscar Wilde*

# Resumo

Este trabalho propõe a solução de problemas de cálculo de área de figuras atraentes como uma ferramenta para uma aprendizagem mais significativa de alguns dos conteúdos da educação básica. Oferecemos também uma visão geral dos marcos da história da matemática relacionados ao conceito de área.

# Abstract

This work proposes a problem solving approach to area calculation of visual appealing figures as a tool for a more meaningful learning of some of the contents of the basic education. We provide also an overview of landmarks of the history of mathematics related to the area concept.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Área: de Euclides aos Fractais</b>	<b>3</b>
1.1 Babilônia e Egito . . . . .	3
1.2 Grécia . . . . .	4
1.2.1 Idade Heroica da Matemática . . . . .	4
1.2.2 Pitágoras de Samos . . . . .	5
1.2.3 Hipócrates de Quios . . . . .	6
1.2.4 Euclides . . . . .	8
1.2.5 Arquimedes de Siracusa . . . . .	9
1.3 Desenvolvimentos Posteriores . . . . .	12
1.3.1 Kepler . . . . .	12
1.3.2 Fermat . . . . .	13
1.3.3 Cálculo Integral . . . . .	14
1.3.4 Polígonos Equidecomponíveis: Teorema de Bolyai . . . . .	15
1.3.5 Teoria da Medida . . . . .	16
1.3.6 Fractais . . . . .	17
1.4 Conclusão . . . . .	18
<b>2 Princípios Matemáticos para o Cálculo de Áreas</b>	<b>19</b>
2.1 Decomposição . . . . .	21
2.2 Simetria . . . . .	23
2.3 Proporcionalidade . . . . .	25
2.4 Invariância Afim . . . . .	26
2.5 Exaustão . . . . .	30
<b>3 Atividades Propostas e Comentadas</b>	<b>32</b>
3.1 Problema 1 . . . . .	34
3.2 Problema 2 . . . . .	35
3.3 Problema 3 . . . . .	36

3.4	Problema 4 . . . . .	38
3.5	Problema 5 . . . . .	39
3.6	Problema 6 . . . . .	41
3.7	Problema 7 . . . . .	42
3.8	Problema 8 . . . . .	44
3.9	Problema 9 . . . . .	45
3.10	Problema 10 . . . . .	46
	<b>Considerações Finais</b>	<b>48</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>49</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>51</b>

# Introdução

Atualmente tem aumentado muito as exigências com o professor, inclusive no sentido de responsabilizá-lo pela desmotivação, desinteresse e, conseqüentemente, baixo desempenho dos alunos, que é um dos maiores desafios na educação básica, principalmente no Ensino Médio, na rede pública. O professor, além de ter todas as competências e habilidades inerentes da disciplina que leciona, deve também ser motivador, saber como estimular a curiosidade dos seus alunos, levando-os a querer aprender e a gostar de aprender.

Segundo os PCN+ (BRASIL, 2002, p. 10-11):

Tais expectativas equivocadas, somadas a um ensino descontextualizado, resultam em desinteresse e baixo desempenho. Geram ainda um ciclo de desentendimentos, em que os alunos ou seus pais consideram os professores fracos e desinteressados[...]

Os mais recentes resultados dos exames nacionais divulgados pela imprensa apontam a disciplina de Matemática como a de pior desempenho dos alunos da educação básica no país, especialmente nas escolas da rede pública. Na busca de soluções para esta grave situação, foram implementadas políticas públicas que resultaram em importantes iniciativas, como o Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, que veio ao encontro da proposta do Plano Nacional de Educação.

Como professora de matemática da rede pública do ensino básico, tive a grata oportunidade de participar da primeira turma do PROFMAT da Universidade Federal da Bahia, o que possibilitou um aperfeiçoamento na minha formação profissional, a partir de um aprofundamento do meu conhecimento quanto aos conteúdos de matemática e do enriquecimento da minha prática com a capacitação para a utilização de recursos tecnológicos em sala de aula, que tem um papel fundamental para um efetivo aprimoramento no ensino da matemática.

Segundo LIMA (2007, p. 184):

As aplicações são a parte ancilar da Matemática. São a conexão entre a abstração e a realidade. Para um grande número de alunos, são o lado

mais atraente das aulas, despertador que os acorda, o estímulo que os incita a pensar.

O professor deve considerar como parte integrante e essencial de sua tarefa o desafio, a preocupação de encontrar aplicações interessantes para a matemática que está apresentando [...]

Nesse sentido, é de extrema utilidade ao ensino da disciplina de Matemática o uso de elementos que sejam atrativos e provocadores, elementos estes que podem ser encontrados dentro dos próprios tópicos da matemática, como o cálculo de áreas de figuras planas (introduzido desde as séries iniciais), já que a geometria desperta facilmente o interesse de todos. Pode-se dizer que é a contextualização de conteúdos matemáticos dentro da própria matemática e que, sendo direcionada com o devido cuidado, dará suporte a uma aprendizagem mais significativa e agradável.

A possibilidade de aliar a tudo isso o uso das novas tecnologias disponíveis, como no caso o software de geometria dinâmica *GeoGebra*, faz com que essas ferramentas assumam um grande papel no sentido de construir, comprovar e formular soluções, assim como explorar propriedades, tanto geométricas como algébricas, envolvidas nas diversas situações. Assim, a construção desta proposta vem no intuito de colaborar com as mudanças desse quadro que se fazem necessárias e urgentes. Apresenta a possibilidade de se utilizar os problemas que envolvem cálculo de área, em que as figuras são tratadas de maneira cuidadosa e com um apelo visual atraente, construídas no *GeoGebra*, como um meio para aplicação de diversos conteúdos.

Para apresentar a proposta, a organização do trabalho está estruturada em três capítulos.

No primeiro capítulo, são apresentados alguns dos mais importantes fatos da História da Matemática que podem colaborar para um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento e que envolvem o cálculo de área. Alguns deles datam de séculos antes de Cristo. Estes fatos estão organizados, dentro do possível, em uma ordem cronológica e alguns dos conceitos e definições necessários para o desenvolvimento do trabalho estão presentes nesse contexto.

No segundo capítulo, são apresentados alguns conceitos próprios da classificação que elegemos como princípios gerais matemáticos, além de conceitos básicos dos conteúdos que estão presentes em alguns dos exemplos resolvidos no capítulo seguinte. Nesse momento, são apresentadas algumas características que se fazem comuns a alguns tipos de problemas, possibilitando esta classificação.

No terceiro capítulo, são apresentados alguns problemas resolvidos e classificados dentro da proposta, que servem como exemplos de algumas aplicações possíveis.

Por fim, algumas considerações finais.



# Capítulo 1

## Área: de Euclides aos Fractais

Desde a Antiguidade, as resoluções de problemas que envolvem cálculos de áreas de figuras planas vêm instigando a curiosidade e, ao mesmo tempo, encantando muitos matemáticos, cientistas e afins. Tanto pelo lado desafiador, quanto pelo desejo de encontrar soluções que vieram a ser úteis a inúmeros campos da ciência. Ao longo dessa trajetória, resultados surpreendentes e atraentes surgiram. “A História da Matemática pode tirar do esconderijo onde se encontram os problemas que constituem o campo de experiência do matemático, ou seja, o lado concreto do seu fazer” (ROQUE, PITOMBEIRA, 2001, p. viii).

### 1.1 Babilônia e Egito

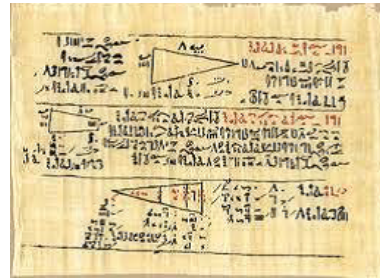
Os primeiros registros de textos matemáticos, incluindo o cálculo de área, são do Egito e, principalmente, da Babilônia (situada em Bagdá, no atual Iraque), cidade-estado acadiana da antiga Mesopotâmia. Os babilônios são em número bem maior, feitos de argila. Mais de 400 tabletes datam de cerca de dois mil anos antes de Cristo e foram desenterrados em escavações apenas no final do século XIX. Neles, constam registros de vários tópicos da matemática, inclusive o Teorema de Pitágoras e diversos problemas que envolvem áreas.

Os textos egípcios, em número bem limitado, provavelmente pela natureza do material utilizado, o papiro, tem no Papiro de Rhind, nome dado por ter sido comprado pelo escocês Alexander Henry Rhind em 1850 (também chamado da Ahmes, escriba egípcio que o copiou), o seu mais conhecido. Nele, consta o cálculo da área de triângulo, retângulo, trapézio e círculo.

Em ambas as civilizações, de maneira geral, a matemática se desenvolveu de forma empírica, a partir do raciocínio indutivo, para resolver problemas do cotidiano como: medição de terras, construções, necessidades administrativas, etc., embora, “tanto os



(a) Tablete YBC7290



(b) Papiro de Rhind

Figura 1.1: Exemplos de antigos textos matemáticos.

egípcios quanto os babilônios tinham procedimentos sistemáticos para resolver problemas que hoje chamaríamos de geométricos, envolvendo medidas” (ROQUE, PITOMBEIRA, 2011, p. 6).

## 1.2 Grécia

### 1.2.1 Idade Heroica da Matemática

A Idade Heroica da Matemática, que segundo Boyer (2001) tem esse nome devido ao período em que importantes matemáticos e filósofos, como Hípias de Elis, Hipócrates de Quios, Anaxágoras de Claxomenae e Zenão de Elea, direcionaram a sua atenção para os problemas que formaram a base para o desenvolvimento da Geometria. São estes, os três problemas clássicos: trissecção de um ângulo, duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Destes, destacamos o último.

O problema da quadratura do círculo foi proposto por Anaxágoras no século V a.C., que foi aprisionado em Atenas por ter ideias muito avançadas para sua época. O problema consiste em construir um quadrado com a mesma área de um círculo, utilizando apenas régua não graduada e compasso (figura 1.2).

Somente no século XIX, após Ferdinand Lindemann provar que  $\pi$  é um número transcendente, ou seja, não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais não todos nulos, foi que se pôde provar que não é possível fazer essa quadratura, exceto por aproximação.

A importância desses problemas consiste no fato de terem constituído ao longo dos tempos uma fonte muito rica de ideias e processos matemáticos, que foram sendo desenvolvidos nas sucessivas tentativas de resolução.

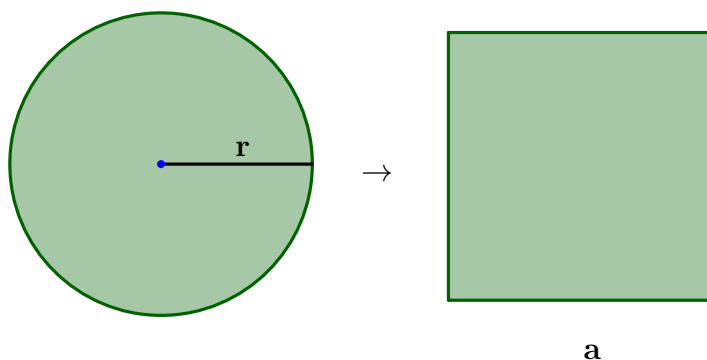


Figura 1.2: Quadratura do círculo

### 1.2.2 Pitágoras de Samos

Nascido em Samos, no século VI a.C., Pitágoras fundou em Crotona uma sociedade secreta mística e filosófica, após retornar de uma viagem à Babilônia e ao Egito, onde absorveu não só conhecimentos matemáticos e astronômicos, como também religiosos. Esta sociedade, os Pitagóricos, cujo lema era “Tudo é número”, desempenhou um papel de extrema importância na história da Matemática e disseminou o mais famoso teorema no ensino da Geometria, o Teorema de Pitágoras, e o triângulo pitagórico, de lados correspondem a primeira tripla pitagórica (3, 4 e 5). Teorema este, que tem o seu nome, mas já estava presente em registros babilônicos nos tabletes que foram encontrados no século XIX, mas que tinham, já nesse momento, pelo menos mais de um milênio. Nenhum registro de demonstração desse teorema, feita pelos pitagóricos, é conhecido até hoje.

Como suas aplicações nos registros são sempre relativas à fórmula que envolve as triplas pitagóricas, ou seja, resultados obtidos a partir de processos aritméticos, segundo ROQUE, PITOMBEIRA (2011): “[...] o Teorema ‘de Pitágoras’ dos Pitagóricos não deveria ser um resultado geométrico”.

Também é atribuída aos pitagóricos a descoberta das grandezas incomensuráveis, o que contribuiu para uma separação entre a aritmética e a geometria, ou entre o universo das grandezas geométricas e o universo dos números. E, conseqüentemente, para que a geometria passasse a ter um caráter formal e abstrato, necessitando de uma demonstração.

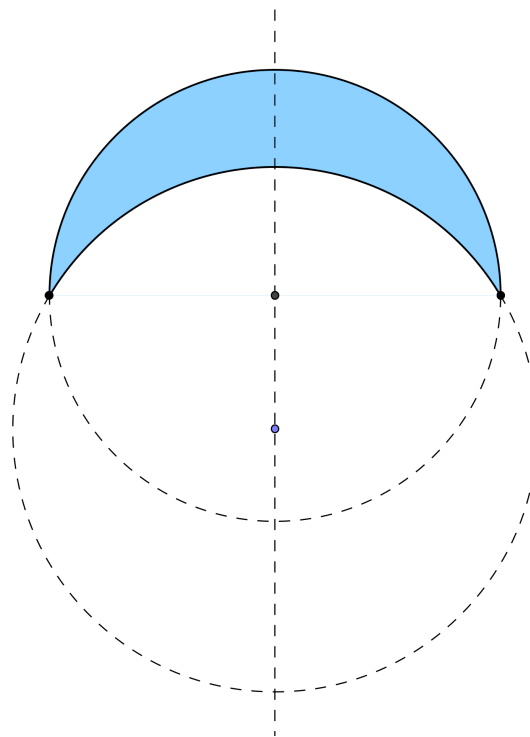


Figura 1.3: Uma *luna* é figura plana limitada por dois arcos circulares de raios diferentes

### 1.2.3 Hipócrates de Quios

Nascido em Quios, no século V a.C., foi um excelente geômetra e desenvolveu alguns dos seus importantes resultados a partir das tentativas de resolver os problemas clássicos da duplicação do cubo e da quadratura do círculo. Dos seus resultados, os que mais se destacam são: um cubo pode ser dobrado se puderem ser determinadas duas proporções entre um número e o seu dobro, o que direcionou esforços para a Teoria das proporções; a área de algumas lunas (ou lúnulas); a quadratura das lunas, um dos mais antigos documentos gregos; além de ter escrito os “Elementos da Geometria”, primeiro texto matemático organizado antes de Euclides, mas que se perdeu.

A área e a quadratura das lunas foram obtidas a partir das tentativas de quadrar um círculo. Para calcular a área, Hipócrates utilizou o fato que *as áreas de dois círculos estão entre si como o quadrado dos raios* (figura 1.4), um teorema que, segundo relatos, Eudemos acreditava ter provado, embora isso pareça impossível sem a teoria das proporções.

Um exemplo de quadratura de luna pode ser visto na figura 1.5. Este exemplo ilustra bem três princípios para o cálculo de áreas que iremos explorar no capítulo 2: *decomposição, simetria e proporcionalidade*.

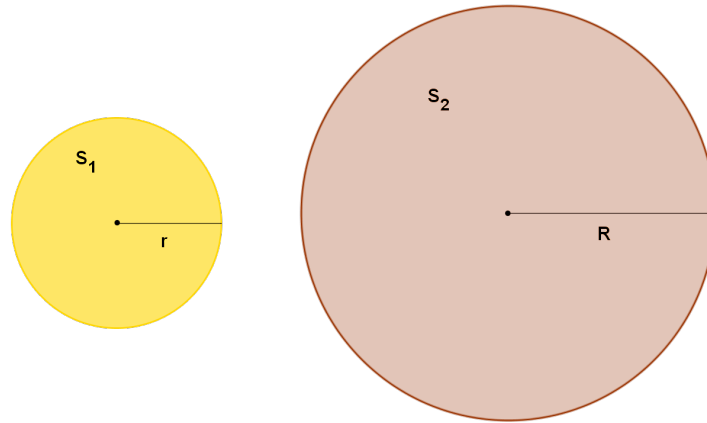


Figura 1.4: As áreas de dois círculos estão entre si como os quadrados dos seus raios, ou seja,

$$\frac{\text{Área } S_1}{\text{Área } S_2} = \frac{r^2}{R^2}$$

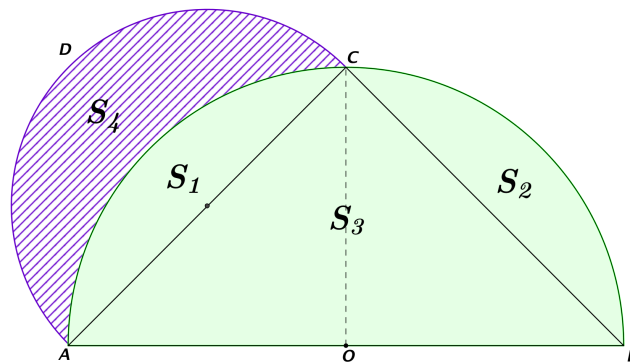


Figura 1.5: Luna construída a partir de um cateto de um triângulo retângulo isósceles.

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

portanto pelo proporcionalidade das áreas,

$$\frac{\text{Área } ACD}{\text{Área } ABC} = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$2(S_1 + S_4) = S_1 + S_2 + S_3,$$

e como  $S_1 = S_2$  por simetria, concluímos que a área da lua  $S_4$  é metade da área do triângulo  $ABC$ .

### 1.2.4 Euclides

Nascido no século IV a.C., não se sabe muito a seu respeito, inclusive quanto ao local em que nasceu. Supõe-se que, provavelmente, nasceu na Grécia. Atuou em Atenas e tem uma enorme importância na Matemática devido a sua principal obra: os Elementos. Até então, não havia uma maior preocupação com o formalismo, ou com o pensamento dedutivo. Desde o final do século V, Platão, assim como Aristóteles, já apontava a necessidade de se ter uma forma de selecionar as afirmações que alguém pudesse fazer, estabelecer critérios fundados em definições claras e começa a criticar os geômetras pela falta de rigor nas práticas matemáticas. Mais tarde, Aristóteles desenvolveu uma lógica, na qual os critérios de verdade estão mais ligados ao rigor da demonstração, com o cuidado de não haver contradições no raciocínio em uma cadeia de conclusões.

Na sua mais famosa obra, os Elementos, que provavelmente é a mais reproduzida e utilizada no mundo ocidental depois da Bíblia, Euclides organizou toda a matemática que havia sido construída, até então, em um conjunto de 13 livros. Desenvolveu uma forma de sistematizar os dados de maneira totalmente abstrata, sem recorrer a formas concretas ou intuitivas, com bastante rigor nas demonstrações. Nela constam a Teoria dos Números e, principalmente, a Geometria. Surge, então o método axiomático-dedutivo e a geometria euclidiana. Neste método, as proposições, que são os problemas e os teoremas, são demonstradas a partir de definições, axiomas e postulados, fatos aceitos como verdadeiros, assim como resultados já demonstrados anteriormente.

Os resultados, problemas resolvidos de geometria, se referem às construções com régua não graduada e compasso, e as transformações dos entes geométricos. Os teoremas, tratam das propriedades desses entes, enunciando-as ou demonstrando-as.

Os primeiros livros têm como objetivo principal resolver problemas que envolvem cálculos de área, que diferentemente do procedimento utilizado atualmente, não se faz uso de medidas, ou de fórmulas, mas de *equivalência de áreas*. Como é explicado em (MOISE, 1990), os axiomas de Euclides são usados para definir uma relação  $\simeq$  entre figuras ( $F$ ) do plano tal que

1.  $\simeq$  é uma relação de equivalência;
2.  $F_1 \simeq F_1 \sqcup F_2$  nunca acontece;
3. Se  $F_1$  e  $F_2$  são triângulos congruentes, então  $F_1 \simeq F_2$ ;
4. Se  $F_1 \simeq F'_1$  e  $F_2 \simeq F'_2$ , então  $F_1 \sqcup F_2 \simeq F'_1 \sqcup F'_2$ ;
5. Se  $F_1 \sqcup F_2 \simeq F'_1 \sqcup F'_2$  e  $F_1 \simeq F'_1$ , então  $F_2 \simeq F'_2$ .

Quando usamos o símbolo  $\sqcup$ , está subentendido que as figuras não se sobrepõem.

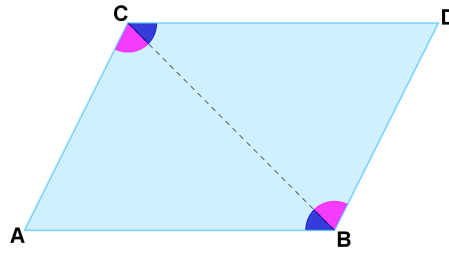


Figura 1.6: Como  $ABDC$  é um paralelogramo, segue do Teorema dos Ângulos Alternos Internos que  $\angle ACB = \angle CBD$  e  $\angle BCD = \angle ABC$ . Como  $BC$  é um segmento comum, os triângulos  $ABC$  e  $DCB$  são congruentes por ALA e portanto têm a mesma área.

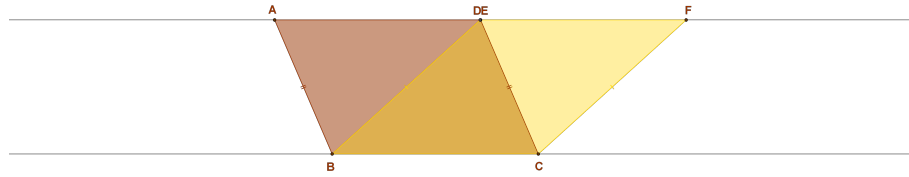
A partir dessa noção de equivalência, Euclides mostra que a área de um paralelogramo é equivalente a área de dois triângulos iguais. A demonstração da Proposição XXXIV do livro 1 pode ser vista na figura 1.6.

Nas Proposições XXXV e XXXVI, demonstra que *paralelogramos que estão postos sobre a mesma base, e entre mesmas paralelas, são iguais*, ou seja, têm a mesma área, um resultado importante, ilustrado na figura 1.7. Este resultado é a base para o quarto princípio que estudaremos no capítulo 2, a *invariância afim*.

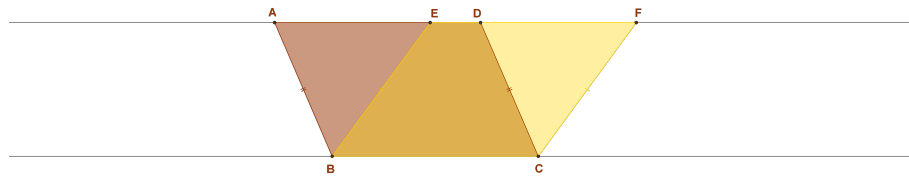
### 1.2.5 Arquimedes de Siracusa

Nascido na Siracusa, que fazia parte do mundo grego, no século III a.C., considerado um dos principais cientistas da antiguidade e um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Sua obra, vasta, muito rica e importante, diferente da obra de Euclides, que utilizava métodos de demonstrações puramente geométricos, aplicava métodos puramente mecânicos. Destacam-se, entre elas: a quadratura da parábola (figura1.8); demonstração da área do círculo (medida do círculo) pelo método da exaustão de Eudoxo (figura1.9) e a lei das alavancas (figura1.10), presente em uma das suas mais importantes obras, O Método. Obra de grande valor, que só foi publicada já no início do século XX, pois ficou perdida durante dois mil anos até ser descoberta em um palimpsesto, espécie de pergaminho que era reutilizado algumas vezes, no qual também estava presente o quebra-cabeças geométrico *Stomachion*, que trataremos posteriormente.

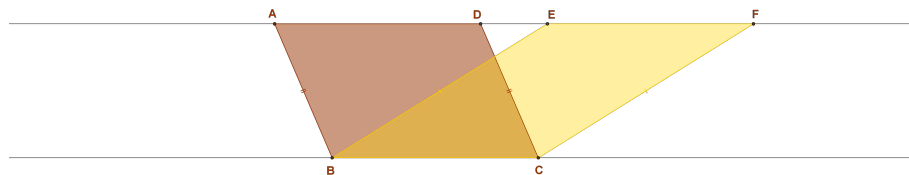
Na busca de resolver um dos problemas clássicos, a quadratura do círculo, utilizou o método da exaustão e demonstrou a quadratura da parábola. A área de um segmento de parábola, região delimitada por uma parábola e um segmento de reta, é igual a quatro terços da área de um triângulo cuja base é o segmento e cujo vértice pertence a reta tangente à parábola que é paralela a base (ver figura 1.8).



(a) Se o vértice  $D$  coincide com o vértice  $E$ , temos que o triângulo  $BCE$  é comum e ambos paralelogramos serão iguais ao dobro do triângulo. Logo, os paralelogramos são iguais.



(b) Neste caso, temos que  $AD = BC$  e  $EF = BC$ , então,  $AD = EF$ . Daí, pelo axioma,  $AE = DF$  e ainda  $AB = CD$  e  $BE = CF$ , pois são lados opostos dos paralelogramos, então, os triângulos  $ABE$  e  $DCF$  são iguais. Como o trapézio  $EBCD$  é comum, os paralelogramos são iguais.



(c) Neste caso, temos que os triângulos  $ABE$  e  $DCF$  são iguais ( $AD = DF$ , os ângulos  $DAB$  e  $FDC$ , iguais e  $AB = DC$ ). As regiões determinadas por  $BE$  e  $DC$  são comuns. Logo, os paralelogramos são iguais.

Figura 1.7: Paralelogramos que estão postos sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, têm a mesma área.



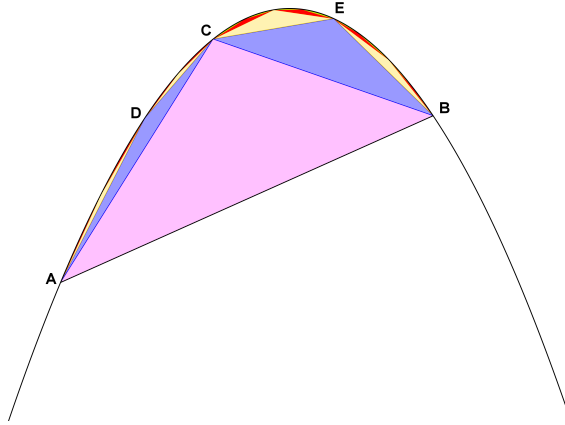


Figura 1.8: Para calcular a área do segmento de parábola, considerou inicialmente o triângulo com base  $AB$  e vértice  $C$  tal que a tangente à parábola em  $C$  é paralela a  $AB$ . Em seguida ele mostrou que a área dos triângulos  $ACD$  e  $CBE$  é  $1/4$  da área de  $ABC$ , onde  $D$  e  $E$  são pontos obtidos de modo similar a  $C$ . Repetindo o procedimento, ele concluiu que a área da parábola é igual a

$$\text{Área } ABC + \frac{\text{Área } ABC}{4} + \frac{\text{Área } ABC}{16} + \dots = \frac{4}{3} \text{Área } ABC.$$

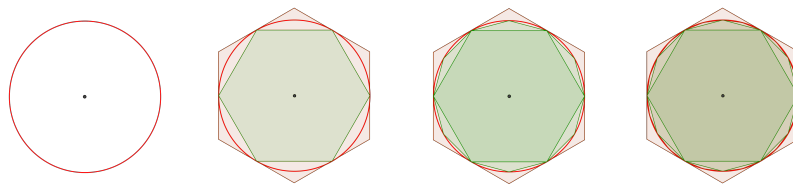
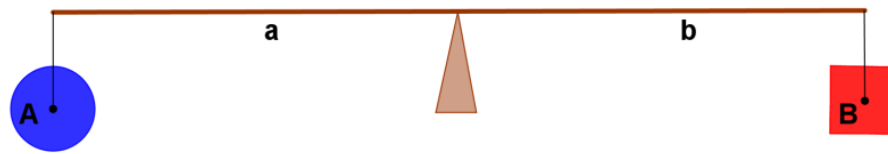
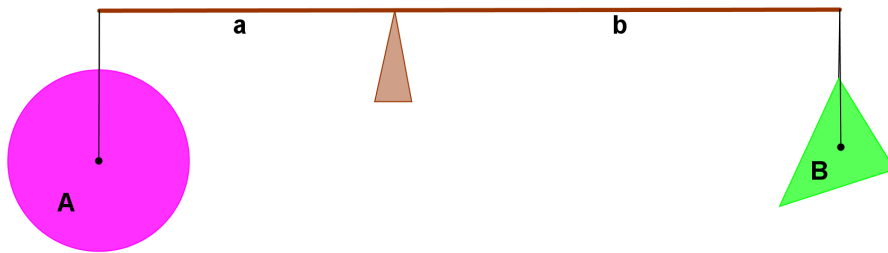


Figura 1.9: Área do círculo. A demonstração foi feita utilizando o método da exaustão: constroem-se polígonos regulares, a partir do hexágono, inscritos e circunscritos ao círculo, sempre dobrando o número de lados. Ou seja, as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos ao círculo  $C$ , respectivamente,  $I_n$  e  $C_n$ , ao aumentar indefinidamente o número de lados, se aproximam da área do círculo,  $I_n < C < C_n$ .



(a) “Pesos iguais a distâncias iguais estão em equilíbrio, e pesos iguais a distâncias desiguais não estão em equilíbrio, mas pendendo para o lado do peso que está a maior distância”.



(b) “O equilíbrio entre os corpos se dá se o produto do peso A pela distância a entre o ponto de suspensão de A e o fulcro for igual ao produto do peso B pela sua distância b ao fulcro”.

Figura 1.10: Lei das alavancas

## 1.3 Desenvolvimentos Posteriores

Trataremos, neste momento, de alguns dos mais importantes resultados obtidos por matemáticos da Idade Moderna, que se referem ao cálculo de áreas.

### 1.3.1 Kepler

Johann Kepler, nascido no século XVII, na Alemanha, foi um matemático que acrescentou significativas modificações no método de Arquimedes. Inspirado pelas especulações de Nicolau de Cusa e Giordano Bruno (1548-1600), Kepler introduziu no método dos antigos os procedimentos infinitesimais. Determinou a área do círculo, Kepler usando o mesmo expediente de Nicolau de Cusa, Stifel e Viète: considerou o círculo como um polígono de infinito número de lados (ver figura 1.11).

O maior exemplo desse seu método infinitesimal é o procedimento que utilizou para demonstrar a área do círculo. Considerou um polígono regular inscrito no círculo com um número muito grande de lados, e traçou raios do centro da circunferência para os vértices, formando um número igual de pequenos triângulos cujas bases são os lados do polígono. Sendo o número de lados infinitamente grande, cada lado é infinitamente pequeno, o polígono, então, confunde-se com o círculo e a altura de cada triângulo confunde-se com o raio  $r$  do círculo, pois a sua medida é infinitamente próxima. Assim, a área de cada triângulo é praticamente igual a  $\frac{1}{2} \cdot (\text{base}) \cdot (\text{altura}) = \frac{1}{2} \cdot (\text{base}) \cdot r$  isto é, a área da região

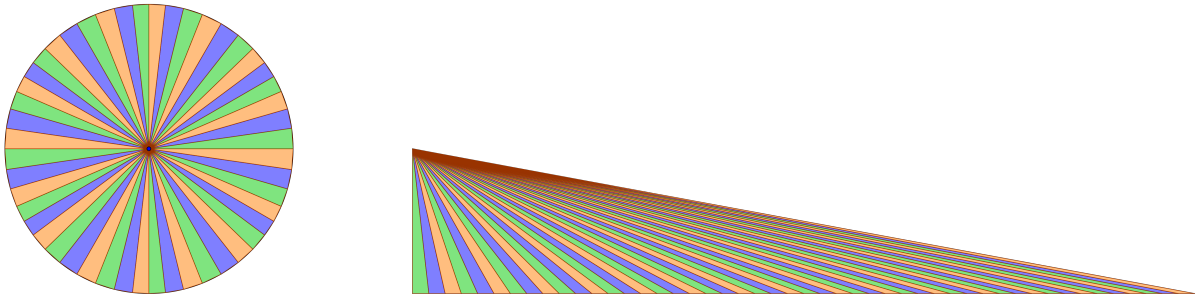


Figura 1.11: Kepler dividiu o círculo em vários triângulos isósceles, cada um dos quais com altura próxima ao raio do círculo. Cada triângulo pode ser distorcido enquanto mantém sua base e sua altura (logo, a área também é preservada) e rearranjado no triângulo da direita (figura baseada em <http://hom.wikidot.com/areas>).

poligonal é a soma das áreas de todos estes triângulos e confunde-se com a área do círculo.

Assim, somando todas as áreas triangulares, a soma das bases dá o perímetro  $P$  da circunferência, donde  $A = \frac{1}{2}Pr$ . Kepler estendeu a aplicação de seu método infinitesimal ao cálculo de áreas de superfícies e volumes de sólidos, de uma maneira como nunca antes foi feito pelos matemáticos gregos. Baseando-se implicitamente numa espécie de “lei da continuidade” para justificar essas aproximações infinitesimais. Segundo Boyer (1949), algumas somas infinitas de Kepler são notáveis antecipações daquilo que hoje chamamos de cálculo integral.

### 1.3.2 Fermat

Nascido na França, no início do século XVII. Como a maioria dos outros matemáticos, foi motivado pelo clássico problema das quadraturas. Pode-se dizer que nessa busca, com os resultados que obteve, tornou-se um precursor do cálculo infinitesimal.

Na antiguidade, vimos que todas as resoluções para as quadraturas basearam-se na decomposição das figuras, de maneira geral, em triângulos, como no caso do segmento da parábola. O que diferencia a teoria que Fermat desenvolveu é que as suas decomposições são a partir de retângulos. E isto lhe deu uma grande vantagem, pois ao reduzir infinitamente a largura desses retângulos, pôde utilizá-las em inúmeras outras curvas.

Seu método (ver figura 1.12), muito parecido com a soma de Riemann, consiste em representar a curva num sistema de coordenadas, no primeiro quadrante, e assim a área que se deseja calcular será a região limitada por essa curva e pelo eixo  $OX$ .

A base de cada retângulo é igual à medida do segmento determinado por dois pontos consecutivos, ou seja,  $r^n a - r^{n+1} a = r^n a(1 - r)$  e a altura de cada um é um ponto

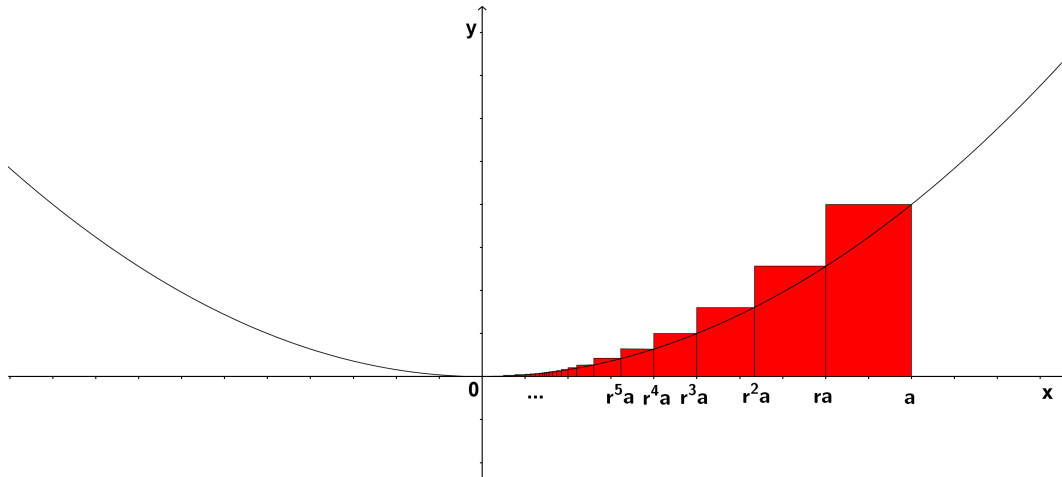


Figura 1.12: Método de Fermat para quadratura das funções potência.

do gráfico  $y = x^k$ , daí a altura é  $(r^n a)^k = r^{nk} a^k$ . Portanto, a área de cada retângulo é:

$$\begin{aligned} A_n &= r^n a (1-r) r^{nk} a^k \\ &= a^{k+1} r^{n(k+1)} (1-r) \end{aligned}$$

Tendo  $k$  como um número constante, temos que a soma das  $n$  áreas desses retângulos representa o valor aproximado a área da curva, ou seja,

$$A \approx \sum a^{k+1} r^{n(k+1)} (1-r) = \frac{a^{k+1} (1-r)}{1-r^{k+1}}.$$

Lembrando da fatoração de  $(1-r^{k+1})$ , temos:

$$\frac{a^{k+1} (1-r)}{1-r^{k+1}} = \frac{a^{k+1}}{1+r+r^2+r^3+\dots+r^n}.$$

Ao calcularmos o limite, quando  $r$  tende a 1, resulta que

$$A = \frac{a^k + 1}{k + 1}.$$

Este método é chamado de quadratura das funções potência.

Seus resultados colaboraram para o estudo das propriedades das séries infinitas. Outro ponto importante, que diferencia os métodos de Fermat e dos matemáticos gregos da antiguidade, é que o seu método apresenta como resultado uma expressão analítica, enquanto que os gregos sempre obtinham uma outra área.

### 1.3.3 Cálculo Integral

Os precursores do Cálculo Integral, com trabalhos independentes, Leibniz e Newton, nascidos no século XVII, iniciaram seus estudos a respeito do cálculo de áreas de

regiões limitadas por uma curva baseados em fatos geométricos, dividindo um intervalo em partições infinitesimais e calculando a soma das suas áreas, ainda de maneira intuitiva.

Leibniz publicou em seu livro *Historia et Origo Calculi Differentialis* que se inspirou em Pascal e no triângulo característico para criar o Cálculo. A partir desse triângulo, determinou a tangente à curva, que vem a ser a derivada. Através de triângulos semelhantes, fez com que a razão  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  se torne uma relação infinitesimal  $\frac{dy}{dx}$ , introduzindo então o operador  $d$ , que ao mesmo tempo em que indica uma ligação com a quantidade  $x$ , o separa dessa quantidade. Como uma variável vai sempre depender da outra, implicitamente aparece aí a noção de função, onde há uma variável dependente e uma variável independente. Seu trabalho influenciou muito a definição de função, posteriormente. Nesse contexto, os trabalhos de Leibniz e Newton se diferenciam. Como as notações adotadas por Leibniz foram mais adequadas e eficazes, foram melhor aceitas e logo se consolidaram, sendo utilizadas até hoje.

Em todo caso, o Teorema Fundamental do Cálculo, transformou em muitos casos o problema de cálculo de áreas de figuras em um simples problema algébrico, que ainda hoje é visto nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

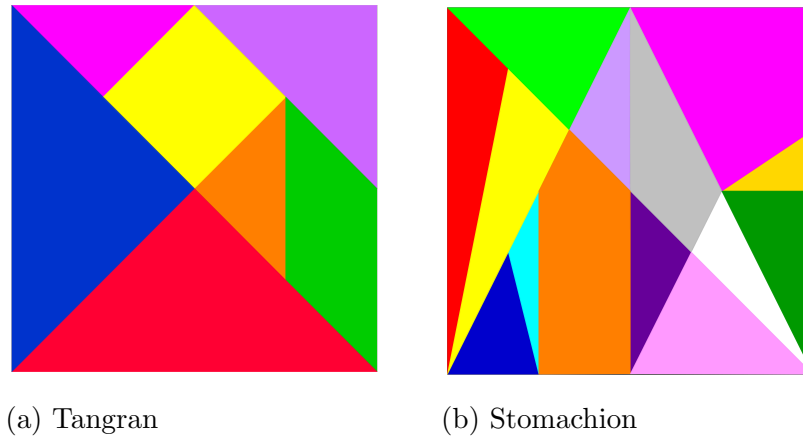
A definição analítica de uma função fez com que, no final do século XVIII, o cálculo infinitesimal abandonasse as suas referências geométricas e passasse a ser formulado na linguagem algébrica.

Já no século XIX, Riemann formalizou o limite da soma das partições dos intervalos, que não necessariamente devem ser iguais, o que veio a ser conhecido como a Soma de Riemann e, conseqüentemente, definiu a Integral de Riemann. Esses resultados abriram caminho para Lebesgue apresentar, no século XX, a sua definição de integral, que vem suprir alguma limitações da integral de Riemann.

### 1.3.4 Polígonos Equidecomponíveis: Teorema de Bolyai

Este é um conceito bem simples e facilmente aceitável, que na verdade já era utilizado desde a antiguidade, por exemplo nos *puzzles* ou quebra-cabeças Tangran e *Stomachion* de Arquimedes (figura1.13).

Dois polígonos  $P$  e  $P'$  dizem-se *equidecomponíveis* quando é possível dividir cada um deles em um mesmo número de partes disjuntas e congruentes entre si. Este conceito está implícito na teoria de área de Euclides. Evidentemente, dois polígonos equidecomponíveis têm a mesma área. A recíproca dessa proposição não é evidente, mas é verdadeira, sendo conhecida como *Teorema de Bolyai-Gerwein*, por ter sido demonstrado, em 1832 por F. Bolyai e, independentemente, em 1833 por P. Gerwien. F. Bolyai era o pai do famoso matemático húngaro Janos Bolyai, descobridor da Geometria Hiperbólica (que também foi descoberta por Lobatchevski e Gauss). Gerwien era um matemático amador



(a) Tangran

(b) Stomachion

Figura 1.13: Quebra-cabeças antigos que utilizam o princípio da equidecomponibilidade.

alemão.

Veremos aplicações do conceito de equidecomponibilidade no capítulo 3.

### 1.3.5 Teoria da Medida

Os estudos que levaram à Teoria da Medida foram iniciados por Èmile Borel, mas de fato desenvolvidos por Lebesgue, francês, e Carathéodory, grego, ambos nascidos no final do século XIX.

A Medida de Lebesgue serve como base para a Teoria da Medida, que consiste em definir a medida de um conjunto, atribuindo um número a cada subconjunto (ou a uma determinada família de subconjuntos, mais exatamente). Essa medida pode ser área, volume, massa ou qualquer propriedade aditiva, na qual a medida da união de dois conjuntos disjuntos é igual à soma das suas medidas. Para compreendermos melhor, vamos apresentar alguns conceitos e definições.

**Definição 1.3.1.** *Uma  $\sigma$ -Álgebra de subconjuntos de  $X$  é uma família  $\Sigma$  de conjuntos de  $X$ , tais que:*

1.  $\emptyset \in \Sigma$ ;
2. para todo  $E \in \Sigma$ , seu complemento  $X \setminus E \in \Sigma$ ;
3. para toda sequência  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\Sigma$ , sua união  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$ .

Elementos de  $\Sigma$  são chamados de *conjuntos mensuráveis*.

Dizemos que uma família de conjuntos  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{I}}$  é *disjunta* se nenhum ponto pertence a mais do que um  $E_i$ , isto é,  $E_i \cap E_j = \emptyset$  para todos  $i, j \in \mathbb{I}$  distintos.

**Definição 1.3.2.** *Um espaço de medida é uma tripla  $(X, \Sigma, \mu)$  onde:*

1.  $X$  é um conjunto;
2.  $\Sigma$  é uma  $\sigma$ -álgebra de sub-conjuntos de  $X$ ;
3.  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$  é uma função, tal que:

(a)  $\mu(\emptyset) = 0$

(b) se  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  é uma sequência disjunta em  $\Sigma$ ,

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i).$$

Os elementos de  $\Sigma$  são chamados de *conjuntos mensuráveis* (por exemplo, figuras cuja área queremos medir) e  $\mu$  é chamads de uma *medida de  $X$*  (ou seja, a função que atribui um área a cada figura). A propriedade 3a, chamada de  $\sigma$ -*aditividade* ou *aditividade contável*, é o que possibilita formalizar os métodos intuitivos de Kepler e Fermat, por exemplo.

A Teoria da Medida representa, portanto, a formalização completa das propriedades da área (e também do comprimento e volume) que foram intuídas pelos matemáticos desde a antiguidade. Veremos no próximo capítulo uma versão simplificada da teoria da medida, suficiente para o cálculo de áreas de figuras geométricas elementares.

### 1.3.6 Fractais

Benoit Mandelbrot, nascido na Lituânia, no início do século XX, foi quem iniciou os estudos de formas geométricas que possuem uma propriedade especial, a auto-similaridade. Para essas formas deu o nome de *fractais*, do latim *fractus*, fragmentos irregulares. Os fractais são estruturas fragmentadas, extremamente belas e complexas, obtidas através de processos iterativos ou recursivos.

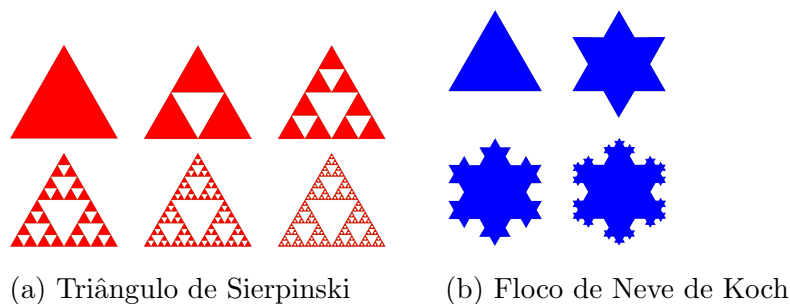


Figura 1.14: Exemplos de fractais.

Buscando resolver problemas de ruídos em linhas telefônicas na transmissão entre computadores, teve êxito ao empregar um trabalho antigo de George Cantor chamado

Poeira de Cantor. Seus estudos foram baseados em resultados das pesquisas de dois precursores do estudo dos fractais, Fatou e Julia. Suas habilidades com os recursos computacionais o ajudaram bastante a desenvolver esses estudos.

Após o surgimento das Geometrias Não-Euclidianas, no final do século XIX, houve uma maior liberdade para os matemáticos, quanto aos esquemas rígidos inerentes a Geometria Euclidiana.

A chamada Geometria dos Fractais, desenvolvida por Mandelbrot, tem sua base na Teoria do Caos: “a ordem na desordem”. Reflete uma natureza de irregularidades, o que a contrapõe à Geometria Euclidiana.

A Geometria dos Fractais permite uma contemplação de aspectos harmoniosos ou de contrastes que estão fortemente ligados às artes e também presentes na natureza. A simetria, que será apresentada no capítulo 2, é um conceito de fundamental importância no estudo da geometria, no cálculo de área e possui, inclusive, grande valor estético. Este, torna-se um fator de grande relevância para a sua aplicação no ensino da Matemática, tanto através dos recursos tecnológicos, como, principalmente, através da manipulação de materiais concretos.

O estudo do cálculo de áreas dos fractais possui resultados surpreendentes, como no Triângulo de Sierpinski, um dos mais conhecidos fractais, no qual a sua área tende a zero, enquanto o seu perímetro tende ao infinito. Ou como no Floco de Neve de Koch, no qual a área é finita, cerca de 540 por cento maior que a inicial, enquanto o seu perímetro tende ao infinito (ver figura 1.14).

## 1.4 Conclusão

Ao concluirmos este importante panorama dos fatos da História da Matemática que envolvem o cálculo de áreas e que servirá de fundamento para a teoria que vamos apresentar, é indispensável uma observação a respeito de um momento crucial no desenvolvimento dos estudos da Matemática, a criação da Teoria dos Conjuntos por George Cantor. Isto ocorreu ao final do século XIX e, inicialmente, não foi bem aceito. Com o passar dos anos, passou a ser reconhecida a sua extraordinária importância, vindo a ser considerada uma das mais notáveis inovações matemáticas dos últimos séculos, reformulando toda a Teoria Matemática já existente, inclusive a Geometria, e colaborando sobremaneira para o desenvolvimento da Análise.

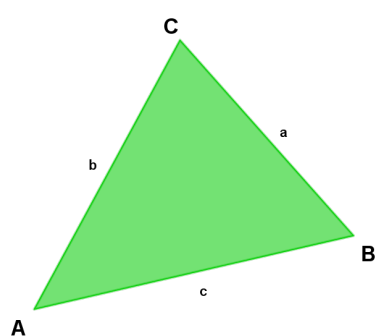


## Capítulo 2

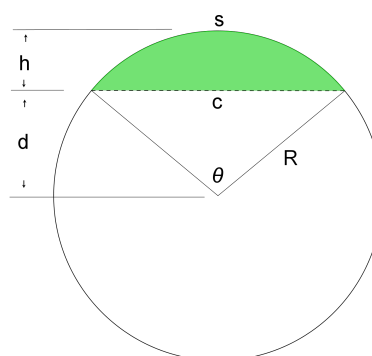
# Princípios Matemáticos para o Cálculo de Áreas

O objetivo deste capítulo é examinar alguns princípios úteis para o cálculo de áreas de figuras planas. Mas, antes devemos definir o que entendemos por *figuras planas* e *área*.

Inicialmente, precisamos definir um conjunto fixo de tipos de *figuras elementares*. A ideia intuitiva é que uma figura plana é um conjunto de pontos do plano que pode ser “construído” com figuras elementares, como bloquinhos de um jogo de construção. Na figura 2.1 vemos alguns tipos de figuras elementares. É claro que é necessário também ter um critério de congruência bem definido para cada tipo de figura elementar. Por exemplo, consideramos dois segmentos circulares congruentes se suas aberturas e raios são congruentes.



(a) A área do triângulo é  $A = bh/2$  e dois triângulos são congruentes se seus lados correspondentes são congruentes.



(b) A área do segmento de círculo é  $A = R^2(\theta - \text{sen } \theta)/2$  e dois segmentos são congruentes se possuem o mesmo raio  $R$  e mesma abertura  $\theta$ .

Figura 2.1: Exemplos de figuras elementares.

Uma figura elementar possui uma *fronteira* bem definida. No caso de um triângulo, sua fronteira é formada pelos pontos dos lados; já para um segmento circular, a fronteira é formada pelos pontos da corda e do arco.

Em geral, um ponto  $A$  pertence à fronteira de um conjunto  $X$  se qualquer disco com centro em  $A$  contém pontos de  $X$  e pontos que não são de  $X$ . Denotamos a fronteira de um conjunto  $X$  por  $\partial X$ . O fecho  $\overline{X}$  de um conjunto  $X$  é a união de  $X$  com seus pontos de fronteira, ou seja,  $\overline{X} = X \cup \partial X$ .

Se o conjunto  $X$  contém o conjunto  $Y$ , definimos a operação de *diferença*  $X \ominus Y$  como o fecho do conjunto dos pontos de  $X$  que não pertencem à  $Y$ , ou seja,

$$X \ominus Y = \overline{X - Y}.$$

Se a interseção dos conjuntos de  $X$  e  $Y$  é vazia ou contém apenas pontos de fronteira comuns a  $X$  e  $Y$ , definimos a operação de *soma*  $X \oplus Y$  como a união de  $X$  e  $Y$ , ou seja,

$$X \oplus Y = X \cup Y.$$

Podemos agora definir o que entendemos por figura plana. A definição é indutiva:

1. Se  $F$  é uma figura elementar, então  $F$  é uma figura plana;
2. Se  $F$  e  $G$  são figuras planas e  $F \supset G$ , então  $F \ominus G$  é uma figura plana;
3. Se  $F$  e  $G$  são figuras planas e  $F \cap G \subset (\partial F \cap \partial G)$ , então  $F \oplus G$  é uma figura plana.

Vamos denotar o conjunto de todas as figuras planas por  $\mathcal{F}$ .

Da definição segue que uma figura plana pode ser descrita por um número finito de operações  $\ominus$  e  $\oplus$ , sobre um número também finito de figuras elementares, denominadas *partes*.

Uma figura plana é uma *figura poligonal* se suas partes são triângulos.

Eventualmente, vamos lidar também com conjuntos de pontos que necessitariam de um número *infinito* de partes para sua descrição. Trataremos desses casos informalmente na seção 2.5.

Finalmente, podemos definir a *área* de uma figura plana como uma função Área :  $\mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  também de maneira indutiva:

1. Área está bem definida para as figuras elementares, de modo que se duas figuras elementares  $F$  e  $G$  são congruentes, então Área  $F =$  Área  $G$ ;
2. Área  $F \ominus G =$  Área  $F -$  Área  $G$ ;
3. Área  $F \oplus G =$  Área  $F +$  Área  $G$ .

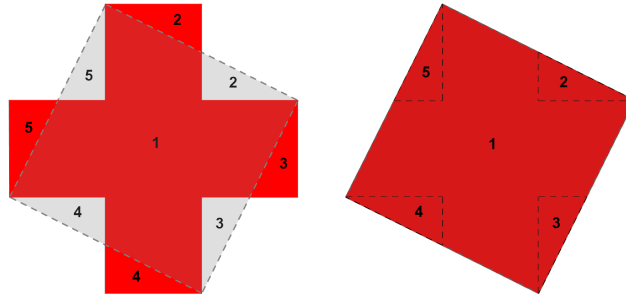


Figura 2.2: Figuras equidecomponíveis. Exemplo baseado em (BOLTIANSKI,1981).

Intuitivamente é claro que tal função existe, mas, como uma mesma figura pode ser descrita de várias maneiras, não é óbvio como mostrar que sempre vamos obter a mesma área independentemente de sua descrição. Uma prova detalhada desse fato para figuras poligonais pode ser vista em (MOISE,1990)<sup>1</sup>

## 2.1 Decomposição

Uma *isometria* é uma transformação  $f$  do plano no plano que preserva distâncias, ou seja,

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B)$$

para quaisquer dois pontos  $A$  e  $B$  do plano. Estudaremos isometrias com mais detalhe na próxima seção. Por enquanto, vamos apenas usar esse conceito para definir *congruência* de figuras planas: duas figuras planas  $F$  e  $G$  são *congruentes* se existe uma isometria  $f$  tal que  $f(F) = G$ . Figuras congruentes claramente têm a mesma área.

Examinemos as figuras expostas na figura 2.2. As linhas tracejadas no desenho decompõem a figura em um número idêntico de figuras congruentes. Isso motiva a seguinte definição: duas figuras  $F$  e  $G$  são *equidecomponíveis* se existem  $2n$  figuras  $F_1, \dots, F_n$  e  $G_1, \dots, G_n$  tais que

$$F = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n,$$

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$$

e  $F_i$  é congruente a  $G_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

<sup>1</sup> a ideia básica da demonstração é que duas decomposições distintas de uma mesma figura possuem um *refinamento* comum.

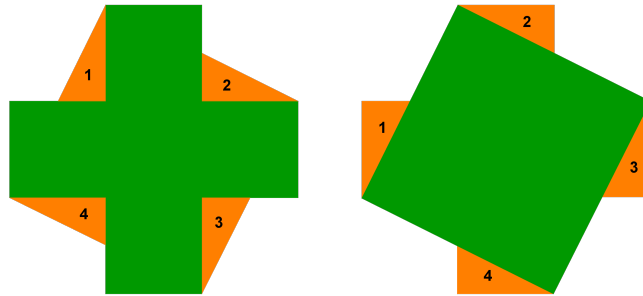


Figura 2.3: Figuras equicomplementáveis. Exemplo baseado em (BOLTIANSKI,1981).

É claro que figuras equidecomponíveis têm a mesma área. Esse conceito é o fundamento para o princípio mais simples para o cálculo de áreas, o *princípio da decomposição*, qual seja: para calcular a área de uma figura, procura-se decompor esta figura em um número finito de figuras, de tal modo que se possa compor com elas uma outra figura mais simples, cuja área seja conhecida.

É interessante notar que a recíproca da afirmação feita acima é verdadeira, ao menos para figuras poligonais, ou seja, se duas figuras poligonais têm a mesma área, então elas são equidecomponíveis. Esse é o já mencionado Teorema de Bolyai-Gerwien (BOLTIANSKI,1981) <sup>2</sup>.

Um conceito semelhante ao de equidecomponibilidade é o de equicomplementaridade. Duas figuras  $F$  e  $G$  são *equicomplementáveis* se existem  $2n$  figuras  $F_1, \dots, F_n$  e  $G_1, \dots, G_n$  tais que

$$F' = F \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$$

e

$$G' = G \oplus G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$$

são congruentes, com  $F_i$  congruente a  $G_i$ . A ideia aqui é que se pudermos completar  $F$  e  $G$  com figuras congruentes até chegar a figuras congruentes  $F'$  e  $G'$ , então  $F$  e  $G$  necessariamente têm a mesma área (figura2.3).

<sup>2</sup>No espaço a situação é bem diferente: existem *tetraedros* de mesmo volume que *não* são equidecomponíveis. Ao demonstrar isso, Max Dehn resolveu o *Terceiro Problema de Hilbert*.

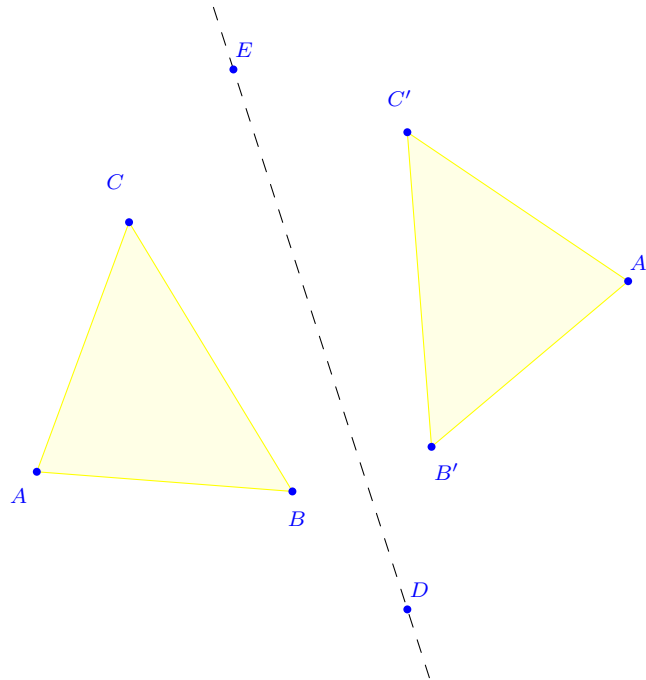


Figura 2.4: Exemplo de reflexão.

## 2.2 Simetria

Em muitos casos, desejamos explorar a simetria de certas figuras para simplificar o cálculo de suas áreas, mas o que significa exatamente *simetria*? Trata-se de um assunto complexo, por isso vamos abordá-lo através de exemplos.

Talvez o tipo mais simples de simetria seja a simetria do espelho. Dada uma reta  $r$  e um ponto  $A$  do plano, dizemos que  $A'$  é a *imagem refletida* de  $A$  por  $r$  se  $AA'$  é perpendicular a  $r$  e  $d(A, r) = d(A', r)$ . Dizemos ainda que uma transformação do plano no plano  $M_r$  é uma *reflexão* em torno de  $r$  se  $M_r(A) = A'$ . Na figura 2.4 vemos que toda reflexão é uma isometria.

A composição de isometrias é uma isometria, portanto podemos considerar o que acontece quando compomos duas reflexões por retas distintas  $r$  e  $s$ . Temos dois casos: ou  $r$  e  $s$  são paralelas, ou se intersectam em um ponto  $O$ .

Vejamos o primeiro caso na figura 2.5. Vemos que o efeito resultante é de uma *translação* da figura  $F$  na direção perpendicular às retas  $r$  e  $s$ . Por isso dizemos que uma transformação  $T_{r,s}$  do plano no plano é uma translação se existem retas paralelas  $r$  e  $s$  tais que  $T_{r,s} = M_r \circ M_s$ .

Já o segundo caso está ilustrado na figura 2.6. Vemos que o efeito resultante é de uma *rotação* da figura  $F$  em torno do ponto  $O$ . Por isso dizemos que uma transformação  $R_{r,s}$  do plano no plano é uma rotação se existem retas incidentes  $r$  e  $s$  tais que  $R_{r,s} = M_r \circ M_s$ .

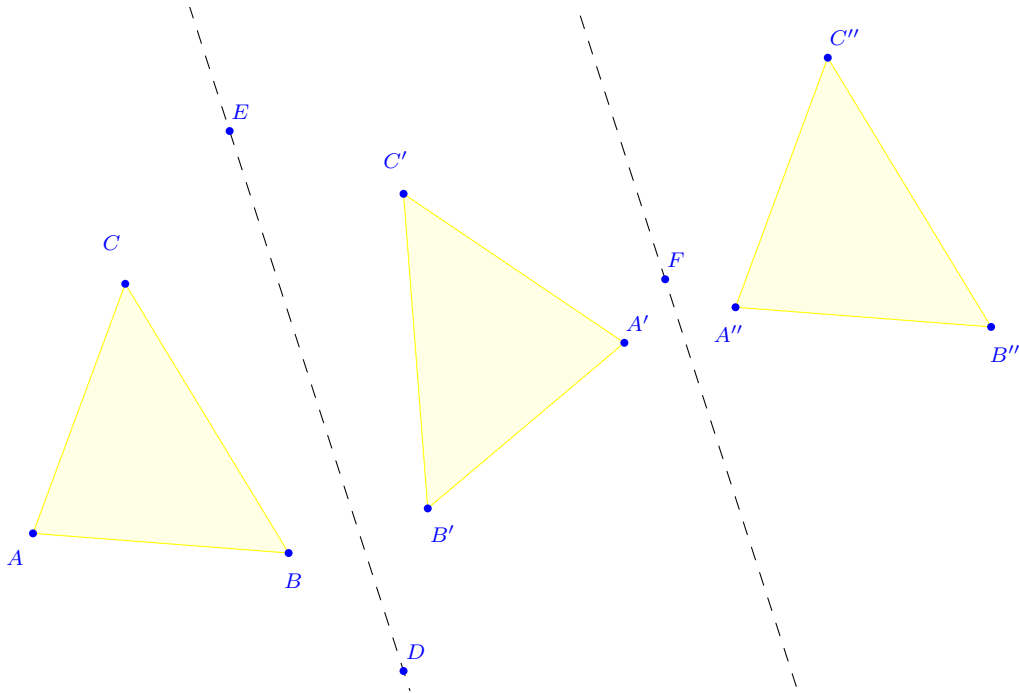


Figura 2.5: Exemplo de Translação.

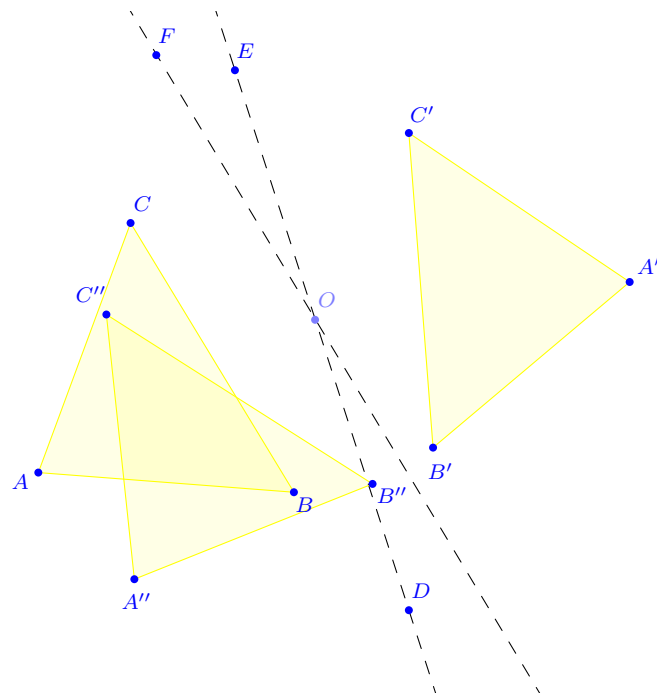


Figura 2.6: Exemplo de Rotação.

Vimos que translações e rotações podem ser definidas em termos de reflexões. É possível mostrar que qualquer isometria é a composição de no máximo três reflexões (MOISE,1990).

Podemos dizer agora o que entendemos por simetria: uma figura  $F$  é simétrica se existe uma isometria  $I$  tal que  $I(F) = F$ . Neste caso, dizemos que  $F$  é *invariante* pela isometria  $I$ .

Se  $F$  é invariante por uma isometria  $I$ , frequentemente podemos encontrar uma figura  $F_0$ , que é uma parte de  $F$ , tal que

$$F = F_0 \oplus I(F_0) \oplus I^2(F_0) \oplus \dots \oplus I^{n-1}(F_0).$$

Tal figura  $F_0$  é denominada *região fundamental* e claramente

$$\text{Área } F = n \text{ Área } F_0.$$

Portanto, podemos enunciar o *princípio da simetria*: para simplificar o cálculo da área de uma figura  $F$  devemos identificar uma região fundamental  $F_0$  de uma isometria que deixe  $F$  invariante e utilizar a fórmula acima.

## 2.3 Proporcionalidade

Dado um ponto  $O$  do plano e um número  $k > 0$ , a *dilatação* de centro  $O$  e *constante de proporcionalidade*  $k$  é a transformação  $D_{O,k}$  do plano no plano que deixa  $O$  fixo e, para qualquer outro ponto  $A \neq O$ , leva  $A$  em  $A'$  de modo que  $A'$  está sobre a reta  $OA$  e

$$d(O, A') = kd(O, A).$$

Se  $0 < k < 1$ , podemos mais propriamente dizer que  $d$  é uma *contração*.

Como consequência dos teoremas básicos de proporcionalidade (“um feixe de paralelas determina segmentos proporcionais em duas retas transversais” e reciprocamente), mostra-se que uma dilatação leva um triângulo  $ABC$  em um triângulo semelhante  $A'B'C'$ . Disto resulta que dilatações preservam colinearidade, paralelismo, incidência e proporcionalidade entre comprimentos de segmentos.

Compondo uma isometria  $I$  com uma dilatação  $D$  obtemos uma *similaridade*, ou seja, uma transformação  $S$  do plano no plano é uma similaridade se existe uma isometria  $I$  e uma dilatação  $D_{O,k}$  tal que

$$S(A) = D_{O,k}(I(A)).$$

Similaridades permitem estender a noção de semelhança para figuras arbitrárias, isto é, dizemos que duas figuras  $F$  e  $G$  são *semelhantes* se existe uma similaridade  $S$  tal que

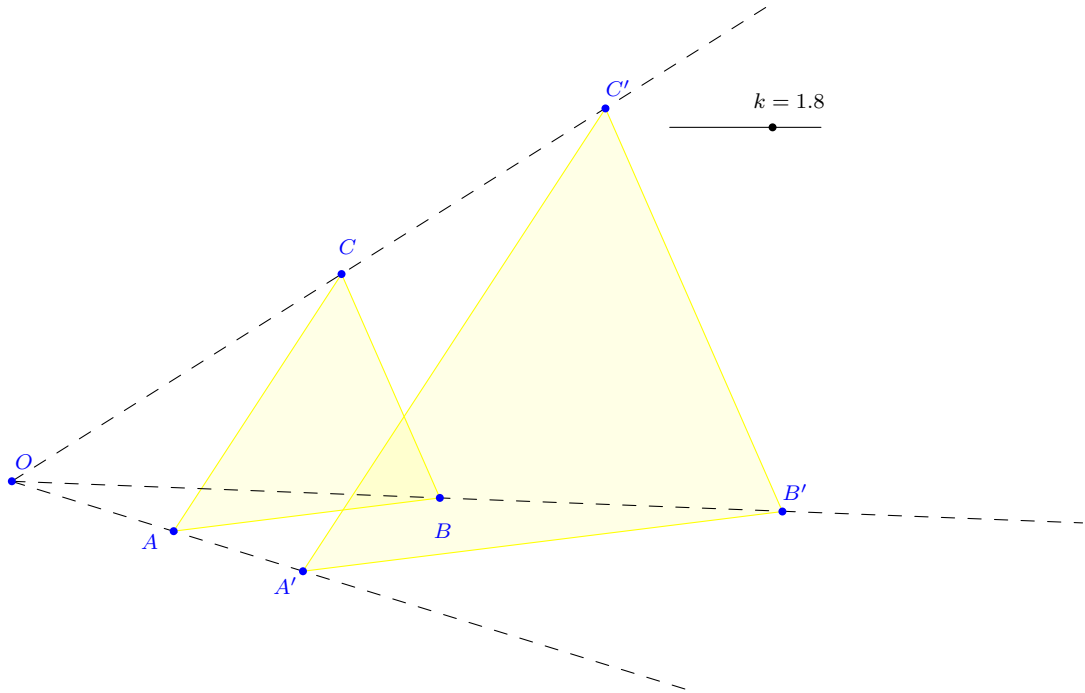


Figura 2.7: Exemplo de homotetia.

$S(F) = G$ . A razão de proporcionalidade de  $S$  é o mesmo  $k$ , já que a isometria não altera as distâncias entre os pontos.

Qual a relação entre a área de uma figura  $F$  e a área de uma figura semelhante  $G$ ? Como figuras são compostas de figuras elementares, basta ver o efeito de uma semelhança sobre figuras elementares (ver figura 2.7). Vemos que se  $S(F) = G$  e  $S$  tem constante de proporcionalidade  $k$ , então

$$\text{Área } G = k^2 \text{Área } F.$$

Temos assim o *princípio da proporcionalidade*: as áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de proporcionalidade.

## 2.4 Invariância Afim

Queremos definir um tipo de transformação que preserva áreas, como as isometrias, mas mais geral, no sentido que não necessariamente preserva distâncias. Vamos nos restringir nesta seção ao caso de figuras poligonais, mas é possível generalizar os resultados que vamos obter para outras figuras. Consideremos inicialmente o seguinte lema (ver figura 2.8):

**Lema 2.4.1.** *Sejam  $O$ ,  $X$  e  $Y$  pontos não colineares e  $A$  e  $B$  dois pontos quaisquer. Se  $A'$  e  $B'$  são dois pontos da reta  $OX$  tais que  $AA'$  e  $BB'$  são paralelas a  $OY$ , então*

$$\text{Área } AA'B'B = \frac{(\text{Área } OXA + \text{Área } OXB)(\text{Área } BYO - \text{Área } AYO)}{\text{Área } OXY}.$$



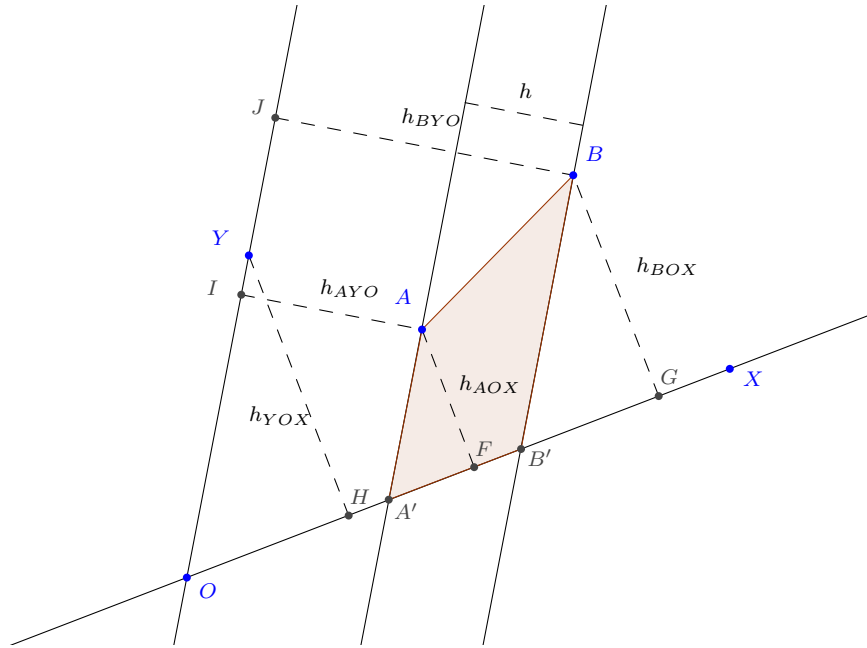


Figura 2.8: Lema do Trapézio.

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
 \text{Área } AA'B'B &= \frac{AA' + BB'}{2} h \\
 &= \frac{h_{AOX} OY + h_{BOX} OY}{2h_{YOX}} (h_{BYO} - h_{AYO}) \\
 &= \frac{(2 \text{Área } AOX + 2 \text{Área } BOX) OY}{2OX h_{YOX}} \frac{(2 \text{Área } BYO - 2 \text{Área } AYO)}{OY} \\
 &= \frac{(\text{Área } OXA + \text{Área } OXB)(\text{Área } BYO - \text{Área } AYO)}{\text{Área } OXY}.
 \end{aligned}$$

□

Para simplificar a notação, dizemos que

$$x_A = \frac{\text{Área } OXA}{\text{Área } OXY} \text{ e } y_A = \frac{\text{Área } OAY}{\text{Área } OXY}$$

são as *coordenadas de área* do ponto  $A$  com relação ao triângulo  $OXY$ . Assim, o teorema acima diz que

$$\text{Área } AA'B'B = \text{Área } OXY (x_A + x_B)(y_B - y_A),$$

ou seja, a área do trapézio  $AA'B'B$  depende apenas da área de  $OXY$  e das coordenadas de área dos pontos  $A$  e  $B$ .

Vemos na figura 2.9 que

$$\text{Área } ABC = \text{Área } AA'B'B - \text{Área } AA'C'C - \text{Área } CC'B'B,$$

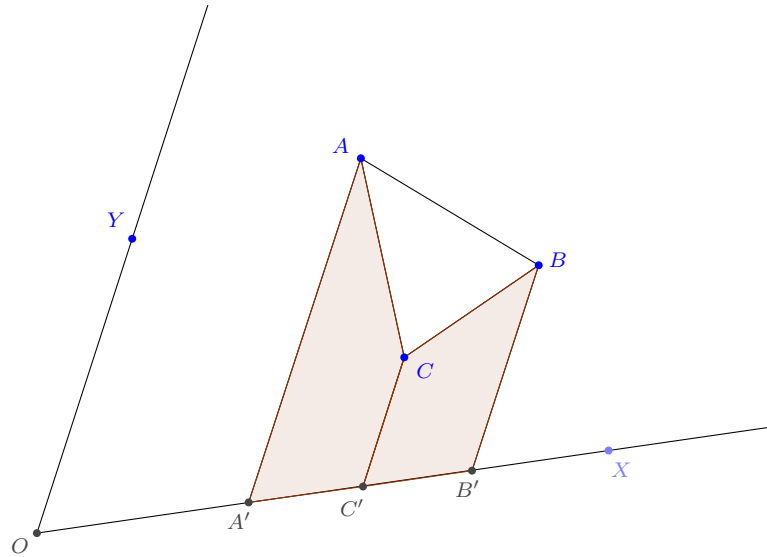


Figura 2.9: A área de um triângulo pode ser expressa em termos das coordenadas de área dos vértices.

portanto, a área de um triângulo  $ABC$  depende apenas das coordenadas de área de seus vértices, ou mais explicitamente,

$$\begin{aligned}
 \text{Área } ABC &= \text{Área } AA'B'B - \text{Área } AA'C'C - \text{Área } CC'B'B \\
 &= \text{Área } OXY [(x_A + x_B)(y_B - y_A) - (x_A + x_C)(y_C - y_A) \\
 &\quad - (x_C + x_B)(y_B - y_C)] \\
 &= \text{Área } OXY (x_A y_B - x_B y_A + x_B y_C - x_C y_B + x_C y_A - x_A y_C) \\
 &= \text{Área } OXY \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Sejam  $OXY$  e  $O'X'Y'$  dois triângulos de mesma área. Dado um ponto  $A$  do plano, com coordenadas de área  $x_A$  e  $y_A$ , em relação a  $OXY$ , queremos definir um ponto  $A'$  (ver figura 2.10) com coordenadas de área  $x_{A'}$  e  $y_{A'}$ , em relação a  $O'X'Y'$  tal que

$$x_{A'} = x_A \text{ e } y_{A'} = y_A.$$

Seja  $m$  a reta paralela a  $O'X'$  a uma distância

$$h_{X'} = \frac{2 \text{Área } OXA}{O'X'}.$$

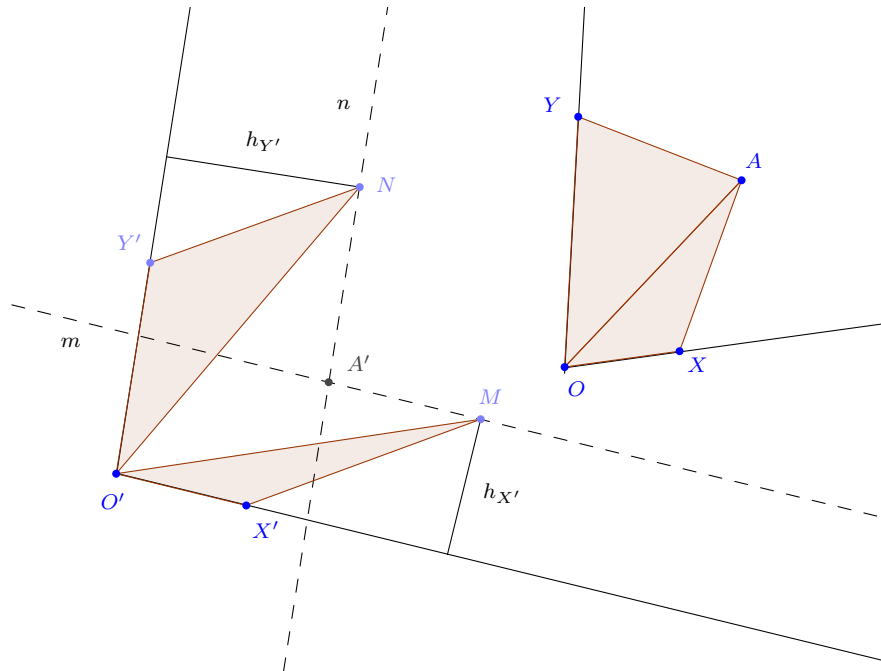


Figura 2.10: Transformação equiafim.

Para qualquer ponto  $M$  de  $m$ , temos que

$$\begin{aligned}
 x_M &= \frac{\text{Área } O'X'M}{\text{Área } O'X'Y'} \\
 &= \frac{O'X'h_{X'}}{2 \text{Área } O'X'Y'} \\
 &= \frac{\text{Área } OXA}{\text{Área } OXY} \\
 &= x_A,
 \end{aligned}$$

onde  $x_M$  é a coordenada de área do ponto  $M$  em relação a  $O'X'Y'$ . Analogamente, se  $n$  é uma reta a uma distância

$$h_{Y'} = \frac{2 \text{Área } OAY}{O'Y'}$$

de  $O'Y'$ , resulta que  $y_N = y_A$ , para qualquer ponto  $N$  em  $n$ . Assim, o ponto  $A'$  na interseção de  $m$  e  $n$  possui a propriedade que

$$x_{A'} = x_A \text{ e } y_{A'} = y_A.$$

Note como a construção do ponto  $A'$  usa essencialmente a Proposição XXXV dos Livro I dos Elementos, como vimos no capítulo anterior.

A transformação  $E$  do plano no plano que mapeia um ponto qualquer  $A$  no ponto  $A'$  é denominada *transformação equiafim* determinada pelos triângulos de mesma área  $OXY$  e  $O'X'Y'$ . Na realidade, a transformação acima está definida apenas para os pontos no

interior do ângulo  $\angle XOY$ , mas adotando a convenção de sinais usual para as coordenadas de área, mostra-se que a transformação pode ser estendida a todo plano.

Como uma transformação equiafim preserva área, pontos colineares são levados em pontos colineares (pois a área neste caso é nula). Retas paralelas também são levadas em retas paralelas, pois claramente uma transformação equiafim leva paralelogramos em paralelogramos. Portanto as relações de incidência são preservadas. Finalmente, é fácil ver que as relações de proporcionalidade entre segmentos são preservadas. Como uma figura poligonal é composta de triângulos, fica claro que uma transformação equiafim  $E$  leva uma figura  $F$  em uma figura  $G = E(F)$  de mesma área. Mais do que isso, cada parte de  $F$  é transformada em uma parte correspondente de  $G$  de mesma área.

Uma *transformação afim*  $Af$  é a composição de uma similaridade com uma transformação equiafim. Vemos que uma figura poligonal  $F$  é mapeada em uma figura poligonal  $G = Af(F)$  tal que  $\text{Área } G = k^2 \text{Área } F$ , onde  $k$  é a razão de proporcionalidade. Portanto uma transformação afim *não* preserva áreas, mas preserva proporcionalidade entre áreas, pois se  $F'$  é uma outra figura,

$$\frac{\text{Área } F}{\text{Área } F'} = \frac{k^2 \text{Área } F}{k^2 \text{Área } F'} = \frac{\text{Área } Af(F)}{\text{Área } Af(F')}.$$

O *princípio da invariância afim* pode ser assim resumido: para quaisquer dois triângulos  $OXY$  e  $O'X'Y'$  do plano existe uma (única) transformação afim que mapeia  $OXY$  em  $O'X'Y'$  e preserva as relações de incidência, paralelismo, proporcionalidade entre segmentos e proporcionalidade entre áreas.

## 2.5 Exaustão

Alguns conjuntos interessantes não podem ser expressos como figuras planas, pois seria necessário um número infinito de partes para descrevê-los. Considere por exemplo a figura 2.11. Nela vemos uma sequência infinita de quadrados vermelhos, ladeados por quadrados de cor cinza, que preenchem todo o quadrado. Se o quadrado possui área  $1ua$ , como para cada quadrado vermelho existem dois de cor cinza, então a área total da sequência infinita de quadrados vermelhos deve preencher um terço da área do quadrado, sendo portanto igual a  $1/3ua$ . Ou seja, deve ser possível atribuir uma área finita mesmo a certas figuras que necessitam de infinitas partes para descrevê-las.

Neste caso, definimos a área da figura por aproximações cada vez melhores.

Seja  $X$  um conjunto do plano, contido em um retângulo  $R$ , cuja área desejamos medir. Suponha que exista uma sequência de figuras planas  $F_n$  tal que

1.  $F_n \subset X$ ;

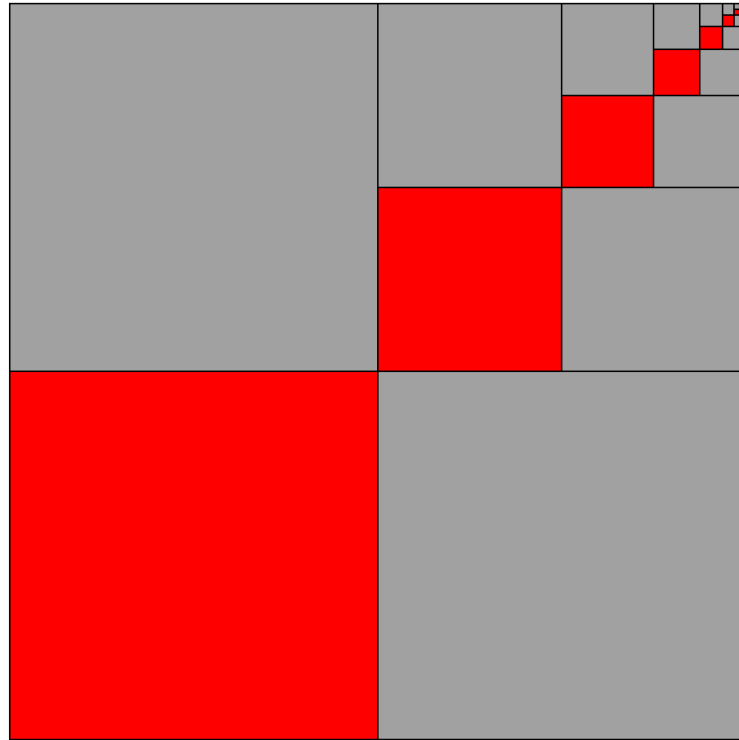


Figura 2.11: Para cada quadrado vermelho, existem dois quadrados de cor cinza.

2.  $F_n \subset F_{n+1}$ ;
3. para todo  $A \in X$ , existe uma figura  $F_n$  tal que  $A \in F_n$ .

Essas condições nos dizem que as figuras  $F_n$  *exaurem*  $X$  interiormente. Como as figuras estão encaixadas, a sequência  $\text{Área } F_n$  é monótona não-decrescente e limitada, pois  $\text{Área } F_n \leq \text{Área } R$ . Chamamos o limite dessa sequência de *área interior* de  $X$ .

O mesmo conjunto  $X$  pode ser *exaurido* exteriormente. Suponha que exista uma sequência de figuras planas  $G_n$  tal que

1.  $G_n \supset X$ ;
2.  $G_n \supset G_{n+1}$ ;
3. para todo  $A \notin X$ , existe uma figura  $G_n$  tal que  $A \notin G_n$ .

Como as figuras estão encaixadas, a sequência  $\text{Área } F_n$  é monótona não-crescente e limitada, pois  $\text{Área } F_n \geq 0$ . Chamamos o limite dessa sequência de *área exterior* de  $X$ .

Se a área exterior e a área interior forem iguais, chamamos esse valor comum de *área* de  $X$ .

Portanto o *princípio da exaustão* diz que se um conjunto limitado pode ser exaurido por uma sequência de figuras encaixadas, sua área é o limite da sequência das áreas.

## Capítulo 3

# Atividades Propostas e Comentadas

Na intenção de contextualizar os conteúdos do ensino de Matemática, algumas iniciativas chegam a ser desastrosas, no mínimo equivocadas. A contextualização tem o sentido de inserir certo tema em um contexto e esse contexto, não necessariamente, se dá em algo corriqueiro, do dia-a-dia. É um conceito bastante abrangente. Por exemplo, fazem parte do contexto do aluno os conteúdos matemáticos que já vivenciou previamente na sua vida escolar até aquele momento em que se encontra, e que continuará vivenciando por algum tempo, além dos conteúdos de outras ciências. As conexões entre os vários temas da matemática são de fundamental importância, assim como uma conexão entre os conteúdos matemáticos e outras áreas do conhecimento, para melhor estruturar o pensamento do aluno. Ao mesmo tempo, contemplam-se diversas habilidades e competências previstas nos PCN+ e na Matriz de Referência para o ENEM.

Podemos e devemos fazer uso de recursos desse tipo, principalmente quando nos deparamos com alguns temas que não são facilmente vinculados ao nosso cotidiano, em nossa vida fora do ambiente escolar. Algo como os problemas apresentados, que envolvem áreas de figuras atrativas visualmente e que instigam a sua resolução, às vezes desafiadoras, servindo como um meio para despertar o interesse na aplicação de outros temas da própria disciplina, é indispensável para o ensino atualmente. “Um procedimento que certamente desperta a atenção dos alunos é abrir cada novo tema com um problema que necessita dos conhecimentos que vão ali ser estudados a fim de ser resolvido. [...]” (LIMA, 2007)

Sem dúvida, também o uso das novas tecnologias tem esse papel. Além de estar presente nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio. “No uso de tecnologia para o aprendizado da Matemática, a escolha de um programa torna-se um fator que determina a qualidade do aprendizado. É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática.” (BRASIL, 2006)

No nosso caso, o *GeoGebra*, que é um software de geometria dinâmica . Cons-

truções podem ser feitas com pontos, vetores, segmentos, linhas, polígonos, seções cônicas, desigualdades, polinômios e funções implícitas. Todos eles podem ser alterados dinamicamente depois. Os elementos podem ser inseridos e modificados diretamente na tela, ou através da barra de entrada. *GeoGebra* tem um conjunto completo de comandos. Professores e alunos podem usar o *GeoGebra* para fazer conjecturas e demonstrar teoremas geométricos. É um recurso muito valioso tanto para o Ensino Fundamental, como para o Ensino Médio.

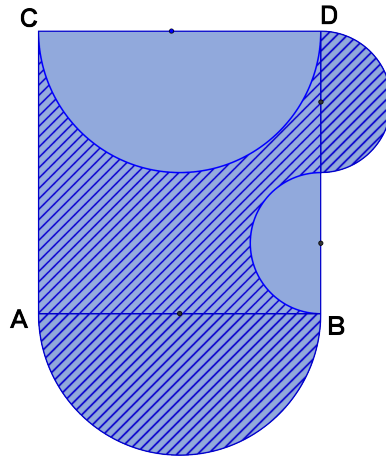
Os problemas que apresentamos estão, de maneira geral, de acordo basicamente com a competência de área 2 da Matriz de Referência para o ENEM, mas também, pela diversidade de problemas e conteúdos envolvidos, vemos que outras tantas habilidades e competências estão presentes. Alguns exemplos dos conteúdos envolvidos são: Operações com polinômios, produtos notáveis, teorema de Pitágoras, congruência de triângulos, transformações geométricas, equações do 2º grau, determinantes, sistemas de equações lineares, trigonometria (lei dos senos e lei dos cossenos) e progressão geométrica (PG).

Nesse momento, realizamos uma exploração na resolução dos problemas selecionados, que venham contribuir para o enriquecimento dos processos reais de ensino-aprendizagem da disciplina de matemática e que colaborem para reduzir as dificuldades dos alunos em relacionar a aplicação dos conceitos com outras áreas do conhecimento, inclusive, e especialmente, da própria matemática. Ainda, identificamos os conhecimentos prévios envolvidos, algumas aplicações práticas, sugestões e classificamos esses problemas resolvidos de acordo com os princípios gerais descritos no capítulo anterior. Observamos que, quase invariavelmente, as resoluções dependem do princípio de decomposição.

Os problemas apresentados e resolvidos, quase todos, exigem do aluno diversos conceitos inerentes da geometria, assim como de outros conteúdos que são aplicados na sua resolução, exigem habilidades no manuseio das operações e fórmulas e, principalmente, no desenvolvimento de atitudes mentais diante do cálculo algébrico e das construções geométricas.

### 3.1 Problema 1

A figura abaixo foi construída a partir do quadrado  $ABCD$  cujo lado mede  $a$ . Qual a medida da área assinalada nessa figura?



**Resolução:** Observemos que a área que se deseja calcular, por simetria, é exatamente igual à área do quadrado  $ABCD$ . Daí,  $S = a^2$ .

**Comentários:** Neste caso, utilizamos para a resolução apenas os princípios de decomposição e simetria. Dizemos que a figura cuja área foi calculada é equidecomponível com o quadrado  $ABCD$ , já que as partes que formam cada um são iguais.

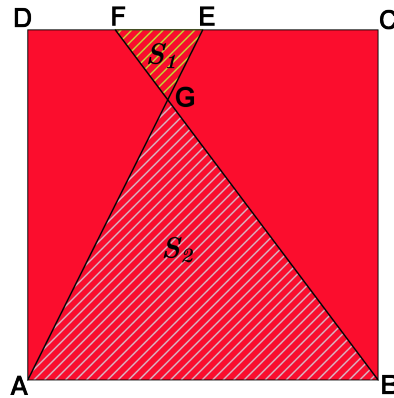
**Sugestões:**

- É bastante interessante que a figura seja construída no *GeoGebra* e, com seus recursos de geometria dinâmica, os alunos comprovem esta propriedade.



### 3.2 Problema 2

No quadrado  $ABCD$ ,  $E$  e  $F$  são pontos médios, respectivamente, de  $CD$  e de  $DE$ . Determine as medidas das áreas  $S_1$  e  $S_2$ , sabendo que a medida do lado  $AB$  é  $a$ .



**Resolução:** Observemos que, como o segmento  $EF$  é paralelo ao lado  $AB$  do quadrado, os triângulos  $ABG$  e  $EFG$ , cujas áreas são representadas por  $S_1$  e  $S_2$ , são semelhantes. Temos que,  $E$  e  $F$  são pontos médios, respectivamente, de  $CD$  e  $DE$ . Então,  $EF = \frac{1}{4}AB$  e  $S_2 = 16S_1$ . Temos ainda que:

$$S_1 = \frac{EFh_1}{2}$$

$$EF = \frac{a}{4}$$

$$h_2 = 4h_1$$

$$h_1 + h_2 = a \quad \implies h_1 = \frac{a}{5}$$

$$\text{Daí, temos que } S_1 = \frac{a^2}{40} \text{ e } S_2 = \frac{2a^2}{5}.$$

**Comentários:** Observemos que para calcular essa área, além da decomposição, aplicamos o princípio da proporcionalidade, através da semelhança de triângulos. Neste caso, a resolução de um sistema de equações lineares para chegar ao resultado esperado. Este é um problema que permite algumas variações, por se tratar da aplicação de um conteúdo que pode ser trabalhado também no Ensino Fundamental.

#### Sugestões:

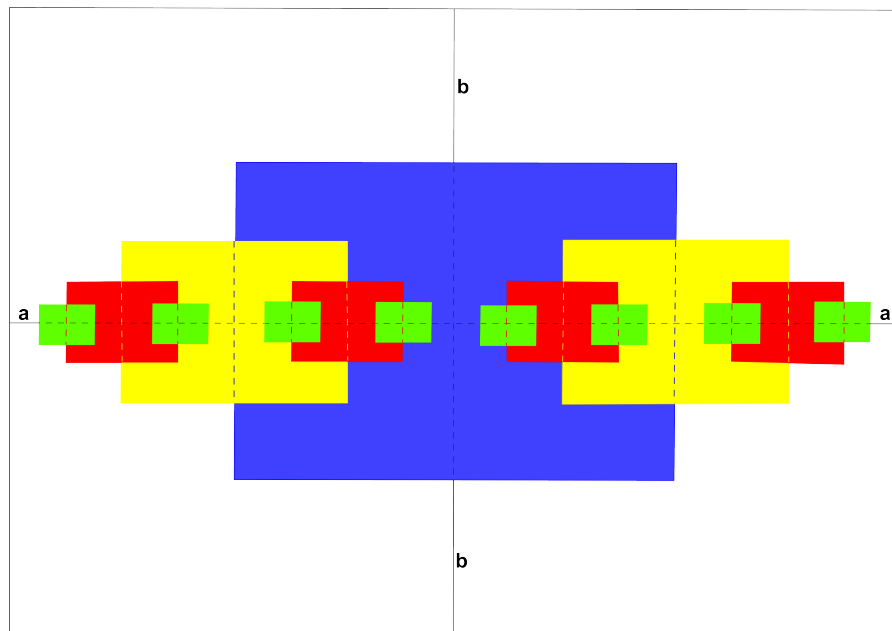
- Solicitar que construam a figura no *GeoGebra*, comprovando as razões entre as medidas dos lados homólogos dos triângulos semelhantes, as medidas dos ângulos

alternos e as razões entre as áreas dos triângulos, assim como entre os triângulos e o quadrado.

- No Ensino Fundamental, pode-se também, propor uma atividade concreta, atribuindo um valor real para o lado  $a$ , na qual os alunos podem construir em cartolina, recortando os triângulos e comparando-os, verifiquem a semelhança.

### 3.3 Problema 3

A figura representa um fractal formado apenas por retângulos. Calcule a área da região colorida, considerando que esse processo irá se repetir infinitamente e que a figura é simétrica.



**Resolução:** Temos que, a figura é composta por retângulos sobrepostos através de um processo que se repete indefinidamente. Observemos que, a cada inserção de um novo retângulo, por simetria, a área que foi acrescentada é uma área correspondente à quarta parte da figura anterior. Assim, a soma das partes amarelas acrescentadas corresponde à quarta parte da parte azul. Assim como, a soma das partes vermelhas é a quarta parte da amarela. E assim, sucessivamente. Daí, teremos a soma de infinitos termos de uma PG, cuja razão é igual a  $\frac{1}{4}$ . Então,

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \frac{1}{32}S + \dots = \frac{4}{3}S$$

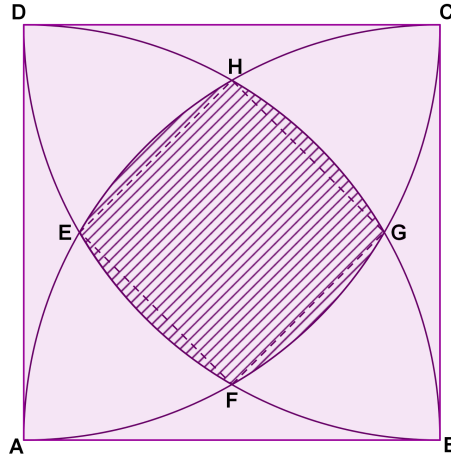
**Comentários:** Observe que neste problema utilizamos os princípios de simetria, proporcionalidade e exaustão. Para calcular a área da figura foi necessária a aplicação da soma dos infinitos termos de uma PG de razão  $\frac{1}{4}$ .

**Sugestões:**

- Neste caso, não é conveniente a construção no *GeoGebra* para a resolução da questão, exceto se a intenção for de avaliar a habilidade do aluno na manipulação do programa, assim como, no emprego das propriedades de quadriláteros utilizadas para obter a figura.
- Pode-se explorar as características de uma Progressão Geométrica de razão entre 0 e 1, inclusive, já introduzindo a noção de limite.
- Há, neste caso especialmente, uma variação bastante interessante e rica na aplicação de conceitos do Ensino Fundamental II, o Cálculo Algébrico. Ao calcular a área e o perímetro da figura em função das medidas a e b, o aluno estará aplicando as Operações com Polinômios de forma agradável e deve ser estimulado a desenvolver estratégias que possibilitem alcançar os resultados da maneira mais conveniente, o que facilitará os seus cálculos. Para isto, terá que aplicar os princípios de decomposição e simetria estudados.
- Ainda para o Fundamental II, pode-se sugerir a construção da figura em papel, decorando-a e fazendo recortes nas laterais, após dobrar ao meio. Pela simetria da figura, fazendo iterações desta ação, surgirá uma figura tridimensional muito bonita, como se fossem cubos com arestas decrescentes sobrepostas, na qual ainda podem-se explorar outros tipos de cálculos algébricos. Esta é uma atividade estimulante e atrativa, que tanto contempla a aplicação de conteúdos importantes e puramente abstratos, como tem um caráter lúdico, agradável.

### 3.4 Problema 4

Considere o quadrado  $ABCD$  de lado  $a$  e a figura  $EFGH$ , formada pelos arcos de raio  $a$  e centros nos vértices do quadrado. Determine a área da região  $EFGH$ , limitada pela interseção desses arcos.



**Resolução:** Observemos que a área  $S$  da região  $EFGH$ , por decomposição, é igual à área do quadrado  $EFGH$  somada à área dos quatro segmentos circulares  $EF$ ,  $FG$ ,  $GH$  e  $EH$  e que, por simetria, a área dos quatro segmentos circulares são iguais. Sejam  $S_1$  a área do quadrado  $EFGH$ , cujos vértices são os pontos de interseção dos arcos e  $S_2$  a área do segmento circular  $EH$ . Então,  $S = S_1 + 4S_2$ . Temos que o arco  $EH$  é a terça parte do arco  $DB$ , pois  $AHD$  são vértices de um triângulo equilátero, logo o ângulo  $H\hat{A}B = 30^\circ$ . Analogamente,  $A\hat{E}D = 30^\circ$ . Então,  $E\hat{A}H = 30^\circ$ . O triângulo  $EAH$  é isósceles de base  $EH$ , cujos lados medem  $a$ . Para determinarmos a área  $S_1$ , devemos calcular a medida da base  $EH$  do triângulo  $EAH$ . Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$S_1 = EH^2 = 2a_2 - 2a_2 \cos 30^\circ = 2a_2 \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right).$$

Daí,

$$S_1 = a_2(2 - \sqrt{3}).$$

Para calcular  $S_2$ , devemos calcular a área do segmento circular  $EH$ :

$$S_2 = \frac{a_2}{2} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Mas,  $S = S_1 + 4S_2$ . Logo,

$$S = \frac{\pi + (1 - \sqrt{3})}{3}.$$

**Comentários:** Observemos que para calcularmos a área da figura, além da decomposição, aplicamos o princípio da simetria.

A resolução do problema, aparentemente, depende apenas de conhecimento dos conceitos da geometria. Mas, mostra-se uma interessante aplicação da lei dos cossenos, que faz parte da trigonometria.

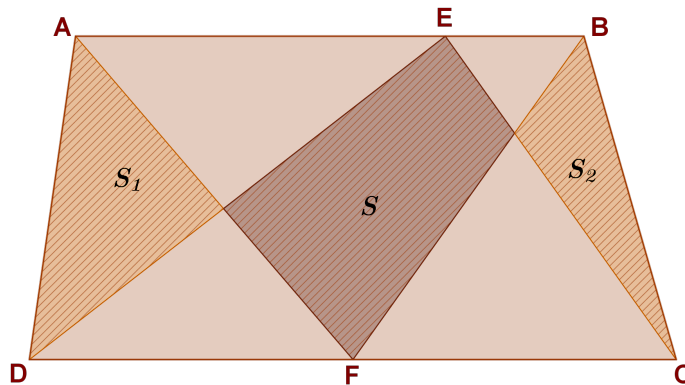
Também, pode-se sugerir aos alunos a sua construção no *GeoGebra*, que é bastante simples. Nela, podem comprovar algumas propriedades da figura e alguns dos resultados obtidos, além de explorar outras relações, fazendo algumas variações.

**Sugestões:**

- Solicitar apenas a área do quadrado  $EFGH$ , dado algum valor numérico para o lado  $a$ .
- Solicitar a razão entre as áreas dos quadrados.
- A construção da figura no *GeoGebra*, em ambos os casos, é interessante para que seja feita uma comprovação dos resultados obtidos, fazendo variar a medida do lado do quadrado.

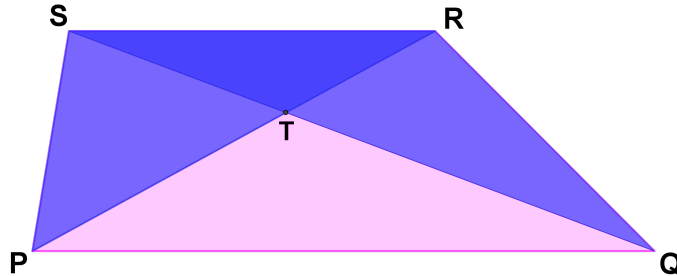
### 3.5 Problema 5

Na figura, o lado  $AB$  é paralelo ao lado  $CD$ . Determine a relação entre as áreas  $S$ ,  $S_1$  e  $S_2$ .



**Resolução:** Sendo os lados  $AB$  e  $CD$  paralelos, temos que a figura é um trapézio. Ao traçarmos o segmento  $EF$ , podemos observar que teremos dois trapézios,  $AEFD$  e  $EBCF$ , o que divide  $ABCD$  em duas partes e, conseqüentemente, também a região cuja área é  $S$ .

Sabemos que, em um paralelogramo qualquer, ao traçarmos as diagonais, obtemos triângulos laterais de mesmas áreas, como no exemplo.



No trapézio  $PQRS$ , temos que os triângulos  $PRS$  e  $QRS$  têm a mesma área, pois possuem a mesma base,  $RS$ , e a mesma altura, altura do trapézio. Como a região triangular  $RST$  é comum aos dois triângulos, concluímos que as áreas  $SPT$  e  $RTQ$  são iguais. Daí, podemos inferir que, na figura  $ABCD$ , a área  $S$  será igual à soma destas partes cujas medidas são iguais à  $S_1$  e a  $S_2$ .

Portanto, a área  $S$  é igual à soma das áreas  $S_1$  e  $S_2$ , ou seja,  $S = S_1 + S_2$ .

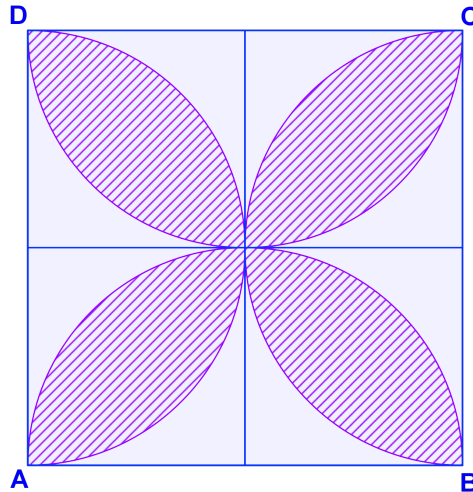
**Comentários:** Este é um problema simples, no qual foi aplicado apenas o princípio da decomposição para a sua resolução. Depende apenas da percepção do fato de que ao decompor em dois outros trapézios, podemos aplicar a propriedade que Euclides nos traz em os Elementos, a respeito de triângulos com bases iguais e mesmas alturas.

**Sugestão:**

- Pode-se aplicar tanto no Ensino Fundamental, como no Médio.
- É bastante interessante se comprovar a solução a partir da construção no *GeoGebra*, modificando dinamicamente a figura.

### 3.6 Problema 6

Na figura formada por um quadrado de lado  $a$  e semicírculos de raio igual à metade do lado desse quadrado, determine a área da região assinalada.



**Resolução:** Observando a figura, podemos perceber que, pelas suas simetrias, cada “pétala” é composta por partes iguais que são segmentos circulares. Portanto, podemos aplicar o Princípio da simetria, tomando o segmento como região fundamental. Assim, a área da figura corresponde a oito vezes a medida do segmento determinado por um ângulo reto, cujo raio é a metade do lado do quadrado.

$$\text{Daí, } A = 8 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{a^2(\pi - 2)}{2}$$

Outra solução, também simples e utilizando os mesmos princípios, consiste em observar que a área que se quer calcular corresponde ao dobro da área limitada por um círculo de raio  $\frac{a}{2}$  e um quadrado de lado  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Comentários: O problema fica bastante simples e de fácil solução quando se aplicam de imediato os Princípios de Simetria e de Decomposição.

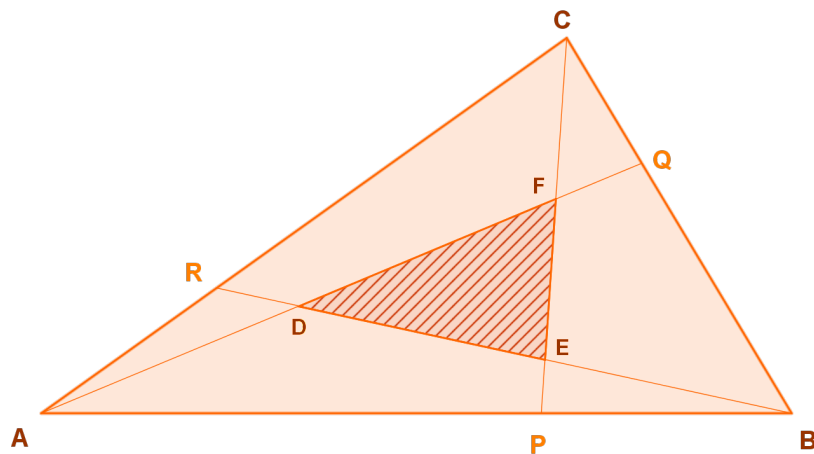
Nota-se, em problemas desta natureza, a importância da compreensão e da percepção dos alunos, em qualquer nível, do conceito de simetria.

**Sugestões:**

- Mais uma vez, é muito importante que a figura seja construída no *GeoGebra* e, através das transformações (reflexão e rotação), os alunos possam comprovar as isometrias, o que possibilita uma fácil e imediata resolução.
- Também é recomendável para ser aplicada no Ensino Médio ou no Fundamental.

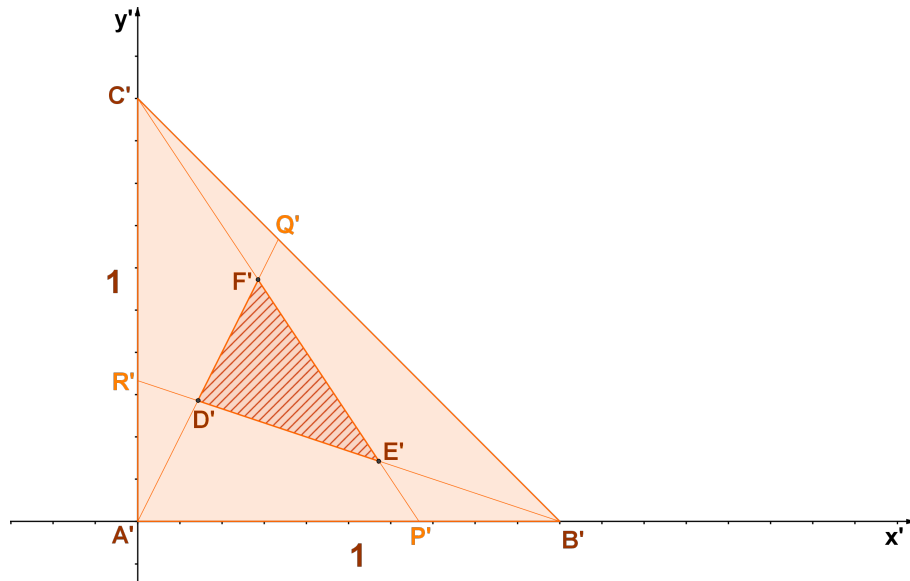
**3.7 Problema 7**

Na figura, temos que os segmentos  $BP$ ,  $CQ$  e  $AR$  correspondem à terça parte, respectivamente, dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  do triângulo  $ABC$ . Determine a razão entre as áreas do triângulo  $DEF(S_1)$ , formado pelos pontos de interseção entre as retas  $AQ$ ,  $CP$  e  $BR$ , e do triângulo  $ABC(S_2)$ .



**Resolução:** Facilmente resolvemos este problema se conhecermos as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $E$ ,  $D$ ,  $F$ , utilizando o determinante formado por elas. O fato é que não possuímos dados suficientes para representarmos imediatamente o triângulo  $ABC$  em um sistema de coordenadas para fazermos este cálculo. Assim, utilizamos um recurso muito útil neste caso, que é a transformação afim, que preserva a razão entre as áreas dos triângulos, portanto preserva também a razão entre as medidas de dois segmentos. Analisaremos a situação em outro sistema, utilizando, de forma conveniente, um triângulo  $A'B'C'$  retângulo e isósceles com catetos medindo uma unidade, conforme a figura.





Assim, é imediato que a área do triângulo  $A'B'C'$  é igual a  $\frac{1}{2}$  e as coordenadas dos pontos  $P'$ ,  $Q'$  e  $R'$  são, respectivamente,  $(\frac{2}{3}, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  e, por semelhança de triângulos,  $(0, \frac{1}{3})$ . Daí, fazendo a interseção entre as retas  $a : A'Q'$ ,  $b : P'C'$  e  $c : B'R'$ , cujas equações são, respectivamente,  $a : y = 2x$ ,  $b : y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$  e  $c : y = -\frac{3x}{2} + 1$  temos:

$$a \cap b : D' = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

$$a \cap c : F' = \left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$$

$$b \cap c : E' = \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

Então, a área do triângulo  $D'E'F'$  corresponde à metade do módulo do determinante formado pelas coordenadas destes pontos, ou seja:  $S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{14}$  e  $S_2 = \frac{1}{2}$ . Portanto, a razão pedida é  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{7}$ .

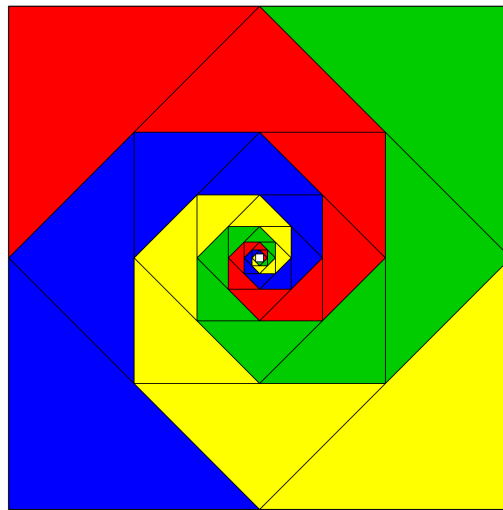
**Comentários:** Este não é um problema que possamos classificar como simples. Observamos que, ao resolvermos o problema de acordo com esta proposta, utilizamos o princípio da invariância afim, evitando assim a necessidade de uma maior acuidade na percepção geométrica que o problema exige e que, frequentemente, é um entrave para alguns alunos. Em seguida, como é o nosso objetivo, pudemos aplicar dois outros conteúdos do Ensino Médio, a geometria analítica e o cálculo de determinantes para a área.

**Sugestões:**

- É interessante que a resolução do problema seja apresentada nas duas possíveis e distintas maneiras, o que certamente enriquecerá muito o aprendizado por parte do aluno.
- Esta é uma questão clássica, presente em algumas publicações, como a apostila do professor Eduardo Wagner, trabalhada geralmente num nível de maior exigência, como em Olimpíadas.

**3.8 Problema 8**

Determine a medida da área da espiral formada pelos infinitos triângulos azuis, na figura abaixo, sabendo que o quadrado tem lado  $a$ .



**Resolução:** Observemos que as espirais de infinitos triângulos coloridos encaixados exaurem o quadrado interiormente. Assim, sabemos que a soma das suas áreas formam seqüências, cujo limite corresponde à área do quadrado. Portanto, pelo princípio da exaustão, temos que a área pedida é igual à quarta parte da área do quadrado. Ou seja:

$$A = \frac{a^2}{4}$$

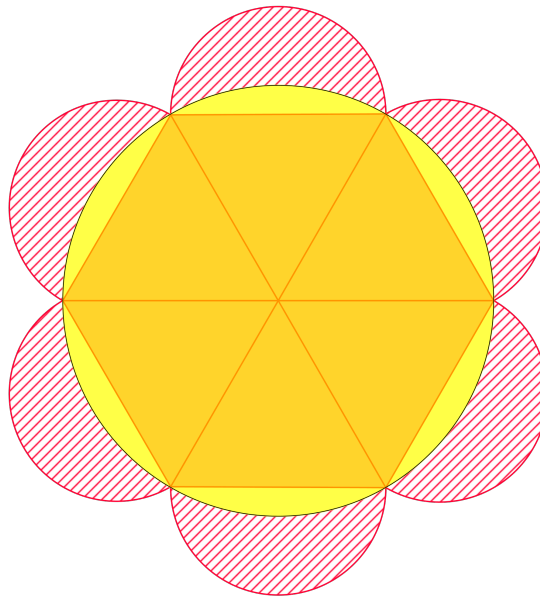
**Comentários:** Aplicando o princípio da exaustão estudado, a solução para o problema foi bastante simplificada, sem a necessidade de cálculos. Este é um exemplo da aplicação de conceitos de forma bastante agradável, atrativa e que, ao mesmo tempo, requer percepção e conhecimento mais aprofundado para argumentações que respaldem a sua simples solução.

**Sugestões:**

- Pode-se sugerir que utilize a soma dos infinitos termos de uma P.G. de razão entre 0 e 1, já que é possível se determinar a razão entre as áreas dos triângulo a partir da simetria da figura.

### 3.9 Problema 9

Determine a área da região assinalada na figura.



**Resolução:** Pelos princípios da decomposição e simetria, temos que a área pedida ( $S$ ) é igual a seis vezes a área de uma luna ( $A_L$ ) limitada por uma semicirculo ( $A_1$ ) de raio  $\frac{R}{2}$  e o segmento circular ( $A_2$ ) de raio  $R$  e ângulo de  $60^\circ$ , já que é ângulo central de um hexágono inscrito em um círculo. O que nos permite chamar a área de uma luna de região fundamental da figura cuja área é  $S$ . Daí, temos que:

$$A_L = \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \pi}{2} - \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{R^2 \pi}{8} - \frac{R^2}{12} (2\pi - 3) = \frac{R^2}{24} (1 - \pi)$$

Logo,

$$S = \frac{R^2}{4}(1 - \pi)$$

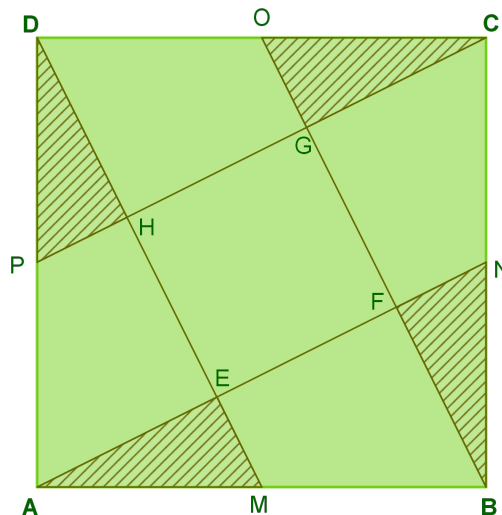
**Comentários:** Neste caso, aplicamos os princípios da decomposição e da simetria para simplificar o cálculo da área  $S$ , formada por seis lunas simples e iguais.

**Sugestões:**

- Esta figura é interessante que seja construída pelos alunos no *GeoGebra*, a menos da região hachurada.

### 3.10 Problema 10

Calcule a área assinalada na figura, sabendo que o quadrado possui lado  $a$  e os pontos  $P$ ,  $M$ ,  $N$  e  $O$  são, respectivamente, pontos médios dos lados  $AD$ ,  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$  do quadrado.



**Resolução:** Temos que a região assinalada é formada por quatro triângulos iguais, por simetria (rotação de  $90^\circ$ ). Portanto, podemos utilizar um deles como região fundamental ( $S_0$ ). Tomemos o triângulo  $AEM$ .

Observemos que o triângulo  $AEM$  e o triângulo  $ABN$  são semelhantes (e retângulos), pois o ângulo  $EAM$  é comum e os ângulos  $AME$  e  $BNF$  são iguais pela simetria dos triângulos

*AME* e *BNF*.

Por Pitágoras, a razão de semelhança  $r$  é:

$$r = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Pelo princípio da proporcionalidade, a área do triângulo *AME* é um quinto da área do triângulo *ABN*. Como *BN* é metade de  $BC=a$ , temos que a área de *ABN* é a quarta parte da área do quadrado,  $a^2$ .

Daí,

$$S_0 = \frac{a^2}{20}$$

Logo, a área pedida é:

$$S = 4S_0 = \frac{a^2}{5}$$

**Comentários:** Neste caso, aplicamos os princípios da decomposição, da simetria e da proporcionalidade.

Aparentemente a questão é simples, mas requer bastante segurança e percepção quanto a estes princípios.

**Sugestões:**

- Uma variação possível para o problema é solicitar a área do quadrilátero formado no centro da figura.

# Considerações Finais

A proposta apresentada foi construída a partir de um panorama dos fatos mais relevantes da História da Matemática que se referem ao cálculo de áreas, no primeiro capítulo, que serviram de ponto de partida para a elaboração e organização de alguns conceitos que muitas vezes não são do conhecimento de alguns professores que atuam na Educação Básica, na disciplina de Matemática. No segundo capítulo, fazemos uma abordagem matemática mais formal, embora numa versão mais simplificada, que pode ser trabalhada com os alunos desse segmento ou servir de apoio aos professores. Além disto, acreditamos que tenhamos contemplado o nosso objetivo que é o de colaborar para que esta teoria seja utilizada de forma atrativa como as figuras apresentadas e propostas para construção no software *GeoGebra*, presentes nos problemas resolvidos no terceiro capítulo, e que servem como meio para que a contextualização de alguns conteúdos matemáticos possa se dar também em elementos dentro da própria Matemática e que fazem parte do contexto dos alunos. Para que possam enriquecer as aulas de Matemática na aplicação de conceitos de maneira estimulante e agradável, mas com toda uma teoria solidamente construída como alicerce.

# Referências Bibliográficas

ÁVILA, G. Euclides, Geometria e Fundamentos. Rio de Janeiro, 2001. Revista do Professor de Matemática (RPM) N° 45: Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/conheca/45/1/euclides.htm>. Acesso em: 07/01/2013.

BARBOSA, J.L.M. Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro-RJ: Coleção do Professor de Matemática-Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.161 p.

BARBOSA, R. M. Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2002. Coleção Tendências em Educação Matemática.

BOLTIANSKI, V. G. Figuras equivalentes y equicompuestas. Editora MIR, Moscou, 1981.

BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Bencher Ltda, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio)- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília-DF: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília-DF: MEC – Secretaria de Educação Básica, 2006.

CABRAL, M. A. P. Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue. Rio de Janeiro-RJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. Geometria Plana. 4ª Edição. São Paulo-SP: Atual Editora, 1977. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9.326 P.

GASPAR, J. C. G. Áreas e volumes de corpos redondos na educação básica – Monografia – Niterói-RJ, 2005. [http://www.professores.uff.br/wmrezende/uploads/Monografia\\_Verso\\_Final.pdf](http://www.professores.uff.br/wmrezende/uploads/Monografia_Verso_Final.pdf)

LIMA, E. L. Matemática e Ensino. 3ª Edição. Rio de Janeiro-RJ: Coleção do Professor de Matemática-Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

MOISE, E.E. Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. Addison- Wesley, 1990.

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. Tópicos de História da Matemática. Rio de Janeiro-RJ: Coleção PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

ROSENFELD, J. Fermat's Integration Technique, 2012. <http://www.math.ufl.edu/~joelar/FermatsIntegration.pdf>. Acesso em 26/03/2013.

WAGNER, E. Teorema de Pitágoras e Áreas [http://miltonborba.org/OBMEP/APOST\\_6-Pitag\\_Areas.pdf](http://miltonborba.org/OBMEP/APOST_6-Pitag_Areas.pdf). Acesso em: 10/03/2013.

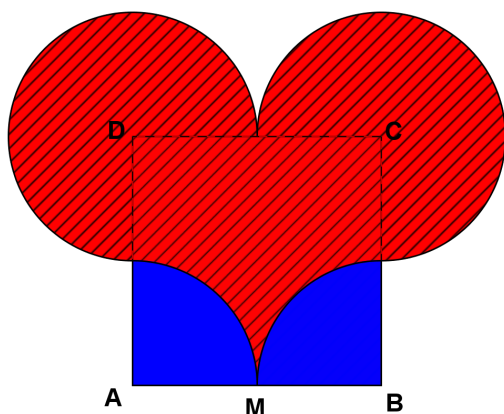


# Apêndices

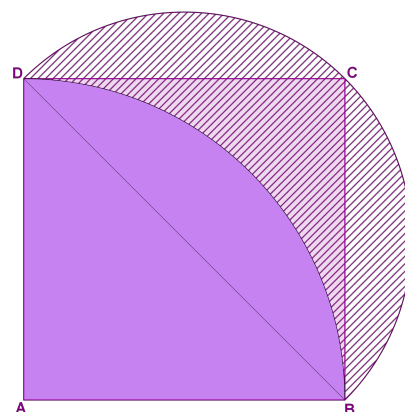
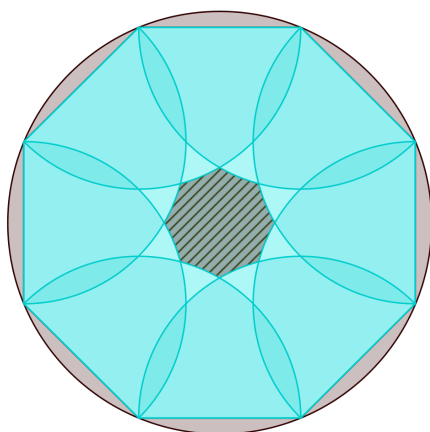
## PROBLEMAS PROPOSTOS

Para as seguintes questões, utilize os princípios estudados para o cálculo das áreas da regiões hachuradas (assinaladas).

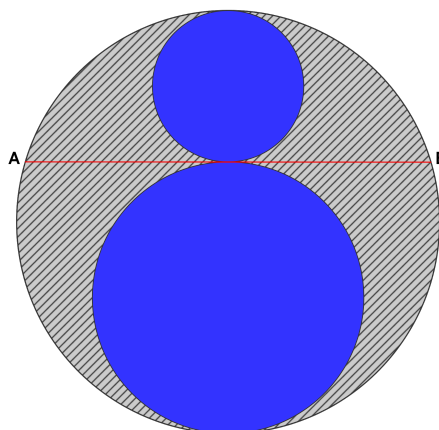
1. Determine a área hachurada da figura, sabendo que a medida do lado AB do quadrado é  $a$ .
3. Determine a área da luna BCD, em função do lado  $a$  do quadrado ABCD.



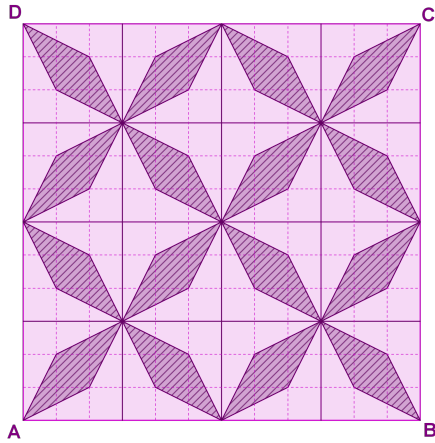
2. Calcule a medida da área hachurada, sabendo que o lado do octógono mede  $a$ .



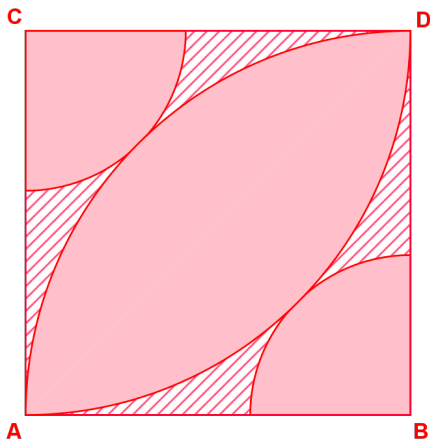
4. Determine a medida da área hachurada na figura em função do raio  $r$  do círculo maior e da medida  $t$  de AB, tangente aos dois círculos menores.



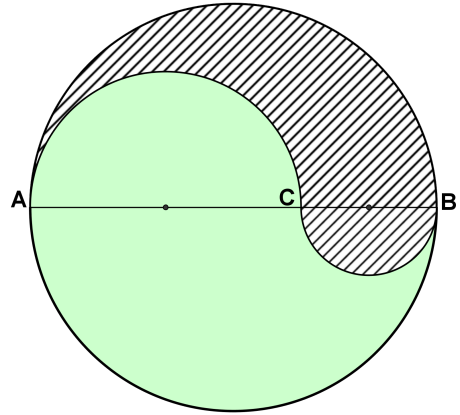
5. Na figura, calcule a área da parte hachurada em função do lado  $a$  do quadrado ABCD.



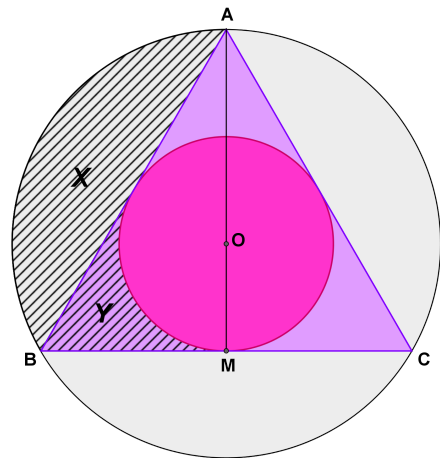
6. Calcule a medida da área hachurada, sabendo que a medida do lado do quadrado ABCD é  $a$ .



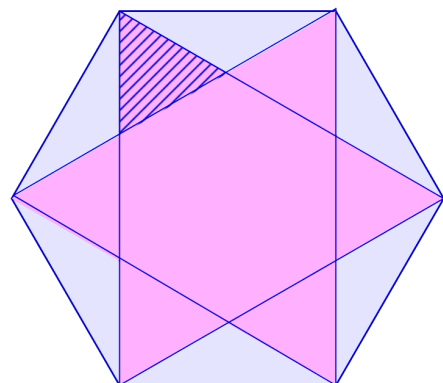
7. Na figura, CB é a terça parte de AB. Determine a área da parte hachura em função de AB.



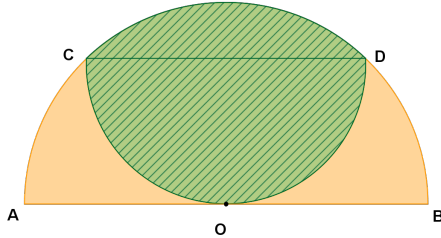
8. Qual a medida da área hachurada  $X+Y$ , em função de AB?



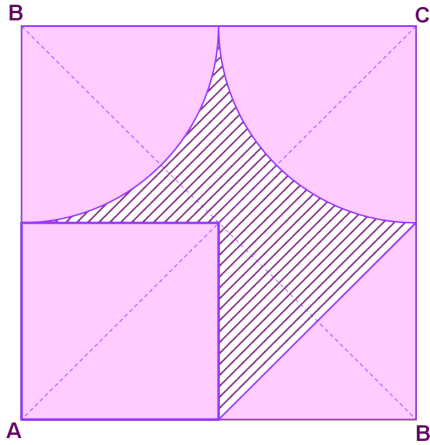
9. Calcule a área hachurada, sendo o hexágono regular cujo lado mede  $a$ .



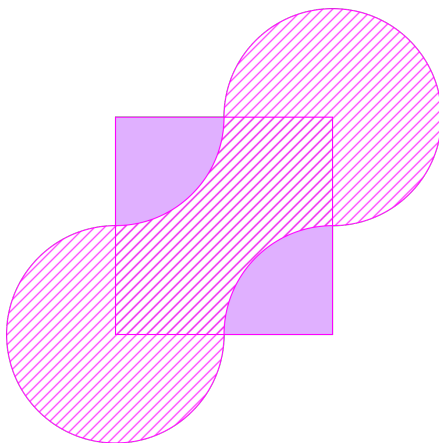
10. Determine a área hachurada em função do raio  $R$  do semicírculo  $AB$ .



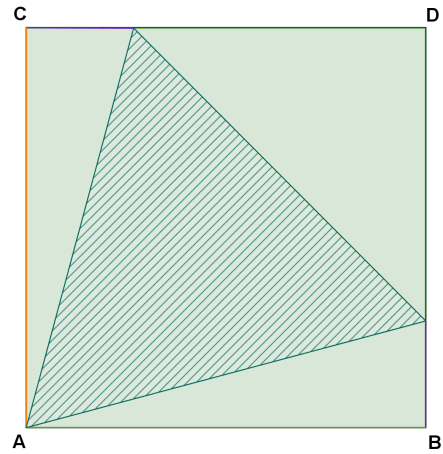
11. Calcule a medida da área hachurada, sendo  $ABCD$  um quadrado de lado medindo  $a$  e as demais figuras construídas a partir dos seus pontos médios.



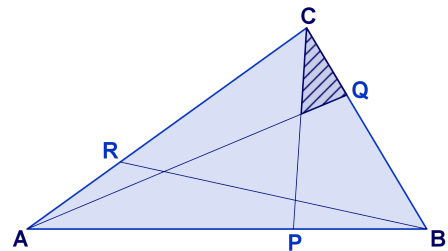
12. Calcule a área hachurada, sendo a medida do lado do quadrado igual a  $a$ .



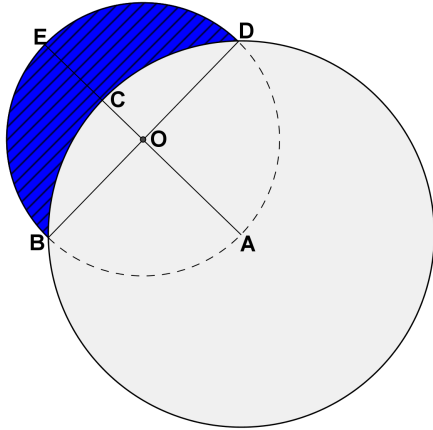
13. Qual a área do triângulo hachurado, que possui um dos vértices coincidindo com o vértice  $A$  do quadrado e os outros dois vértices determinam, com os pontos  $B$  e  $C$ , segmentos que são a quarta parte do lado  $a$  do quadrado?



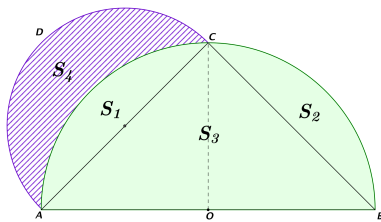
14. Calcule a razão entre a área hachurada ( $S_1$ ) e a área do triângulo  $ABC$  ( $S_2$ ), sendo os segmentos  $AR$ ,  $PB$  e  $CQ$  iguais à terça parte dos segmentos  $AC$ ,  $AB$  e  $BC$ , respectivamente.



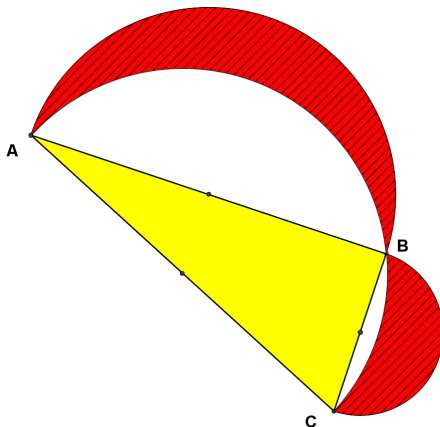
15. Calcule a área hachurada (luna BED) em função do raio AB do círculo maior.



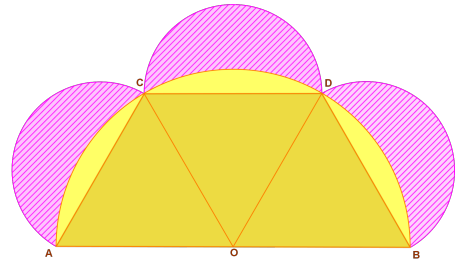
16. Mostre que a área da luna,  $S_4$  é igual a área do triângulo AOC.



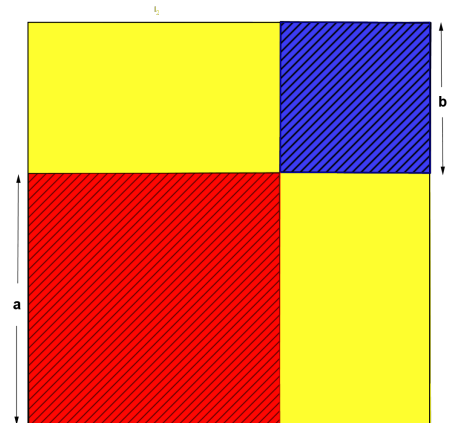
17. Mostre que a soma das áreas das lunas (formadas pelos arcos cujos centros são pontos médios dos lados do triângulo ABC, retângulo em B) é igual a área desse triângulo.



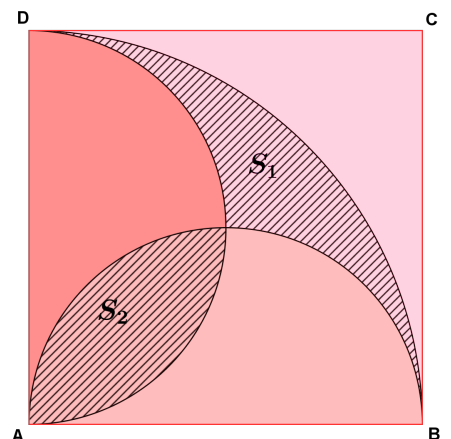
18. Determine a área das lunas formadas pelo semicírculo maior, de centro O, e os semicírculos de centros nos pontos médios dos triângulos equiláteros congruentes.



19. Demonstre, através da figura, o produto notável: quadrado da soma de dois termos.



20. Na figura, prove que a área  $S_1$  é igual a área  $S_2$ , sendo ABCD um quadrado.



## RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

1.  $\frac{5}{4}a^2\pi$
2.  $\frac{a^2}{3}(6(\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1) - \pi)$
3.  $\frac{a^2}{4}(2 - \pi)$
4.  $\frac{t^2}{8}\pi$
5.  $\frac{a^2}{3}$
6.  $\frac{a^2\pi}{2}(\sqrt{2} - 1)$
7.  $\frac{AB^2}{6}\pi$
8.  $\frac{7}{36}a^2\pi$
9.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$
10.  $\frac{R^2}{2}(\pi - 1)$
11.  $\frac{a^2(5 - \pi)}{8}$
12.  $\frac{5}{4}a^2\pi$
13.  $\frac{15}{32}a^2$
14.  $\frac{1}{21}$
15.  $\frac{AB^2}{2}$
16. Mostre que  $S_1 = S_2$ .
17. Use a decomposição e o teorema de Pitágoras.
18.  $\frac{AO^2}{8}(1 - \pi)$
19. Calcule a área de duas formas distintas.
20. Trace um quadrado na interseção das duas semicircunferências.