Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciência
Instituto de Matemática e Estatística

Leandro Borges Salgado Teixeira

O Infinito Matemático

Rio de Janeiro
2016

Leandro Borges Salgado Teixeira

O Infinito Matemático

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof[a]. Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros

Rio de Janeiro

2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

T266 Teixeira, Leandro Borges Salgado
O infinito matemático / Leandro Borges Salgado Teixeira. – 2016.
72f.: il.

Orientador: Jeanne Denise Bezerra de Barros
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Infinito - Teses. 2. Matemática - Filosofia - Teses. 3. Matemática - Estudo e ensino - Rio de Janeiro (Estado) - Teses. I.Barros, Jeanne Denise Bezerra de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 510.21(815.3)

Assinatura　　　　　　　　　　　　Data

Leandro Borges Salgado Teixeira

O Infinito Matemático

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 26 de agosto de 2016.

Banca Examinadora:

Profª. Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar Costa
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Profª. Dra. Margareth da Silva Alves
Universidade Federal de Viçosa - UFV

Rio de Janeiro
2016

AGRADECIMENTOS

Durante dois anos dedicados ao mestrado, enfrentei momentos difíceis e superá-los só foi possível com o apoio de muitas pessoas que contribuíram para a realização deste projeto, não sendo possível destacar todas, seja pela delimitação do espaço, seja pela memória.

Meu especial agradecimento à minha família por todo o apoio, em especial minha filha, Maria Fernanda, que sempre me inspira a algo bom e a minha esposa Priscila Borges, sem a qual os desafios e obstáculos teriam sido ainda maiores.

Aos professores do PROFMAT e a coordenação pela orientação e atenção dispensadas nessa trajetória.

À minha professora orientadora Dra. Jeanne Barros pela generosidade em compartilhar o conhecimento.

Aos meus amigos, que sempre me incentivaram, em especial a professora Vânia Fernandes por todo o apoio nos momentos complicados e a Sonia Maria pelo suporte, apesar das dificuldades.

Aos meus colegas de turma, em particular, Chamon, Darlan, Jocemar, Marcio e Silvia por todo o companheirismo.

Por fim, agradeço a Deus por me proporcionar toda essa experiência.

Ninguém poderá nos expulsar do Paraíso que Cantor criou.

David Hilbert (1862-1943)

RESUMO

TEIXEIRA, Leandro Borges Salgado. *O Infinito Matemático*. 2016. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

O objetivo desta dissertação consiste na elaboração de ferramentas pedagógicas que possam fornecer suporte teórico ao professor de matemático no que se refere ao conceito de infinito, bem como na elaboração de atividades voltadas a facilitar a compreensão do aluno no tema. Para tanto, o trabalho se concentra na sistematização do conceito infinito, buscando suporte teórico nos autores Boyer (1996), Aczel (2003) e Eves (2004) o que permitiu construir a trajetória de matemáticos expoentes no conceito supracitado, evidenciando suas principais contribuições. Assim, foi possível elaborar um material teórico para os docentes a fim de sanar suas principais dúvidas quanto ao tema. Ademais, foram desenvolvidos dois questionários e duas atividades para atender às demandas tanto dos discentes, quanto dos docentes. Para os alunos, a atividade permite facilitar a compreensão do assunto tratado. Para os professores, ela representa não só uma ferramenta pedagógica para auxiliar seu trabalho, como também permite o diagnóstico de possíveis deficiências no aprendizado do educando, o que pôde ser concluído a partir da análise dos resultados obtidos com a aplicação desses instrumentos em quatro turmas de duas escolas municipais, uma no Rio de Janeiro e outra em Duque de Caxias, no ano de 2015.

Palavras-chave: Cantor. Matemática. Infinito. Ferramentas Pedagógicas.

ABSTRACT

TEIXEIRA, Leandro Borges Salgado. *The Mathematical Infinity.* 2016. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

The aim of this work is the development of educational tools that can provide theoretical support to the math teacher in relation to the concept of infinity, as well as in the development of activities aimed at facilitating student understanding in the subject. Therefore, the work focuses on the systematization of the infinite concept, seeking theoretical support the authors Boyer (1996), Aczel (2003) and Eves (2004) which allowed to build the trajectory of mathematicians exponents in the above concept, showing its main contributions. Thus, it was possible to develop a theoretical material for teachers in order to settle their main doubts on the subject. In addition, were developed two questionnaires and two activities to meet the demands of both, students and teachers. For students, the activity facilitates the understanding of the subject. For teachers, it is not only an educational tool to assist your work, but also allows the diagnosis of possible deficiencies in the student's learning, which might be concluded from the analysis of the results obtained from the application of these instruments into four groups of two public schools, one in Rio de Janeiro and another in Duque de Caxias, in the year 2015.

Keywords: Cantor. Mathematics. Infinity. Educational Tools.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao longo da história, o conceito de infinito tem trazido dificuldades aos estudiosos de todas as áreas. Muitas vezes estas dificuldades também são percebidas, especialmente, em sala de aula tanto nos docentes, quanto nos discentes.

Atuando durante 10 anos, como professor das redes públicas, dentre elas as redes municipais das cidades do Rio de Janeiro e de Duque de Caxias, observei alunos com dificuldades em assimilar alguns conceitos matemáticos mais abstratos, e o conceito de infinito, é um deles. Tais dificuldades acabavam também, prejudicando a compreensão de conteúdos que dependiam direta ou indiretamente deste conhecimento. Além disso, sentia a falta de um material didático de fácil acesso no qual pudesse encontrar, de forma resumida, informações a respeito do desenvolvimento das teorias ligadas ao infinito matemático e sua evolução ao longo da história. Observava também essa mesma demanda em outros professores.

Em razão disso, tenho idealizado, ao longo dos anos, a construção desses dois recursos didáticos a fim de suprir as necessidades do docente nos aspectos teóricos e práticos, tornando seu cotidiano mais produtivo. Assim, buscando preencher tais lacunas existentes na bibliografia disponível, desenvolvi este estudo que foi pensado justamente com o objetivo de trazer para o professor de matemática do ensino fundamental ferramentas para facilitar a compreensão do conceito de infinito por parte dos alunos, além de ser um material de consulta que pudesse suprir alguns dos questionamentos dos docentes, referentes ao infinito matemático tais como: de que forma se desenvolveu o conceito de infinito na matemática? De que maneira se deu a evolução da teoria e quais os resultados obtidos ao longo da história da humanidade?

Para tanto, busquei suporte teórico em autores expressivos na discussão do tema, dentre eles destaco Hrbacek e Jeck (1999), escritores de *Introduction to Set Theory*, que aborda além da teoria básica de conjuntos, os números transfinitos, foco da teoria desenvolvida por Cantor. No que se refere ao desenvolvimento histórico do conceito de infinito matemático, destaco Aczel (2003), que escreveu o livro *O mistério do Alef: a matemática, a cabala e a procura do infinito*, que também conta com detalhes toda a história do desenvolvimento da teoria dos números transfinitos e da hipótese do *continuum*, ambas propostas por Cantor.

No que se refere aos aspectos práticos, desenvolvi duas atividades voltadas à introdução do conceito de infinito em turmas dos anos finais do segundo segmento do ensino fundamental. Em uma das atividades os alunos são convidados a refletir sobre a cardinalidade de alguns conjuntos infinitos e seus subconjuntos infinitos. Na outra o foco são os infinitos números reais existentes entre dois números reais. Além disso, elaborei dois questionários para serem aplicados antes e depois das atividades. No primeiro questionário, procuro saber qual a percepção dos alunos em relação aos enfoques associados ao infinito matemático abordados nas atividades. No segundo questionário, busco avaliar o que foi compreendido pelos alunos após a aplicação das atividades, em comparação às percepções identificadas no primeiro questionário. Estas atividades, juntamente com os questionários, foram aplicadas em duas escolas municipais, para quatro turmas do oitavo ano, duas em Duque de Caxias e duas no Rio de Janeiro. Noventa e um alunos participaram das atividades, que ocorreram em dezembro de 2015. Por ser professor das duas redes e atuar como docente nas 4 turmas citadas, não encontrei dificuldade para realizar as atividades com os alunos.

A dissertação foi organizada em três capítulos que serão descritos a seguir:

No capítulo 1 são apresentados alguns matemáticos e filósofos que, de certa forma, contribuíram para o desenvolvimento do conceito de infinito matemático, na elaboração de novas teorias, propondo reflexões por meio de paradoxos ou solucionando problemas. Ademais, também são explorados aspectos da vida desses personagens históricos.

O capítulo 2 é voltado ao embasamento da teoria que é abordada no capítulo 1. São vistos alguns teoremas e definições ligados à teoria de conjuntos, mais precisamente conjuntos infinitos, cardinalidade e conjuntos enumeráveis. Neste capítulo também apresento ao leitor uma introdução à aritmética dos números transfinitos, esclarecendo os conceitos de infinito potencial e atual e a hipótese do *continuum*.

No capítulo 3 são apresentadas e aplicadas as duas atividades, que têm como objetivo facilitar a compreensão dos alunos a determinados aspectos relacionados à noção de infinito matemático. As atividades são detalhadas em todas as suas etapas, bem como sua aplicação é descrita em cada turma. Este capítulo se encerra com uma análise minuciosa dos resultados verificados durante a aplicação das atividades em cada turma das escolas municipais do Rio de Janeiro e de Duque de Caxias, confrontados com dados obtidos a partir de questionários respondidos pelos alunos antes e depois da aplicação das mesmas.

Nas considerações finais, são ressaltados os resultados obtidos nas turmas para as quais foram desenvolvidas as atividades, constatando que as atividades tanto podem funcionar como um instrumento pedagógico para facilitar a compreensão dos alunos no que diz respeito ao conceito de infinito, quanto podem servir como uma ferramenta de diagnóstico para ação docente.

É possível encontra parte do material utilizado como referência, bem como a apresentação desta pesquisa à banca examinadora, anexados ao texto escrito em formato digital (ANEXO DIGITAL).

1 MATEMÁTICOS E FILÓSOFOS ENVOLVIDOS NO ESTUDO DO INFINITO

A capacidade intelectual do indivíduo aliada à vontade de saber e investigar move a humanidade a caminhos inimagináveis em termos de desenvolvimento científico. Cada grande matemático ou filósofo, no seu tempo, limitados pelo desenvolvimento tecnológico da época, é parte integrante de um gigantesco quebra cabeças. A descoberta dos números irracionais, as discussões propostas pelos paradoxos relativos ao infinito, sua utilização como ferramenta para solucionar problemas do dia a dia mostraram a evolução indireta do conceito, mas que sem ela possivelmente as discussões diretas que moldaram o conceito e as teorias atuais do infinito matemático, essenciais para a evolução da humanidade, teriam seu desenvolvimento retardado.

Muitos foram os matemáticos que se dedicaram ao estudo do infinito, dentre eles destacam-se Pitágoras (572-500 a.C.), Zenão (viveu por volta de 450 a.C.), Arquimedes (287-212 a.C.), Galileu (1564-1642), Cantor (1845-1918), Russel (1872-1970), Gödel (1906-1978) e Cohen (1934-2007) que contribuíram significativamente para o desenvolvimento do tema. Pitágoras e seus discípulos descobriram os números irracionais, alterando tudo o que conheciam e pregavam naquela época. Zenão, ao propor uma série de paradoxos sobre o infinito, chamou a atenção e propôs a discussão do tema. Arquimedes desenvolveu ferramentas para calcular áreas de superfícies curvas, nas quais o conceito de infinito estava implícito. Galileu foi o primeiro matemático a flertar com o infinito atual ao mostrar que é possível fazer uma bijeção entre um conjunto infinito e um de seus subconjuntos infinitos. Cantor desenvolveu a revolucionária teoria dos números transfinitos e conjecturou a hipótese do *continuum*. Russell foi o responsável por um dos mais importantes paradoxos da teoria dos conjutos. Gödel e Cohen tiveram papel fundamental na conclusão da hipótese do *continuum*. As seções do capítulo 1 foram dedicadas à apresentação e contribuições dos matemáticos supracitados.

1.1 Pitágoras e a descoberta dos números irracionais

Para dissertar sobre Pitágoras, buscou-se suporte teórico em Boyer (1996), Aczel (2003) e Eves (2004).

Pitágoras foi um matemático e filósofo grego que teria nascido por volta de 572 a.C. na ilha de Samos. Seu nome sempre esteve envolto em lendas e misticismos, por isso pouco se sabe a seu respeito com um grau elevado de certeza. É provável que tenha morado um período no Egito e viajado a Babilônia e também a Índia. Nestas viagens teria acumulado grande conhecimento nas áreas de matemática e astronomia. Além disso,

Figura 1 - Escultura de Pitágoras exposta em um dos Museus Capitoline

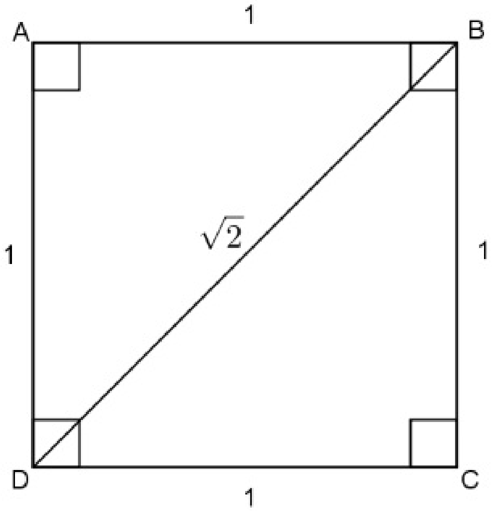
Fonte: Disponível em <http://www.museicapitolini.org/>. Acessado em 26/05/2016.

desenvolveu um grande conhecimento religioso. Ao retornar a Samos, Pitágoras a teria encontrado sob o domínio do tirano Polícrates, o que o fez abandoná-la e com isso se estabelecido em Crotona, uma colônia grega situada na Magna Grécia, o que hoje seria a costa sudeste da Itália. Foi em Crotona que Pitágoras fundou a escola pitagórica e teria morrido por volta de 500 a.C., em Metaponto.

A escola pitagórica era uma sociedade secreta dedicada ao estudo de matemática, filosofia e ciências naturais, mas também apresentava um cunho religioso. Ela seguia um código de conduta rígido e se assemelhava a um culto, com ritos e cerimônias. Seus discípulos, os pitagóricos, acreditavam em transmigração das almas. Para eles a alma de algum amigo falecido poderia estar em um animal, o que fazia com que não abatessem animais. Os pitagóricos também possuíam outras restrições alimentares como, por exemplo, a de comer feijão (ou lentilha).

Apesar de muitos resultados da época terem sido atribuídos a Pitágoras, os pitagóricos mantinham o conhecimento em comum, não sendo possível atribuir a um único indivíduo os resultados alcançados. Naquela época era muito comum dar os créditos de

Figura 2 - Quadrado de lado 1 e diagonal $\sqrt{2}$



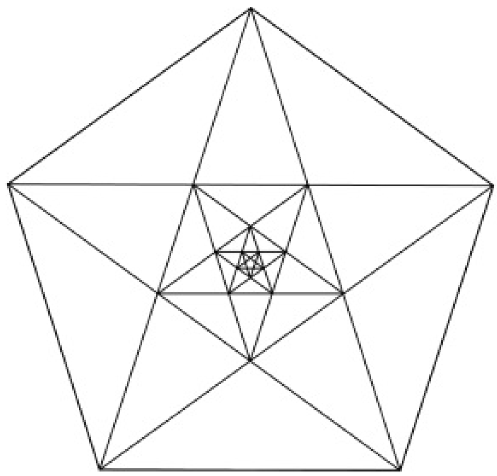
Fonte: O autor, 2016.

qualquer descoberta ao seu mestre. A filosofia pitagórica era baseada na premissa de que os números inteiros eram a base de tudo. Eles exaltavam as propriedades, os padrões e a aritmética dos números e sequências, chegando à conclusão de que o universo é regido por uma inteligência superior, de essência matemática. Para os pitagóricos Deus seria o grande arquiteto do universo.

Mesmo não sendo responsáveis pela sua origem, os pitagóricos levaram a adoração dos números a outro nível. Números como 1, 2, 3, 4 e 10 tinham significados especiais. O número 1, por exemplo, era tido como o gerador de todos os números. Alias, é por este motivo que podemos imaginar que os pitagóricos possuíam a noção de infinito, pois sempre é possível gerar um número maior apenas adicionando um. O número 2, além de primeiro número par, representava a opinião. O número 3, considerado o primeiro número ímpar verdadeiro representava a harmonia. O número 4, primeiro quadrado, representava a justiça. Porém o mais importante deles era o número 10. O 10 é um número triangular, é a soma dos números de 1 a 4, além de possuir o mesmo número de primos e não primos contidos nele e de ser o número de dedos das mãos. Conhecido por tetractys, o número 10 representava a perfeição, o número do universo.

Entretanto uma descoberta abalou toda a estrutura da escola pitagórica: os números irracionais. A descoberta dos números irracionais foi perturbadora para os pitagóricos, pois estes acreditavam que tudo dependia de números inteiros. Um número racional é o quociente $\frac{p}{q}$, q $\neq 0$, de dois números inteiros, o que não ocorre com os números irracionais. A descoberta teria ocorrido quando os pitagóricos não encontraram nenhum ponto P da reta que correspondesse a um número racional, quando o segmento OP é igual a diagonal

Figura 3 - Pentagrama utilizado pelos
Pitagóricos



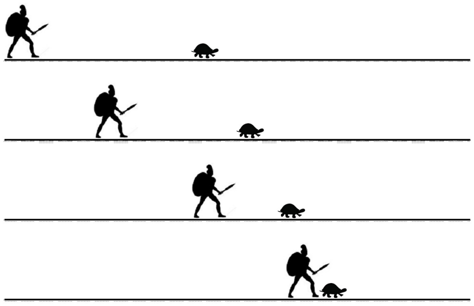
Fonte: O autor, 2016.

de um quadrado de lado 1. O valor encontrado $\sqrt{2}$ não pode ser representado como o quociente $\frac{p}{q}$, q $\neq 0$, de dois números inteiros. Por não ser racional, $\sqrt{2}$ foi chamado de irracional, que significa não racional (Fig. 2).

Os números irracionais possuem uma representação decimal infinita e não periódica. Segundo a lenda, Hipaso de Mataponto teria sido o responsável por revelar a estranhos a existência dos números irracionais. Ainda existem algumas lendas que relatam as consequências deste ato. Em uma delas Hipaso teria sido expulso da sociedade. Em outra Hipaso teria sido morto pelo próprio Pitágoras estrangulado ou afogado. Em uma terceira, Hipaso teria sido deixado à deriva em um barco que posteriormente foi afundado pelos próprios pitagóricos. Ainda existe outra versão onde Hipaso teria morrido de forma misteriosa e seu corpo enterrado em uma cova, escavada enquanto ainda estava vivo.

Outro fato interessante é que os pitagóricos portavam um símbolo: um pentágono regular com suas diagonais traçadas, formando uma estrela de cinco pontas, que continha outro pentágono regular, que com suas diagonais traçadas formava outra estrela de cinco pontas e assim por diante (Fig. 3). Em cada pentágono, uma diagonal divide outras duas em dois segmentos desiguais. A razão entre o comprimento do segmento maior e o comprimento do segmento menor é a razão aurea, um número irracional que corresponde ao limite infinito da razão de dois termos consecutivos da série de Fibonacci.

Figura 4 - Aquiles e a tartaruga



Fonte: O autor, 2016.

1.2 Zenão e os paradoxos sobre o infinito

Autores como Boyer (1996), Aczel (2003) e Eves (2004) foram referências bibliográficas para elaboração desta seção que destaca o Zenão.

Zenão de Eléia viveu por volta de 450 a.C.. Discípulo de Parmênides, ele e seu mestre defendiam a ideia de unicidade e imutabilidade do indivíduo. Para eles apenas o ser imutável era real. Estas ideias contrastavam com o pensamento de multiplicidade e mudança defendido por outra corrente filosófica, da qual fazia parte Heráclito. Para Heráclito tudo estava em contínuo movimento. Possivelmente para mostrar que os conceitos de multiplicidade e mudança, defendidos por Heráclito, eram inconsistentes Zenão propôs alguns paradoxos. Dentre eles, podemos destacar o de Aquiles.

O paradoxo de Aquiles (Fig. 4) refere-se a uma corrida entre Aquiles e uma tartaruga. Como Aquiles é sabidamente mais rápido que a tartaruga, é permitido que ela inicie a corrida com vantagem. Segundo Zenão, quando Aquiles alcançar o ponto de largada da tartaruga, a mesma não estará mais lá, pois terá avançado. Aquiles então irá percorrer essa nova distância e quando terminar a tartaruga terá avançado um pouco mais. Repetindo este processo infinitamente, Zenão conclui que Aquiles jamais conseguirá alcançar a tartaruga, argumentando que o movimento é uma ilusão e torna-se impossível quando admitimos que espaço e tempo possam ser subdivididos infinitamente.

Outros dois paradoxos enunciados por Zenão são o paradoxo da dicotomia e o paradoxo da flecha:

> *A Dicotomia*: Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível, pois para percorrê-lo é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se então que o movimento jamais começará. *A Flecha*: Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move. (EVES, 2004, p.418)

1.3 Arquimedes

As reflexões apresentadas nesta seção sobre Arquimedes tomaram como base os teóricos Boyer (1996), Aczel (2003), Eves (2004), Netz e Noel (2009), Roque e Carvalho (2012) e Mohnsam (2014).

Arquimedes (figura 5) foi um dos maiores, senão o maior matemático da antiguidade. Nascido em Siracusa, por volta de 287 a.C., é possível que tenha estudado por algum tempo em Alexandria e que tenha se correspondido com matemáticos de lá. Mas foi em Siracusa que viveu e passou praticamente toda a sua vida, até ser morto em 212 a.C. por um soldado romano.

No período de 218 a.C. a 202 a.C. ocorreu a segunda guerra púnica. O conflito tinha como oponentes Roma e Cartago. Ao declarar apoio a Cartago, Siracusa se vê envolvida nesta disputa e acaba sitiada pelos romanos. O sitio à Siracusa ocorre por volta de 214 a.C. a 202 a.C.. É neste período que Arquimedes desenvolve uma série de invenções que tinham como objetivo defender Siracusa dos ataques romanos. Nos muitos relatos históricos sobre estas invenções aparecem catapultas móveis de alcance ajustável, que tinham como alvo os navios romanos que estivessem muito próximos dos muros da cidade e grandes guindastes que teriam capacidade para içar estes navios. Alguns relatos também dão conta de que Arquimedes teria projetado grandes espelhos para incendiar os navios inimigos, porém não se pode afirmar que sejam verdadeiros. Uma das maiores obsessões de Arquimedes era medir objetos curvos, tema recorrente na maioria de seus trabalhos. É atrás dessa obsessão que surge uma de suas maiores contribuições no estudo do infinito.

Arquimedes adotou um método para calcular a área de um círculo. O método consistia em se desenhar polígonos inscritos e circunscritos a um círculo e calcular suas respectivas áreas (Fig. 6). Arquimedes inscrevia um quadrado, um octógono regular, e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de lados do polígono anterior. Da mesma maneira ele circunscrevia um quadrado, um octógono regular, e assim sucessivamente. Dessa maneira Arquimedes obtia como resultado, os limites inferior e superior para a área do círculo. Quanto maior o número de lados dos polígonos, maior era a precisão dos resultados encontrados. É neste ponto que Arquimedes aborda o conceito de infinito potencial, já que a área precisa seria alcançada ao se utilizar polígonos com infinitos lados. Se pensarmos o círculo como um polígono com infinitos lados, os limites inferior e superior tenderiam para o mesmo ponto, fazendo com que a diferença entre as áreas dos polígonos e a área do círculo tendesse a zero.

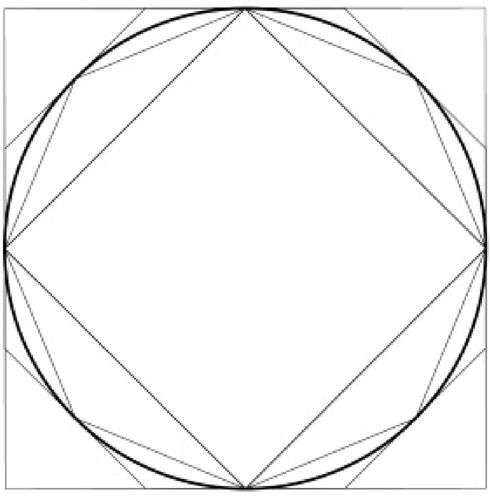
Utilizando-se de raciocínio parecido, Arquimedes conseguia calcular o valor aproximado de π.

> Para fazer isso, Arquimedes, inicialmente, inscreveu e circunscreveu hexágonos regulares em uma circunferência de círculo de raio 1. Em seguida, ele duplicou sucessivamente seus números de lados. Assim, ele

Figura 5 - Arquimedes de Siracusa

Fonte: Disponível em <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Archimedes1.jpg>. Acesso em 08/07/2016.

Figura 6 - Área do círculo



Fonte: O autor, 2016.

> inscreveu os polígonos regulares com $3 \times 2^{n-1}$ lados, cujos semiperímetros são b_n e circunscreveu polígonos regulares com $3 \times 2^{n-1}$, cujos perímetros são a_n. As sequencias b_n e a_n são respectivamente decrescentes e crescentes e temos que $b_n < 2\pi < a_n$ (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.149)

Arquimedes teria morrido por volta de 212 a.C.. Após dois anos de cerco, finalmente os romanos conseguiram passar pelas defesas de Siracusa. Nesta época, por conta de seus inventos para defender Siracusa, Arquimedes já era conhecido e até gozava de certo prestígio. Foi este prestígio que levou o general romano Marco Claudio Marcelo, responsável por liderar o cerco em Siracusa, a ordenar que se encontrado, o geômetra fosse levado até ele vivo. Segundo alguns relatos históricos, Arquimedes estaria sentado à praia, contemplando um diagrama, quando um soldado romano o viu e ordenou que se apresentasse ao general, o que foi prontamente recusado. O soldado teria ficado extremamente irritado com tal recusa, que na mesma hora atravessou Arquimedes com sua espada.

1.4 Galileu

Serviram como referências bibliográficas para a elaboração desta seção os autores Boyer (1996), Eves (2004), Aczel (2003) e Flood e Wilson (2013).

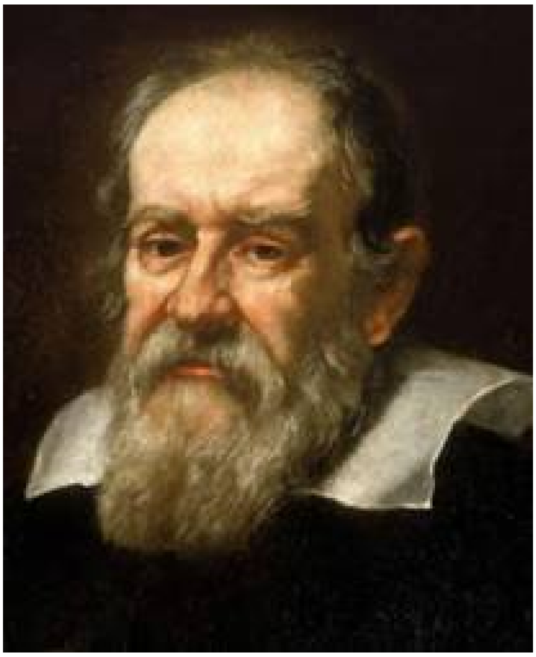
Galileu Galilei (Fig. 7) nasceu em 15 de fevereiro de 1564, dia da morte de Michelangelo, na cidade de Pisa. Foi lá onde passou a maior parte da infância até a família se mudar para Florença em 1574. Com 17 anos Galileu foi enviado à Universidade de Pisa para estudar medicina. Foi onde conheceu a matemática.

Enquanto assistia a uma cerimônia na Catedral de Pisa, desviou o olhar para um candelabro que oscilava acima dele. Usando sua pulsação Galileu mediu o ritmo do candelabro, ficando surpreso ao verificar que independente da amplitude, todas, tanto as oscilações mais longas, quando as oscilações mais curtas tinham a mesma duração. Foi a partir deste problema que Galileu passou a se interessar pela matemática. Seu fascínio foi tanto que chegou a contratar um professor particular para ensiná-lo. Por fim, após conhecer as obras de Euclides e Arquimedes, ficou tão maravilhado pelo mundo das equações e da geometria que acabou abandonando o curso de medicina.

Voltando para Florença, passou a se dedicar exclusivamente à ciência e à matemática. Aos 22 anos Galileu já tinha em seu currículo várias descobertas matemáticas e diversas invenções. Foi nessa época que publicou seu primeiro livro *A Pequena Balança*.

Com 25 anos, Galileu foi indicado para professor de matemática da Universidade de Pisa. Porém não passou muito tempo lá. Alguns professores se sentiram incomodados com as conclusões de alguns de seus experimentos, que eram contrários aos ensinamentos de Aristóteles, e acabaram forçando sua renúncia ao cargo em 1591. Pouco tempo depois, Galileu aceitou uma cadeira na Universidade de Pádua, perto de Veneza, onde permaneceu

Figura 7 - Galileu Galilei



Fonte: Disponível em <http://www.sohistoria.com.br/biografias/galileu/>. Acesso em 08/07/2016.

por quase 18 anos.

Por volta de 1609, Galileu ficou sabendo da invenção de uns óculos de longo alcance (que mais tarde viria a se chamar telescópio), que seria apresentado em Veneza. Galileu, então, propôs a si mesmo construir outro muito melhor. Em 21 de agosto de 1609, Galileu fez a demonstração de seu telescópio. Do alto da igreja mais alta da cidade os senadores venezianos puderam ver com precisão as velas de um navio que estava a duas horas de poder ser visto a olho nu. Logo os venezianos reconheceram as possibilidades militares desse instrumento. Galileu vendeu vários telescópios, o que aumentou consideravelmente seu prestígio e sua renda.

Foi com um de seus telescópios que Galileu começou a observar o céu. Em suas observações pôde verificar a existência de corpos celestes pequenos orbitando corpos celestes maiores, comprovando a teoria de Nicolau Copérnico (1497-1543)[1]. Porém isso acabou motivando a oposição de várias pessoas da igreja que defendiam as ideias de Aristóteles, para quem a Terra é o centro do universo.

[1] Nicolau Copérnico foi um astrônomo polonês que viveu durante o século XVI. Sua teoria sobre corpos celestes defendia que o Sol era o centro do Universo e que todos os astros celestes, inclusive a Terra, orbitavam-no. Suas ideias se contrapunham ao pensamento da Igreja Católica, que defendia a Terra como centro do Universo.

Pouco tempo depois, Galileu retornou para Florença, onde foi nomeado filósofo e matemático do Grão-duque pelo próprio Grão-duque, Cosme II de Medéa.

Em 1629 Galileu lançou o livro: *Diálogo Sobre os Dois Maiores Sistemas do Mundo*. Nele Galileu defendia as teorias de Copérnico por meio do diálogo entre três pessoas. Uma delas se chamava Salvati, que defendia as ideias de Copérnico e apresentava a opinião de Galileu, outra se chamava Sagredo, um leigo que buscava a verdade e a última se chamava Simplício, o simplório, que defendia as ideias da Igreja. Logo após lançar *Diálogo Sobre os Dois Maiores Sistemas do Mundo*, Galileu foi intimado a comparecer perante a inquisição. Lá, foi forçado, sob ameaça de tortura, a repudiar suas descobertas científicas. Com isso, sua pena, que seria a morte, foi convertida em prisão domiciliar pelo resto da vida.

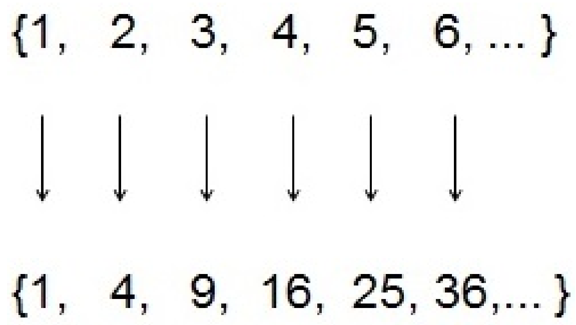
Foi justamente durante o período que ficou em prisão domiciliar que Galileu desenvolveu importantes ideias em relação ao infinito. Em seu tratado *Diálogos Sobre Duas Novas Ciências*, publicado em 1638, Galileu aborda diversos aspectos do infinito, novamente através do diálogo entre Salvati e Simplício, o simplório. Galileu, por meio de Salvati, usa algumas vezes o infinito e o infinitesimal. Em uma passagem de *Diálogos Sobre Duas Novas Ciências*, Salvati afirma a Simplício que tão fácil quanto decompor um segmento de reta numa quantidade finita de partes é decompô-lo numa quantidade infinita. Em seu exemplo, Salvati diz que dobrando um segmento de reta em quatro ou oito partes iguais, formamos um quadrado ou um octógono regular. Logo, curvando-se o segmento em forma de círcunferência, estaríamos trazendo à realidade os infinitos números de partes contidas no segmento. Salvati ainda argumenta que a circunferência nada mais é que um polígono regular com uma quantidade infinita de lados. Mas foi quando abordou o infinito em aritmética que Galileu chegou a um lugar onde seus antecessores não conseguiram: o infinito atual. Através de Salvati, Galileu estabelece uma correspondência biunívoca entre os números inteiros positivos e seus quadrados (Figura 8), chegando à conclusão que existem tantos números inteiros positivos quanto quadrados perfeitos.

Infelizmente Galileu não chegou a afirmar que o números de quadrados perfeitos e o número de inteiros positivos são iguais:

> Galileu aqui enfrentava a propriedade fundamental de um conjunto infinito – de que uma parte dele pode equivaler ao conjunto todo – mas Galileu não tirou esta conclusão. Embora Salvati concluísse corretamente que o número de quadrados não é menor que o número de inteiros, não teve ânimo para afirmar que são iguais. Em vez disso, ele concluiu simplesmente que "os atributos 'igual', 'maior' e 'menor' não se aplicam ao infinito, mas somente a quantidades finitas". Afirmou até (incorretamente, como sabemos agora) que não se pode dizer que um número infinito é maior que outro número infinito, ou mesmo que um número infinito é maior que um número finito. Como Moisés, Galileu chegou a avistar a terra prometida mas não pôde penetrar nela. (BOYER, 1996, p.226)

Galileu morreu em janeiro de 1642, cego e ainda vigiado pela inquisição.

Figura 8 - Correspondência biunívoca entre os números inteiros positivos e os seus quadrados



Fonte: O autor, 2016.

1.5 Bolzano

Ao elaborar esta seção que fala sobre Bolzano, buscou-se suporte teórico em Aczel (2003), Eves (2004) e Flood e Wilson (2013).

Bernhard Bolzano (Fig. 9), nasceu em 1781, na cidade de Praga, Tchecoslováquia. Filho de um comerciante de artes, Bolzano ingressou na Universidade de Praga em 1796. Sempre demonstrou aptidão para matemática e lógica. Na Universidade de Praga se interessou pela matemática Grega, estudando os trabalhos de alguns de seus matemáticos, se mostrou atraído pelo estudo do infinito.

Em 1805, Bolzano foi ordenado padre, e acabou nomeado para uma cadeira no departamento de filosofia da religião na Universidade de Praga. Porém, após se envolver em um atrito com a Igreja Católica, que se iniciou quando Bolzano rejeitou adotar em sua cadeira o livro escrito por um importante funcionário, acabou destituído do cargo na universidade e das funções sacerdotais, em um processo que se arrastou por mais de 10 anos. Em 1824, numa cerimônia formal Bolzano teve sua demissão sacramentada.

Antes disso, Bolzano já havia feito importantes progressos dentro da matemática. Em 1817, por exemplo, ele enunciou o teorema hoje denominado de Teorema do Valor Intermediário.

Figura 9 - Bernhard Bolzano

Fonte: Disponível em <http://educacao.uol.com.br/biografias/bernhard-bolzano.htm>. Acesso em 08/07/2016.

> O *teorema do valor intermediário* do cálculo, de tanta utilidade, muitas vezes é conhecido como *teorema de Bolzano*. O teorema diz que se $f(x)$ é uma função real contínua definida um intervalo aberto R e toma os valores de α e β nos pontos a e b de R, então f toma qualquer valor γ situado entre α e β em pelo menos um ponto c de R entre a e b. (EVES, 2004, p.530)

Infelizmente, muitas das descobertas de Bolzano acabaram ignoradas por seus contemporâneos e só chegaram ao conhecimento geral após sua morte. Em 1843 descobriu uma função contínua real definida num intervalo, mas que não tinha derivada em nenhum ponto. Porém essa descoberta foi creditada a Weierstrass cerca de 40 anos depois.

Bolzano se interessou pela descoberta de Galileu que é possível fazer uma correspondência biunívoca entre os inteiros positivos e seus quadrados, e se questionou sobre a possibilidade de estendê-la ao *continuum*. Examinando a função $y = 2x$, com domínio entre 0 e 1, Bolzano verificou que a mesma determinava um único número entre 0 e 2, chegando à conclusão que existiam tantos números entre 0 e 1 quanto entre 0 e 2, apesar do intervalo entre 0 e 2 ter o dobro do comprimento do intervalo entre 0 e 1.

Bolzano descobriu importantes propriedades dos conjuntos infinitos e parece ter percebido que o infinito dos números inteiros e o infinito dos números reais são de tipos diferentes.

Bolzano morreu em 1848. Após sua morte, em 1850, um de seus amigos reuniu suas descobertas sobre o infinito e publicou-as no livro *Paradoxos do Infinito*, onde importantes propriedades foram mostradas.

1.6 Cantor

Para dissertar sobre Cantor, buscou-se suporte teórico em Boyer (1996), Aczel (2003), Eves (2004) e Flood e Wilson (2013).

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (figura 10) nasceu em 3 de março de 1845, em São Petersburgo, na Rússia. Filho de Georg Woldemar e Maria Bohm, foi o primeiro dos seis filhos do casal. Em 1856 a família Cantor se mudou para Frankfurt, na Alemanha. Lá Cantor frequentou escolas particulares. No período da adolescência, Cantor já apresentava interesse pela matemática. Aos quinze anos procurou ajuda do pai para dedicar-se ao seu estudo. Em 1862, após prestar exames, Cantor foi aceito para estudar ciências na universidade. Cantor iniciou seu estudo de matemática no Instituto Politécnico de Zurique, mas pouco tempo depois conseguiu se transferir para a Universidade de Berlim. Lá, Cantor teve a oportunidade de aprender com grandes mestres, como Karl Weistrass, Ernst Eduard Kummer e Leopold Kronecker. Mais tarde, este último se tornaria um de seus maiores opositores. Logo após terminar o doutorado, Cantor aceitou um emprego na Universidade de Halle.

Em Halle, Cantor permaneceu isolado das grandes discussões matemáticas. Ao contrário do que acontecia na Universidade de Berlim, em uma universidade de segunda classe, não se debatiam novas ideias e nem havia grandes congressos onde palestrantes renomados expusessem suas ideias. Este isolamento em relação aos grandes centros de desenvolvimento das ciências tornou o trabalho de Cantor muito mais difícil. O desenvolvimento de uma nova teoria, em isolamento, é bem mais lento e trabalhoso. É neste aspecto que se pode notar toda a genialidade de Cantor. E esse isolamento para um gênio faz brotar ideias nunca pensadas.

Mesmo em isolamento, Cantor ainda possuía alguns bons amigos, como Gösta Mittag-Leffer (1846-1927) e Richard Dedekind (1831-1916). Mittag-Leffer costumava publicar os trabalhos de Cantor em seu periódico Acta Mathematica, mesmo quando ninguém mais queria fazê-lo. Dedekind e Cantor se conheceram enquanto este último passava suas férias na Suíça, em 1872. Logo se tornaram bons amigos. Durante muitos anos os dois se corresponderam, trocando ideias e debatendo as teorias de Cantor sobre o infinito. Outro grande matemático admirado por Cantor e de quem seu trabalho sofreu grande influência é Karl Weierstrass, seu antigo professor em Berlim.

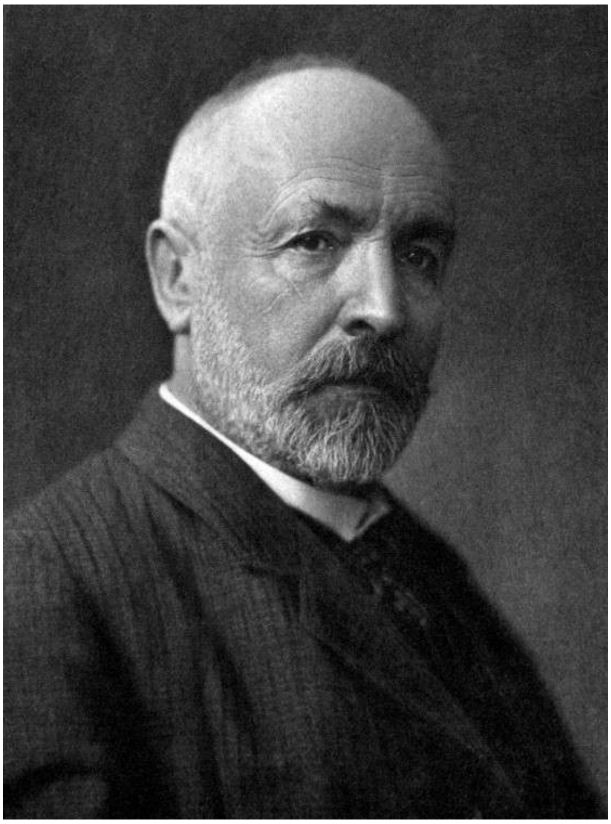
A teoria de conjuntos de Cantor se baseava na sua definição de conjunto. Para ele, conjunto é qualquer coleção dentro de um todo M de objetos m definidos ou separados por nossa intuição ou pensamento.

Ao estudar conjuntos infinitos, Cantor percebeu, assim como Galileu, que existem tantos números inteiros positivos quanto seus quadrados, isto é, os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, mesmo o conjunto dos quadrados sendo um subconjunto dos números inteiros positivos. Da mesma maneira, percebeu também que existem tantos números inteiros positivos quanto números inteiros. Mais adiante, Cantor mostrou que o conjunto dos números racionais pode ser listado em ordem, sendo assim um conjunto enumerável, e consequentemente possuindo tantos elementos quanto o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros. Este processo pelo qual Cantor demonstrou esta propriedade é chamado de prova da diagonalização de Cantor da enumerabilidade dos números racionais.

O desafio agora era descobrir se o conjunto dos números reais também era enumerável e se possuía ou não a mesma cardinalidade do conjunto dos números racionais (e consequentemente dos inteiros e dos naturais). Em 1873, Cantor conseguiu provar que os números reais eram de uma ordem de infinito tão alta que não poderiam ser contados. O artifício usado por Cantor em tal prova foi supor que era possível listar todos os números contidos no intervalo entre 0 e 1, chegando a uma contradição:

> Assim, supondo que este conjunto seja contável, podemos listar os seus números (como decimais) da seguinte maneira: $0, a_1a_2a_3a_4a_5\cdots$; $0, b_1b_2b_3$ $b_4b_5\cdots$; $0, c_1c_2c_3c_4c_5\cdots$; $0, d_1d_2d_3d_4d_5\cdots$; etc. Pela nossa suposição esta lista contém todos os números entre 0 e 1. Obtemos a contradição exigida ao construir um novo número entre 0 e 1 que não está nesta lista. Para isso, escolhemos os números $X_1, X_2, X_3X_4, \ldots$ de 1 a 9 tais

Figura 10 - Georg Cantor



Fonte: Disponível em: <http://leganerd.com/2014/10/06/georg-cantor-linfinito/>. Acesso em 11/06/206.

> que $X_1 \neq a_1$, $X_2 \neq b_2$, $X_3 \neq c_3$, $X_4 \neq d_4$, ... e consideramos o número $0, X_1X_2X_3X_4 \cdots$. Como $X_1 \neq a_1$, este novo número difere do primeiro da lista; como $X_2 \neq b_2$, ele difere do segundo número da lista; e assim por diante. Portanto, esse novo número difere de todos os números da lista. Isso nos leva a contradição exigida, logo o conjunto de todos os números reais não é contável.(FLOOD; WILSON, 2013, p.165)

Logo, como não era possível listar todos os números contidos entre 0 e 1, o mesmo se aplicava para qualquer outro intervalo real. Com este resultado, Cantor também concluiu que existiam diferentes ordens de infinito.

Em 1877 Cantor chegou a outra conclusão impressionante. Numa carta enviada ao amigo Dedekind, Cantor escreveu: “estou vendo, mas não acredito”. Ele se referia à descoberta de que linhas, planos ou superfícies, independente da dimensão, tinham a mesma ordem de infinito.

Quando tentou publicar sua descoberta, Cantor enfrentou grande resistência de Leopolde Kronecker, seu ex-professor. Kronecker, que era contrário às ideias de Cantor, fez de tudo para que seu artigo não fosse publicado. Porém, o máximo que Kronecker conseguiu foi adiá-la. O artigo foi publicado no ano seguinte.

Diferente de muitos matemáticos que o antecederam e que lhe foram contemporâneos, Cantor aceitava com naturalidade o conceito de infinito atual e a possibilidade de existirem diferentes “tipos” de infinitos. Logo, Cantor percebeu que precisava de uma linguagem para caracterizar as cardinalidades de seus infinitos. Assim, chamou-as de números transfinitos. Como consequência direta, tornou-se necessária a adoção de uma notação para representar os números transfinitos. Depois de tentar utilizar algumas notações já existentes, Cantor decidiu utilizar uma nova notação para representar os seus números transfinitos. A notação escolhida foi a primeira letra do alfabeto hebraico $\aleph$, o alef. Cantor sabia que a menor ordem de infinito era a dos números naturais, inteiros e racionais, a qual denominou $\aleph_0$. Ele acreditava que existissem ordens mais altas de infinito, isto é, que existiam alefs cada vez maiores, porém sem saber sua posição exata.

Já era de seu conhecimento que o conjunto dos números reais é de uma ordem de infinito maior que a do conjunto dos números racionais. Cantor sabia que para qualquer conjunto não vazio, é sempre possível obter um conjunto maior, o conjunto potência, que é o conjunto dos subconjuntos do conjunto original. Ele também sabia que o número cardinal do conjunto potência é obtido elevando-se 2 ao número cardinal do conjunto original. Como todo número inteiro poderia pertencer ou não à representação decimal de um número real, o conjunto dos números reais compreendia todos os subconjuntos dos números inteiros, isto é, o conjunto potência dos números inteiros, cuja cardinalidade é $2^{\aleph_0}$. Logo, Cantor chegou à conclusão de que o número cardinal do continuum é $c = 2^{\aleph_0}$ e que existem infinitos números transfinitos.

A dúvida agora era: existe algum número transfinito entre $\aleph_0$ e c? Seria $c = \aleph_1$? Esta conjectura é conhecida como a hipótese do *continuum*. Durante muitos anos Cantor trabalhou sobre a hipótese do *continuum*. Por diversas vezes mudou de ideia, uma hora achava que tinha descoberto que $c = \aleph_1$ outra hora achava que a hipótese do *continuum* era falsa e que existiam vários alefs entre $\aleph_0$ e c.

O árduo trabalho tentando provar a hipótese de *continuum* e os sucessivos ataques de Leopold Kronecker deixaram a saúde mental de Cantor muito frágil. Varias vezes Cantor foi internado na clínica mental da Universidade de Halle, a Halle Nervenklinik. Sua última internação aconteceu em junho de 1917. Aproximadamente seis meses depois, em 6 de janeiro de 1918 Cantor foi encontrado morto em seu quarto vítima de um ataque cardíaco.

O que Cantor não sabia é que estava trabalhando em um problema sem solução. A hipótese do *continuum* é verdadeira e seu oposto também. Porém, apenas após sua morte foi provado ser impossível dizer, utilizando a nossa matemática, se $2^{\aleph_0}$ é igual ou não a $c = \aleph_1$.

1.7 Russell

As reflexões apresentadas nesta seção tomaram como base os teóricos (ACZEL, 2003), Eves (2004), Rooney (2012) e Flood e Wilson (2013).

Bertrand Arthur Willian Russell (figura 11) nasceu em 1872 no País de Gales. Descendente de uma família aristocrática, ficou órfão aos 6 anos de idade e foi criado pela avó.

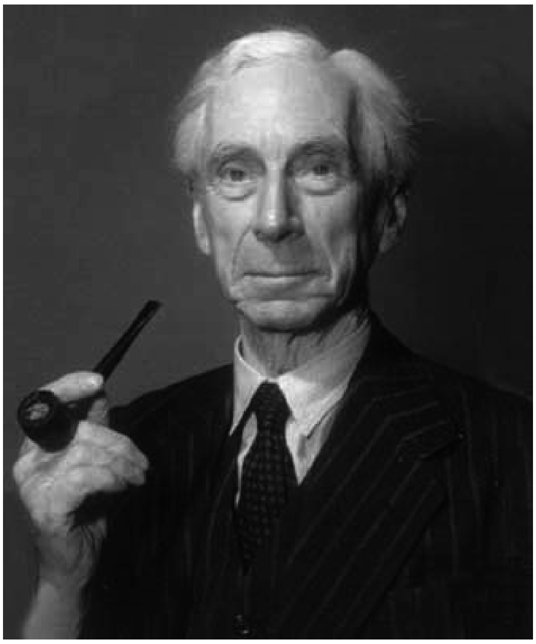
Russell ganhou uma bolsa de estudos no Trinity College, em Cambridge, onde foi estudar matemática. Porém, pouco tempo depois resolveu mudar para filosofia. Durante sua carreira, Russell se dedicou a filosofia da matemática e a lógica.

Ao longo de sua vida Russell acabou se envolvendo em algumas polêmicas. Certa vez, durante a Primeira Guerra Mundial, seu pensamento pacifista e contrário à conscrição (obrigação de alistamento para a guerra) fez com que ficasse preso por quatro meses e acabasse desligado da Universidade de Cambridge. Em outra oportunidade, durante a década de 60, acabou preso novamente, mas dessa vez por menos tempo, por liderar movimentos contrários às armas nucleares.

Grande entusiasta da teoria de Cantor, Russell em 1902 enunciou um importante paradoxo, que dependia apenas do conceito de conjunto e ficou conhecido como paradoxo de Russell. Seja S o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmo. S é elemento de si mesmo? Se S for elemento de si mesmo, então S não pertence a S, uma contradição. Se S não for elemento de si mesmo, então S pertence a S, uma contradição.

Uma versão mais simples do paradoxo de Russell, dada por ele mesmo, diz respeito ao barbeiro de uma cidade que barbeia todos que não se barbeiam, mas não barbeia quem se barbeia. Neste caso, quem barbeia o barbeiro? Se o barbeiro se barbear temos uma

Figura 11 - Bertrand Russell



Fonte: ROONEY, 2012, p.194

contradição, já que ele não barbeia quem se barbeia e se o barbeiro não se barbear, temos uma contradição, já que ele barbeia quem não se barbeia. Logo, não há solução para o problema.

Entre os anos de 1910 e 1913, Russell juntamente com seu colega e ex-professor na Trinity College, Alfred North Whitehead, escreveram uma obra composta de três volumes chamada Principia Mathematica. Nela eles tinham como objetivo deduzir a matemática através de conceitos primitivos. A obra era parcialmente baseada nas ideias de Cantor.

Russell foi ganhador de alguns prêmios importantes como as medalhas Sylvester e De Morgan, a Ordem do Mérito e o Prêmio Nobel de Literatura. Russell morreu em 1970, aos noventa e oito anos de idade, ainda lúcido.

1.8 Kurt Gödel e Paul Cohen

Para a elaboração desta seção que destaca Gödel e Cohen, buscou-se suporte teórico em Aczel (2003), Eves (2004) e Flood e Wilson (2013).

Kurt Gödel (Fig. 12) nasceu em 1906, na cidade de Viena, na Áustria. Seu pai foi um bem sucedido homem de negócios, o que proporcionou à família Gödel uma vida confortável. Aos 6 anos de idade, Kurt teve febre reumática, o que deixou-o paranóico com relação à saúde.

Ainda no ginásio surgiu o interesse de Gödel pela matemática. Este interesse

Figura 12 - Kurt Gödel

Fonte: Disponível em <http://www.geoff wilkins.net/images/godel/godel2.jpg>. Acesso em 08/07/2016.

acabou se intensificando nos últimos três anos do ginásio. Ao concluí-lo com ótimo aproveitamento em 1924, Gödel estava pronto para ingressar na universidade. Mesmo podendo escolher qualquer outra, preferiu estudar na Universidade de Viena, pois ficaria próximo de sua família. Lá estudou matemática, concluiu o doutorado em lógica e passou a fazer parte do corpo docente.

Em 1931, Gödel publicou um de seus mais importantes trabalhos, o Teorema da Incompletude. Nele Gödel mostrava que se uma teoria aritmética formal, envolvendo inteiros, for consistente, haverá alguma proposição que não poderá ser provada, o que faz a teoria incompleta. Na prática, Gödel mostrou que existem teoremas que nunca poderiam ser provados. Após este importante resultado Gödel passou a se dedicar ao estudo do Axioma da Escolha e da hipótese do *continuum*.

Logo ganhou reconhecimento e foi convidado a passar um tempo no Instituto de Estudos Avançados, em Princeton. Depois de algumas recusas, em 1933 Gödel aceitou o convite e embarcou para os Estados Unidos. Lá conheceu grandes mentes da época, entre elas Albert Einstein, de que se tornou amigo.

Em 1937, Gödel conseguiu provar a consistência da hipótese do *continuum*. Quando tomada como verdadeira, não criava contradições ou conflitos com os axiomas da teoria dos conjuntos. Se conseguisse provar a recíproca, este resultado implicaria na independência da hipótese do *continuum*, em relação à matemática baseada nos atuais axiomas da teoria dos conjuntos. Sendo assim, conjecturou que a negação da hipótese do *continuum* é consistente com os postulados da teoria dos conjuntos. Por muitos anos tentou prová-

Figura 13 - Paul Cohen

Fonte: Disponível em <https://plus.maths.org/issue47/features/elwes2/Cohen.jpg>. Acesso em 26/08/2016.

la, e acabou pagando um preço caro por isso. Assim como Cantor, Gödel começou a apresentar sinais de desgaste mental, deixando-o paranoico. Em 1978, deixou de comer, achando que estava sendo envenenado e acabou morrendo de desnutrição.

Em 1963, quando Gödel parecia ter desistido de provar a consistência da negação da hipótese do *continuum*, o matemático Paul J. Cohen (Fig. 13), da Universidade de Stanford, conseguiu provar utilizando o resultado obtido por Gödel anteriormente, que a hipótese do *continuum* é independente da matemática baseada nos atuais axiomas da teoria dos conjuntos. Isto significa dizer que, com os atuais axiomas da teoria dos conjuntos não se pode provar que a hipótese do *continuum* seja verdadeira ou falsa.

2 CONCEITOS MATEMÁTICOS RELATIVOS AO ESTUDO DO INFINITO

Neste capítulo são abordados conceitos, definições, proposições e teoremas relevantes ao estudo do infinito matemático abordado neste trabalho, que podem ser necessários ao entendimento do tema.

2.1 Um pouco de teoria dos conjuntos

Autores como Birkhoff e MacLane (1941), Alencar Filho (1980), Hrbacek e Jeck (1999) e Leão (2014) foram referências bibliográficas para a elaboração desta seção.

Para Cantor, segundo Alencar Filho (1980), chama-se conjunto o grupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os elementos do conjunto.

Definição 2.1.1: Conjunto potência ou conjunto das partes de um conjunto A é o conjunto de todos os subconjuntos de A.

Notação usada é $\mathcal{P}(A)$.

Por definição, os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são todos os conjuntos X tais que $X \subset A$.

Definição 2.1.2: Seja n um número natural. Um conjunto A tem um número cardinal n de elementos se existe uma bijeção entre os elementos de A e os naturais $1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

Escrevemos $|A| = n$.

Definição 2.1.3: Um conjunto A é equipotente a um conjunto B, isto é, A e B têm a mesma cardinalidade, se existe uma bijeção de A em B.

Indicamos que A é equipontente a B pela notação $A \sim B$.

Portanto, $A \sim B$ quando $|A| = |B|$.

Teorema 2.1.4:

i) A é equipotente a A.

ii) Se A é equipontente a B, então B é equipotente a A.

iii) Se A é equipotente a B e B é equipotente a C, então A é equipotente a C.

Prova:

i) $Id_A : A \longmapsto A$ é uma bijeção de A em A.

ii) Se existe uma bijeção de A em B, então também existe uma bijeção de B em A. Basta considerar a função inversa.

iii) Se existe uma bijeção de A em B e existe uma bijeção de B em C, então existe uma bijeção de A em C. Basta considerar a função composta dessas duas bijeções, na ordem enunciadas.

Teorema 2.1.5: Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Se $|A| = |B|$, então $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

Prova: Se $|A| = |B|$, então existe uma bijeção $f : A \to B$. Seja $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, dada por $g(X) = f(X)$(a imagem direta do conjunto X pela função f). Vamos, agora, mostrar que g é bijetiva.

i) **Injetividade:** Se $g(X) = g(Y)$, então $f(X) = f(Y)$. Daí, como f é bijetiva, temos que $X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(f(Y)) = Y$ em A.

ii) **Sobrejetividade:** Seja $y \in \mathcal{P}(B)$ e consideremos a imagem inversa de Y como $f^{-1}(Y) \in \mathcal{P}(A)$. Então $g(f^{-1}(Y)) = f(f^{-1}(Y)) = Y$ pois f é bijetiva.
Logo, g é bijetiva.

Teorema 2.1.6 (Cantor): Seja A um conjunto qualquer e $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de A. Temos que $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Prova: Seja f uma função de A para $\mathcal{P}(A)$, isto é, f associa a cada elemento $x \in A$ um subconjunto $f(x) \subset A$. Considere o conjunto $C = \{x \in A \ e \ x \notin f(x)\}$. Veja que C é um subconjunto de A, logo $C \in \mathcal{P}(A)$. Entretanto, para todo $x \in A$, temos que $f(x) \neq C$, pois se $x \in f(x)$ então $x \notin C$ e se $x \notin f(x)$ então $x \in C$. Portanto $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ não é sobrejetora. Logo, para qualquer conjunto A, não existe bijeção para $\mathcal{P}(A)$.

Definição 2.1.7: Um conjunto A é dito finito se for vazio ou se seu número cardinal é um número natural. Um conjunto que não é finito é dito infinito.

Propriedade 2.1.8 (Propriedade fundamental dos conjuntos infinitos): Um conjunto A é dito infinito, se existir uma bijeção entre os elementos de A e os elementos de alguma de suas partes próprias.

Segundo Dedekind, um conjunto infinito tem a propriedade singular de que o todo não é maior que alguma de suas partes.

Definição 2.1.9: Um conjunto infinito A é dito enumerável se existe um bijeção entre os elementos de A e os números naturais.

Teorema 2.1.10: Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Prova: Se A for finito, então A é enumerável. Vamos supor que A é infinito. Definimos então, por indução, uma bijeção $f : A \to \mathbb{N}$. Vamos colocar $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ definidos satisfazendo as seguintes condições:

(a) $f(1) < f(2) < \cdots < f(n)$;

(b) Sendo $B_n = A - \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$, temos $a > f(n)$, para todo $x \in B_n$.

Como $B_n \neq \emptyset$, já que A é infinito, definimos $f(n{+}1)$ como o menor elemento de B_n. Então, $f(n{+}1) > f(n)$ e $a > f(n{+}1)$ para todo $a \in B_{n+1} = A - \{f(1), f(2), \ldots, f(n{+}1)\}$. Segue-se de (a) que $f : \mathbb{N} \to A$ é crescente, logo injetiva. Além disso, (b) implica que f é sobrejetiva, pois se existisse algum $a \in A - f(\mathbb{N})$, teríamos que $x \in A - f(\mathbb{N}) \subset A - \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\} = B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e, portanto, $a > f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, o conjunto infinito $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ seria limitado, uma contradição.

Teorema 2.1.11: Sejam A e B conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.

Prova: Como A e B são enumeráveis, existem funções bijetivas $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \mathbb{N} \to B$. Logo, $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$, dada por $h(a, b) = (f(a), g(b))$ é sobrejetiva. Agora, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Seja $r : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $r(m, n) \to 2^m 3^n$. Como todo número natural se decompõe de maneira única como produto de fatores primos, temos que r é injetiva. Logo temos uma bijeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em $r(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, que é enumerável, pois $r(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$.

Teorema 2.1.12: O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.

Prova: Os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} - \{0\}$ são enumeráveis. Então, o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ também é enumerável. Logo, $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$, dada por $f(m, n) \to \dfrac{m}{n}$ é sobrejetiva. Como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ é enumerável, temos que $\mathbb{Q}$ é enumeráve.

Teorema 2.1.13: O conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais não é enumerável.

Prova: Vamos supor que é possível listar todos os números do intervalo $(0, 1)$, escrevendo-os em sucessão.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0, x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} \ldots \\
x_2 &= 0, x_{21} x_{22} x_{23} x_{24} \ldots \\
x_3 &= 0, x_{31} x_{32} x_{33} x_{34} \ldots \\
x_4 &= 0, x_{41} x_{42} x_{43} x_{44} \ldots \\
&\vdots \\
x_n &= 0, x_{n1} x_{n2} x_{n3} x_{n4} \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

onde x_{ij} são algarismos de 1 a 9. Vamos construir agora o número $x = a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$, onde

$x = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ são algarismos de 1 a 9, tais que $a_1 \neq x_{11}$, $a_2 \neq x_{22}$, $a_3 \neq x_{33}$, $a_4 \neq x_{44}, \ldots$. Como $a_1 \neq x_{11}$, este número difere do primeiro da lista; como $a_2 \neq x_{22}$ este número difere do segundo da lista e assim sucessivamente. Portanto, o número $x = a_1a_2a_3a_4\ldots$ não pertence a lista, o que é uma contradição. Logo, o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais não é enumerável.

Teorema 2.1.14: O conjunto dos números irracionais $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é enumerável.

Prova: Se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ fosse enumerável, o conjunto $\mathbb{R}$, seria enumerável pois $\mathbb{Q}$ é enumerável. Uma contradição. Logo o conjunto dos números irracionais não é enumerável.

2.2 O infinito potencial e o infinito atual

Autores como Aczel (2003), Sena (2011) e Borges (2015), foram referências bibliográficas para a elaboração desta seção.

Inevitavelmente, quando se estuda matemática, o conceito de infinito em grande parte das vezes está presente, o que torna sua compreensão extremamente importante. Como visto, ao longo da história da humanidade, o infinito foi motivo de debates e muitas vezes de discórdia. Estes conceitos de infinito distinguem-se entre infinito potencial, defendido pelas ideias de Aristóteles[1] (384-322 a.C.) e infinito atual, que a partir de Cantor veio se destacando e ganhando espaço na matemática até se tornar o que é hoje.

O conceito de infinito potencial está ligado a ideia de algo que não pode ser alcançado, inatingível, seja infinitamente pequeno ou infinitamente grande. Na visão de Aristóteles, o infinito é algo que cresce indefinidamente, sem final, como por exemplo os números naturais, onde pode-se sempre escrever um número natural, mas nunca escrevê-los todos. Para ele o infinito é uma construção da mente que tem como objetivo nos auxiliar na resolução de problemas. Este infinito aristotélico é dito potencial. Os conceitos de infinito abordados por Zenão em seus paradoxos (Seção 1.2) e utilizado por Arquimedes como estratégia para calcular a área do círculo (Seção 1.3) ou para chegar a uma aproximação de pi (Seção 1.3) são conceitos de infinito potencial.

O conceito de infinito atual traz uma visão de infinito onde conseguimos enxergá-lo como um todo, admitindo o infinito como algo acabado. Se no infinito potencial analisamos uma sequência onde sempre podemos acrescentar mais um elemento, no infinito atual olhamos o todo. Nessa interpretação do conceito de infinito, tem-se um ente definido. Por exemplo, ao considerarmos os pontos de um intervalo estamos lidando com algo infinito

[1] Aristóteles foi um importante filósofo grego, discípulo de Platão (427-347 a.C.) e seus estudos se estendem por diversas áreas.

mas olhando-o como um todo. O conceito de infinito atual foi abordado inicialmente por Galileu (Seção 1.4) mas teve como principal desenvolvedor Cantor (Seção 1.6). Seus números transfinitos são os maiores exemplos de infinito atual, pois neles, considera-se o infinito como algo que pode ser alcançado, um objeto, um número.

2.3 Os números transfinitos

Serviram como suporte teórico para dissertar sobre esta seção os autores Hrbacek e Jeck (1999) e Aczel (2003).

Como visto na Seção 1.6, Cantor se interessou e dedicou boa parte de sua vida ao estudo dos conjuntos infinitos e suas propriedades. Ao estudar o conjunto dos números inteiros, mostrou que é possível fazer uma bijeção entre o conjunto dos números inteiros positivos e seus quadrados, concluindo que ambos os conjuntos possuem a mesma cardinalidade. Cantor estendeu esse estudo a todos os números inteiros, e percebeu que o conjunto dos números inteiros e seus subconjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade. Cantor também demonstrou que o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais possuem a mesma cardinalidade. Para isso, utilizou um engenhoso argumento chamado, atualmente, de prova da diagonalização de Cantor da enumerabilidade dos números racionais, com o qual demonstrou que existem tantos números inteiros quanto números racionais.

Mais tarde, Cantor provou que os números reais não são enumeráveis, não sendo possível fazer uma bijeção entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números reais. Logo, concluiu que estes dois conjuntos possuíam “tipos” diferentes de infinito. Mais ainda, ele descobriu que existem infinitos “tipos” de infinito, isto é, existem infinitos conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades. Para chegar a essa conclusão, Cantor utilizou um importante teorema o qual havia provado. Este teorema diz que a cardinalidade de todo conjunto não nulo é menor que a cardinalidade do seu conjunto potência. Assim, a cardinalidade do conjunto potência dos números inteiros é maior que a cardinalidade do conjunto dos números inteiros e a cardinalidade do conjunto potência do conjunto potência dos números inteiros é maior que a cardinalidade do conjunto potência dos números inteiros. Repetindo este processo indefinidamente é sempre possível obter um conjunto infinito com cardinalidade maior.

Cantor chamou os números cardinais dos conjuntos infinitos de números transfinitos e usou como notação a primeira letra do alfabeto hebraico, o alef ($\aleph$).

O menor dos números transfinitos é o número cardinal dos conjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$), inteiros ($\mathbb{Z}$) e racionais ($\mathbb{Q}$), o qual Cantor definiu como $\aleph_0$.

Os números transfinitos são infinitos, pois sempre é possível obter um número transfinito maior:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \cdots.$$

2.3.1 A aritmética dos números transfinitos

Para a elaboração desta seção autores como Birkhoff e MacLane (1941), Levy (1979), Alencar Filho (1980), Hrbacek e Jeck (1999) e Leão (2014) foram referências bibliográficas.

A aritmética dos números transfinitos se difere da aritmética dos números finitos. Segundo Hrbacek e Jeck (1999), as regras para adição e multiplicação de alefs são bem simples.

Adição	**Multiplicação**
$\aleph_0 + n = \aleph_0$	$n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$	$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
$\aleph_\alpha + n = \aleph_0$	$n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$
$\aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$	$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$
$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_{max(\alpha,\beta)}$	$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{max(\alpha,\beta)}$

Seguem abaixo os teoremas nos quais baseiam-se as operações de adição e multiplicação de números transfinitos apresentadas acima.

Teorema 2.3.1: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Prova: A união de dois conjuntos infinitos enumeráveis é enumerável. Por exemplo, o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) é formado pela união de dois conjuntos disjuntos, o conjunto dos números inteiros negativos ($\mathbb{Z}_-^*$) e o conjuntos dos números inteiros não negativos ($\mathbb{Z}_+$). Logo $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Teorema 2.3.2: $\aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

A demonstração deste teorema pode ser vista em (LEVY, 1979).

Proposição 2.3.3: Para todo número cardinal finito n, temos que $\aleph_0 + n = \aleph_0$.

Prova: Como a união de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável, temos que n é o cardinal de um conjunto finito e neste caso enumerável, e $\aleph_0$ é o número cardinal do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), que é um conjunto enumerável. Logo $\aleph_0 + n = \aleph_0$.

Proposição 2.3.4: De forma generalizada, para todo número cardinal finito n, temos que $\aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha$.

Prova: $\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha + n \leq \aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Logo $\aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha$.

Proposição 2.3.5: $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_{max(\alpha,\beta)}$.

Prova: Supondo que $\alpha \geq \beta$, temos que $\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Supondo agora $\beta \geq \alpha$, temos que $\aleph_\beta \leq \aleph_\beta + \aleph_\alpha \leq \aleph_\beta + \aleph_\beta = \aleph_\beta$. Logo, $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_{max(\alpha,\beta)}$.

Teorema 2.3.6: $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Prova: O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis também é enumerável. Logo $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Por exemplo, o conjunto formado por todos os pares ordenados de números naturais é enumerável.

Teorema 2.3.7: $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

A demonstração deste teorema pode ser vista em (LEVY, 1979) ou (HRBACEK; JECK, 1999).

Proposição 2.3.8: Para todo número cardinal finito n, temos que $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$.

Prova: $\aleph_0 = 1 \cdot \aleph_0 \leq n \cdot \aleph_0 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Logo, $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$.

Proposição 2.3.9: De forma generalizada, para todo número cardinal finito n, temos que $\aleph_\alpha \cdot n = \aleph_\alpha$.

Prova: $\aleph_\alpha = 1 \cdot \aleph_\alpha \leq n \cdot \aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Logo, $\aleph_\alpha \cdot n = \aleph_\alpha$.

Proposição 2.3.10: $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{max(\alpha,\beta)}$.

Prova: Supondo que $\alpha \geq \beta$, temos que $\aleph_\alpha \leq 1 \cdot \aleph_\alpha \leq \aleph_\beta \cdot \aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Supondo agora $\beta \geq \alpha$, temos que $\aleph_\beta \leq 1 \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$. Logo, $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{max(\alpha,\beta)}$.

2.4 A hipótese do *continuum*

Para dissertar sobre a hipótese do *continuum* buscou-se suporte teórico em Hrbacek e Jeck (1999), Aczel (2003), Klajman (2007) e Nascimento (2009).

Ao mostrar que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável, Cantor descobriu que existiam infinitos de ordens superiores ao dos conjuntos enumeráveis ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$), isto é, ele descobriu que existiam números transfinitos maiores do que $\aleph_0$.

$$|\mathbb{R}| > \aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|.$$

Mais do que isso, Cantor percebeu que a cardinalidade do *continuum* dos números reais, a qual ele chamou de c, era igual a cardinalidade do conjunto potência dos números inteiros ($2^{\aleph_0}$). Como visto na Seção 1.6, todo número inteiro poderia pertencer ou não à representação decimal de um número real, logo o conjunto dos números reais compreendia todos os subconjuntos dos números inteiros, cuja cardinalidade é $2^{\aleph_0}$.

$$c = 2^{\aleph_0}$$

Cantor então se viu mergulhado em várias questões: Em que posição entre os alefs estaria c? Existe algum cardinal transfinito entre $\aleph_0$ e c? Seria $c = \aleph_1$? Isto é, seria $2^{\aleph_0} = \aleph_1$? Esta conjectura proposta por Cantor ficou conhecida como a hipótese do *continuum*.

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Cantor acreditava que a hipótese do *continuum* era verdadeira, mas nunca foi capaz de prová-la.

Em 1937, o matemático Kurt Gödel conseguiu provar a consistência da hipótese do *continuum*, o que significava dizer que, se tomada como verdadeira, não criava conflitos com os axiomas da teoria dos conjuntos. Por muitos anos Gödel tentou provar que a negação da hipótese do *continuum* é consistente com os axiomas da teoria dos conjuntos. Se conseguisse prová-la, isto implicaria na independência da hipótese do *continuum*, da matemática baseada nos atuais axiomas da teoria dos conjuntos. Porém, apenas em 1963, o matemático Paul Cohen conseguiu provar ser impossível afirmar se a hipótese do *continuum* é verdadeira ou falsa, utilizando os atuais axiomas da teoria dos conjuntos.

3 FERRAMENTAS PEDAGÓGICAS

Autores como Brito (1996), Gómez-Granell (1997), Correa e MacLean (1999), Micotti (1999) desenvolveram pesquisas buscando identificar quais as principais dificuldades encontradas pelos alunos em relação à matemática ensinada nas escolas. De acordo com Brito,

> as atitudes mais negativas com relação à matemática são encontradas na 7ª e 8ª série, que são as séries onde o ensino da matemática, particularmente, a álgebra, passa a exigir uma capacidade de abstração cada vez maior do estudante (BRITO, 1996, p.295).

Corroborando com Brito (1996), nota-se que uma parcela dos alunos do ensino fundamental apresenta grande dificuldade em lidar com alguns conceitos matemáticos mais abstratos, e o conceito de infinito é um deles. Essa dificuldade acaba prejudicando o educando na formalização dos conhecimentos dependentes da compreensão desses conceitos. Assim, torna-se importante a utilização de métodos que facilitem seu entendimento e a consequente assimilação de tais conhecimentos. Sendo assim, o autor desenvolveu duas atividades com esse propósito, as quais são apresentadas na Seções 3.1 e 3.2.

3.1 Atividades

Foram elaboradas duas atividades com o tema infinito matemático. A primeira atividade aborda conjuntos infinitos e sua propriedade fundamental (que o todo não é maior que algumas de suas partes). Na segunda atividade, os alunos investigam os números reais e a infinidade deles existentes em um intervalo finito. Também foram elaborados dois questionários para serem aplicados, um antes das atividades e outro após . O primeiro questionário busca identificar qual a percepção dos alunos em relação a alguns aspectos relativos ao infinito e que são abordados nas atividades. O segundo questionário foi elaborado com o objetivo de analisar o quanto foi assimilado pelos alunos acerca dos temas trabalhados durante as atividades. A análise é feita, comparando os dois questionários.

3.1.1 Atividade 1: A parte é igual ao todo

Roteiro da Atividade 1

Objetivo: Verificar que em se tratando de conjuntos infinitos, a parte pode ter o mesmo "tamanho" do todo.

Duração: Entre 40 e 50 minutos.

Recursos: Projetor e quadro branco.

Etapas:

1) Apresentar aos alunos, por meio de exposição oral, de forma superficial, os conceitos de correspondência biunívoca e cardinalidade.

2) Relembrar o conjunto dos números naturais e seu subconjunto, dos números naturais pares.

3) Questionar: qual conjunto tem mais elementos, o conjunto dos números naturais pares ou o conjunto dos números naturais?

4) Explicar que os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade.

5) Relembrar o conjunto dos números inteiros.

6) Dividir os alunos em grupos de no máximo 4 alunos.

7) Questionar: qual conjunto tem mais elementos, o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros? É possível estabelecer uma correspondência um a um entre os elementos dos dois conjuntos por meio de alguma regra?

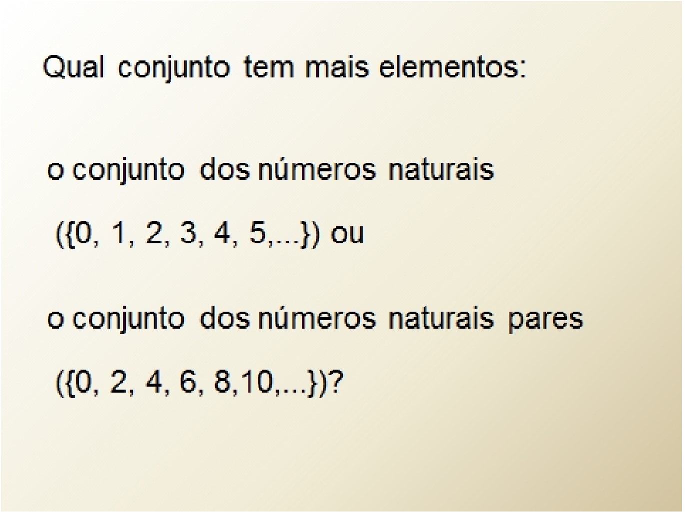
8) Mostrar que os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade e relacionar seus elementos.

O objetivo desta atividade é fazer com que os alunos percebam que o conjunto dos números naturais, o conjunto dos números naturais pares e o conjunto dos números inteiros têm a mesma cardinalidade. As etapas da atividade podem ser exibidas com auxilio de recursos computacionais. Como sugestão, o roteiro da atividade pode ser exibido para a turma, ou reproduzido e entregue aos alunos para que possam acompanhá-la. O tempo sugerido para a atividade é entre 40 e 50 minutos.

Desenvolvimento

Como esta atividade é voltada para turmas do 8º ano do ensino fundamental, é necessária uma pequena introdução do que é cardinalidade e correspondência biunívoca (ou um a um, para facilitar o entendimento do aluno do ensino fundamental). Após essa

Figura 14 - Atividade 1: Questionamento inicial



Fonte: O autor, 2016.

pequena introdução, os alunos são questionados sobre qual conjunto tem mais elementos, o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares (figura 14).

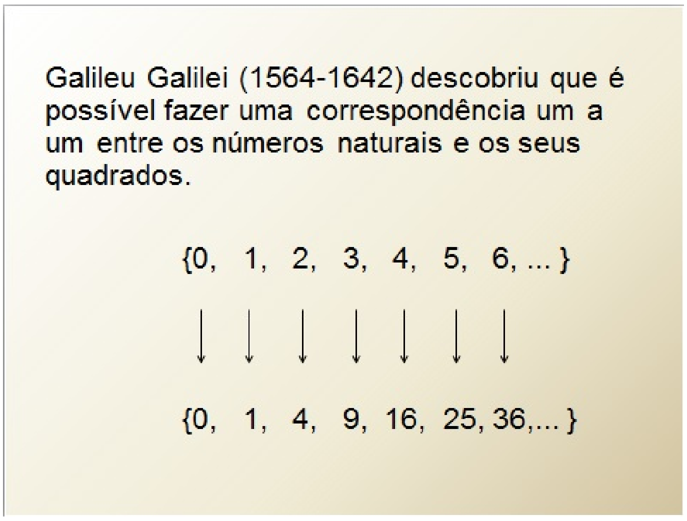
Logo após eles responderem, independente das respostas, eles são informados que os dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade. Além disso, eles também são informados da descoberta de Galileu, que é possível fazer uma correspondência um a um entre o conjunto dos números naturais e seus quadrados (Figura 15).

Na segunda parte da atividade os alunos são separados em grupos de, no máximo, quatro integrantes para refletirem sobre as seguintes perguntas: O conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros possuem a mesma cardinalidade? É possível estabelecer uma regra que relacione um a um os elementos do conjunto dos números naturais e os elemento do conjunto dos números inteiros? (Figura 16)

Vale esclarecer que esta segunda pergunta, dada a sua complexidade, aparece na atividade como um desafio, já que o público alvo são turmas do 8º ano do ensino fundamental que não conhecem o assunto.

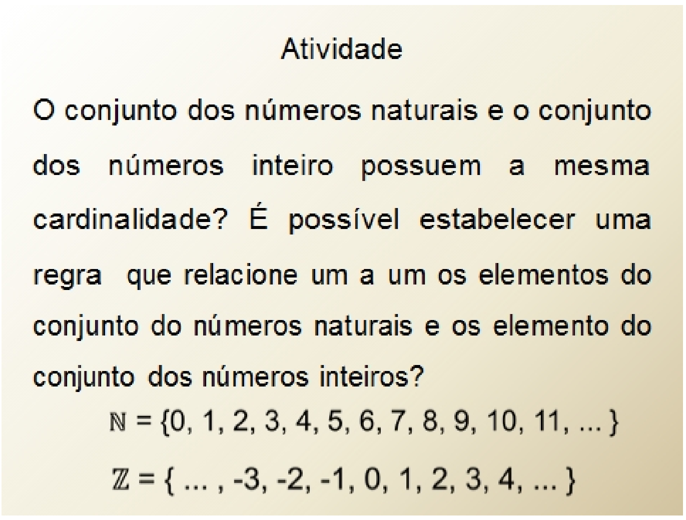
Após refletirem sobre o tema, os grupos são convidados a exporem suas conclusões a respeito dos questionamentos. Depois de ouvir as conclusões de cada grupo, o professor encerra a atividade mostrando que os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade por meio de uma correspondência um a um entre os seus elementos.

Figura 15 - Atividade 1: Descoberta de Galileu



Fonte: O autor, 2016.

Figura 16 - Atividade 1: Questionamentos sobre os conjuntos dos números naturais e dos números inteiros



Fonte: O autor, 2016.

3.1.2 Atividade 2: Infinitos em um intervalo finito

Roteiro da Atividade 2

Objetivo: Verificar que entre dois números reais existem infinitos números reais.

Duração: Entre 30 e 40 minutos.

Recursos: Projetor e computadores com o software GeoGebra instalado.

Etapas:

1) Apresentar aos alunos, alguns comandos básicos do GeoGebra e as ferramentas "ponto" e "ponto médio ou centro".

2) Pedir aos alunos que, utilizando a ferramenta "ponto" do GeoGebra, marquem dois pontos quaisquer no eixo x.

3) Pedir aos alunos que marquem o ponto médio entre os dois pontos marcados no item anterior, utilizando a ferramenta "ponto médio ou centro".

4) Pedir aos alunos que marquem o ponto médio entre o primeiro ponto e o ponto médio marcado no item anterior.

5) Pedir aos alunos que repitam este processo e sempre que necessário aproximem a tela.

6) Questionar: se vocês tivessem um software tão potente que sempre fosse possível aproximar mais a tela, em algum momento não conseguiriam marcar o ponto médio entre os dois pontos? A qual conclusão vocês chegam a respeito da quantidade de números reais entre dois outros números reais?

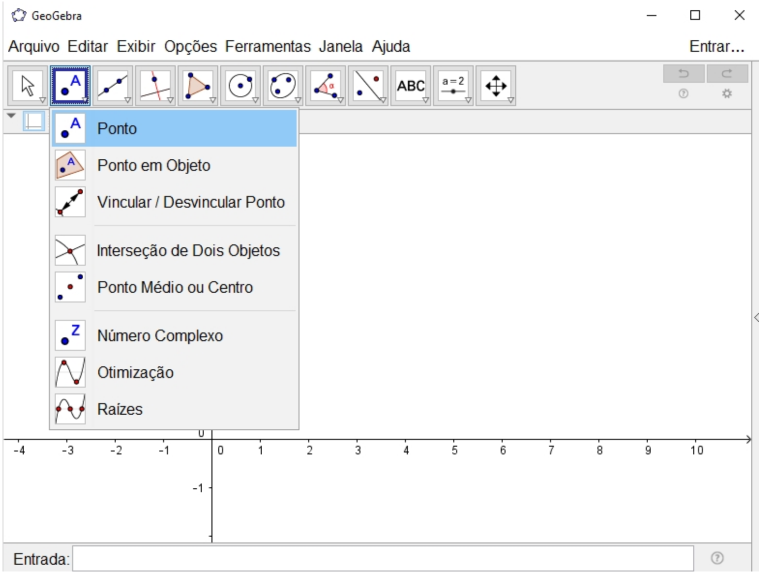
7) Explicar que entre dois números reais existem infinitos números reais.

Esta atividade tem como objetivo fazer com que os alunos descubram que entre dois números reais quaisquer existe uma infinidade de números reais. Para a realização da atividade é necessário que os alunos utilizem computadores. A atividade foi realizada com o auxílio do *software* GeoGebra, previamenteo instalado nos computadores que foram utilizados (*software* GeoGebra é livre e está disponibilizado na internet, por exemplo, em http://www.baixaki.com.br/download/geogebra.htm). O tempo sugerido para a atividade é entre 30 e 40 minutos.

Desenvolvimento

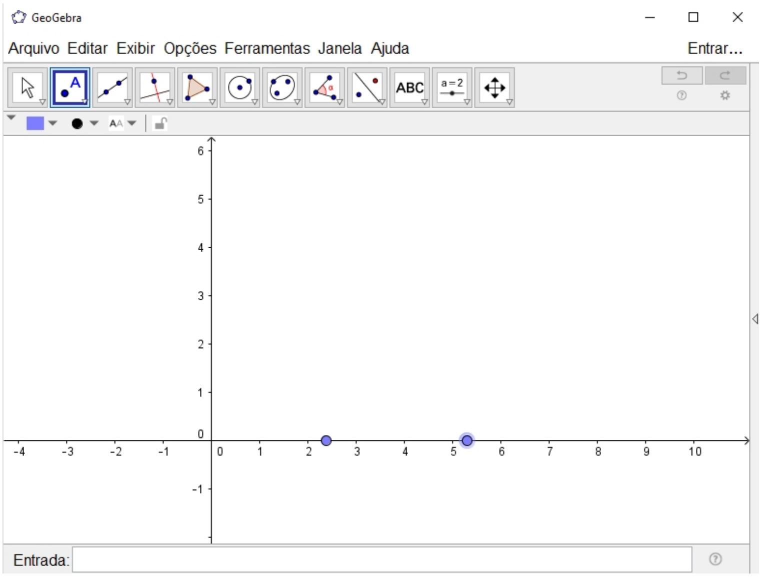
Com o *software* aberto, o aluno deve marcar dois pontos quaisquer no eixo x. Para isso, deverá selecionar a opção "ponto" e marcá-los no eixo x (Figuras 17 e 18).

Figura 17 - Atividade 2: Selecionando o comando “ponto”



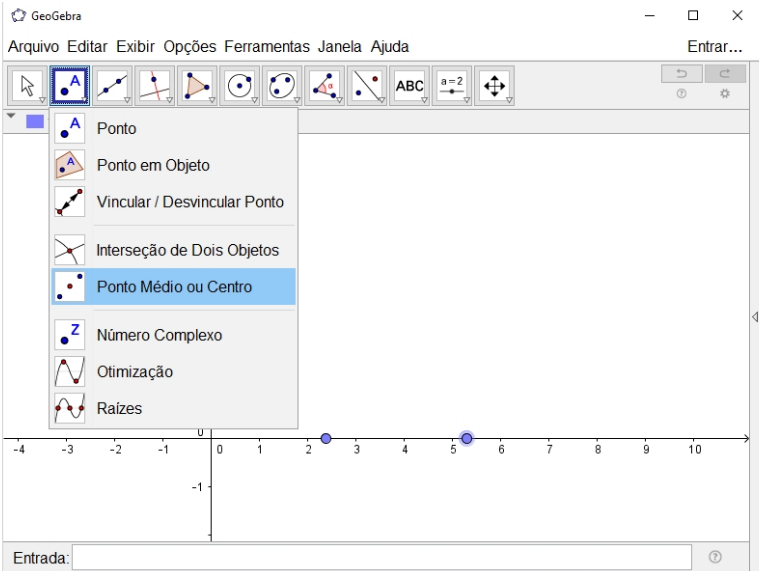
Fonte: *Print screen* da aplicação no sistema operacional *Windows 10*, 2016.

Figura 18 - Atividade 2: Marcando os dois pontos no eixo x



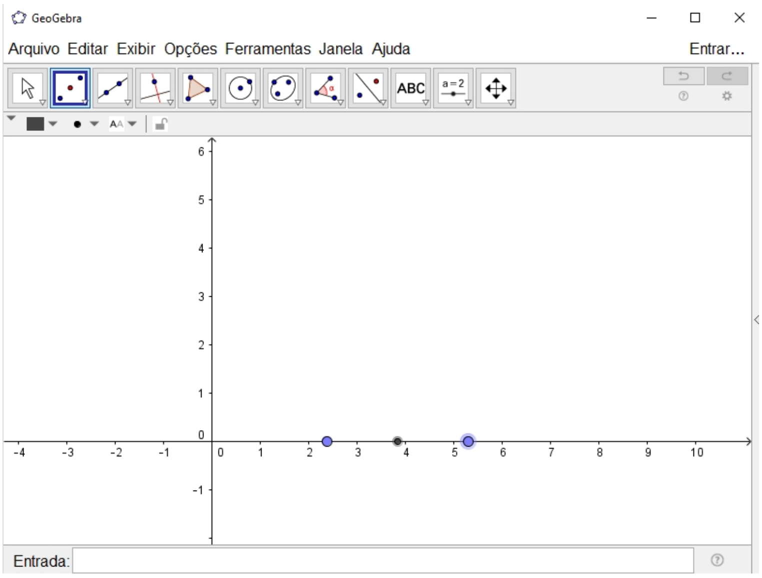
Fonte: *Print screen* da aplicação no sistema operacional *Windows 10*, 2016.

Figura 19 - Atividade 2: Selecionando o comando “ponto médio ou centro”



Fonte: *Print screen* da aplicação no sistema operacional *Windows 10*, 2016.

Figura 20 - Atividade 2: Marcando o ponto médio



Fonte: *Print screen* da aplicação no sistema operacional *Windows 10*, 2016.

Em seguida o aluno marca o ponto médio entre estes dois pontos. Para isso, deve selecionar a opção "ponto médio ou centro" e clicar sobre os pontos marcados anteriormente (Figuras 19 e 20).

Este processo deverá ser repetido mais algumas vezes, sempre marcando o ponto médio entre os dois pontos mais próximos. Depois de algumas repetições, o aluno será questionado: se caso tivéssemos um *software* tão potente que sempre fosse possível aumentar o zoom, será que em algum momento não conseguiríamos marcar o ponto médio entre os dois pontos? Depois de respondido o questionamento, o professor deverá perguntar: Podemos concluir então que existem quantos números reais entre dois outros números reais?

3.2 Aplicação das atividades, análise e discussão dos resultados

As duas atividades foram aplicadas em escolas públicas, dos municípios de Duque de Caxias e do Rio de Janeiro, em turmas do 8º ano do ensino fundamental[1]. Escola Municipal Roberto Weguelin de Abreu, localizada em Duque de Caxias e a Escola Municipal Jenny Gomes, no Rio de Janeiro. As atividades foram implementadas em dezembro de 2015. No total, participaram das atividades 91 alunos.

3.2.1 Aplicação das atividades - E. M. Roberto Weguelin de Abreu

A Escola Municipal Roberto Weguelin de Abreu está localizada no bairro 22 de Abril, em Imbariê, terceiro distrito do município de Duque de Caxias. A escola atende a turmas do primeiro segmento e do segundo segmento do ensino fundamental. Em 2013 o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) obtido pela escola Roberto Weguelin de Abreu foi 3,5.

As atividades foram aplicadas em duas turmas do 8º ano do ensino fundamental, 801 e 802. As duas turmas são do ensino regular e a aplicação das atividades em cada turma se deu em uma mesma aula. Antes do início da aula, os alunos responderam a um questionário com perguntas relacionadas ao infinito matemático (Anexo 1). Após o término da aula, os alunos responderam a outro questionário com mais perguntas relacionadas ao infinito matemático (Anexo 2). Para evitar que algum aluno se sentisse constrangido em responder aos questionários, não foi solicitado que colocassem o nome ou qualquer outro tipo de identificação.

[1] As atividades foram aplicadas pelo pesquisador que é o professor regente das turmas.

3.2.1.1 Turma 801

A turma 801 se caracteriza por ser um pouco agitada, porém a aplicação das atividades ocorreu satisfatoriamente. No dia estavam presentes 30 alunos. Assim como explicado anteriormente, os alunos responderam ao Questionário 1 antes do início da aula. As atividades seguiram os roteiros apresentados nas Seções 3.1.1 e 3.1.2. Ao término das atividades, os alunos responderam ao Questionário 2.

Ao analisar a primeira pergunta do Questionário 1, onde os alunos responderam sobre o que é infinito e também foi pedido que dessem alguns exemplos, verificou-se que 80% (Tabela 1) dos alunos citaram os números como exemplo de algo infinito. Além disso, aproximadamente $6,67\%$ dos alunos mencionaram o Universo como exemplo de algo infinito.

Tabela 1 - Turma 801 - Questionário 1 - Questão 1

Respostas	**Porcentagem**
Números	80,00%
Universo	6,67%
Outros	16,67%

Fonte: O autor, 2016.

Na primeira parte da atividade 1, quando os alunos são questionados sobre qual dos dois conjuntos possui mais elementos, o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares, a maioria da turma respondeu que era o conjunto do números naturais. Esta tendência de achar que um subconjunto tem menos elementos que o conjunto no qual está contido pôde ser observada de acordo com as respostas à questão 2 do Questionário 1 (Para você, qual destes dois conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números naturais ($\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$) ou o conjunto dos números naturais ímpares ($\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$))? Ao analisar os resultados, foi verificado que 80% (Tabela 2) dos alunos optaram pelo conjunto dos números naturais, 20% optaram pelo conjunto dos números naturais ímpares e ninguém respondeu que os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade. Nesse caso verifica-se que os alunos apenas "transportaram" o que já sabem sobre subconjuntos de conjuntos finitos para subconjuntos infinitos de conjuntos infinitos, interpretando que o subconjunto deve sempre possuir menos elementos do que o conjunto no qual ele está contido.

Tabela 2 - Turma 801 - Questionário 1 - Questão 2

Respostas	**Porcentagem**
Números Naturais	80,00%
Números Naturais Ímpares	20,00%

Fonte: O autor, 2016.

No decorrer da aplicação da atividade 1, os alunos foram divididos em grupos, de até quatro integrantes, para debaterem sobre o segundo questionamento: qual conjunto tem mais elementos, o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros? É possível estabelecer uma correspondência um a um entre os elementos dos dois conjuntos por meio de alguma regra? Aós debaterem sobre o questionamento, a maioria dos grupos, $87,5\%$, respondeu que os dois conjuntos citados têm a mesma cardinalidade, porém, nessa turma nenhum dos grupos conseguiu esboçar uma regra que relacionasse os elementos dos dois conjuntos. O fato de nenhum grupo ter conseguido estabelecer uma regra que relacionasse os elementos dos dois conjuntos não chega a ser um resultado surpreendente, visto que a turma em questão é do 8º ano do ensino fundamental e como foi informado no desenvolvimento da atividade 1, essa questão, dada a sua complexidade, aparece como um desafio.

Os resultados observados nessa etapa da atividade 1 podem ser confrontados com os dados obtidos pela comparação das respostas observadas na questão 4 do Questionário 1 e na questão 1 do Questionário 2.

Ao analisar as resposta para a questão 4 do Questionário 1 (Para você qual destes conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}=\{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}$) ou o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$)?) verifica-se que antes de iniciar a aplicação das atividades, 70% dos alunos responderam que o conjunto dos números inteiros possui mais elementos (Tabela 3), $26,67\%$ responderam que o conjunto dos números naturais possui mais elementos e apenas $3,33\%$ responderam que os dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade.

Tabela 3 - Turma 801 - Questionário 1 - Questão 4

Respostas	**Porcentagem**
Números Inteiros	70,00%
Números Naturais	26,67%
Possuem a mesma cardinalidade	3,33%

Fonte: O autor, 2016.

Analisando agora as respostas dadas para a questão 1 do Questionário 2 (Para você qual destes conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números naturais ($\{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$) ou o conjunto dos números naturais que são potências de 10 ($\{1,10,100,1000,10000,\ldots\}$)?) verifica-se que 80% (Tabela 4) dos alunos responderam que os dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade.

Os dados verificados sugerem que os alunos, em sua maioria conseguiram compreender que é possível um conjunto infinito e um de seus subconjuntos infinitos possuírem a mesma cardinalidade.

Comparando as respostas dadas para as questões 3 do Questionário 1 (Se retirarmos todos os números naturais ímpares do conjunto dos números naturais, ele ainda

Tabela 4 - Turma 801 - Questionário 2 - Questão 1

Respostas	**Porcentagem**
Números Naturais	16,67%
Potências de 10	0,00%
Possuem a mesma cardinalidade	80,00%
Outras respostas	3,33%

Fonte: O autor, 2016.

será infinito?) e 2 do Questionário 2 (Se retirarmos todos os números naturais pares do conjunto dos números naturais, ele ainda será infinito?), observa-se que na questão 3 do Questionário 1, $83,33\%$ dos alunos responderam “sim”, entendendo que o conjunto formado pelos elementos restantes ainda será infinito e $96,67\%$ dos alunos responderam “sim” na questão 2 do Questionário 2, enfatizando o que foi observado no Questionário 1.

Na aplicação da atividade 2, os alunos foram divididos em grupos para que pudessem utilizar os computadores, num total de 5 notebooks. Após aprenderem alguns comandos básicos do GeoGebra e como utilizar as ferramentas “ponto” e “ponto médio ou centro”, foi solicitado ao aluno responsável de cada grupo que marcasse dois pontos quaisquer no eixo x e depois o ponto médio entre eles. Algumas dificuldades para a utilização das ferramentas foram verificadas, mas nada que atrapalhasse a aplicação da atividade. Depois foi solicitado que eles marcassem outro ponto médio, desta vez entre o primeiro ponto e ponto médio marcado anteriormente e ainda que continuassem o processo, aproximando a tela sempre que fosse necessário. Finalmente os alunos foram questionados se caso tivessem um software tão potente que sempre fosse possível aproximar mais, se em algum momento não conseguiriam marcar o ponto médio entre os dois pontos e depois sobre qual conclusão chegaram de quantos números reais existem entre dois outros números reais. A maioria da turma concluiu que entre dois números reais existem infinitos números reais. Este resultado pôde ser verificado ao comparar as respostas das questões 5 e 6 do Questionário 1 com as respostas das questões 3 e 4 do Questionário 2.

Na questão 5 do Questionário 1 (Quantos números reais existem entre $0,1$ e $0,9$? Justifique.) apenas uma das respostas, o que representa aproximadamente $3,33\%$ das respostas observadas (Tabela 5) indicou a existência de infinitos números reais entre $0,1$ e $0,9$ (figura 21).

Analisando as respostas da questão 3 do Questionário 2 (Quantos números reais existem entre $1,5$ e $1,7$? Justifique.) é possível observar que $63,33\%$ das respostas (Tabela 6) indicaram a existência de infinitos números reais entre $1,5$ e $1,7$, que representa um aumento de 60 pontos percentuais em relação ao observado na questão 5 do Questionário 1.

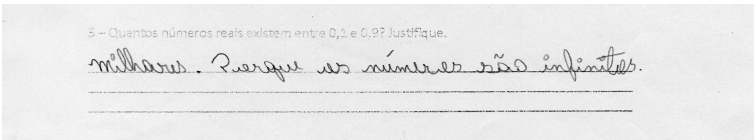
Na questão 6 do Questionário 1: Existe algum número real entre $1,5$ e $1,6$? Jus-

Tabela 5 - Turma 801 - Questionário 1 - Questão 5

Respostas	**Porcentagem**
Infinitos	3,33%
9 números	6,67%
7 números	23,33%
4 números	10,00%
3 números	20,00%
Não souberam responder	6,67%
Outras respostas	30,00%

Fonte: O autor, 2016.

Figura 21 - Resposta dada à questão 5 do Questionário 1 - turma 801



Fonte: Questionário aplicado na turma 801, 2015.

tifique. $43,33\%$ dos alunos responderam "não" e $46,67\%$ responderam "sim" (Tabela 7), mas em nenhum dos casos analisados foi indicado algo que sugerisse uma quantidade infinita.

Verificando as respostas para a questão 4 do Questionário 2 (Existe algum número real entre 3 e $3,1$? Justifique) observa-se que aproximadamente $33,33\%$ foram "sim", sem justificativa (Tabela 8), aproximadamente $23,33\%$ foram "sim", com a justificativa que entre 3 e $3,1$ exitem infinitos números reais e aproximadamente $36,67\%$ das respostas foram "não".

Ao comparar as respostas dadas à questão 6 do Questionário 1 e à questão 4 do Questionário 2 é possível observar uma diminuição de respostas "não" e "não souberam responder", e um aumento de respostas "sim" ou "sim, infinitos", com destaque para as respostas "sim, infinitos", que não apareceram na questão 6 do Questionário 1.

A análise das respostas para as questões 5 e 6 do Questionário 1 e para as questões 3 e 4 do Questionário 2 sugerem que a aplicação da atividade na turma 801 foi bem sucedida, reforçando o que ja havia sido observado durante a aula.

Enfim, a análise das respostas dadas pelos alunos durante a aplicação das atividades e os dados obtidos dos questionários sugerem que os objetivos das atividades 1 e 2 foram atingidos na turma 801. Em sua maioria os alunos compreendem que no caso de conjuntos infinitos, um conjunto e seu subconjunto podem ter a mesma cardinalidade, e ainda que entre dois números reais quaisquer existem infinitos números reais.

Tabela 6 - Turma 801 - Questionário 2 - Questão 3

Respostas	**Porcentagem**
Infinitos	63,33%
3 números	6,67%
1 números	6,67%
Não souberam responder	3,33%
Outras respostas	20,00%

Fonte: O autor, 2016.

Tabela 7 - Turma 801 - Questionário 1 - Questão 6

Respostas	**Porcentagem**
Sim	46,67%
Sim, infinitos	0,00%
Não	43,33%
Não souberam responder	10,00%

Fonte: O autor, 2016.

3.2.1.2 Turma 802

A turma 802 se caracteriza por ser calma e de certa forma até um pouco apática. A turma é pequena e os alunos são bastante faltosos. Uma parcela considerável dos alunos apresenta dificuldades em conteúdos de anos anteriores, o que acaba prejudicando-os na compreensão de alguns conceitos e na resolução de situações problema. No dia da aplicação das atividades estavam presentes apenas 8 alunos, o que é comum nesta turma. Antes do início das atividades, os alunos responderam ao Questionário 1. Assim como na turma 801, a aula transcorreu de forma tranquila e a aplicação das atividades ocorreu satisfatoriamente. As atividades seguiram os roteiros apresentados nas Seções 3.1.1 e 3.1.2. Ao término os alunos responderam ao Questionário 2.

Ao analisar a primeira pergunta do Questionário 1, onde os alunos responderam sobre o que é infinito e ainda foi solicitado que dessem alguns exemplos, verificou-se que $87,5\%$ (Tabela 9) dos alunos descreveram o infinito como algo que não tem fim ou que nunca acaba e apenas $37,5\%$ dos alunos mencionaram os números como exemplo de algo infinito.

Na primeira parte da atividade 1, quando os alunos são questionados sobre qual dos dois conjuntos possui mais elementos, o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares, assim como observado na turma 801, a maioria dos alunos da turma 802 respondeu que era o conjunto do números naturais. Comparando as respostas obtidas durante a atividade, com o que foi respondido na questão 2 do Questionário 1: para você, qual destes dois conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números naturais ($\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$) ou o conjunto dos números naturais ímpares ($\{1, 3, 5, 7,$

Tabela 8 - Turma 801 - Questionário 2 - Questão 4

Respostas	**Porcentagem**
Sim	33,33%
Sim, infinitos	23,33%
Não	36,67%
Não souberam responder	6,67%

Fonte: O autor, 2016.

Tabela 9 - Turma 802 - Questionário 1 - Questão 1

Respostas	**Porcentagem**
Algo que nunca acaba	87,50%
Números	37,50%

Fonte: O autor, 2016.

$9, \ldots\})$?, observa-se que há coerência, pois no questionário 75% (Tabela 10) dos alunos optaram pelo conjunto dos números naturais, enquanto $12,5\%$ optaram pelo conjunto dos números naturais ímpares. Além disso, $12,5\%$ responderam que os dois conjuntos são infinitos. Neste caso também verifica-se que os alunos têm a tendência de "transportar" o que já sabem sobre subconjuntos de conjuntos finitos para subconjuntos infinitos de conjuntos infinitos, interpretando, como na turma 801, que o subconjunto deve sempre possuir menos elementos do que o conjunto no qual ele está contido.

Tabela 10 - Turma 802 - Questionário 1 - Questão 2

Respostas	**Porcentagem**
Números Naturais	74,00%
Números Naturais Ímpares	12,50%
Nenhum, ambos são infinitos	12,50%

Fonte: O autor, 2016.

Continuando com a aplicação da atividade 1, os alunos foram divididos em grupos de até quatro integrantes para debaterem sobre o segundo questionamento: qual conjunto tem mais elementos, o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros?

É possível estabelecer uma correspondência um a um entre os elementos dos dois conjuntos por meio de alguma regra? Como no dia só haviam oito alunos na turma, eles foram divididos em dois grupos com quatro integrantes cada. Apenas um dos grupos respondeu que os dois conjuntos citados têm a mesma cardinalidade. Porém o grupo não conseguiu esboçar uma regra que relacionasse os elementos dos dois conjuntos. O outro grupo optou pelo conjunto dos números inteiros como sendo o de maior cardinalidade.

Os resultados observados durante a aplicação da segunda parte da atividade 1 podem ser confrontados com os dados obtidos ao comparar as respostas observadas na questão 4 do Questionário 1 e na questão 1 do Questionário 2.

Ao analisar as resposta para a questão 4 do Questionário 1 (Para você qual destes conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$) ou o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$)?) verifica-se que antes de iniciar a aplicação das atividades, 75% dos alunos responderam que o conjunto dos números inteiros possui mais elementos (Tabela 11), 25% responderam que o conjunto dos números naturais possui mais elementos e ninguém respondeu que os dois conjuntos possuem a mesma "quantidade" de elementos.

Tabela 11 - Turma 802 - Questionário 1 - Questão 4

Respostas	**Porcentagem**
Números Inteiros	75,00%
Números Naturais	25,00%
Possuem a mesma cardinalidade	0,00%

Fonte: O autor, 2016.

Analisando as respostas dadas à questão 1 do Questionário 2: para você qual destes conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números naturais ($\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$) ou o conjunto dos números naturais que são potências de 10 ($\{1, 10, 100, 1000, 10000, \ldots\}$)? verifica-se, de forma surpreendente, que 75% dos alunos responderam que o conjunto dos números naturais possui mais elementos (Tabela 12), $12,5\%$ optaram pelo conjunto dos números naturais que são potências de 10 como tendo mais elementos e apenas $12,5\%$ responderam que os dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade.

Tabela 12 - Turma 802 - Questionário 2 - Questão 1

Respostas	**Porcentagem**
Números Naturais	75,00%
Potências de 10	12,50%
Possuem a mesma quantidade de elementos	12,50%

Fonte: O autor, 2016.

Este resultado destoa totalmente do que foi verificado durante a aplicação desta atividade, onde um dos grupos chegou a conclusão de que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros têm a mesma cardinalidade. É possível concluir que a aplicação da atividade 1, na turma 802 não atingiu seu objetivo, pelo menos em parte, visto que pode ter havido alguma dificuldade de interpretação da questão 2 do Questionário 1 por parte de alguns alunos ou, como durante a aplicação um dos grupos verificou que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros têm a mesma cardinalidade, é possível que seus integrantes tenham concordado com algum dos membros sem estarem convictos disto.

Analisando as respostas dadas às questões 3 do Questionário 1 (Se retirarmos todos os números naturais ímpares do conjunto dos números naturais, ele ainda será infinito?)

e 2 do Questionário 2 (Se retirarmos todos os números naturais pares do conjunto dos números naturais, ele ainda será infinito?), observa-se que na questão 3 do Questionário 1 50% dos alunos responderam “sim”, entendendo que o conjunto formado pelos elementos restantes ainda será infinito e 50% responderam “não” entendendo que o conjunto formado pelos elementos restantes não será infinito. Já na questão 2 do Questionário 2, 100% dos alunos responderam “sim”, mostrando que após a atividade todos compreenderam que o conjunto restante continua a ser infinito.

Ao iniciarem a atividade 2, os alunos foram divididos em duplas para que pudessem utilizar os computadores, num total de 4 notebooks. Foram ensinados alguns comandos básicos do GeoGebra e como utilizar as ferramentas “ponto” e “ponto médio ou centro”. O aluno responsável de cada dupla marcou dois pontos quaisquer no eixo x e depois o ponto médio entre eles. Em seguida foi pedido que eles marcassem outro ponto médio, desta vez entre o primeiro ponto e ponto médio marcado anteriormente e ainda que continuassem o processo, aproximando a tela sempre que fosse necessário, tal como ocorreu na turma 801. Finalmente os alunos foram questionados se caso tivessem um software tão potente que sempre fosse possível aproximar mais, se em algum momento não conseguiriam marcar o ponto médio entre os dois pontos e depois sobre qual conclusão chegaram de quantos números reais existem entre dois outros números reais. Todas as duplas concluíram que entre dois números reais existem infinitos números reais. Ao comparar as respostas das questões 5 e 6 do Questionário 1 com as respostas das questões 3 e 4 do Questionário 2 é possível confrontar o resultado obtido durante a atividade.

Na questão 5 do Questionário 1 (Quantos números reais existem entre $0,1$ e $0,9$? Justifique.) nenhuma das respostas observadas continham qualquer referência a existência de infinitos números reais entre $0,1$ e $0,9$. As respostas, por sinal, foram todas diferentes. As oito respostas foram: “não”, “não sei”, “dois”, “seis”, “sete”, “oito”, “$0,8$” e “$0,9$”[1].

Ao analisar as respostas da questão 3 do Questionário 2 (Quantos números reais existem entre $1,5$ e $1,7$? Justifique.) é possível observar que 50% das respostas (Tabela 13) indicaram a existência de infinitos números reais entre $1,5$ e $1,7$. Este resultado revela um aumento considerável, em comparação com as respostas observadas na questão 5 do Questionário 1. Porém este resultado evidencia também que 50% dos alunos da turma 802 ainda apresentam dificuldade na compreensão de que entre dois números reais existem infinitos números reais, diferente do que foi verificado durante a atividade, onde todos responderam que entre dois números reais existem infinitos números reais.

Na questão 6 do Questionário 1 (Existe algum número real entre $1,5$ e $1,6$? Justifique.) 25% dos alunos responderam “não” e $62,5\%$ responderam “sim” (Tabela 14), mas

[1] Por serem poucos questionários e todos com respostas diferentes, não foi necessário organizá-las em uma tabela. Cada resposta corresponde a $12,50\%$ do total.

Tabela 13 - Turma 802 - Questionário 2 - Questão 3

Respostas	**Porcentagem**
Infinitos	50,00%
4 números	12,50%
2 números	12,50%
Número 1,6	25,00%

Fonte: O autor, 2016.

em nenhuma das repostas foi mencionado algo em relação a uma quantidade infinita.

Tabela 14 - Turma 802 - Questionário 1 - Questão 6

Respostas	**Porcentagem**
Sim	62,50%
Não	25,00%
Não souberam responder	12,50%

Fonte: O autor, 2016.

Ao verificar as respostas dadas à questão 4 do Questionário 2: existe algum número real entre 3 e $3,1$? Justifique, observa-se que 50% dos alunos responderam apenas “sim”, sem indicar a existência de infinitos números (Tabela 15), $12,5\%$ responderam “sim”, justificando que entre 3 e $3,1$ exitem infinitos números reais e 25% responderam “não”.

Tabela 15 - Turma 802 - Questionário 2 - Questão 4

Respostas	**Porcentagem**
Sim (apenas)	50,00%
Sim, infinitos	12,50%
Não	25,00%
Não souberam responder	12,50%

Fonte: O autor, 2016.

Comparando as respostas dadas à questão 6 do Questionário 1 e à questão 4 do Questionário 2 observa-se que não houve alteração no percentual de respostas ”não”. Em relação às respostas ”sim, infinitos”nota-se que apareceram em $12,5\%$ dos casos, o que não foi verificado na questão 6 do Questionário 1. Este resultado indica uma manutenção do que foi verificado antes da aplicação da atividade, sugerindo que o seu objetivo não foi alcançado.

A análise das respostas para as questões 5 e 6 do Questionário 1 e para as questões 3 e 4 do Questionário 2 sugerem que a aplicação da atividade na turma 802 não foi bem sucedida, mostrando um retrato diferente do observado durante sua aplicação.

Finalmente, a análise das respostas dadas pelos alunos durante a aplicação das atividades e os dados obtidos dos questionários sugerem que os objetivos das atividades 1 e 2 não foram plenamente atingidos na turma 802. Não é possível afirmar que a maioria dos alunos compreende que no caso de conjuntos infinitos, um conjunto e seu subconjunto podem ter a mesma cardinalidade, e ainda que entre dois números reais quaisquer existem infinitos números reais.

3.2.2 Aplicação das atividades - E. M. Jenny Gomes

A Escola Municipal Jenny Gomes está situada no bairro do Rio Comprido, na cidade do Rio de Janeiro. A escola atualmente atende alunos do primeiro e do segundo segmentos do ensino fundamental. Em 2013 o IDEB da escola Jenny Gomes para o 9º ano do ensino fundamental foi 4,0.

As atividades foram aplicadas em duas turmas do 8º ano do ensino fundamental, as turmas 1801 e 1802. As duas turmas são do ensino regular e a aplicação das atividades se deu em uma mesma aula. Assim como ocorreu nas turmas analisadas anteriormente, antes do início da aula os alunos responderam um questionário com perguntas relacionadas ao infinito matemático (Anexo 1) e ao final da aula responderam a outro questionário com mais perguntas relacionadas ao infinito matemático (Anexo 2). Não foi solicitado aos alunos que colocassem o nome ou qualquer outro tipo de identificação nos questionários, com o intuito de que não se sentissem constrangidos em respondê-los.

3.2.2.1 Turma 1801

A turma 1801 se carateriza por ser bastante agitada. Os alunos geralmente são dispersos e se interessam por brincadeiras e conversas paralelas durante as aulas. No decorrer da aplicação das atividades a turma se mostrou inquieta, sendo necessário que o professor chamasse os alunos a prestar atenção e a retomar o raciocínio. No dia da aplicação das atividades estavam presentes na turma 29 alunos.

Ao analisar a primeira pergunta do Questionário 1, onde os alunos responderam sobre o que é infinito e ainda foi pedido que dessem alguns exemplos, verificou-se que aproximadamente $68,97\%$ dos alunos citaram os números como exemplo de algo infinito (Tabela 16). Além disso, aproximadamente $13,79\%$ dos alunos mencionaram o espaço ou o Universo como exemplo de algo infinito.

No decorrer da primeira parte da atividade 1, quando os alunos são questionados sobre qual dos dois conjuntos possui mais elementos, o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares, a maioria da turma decidiu pelo conjunto do números naturais. Analisando as respostas dadas à questão 2 do Questionário 1 (Para você, qual destes dois conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números naturais

Tabela 16 - Turma 1801 - Questionário 1 - Questão 1

Respostas	**Porcentagem**
Números	68,97%
Universo ou espaço	13,79%

Fonte: O autor, 2016.

($\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$) ou o conjunto dos números naturais ímpares ($\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$)?) observa-se que aproximadamente $65,52\%$ dos alunos optaram pelo conjunto dos números naturais (Tabela 17), aproximadamente $20,69\%$ pelo conjunto dos números naturais ímpares e aproximadamente $10,34\%$ responderam que os dois conjuntos têm a mesma "quantidade"de elementos. Estes dados reforçam uma tendência já observada de achar que sempre um subconjunto possui menos elementos do que o conjunto no qual está contido, transferindo um propriedade dos conjuntos finitos para os conjuntos infinitos.

Tabela 17 - Turma 1801 - Questionário 1 - Questão 2

Respostas	**Porcentagem**
Números Naturais	65,52%
Números Naturais Ímpares	20,69%
Possuem a mesma cardinalidade	10,34%
Outras respostas	3,45%

Fonte: O autor, 2016.

Na segunda parte da atividade 1, os alunos foram divididos em grupos de até 4 integrantes para debaterem sobre o seguinte questionamento: qual conjunto tem mais elementos, o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros? É possível estabelecer uma correspondência um a um entre os elementos dos dois conjuntos por meio de alguma regra? A maioria dos grupos, 75%, respondeu que os dois conjuntos citados têm a mesma cardinalidade, porém, assim como observados em outras turmas analisadas até então, nesta turma nenhum dos grupos conseguiu esboçar uma regra que relacionasse os elementos dos dois conjuntos. O que é perfeitamente aceitável já que a turma analisada é do 8º ano do ensino fundamental.

Os resultados observados durante a aplicação da segunda parte da atividade 1 podem ser confrontados com os dados obtidos ao comparar as respostas observadas na questão 4 do Questionário 1 e na questão 1 do Questionário 2.

Examinando as resposta da questão 4 do Questionário 1 (Para você qual destes conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$) ou o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$)?) observa-se que, antes de iniciar a aplicação das atividades, aproximadamente $58,62\%$ dos alunos responderam que o conjunto dos números inteiros possui mais elementos (Tabela 18), aproximadamente $24,14\%$ responderam que o conjunto dos números naturais possui mais elementos e $13,79\%$ responderam que os dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade.

Tabela 18 - Turma 1801 - Questionário 1 - Questão 4

Respostas	**Porcentagem**
Números Inteiros	58,62%
Números Naturais	24,14%
Possuem a mesma cardinalidade	13,79%
Não souberam responder	3,45%

Fonte: O autor, 2016.

Ao analisar as respostas dadas à questão 1 do Questionário 2 (Para você qual destes conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números naturais ($\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$) ou o conjunto dos números naturais que são potências de 10 ($\{1, 10, 100, 1000, 10000, \ldots\}$)?) foi possível verificar que aproximadamente $55,17\%$ dos alunos (Tabela 19) responderam que os dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade. Isto representa um aumento de mais de 40 pontos percentuais em comparação com o verificado antes da aplicação da atividade.

Tabela 19 - Turma 1801 - Questionário 2 - Questão 1

Respostas	**Porcentagem**
Números Naturais	31,03%
Potências de 10	10,34%
Possuem a mesma cardinalidade	55,17%
Não souberam responder	3,45%

Fonte: O autor, 2016.

É possível concluir com os dados obtidos ao se comparar as respostas dos dois questionários e com o que foi apontado durante a aplicação da atividade que os alunos, em sua maioria, conseguiram compreender que um conjunto infinito e um de seus subconjuntos infinitos podem possuir a mesma cardinalidade.

Ao comparar as respostas dadas às questões 3 do Questionário 1 (Se retirarmos todos os números naturais ímpares do conjunto dos números naturais, ele ainda será infinito?) e 2 do Questionário 2 (Se retirarmos todos os números naturais pares do conjunto dos números naturais, ele ainda será infinito?), observa-se que na questão 3 do Questionário 1 aproximadamente $75,86\%$ dos alunos responderam “sim”, entendendo que o conjunto formado pelos elementos restantes ainda será infinito e aproximadamente $79,31\%$ dos alunos responderam “sim” na questão 2 do Questionário 2, reforçando a conclusão descrita no parágrafo anterior.

Ao começarem a atividade 2, os alunos foram divididos em grupos para que pudessem utilizar os computadores, num total de 5 *notebooks*. Foram ensinados alguns comandos básicos do GeoGebra e como utilizar as ferramentas “ponto” e “ponto médio ou centro". Em seguida, foi solicitado ao aluno responsável de cada grupo que marcasse dois pontos quaisquer no eixo x e depois o ponto médio entre eles. Nesse momento a turma ficou um pouco mais agitada e algumas dificuldades para a utilização das ferramentas surgiram, mas prontamente foram sanadas e a aplicação da atividade transcorreu sem maiores problemas. Em seguida, foi pedido que eles marcassem outro ponto médio, desta vez entre o primeiro ponto e ponto médio marcado anteriormente e ainda que continuassem o processo, aproximando a tela sempre que fosse necessário. Após repetirem este processo algumas vezes, os alunos foram questionados se caso tivessem um *software* tão potente que sempre fosse possível aproximar mais, se em algum momento não conseguiriam marcar o ponto médio entre os dois pontos e depois sobre qual conclusão chegaram de quantos números reais existem entre dois outros números reais. Assim como observados em outras turmas, a maioria dos alunos da turma 1801 concluiu que entre dois números reais existem infinitos números reais. É possível verificar este resultado ao comparar as respostas dadas às questões 5 e 6 do Questionário 1 e 3 e 4 do Questionário 2.

Na questão 5 do Questionário 1 (Quantos números reais existem entre $0,1$ e $0,9$? Justifique.) nenhuma resposta indicou a existência de infinitos números reais entre $0,1$ e $0,9$ (Tabela 20).

Tabela 20 - Turma 1801 - Questionário 1 - Questão 5

Respostas	**Porcentagem**
Infinitos	0,00%
9 números	17,24%
7 números	24,14%
3 números	6,90%
2 números	13,79%
Nenhum	6,90%
Não souberam responder	6,90%
Outras respostas	24,14%

Fonte: O autor, 2016.

Examinando as respostas da questão 3 do Questionário 2 (Quantos números reais existem entre $1,5$ e $1,7$? Justifique.) observou-se que aproximadamente $58,62\%$ das respostas (Tabela 21) indicaram a existência de infinitos números reais entre $1,5$ e $1,7$, o que representa um aumento de mais de 58 pontos percentuais em relação ao verificado na questão 5 do Questionário 1.

Já na questão 6 do Questionário 1 (Existe algum número real entre $1,5$ e $1,6$? Justifique.) aproximadamente $20,69\%$ dos alunos responderam "não" e aproximadamente $62,07\%$ responderam "sim" (Tabela 22), mas nenhum deles mencionou algo em relação a uma quantidade infinita.

Verificando as respostas para a questão 4 do Questionário 2 (Existe algum número real entre 3 e $3,1$? Justifique) observa-se que aproximadamente $44,83\%$ responderam

Tabela 21 - Turma 1801 - Questionário 2 - Questão 3

Respostas	**Porcentagem**
Infinitos	58,62%
2 números	10,34%
1 números	10,34%
Não souberam responder	13,79%
Outras respostas	6,90%

Fonte: O autor, 2016.

Tabela 22 - Turma 1801 - Questionário 1 - Questão 6

Respostas	**Porcentagem**
Sim	62,07%
Sim, infinitos	0,00%
Não	20,69%
Não souberam responder	17,24%

Fonte: O autor, 2016.

"sim" e aproximadamente $24,14\%$ responderam "sim, infinitos", dando a entender em sua justificativa que se tratam de infinitos números reais (Tabela 23). Já as respostas "não" totalizaram aproximadamente $17,24\%$.

Tabela 23 - Turma 1801 - Questionário 2 - Questão 4

Respostas	**Porcentagem**
Sim	44,83%
Sim, infinitos	24,14%
Não	17,24%
Não souberam responder	13,79%

Fonte: O autor, 2016.

Ao comparar as respostas dadas para a questão 6 do Questionário 1 e para a questão 4 do Questionário 2 é possível observar uma diminuição de respostas "não" e "não souberam responder", e um aumento de respostas "sim", com destaque para as respostas "sim, infinitos", que não apareceram na questão 6 do Questionário 1.

A análise das respostas das questões 5 e 6 do Questionário 1 e das questões 3 e 4 do Questionário 2 sugerem que a aplicação da atividade 2 na turma 1801 foi bem sucedida, apesar da agitação dos alunos em determinados momentos. Esses dados reforçam o que foi observado durante a aplicação da atividade, onde a maioria da turma chegou a conclusão que entre dois números reais existem infinitos números reais.

Enfim, após a análise das respostas dos alunos durante a aplicação das atividades e dos dados obtidos com os questionários é possível concluir que os objetivos das atividades 1 e 2 foram atingidos na turma 1801. Em sua maioria os alunos conseguiram compreender que, no caso de conjuntos infinitos, um conjunto e seu subconjunto podem ter a mesma cardinalidade, e ainda que entre dois números reais quaisquer existem infinitos números reais.

3.2.2.2 Turma 1802

A turma 1802 não se carateriza pela agitação. Ao contrário da turma 1801, os alunos da 1802 são um pouco mais tranquilos, porém algumas vezes se mostram desinteressados e pouco participativos. No decorrer da aplicação das atividades a turma se apresentou calma na maior parte do tempo. No dia da aplicação das atividades estavam presentes 24 alunos.

A análise da primeira pergunta do Questionário 1, onde os alunos responderam sobre o que é infinito e ainda foi pedido que dessem alguns exemplos, revelou que aproximadamente $66,67\%$ dos alunos citaram os números como exemplo de algo infinito (Tabela 24) e aproximadamente $16,67\%$ não citaram exemplos, dizendo apenas que infinito é algo que não tem fim.

Tabela 24 - Turma 1802 - Questionário 1 - Questão 1

Respostas	**Porcentagem**
Números	66,67%
Algo sem fim (sem exemplos)	16,67%
Outros	16,67%

Fonte: O autor, 2016.

Durante a aplicação da primeira parte da atividade 1, quando os alunos são questionados sobre qual dos dois conjuntos possui mais elementos, o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais pares, a maioria da turma decidiu pelo conjunto do números naturais, como observado nas outras turmas analisadas. Ao investigar as respostas dadas à questão 2 do Questionário 1 (Para você, qual destes dois conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números naturais ($\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots\}$) ou o conjunto dos números naturais ímpares ($\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \dots\}$)?) é possível verificar que 75% dos alunos optaram pelo conjunto dos números naturais (Tabela 25), aproximadamente $20,83\%$ pelo conjunto dos números naturais ímpares, porém ninguém respondeu indicando que os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade. Mais uma vez é observado que os alunos inicialmente concluem que por se tratar de um subconjunto, existem menos números naturais ímpares do que números naturais. O que é algo esperado por se tratar de uma turma do 8º ano do ensino fundamental.

No começo da segunda parte da atividade 1, os alunos foram divididos em grupos de até 4 integrantes para debaterem sobre o seguinte questionamento: qual conjunto tem

Tabela 25 - Turma 1802 - Questionário 1 - Questão 2

Respostas	**Porcentagem**
Números Naturais	75,00%
Números Naturais Ímpares	20,83%
Possuem a mesma cardinalidade	0,00%
Outras respostas	4,17%

Fonte: O autor, 2016.

mais elementos, o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros? É possível estabelecer uma correspondência um a um entre os elementos dos dois conjuntos por meio de alguma regra? A maior parte dos grupos, aproximadamente $66,67\%$, respondeu que os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, mas nenhum grupo conseguiu esboçar uma regra que relacionasse os elementos dos dois conjuntos, o que já havia sido verificado nas demais turmas analisadas. Como a turma analisada é do 8º ano do ensino fundamental, esta dificuldade já era esperada.

Os resultados obtidos durante a aplicação da segunda parte da atividade 1 podem ser confrontados com os dados apurados ao se comparar as respostas das questões 4 do Questionário 1 e 1 do Questionário 2.

Investigando as respostas dadas à questão 4 do Questionário 1 (Para você qual destes conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$ =$\{...-4,-3,-2,-1, 0,1,2,3,4,\ldots\}$) ou o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$ =$\{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$)?) é possível constatar que antes do início da aplicação das atividades, aproximadamente $70,83\%$ dos alunos consideravam que o conjunto dos números inteiros possuía mais elementos que o conjunto dos números naturais (Tabela 26), escolhido por aproximadamente $29,17\%$ dos alunos. Nessa turma nenhuma resposta sugeriu a possibilidade dos dois conjuntos possuírem a mesma cardinalidade.

Tabela 26 - Turma 1802 - Questionário 1 - Questão 4

Respostas	**Porcentagem**
Números Inteiros	70,83%
Números Naturais	29,17%
Possuem a mesma cardinalidade	0,00%

Fonte: O autor, 2016.

Analisando as respostas dadas à questão 1 do Questionário 2 (Para você qual destes conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números naturais ($\{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$) ou o conjunto dos números naturais que são potências de 10 ($\{1,10,100,1000,10000,\ldots\}$)?) observa-se que aproximadamente $45,83\%$ (Tabela 27) dos alunos responderam que os dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade. Isso representa um aumento de mais de 45 pontos percentuais em comparação com o verificado antes da aplicação da atividade.

Porém, o que chama a atenção é a quantidade de alunos que responderam indicando o conjunto dos números naturais que são potências de 10 como sendo o de maior cardinalidade, $37,5\%$.

Tabela 27 - Turma 1802 - Questionário 2 - Questão 1

Respostas	**Porcentagem**
Números Naturais	16,67%
Potências de 10	37,50%
Possuem a mesma cardinalidade	45,83%

Fonte: O autor, 2016.

É possível concluir com os dados verificados, ao se comparar as respostas dos dois questionários e com o que foi apontado durante a aplicação da atividade, que grande parte dos alunos conseguiu compreender que é possível um conjunto infinito e um de seus subconjuntos infinitos possuírem a mesma cardinalidade. Porém, segundo o que foi apurado nos questionários, a possibilidade de um conjunto infinito e um de seus subconjuntos infinitos possuírem a mesma cardinalidade não foi compreendido pela maioria da turma, ao contrário do que foi observado durante a atividade 1, levando a crer que seus objetivos não foram plenamente atingidos. No caso de muitos alunos optarem pelo conjunto dos números naturais que são potências de 10, pode ter havido confusão na interpretação do conjunto e de seus elementos.

Comparando as respostas das questões 3 do Questionário 1 (Se retirarmos todos os números naturais ímpares do conjunto dos números naturais, ele ainda será infinito?) e 2 do Questionário 2 (Se retirarmos todos os números naturais pares do conjunto dos números naturais, ele ainda será infinito?), pode-se observar que na questão 3 do Questionário 1 aproximadamente $79,17\%$ dos alunos responderam "sim", entendendo que o conjunto formado pelos elementos restantes ainda será infinito e na questão 2 do Questionário 2, aproximadamente $83,33\%$ dos alunos responderam "sim". Esse resultado mostra que os alunos têkm consciência de que mesmo retirando-se uma parte de um conjunto infinito, ele continua a ser infinito.

No início da atividade 2, os alunos foram divididos em grupos para que pudessem utilizar os computadores, num total de 5 *notebooks*. Antes de começarem a utilizar o GeoGebra foram ensinados alguns comandos básicos e como utilizar as ferramentas "ponto" e "ponto médio ou centro". Em seguida, ao aluno responsável de cada grupo foi solicitado que marcasse dois pontos quaisquer no eixo x e depois o ponto médio entre eles. Alguns alunos apresentaram um pouco de dificuldade com o GeoGebra, mas logo esse problema foi sanado. Logo após foi pedido que eles marcassem outro ponto médio, desta vez entre o primeiro ponto e ponto médio marcado anteriormente e ainda que continuassem o processo, aproximando a tela sempre que fosse necessário. Depois de repetirem esse processo algumas vezes, os alunos foram questionados se caso tivessem um *software* tão potente que sempre fosse possível aproximar mais, se em algum momento não conseguiriam marcar o ponto médio entre os dois pontos e depois sobre qual conclusão chegaram de quantos números reais existem entre dois outros números reais. Os alunos da turma 1802, em sua maioria, concluíram que poderiam continuar esse processo indefinidamente e que entre dois números reais existem infinitos números reais. Comparando as respostas das questões 5 e 6 do Questionário 1 e 3 e 4 do Questionário 2, é possível confrontar com o que foi verificado após a aplicação da atividade 2.

Na questão 5 do Questionário 1 (Quantos números reais existem entre $0,1$ e $0,9$? Justifique.) aproximadamente $16,67\%$ indicaram a existência de infinitos números reais entre $0,1$ e $0,9$ (Tabela 28).

Tabela 28 - Turma 1802 - Questionário 1 - Questão 5

Respostas	**Porcentagem**
Infinitos	16,67%
9 números	8,33%
7 números	25,00%
3 números	4,17%
2 números	4,17%
Nenhum	4,17%
Deixou em branco	8,33%
Outras respostas	29,17%

Fonte: O autor, 2016.

Ao examinar as respostas dadas à questão 3 do Questionário 2 (Quantos números reais existem entre $1,5$ e $1,7$? Justifique.) nota-se que aproximadamente $29,17\%$ das respostas (Tabela 29) indicaram a existência de infinitos números reais entre $1,5$ e $1,7$, o que representa um aumento de $12,5$ pontos percentuais em relação ao verificado na questão 5 do Questionário 1.

Tabela 29 - Turma 1802 - Questionário 2 - Questão 3

Respostas	**Porcentagem**
Infinitos	29,17%
3 números	12,50%
2 números	16,67%
1 números	25,00%
Outras respostas	16,67%

Fonte: O autor, 2016.

Ao analisar a questão 6 do Questionário 1 (Existe algum número real entre $1,5$ e $1,6$? Justifique.) foi verificado que aproximadamente $20,83\%$ dos alunos responderam “não” (Tabela 30) e aproximadamente $33,33\%$ responderam “sim”, mas sem indicar uma quantidade infinita. Em apenas $4,17\%$ foi mencionado algo em relação a uma quantidade infinita.

Tabela 30 - Turma 1802 - Questionário 1 - Questão 6

Respostas	**Porcentagem**
Sim	33,33%
Sim, infinitos	4,17%
Não	20,83%
Não souberam responder	4,17%
Outros	37,50%

Fonte: O autor, 2016.

Quando analisadas as respostas para a questão 4 do Questionário 2 (Existe algum número real entre 3 e $3,1$? Justifique) observa-se que 25% responderam “sim”, (Tabela 31) e aproximadamente $16,67\%$ responderam “sim”, dando a entender em sua justificativa que se tratam de infinitos números reais. Já as respostas “não” totalizaram 25%.

Tabela 31 - Turma 1802 - Questionário 2 - Questão 4

Respostas	**Porcentagem**
Sim	25,00%
Sim, infinitos	16,67%
Não	25,00%
Não souberam responder	33,33%

Fonte: O autor, 2016.

Ao comparar as respostas dadas para a questão 6 do Questionário 1 e para a questão 4 do Questionário 2, é possível observar um aumento de respostas “não” e um aumento de respostas “sim” ou “sim, infinitos”, com destaque para as respostas “sim, infinitos” que apareceram em apenas $4,17\%$ das respostas, aproximadamente, na questão 6 do Questionário 1.

A análise das respostas das questões 5 e 6 do Questionário 1 e das questões 3 e 4 do Questionário 2 sugerem que a aplicação da atividade 2 na turma 1802 não atingiu plenamente seu objetivo. Apesar de durante a atividade a maioria dos grupos tere concluído que entre dois números reais existem infinitos números reais, ao analisar as respostas dos questionários o resultado não foi comprovado.

Após a análise das respostas dos alunos durante a aplicação das atividades e dos dados obtidos com os questionários é possível concluir que os objetivos das atividades 1 e 2 não foram plenamente atingidos na turma 1802. A maioria dos alunos não compreende que um conjunto infinito e seu subconjunto infinito podem possuir a mesma cardinalidade e que entre dois números reais existem infinitos números reais.

CONCLUSÃO

Os dez anos do autor no magistério público, como professor de Matemática, lançaram luz sobre um problema recorrente no contexto escolar: as dificuldades dos alunos quanto aos conceitos abstratos. A prática permitiu, também, perceber que as dificuldades não se circunscreviam a esse público; os professores também sentiam a necessidade de suporte para ensinar determinados conteúdos. Dentre eles, destaca-se o conceito de infinito que foi eleito como objeto de pesquisa da dissertação presente.

Na construção do estudo, foi definido pelo autor como objetivo desenvolver dois tipos de materiais, entendidos como ferramentas pedagógicas: uma para o docente e outra para o discente. No que se refere ao docente, o foco concentrou-se no levantamento bibliográfico de matemáticos expoentes no conceito supracitado, o que foi realizado no Capítulo 1 e resultou em um material que pode funcionar como fonte de consulta (fonte que permitirá sanar as principais dúvidas apresentadas pelos professores, citadas na introdução desta pesquisa).

No que diz respeito ao discente, o estudo se propôs a elaborar duas atividades, cujo propósito consistia em facilitar a compreensão do conceito de infinito. Ademais foram desenvolvidos também dois questionários a fim de analisar a compreensão dos discentes, em relação ao infinito matemático, antes e após a aplicação das atividades. Os instrumentos foram elaborados e aplicados em quatro turmas em duas escolas municipais, uma no Rio de Janeiro e outra em Duque de Caxias, buscando verificar sua funcionalidade.

Após a análise dos dados obtidos e a comparação com as respostas fornecidas nos questionários, verificou-se que mais de 50% dos alunos das turmas 801 da escola Roberto Weguelin de Abreu e 1801 da escola Jenny Gomes atingiram os objetivos que consistiam em compreender que um conjunto infinito e algum de seus subconjuntos infinitos podem ter a mesma cardinalidade, e que entre dois números reais existem infinitos números reais.

O mesmo resultado, entretanto, não foi verificado nas turmas, 802 e 1802, das escolas Roberto Weguelin de Abreu e Jenny Gomes respectivamente, na medida em que menos de 50% dos alunos conseguiram alcançar os objetivos propostos.

O confronto do propósito das atividades com os resultados obtidos evidencia que, das quatro turmas, duas conseguiram atingir os objetivos, o que nos permite concluir que há variáveis adicionais que devem ser levadas em consideração quando se aplica a atividade e que, não atingir o objetivo pode servir como um ponto de reflexão, de identificação das deficiências dos alunos e de posterior ação docente. Em suma, as atividades tanto podem funcionar como um instrumento pedagógico para facilitar a compreensão dos alunos no que diz respeito ao conceito de infinito, quanto podem servir como uma ferramenta de diagnóstico para ação docente.

Pesquisas futuras podem trabalhar o conceito de infinito matemático em atividades não tão abstratas. Talvez uma atividade introdutória como o cálculo da área do círculo utilizando a mesma técnica de Arquimedes seja uma opção.

REFERÊNCIAS

ACZEL, Amir D. *O mistério do alef*: a matemática, a cabala e a procura do infinito. 1. ed. São Paulo: Globo, 2003. 218 p.

ALENCAR FILHO, Edgard de. *Teoria Elementar dos Conjuntos*. 19. ed. São Paulo: Nobel, 1980. 328 p.

BIRKHOFF, Garrett; MACLANE, Saunders. *A survey of modern algebra*. 1. ed. New York: The Macmillan Company, 1941. 450 p.

BORGES, Bruno Andrade. *O infinito na matemática*. 2015. 89 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. 496 p.

BRITO, Maria Regina F. de. Tese de livre docência não publicada, *Um estudo sobre as atitudes em relação à matemática em estudantes de 1º e 2º graus*. Campinas: UNICAMP, 1996.

CORREA, Jane; MACLEAN, Morag. Era uma vez... um vilão chamado matemática: um estudo intercultural da dificuldade atribuída à matemática. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, Porto Alegre, v. 12, n. 1, 1999. Disponível em: ⟨http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-79721999000100012&lng=en&nrm=iso&tlng=pt⟩.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. 844 p.

FLOOD, Raymond; WILSON, Robin. *A História dos Grandes Matemáticos*: As descobertas e a propagação do conhecimento através das vidas dos grandes matemáticos. 1. ed. São Paulo: M.Books do Brasil Editora Ltda, 2013. 208 p.

GóMEZ-GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, ANA. AND TOLCHINSKY, LILIANA. *Além da alfabetização*. São Paulo: Ática, 1997.

HRBACEK, Karel; JECK, Thomas. *Introduction to set theory*. 3. ed. New York: Marcel Dekker, 1999. 291 p.

KLAJMAN, Débora de Queiroz Gadelha. *O real por detrás das aparências*. 2007. 90 f. Dissertação (Mestrado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

LEVY, Azriel. *Basic Set Theory*. 1. ed. New York: Dover Publications, Inc, 1979. 391 p.

LEãO, Alessandro Mignac Carneiro. *Noções básicas de infinito e números cardinais*. 2014. 46 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, MARIA APARECIDA VIGGIANI. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP, 1999.

MOHNSAM, Julio Cesar. *As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas*. 2014. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2014.

NASCIMENTO, Guita. *Estudo da evolução da teoria dos números transfinitos de cantor por meio de sua correspondência com Dedekind*. 2009. 241 f. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

NETZ, Reviel; NOEL, Willian. *Códex Arquimedes*. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009. 318 p.

ROONEY, Anne. *A História da Matemática*: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2012. 216 p.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. *Tópicos de História da Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 467 p.

SENA, Christiano Otávio de Rezende. Especialização em Matemática para Professores do Ensino Básico, *Uma história sobre o infinito atual*. Belo Horizonte: [s.n.], 2011. 30 f.

ANEXO A – Questionário 1

QUESTIONÁRIO 1

ESCOLA:____ TURMA:_________

1 – Para você, o que é infinito? Dê alguns exemplos.

____
____
____

2 – Para você, qual destes dois conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números naturais ({0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}) ou o conjunto dos números naturais ímpares ({1, 3, 5, 7, 9, ...})?

____

3 – Se retirarmos todos os números naturais ímpares do conjunto dos números naturais, ele ainda será infinito?

____

4 – Para você, qual destes conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números inteiros (Z = {... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}) ou o conjunto dos números naturais (IN = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...})?

____

5 – Quantos números reais existem entre 0,1 e 0,9? Justifique.

____
____
____

6 – Existe algum número real entre 1,5 e 1,6? Justifique.

____
____
____

ANEXO B – Questionário 2

QUESTIONÁRIO 2

ESCOLA:____ TURMA:_________

1 – Para você, qual destes dois conjuntos têm mais elementos, o conjunto dos números naturais ({0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}) ou o conjunto dos números naturais que são potências de 10 ({1, 10, 100, 1000, 10000, ...})?

____

2 – Se retirarmos todos os números naturais pares do conjunto dos números naturais, ele ainda será infinito?

____

3 – Quantos números reais existem entre 1,5 e 1,7? Justifique.

____
____
____

4 – Existe algum número real entre 3 e 3,1? Justifique.

____
____
____

5 – Existe algum número real que seja antecessor de 2, isto é, que esteja imediatamente antes de 2? Justifique.

____
____
____

6 – Existe algum número real que seja sucessor de 2, isto é, que esteja imediatamente depois de 2? Justifique.

____
____
____